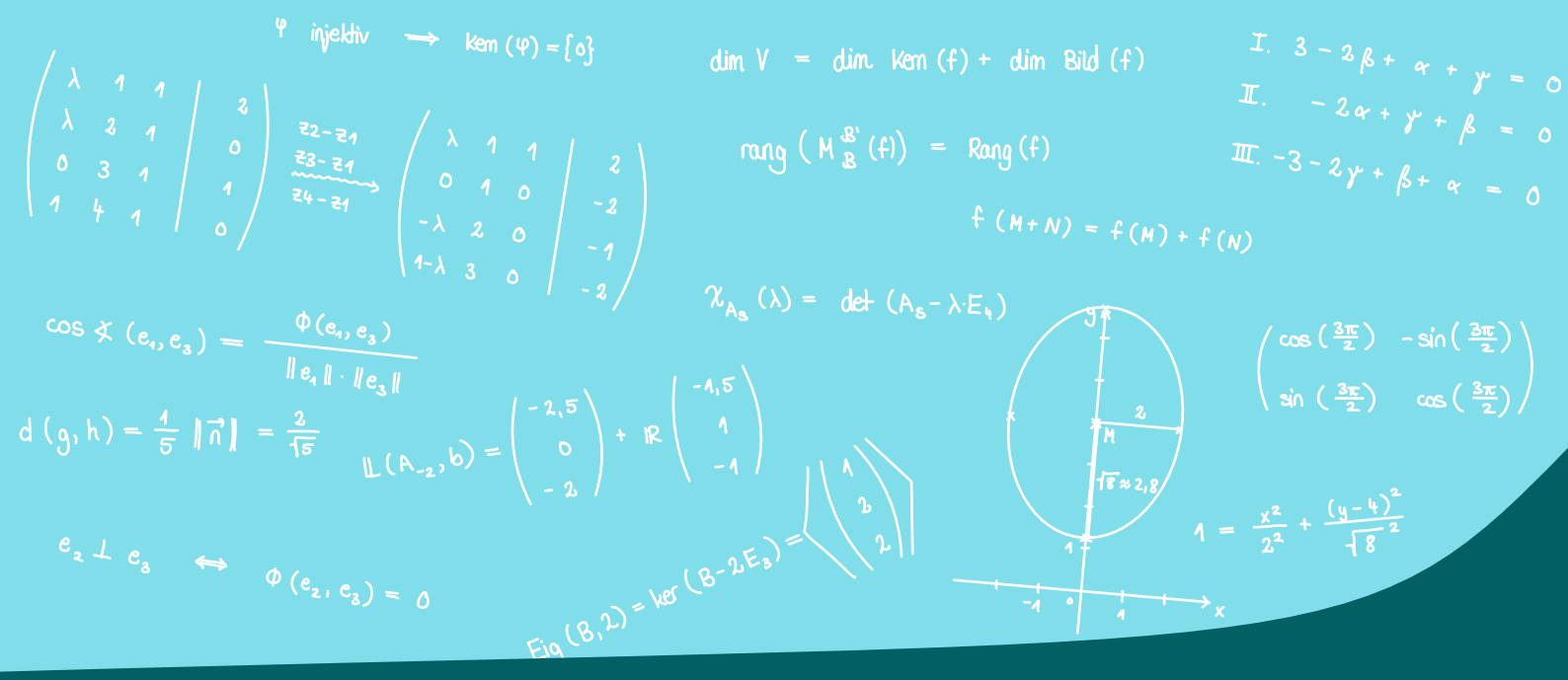


Moritz Zehnder

Examensvorbereitung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Mit Lösungsvorschlägen für Aufgaben von 2018 bis 2024

Unter Mitarbeit von Jasmin Brechelmacher

Moritz Zehnder

Examensvorbereitung Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Mit Lösungsvorschlägen für Aufgaben von 2018 bis 2024

Unter Mitarbeit von Jasmin Brechelmacher

Dr. Moritz Zehnder
Universität Bayreuth
Mathematik und ihre Didaktik
Universitätsstraße 30
95447 Bayreuth

Hinweis

Die in diesem Buch enthaltenen Aufgaben sind wörtlich der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen im Fach Mathematik (Unterrichtsfach) entnommen und betreffen die Einzelprüfung *Lineare Algebra/Geometrie*.

Eine Sammlung von Aufgaben der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen im Fach Mathematik findet sich etwa auf einer Webseite des Lehrstuhls für Mathematik V (Didaktik der Mathematik) der Julius-Maximilians-Universität Würzburg.

Vorwort

Die Erste Staatsprüfung ist vermutlich eine der größten Herausforderungen im Lehramtsstudium. Innerhalb kürzester Zeit sollst Du nachweisen, dass Du über Wissen und Kompetenzen in zahlreichen Bereichen verfügst. Der Themenbereich *Lineare Algebra und Analytische Geometrie* ist dabei einer der Prüfungsteile für das Unterrichtsfach Mathematik, der sowohl Verständnis für grundlegende Konzepte als auch Rechenfertigkeiten verlangt. Dieses Buch, welches im Rahmen eines dreistündigen Vorbereitungskurses im Wintersemester 2024/25 entstanden ist, möchte Dich dabei unterstützen, Dich gezielt und strukturiert auf diesen Teil der Prüfung vorzubereiten.

Das Buch gliedert sich in **zehn Kapitel**, in denen zentrale Inhalte der Ersten Staatsprüfung für das Unterrichtsfach Mathematik – von Matrizen bis zur euklidischen Normalform – kompakt wiederholt und thematisch passende Examensaufgaben exemplarisch gelöst werden. Jedes Kapitel beginnt daher mit einer kurzen **Zusammenfassung wichtiger Inhalte** bestehend aus Definitionen, Sätzen und Schlussfolgerungen, die beim Bearbeiten von Examensaufgaben hilfreich sein können. Im Anschluss daran werden zum Thema passende **Examensaufgaben mit Lösungsvorschlägen** vorgestellt.

Ob das Arbeiten mit einem Buch erfolgreich ist, hängt wesentlich davon ab, wie man es einsetzt. Die folgenden didaktischen Hinweise sind daher ein Vorschlag, wie Du dieses Buch gewinnbringend einsetzen kannst. Es handelt sich dabei aber nur um Anregungen – nutze dieses Buch so, wie es für Dich am sinnvollsten erscheint.

- Die **Zusammenfassungen** zu Beginn jedes Kapitels sind zur Wiederholung gedacht. Mit ihnen kannst Du Dein Wissen auffrischen, aber kaum ein tiefgreifendes Verständnis für die fachlichen Inhalte entwickeln. Solltest Du also das Gefühl haben, noch am Verständnis für bestimmte Themen arbeiten zu müssen, kann es sich lohnen, ein Lehrbuch zu konsultieren, das diese Themen detaillierter darstellt.
- Zu jeder Examensaufgabe bietet Dir das Buch einen **Lösungsvorschlag**. Auch wenn die Versuchung möglicherweise groß ist, probiere dennoch, die Aufgaben zunächst selbst zu lösen. Ein wesentlicher Teil der Vorbereitung auf das Examen zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* ist es, dass Du bestimmte Verfahren und Fertigkeiten beherrschst. Diese übst Du primär, indem Du selbst rechnest und nachdenkst, eventuell Fehler machst und lernst, an welchen Stellen Du besonders vorsichtig sein musst.
- Der Begriff der **Musterlösung** wird in diesem Buch aus verschiedenen Gründen vermieden. Zum einen gibt es häufig verschiedene Wege, um eine Aufgabe zu lösen. Wenn Deine Lösung nicht mit dem Lösungsvorschlag in diesem Buch übereinstimmt, heißt das nicht notwendig, dass sie falsch ist. Daher solltest Du die Lösungen in diesem Buch als Vorschläge verstehen, nicht aber als ein Muster, dem Du folgen musst. Zum anderen ist es möglich, dass der Lösungsvorschlag in der hier dargestellten Form in der Ersten Staatsprüfung nicht die volle Punktzahl erhalten würden. Überlege also immer selbst, wo eventuell noch eine Begründung notwendig sein könnte oder ein Zwischenschritt sinnvoll wäre.
- In vielen Themenbereichen lassen sich **Aufgabentypen** identifizieren, die auf vergleichbare Art gelöst werden können. Halte die Augen nach solchen Aufgabentypen offen und versuche beim Bearbeiten auf Signalwörter in der Aufgabenstellung oder Gemeinsamkeiten in Lösungen zu achten. Sie können Dir in der Ersten Staatsprüfung helfen, ein Thema auszuwählen, das Du gut bearbeiten kannst.

- Dieses Buch umfasst 193 Aufgaben mit Lösungen. Lasse Dich davon nicht erschlagen, sondern sieh den großen Umfang als **Chance**, Dich gut auf die Erste Staatsprüfung vorzubereiten und dabei viele wiederkehrende Aufgabentypen zu entdecken (siehe den Punkt zu Aufgabentypen).
- Auch wenn dieses Buch ausführlich genug ist, um eine selbstständige Vorbereitung auf den Prüfungsteil zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* zu ermöglichen, ist es dennoch empfehlenswert, mit anderen Menschen über Mathematik zu sprechen. In einem solchen Gespräch können neue Erkenntnisse entstehen, Du hast darin aber auch die Möglichkeit, über Deine Lösungen sprechen – insbesondere, wenn sie von den hier vorgestellten abweichen (siehe den Punkt zum Begriff der Musterlösung).
- Um bestmöglich für die Erste Staatsprüfung vorbereitet zu sein, solltest Du mindestens einmal den **Ernstfall proben**. Das heißt, dass Du im Rahmen der Prüfungsdauer von 4 Stunden sowohl eines von drei Themen aus einem der Jahrgänge (bestenfalls einen der letzten) auswählst und alle Aufgaben des Themas bearbeitest. Deine Lösungen kannst Du (siehe obigen Punkt) in einem Gespräch mit anderen abgleichen. Solltest Du alleine lernen, kannst Du etwa die Aufgaben des Herbst-Termins aus dem Jahr 2024 auslassen und diesen Prüfungsteil zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* als Probeexamen nutzen. Die Angaben findest Du leicht über eine Suchmaschine Deiner Wahl.

Zudem noch einige Hinweise zu didaktischen und strukturellen Eigenheiten dieses Buches:

- Im Staatsexamen benötigst Du zum Lösen mancher Aufgaben vielfältiges theoretisches Wissen. Eine Aufgabe und ihr Lösungsvorschlag finden sich erst dann in einem Kapitel, wenn zuvor die gesamte zur Lösung notwendige Theorie wiederholt wurde. Es kann deshalb manchmal auf den ersten Blick so scheinen, als sei eine Aufgabe im falschen Kapitel gelandet. Lasse dich davon nicht irritieren.
- Manchmal gibt es zusätzliche Dinge zu bemerken oder alternative Lösungswege. Diese sind stets in grüner Farbe notiert. Die Wahl einer eher gedeckten Farbe, die sich nicht zu stark vom restlichen Text abhebt, erfolgt dabei bewusst.
- Um das Buch trotz seines Umfangs möglichst übersichtlich zu halten, beginnt jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Wie eingangs erwähnt sind die Inhalte dieses Buches im Rahmen eines dreistündigen Vorbereitungskurses auf die Erste Staatsprüfung im Unterrichtsfach Mathematik entstanden. Mein besonderer Dank gilt allen Studierenden, die durch ihr konstruktives Feedback zur Weiterentwicklung beigetragen haben – sei es durch Hinweise zu den Zusammenfassungen, zur Verständlichkeit der Lösungsvorschläge oder durch das Aufspüren von Fehlern. Jasmin Brechelmacher danke ich für das Setzen der Lösungsvorschläge sowie das Ergänzen der Lösungsvorschläge um wichtige Zwischenschritte bzw. Erklärungen. Ohne ihre tatkräftige Unterstützung wäre dieses Buch wohl nie entstanden.

Trotz mehrfacher Durchsicht können in diesem Buch Fehler enthalten sein. Solltest Du einen Fehler finden, melde ihn gerne an moritz.zehnder@uni-bayreuth.de.

Ich wünsche Dir gutes Gelingen bei der Vorbereitung auf die Erste Staatsprüfung – und besonders viel Erfolg sowie viel Glück für den Prüfungsteil zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* in der Ersten Staatsprüfung!

Bayreuth im September 2025 Moritz Zehnder

Inhaltsverzeichnis

1 Matrizen 1
H24 – T3 – A1 6
F24 – T3 – A1 8
F23 – T2 – A1 9
H22 – T2 – A1 10
H22 – T3 – A1 11
F22 – T2 – A2 12
H20 – T1 – A1 13
F20 – T1 – A3 14
F19 – T1 – A1 15

2 Vektorräume 17
F24 – T1 – A1 24
F24 – T2 – A4 26
F23 – T3 – A2 27
F22 – T1 – A2 29
F22 – T3 – A1 30
H21 – T3 – A1 31
F21 – T2 – A1 32
H20 – T2 – A1 33
F20 – T2 – A3 34
F19 – T3 – A4 35

3 Lineare Abbildungen 37
H24 – T2 – A4 44
H24 – T3 – A2 45
F24 – T1 – A2 47
F24 – T2 – A2 49
F24 – T3 – A3 51
H23 – T2 – A3 52
H23 – T3 – A2 54
F23 – T1 – A2 56
F23 – T2 – A3 57
F21 – T1 – A2 59
F21 – T2 – A3 61
F21 – T3 – A4 62
H20 – T1 – A2 63
H20 – T2 – A2 64
H20 – T2 – A3 66
H20 – T3 – A1 68
F20 – T2 – A2 70
H19 – T3 – A4 71
F19 – T2 – A2 72

F19 – T2 – A4 . . . 73
F19 – T3 – A2 . . . 74
H18 – T1 – A2 . . . 75
H18 – T3 – A2 . . . 77
F18 – T1 – A3 . . . 79
F18 – T1 – A4 . . . 81
F18 – T3 – A1 . . . 83

4 Diagonalisierbarkeit . . . 85
H24 – T1 – A3 . . . 91
H24 – T2 – A3 . . . 92
H24 – T3 – A3 . . . 93
H24 – T3 – A4 . . . 95
F24 – T2 – A1 . . . 96
F24 – T3 – A2 . . . 98
H23 – T1 – A3 . . . 99
H23 – T3 – A3 . . . 100
F23 – T1 – A1 . . . 101
F23 – T2 – A4 . . . 103
F23 – T3 – A3 . . . 104
H22 – T1 – A3 . . . 105
H22 – T2 – A3 . . . 106
F22 – T1 – A1 . . . 108
F22 – T2 – A1 . . . 109
F22 – T3 – A4 . . . 110
H21 – T1 – A3 . . . 112
H21 – T2 – A2 . . . 113
H21 – T3 – A2 . . . 114
F21 – T1 – A1 . . . 116
F21 – T1 – A4 . . . 117
F21 – T2 – A2 . . . 119
H20 – T1 – A3 . . . 120
F20 – T3 – A2 . . . 121
H19 – T1 – A3 . . . 122
H19 – T1 – A5 . . . 124
H19 – T2 – A2 . . . 125
H19 – T2 – A3 . . . 127
H19 – T3 – A1 . . . 128
H19 – T3 – A2 . . . 129
H19 – T3 – A3 . . . 130
F19 – T1 – A3 . . . 132
F19 – T2 – A1 . . . 133
F19 – T3 – A3 . . . 134
H18 – T1 – A1 . . . 135
H18 – T1 – A3 . . . 137
H18 – T3 – A3 . . . 138
F18 – T1 – A1 . . . 139
F18 – T2 – A2 . . . 140

5 Lineare Gleichungssysteme . . . 141
H24 – T1 – A1 . . . 145
H24 – T2 – A1 . . . 146

H23 – T1 – A1 . . . 147
H23 – T2 – A1 . . . 148
H23 – T3 – A1 . . . 149
F23 – T1 – A4 . . . 151
F23 – T3 – A1 . . . 152
H22 – T2 – A2 . . . 153
H22 – T3 – A3 . . . 154
H21 – T1 – A1 . . . 156
H21 – T2 – A1 . . . 157
F20 – T2 – A1 . . . 158
F20 – T3 – A1 . . . 159
H19 – T1 – A1 . . . 160
H19 – T2 – A1 . . . 162
F19 – T3 – A1 . . . 164
H18 – T2 – A4 . . . 165
H18 – T3 – A1 . . . 167

6 **Skalarprodukte** . . . 169
F24 – T1 – A4 . . . 175
F24 – T2 – A3 . . . 176
F23 – T2 – A2 . . . 177
H22 – T1 – A1 . . . 178
F22 – T1 – A3 . . . 180
F22 – T3 – A2 . . . 181
H21 – T1 – A2 . . . 182
H21 – T3 – A4 . . . 183
F21 – T3 – A3 . . . 184
H20 – T3 – A2 . . . 185
H20 – T3 – A4 . . . 186
F20 – T1 – A4 . . . 188
F20 – T3 – A3 . . . 189
F19 – T1 – A4 . . . 191
F19 – T2 – A3 . . . 192
H18 – T1 – A4 . . . 194
H18 – T2 – A2 . . . 195
F18 – T1 – A2 . . . 196

7 **Affine Abbildungen** . . . 199
H24 – T1 – A4 . . . 205
H24 – T2 – A2 . . . 208
F24 – T1 – A5 . . . 210
F24 – T3 – A4 . . . 211
H23 – T2 – A4 . . . 212
F23 – T1 – A3 . . . 214
F23 – T3 – A4 . . . 215
H22 – T1 – A4 . . . 216
H22 – T3 – A2 . . . 218
H22 – T3 – A4 . . . 220
F22 – T1 – A4 . . . 222
F22 – T2 – A4 . . . 224
F22 – T3 – A5 . . . 225
H21 – T1 – A4 . . . 226

H21 – T2 – A3 . . . 227
F21 – T1 – A3 . . . 229
F21 – T3 – A1 . . . 231
F21 – T3 – A2 . . . 233
H20 – T1 – A4 . . . 234
F20 – T1 – A1 . . . 236
F20 – T2 – A4 . . . 237
F20 – T3 – A4 . . . 238
H19 – T1 – A4 . . . 240
H19 – T2 – A4 . . . 242
F19 – T1 – A2 . . . 244
H18 – T2 – A1 . . . 245
H18 – T3 – A4 . . . 247
F18 – T2 – A3 . . . 249
F18 – T2 – A4 . . . 251
F18 – T3 – A3 . . . 252

8 Affine Geometrie . . . 255
H24 – T1 – A2 . . . 259
H23 – T1 – A2 . . . 261
H23 – T1 – A4 . . . 262
H23 – T2 – A2 . . . 263
H22 – T1 – A2 . . . 265
F22 – T2 – A3 . . . 266
F22 – T3 – A3 . . . 267
H21 – T2 – A5 . . . 269
H21 – T3 – A3 . . . 271
F21 – T2 – A4 . . . 272
F20 – T1 – A2 . . . 274
H18 – T2 – A5 . . . 276
F18 – T2 – A1 . . . 278
F18 – T3 – A4 . . . 281

9 Affine Normalform von Quadriken . . . 285
F24 – T2 – A5 . . . 291
H23 – T1 – A5 . . . 293
H23 – T2 – A5 . . . 295
H23 – T3 – A5 . . . 297
F21 – T1 – A5 . . . 299
H20 – T2 – A5 . . . 300
F20 – T3 – A5 . . . 302
H19 – T1 – A2 . . . 303
F19 – T2 – A5 . . . 304
F18 – T2 – A5 . . . 306
F18 – T3 – A5 . . . 307

10 Euklidische Normalform von Quadriken . . . 309
H24 – T2 – A5 . . . 316
F24 – T1 – A3 . . . 318
F24 – T3 – A5 . . . 320
H23 – T3 – A4 . . . 321
F23 – T1 – A5 . . . 323

F23 – T2 – A5 325
F23 – T3 – A5 327
H22 – T1 – A5 328
H22 – T2 – A4 330
H22 – T2 – A5 331
F22 – T1 – A5 333
H21 – T1 – A5 335
H21 – T2 – A4 337
F21 – T3 – A5 339
H20 – T2 – A4 340
H20 – T3 – A3 342
F20 – T1 – A5 344
F18 – T3 – A2 345
Weitere Aufgaben 346

1 Matrizen

Im ersten Kapitel betrachten wir Matrizen. Bei diesen handelt es sich um rechteckige Zahlen-Schemata, in denen Zahlen (in der Regel aus einem Körper) in Zeilen und Spalten organisiert sind. Die Menge der Matrizen mit m Zeilen und n Spalten mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{K}$ wird üblicherweise mit $\mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ oder $\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ bezeichnet. Nachfolgend wiederholen wir zunächst wichtige Definitionen und Rechenregeln im Zusammenhang mit Matrizen, bevor wir besondere Matrizen sowie die Determinante von Matrizen in den Blick nehmen.

Definition 1.1 (Transponierte Matrix)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ und $A = (a_{ij})$. Dann ist die transponierte Matrix von A wie folgt definiert:

$$A^T = (a_{ij}^T) \in \mathrm{Mat}(n \times m; \mathbb{K}) \text{ mit } a_{ij}^T := a_{ji}$$

Definition 1.2 (Spur)

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix. Dann ist die Spur von A definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) := \mathrm{Sp}(A) := \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Die Spur ist eine Abbildung $\mathrm{Spur} : \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ für die wir zeigen können, dass sie $\mathbb{K}$-linear ist.

Satz 1.3 (Rechenregeln für Matrizen)

Sind Matrizen $A, A' \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ und $B, B' \in \mathrm{Mat}(n \times r; \mathbb{K})$, $C \in \mathrm{Mat}(r \times s; \mathbb{K})$ sowie $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben, dann gilt:

a) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ und
$(B + B') \cdot A = B \cdot A + B' \cdot A$

b) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B)$

c) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

d) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

e) $E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$

Dabei meint $E_k \in \mathrm{Mat}(k \times k; \mathbb{K})$ für $k \in \mathbb{N}$ die Einheitsmatrix.

Satz 1.4 (Rechenregeln für das Transponieren)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$, $C \in \mathrm{Mat}(n \times r; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

c) $(A^T)^T = A$

d) $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$

Definition 1.5

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ eine quadratische Matrix.

a) A heißt *symmetrisch*, genau dann, wenn $A = A^T$.

b) A heißt *invertierbar*, genau dann, wenn es eine Matrix $A' \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ gibt, mit $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$.

Definition 1.6

Es sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ eine Matrix mit den

Zeilenvektoren $v_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ und den

Spaltenvektoren $w_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dann nennen wir

- $zr(A) := \dim \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ den *Zeilenrang* von A und
- $sr(A) := \dim \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ den *Spaltenrang* von A.

Satz 1.7

Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$zr(A) = sr(A),$$

das heißt, Zeilenrang und Spaltenrang von A sind stets identisch. Die folgende Defintion ist damit sinnvoll.

Definition 1.8 (Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ mit $m, n \geq 1$. Dann erklären wir den *Rang* von A als

$$\mathrm{rang}\,(A) := zr(A) = sr(A).$$

Insbesondere folgt unmittelbar $\mathrm{rang}\,(A) = \mathrm{rang}\,(A^T)$.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der Determinante. Diese ist zunächst als eine Abbildung

$$\det\colon \mathrm{Mat}(n\times n;\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, A \mapsto \det(A)$$

definiert, die bestimmten Axiomen genügt (vgl. dafür z. B. das Lehrbuch von Gerd Fischer zur Linearen Algebra). Man kann zeigen, dass eine so definierte Abbildung existiert, eindeutig ist und der Leibniz-Formel (vgl. Definition 1.9) genügt. Daher wird nachfolgend nur diese Formel genannt, bevor anschließend wichtige Eigenschaften der Determinante aufgeführt werden.

Definition 1.9 (Determinante)

Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n\times n;\mathbb{K})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Satz 1.10 (Berechnung der Determinante für kleine Matrizen)

- Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$. Dann gilt: $\det(A) = ad - bc$.
- Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit Einträgen aus einem Körper $\mathbb{K}$. Dann gilt (Regel von Sarrus): $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Satz 1.11 (Wichtige Eigenschaften der Determinante)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n\times n;\mathbb{K})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) Hat A zwei gleiche Zeilen oder Spalten, dann ist $\det(A) = 0$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und entsteht B aus A durch Addition der λ-fachen j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($i \neq j$), so ist

$$\det(B) = \det(A).$$

Die Determinante bleibt also bei dieser Art Zeilenumformung unverändert.
Achtung: Das gilt *nicht*, wenn eine Zeile mit einem Skalar multipliziert oder zwei Zeilen vertauscht werden!

c) Entsteht die Matrix B aus A durch Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, dann ist $\det(B) = \lambda \det(A)$.

d) Entsteht die Matrix B aus A durch das Vertauschen zweier Zeilen, dann ist $\det(B) = -\det(A)$.

e) Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$.

f) Ist A eine obere (oder untere) Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

g) Sei $n \geq 2$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ eine Blockmatrix, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_1, A_2 quadratische Matrizen und C eine Matrix passender Größe sind. Dann gilt

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2).$$

h) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\,(A) < n$.

i) Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$. Dann gilt:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Ist A invertierbar, dann gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

j) $\det(A^T) = \det(A)$.

Satz 1.12 (Entwicklungssatz von Laplace)

Ist $n \geq 2$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$, so gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

(*Entwicklung nach der i-ten Zeile*) und für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$$

(*Entwicklung nach der j-ten Spalte*). Dabei bezeichnen A'_{ij} die Matrizen, die wir erhalten, wenn wir in A die i-te Zeile und die j-te Spalte streichen.

Diese Streichmatrizen helfen uns auch dabei, die inverse einer Matrix zu berechnen. Diese bestimmen wir üblicherweise, indem wir die Matrix A durch sukzessives Umformen mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführen und dieselben Umformungen an der Einheitsmatrix vornehmen. Als Schema formuliert für eine Matrix $A \in GL(n; \mathbb{K}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K}) \mid A \text{ invertierbar}\}$:

$$(A|E_n) \rightsquigarrow (E_n|A^{-1})$$

Alternativ können wir aber auch auf den folgenden Satz zurückgreifen:

Satz 1.13

Es sei $A \in GL(n;\mathbb{K})$. Definiert man $C = (c_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{K})$ durch

$$c_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot A'_{ij},$$

so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T.$$

Diesen Satz können wir nutzen, um eine einfache Formel für die Inverse Matrix zu einer 2×2-Matrix anzugeben.

Satz 1.14

Es sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2;\mathbb{K})$ invertierbar, das heißt $\det(A) = ad - bc \neq 0$, dann gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir schließlich noch einige äquivalente Charakterisierungen der Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix.

Satz 1.15

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n;\mathbb{K})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) A ist invertierbar

b) A^T ist invertierbar

c) $\det(A) \neq 0$

d) $\mathrm{rang}\,(A) = n$

H24 – T3 – A1

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ sei die Matrix $A_n = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} -i, & \text{falls } i = j, \\ \sqrt{i} & \text{falls } i = j-1, \\ -\sqrt{i} & \text{falls } i = j+1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben; somit ergibt sich etwa

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \sqrt{1} & -2 & \sqrt{2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \sqrt{2} & -3 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -n & \sqrt{n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \sqrt{n} & -(n+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}.$$

a) Berechnen Sie $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ und $\det(A_3)$.

b) Zeigen Sie mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz

$$\det(A_{n+1}) = -(n+1)\det(A_n) - n\det(A_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\det(A_n) = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt gemäß der Definition von A_n:

$$\det(A_1) = -1, \quad \det(A_2) = 2 - 1 = 1 \quad \text{und} \quad \det(A_3) = -6 + 3 + 2 = -1.$$

b) Es bezeichne $A_n^{(i,j)}$ die Matrix, die für $1 \leq i, j \leq n$ nach Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A_n entsteht. Wenn wir nach der $(n+1)$-ten Spalte entwickeln, erhalten wir

$$\det(A_{n+1}) = (-1)^{n+(n+1)} \cdot \sqrt{n} \cdot \det\left(A_{n+1}^{(n,n+1)}\right) + (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot (-(n+1)) \cdot \det\Big(\underbrace{A_{n+1}^{(n+1,n+1)}}_{=A_n}\Big).$$

Wenn wir nach der n-ten Zeile entwickeln, erhalten wir zudem

$$\det\left(A_{n+1}^{(n,n+1)}\right) = (-1)^{n+n} \cdot \sqrt{n} \cdot \det(A_{n-1})$$

und somit insgesamt

$$\det(A_{n+1}) = -(n+1)\det(A_n) - n\det(A_{n-1}).$$

c) **Zeige**: $\det(A_n) = (-1)^n$ für alle $n \geq 1$

IA ($n = 1 \ \wedge \ n = 2$): $\det(A_1) = (-1)^1 = -1$ und $\det(A_2) = (-1)^2 = 1$ nach Teil a)

IS ($n,\ n+1 \rightsquigarrow n+2$): Es gelte $\det(A_n) = (-1)^n$ und $\det(A_{n+1}) = (-1)^{n+1}$ für $n \geq 1$ beliebig (IV)

Zeige: $\det(A_{n+2}) = (-1)^{n+2}$

Da $n + 2 \geq 2$ ist, folgt mit Teil b)

$$\begin{aligned}\det(A_{n+2}) &= -(n+2)\det(A_{n+1}) - (n+1)\det(A_n)\\ &\overset{\text{IV}}{=} -n \cdot (-1)^{n+1} - 2 \cdot (-1)^{n+1} - n \cdot (-1)^n - (-1)^n\\ &= (-1)^n(n-n) + (-1)^n(2-1)\\ &= (-1)^n\\ &= (-1)^{n+2}\end{aligned}$$

F24 – T3 – A1

Bestimmen Sie alle reellen 2×2-Matrizen A mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Aus der gegebenen Gleichung für Matrizen folgt für einen Vergleich der jeweiligen Einträge der Matrizen:

$$\left\{\begin{array}{rrrcrr} a & & +2c & = & a+3b & \\ 3a & & +4c & = & & c+3d \\ & b & & +2d = & 2a+4b & \\ & 3b & & +4d = & & 2c+4d \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrr} & -3b+2c & & = 0 \\ 3a & & +3c-3d & = 0 \\ 2a+3b & & -2d & = 0 \\ & 3b-2c & & = 0 \end{array}\right\}$$

Löse das homogene lineare Gleichungssystem etwa mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{\frac{1}{3}Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3-2Z_2}}{} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4+Z_1}}{} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für Matrizen A, die der Gleichung aus der Aufgabe genügen, gilt also $c = \frac{3}{2}b$ und $a = d - \frac{3}{2}b$. Somit sind sie von der Form

$$A = \begin{pmatrix} d - \frac{3}{2}b & b \\ \frac{3}{2}b & d \end{pmatrix} \quad \text{mit } b, d \in \mathbb{R}.$$

F23 – T2 – A1

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gerade betrachte man die Matrix $A_n = (a_{1,j})_{1 \le i,n \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ \alpha, & \text{falls } i + j = n + 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

So ist beispielsweise

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(A_n) = (1 - \alpha^2)^{\frac{n}{2}}$ für jede gerade Zahl $n \geq 2$ gilt.

Lösungsvorschlag

Idee: Überführe A_n durch Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen in eine obere Dreiecksmatrix. Dadurch verändert sich die Determinante nicht und kann einfach über das Produkt der Diagonaleinträge ermittelt werden.

Es bezeichne a_i die i-te Zeile von A_n. Sei nun $1 \le k \le \frac{n}{2}$ beliebig und sei $\bar{k} \in \mathbb{N}$ mit $k + \bar{k} = n + 1$.

Wir berechnen $b_{\bar{k}} \coloneqq a_{\bar{k}} - \alpha a_k$

Für $b_{\bar{k}} = \left(b_{\bar{k}j}\right)_{1 \le j \le n}$ erhalten wir: $b_{\bar{k}j} = a_{\bar{k}j} - \alpha \cdot a_{kj}$,

wobei $a_{\bar{k}j} = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } j = k \\ 1, & \text{falls } j = \bar{k} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ und $\alpha \cdot a_{kj} = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } j = k \\ \alpha^2, & \text{falls } j = \bar{k} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

(Dabei gilt stets, dass $a_{kj} \neq a_{\bar{k}j}$, da $k + \bar{k} = n + 1$ ungerade und deshalb $k < \bar{k}$!)

Also: $b_{\bar{k}j} = \begin{cases} 1 - \alpha^2, & \text{falls } j = \bar{k}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Da n nach Voraussetzung gerade ist, können wir für $1 \le k \le \frac{n}{2}$ die Zeilen $a_{\bar{k}}$ in A_n durch $b_{\bar{k}}$ ersetzen, ohne, dass sich dadurch der Wert der Determinante ändert. Für die danach erhaltene Matrix

$$C_n \coloneqq \left(c_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n} \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{\frac{n}{2}} \\ b_{\frac{n}{2}} \\ \vdots \\ b_{\bar{1}} \end{pmatrix} \qquad \text{gilt insbesondere} \qquad \begin{cases} c_{ii} = 1, & 1 \le i \le \frac{n}{2} \\ c_{ii} = 1 - \alpha^2, & \frac{n}{2} < i \le n \\ c_{ij} = 0, & i > j \end{cases},$$

das heißt, C_n ist eine obere Dreiecksmatrix. Somit folgt insgesamt

$$\det(A_n) = \det(C_n) = 1^{\frac{n}{2}} \cdot \left(1 - \alpha^2\right)^{\frac{n}{2}} = \left(1 - \alpha^2\right)^{\frac{n}{2}}.$$

H22 – T2 – A1

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie die inverse Matrix $B^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

b) Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A \cdot B = B \cdot X$$

und zeigen Sie, dass hierfür

$$\det(X) = \det(A)$$

gilt.

Lösungsvorschlag

a)
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} Z_2-Z_1 \\ Z_3-Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4-Z_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} Z_3-2Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4-2Z_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} Z_2+2Z_3 \\ Z_2+2Z_4 \\ \rightsquigarrow \\ Z_1+Z_3 \\ Z_1+Z_4 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} (-1)\cdot Z_3 \\ (-1)\cdot Z_4 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4 \\ Z_1-Z_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Aus den Umformungen folgt unmittelbar $\det(B) = -1$ und damit B invertierbar. Weiter ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alternativ: Zeige, dass $B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = E_4$

b) Es sei $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $A \cdot B = B \cdot X$.

$A \cdot B = B \cdot X \Leftrightarrow X = B^{-1} \cdot A \cdot B$

Damit erfüllt genau die Matrix $X = B^{-1} \cdot A \cdot B$ die Gleichung und für die Determinante gilt:

$\det(X) = \det\left(B^{-1} \cdot A \cdot B\right) = \det\left(B^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(B) = \det(B)^{-1} \det(A) \cdot \det(B) = \det(A)$.

H22 – T3 – A1

Sei A jeweils eine beliebige invertierbare Matrix. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) A^2 ist invertierbar.

b) AA^T ist invertierbar.

c) $A + A^T$ ist invertierbar.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

$\left(A^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^2$. $A^2 \cdot \left(A^2\right)^{-1} = A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = E_n = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot A = \left(A^2\right)^{-1} \cdot A^2$.

b) Wahr.

Ist A invertierbar, dann auch A^T, denn $\det\left(A^T\right) = \det(A) \neq 0$. Folglich existiert $(A^T)^{-1}$, somit ist $\left(AA^T\right)^{-1} \coloneqq \left(A^T\right)^{-1} \cdot A^{-1}$ wohldefiniert und es gilt $\left(AA^T\right) \cdot \left(AA^T\right)^{-1} = E_n = \left(AA^T\right)^{-1} \cdot \left(AA^T\right)$.

c) Falsch.

Betrachte z.B. $A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\det(A) = 1 \neq 0$ und daher A invertierbar, jedoch ist $A + A^T$ die Nullmatrix. Diese ist offensichtlich nicht invertierbar.

F22 – T2 – A2

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir bezeichnen mit B die Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir das Polynom

$$p_A(x) := \det(A + x \cdot B)$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist der Grad von p_A höchstens eins.

b) Geben Sie mit Begründung eine konkrete Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, sodass p_A ein Polynom vom Grad eins ist.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $C := A + xB$. Durch Subtraktion der 1. Zeile von C von der i-ten Zeile für $2 \leq i \leq n$ erhalten wir eine Matrix $\tilde{C} = \tilde{A} + x\tilde{B}$ mit $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det\left(\tilde{C}\right) = \det(C) = p_A(x)$. Weiterhin ist $\tilde{B}$ eine Matrix, deren Einträge in der 1. Zeile alle 1 und sonst 0 sind.

Sei $\tilde{A} = (\tilde{a_j})$ mit $\tilde{a_j}^T \in \mathbb{R}^n$ den Zeilen von $\tilde{A}$. Dann folgt mit der Linearität der Determinante in jeder Zeile, dass

$$\det\left(\tilde{C}\right) = \det\left(\tilde{A}\right) + \det\left(\tilde{A}^* + x\tilde{B}\right) = \det\left(\tilde{A}\right) + x\det\left(\tilde{A}^* + \tilde{B}\right) \quad \text{und} \quad \tilde{A}^* := \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{a_2} \\ \vdots \\ \tilde{a_n} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$p_A(x) = \det\left(\tilde{A}\right) + x\det\left(\tilde{A}^* + \tilde{B}\right),$$

also $p_A(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens 1.

b) Definiere $A := E_n + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Nutzt man das in Teilaufgabe a) beschriebene Vorgehen und die dort eingeführten Bezeichnungen, so folgt:

$$\det(A + xB) = \det\left(E_n + x\tilde{B}\right) = \det(E_n) + \det\begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ 0 & & & \\ 0 & & E_{n-1} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = 1 + x.$$

H20 – T1 – A1

Bestimmen Sie alle Matrizen $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 42 \\ 84 & 98 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Da $\det(A) = \det(B) = -2 \neq 0$ sind A und B invertierbar.

Für die Inversen gilt: $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$.

Somit folgt für $W := \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$A \cdot W \cdot B = \begin{pmatrix} 36 & 42 \\ 84 & 98 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad W = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 36 & 42 \\ 84 & 98 \end{pmatrix} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

F20 – T1 – A3

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

a) Berechnen Sie für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ die Matrix xy^T.

b) Beweisen Sie: Sind $x, y \in \mathbb{R}^n$, dann gilt $\operatorname{rang}\left(xy^T\right) \leq 1$.

c) Beweisen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $\operatorname{rang}(A) \leq 1$, dann gibt es Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $A = xy^T$.

Lösungsvorschlag

a) Sei $M := (m_{ij}) := xy^T$. Dann gilt: $m_{ij} = x_i y_j$.

Etwas ausführlicher:

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \cdots y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix}$$

b) Sei $m_i \in \mathbb{R}^n$ die i-te Zeile von M. Dann gilt: $m_i = x_i \cdot y^T$.

1. Fall: Es gibt ein $1 \leq i \leq n$ mit $m_i \neq 0$, das heißt insbesondere $x_i \neq 0$
$\Rightarrow m_j$ ist Vielfaches von m_i für alle $j \neq i$, da $m_j = \frac{x_j}{x_i} \cdot m_i$
$\Rightarrow \operatorname{rang}(M) \leq 1$

2. Fall: Es gibt kein $1 \leq i \leq n$ mit $m_i \neq 0$
$\Rightarrow M = 0$
$\Rightarrow \operatorname{rang}(M) = 0$

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) \leq 1$

$\Rightarrow$ In A gibt es höchstens einen linear unabhängigen Zeilenvektor

1. Fall: Es gibt einen linear unabhängigen Zeilenvektor in A. Nenne ihn y^T mit $y \in \mathbb{R}^n$.
Alle anderen Zeilen in A sind skalare Vielfache von y^T, das heißt $\exists x \in \mathbb{R}^n$ mit $A = xy^T$

2. Fall: Es gibt keinen linear unabhängigen Zeilenvektor in A
$\Rightarrow A = 0$
$\Rightarrow A = 0 \cdot y^T$ für $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig

F19 – T1 – A1

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ b & 1 & b & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Lösungsvorschlag

Wir überführen die Matrix in Zeilenstufenform und lesen daraus in Abhängigkeit von den beiden reellen Parametern den Rang der Matrix A ab.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ b & 1 & b & 1 \\ a & 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 & b \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_2 - bZ_1 \\ Z_3 - aZ_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4 - Z_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1-ab & 0 & 1-ab \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

Wir lesen aus der Matrix ab, dass $\operatorname{rang}(A) = 1$ genau dann, wenn

$$(1-ab=0) \quad \wedge \quad (1-a^2=0) \quad \wedge \quad (b-a=0) \qquad \Leftrightarrow \qquad (a=b) \quad \wedge \quad (a=\pm 1)$$

In allen anderen Fällen gilt $\operatorname{rang}(A) = 2$, denn mindestens eine der drei letzten Zeilen kann dann auf die Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gebracht und damit die zwei übrigen Zeilen durch geeignete Multiplikation mit einem Skalar eliminiert werden.

2 Vektorräume

Das zweite Kapitel thematisiert Vektorräume. Dabei handelt es sich um eine der zentralen Strukturen in der Linearen Algebra. Sie sind Grundlage für verschiedene weitere Themen (u. a. lineare Abbildungen, Gleichungssysteme, euklidische Vektorräume, affine Räume), daher sollten wir uns im Umgang mit Ihnen möglichst sicher fühlen. Für die nachfolgenden Ausführungen ist es möglicherweise hilfreich, an den prototypischen reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zu denken; noch konkreter vielleicht sogar an den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Wir können uns dann jeweils überlegen, was die einzelnen Definitionen und Sätze im Fall dieses Beispiels bedeuten. Wir sollten uns aber nicht immer auf $\mathbb{R}^n$ beschränken, sondern uns auch mit abstrakteren Vektorräumen nicht unwohl fühlen.

Definition 2.1 (Vektorraum)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Menge V zusammen mit einer (inneren) Verknüpfung

$$+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$$

(*Addition* genannt) und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$$

(*Skalarmultiplikation* genannt) heißt $\mathbb{K}$-*Vektorraum*, wenn Folgendes gilt:

V1 $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe

V2 Die Skalarmultiplikation muss in folgender Weise mit den anderen Verknüpfungen verträglich sein:

- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
- $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
- $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$
- $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$.

In einem Vektorraum gelten bestimmte Rechenregeln. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathbf{0}$ den Nullvektor im Vektorraum, also das neutrale Element der abelschen Gruppe $(V, +)$.

Satz 2.2 (Rechenregeln für Vektorräume)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$:

a) $0 \cdot v = \mathbf{0}$

b) $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

c) $\lambda \cdot v = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ oder $v = \mathbf{0}$

d) $(-1) \cdot v = -v$, wobei $-v$ das additiv Inverse von v in der abelschen Gruppe $(V, +)$ bezeichnet

Oft betrachten wir nicht ganze Vektorräume, sondern nur Teile davon, die aber aus struktureller Perspektive schön sind, da sie bezüglich der beiden Verknüpfungen abgeschlossen sind. Wir landen dann bei Untervektorräumen. Im Beispiel $\mathbb{R}^3$ gedacht sind etwa Ebenen oder Geraden durch den Koordinatenursprung Untervektorräume.

Definition 2.3 (Untervektorraum)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W heißt *Untervektorraum* von V, falls Folgendes gilt:

UV1 $W \neq \emptyset$

UV2 $v, w \in W \Rightarrow v + w \in W$
(das heißt, W ist abgeschlossen bezüglich der Addition)

UV3 $v \in W, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda v \in W$
(das heißt, W ist abgeschlossen bezüglich der Skalarmultiplikation)

Eine nützliche Eigenschaft von Untervektorräumen, die zumindest für einige theoretische Überlegungen benötigt wird, ist die nächste.

Satz 2.4

Sei V ein Vektorraum, I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei der Untervektorraum W_i von V gegeben. Dann ist der Durchschnitt

$$W := \bigcap_{i \in I} W_i \subseteq V$$

wieder ein Untervektorraum.

Manchmal finden wir uns in einer Situation, in der wir einen Untervektorraum angeben möchten, der bestimmte Vektoren enthält und dabei gleichzeitig so klein wie möglich ist. Um einen solchen Untervektorraum zu definieren, müssen wir uns zunächst mit der Definition einer Linearkombination beschäftigen, die Grundlage der darauffolgenden Definition ist.

Definition 2.5 (Linearkombination)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

a) Es seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann heißt $v \in V$ eine *Linearkombination von* $v_1, \ldots, v_n$, genau dann, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt mit $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$.

b) Es sei $S \subseteq V$ eine beliebige (nicht notwendig endliche) Teilmenge. Eine Element $v \in V$ heißt

Linearkombination von Vektoren aus S, genau dann, wenn es $v_1, \ldots, v_n \in S$ derart gibt, dass v Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Wichtig an dieser Stelle ist, dass wir auch für Teilmengen $S \subseteq V$ mit unendlich vielen Elementen Linearkombinationen definieren können. Dies sind dann einfach Linearkombinationen von endlich vielen Elementen aus S. Mit diesem Gedanken können wir uns jetzt dem kleinsten Untervektorraum widmen, der eine vorgegebene Menge von Vektoren umfasst.

Definition 2.6

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann definieren wir:

$$\langle S \rangle := \operatorname{span}(S) := \{v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Vektoren aus } S\}.$$

Wir nennen $\operatorname{span}(S)$ den von S aufgespannten Vektorraum. Ist $S = \emptyset$, setzen wir $\operatorname{span}(S) = \{0\}$.

Für endliche Mengen $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ folgt somit unmittelbar

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}\},$$

damit ist der von S aufgespannte Vektorraum die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus S.

Der nächste Satz sagt uns, dass wir mit der vorherigen Definition wirklich unser Ziel erreicht haben.

Satz 2.7

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann gilt:

a) $\operatorname{span}(S) \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

b) Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und gilt $S \subseteq W$, dann ist $\operatorname{span}(S) \subseteq W$.

In anderen Worten heißt der zweite Punkt, dass $\operatorname{span}(S)$ der kleinste Untervektorraum von V ist, der S enthält.

Nachfolgend wenden wir uns der Frage zu, wie groß ein Vektorraum ist. Diese Fragestellung ist zwar etwas unpräzise, der Gedanke leitet dennoch gut zum Begriff der Dimension eines Vektorraums über. Um diese sauber anzugeben, benötigen wir jedoch noch etwas Vorarbeit.

Definition 2.8 (Lineare Unabhängigkeit)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine endliche Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V heißt *linear unabhängig*, genau dann, wenn gilt:
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und ist $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$, so folgt $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Eine beliebige Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *linear unabhängig*, genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von S linear unabhängig ist.

Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *linear abhängig*, falls sie nicht linear unabhängig ist.

Definition 2.9 (Erzeugendensystem)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt *Erzeugendensystem von V*, genau dann, wenn

$$V = \operatorname{span}(S).$$

Eine besondere Art von Erzeugendensystem, sogenannte Basen, werden Grundlage des Dimensionsbegriffes sein. Daher führen wir zunächst diesen weiteren Begriff ein.

Definition 2.10 (Basis)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $S \subseteq V$ heißt eine *Basis von V*, genau dann, wenn S ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

V heißt *endlich erzeugt*, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

Basen von Vektorräumen besitzen einige wichtige Eigenschaften, die im nächsten Satz festgehalten sind. Wir beschränken uns dabei auf Basen mit endlich vielen Elementen.

Satz 2.11 (Eigenschaften einer Basis)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine endliche Teilmenge. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V, das heißt ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

b) $\mathcal{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem, das heißt, nimmt man einen beliebigen Vektor v_r mit $r \in \{1, \ldots, n\}$ aus der Menge $\mathcal{B}$, so ist $\mathcal{B} \setminus \{v_r\}$ kein Erzeugendensystem mehr.

c) $\mathcal{B}$ ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge, das heißt, für jedes weitere $v \in V$ ist die Menge $\mathcal{B} \cup \{v\}$ linear abhängig.

d) Jedes Element $v \in V$ ist eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ darstellbar.

Die folgenden Ergebnisse brauchen einige theoretische Vorarbeit, die wir uns hier jedoch sparen. Dennoch sind sie so wichtig, dass sie an dieser Stelle mit aufgeführt werden sollen.

Satz 2.12

a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

b) Je zwei endliche Basen eines $\mathbb{K}$-Vektorraums haben gleiche Länge.

Manchmal ist es hilfreich, eine neue Basis ausgehend von einer bekannten zu erzeugen. Dabei hilft uns das *Austauschlemma*.

Satz 2.13 (Austauschlemma)

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Basis

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \quad \text{und} \quad w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n.$$

Ist $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$, so ist

$$\mathcal{B}' \coloneqq \{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$$

wieder eine Basis von V. Man kann also v_k gegen w austauschen.

Mithilfe der Ergebnisse aus Satz 2.12 können wir nun in sinnvoller Weise die Dimension eines Vektorraums definieren.

Definition 2.14 (Dimension)

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so definieren wir

$$\dim_{\mathbb{K}} V \coloneqq \begin{cases} \infty, & \text{falls } V \text{ keine endliche Basis besitzt} \\ n, & \text{falls } V \text{ eine Basis der Länge } n \text{ besitzt} \end{cases}$$

$\dim_{\mathbb{K}} V$ heißt die *Dimension von V über $\mathbb{K}$*. Falls klar ist, welcher Körper gemeint ist, schreibt man auch $\dim V$.

Im Examen ist es häufiger unsere Aufgabe, die Dimension und bzw. oder eine Basis für $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$ mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ anzugeben. Dabei kann uns das Folgende helfen.

Definition 2.15

Ist $A \in \operatorname{Mat}(k \times n; \mathbb{K})$ mit Zeilen $v_1, \ldots, v_k$, so heißt

$$ZR(A) \coloneqq \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k) \subset \mathbb{R}^n$$

der *Zeilenraum von A*.

Satz 2.16

Ist B durch elementare Zeilenumformungen aus A entstanden, so ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Bringen wir also A durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, können wir aus der Anzahl der Nicht-Null-Zeilen von B die Dimension von $ZR(A)$ sowie aus den Nicht-Null-Zeilen eine

Basis von $ZR(B)$ und damit auch eine Basis für $ZR(A)$ ablesen.

Zuletzt betrachten wir noch die Summe von zwei Untervektorräumen. Dafür definieren wir zunächst zentrale Begriffe, bevor wir diesen Theorieteil mit der Dimensionsformel beenden.

Definition 2.17 (Summe von Vektorräumen)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Untervektorräumen $W_1, \ldots, W_r$. Dann heißt

$$W_1 + \ldots + W_r := \{v \in V \mid \text{Es gibt } v_j \in W_j \text{ mit } v = v_1 + \ldots + v_r\}$$

die *Summe von* $W_1, \ldots, W_r$.

Relativ einfach beweisen können wir das Folgende.

Satz 2.18

Für die oben definierte Summe gilt:

a) $W_1 + \ldots + W_r \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

b) $W_1 + \ldots + W_r = \operatorname{span}(W_1 \cup \ldots \cup W_r)$.

c) $\dim(W_1 + \ldots + W_n) \leq \dim W_1 + \ldots + \dim W_r$.

Die zuletzt genannte Ungleichung können wir für zwei Summanden mithilfe der Dimensionsformel noch genauer angeben.

Satz 2.19 (Dimensionsformel für Summen von Vektorräumen)

Für endlichdimensionale Untervektorräume $W_1, W_2 \subseteq V$ gilt

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Zum Abschluss betrachten wir noch eine besondere Art von Summe. Bei dieser ist der Schnitt der beiden Summanden trivial. Daraus ergeben sich nachfolgend dann mehrere schöne Eigenschaften.

Definition 2.20 (Direkte Summe)

Ein Vektorraum heißt *direkte Summe* von zwei Untervektorräumen W_1 und W_2, geschrieben $V = W_1 \oplus W_2$, genau dann, wenn

$$V = W_1 + W_2 \quad \text{und} \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}.$$

Satz 2.21

Ist $V = W_1 + W_2$, so sind folgende Bedingungen äquivalent:

a) $V = W_1 \oplus W_2$, das heißt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

b) Jedes $v \in V$ ist eindeutig darstellbar als $v = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$.

c) Zwei von Null verschiedene Vektoren $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ sind linear unabhängig.

F24 – T1 – A1

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $v = (2,0,1,0)^T \in \mathbb{R}^4$ in dem von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum liegt, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums $W = \text{span}(\{w_1, w_2, w_3, w_4\})$ von $\mathbb{R}^5$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

c) Seien

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Elemente des $\mathbb{R}^4$, $U = \text{span}(\{u_1, u_2\})$ und $W = \text{span}(\{u_3, u_4\})$.
Bestimmen Sie Vektoren x_1, x_2 und x_3 des $\mathbb{R}^4$ so, dass x_1 eine Basis von $U \cap W$, $\{x_1, x_2\}$ eine Basis von U und $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine Basis von $U + W$ ist.

Lösungsvorschlag

a) Zum Lösen der Aufgabe nutzen wir folgende Überlegung:

$$\begin{aligned} v \in \langle v_1; v_2; v_3 \rangle &\Leftrightarrow \exists \mu_1, \mu_2 \mu_3 \in \mathbb{R} : v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 \\ &\Leftrightarrow \text{Das inhomogene lineare Gleichungssystem } \left(\begin{array}{ccc|c} v_1 & v_2 & v_3 & v \end{array} \right) \text{ ist lösbar} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \overset{\substack{Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - Z_1 \\ Z_4 - Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -\lambda & 2 & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 3 & 0 & -2 \end{array} \right) \overset{\substack{Z_3 - 2Z_2 \\ Z_4 - 3Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\overset{Z_4 - Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -\lambda & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Aus Zeile 3 folgt: $v \in \langle v_1; v_2; v_3 \rangle \Rightarrow \lambda \neq 0$

Aus Zeilen 3 und 4 folgt für $\mu_1 \in \mathbb{R}$: $v \in \langle v_1; v_2; v_3 \rangle \Rightarrow 1 \cdot (\mu_1 = 1) \ \wedge \ (-\lambda \cdot \mu_1 = 3) \Rightarrow \lambda = -3$

Zeige nun noch: $\lambda = -3 \ \Rightarrow \ v \in \langle v_1; v_2; v_3 \rangle$

Löse für $\lambda = -3$ das obige inhomogene lineare Gleichungssystem. Dadurch ergibt sich:

$$v = 1 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 7 \cdot v_3$$

b) Schreibe $w_1, \dots, w_4$ als Zeilen einer Matrix und bestimme den Rang:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -8 & 1 & -5 \\ 2 & 5 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2+Z_1 \\ Z_3-2Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4-Z_1}}{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -6 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-2Z_4 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3+3Z_4}}{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 2, das heißt $\dim(W) = 2$. Über die Nicht-Null-Zeilen lesen wir $\{w_1, w_4\}$ als eine Basis von W ab.

Wir können zur Sicherheit auch überprüfen, dass w_1 und w_4 tatsächlich linear unabhängig sind. Das erkennen wir direkt, wenn wir die ersten beiden Einträge der Vektoren betrachten.

c) Bestimme zunächst $U \cap W$. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 = \gamma \cdot u_3 + \delta \cdot u_4 \Leftrightarrow \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot (-u_3) + \delta \cdot (-u_4) = 0$$

Löse nun das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2+Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3-2Z_1 \\ Z_4+2Z_1}}{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4-Z_2}}{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_4+2Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass für Vektoren im Schnitt $\gamma = -\delta$ gelten muss, das heißt $U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Insbesondere ist $\dim(U \cap W)$ gleich der Dimension des Lösungsraums $\mathbb{L}$ des homogenen linearen Gleichungssystems und $\dim \mathbb{L} = 4 - 3 = 1$.

Definiere also $x_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $x_1 = -u_1 + 2u_2$ folgt mit $x_2 := u_2$ und dem Basisaustauschsatz, dass $U = \langle x_1, x_2 \rangle$.

Da offensichtlich $u_4 \notin U$ gilt, sind für $x_3 := u_4$ die Vektoren x_1, x_2, x_3 linear unabhängig. Weiterhin gilt $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$ und daher direkt $U + W = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$

F24 – T2 – A4

Es seien s und t reelle Parameter sowie

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -s \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ s-2 \\ -3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ s+3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Es bezeichne U_s den von u_1, u_2, u_3, u_4 aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ und W_t den von w_1, w_2, w_3, w_4 aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie die Dimensionen von U_s und W_t in Abhängigkeit von s bzw. t.

b) Zeigen oder widerlegen Sie:

   i) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ existiert ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\dim(U_s) = \dim(W_t)$.

   ii) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ existiert ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\dim(U_s) = \dim(W_t)$.

Lösungsvorschlag

a) Schreibe $u_1, \ldots, u_4$ als Zeilen einer Matrix und bestimme deren Rang. Dieser entspricht dann $\dim U_s$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -s & 2 & 3 \\ -1 & 3 & s-2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & s+3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_3+Z_1 \\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 2 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s \end{pmatrix}$$

Damit folgt unmittelbar:

$s = 0$: $\dim U_s = 2$
$s = 1$: $\dim U_s = 3$
$s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$: $\dim U_s = 4$

Analoges Vorgehen für $w_1, \ldots, w_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & t & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & t & -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-2Z_1 \\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & t-2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3-Z_2 \\ Z_4-Z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt unmittelbar: $\dim W_t = 3$ für $t \in \{2, 3\}$ und $\dim W_t = 4$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

b) i) Wahr.

$t \in \{2, 3\}$ $\Rightarrow 3 = \dim W_t = \dim U_1$
$t \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ $\Rightarrow 4 = \dim W_t = \dim U_2$

ii) Falsch.

Nach Teilaufgabe a) gilt: $\dim W_t \neq 2 = \dim U_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

F23 – T3 – A2

Es sei f_n die n-te Fibonaccizahl, d.h. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Weiter sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}33\\20\\12\end{pmatrix}\right\}, W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}f_{n+2}\\f_{n+1}\\f_n\end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bestimmen Sie die Dimension der Unterräume

$$U \cap W \quad \text{und} \quad U + W.$$

Lösungsvorschlag

Es gilt: $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in W \overset{W \text{ UVR}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in W \overset{W \text{ UVR}}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in W$

$\Rightarrow \dim W \overset{(*)}{\geq} 2 = \dim \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, denn die beiden Vektoren sind offensichtlich linear abhängig

Behauptung: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin W$

Angenommen $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in W$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \begin{pmatrix}f_{n_i+2}\\f_{n_i+1}\\f_{n_i}\end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N},\ n_i \in \mathbb{N} \text{ für alle } 1 \leq i \leq m$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_i} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_i+1} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_i+2} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left(f_{n_i} + f_{n_i+1}\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_i} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_i+1} = 0 + 0 = 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

Wir erhalten also insgesamt: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \notin W$

$$\Rightarrow \dim W < 3 \overset{(*)}{\Rightarrow} \dim W = 2$$

Behauptung: $U + W = \mathbb{R}^3$

Da $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in U$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in W$ folgt $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in U + W.$

Damit folgt wegen $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in W \subseteq U + W$: $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{=:B} \subseteq U + W \subseteq \mathbb{R}^3$

Offensichtlich ist B linear unabhängig (zu sehen an den Null-Einträgen der Vektoren). Und somit:

$3 = \dim \langle B \rangle \leq \dim U + W \leq 3$ und deshalb $\dim U + W = 3$.

Mit der Dimensionsformel folgt nun:

$3 = \dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

Da offensichtlich $\dim U = 2$ folgt also: $\dim U \cap W = 2 + 2 - 3 = 1$.

F22 – T1 – A2

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Untervektorräume

$$M = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = 0\} \quad \text{und} \quad L = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid BX = 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$M \cap L = \{0\} \quad \text{und} \quad M + L = \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Lösungsvorschlag

Es sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in $M \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

Somit folgt: $M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und da die beiden Vektoren offensichtlich linear unabhängig sind direkt $\dim M = 2$

Es sei $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in L \Leftrightarrow BX = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$

Somit folgt: $L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und da die beiden Vektoren offensichtlich linear unabhängig sind direkt $\dim L = 2$

Sei $X := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M \cap L \Leftrightarrow c = a \ \wedge \ c = -a \ \wedge \ b = d \ \wedge \ b = -d$

$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$$
$$\Leftrightarrow X = 0$$

Also folgt: $M \cap L = \{0\}$.

Es ist $M + L \subseteq R^{2\times 2}$ und $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$. Mit der Dimensionsformel folgt:

$\dim (M + L) = \dim M + \dim L - \dim M \cap L = 2 + 2 - 0 = 4$

$\Rightarrow M + L = \mathbb{R}^{2\times 2}$

F22 – T3 – A1

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wie üblich setzen wir $A^0 = E_2$, wobei E_2 die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass (A^0, A^1) eine Basis des kleinsten Untervektorraums U des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, der alle Potenzen von A enthält.

Lösungsvorschlag

a) Beweis per vollständiger Induktion

IA $(n = 0)$: $A^0 = E_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-0 & 0 \\ -0 & 0+2 \end{pmatrix}$ ✓

IS $(n \rightsquigarrow n+1)$: Es gelte $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig (IV)

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A \cdot A^n &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-2n & n+n+2 \\ n-2-3n & -n+3n+6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2(2-(n+1)) & 2(n+1) \\ -2(n+1) & 2((n+1)+2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-(n+1) & n+1 \\ -(n+1) & (n+1)+2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda A^0 + \mu A^1 = 0 \Rightarrow \lambda + \frac{1}{2}\mu = 0 \ \wedge \ \frac{1}{2}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$

Also sind A^0 und A^1 linear unabhängig. Zeige nun noch $A^n \in \langle A^0, A^1 \rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, das heißt $\{A^0, A^1\}$ Erzeugendensystem.

Klar für $n = 0$ und $n = 1$. Sei also $n \geq 2$. Unter Verwendung von a) folgt:

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix} = n \cdot A^1 - (n-1) \cdot A^0 \in \langle A^0; A^1 \rangle$$

$\Rightarrow \{A^0, A^1\}$ ist linear unabhängiges Erzeugendensystem von U und damit eine Basis von U.

H21 – T3 – A1

Es sei U der Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, welcher von den Vektoren

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Weiter sei V das Erzeugnis von

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^5$.
Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$ und eine Basis von $U + V$.

Lösungsvorschlag

Wir bemerken zunächst, dass $\dim U = \dim W = 3$, da $\{u_1, u_2, u_3\}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig.

Sei nun $x \in U \cap V$. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_4 v_1 + \lambda_5 v_2 + \lambda_6 v_3$

Löse also das homogene lineare Gleichungssystem $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 - \lambda_4 v_1 - \lambda_5 v_2 - \lambda_6 v_3 = 0$, um $U \cap V$ zu bestimmen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_5+Z_2}}{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3-2Z_1 \\ Z_4-2Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_5-3Z_1}}{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_4+2Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_5-2Z_3}}{}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt insbesondere $\lambda_6 = \lambda_3 = 0$ und $\lambda_5 = -\lambda_4$.

Also $U \cap V = \{\lambda v_1 - \lambda v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda(v_1 - v_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle v_1 - v_2 \rangle$ und somit ist $\{v_1 - v_2\}$ wegen $v_1 - v_2 \neq 0$ eine Basis von $U \cap V$.

Nach Dimensionsformel gilt: $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V = 3 + 3 - 1 = 5$.

Da $U + V \subseteq \mathbb{R}^5$ Untervektorraum, gilt wegen $\dim U + V = 5$ also $U + V = \mathbb{R}^5$.

Damit ist zum Beispiel die Standardbasis $\{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ eine Basis von $U + V$.

F21 – T2 – A1

Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p+1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{P} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Dimension des von M aufgespannten Unterraumes.

Lösungsvorschlag

Behauptung: $\dim(\langle M \rangle) = 2$

$$\langle M \rangle = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i,\ m_i \in M,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Zeige: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \langle M \rangle$

Angenommen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle M \rangle$

$$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ m_i = \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \\ p_i + 1 \end{pmatrix} \in M: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(p_i + 1\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = 1 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(p_i + 1\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = 1 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i = 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Somit folgt: $\dim(\langle M \rangle) \leq 2$.

Weiterhin gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \langle M \rangle$ und linear abhängig $\Rightarrow$ $\dim \langle M \rangle \geq 2$

Insgesamt ergibt sich somit $\dim \langle M \rangle = 2$

H20 – T2 – A1

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachte man den von

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum U sowie den von

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum W. Man bestimme eine Basis von $U \cap W$.

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned} \text{Es sei } x \in U \cap W &\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = x = \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \\ &\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}: \quad \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 - \mu_1 w_1 - \mu_2 w_2 = 0 \end{aligned}$$

Löse also das entsprechende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 - 2Z_1 \\ Z_4 + Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 + Z_2 \\ Z_4 - 2Z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich insbesondere, dass $2\mu_2 = -3\mu_1$ gelten muss.

$\Rightarrow U \cap W = \{2\lambda w_1 - 3\lambda w_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle 2w_1 - 3w_2 \rangle$

Damit ist $2w_1 - 3w_2 \neq 0$ eine Basis von $U \cap W$.

F20 – T2 – A3

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Die Menge

$$M_1 = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \text{Null ist Eigenwert von } X\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

b) Die Menge

$$M_2 = \left\{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ ist ein Eigenvektor von } X\right\}$$

ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Lösungsvorschlag

a) Falsch. Betrachte $A := \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ aus M_1. Offensichtlich ist 0 als Nullstelle der charakteristischen Polynome $\chi_A(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$, $\chi_B(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$ ein Eigenwert beider Matrizen.

Jedoch $A + B = \begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ und $\chi_{A+B}(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda-2)(\lambda+2)$. Somit ist 0 kein Eigenwert von $A+B$, also $A + B \notin M_1$ und damit ist M_1 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$

b) Wahr, denn für $v := \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$:

1. $0 \in M_2$, da $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Eigenvektor von 0 zum Eigenwert 0. Das heißt, $M_2 \neq \emptyset$.
2. Seien $A, B \in M_2$. Dann gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$ und $Bv = \mu v$. Es folgt somit $(A+B)v = Av + Bv = \lambda v + \mu v = (\lambda+\mu)v$

   Also ist v Eigenvektor von $A+B$ zum Eigenwert $\lambda+\mu$ und somit $A + B \in M_2$.
3. Seien $A \in M_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit $Av = \mu v$. Es folgt somit $(\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda\mu \cdot v$.

   Also ist v Eigenvektor von λA zum Eigenwert $\lambda\mu$ und somit $\lambda A \in M_2$

Da M_2 alle Eigenschaften eines Untervektorraums erfüllt, ist $M_2 \subseteq M^{2\times 2}$ ein Untervektoraum.

F19 – T3 – A4

Sei V ein reeller Vektorraum.

a) Geben Sie eine Definition für die lineare Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n \in V (n \in \mathbb{N})$ an.

b) Zeigen Sie: Sind $v_1, \ldots, v_n \in V (n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig und ist

$$v_{n+1} \in V \setminus \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n),$$

so sind $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ ebenfalls linear unabhängig.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n:
Besitzt V kein endliches Erzeugendensystem (d. h., für jede endliche Menge $M \subseteq V$ ist $\operatorname{span}(M) \neq V$), so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine n-elementige linear unabhängige Teilmenge M_n von V.

Lösungsvorschlag

a) $v_1, \ldots, v_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$

(Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$)

b) Angenommen $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ nicht alle $= 0$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0$

1. Fall: $\lambda_{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ $\exists\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle $= 0$ mit $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig. Widerspruch!

2. Fall: $\lambda_{n+1} \neq 0$

$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}} (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ Widerspruch!

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig.

c) IA $(n = 1)$:

V bestitzt kein endliches Erzeugendensystem, das heißt $V \neq \{0\}$. Wähle nun $v \in V \setminus \{0\}$. Dann ist $M_1 := \{v\}$ linear unabhängig.

IS $(n \rightsquigarrow n + 1)$:

Es gebe für $n \in \mathbb{N}$ eine n-elementige linear unabhängige Teilmenge M_n von V mit $\langle M_n \rangle \neq V$ (IV)

Zeige: Es gibt eine $(n + 1)$-elementige linear unabhängige Teilmenge M_{n+1} von V.

Nach IV ist M_n linear unabhängig. Wähle somit $v \in V \setminus \langle M_n \rangle \neq \emptyset$. Dann ist $M_{n+1} := M_n \cup \{v\}$ gemäß Teilaufgabe b) linear unabhängig und $|M_{n+1}| = n + 1$.

3 Lineare Abbildungen

Im dritten Kapitel betrachten wir lineare Abbildungen. Dabei handelt es sich im Kern um Abbildungen zwischen Vektorräumen, die deren Struktur erhalten. Was genau das bedeutet und welche schönen Eigenschaften lineare Abbildungen besitzen, sehen wir uns im ersten Teil dieses Inputs an. Im zweiten Teil überlegen wir uns dann noch, wie wir lineare Abbildungen für endlichdimensionale Vektorräume möglichst effizient darstellen können. So kommen wir zur Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung, die jedoch von der Wahl der Basen der jeweiligen Vektorräume abhängt.

Definition 3.1 (Lineare Abbildung)

Eine Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W heißt $\mathbb{K}$-*linear* (bzw. nur *linear* oder *Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen*), genau dann, wenn

L1 $F(v+w) = F(v) + F(w)$,

L2 $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Beide Bedingungen können auch zu einer einzigen zusammengefasst werden.

Satz 3.2

Eine Abbildung $F\colon V \to W$ zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen V und W ist genau dann $\mathbb{K}$-*linear*, wenn

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$$

für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Für besondere Arten von linearen Abbildungen werden in der Regel eigene Bezeichnungen verwendet. Diese führen wir in der folgenden Definition ein.

Definition 3.3

Eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ heißt

- *Isomorphismus*, wenn F bijektiv ist
- *Endomorphismus*, wenn $V = W$,
- *Automorphismus*, wenn $V = W$ und F bijektiv ist.

Aus der Definition einer linearen Abbildung ergeben sich unmittelbar mehrere wichtige Eigenschaften.

Satz 3.4

Ist $F: V \to W$ linear, so gilt:

a) $F(0) = 0$ und $F(v - w) = F(v) - F(w)$

b) $F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n)$

c) Sind $v_1, \ldots, v_n$ in V linear abhängig, so sind $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ in W linear abhängig.

d) Sind $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ in W linear unabhängig, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ in V linear unabhängig.

Achtung: Die Umkehrung von d) gilt im Allgemeinen nicht! Betrachte dafür z. B. die lineare Abbildung F, die jeden Vektor auf 0 abbildet – in diesem Fall sind Bilder linear unabhängiger Vektoren linear abhängig.

e) Sind $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervektorräume, dann sind auch $F(V') \subseteq W$ und $F^{-1}(W') \subseteq V$ Untervektorräume.

f) $\dim F(V) \leq \dim V$

g) Ist F ein Isomorphismus, so ist auch $F^{-1}: W \to V$ linear und es gilt $\dim W = \dim V$

Lineare Abbildungen können wir andere Abbildungen auch passend miteinander verknüpft werden. Dabei bleiben die beiden charakteristischen Eigenschaften erhalten.

Satz 3.5

Es seien U, V, W Vektorräume und $G: U \to V$ und $F: V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist auch $F \circ G: U \to W$ linear.

Satz 3.6

Es seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W, man bezeichnet diese auch mit $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, ein Vektorraum. Insbesondere sind für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $F, G \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ auch die Abbildungen $\lambda F + \mu G$ linear.

Wir betrachten nun noch zwei besondere Mengen, die wir oft untersuchen, wenn wir uns mit linearen Abbildungen beschäftigen.

Definition 3.7 (Bild und Kern)

Es sei $F: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann nennen wir

- $\mathrm{Im}(F) := F(V) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}$ das *Bild* von F.
- $\mathrm{Ker}(F) := F^{-1}(\{0\}) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$ den *Kern* von F.

Bild und Kern besitzen einige schöne Eigenschaften, die uns bei der Untersuchung linearer Abbildungen helfen können.

Satz 3.8

Es sei $F\colon V \to W$ linear. Dann gilt:

a) $\operatorname{Im}(F) \subseteq W$ und $\operatorname{Ker}(F) \subseteq V$ sind Untervektorräume.

b) F surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(F) = W$.

c) F injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(F) = \{0\}$.

d) Ist F injektiv und sind $v_1, \ldots, v_n \in V$ linear unabhängig, so sind auch die Bilder $F(v_1), \ldots, F(v_n)$ linear unabhängig.

Eine besonders wichtige Zahl für eine lineare Abbildung ist die Dimension ihres Bildes.

Definition 3.9 (Rang einer linearen Abbildung)

Es sei $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Der *Rang* von F ist definiert als

$$\operatorname{rang}(F) \coloneqq \dim(\operatorname{Im}(F)).$$

Kern und Bild einer linearen Abbildung können uns auch mit Blick auf die Dimension des Vektorraums V helfen, sofern dieser endlichdimensional ist. Wie genau, verrät uns die folgende Dimensionsformel.

Satz 3.10 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen)

Es sei $F\colon V \to W$ und V sei endlichdimensional, d. h. $\dim V < \infty$. Dann gilt:

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}(F) + \dim \operatorname{Ker}(F).$$

Sind Basen $(v_1, \ldots, v_k)$ von $\operatorname{Ker}(F)$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ von $\operatorname{Im}(F)$ sowie beliebige Vektoren

$$u_1 \in F^{-1}(w_1), \ldots, u_r \in F^{-1}(w_r)$$

gegeben, so ist

$$B \coloneqq (u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$$

eine Basis von V.

Als unmittelbare Schlussfolgerungen aus der Dimensionsformel ergeben sich die folgenden.

Satz 3.11

a) Zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen V und W gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn $\dim V = \dim W$.

b) Sei $\dim V = \dim W < \infty$ und $F\colon V \to W$ linear. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

i) F injektiv

ii) F surjektiv

iii) F bijektiv

Lineare Abbildungen sind noch wegen einer anderen Eigenschaft besonders schön. Wir können sie durch vergleichsweise wenige Vorgaben festlegen. Wie genau das funktioniert bzw. welche Vorgaben ausreichend sind, sagt uns der nächste Satz.

Satz 3.12 (Erzeugung linearer Abbildungen)

Gegeben seien endlichdimensionale Vektorräume V und W sowie Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ und $w_1, \dots, w_r \in W$. Dann gilt:

a) Sind die Vektoren $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig, dann gibt es mindestens eine lineare Abbildung

$$F\colon V \to W \quad \text{mit} \quad F(v_i) = w_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, r.$$

b) Ist $v_1, \dots, v_r$ eine Basis von V, so gibt es genau eine lineare Abbildung

$$F\colon V \to W \quad \text{mit} \quad F(v_i) = w_i \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, r.$$

Diese Abbildung F hat folgende Eigenschaften:

a) $\operatorname{Im}(F) = \operatorname{span}(w_1, \dots, w_r)$

b) F injektiv $\Leftrightarrow$ $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig

Um das Arbeiten mit linearen Abbildungen von endlichdimensionalen Vektorräumen zu vereinfachen, ist es oftmals hilfreich, statt der linearen Abbildung eine Matrix zu untersuchen. Wir überlegen uns daher im Folgenden, wie wir eine lineare Abbildung in eine Matrix übersetzen.

Satz 3.13 (Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung)

Gegeben seien die $\mathbb{K}$-Vektorräume

$$V \quad \text{mit der Basis} \quad \mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$$

und

$$W \quad \text{mit der Basis} \quad \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m).$$

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $F\colon V \to W$ genau eine Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$ in der Menge

$\mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ derart, dass

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Man bezeichnet $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$ als die Matrix, die F bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ darstellt.

Wir erhalten die darstellende Matrix einer linearen Abbildung bezüglich zweier Basen demnach, indem wir die Bilder der Basisvektoren von V in der Basis von W darstellen und die so erhaltenen (eindeutigen) Koeffizienten als Spalten in eine Matrix schreiben.

Wir können die Darstellungsmatrix auch transformieren, falls wir die Darstellung einer linearen Abbildung bezüglich anderer Basen betrachten wollen. Um besser zu verstehen, wie wir dabei vorgehen, benötigen wir zunächst eine weitere Definition.

Definition 3.14 (Koordinatenabbildung)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{A}} \colon \mathbb{K}^n \to V \quad \text{mit} \quad \Phi(e_j) = v_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n,$$

wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet.

$\Phi_{\mathcal{A}}$ heißt *Koordinatenabbildung*.

Mithilfe der Koordinatenabbildung können wir nun das folgende Diagramm betrachten und darin auch die darstellende Matrix von F bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V bzw. W entdecken.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow[M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)]{} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Dieses Diagramm können wir wie folgt lesen. Anstatt für einen Vektor $v \in V$ das Bild unter F, also $F(v)$ zu bestimmen, können wir $\Phi_{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \circ \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)$ ermitteln. Auf den ersten Blick mag das nicht deutlich einfacher aussehen, gerade wenn wir schöne Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vorliegen haben, ist es vergleichsweise einfach, die Bilder unter den beiden Koordinatenabbildungen zu ermitteln.

Nehmen wir an, wir haben die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $F \colon V \to W$ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V bzw. W gegeben, möchten diese aber bezüglich anderer Basen $\mathcal{A}'$ und $\mathcal{B}'$ darstellen. Dann benötigen wir einen sogenannten Basiswechsel, den wir ebenfalls mithilfe von Matrizen darstellen können.

Satz 3.15 (Basiswechsel)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit zwei Basen

$$\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}' = (u_1, \ldots, u_n).$$

Dann hat jeder Vektor v_j eine eindeutige Darstellung

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} u_i \quad \text{mit} \quad s_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Die Matrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'} := (s_{ij})$ ist invertierbar und heißt *Transformationsmatrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{A}'$*.

Achtung: Manchmal sind in der Bezeichnung für die Transformationsmatrix die Basen im Index und Exponenten auch genau vertauscht. Manchmal werden aber auch ganz andere Bezeichnungen eingeführt, wie etwa in Herbst 2019, Thema 3, Aufgabe 4.

Für die zu $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$ inverse Matrix gilt

$$T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}} = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'})^{-1}.$$

Insbesondere gibt es einen Zusammenhang zwischen der Transformationsmatrix und den Koordinatenabbildungen.

Satz 3.16

Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei endliche Basen eines Vektorraums V, dann gilt:

$$T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'} = \Phi_{\mathcal{A}'}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}}.$$

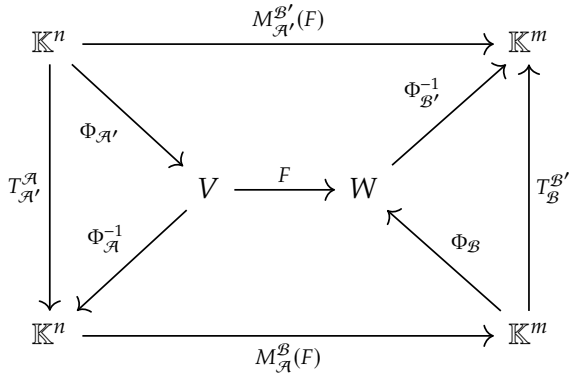
Einen Basiswechsel können wir auch für beide Vektorräume vornehmen. Dann gilt:

Satz 3.17

Ist $F\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V sowie $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W, dann gilt für die beteiligten Matrizen

$$M_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'}(F) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot T_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{A}}$$

Diesen Zusammenhang zwischen den beiden darstellenden Matrizen können wir uns wieder mithilfe eines Diagramms veranschaulichen.



Darstellende Matrizen sind oft hilfreich, wenn wir die Dimension des Kerns oder des Bildes einer linearen Abbildung bestimmen sollen. Dafür gilt der folgende Satz.

Satz 3.18

Gegeben sind die endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, eine lineare Abbildung $F\colon V \to W$ sowie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)$ von F bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Dann gilt:

- $\dim(\text{Kern}(F)) = \dim(\text{Kern}(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F)))$
- $\text{rang}(F) = \dim(\text{Im}(F)) = \text{rang}(M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(F))$

H24 – T2 – A4

Wahr oder falsch: Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ bildet die Teilmenge aller Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die der Gleichung $A^2 + A = 0$ genügen, einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Es gibt lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{Kern}(f) = \operatorname{Bild}(f)$.

c) Seien $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zwei lineare Abbildungen mit $f \circ g = 0$ und $g \circ f = 0$. Dann ist $f = 0$ oder $g = 0$.

Lösungsvorschlag

a) Falsch.

Für $n = 2$ und

$$M := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$M^2 + M = 0 \quad \text{aber} \quad (2M)^2 + (2M) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Somit ist die gegebene Teilmenge, wir bezeichnen sie mit U, bezüglich der Skalarmultiplikation nicht abgeschlossen, denn $M \in U$, aber $2M \notin U$, und folglich U kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Im Allgemeinen können wir zumindest misstrauisch werden, wenn im Term einer linearen Abbildung das Quadrat eines Arguments vorkommt.

b) Falsch.

Angenommen es gäbe eine solche lineare Abbildung f, dann gilt mit der Dimensionsformel wegen $\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim \operatorname{Bild}(f)$:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Kern}(f) + \dim \operatorname{Bild}(f) \quad &\Leftrightarrow \quad 3 = 2 \cdot \dim \operatorname{Kern}(f) \\ &\Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Kern}(f) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \quad \text{Widerspruch!} \end{aligned}$$

c) Falsch.

Seien

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

die Projektion auf die x- bzw. y-Achse. Offensichtlich gilt $f \neq 0 \neq g$, aber

$$(f \circ g) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad (g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

also $f \circ g = 0 = g \circ f$.

H24 – T3 – A2

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

werde die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x,$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ surjektiv ist, und bestimmen Sie eine Basis des Kerns von f.

b) Bestimmen Sie eine Basis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$ und eine Basis c_1, c_2, c_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basis die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt.

c) Entscheiden Sie, ob es eine Basis b'_1, b'_2, b'_3, b'_4 von $\mathbb{R}^3$ und eine Basis c'_1, c'_2, c'_3 von $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich dieser Basen die darstellende Matrix

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt, und begründen Sie die Entscheidung.

Lösungsvorschlag

a) Es ist $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rang}(A)$, das heißt, f ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{rang}(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ gilt. Überführe A also in Zeilenstufenform, um ihren Rang zu ermitteln.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3 - Z_2}}{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 \leftrightarrow Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ (-1)\cdot Z_3}}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist zu erkennen, dass $\operatorname{rang}(A) = 3$ gilt, das heißt, f ist surjektiv. Aus der Zeilenstufenform können wir zudem $\ker(f)$ ablesen. Es gilt:

$$\begin{Bmatrix} x_4 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 - x_4 = x_3 \\ x_1 = -x_3 - x_4 = x_3 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -2x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

das heißt insbesondere, dass durch $v := (1, 1, 1, -2)^T \in \mathbb{R}^4$ eine Basis des Kerns von f gegeben ist.

b) Es bezeichne e_1, e_2, e_3, e_4 die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Definiere $b_i := e_i$ und $c_i := f(b_i) = f(e_i)$ für $i = 1, 2, 3$ sowie $b_4 := v$.

Offensichtlich ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$, denn die vier Vektoren sind linear unabhängig, da $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} = 4$ und $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Analog ist c_1, c_2, c_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{a)}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{und} \quad \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Da

$$f(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3, \qquad f(b_2) = 0 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3,$$
$$f(b_3) = 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 1 \cdot c_3, \quad \text{und} \quad f(b_4) \overset{a)}{=} 0 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3 = 0$$

hat f bezüglich der beiden Basen M als darstellende Matrix.

c) Nein, solche Basen existieren nicht. Denn angenommen, sie würden existieren, dann müsste wegen f surjektiv insbesondere auch $\operatorname{rang}(M') = \dim \operatorname{Im}(f) = 3$ gelten. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_3+Z_1}{\underset{Z_3+Z_2}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist jedoch $\operatorname{rang}(M') = 2 \neq 3$.

F24 – T1 – A2

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$, so gibt es für alle Untervektorräume $W \subset V$ genau einen Untervektorraum U mit

$$V = W \oplus U.$$

b) Ist A eine reelle Matrix, so gilt: $A = 0 \Leftrightarrow A^T A = 0$.

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} y & 0 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & y \end{pmatrix}, B(y) = \begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dann ist folgende Abbildung linear:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \det(A(x,y)B(y)^{-1}).$$

Lösungsvorschlag

a) Die Aussage ist falsch, da U im Allgemeinen nicht eindeutig ist. Betrachte z.B. $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \langle e_1 \rangle$ mit e_1 dem ersten Einheitsvektor. Dann gilt für $U := \langle e_2 \rangle$ und $U' := \langle e_1 + e_2 \rangle$ offensichtlich

$$U \neq U', \quad \text{aber} \quad W \oplus U = \mathbb{R}^2 = W \oplus U'.$$

Folglich ist der Untervektorraum nicht eindeutig bestimmt.

b) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$ und $A = (a_{ij})$.

Damit gilt $A^T A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ mit $A^T A =: (b_{ij})$. Nach Definition der Matrizenmultiplikation folgt

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} \cdot a_{kj} \text{ für } 1 \leq i, j \leq n \quad \text{(In } A^T \text{ entsprechen die Zeilen gerade den Spalten von } A.\text{)}$$

„$\Rightarrow$“: Wenn $A = (a_{ij}) = 0$ folgt unmittelbar $A^T A = 0$

„$\Leftarrow$“: $A^T A = 0$

$\Rightarrow b_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i, j \leq n$

$\Rightarrow b_{jj} = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}^2 = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$

$\Rightarrow$ Da $a_{ij} \in \mathbb{R}$: $a_{kj}^2 = 0$ für alle $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

$\Rightarrow a_{kj} = 0$ für alle $1 \leq k \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

$\Rightarrow A = 0$

c) Bestimme $\det\left(A\left(x,y\right) \cdot B\left(y\right)^{-1}\right)$. Wegen der Regeln zum Rechnen mit der Determinante folgt:

$$\det\left(A\left(x,y\right)\cdot B\left(y\right)^{-1}\right)=\det\left(A\left(x,y\right)\right)\cdot\det\left(B\left(y\right)^{-1}\right)\overset{(*)}{=}x\cdot\det\begin{pmatrix}y&-1\\1&y\end{pmatrix}\cdot\det\left(B\left(y\right)\right)^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=}x\cdot\left(y^2+1\right)\cdot\tfrac{1}{y^2+1}=x$$

(∗) Entwicklung für A und B jeweils nach der 2. Spalte

Also zu zeigen: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto x$ linear

1) Seien $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}\right)=x_1+x_2=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\right)$$

2) Seien $\lambda\in\mathbb{R},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

$$f\left(\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}\right)=\lambda x=\lambda\cdot f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

Somit ist f linear.

F24 – T2 – A2

Es sei $P\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Projektion, also eine lineare Abbildung, die

$$P \circ P = P$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie

$$P(y) = y$$

für alle $y \in \text{Bild}(P) = \{P(x)\colon\ x \in \mathbb{R}^3\}$.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix (bzgl. der kanonischen Basis (e_1, e_2, e_3)) derjenigen Projektion an, die

$$\text{Bild}(P) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\colon\ x_1 - 2x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad P(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $y \in \text{Bild}(P)$, das heißt, es gibt $x \in \mathbb{R}^3$ mit $y = P(x)$. Da P nach Voraussetzung eine Projektion ist, folgt unmittelbar:

$$P(y) = P\left(P(x)\right) = (P \circ P)(x) = P(x) = y.$$

b) Gemäß Teilaufgabe a) wissen wir, dass $P(y) = y$ für alle $y \in \text{Bild}(P)$. Wir bestimmen also eine Basis von $\text{Bild}(P)$ und können für diese direkt die Bilder angeben. Wir sehen direkt, dass es sich bei

$$\mathcal{B}_1 \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

um eine Basis von $\text{Bild}(P)$ handelt. Weiterhin ist offensichtlich, dass

$$\mathcal{B} \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet. Bezüglich dieser Basis besitzt P die darstellende Matrix

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die gesuchte Darstellungsmatrix bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ zu erhalten, müssen wir noch mit der Basistauschmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

multiplizieren. So erhalten wir die Darstellungsmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Den ersten Vektor in $\mathcal{B}_1$ wählen wir, da wir dann das Bild des dritten Basisvektors in $\mathcal{B}$ einfach als Linearkombination von Vektoren in $\mathcal{B}$ darstellen können. Hätten wir in $\mathcal{B}_1$ einen anderen Basisvektor gewählt, wäre es notwendig gewesen,

$$P(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

als eine Linearkombination der Basis von $\mathbb{R}^3$ darzustellen, die wir stattdessen gewählt haben.

Für die Wahl

$$\mathcal{B}_1 := \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

hätten wir dann wegen

$$P(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

die folgende Darstellungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}$ erhalten:

$$M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

F24 – T3 – A3

Es sei

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad U = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A = SAS\}.$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

b) Bestimmen Sie die Dimension von U.

c) Bestimmen Sie den Rang der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}, A \mapsto A - SAS.$$

Lösungsvorschlag

a) 1. Offensichtlich ist $0 \in U$, das heißt, $U \neq \emptyset$.

2. Seien $A, B \in U$, das heißt, $A = SAS$ und $B = SBS$. **Zeige**: $A + B \in U$.

$A + B = SAS + SBS = (SA + SB) \cdot S = S \cdot (A + B) \cdot S \quad \Rightarrow A + B \in U.$

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in U$, das heißt $A = SAS$. **Zeige**: $\lambda A \in U$.

$\lambda A = \lambda SAS = S(\lambda A)S \quad \Rightarrow \lambda A \in U$

$\Rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist ein Untervektorraum

b) Es sei $A \coloneqq (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in U$

$$\Leftrightarrow A = SAS = S \cdot \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ c & b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$$

Also folgt $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

und somit $\dim U = 5$.

c) f ist nach Aufgabenstellung linear.

Weiter stellen wir fest, dass $\ker(f) = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid f(A) = 0\right\} = U$.

Mit der Dimensionsformel folgt nun:

$$\dim\left(\mathbb{R}^{3\times 3}\right) = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}\left(f\right).$$

Also insgesamt

$$\operatorname{rang}\left(f\right) = \dim \operatorname{Im}\left(f\right) = \dim\left(\mathbb{R}^{3\times 3}\right) - \dim \ker(f) \overset{b)}{=} 9 - 5 = 4.$$

H23 – T2 – A3

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob es eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die darstellende Matrix von f in Bezug zur Standardbasis.

a) $f(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}2\\5\\-2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

b) $f(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

a) Angenommen es gibt eine lineare Abbildung f mit den angegebenen Eigenschaften, dann gilt:

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Widerspruch, das heißt, es existiert keine solche Abbildung f.

b) Zeige, dass die drei Argumente linear unabhängig und damit wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ sind. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung f mit den gegebenen Eigenschaften.

Schreibe die Argumente als Zeilen einer Matrix A und zeige, dass diese vollen Rang besitzt. Genau dann sind die drei Vektoren linear unabhängig. Sei also

$$A := \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\-2 & 1 & 1\\1 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\det(A) = (-1) + 2 + 6 - 4 - 3 + 1 \overset{(\#)}{=} 1 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(A) = 3$$

also sind die Zeilenvektoren von A linear unabhängig.

Es bezeichnen $\mathcal{A} := \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$ und $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ ($\mathcal{B}$ ist die Standardbasis)

Aus der Angabe folgt unmittelbar

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\1 & 1 & 1\\3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Für die Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{A}$ gilt zudem:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & 3\\-1 & 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}}_{=:H=A^T} = \frac{1}{\det H} \cdot \begin{pmatrix}-4 & -1 & 3\\-1 & 0 & 1\\-7 & -1 & 5\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}-4 & -1 & -7\\-1 & 0 & -1\\3 & 1 & 5\end{pmatrix},$$

wobei $\det H = \det\left(H^T\right) = \det A \overset{(\#)}{=} 1$.

Insgesamt ergibt sich damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 & -7 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -15 \\ -2 & 0 & -3 \\ -6 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

H23 – T3 – A2

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}6\\1\\0\\5\end{pmatrix}$$

gegeben; ferner bezeichne

$$W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

den von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, und stellen Sie v_5 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 dar.

b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^4 \to W$ diejenige lineare Abbildung, die bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^4$ und der Basis v_1, v_2, v_3 von W die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt. Bestimmen Sie $f(v_5)$.

c) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to W$ aus Teilaufgabe b) eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.

Lösungsvorschlag

a) Da $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ genügt es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig.

Definiere A als die Matrix, mit $v_1, \dots, v_4$ als Zeilen, also $A := \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \\ v_4^T \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\operatorname{rang}(A) = 4 \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3, v_4$ linear unabhängig.

$$A = \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&1\end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3-Z_1\\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3-Z_2\\ Z_4-Z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&-2\\0&0&-2&-1\end{pmatrix} \overset{Z_4-2Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&-2\\0&0&0&3\end{pmatrix}$$

Folglich gilt $\operatorname{rang}(A) = 4$.

Seien nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $v_5 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$. Wir lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem, um die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ zu bestimmen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&6\\0&1&1&1&1\\1&1&1&0&0\\1&1&0&1&5\end{array}\right) \overset{\substack{Z_3-Z_1\\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&6\\0&1&1&1&1\\0&1&0&-1&-6\\0&1&-1&0&-1\end{array}\right) \overset{\substack{Z_3-Z_2\\ Z_4-Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&6\\0&1&1&1&1\\0&0&-1&-2&-7\\0&0&-2&-1&-2\end{array}\right)$$

$$\overset{Z_4-2Z_3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 3 \\ \lambda_2 & = & -2 \\ \lambda_3 & = & -1 \\ \lambda_4 & = & 4 \end{array}\right\}$$

b) Aus Teilaufgabe a) wissen wir, dass $v_5 = 3v_1 - 2v_2 - v_3 + 4v_4$. Da M die darstellende Matrix bezüglich der geordneten Basen (v_1, v_2, v_3, v_4) und (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^4$ beziehungsweise W ist, berechnet sich der Koordinatenvektor von $f(v_5)$ bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3) durch

$$M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt $f(v_5) = 0 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 3v_2$

c) M ist die darstellende Matrix von f bezüglich der geordneten Basen (v_1, v_2, v_3, v_4) von $\mathbb{R}^4$ und (v_1, v_2, v_3) von W.

Wenn wir also $\ker M$ und $\operatorname{Im}(M)$ bestimmen, erhalten wir die zu den Basen gehörenden Mengen von Koordinatenvektoren und damit $\ker(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$.

$$\ker(M) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid M \cdot x = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} : \; x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit folgt mit der obigen Überlegung

$$\ker(f) = \langle v_2 - v_1, v_3 - v_1 - v_4 \rangle .$$

Behauptung: $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1 - v_4\}$ ist eine Basis von $\ker(f)$

Dafür genügt es die lineare Unabhängigkeit zu beweisen, da die Menge offensichtlich ein Erzeugendensystem von $\langle v_2 - v_1, v_3 - v_1 - v_4 \rangle$ bildet.

Seien also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(v_2 - v_1) + \mu(v_3 - v_1 - v_4) = 0$. Dann folgt

$$(-\lambda - \mu) v_1 + \lambda v_2 + \mu v_3 - \mu v_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda - \mu) = \lambda = \mu = -\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0,$$

da v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig.

Offensichtlich gilt $\operatorname{Im}(M) = \left\{M \cdot x \mid x \in \mathbb{R}^4\right\} = \langle e_1, e_2 \rangle$. Damit folgt wieder mit der obigen Überlegung zum Zusammenhang von $\operatorname{Im}(M)$ und $\operatorname{Im}(f)$:

$$\operatorname{Im}(f) = \langle v_1, v_2 \rangle .$$

Da v_1 und v_2 nach Voraussetzung linear unabhängig sind, ist $\{v_1, v_2\}$ offensichtlich eine Basis von $\operatorname{Im}(f)$.

Tipp: Kontrolle mit der Dimensionsformel:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$$
$$4 = 2 + 2 \quad \checkmark$$

F23 – T1 – A2

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein Vektorraum mit $\dim V = 2n$. Weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$\dim(\text{Bild}(F) + \text{Kern}(F)) = n.$$

Beweisen Sie, dass dann $\text{Bild}(F) = \text{Kern}(F)$ gilt.

Lösungsvorschlag

Nach Dimensionsformel gilt:

$$2n = \dim V = \dim \ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F) \quad \text{und} \quad n = \dim\left(\ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)\right).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} n &= \dim\left(\ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)\right) \\ &= \underbrace{\dim \ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)}_{=2n} - \dim\left(\ker(F) \cap \operatorname{Im}(F)\right) \\ \Leftrightarrow\ n &= \dim\left(\ker(F) \cap \operatorname{Im}(F)\right) \end{aligned}$$

Da

$$\operatorname{Im}(F), \ker(F) \subseteq \ker(F) + \operatorname{Im}(F)$$

folgt

$$\dim \operatorname{Im}(F) \leq n \quad \text{und} \quad \dim \ker(F) \leq n.$$

Da außerdem

$$\ker(F) \cap \operatorname{Im}(F) \subseteq \ker(F) \quad \text{und} \quad \ker(F) \cap \operatorname{Im}(F) \subseteq \operatorname{Im}(F)$$

folgt mit

$$\dim \ker(F) \cap \operatorname{Im}(F) = n$$

direkt

$$\ker(F) = \ker(F) \cap \operatorname{Im}(F) = \operatorname{Im}(F).$$

F23 – T2 – A3

Gegeben sei die relle 4×4-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter bezeichne Pol_3 den reellen Vektorraum aller reellen Polynome in der Variablen X vom Grad ≤ 3. Bekanntlich ist

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und

$$C = (X^0, X^1, X^2, X^3)$$

eine Basis von Pol_3.

a) Es sei $f\colon \mathrm{Pol}_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ diejenige lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix bzgl. der Basen C und B die Matrix M ist. Geben Sie $f(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0)$ (für $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) konkret an.

b) Es sei $g\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathrm{Pol}_3$ diejenige lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix bzgl. der Basen B und C die Matrix M ist. Geben Sie $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ (für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) konkret an.

c) Es ist $D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$.
(Dies darf ohne Beweis verwendet werden.)

Es sei $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ derjenige Endomorphismus, dessen Darstellungsmatrix bzgl. der Basis D die Matrix M ist. Geben Sie $h(x)$ für
$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ konkret an.

Lösungsvorschlag

a) Der Koordinatenvektor des Polynoms $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ bezüglich der Basis C ist gegeben durch

$$v^T := (a_0, a_1, a_2, a_3)^T.$$

Um den Koordinatenvektor von $f\left(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + s_0\right)$ bezüglich B zu erhalten, berechnen wir

$$M \cdot v = (a_2 + a_3,\ 2a_2 + 4a_3,\ a_0 + 3a_1,\ 2a_0 + 4a_1)^T.$$

Durch Übersetzen des Koordinatenvektors bezüglich der Basis B erhalten wir damit

$$f\left(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + s_0\right) = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 & 2a_2 + 4a_3 \\ a_0 + 3a_1 & 2a_0 + 4a_1 \end{pmatrix}$$

b) Der Koordinatenvektor von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis B ist $w^T := (a, b, c, d)^T$.

Wir bestimmen zunächst wieder den Koordinatenvektor des Bildes unter der Abbildung g und berechnen dafür

$$M \cdot w = (c + 3d, 2c + 4d, a + 3b, 2a + 4b)^T .$$

Damit ergibt sich das Bild der Matrix unter g – analog zu Teilaufgabe a – durch Übersetzen des Koordinatenvektors bezüglich der Basis C. Somit folgt:

$$g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a + 4b)\, X^3 + (a + 3b)\, X^2 + (2c + 4b)\, X + (c + 3d) .$$

c) Bestimme zunächst den Koordinatenvektor von x bezüglich der Basis D. Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = x.$$

Wir erhalten die eindeutig bestimmten Werte der Koeffizienten und damit den Koordinatenvektor, indem wir das zugehörige lineare Gleichungssystem lösen. Somit folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = x_2 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = x_3 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = x_4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = x_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \lambda_3 = x_3 - \lambda_4 \\ \lambda_4 = \frac{x_3 - x_4}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \lambda_3 = \frac{x_3 + x_4}{2} \\ \lambda_4 = \frac{x_3 - x_4}{2} \end{array}\right\}$$

Der Koordinatenvektor von x bezüglich D ist also gegeben durch

$$u^T := \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 - x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_3 - x_4}{2}\right)^T .$$

Der Koordinatenvektor von $h(x)$ bezüglich der Basis D berechnet sich dann über

$$M \cdot u = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_4 \\ 3x_3 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 \\ 3x_1 - x_4 \end{pmatrix}^T .$$

Wir erhalten $h(x)$ dann wieder durch Übersetzen des Koordinatenvektors bezüglich der Basis D. Somit folgt:

$$h(x) = \begin{pmatrix} 2x_3 - x_4 + (3x_3 - x_4) \\ 2x_3 - x_4 - (3x_3 - x_4) \\ 2x_1 - x_2 + (3x_1 - x_2) \\ 2x_1 - x_2 - (3x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_3 - 2x_4 \\ -x_3 \\ 5x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

F21 – T1 – A2

Es bezeichne P_2 den reellen Vektorraum aller rellen Polynome vom Grad ≤ 2. Weiter sei a ein reeller Parameter.

a) Ermitteln Sie diejenigen Werte für $a \in \mathbb{R}$, für die

$$(1 + 2X + X^2, aX + X^2, a + X)$$

linear unabhängig ist.

b) Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon P_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gibt, die

$$\varphi(1 + 2X + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(aX + X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(a + X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die diese lineare Abbildung eindeutig ist.

Lösungsvorschlag

a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} & \alpha\left(1 + 2X + X^2\right) + \beta\left(aX + X^2\right) + \gamma\left(a + X\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\alpha + a \cdot \gamma\right) + \left(2\alpha + \beta \cdot a + \gamma\right) \cdot X + \left(\alpha + \beta\right) X^2 = 0 \end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der beiden Polynome auf der linken und rechten Seite der Gleichung erhalten wir das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & & & + & a\gamma & = & 0 \\ 2\alpha & + & a\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

Suche also Werte von a, für die das homogene lineare Gleichungssystem nur die triviale Lösung $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$ besitzt und damit eindeutig lösbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2 - 2Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_1 - Z_3}}{} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2 + (a-2)Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 0 & 0 & (a-1)^2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizientenmatrix besitzt nur für $a \neq 1$ vollen Rang. Daher ist das homogene lineare Gleichungssystem genau für $a \neq 1$ eindeutig lösbar mit $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Das heißt, die Menge ist für $a \neq 1$ linear unabhängig.

b) Da $\dim P_2 = 3$ ist $\{1 + 2X + X^2, aX + X^2, a + X\}$ für $a \neq 1$ eine Basis von P_2. Damit gibt es für $a \neq 1$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung φ mit den gewünschten Bildern für die Basisvektoren.

Für $a = 1$ ist $\{1 + 2X + X^2, X + X^2, 1 + X\}$ linear abhängig und $1 + 2X + X^2 = \left(X + X^2\right) + (1 + X)$. Wir überlegen uns nun, dass es für $a = 1$ unendlich viele lineare Abbildungen gibt, die die drei Gleichungen erfüllen. Dafür geben wir zunächst Bilder einer neuen Basis an und zeigen im Nachgang, dass die so konstruierten Abbildungen die gegebenen Gleichungen erfüllen.

Offensichtlich ist $\{1 + 2X + X^2, X + X^2, X^2\}$ linear unabhängig und damit eine Basis von P_2. Insbesondere gibt es dann für jedes $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi_C \colon P_2 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\varphi_C\left(1 + 2X + X^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_C\left(X + X^2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_C\left(X^2\right) = C$$

Für diese Abbildung φ_C gilt außerdem:

$$\begin{aligned} \varphi_C(1 + X) &= \varphi_C\left(\left(1 + 2X + X^2\right) - \left(X + X^2\right)\right) \overset{\varphi_C \text{ linear}}{=} \varphi_C\left(1 + 2X + X^2\right) - \varphi_C\left(X + X^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erfüllt für $a = 1$ jede lineare Abbildung φ_C die gewünschten Eigenschaften. Da es in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mindestens zwei unterschiedliche Elemente C und C' gibt, existieren auch zugehörige, voneinander verschiedene lineare Abbildungen φ_C und $\varphi_{C'}$. Damit ist die Existenz einer linearen Abbildung, die die gegebenen Gleichungen erfüllt, belegt und die Eindeutigkeit widerlegt.

F21 – T2 – A3

Gegeben seien lineare Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Weiter sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so dass $f(x) = g(x)$.

b) Gilt $f(b_1) = g(b_1)$ und $f(b_2) = g(b_2)$ und ist $f(b_1), f(b_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, so ist $f = g$.

c) Haben sowohl Kern(f) als auch Kern(g) die Dimension 2, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $f(x) = g(x) = 0$.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

$f, g\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear $\quad\Rightarrow\quad$ $f - g\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linear

$f(x) = g(x) \ \Leftrightarrow\ 0 = f(x) - g(x) = (f-g)(x) \ \Leftrightarrow\ x \in \ker(f-g)$

Nach Dimensionsformel gilt:

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} = \dim\ker(f-g) + \underbrace{\dim \operatorname{Im}\left(f-g\right)}_{\leq \dim \mathbb{R}^2 = 2} \ \Rightarrow\ \dim\ker(f-g) \geq 1$$

Somit $\exists\, x \in \ker(f-g) \setminus \{0\}$ und für dieses gilt $(f-g)(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = g(x)$

b) Falsch.

Da b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, gibt es eindeutig bestimmte lineare Abbildungen $f, g\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{aligned} f(b_1) &= e_1, \quad f(b_2) = e_2, \quad f(b_3) = e_1 \\ g(b_1) &= e_1, \quad g(b_2) = e_2, \quad g(b_3) = e_2, \end{aligned}$$

wobei $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Standardbasis mit $e_1 \neq e_2$ bezeichnen.

Offensichtlich gelten $f(b_1) = g(b_1)$ und $f(b_2) = g(b_2)$, aber $f \neq g$, da $f(b_3) = e_1 \neq e_2 = g(b_3)$.

c) Wahr.

Es sind $\ker(f), \ker(g) \subseteq \mathbb{R}^3$. Da also $\ker(f) + \ker(g) \subseteq \mathbb{R}^3$ Untervektorraum, folgt mit der Dimensionsformel:

$$\begin{aligned} 3 = \dim \mathbb{R}^3 \geq \dim\left(\ker(f) + \ker(g)\right) &= \dim\ker(f) + \dim\ker(g) - \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \\ &= 2 + 2 - \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \dim\left(\ker(f) \cap \ker(g)\right) \geq 1$

$\Rightarrow \exists\, x \in \ker(f) \cap \ker(g)$ mit $x \neq 0$

Für dieses x gilt dann $f(x) = g(x) = 0$.

F21 – T3 – A4

Sei V ein reeller Vektorraum und sei $f: V \to V$ eine lineare Abbildung. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n\text{-mal}}$. Ferner definieren wir $f^0 := \mathrm{id}$, wobei $\mathrm{id}: V \to V$ die Identitätsabbildung ist.

a) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann gilt $\mathrm{Kern}(f^n) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $v \in \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ mit $v \notin \mathrm{Kern}(f^n)$. Zeigen Sie:
Die Vektoren $f^0(v), f^1(v), f^2(v), \ldots, f^n(v)$ sind linear unabhängig.

Lösungsvorschlag

a) Beweis per vollständiger Induktion Achtung: Nach Angabe gilt $0 \in \mathbb{N}$!

IA ($n = 0$): $\ker\left(f^0\right) = \ker\left(\mathrm{id}_v\right) = \{0\}$ ✓

IS ($n \rightsquigarrow n+1$): Es sei f injektiv und $\ker\left(f^n\right) = \{0\}$ für $n \in \mathbb{N}$ beliebig (IV)

Zeige: $\ker\left(f^{n+1}\right) = \{0\}$

Sei $v \in V$ mit $f^{n+1}(v) = 0 \Leftrightarrow f^n\left(f(v)\right) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in \ker\left(f^n\right) \overset{\text{IV}}{=} \{0\}$

$\overset{f \text{ inj.}}{\Leftrightarrow} v = 0$

Somit folgt $\ker\left(f^{n+1}\right) = \{0\}$

b) $f^0(v), f^1(v), \ldots, f^n(v)$ linear unabhängig

Seien $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $w := \lambda_0 f^0(v) + \lambda_1 f^1(v) + \ldots + \lambda_n f^n(v) = 0$.

Wir bemerken, dass $f^k(v) = 0$ für $k \geq n+1$, da $f^k = f^{k-(n+1)}\left(f^{n+1}(v)\right)$, wobei $f^{n+1}(v) = 0$, denn $v \in \ker(f^{n+1})$.

Damit gilt $f^k = f^{k-(n+1)}\left(f^{n+1}(v)\right) = f^{k-(n+1)}(0)$. Und mit f^m linear für $m \in \mathbb{N}$ erhalten wir $f^{k-(n+1)}(0) = 0$.

Damit folgt $0 = f^n(0) = f^n(w) \overset{(*)}{=} \lambda_0 f^n(v) + \lambda_1 f^{n+1}(v) + \ldots + \lambda_n f^{2n}(v) = \lambda_0 f^n(v)$

$\Rightarrow \lambda_0 = 0$, denn $v \notin \ker\left(f^n\right)$

$(*)$ Berücksichtige die Definition von w und die Tatsache, dass f^n linear ist, da f linear ist.

Wir überlegen uns nun induktiv, dass wir wegen $\lambda_0 = 0$ auch $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ schlussfolgern können.

Haben wir gezeigt, dass $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$ mit $0 \leq m < n$ (Induktionsvoraussetzung), dann folgt (im Induktionsschritt):

$$0 = f^{n-(m+1)}(0) = f^{n-(m+1)}(w) \overset{\text{IV}}{=} \lambda_{m+1} f^n(v) + \lambda_{m+2} f^{n+1}(v) + \ldots \lambda_n f^{2n-(m+1)}(v) = \lambda_{m+1} f^n(v)$$

$\Rightarrow \lambda_{m+1} = 0,$ denn $v \notin \ker(f^n) \neq 0$

Induktiv folgt somit $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ und damit $f^0(v), f^1(v), \ldots, f^n(v)$ linear unabhängig.

H20 – T1 – A2

Wir betrachten den Vektorraum P_3 aller reellen Polynome in der Unbestimmten T und vom Grad höchstens 3.

a) Bestimmen Sie die Dimension von

$$U := \operatorname{span}\left\{2T^3 - T - 1, T^3 + T^2 - 2T, T^2 - 3T + 2, 4T^3 + T^2 - 6T + 1\right\}.$$

b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : P_3 \to \mathbb{R}, p \mapsto p(1).$$

Beweisen Sie

$$U = \operatorname{Kern}(f).$$

c) Bestimmen Sie alle reellen Parameter-Werte λ, für welche

$$(2\lambda - 1)T^3 + (\lambda + 2)T^2 + (-\lambda + 1)T + (-\lambda - 3)$$

in U liegt.

Lösungsvorschlag

a) Schreibe die Koordinatenvektoren der vier Polynome bezüglich der Basis $\{T^3, T^2, T^1, 1\}$ von P_3 als Zeilen in eine Matrix und bestimme ihren Rang.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 - 2Z_2 \\ Z_4 - 4Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 + 2Z_3 \\ Z_4 + 3Z_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix besitzt offensichtlich Rang 3 und daher $\dim U = 3$.

b) Für $p = X$ ist $f(p) = 1 \neq 0$. Daher folgt, dass $\operatorname{Kern}(f) \neq P_3$ und deshalb insbesondere

$$\dim \operatorname{Kern}(f) < 4 = \dim P_3.$$

Da

$$f\left(2T^3 - T - 1\right) = f\left(T^3 + T^2 - 2T\right) = f\left(T^2 - 3T + 2\right) = f\left(4T^3 + T^2 - 6T + 1\right) = 0$$

folgt $U \subseteq \operatorname{Kern}(f)$. Weil außerdem

$$3 \overset{a)}{=} \dim U \leq \dim \operatorname{Kern}(f) < 4 \quad \Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Kern}(f) = 3$$

folgt damit direkt $U = \operatorname{Kern}(f)$

c) Das Polynom liegt für $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann in U, wenn es im Kern von f ist. Bilde es daher mit f ab und suche $\lambda \in \mathbb{R}$ für die das Bild des Polynoms unter f Null ist. Es gilt

$$\begin{aligned} f\left((2\lambda - 1)T^3 + (\lambda + 2)T^2 + (-\lambda + 1)T + (-\lambda + 3)\right) &= (2\lambda - 1) + (\lambda + 2) + (-\lambda + 1) + (-\lambda + 3) \\ &= \lambda + 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn $\lambda = -5$. Das Polynom ist also nur für $\lambda = -5$ in $U = \operatorname{Kern}(f)$ enthalten.

H20 – T2 – A2

a) Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist, und berechne in diesen Fällen die zu M_α inverse Matrix.

b) Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Man zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3$$

gibt, und bestimme die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag

a) Die Matrix M_α ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M_\alpha) \neq 0$ gilt. Es ist

$$\det(M_\alpha) = 2\alpha + 1 - \alpha = \alpha + 1 \neq 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und damit M_α invertierbar für $\alpha \neq -1$. Wir benutzen die bekannte Formel, um die Inverse zu berechnen und erhalten so

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha+1} \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha & 1 \\ \alpha - 1 & \alpha & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} 2\alpha & \alpha - 1 & -2 \\ \alpha & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeige, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist v_1, v_2, v_3 dann eine Basis. Folglich gibt es eine eindeutig bestimmte, also genau eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Zeige: v_1, v_2, v_3 linear unabhängig

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Löse das entstehende homogene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{Z_2 - Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir lesen damit die Lösungen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ab, also v_1, v_2, v_3 linear unabhängig und damit f eindeutig wie oben dargestellt.

Bezeichnen $\mathcal{B} := \{v_1, v_2, v_3\}$ sowie $\mathcal{E}_3 := \{e_1, e_2, e_3\}$, beziehungsweise $\mathcal{E}_2 := \{e_1, e_2\}$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^2$ mit den jeweiligen i-ten Einheitsvektoren e_i.

Die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}(f)$ von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ beziehungsweise $\mathcal{E}_2$ von $\mathbb{R}^3$ beziehungsweise $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist $A = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(f)$, das heißt die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{E}_3$ und $\mathcal{E}_2$. Wir benötigen folglich die Basisaustauschmatrix $T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$. Diese ist gegeben durch

$$T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} A &= M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(f) \\ &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}(f) \cdot T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}(f) \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_2}\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

H20 – T2 – A3

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2 Matrizen mit der Standardbasis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist der von B_1, B_2, B_3 aufgespannte Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Ferner werde für die fest gewählte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Abbildung

$$f : V \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(X) = AX + X^T A$$

betrachtet; dabei bezeichnet X^T die zu $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ transponierte Matrix.

a) Man zeige, dass f linear ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix M von f bezüglich der Basis B_1, B_2, B_3 von V und der Basis B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Man bestimme eine Basis von Kern(f) und eine Basis von Bild(f).

Lösungsvorschlag

a) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $M, N \in V$.

i) **Zeige**: $f(M + N) = f(M) + f(N)$

$$\begin{aligned} f(M+N) &= A(M+N) + (M+N)^T A = AM + AN + \left(M^T + N^T\right) A \\ &= AM + AN + M^T A + N^T A = AM + M^T A + AN + N^T A \\ &= f(M) + f(N) \end{aligned}$$

ii) **Zeige**: $f(\lambda M) = \lambda f(M)$

$$f(\lambda M) = A(\lambda M) + (\lambda M)^T A \overset{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda AM + \lambda M^T A = \lambda \left(AM + M^T A\right) = \lambda f(M)$$

$\Rightarrow f$ ist linear

b) Bestimme $f(B_i), i = 1, 2, 3$ und stelle die Bilder in der Basis B_1, B_2, B_3, B_4 dar.

$$f(B_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot B_1 + 2 \cdot B_2 + (-2) \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$f(B_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

$$f(B_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 3 \cdot B_2 + 3 \cdot B_3 + 0 \cdot B_4$$

Damit ergibt sich $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es gilt $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rang}(M)$ und offensichtlich ist $\operatorname{rang}(M) = 2$

Dass $\operatorname{rang}(M) = 2$ gilt, sehen wir durch die lineare Abhängigkeit der 2. und 3. Spalte, sowie die lineare Unabhängigkeit der 1. und 2. Spalte.

An den Einträgen in der ersten Zeile von M erkennen wir direkt, dass $f(B_1)$ und $f(B_2)$ linear unabhängig sind. Wegen $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rang}(M) = 2$ ist daher $f(B_1), f(B_2)$ eine Basis von $\operatorname{Im}(f)$.

Da B_1, B_2, B_3, B_4 eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, sind insbesondere auch B_1, B_2, B_3 linear unabhängig und damit $\dim V = \dim \langle B_1, B_2, B_3 \rangle = 3$. Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ergibt sich:

$$\dim \operatorname{Kern}(f) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(f) = 3 - 2 = 1.$$

Da f linear folgt:

$$f(3 \cdot B_2 - B_3) = 3 \cdot f(B_2) - f(B_3) \overset{b)}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot B_2 - B_3 \in \ker(f)$$

Es ist $3 \cdot B_2 - B_3 \neq 0$ und daher $3 \cdot B_2 - B_3$ linear unabhängig. Da außerdem $\dim \ker(f) = 1$ bildet der linear unabhängige Vektor $3 \cdot B_2 - B_3$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.

H20 – T3 – A1

Es sei $U_1 := \text{span}\{v_1, \dots, v_4\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Weiter seien

$$U_2 := \{(x_1, \dots, x_4)^T \mid x_1 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

und

$$U := U_1 \cap U_2.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Es sei M die Menge der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen

$$F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F(u) = 0 \text{ für alle } u \in U.$$

Zeigen Sie, dass M ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie eine Basis von M.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $v \in U_1$, das heißt, $\exists\, \lambda_i \in \mathbb{R}\colon v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4\\ \lambda_1 + \lambda_4\\ \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4\\ \lambda_1 + \lambda_2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} v \in U_2 &\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 = -2\lambda_1 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4 \end{aligned}$$

Damit folgt: $U_1 \cap U_2 = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda_1\\ -2\lambda_1 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{=:B}$

Da B ein Erzeugendensystem von $U_1 \cap U_2$ und offensichtlich linear unabhängig, ist B eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

b) Wir wissen, dass die Menge $N := \{F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid F \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Da $M \subseteq N$ genügt es zu beweisen, dass M ein Untervektorraum in N ist, da M dann bei Einschränkung der Skalarmultiplikation und Addition auf M zu einem Vektorraum wird.

- Offensichtlich ist $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ v \mapsto v$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $F(u) = 0$ für alle $u \in U$. Das heißt insbesondere, dass $F \in M$ und somit $M \neq \emptyset$.
- Seien $F, G \in M$. **Zeige**: $F + G \in M$

  Offensichtlich ist $F + G$ wieder eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, denn N ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Es genügt also $(F + G)(u) = 0$ für alle $u \in U$ zu beweisen.

  Sei also $u \in U$ beliebig. Dann gilt wegen $F(u) = 0 = G(u)$ insbesondere auch:

$$(F + G)(u) = F(u) + G(u) = 0 + 0 = 0.$$

- Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $F \in M$. **Zeige**: $\lambda F \in M$

  Offensichtlich ist λF eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, denn N ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Es genügt also $(\lambda F)(u) = 0$ für alle $u \in U$ zu beweisen.

  Sei also $u \in U$ beliebig. Dann gilt wegen $F(u) = 0$ insbesondere auch:

$$(\lambda F)(u) = \lambda F(u) = \lambda 0 = 0.$$

Es ist also M ein Untervektorraum im $\mathbb{R}$-Vektorraum N und damit selbst ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Wir wissen, dass jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ von der Form $F(v) = Av$ mit einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(1 \times 4; \mathbb{R})$ ist. Um eine Basis von M anzugeben ist es somit ausreichend, die Matrizen zu identifizieren, welche die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen $F \in M$ beschreiben und für diese Menge, die einen Untervektorraum in $\mathrm{Mat}(1 \times 4; \mathbb{R})$ bildet, eine Basis anzugeben.

Sei also $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ eine Matrix, die eine Abbildung $F \in M$ beschreibt. Wegen $F(u) = Au = 0$ für alle $u \in U$ folgt direkt:

$$\begin{Bmatrix} a_1 - 2a_2 = 0 \\ -2a_2 + a_3 = 0 \\ -3a_2 + a_4 = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} a_1 = 2a_2 \\ a_3 = 2a_2 \\ a_4 = 3a_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow A = a_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \in \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle =: M'$$

Mit diesen Überlegungen folgt

$$M = \left\{ F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \mid F(v) = Av, A \in M' \right\}$$

und daher ist durch die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} v$$

eine Basis von M gegeben.

Alternativ können wir uns auch das Folgende überlegen:
Wenn wir die Basis B von U aus Teilaufgabe a) etwa durch e_1 zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ erweitern, dann ist jede Abbildung $F \in M$ eindeutig bestimmt durch die Bilder der Basisvektoren b_1, b_2, b_3 aus B, die nach Voraussetzung 0 sein müssen, und dem Bild von e_1 unter G, das wir beliebig in $\mathbb{R}$ wählen können. Damit erhalten wir jede Abbildung $F \in M$ als ein Vielfaches der $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $G\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, die eindeutig bestimmt ist durch

$$G(b_1) = 0, \quad G(b_2) = 0, \quad G(b_3) = 0, \quad G(e_1) = 1.$$

Folglich ist also G eine Basis von M.

F20 – T2 – A2

Es sei V ein reeller Vektorraum mit Basis v_1, v_2, v_3, v_4 und W ein reeller Vektorraum mit Basis w_1, w_2, w_3, w_4. Weiter sei $f\colon V \to W$ linear und es gelte für alle $k = 1, 2, 3, 4$

$$f(v_k) = \sum_{i=1}^{4} (|k-i| - 1) w_i.$$

Bestimmen Sie den Rang von f.

Lösungsvorschlag

Es bezeichne $\mathcal{B} \coloneqq \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ und $\mathcal{B}' \coloneqq \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ die gegebenen Basen von V und W. Für die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$ von f bzg. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ folgt gemäß der Angabe:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt zudem $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\right)$. Bestimme also den Rang der Darstellungsmatrix durch Überführen in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_1 \\ Z_4+2Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{Z_4+Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{Z_4 \leftrightarrow Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Somit folgt unmittelbar $\operatorname{rang}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)\right) = \operatorname{rang}(f) = 4$, das heißt, der Rang von f ist 4.

H19 – T3 – A4

Für eine lineare Abbildung $F\colon V_1 \to V_2$ bezeichne $M_{B_1,B_2}(F)$ die Darstellungsmatrix von F bezüglich einer Basis B_1 von V_1 und einer Basis B_2 von V_2.

Es sei nun $A := (v_1, v_2, v_2)$ eine Basis eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V und

$$B := (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1).$$

a) Zeigen Sie, dass B ebenfalls eine Basis von V ist.

b) Sei $\mathrm{id}_V\colon V \to V\colon v \mapsto v$ die identische Abbildung. Berechnen Sie die Darstellungsmatrizen $M_{A,A}(\mathrm{id}_V), M_{B,A}(\mathrm{id}_V), M_{A,B}(\mathrm{id}_V)$ sowie $M_{B,B}(\mathrm{id}_V)$.

Lösungsvorschlag

a) Zeige, dass $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ linear unabhängig. Da nach Angabe $\dim V = |A| = 3$ gilt, handelt es sich bei B dann um eine Basis.

Zeige: $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1$ linear unabhängig

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 (v_1 + v_2) + \lambda_2 (v_2 + v_3) + \lambda_3 (v_3 + v_1) = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_3) v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) v_3 = 0$

Da A eine Basis von V ist, folgt damit:

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{Bmatrix} \overset{\text{II - I}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{Bmatrix} \overset{\text{III + II}}{\Longleftrightarrow} \begin{Bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

b) Offensichtlich gilt $M_{A,A}(\mathrm{id}_V) = M_{B,B}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$.

Weiterhin bemerken wir, dass $M_{A,B}(\mathrm{id}_V) = (M_{B,A}(\mathrm{id}_V))^{-1}$.

Aus der Angabe lesen wir direkt ab:

$$M_{B,A}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$M_{A,B}(\mathrm{id}_V) = (M_{B,A}(\mathrm{id}_V))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

F19 – T2 – A2

Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Gilt $\operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\varphi^2)$, so ist φ injektiv.

b) Ist φ injektiv, so gilt $\operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\varphi^2)$.

c) Gilt $\operatorname{Kern}(\varphi) = \operatorname{Kern}(\varphi^2)$, so folgt $\operatorname{Kern}(\varphi^2) = \operatorname{Kern}(\varphi^3)$.

Lösungsvorschlag

a) Falsch.

Betrachte dafür $V = \mathbb{R}$ und die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Offensichtlich ist $\varphi \in \operatorname{End}(\mathbb{R})$ und $\mathbb{R} = \ker(\varphi) = \ker\left(\varphi^2\right)$. Jedoch φ nicht injektiv, da der Kern von φ nicht trivial ist, das heißt es gilt nicht $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

b) Wahr.

Es ist φ genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern}(\varphi) = \{0\}$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern}(\varphi^2) &= \left\{v \in V \mid \varphi(\varphi(v)) = 0\right\} \\ &= \left\{v \in V \mid \varphi(v) \in \operatorname{Kern}(\varphi)\right\} \\ &= \left\{v \in V \mid \varphi(v) = 0\right\} = \operatorname{Kern}(\varphi).\end{aligned}$$

c) Wahr.

$$\begin{aligned}x \in \operatorname{Kern}(\varphi^3) &\Leftrightarrow \varphi^2(\varphi(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(x) \in \operatorname{Kern}(\varphi^2) = \operatorname{Kern}(\varphi) \\ &\Leftrightarrow \varphi(\varphi(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Kern}(\varphi^2).\end{aligned}$$

Also gilt $\operatorname{Kern}(\varphi^3) = \operatorname{Kern}(\varphi^2)$.

F19 – T2 – A4

Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Endomorphismus, der

$$\varphi^2 = \mathrm{id}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\7\end{pmatrix}$$

erfüllt. Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_B^B(\varphi)$ bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

und die Darstellungsmatrix $M_E^E(\varphi)$ von φ bezüglich der kanonischen Basis

$$E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

an.

Lösungsvorschlag

Da $\varphi^2 = \mathrm{id}$ folgt $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \varphi\left(\varphi\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right) = \varphi^2\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \overset{\varphi^2=\mathrm{id}}{=} \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

Stelle nun noch $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\7\end{pmatrix}$ in der Basis B dar: $\begin{pmatrix}0\\-6\\7\end{pmatrix} = (-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich $M_B^B(\varphi) = \begin{pmatrix}0&1&-3\\1&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Bestimme nun die Basiswechselmatrizen T_B^E und $T_E^B = \left(T_B^E\right)^{-1}$

$$T_B^E = \begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}, \quad T_E^B = \left(T_B^E\right)^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix}0&-2&0\\-1&1&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$M_E^E(\varphi) = T_B^E \cdot M_B^B(\varphi) \cdot T_E^B = \begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-3\\1&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot T_E^B$$
$$= \begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-6\\0&-2&7\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\2&-1&0\\0&2&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&-7&-6\\-2&8&7\end{pmatrix}$$

Alternative Lösungen sind möglich, etwa e_2 in B darstellen und darüber $\varphi(e_2)$ ermitteln. $e_1, e_2 \in B$ und damit $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_3)$ bekannt. Dann ist $M_E^E(\varphi)$ die Matrix mit Spaltenvektoren $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$.

F19 – T3 – A2

Zu gegebenem $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ betrachten wir die Abbildung

$$\rho_B \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, A \mapsto AB.$$

a) Weisen Sie nach, dass ρ_B ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix von ρ_B bezüglich der Basis

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ an.

c) Bestimmen Sie den Rang von ρ_B in Abhängigkeit vom Rang von B.

Lösungsvorschlag

a) i) ρ_B ist wohldefiniert, da $A \cdot B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Zeige noch, dass ρ_B linear, dann gilt $\rho_B \in \operatorname{End}\left(\mathbb{R}^{2\times 2}\right)$.

Seien also $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) **Zeige**: $\rho_B(M+N) = \rho_B(M) + \rho_B(N)$

$\rho_B(M+N) = (M+N)\cdot B = M\cdot B + N\cdot B = \rho_B(M) + \rho_B(N)$

iii) **Zeige**: $\rho_B(\lambda M) = \lambda \rho_B(M)$

$\rho_B(\lambda M) = (\lambda M)\cdot B = \lambda\cdot(M\cdot B) = \lambda\rho_B(M)$

b) Es sei $B = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Bezeichne $\mathcal{E}$ die gegebene Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann ergibt sich unmittelbar aus den Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren bezüglich $\mathcal{E}$:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\left(\rho_B\right) = \begin{pmatrix}a & c & 0 & 0\\ b & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & c\\ 0 & 0 & b & d\end{pmatrix}$$

c) Um den Rang von ρ_B zu bestimmen genügt es, $\operatorname{rang}\left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\left(\rho_B\right)\right)$ zu ermitteln.

Aufgrund der Nulleinträge folgt, dass die beiden ersten Zeilen von $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\left(\rho_B\right)$ unabhängig von den beiden letzten sind. Somit entspricht die Anzahl linear unabhängiger Zeilen in $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\left(\rho_B\right)$ der Summe der Anzahlen linear unabhängiger Zeilen in diesen beiden Blöcken. Da darin jeweils die Matrix B als Blockmatrix neben Nulleinträgen steht, entspricht die Anzahl linear unabhängiger Zeilen in jedem der beiden Blöcke dem Rang von B.

Anhand dieser Überlegung erhalten wir also

$$\operatorname{rang}\left(\rho_B\right) = \operatorname{rang}\left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}\left(\rho_B\right)\right) = 2\cdot\operatorname{rang}(B).$$

H18 – T1 – A2

Für den reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für die es

a) keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

b) genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

c) unendlich viele Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

gibt, mit der Eigenschaft

$$f(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Lösungsvorschlag

a) Es gibt genau dann keine solche lineare Abbildung, wenn die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhhängig sind, das heißt

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \quad \text{für } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

und gleichzeitig

$$f(v_3) = w_3 \neq \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

gilt.

b) Es gibt genau dann genau eine solche lineare Abbildung, wenn v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

c) Es gibt genau dann unendlich viele solcher linearen Abbildungen, wenn

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Seien also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Betrachte das von t abhängige lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -t^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2+2Z_1 \\ Z_3+Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -t^2-5 \end{pmatrix} \overset{Z_3-2Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig für $1 - t^2 \neq 0$, das heißt $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. In diesen Fällen gibt es also genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Betrachte nun noch die Fälle $t = 1$ und $t = -1$:

1. Fall: $t = 1$:

$v_3 = 2v_1 + 3v_2$

$$2 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = w_3$$

Somit gibt es unendlich viele lineare Abbildungen f mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Es gibt unendlich viele Abbildungen, da jeder Vektor des $\mathbb{R}^4$ als Bild eines dritten Basisvektors u von $\mathbb{R}^3$ mit v_1, v_2, u Basis von $\mathbb{R}^3$ gewählt werden kann.

2. Fall: $t = -1$: $v_3 = 2v_1 + 3v_2$.

$$2 \cdot w_1 + 3 \cdot w_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = w_3$$

Folglich gibt es für $t = -1$ keine lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Insgesamt erhalten wir damit also:

a) Es gibt keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ für $t = -1$.

b) Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

c) Es gibt unendlich viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ für $t = 1$.

H18 – T3 – A2

Man betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 sowie den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Ferner sei die lineare Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 2\\2 & 3 & 1 & -2\\3 & 4 & 1 & -4\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Man bestimme die Dimension von V und gebe eine Basis von V an.

b) Man berechne die darstellende Matrix von f bezüglich der in a) gewählten Basis von V und der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.

c) Man bestimme eine Basis des Kerns von f.

Lösungsvorschlag

a) Schreibe $v_1, \ldots, v_5$ als Zeilen einer Matrix und bestimme ihren Rang:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\2 & 1 & -1 & 1\\1 & 0 & -1 & 1\\1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3-2Z_2\\ \rightsquigarrow \\ Z_4-Z_1\\ Z_5-Z_1}}{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & -1 & -1 & -1\\0 & -1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_2\\ Z_4+Z_2\\ \rightsquigarrow \\ Z_5-Z_2}}{} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3, das heißt $\dim V = 3$. Über die linear unabhängigen Zeilen lässt sich $\{v_1, v_2, v_4\}$ als Basis von V ablesen.

b) Aus a) wissen wir, dass eine Basis von V durch v_1, v_2, v_4 gegeben ist. Wir ermitteln also die Bilder der Basisvektoren, um diese im Nachgang als Spalten in die darstellende Matrix schreiben zu können:

$$f(v_1) = \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix}3\\4\\2\\1\end{pmatrix}, \quad f(v_4) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

Damit ist die gesucht darstellende Matrix durch

$$M = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0\\3 & 4 & 1\\3 & 2 & -1\\3 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

gegeben.

c) Wir bestimmen $\ker(M)$. Dadurch erhalten wir die Koordinatenvektoren von Elementen aus $\ker(f)$ und können darüber eine Basis von $\ker(f)$ ermitteln. Löse also zunächst das homogene lineare Gleichungssystem $Mx = 0,\ x \in \mathbb{R}^3$.

Alternativ kann auch $\ker(A)$ bestimmt werden, dann ist die darstellende Matrix nicht notwendig.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_3-Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4-Z_1}}{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4+2Z_2}}{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also folgt für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \ker(M)$:

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + x_3 = 0$$

Folglich ist $\ker(M) = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} : \ x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Da $\ker(M)$ den Koordinatenvektoren von Vektoren in $\ker(f)$ bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, v_4\}$ von V entspricht, ist eine Basis von $\ker(f)$ gegeben durch den Vektor $(-1) \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1)v_4$.

F18 – T1 – A3

Es seien

$$U = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$. Weiter seien

$$p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}$$

und

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) \in (x + U) \cap W$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^3$ die Menge

$$(x + U) \cap W$$

einelementig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear ist.

c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern}(p \circ f) = \operatorname{Kern}(f)$ gilt.

d) Bestimmen Sie alle eindimensionalen Untervektorräume V von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim((p \circ f)(V)) = 1$.

Lösungsvorschlag

a) Seien $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$x + \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = x$$

Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1\\ -2 & 1 & 1 & x_2\\ -3 & 0 & -1 & x_3 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2-2Z_1\\ Z_3-3Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1\\ 0 & -1 & 1 & x_2 - 2x_1\\ 0 & -3 & -1 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3-3Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & x_1\\ 0 & -1 & 1 & x_2 - 2x_1\\ 0 & 0 & -4 & x_3 + 3x_1 - 3x_2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -\lambda + \mu = & & x_1\\ -\mu + \varepsilon = & -2x_1 + & x_2\\ -4\varepsilon = & 3x_1 - 3x_2 + & x_3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3)\\ \mu = \frac{1}{4}(-x_2 + 5x_1 - x_3)\\ \varepsilon = \frac{1}{4}(3x_2 - 3x_1 - x_3) \end{array}\right\}$$

Somit folgt $(x+U)\cap W = x+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+\frac{1}{4}(x_1-x_2-x_3)\\ x_2+\frac{2}{4}(x_1-x_2-x_3)\\ x_3+\frac{3}{4}(x_1-x_2-x_3)\end{pmatrix} = f(x)$.

Also besteht der Schnitt aus genau einem Punkt.

b) Aus a) folgt, dass $f(x) = A\cdot x$ mit $A = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}5&-1&-1\\2&2&-2\\3&-3&1\end{pmatrix}$.

Seien nun also $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann folgt:

$$f(\lambda x+\mu y) = A\cdot(\lambda x+\mu y) = \lambda(Ax)+\mu(Ay) = \lambda f(x)+\mu f(y).$$

Also ist f linear.

Da $f(x) = Ax$ mit $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ hätten wir auch unmittelbar schlussfolgern können, dass f linear ist.

c) Sei $x\in\ker(f) \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow (p\circ f)(x) = p(f(x)) = p(0) = 0 \Rightarrow x\in\ker(p\circ f)$

Sei $x\in\ker(p\circ f)$ mit $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Rightarrow p\circ f(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5x_1-x_2-x_3\\3x_1-3x_2+x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5x_1-x_2-x_3\\2x_1+2x_2-2x_3\\3x_1-3x_2+x_3\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x\in\ker(f)$$

Insgesamt folgt somit $\ker(p\circ f) = \ker(f)$.

$(*)$ $Z_2 = Z_1 - Z_3 \rightarrow$ ergänze also 2. Zeile von A, die ebenfalls 0 ist.

d) Es sei $V\subseteq\mathbb{R}^3$ Untervektorraum mit $\dim V = 1$, das heißt $\exists\ v\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ mit $V=\langle v\rangle$. Gilt $\dim((p\circ f)(V)) = 1$, muss $v\notin\ker(p\circ f)$ gelten.

Bestimme also $\ker(p\circ f)$ durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix}x = 0$$

mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix} \overset{\substack{4\cdot Z_1\\ 4\cdot Z_2\\ \rightsquigarrow\\ 4\cdot Z_3}}{} \begin{pmatrix}5&-1&-1\\3&-3&1\end{pmatrix} \overset{Z_2-\frac{3}{5}Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}5&-1&-1\\0&-\frac{12}{5}&\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

Also folgt für Lösungen des Gleichungssystems

$$\left\{\begin{array}{rcl}5x_1 &=& \frac{5}{3}x_3\\ x_2 &=& \frac{2}{3}x_3\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}x_1 &=& \frac{1}{3}x_3\\ x_2 &=& \frac{2}{3}x_3\end{array}\right\}.$$

Damit ergibt sich $\ker(p\circ f) = \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle = U$. Somit ist also $\dim((p\circ f)(V)) = 1$ mit $V\subseteq\mathbb{R}^3$ eindimensionaler Untervektorraum, genau dann, wenn $V=\langle v\rangle$ mit $v\in\mathbb{R}^3\setminus U$ gilt.

F18 – T1 – A4

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome $p \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad ≤ 4 und

$$d\colon V \to V, \quad \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{4} -i a_i x^{i-1}.$$

a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$f\colon V \to V, p \mapsto d(p) + 2p.$$

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis

$$1, 1 + x, x^2 + x, x^3, x^4$$

von V.

Lösungsvorschlag

a) Seien $p = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i$, $q = \sum_{i=0}^{4} b_i x^i$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

i) **Zeige**: $f(p+q) = f(p) + f(q)$

$$\begin{aligned} f(p+q) = d(p+q) + 2(p+q) &= \left(\sum_{i=1}^{4} -i\left(a_i + b_i\right) x^{i-1}\right) + 2p + 2q \\ &= \left(\sum_{i=1}^{4} -i a_i x^{i-1}\right) + 2p + \left(\sum_{i=1}^{4} -i b_i x^{i-1}\right) + 2q \\ &= d(p) + 2p + d(q) + 2q \\ &= f(p) + f(q) \end{aligned}$$

ii) **Zeige**: $f(\lambda p) = \lambda f(p)$

$$\begin{aligned} f(\lambda p) &= d(\lambda p) + 2 \cdot (\lambda p) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{4} -i\left(\lambda a_i\right) x^{i-1}\right) + \lambda \cdot 2p \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^{4} -i a_i x^{i-1}\right) + \lambda \cdot 2p \\ &= \lambda \cdot (d(p) + 2p) \\ &= \lambda f(p) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist linear

b) Wir bestimmen das Bild jedes einzelnen Basiselements und stellen dieses als Linearkombination in der gegebenen Basis von V dar. Über die Koeffizienten in den Linearkombinationen erhalten wir dann die Spaltenvektoren der gesuchten darstellenden Matrix.

Um für ein Polynom p das Bild $d(p)$ auszurechnen, können wir bemerken, dass $d(p)$ gerade die negative Ableitung von p ist, das heißt, $d(p) = -p'$.

$$\begin{aligned} f(1) &= d(1) + 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (x^2 + x) + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1 + x) &= d(1 + x) + 2 \cdot (1 + x) = -1 + 2 + 2x = 2x + 1 \\ &= (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (x^2 + x) + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x^2 + x\right) &= d\left(x^2 + x\right) + 2 \cdot \left(x^2 + x\right) = (-2x - 1) + 2x^2 + 2x = 2x^2 - 1 \\ &= 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (1 + x) + 2 \cdot (x^2 + x) + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x^3\right) &= d\left(x^3\right) + 2 \cdot \left(x^3\right) = -3x^2 + 2x^3 \\ &= (-3) \cdot 1 + 3 \cdot (1 + x) + (-3) \cdot (x^2 + x) + 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(x^4\right) &= d\left(x^4\right) + 2 \cdot \left(x^4\right) = -4x^3 + 2x^4 \\ &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (x^2 + x) + (-4) \cdot x^3 + 2 \cdot x^4 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix von f bezüglich der gegebenen Basis von V.

F18 – T3 – A1

Zu

$$v := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3$$

definieren wir die Abbildung

$$\mu_v \colon \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^2, A \mapsto Av.$$

a) Rechnen Sie nach, dass μ_v $\mathbb{R}$-linear ist.

b) Berechnen Sie den Kern von μ_v.

c) Berechnen Sie das Bild von μ_v.

Lösungsvorschlag

a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

i) $\mu_v(M+N) = (M+N)v = Mv + Nv = \mu_v(M) + \mu_v(N)$

ii) $\mu_v(\lambda M) = (\lambda M)v = \lambda(Mv) = \lambda\mu_v(M)$

$\Rightarrow \mu_v$ linear

b) $A \in \ker(\mu_v) \Leftrightarrow A \cdot v = 0 \Leftrightarrow v \in \ker(A)$

Sei $A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} v \in \ker(A) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_{11}+2a_{12}+3a_{13}\\ a_{21}+2a_{22}+3a_{23}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow A \in \left\{\begin{pmatrix}-2a_{12}-3a_{13} & a_{12} & a_{13}\\ -2a_{22}-3a_{23} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix} : \quad a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

c) Es ist nach b) $\dim\ker(\mu_v) = 4$ und zudem $\dim(\mathbb{R}^{2\times 3}) = 2\cdot 3 = 6$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt somit

$$6 = \dim(\mathbb{R}^{2\times 3}) = \dim\ker(\mu_v) + \dim\operatorname{Im}(\mu_v) \quad \Rightarrow \quad \dim\operatorname{Im}(\mu_v) = 6 - 4 = 2$$

Da $\operatorname{Im}(\mu_v) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\dim\mathbb{R}^2 = 2$ folgt somit direkt, dass $\operatorname{Im}(\mu_v) = \mathbb{R}^2$.

Alternativ sehen wir das auch, wenn wir die Bilder $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ von $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ unter μ_v berechnen.

4 Diagonalisierbarkeit

Im vierten Kapitel untersuchen wir Endomorphismen, also linearen Abbildungen zwischen ein und demselben Vektorraum. Wenn wir solche lineare Abbildungen betrachten, interessieren wir uns besonders für Vektoren, die auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet werden. Hierbei handelt es sich um sogenannte Eigenvektoren. Besitzt ein Endomorphismus genügend Eigenvektoren, können wir eine Basis angeben, bezüglich der die darstellende Matrix des Endomorphismus eine Diagonalmatrix ist. Da wir quadratische Matrizen als Endomorphismen von $\mathbb{K}^n$ auffassen können, lässt sich die entsprechende Theorie auch auf Matrizen übertragen.

Definition 4.1 (Eigenwert und Eigenvektor)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f: V \to V$ ein Endomorphismus. Ein Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ heißt genau dann *Eigenvektor* von f, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gibt mit

$$f(v) = \lambda v.$$

Das zu diesem Eigenvektor gehörende λ heißt *Eigenwert*.

Wir können uns leicht überlegen, dass Untervektorräume, die von einem Eigenvektor erzeugt werden, durch f nicht verändert werden. Bildlich gesprochen werden also Ursprungsgeraden, deren Richtung ein Eigenvektor ist, auf sich selbst abgebildet. Außerdem gilt, dass jedes skalare Vielfache eines Eigenvektors (außer der Nullvektor) wieder ein Eigenvektor zum selben Eigenwert ist.

Die Idee mit der Gerade kann auch auf Untervektorräume von höherer Dimension übertragen werden, solange wir sicherstellen, dass alle den Untervektorraum erzeugenden Vektoren Eigenvektoren zum selben Eigenwert sind. Wir kommen so zur Definition eines Eigenraums, die sich auf die Gleichung aus der Definition eines Eigenwerts zurückführen lässt:

$$f(v) = \lambda v \quad \Leftrightarrow \quad 0 = f(v) - \lambda v = f(v) - \lambda \cdot \mathrm{id}(v) = (f - \lambda \cdot \mathrm{id})(v).$$

Wir bemerken direkt, dass die obige Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn $v \in \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id})$. Die Menge aller Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert λ (zusammen mit dem Nullvektor) entspricht also dem Kern der linearen Abbildung $f - \lambda \cdot \mathrm{id}$.

Definition 4.2 (Eigenraum)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f: V \to V$ ein Endomorphismus mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann heißt der Untervektorraum

$$\mathrm{Eig}\left(f, \lambda\right) := \ker(f - \lambda \cdot \mathrm{id}) \subseteq V$$

der zu λ gehörige *Eigenraum*.

Anstelle von Endomorphismen werden wir meist Matrizen bezüglich ihrer Eigenwerte, Eigenvektoren

und Eigenräume untersuchen. Die bisherigen Definitionen übertragen sich dann unmittelbar, da wir für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ den zugehörigen Endomorphismus $f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, v \mapsto A \cdot v$ betrachten können.

Umgekehrt können wir anstelle eines Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ auch eine zugehörige darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V betrachten und diese mit Blick auf Eigenwerte und Eigenvektoren untersuchen. Wichtig ist, dass wir in diesem Fall die darstellende Matrix bezüglich einer Basis untersuchen, das heißt, die Ausgangs- und Zielbasis müssen übereinstimmen. Andernfalls sind die hier beschriebenen Techniken nicht anwendbar.

Wenn wir für einen Endomorphismus eine seiner darstellenden Matrizen untersuchen, müssen wir jedoch berücksichtigen, dass es sich bei den Eigenvektoren der Matrix nur um die Koordinatenvektoren zu Eigenvektoren von f handelt. Um Eigenvektoren von f zu erhalten, müssen wir die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ also noch rückübersetzen.

Der Eigenraum zu einem Eigenwert besitzt mindestens Dimension 1. Sobald wir als einziges Element eines Eigenraums den Nullvektor finden, können wir uns sicher sein, dass entweder der vermutete Wert λ *kein* Eigenwert ist. Oder wir haben uns beim Ermitteln des Eigenraums verrechnet.

Um Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ zu finden, lösen wir für Matrizen (die insbesondere auch darstellende Matrizen eines Endomorphismus sein können) das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$(A - \lambda E_n) \cdot v = 0, \qquad v \in \mathbb{K}^n.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt genau dann mindestens eine nichttriviale Lösung, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$ gilt.

Diese Gedanken führen uns zur Definition des charakteristischen Polynoms, mit dessen Hilfe wir Eigenwerte eines Endomorphismus identifizieren können.

Definition 4.3 (Charakteristisches Polynom)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Unbestimmte. Dann heißt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

das *charakteristische Polynom* von A.

Das charakteristische Polynom ist vom Grad n und wir können einige der Koeffizienten angeben.

Satz 4.4

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und χ_A das charakteristische Polynom. Dann gilt:

$$\chi_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (-1)^n \\ \alpha_{n-1} &= (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{Spur}(A) \\ \alpha_0 &= \det(A) \end{aligned}$$

Da für Eigenwerte λ die Gleichung $\det(A - \lambda E_n) = 0$ erfüllt sein muss (denn zu einem Eigenwert gibt es immer einen Eigenvektor, der per Definition nicht der Nullvektor ist), ergibt sich unmittelbar der nachfolgende Satz.

Satz 4.5 (Eigenwerte und charakteristisches Polynom)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$. Dann sind die Eigenwerte von A genau die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$. Ist A eine Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $f : V \to V$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ von V, so ist $\chi_A(\lambda)$ auch das charakteristische Polynom für alle anderen Darstellungsmatrizen von f bezüglich einer anderen Basis.

Wenn wir für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ (bzw. einen Endomorphismus mit einer zugehörigen darstellenden Matrix) Eigenwerte und Eigenvektoren bzw. Eigenräume ermitteln sollen, dann ist das Vorgehen also wie folgt:

1. Wir ermitteln das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$ und dessen Nullstellen.
2. Für jeden Eigenwert μ bestimmen wir den zu μ gehörenden Eigenraum $\mathrm{Eig}\left(A, \mu\right)$ als Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\mathrm{Eig}\left(A, \mu\right) = \ker(A - \mu E_n).$$

Im letzten Teil dieses Inputs fragen wir uns, wann wir eine Matrix in Diagonalgestalt überführen können.

Definition 4.6 (Diagonalisierbarkeit)

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ heißt genau dann *diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ gibt, für die $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt besitzt.

Wir führen an dieser Stelle noch einen weiteren Begriff zu Matrizen ein, der zur vorangegangenen Definition passt.

Definition 4.7 (Ähnlichkeit von Matrizen)

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$. Wir sagen A ist *ähnlich* zu B, genau dann, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ gibt mit $B = T^{-1}AT$.

Für zueinander ähnliche Matrizen gilt eine Eigenschaft, die uns ab und an das Leben erleichtert.

Satz 4.8

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ ähnliche Matrizen. Dann gilt: $\det(A) = \det(B)$.

Insbesondere besitzen ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom.

Wenn wir A als die darstellende Matrix eines Endomorphismus f bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ verstehen, dann entspricht die invertierbare Matrix T in der Definition der Diagonalisierbarkeit einer Basistauschmatrix $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Die Matrix $T^{-1}AT$ entspricht dann der darstellenden Matrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{A}$. Da diese darstellende Matrix Diagonalgestalt besitzt, können wir direkt sagen, dass jeder Basisvektor von $\mathcal{A}$ auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. Insbesondere ist also jedes Element von $\mathcal{A}$ ein Eigenvektor von f.

Diese Idee liegt den Kriterien für Diagonalisierbarkeit zugrunde. Bevor wir diese formulieren, benötigen wir jedoch noch zwei neue Begriffe im Zusammenhang mit Eigenwerten und Eigenvektoren.

Definition 4.9 (Algebraische und geometrische Vielfachheit)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(\lambda)$. Dann heißt

- die Vielfachheit einer Nullstelle λ_i von $\chi_A(\lambda)$ die *algebraische Vielfachheit von* λ_i. Wir bezeichnen sie mit $\alpha(\lambda_i)$.
- $\dim(\mathrm{Eig}\,(A, \lambda_i))$ die *geometrische Vielfachheit von* λ_i. Wir bezeichnen sie mit $\beta(\lambda_i)$.

Beim Berechnen von Eigenräumen kann uns der folgende Satz helfen, da wir damit zumindest sehr grob prüfen können, ob wir uns an einer Stelle möglicherweise verrechnet haben.

Satz 4.10

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und $\mu \in \mathbb{K}$ sei ein Eigenwert von A. Dann gilt:

$$1 \leq \beta(\mu) \leq \alpha(\mu).$$

In Worten: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts μ beträgt mindestens 1 und entspricht maximal der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts.

Wenn wir nun zurückkommen auf die Idee von oben, bei der wir die Matrix T in der Definition zur Diagonalisierbarkeit als eine Basistauschmatrix verstanden haben, so können wir sagen, dass wir eine solche genau dann angeben können, wenn wir eine Basis aus Eigenvektoren finden können. Damit haben wir unmittelbar ein Kriterium für die Diagonalisierbarkeit erhalten. Weitere Kriterien liefert uns der nachfolgende Satz.

Satz 4.11

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ eine Matrix. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{K}$ vollständig in Linearfaktoren und es gilt $\beta(\lambda_i) = \alpha(\lambda_i)$ für jeden Eigenwert λ_i von A.
3. Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren von A.
4. Die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte besitzt den Wert n.

Das dritte Kriterium können wir beispielsweise nutzen, wenn wir n linear unabhängige Eigenvektoren zu einer Matrix A identifiziert haben. Dies ist dann besonders einfach, wenn alle Eigenwerte die algebraische Vielfachheit 1 besitzen. Das hängt mit dem folgenden Satz zusammen.

Satz 4.12

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und $v_1, \ldots, v_k$ seien Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Dann sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

In Worten: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Wenn wir also für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ insgesamt n verschiedene Eigenwerte λ_i und jeweils einen zugehörigen Eigenvektor v_i finden, dann können wir wegen des vorangegangenen Satzes 4.12 (und wegen $\dim K^n = n$) sicher sein, dass $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ bilden. Nach Satz 4.11 ist A also diagonalisierbar und da wir A als die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung bezüglich der Standardbasis auffassen können, erhalten wir die Basistauschmatrix T, die von der Basis aus Eigenvektoren in die Standardbasis tauscht, indem wir die n linear unabhängigen Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix schreiben.

Zuletzt betrachten wir noch zwei Spezialfälle diagonalisierbarer Matrizen: die simultane und die orthogonale Diagonalisierbarkeit. Wir definieren zunächst beide Begriffe und lernen im Anschluss Kriterien kennen, wie wir auf diese speziellen Eigenschaften prüfen können.

Definition 4.13

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$.

a) A und B heißen genau dann *simultan diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in GL(n; \mathbb{K})$ gibt, für die $T^{-1}AT = D$ und $T^{-1}BT = \tilde{D}$, wobei D und $\tilde{D}$ Diagonalmatrizen sind.

b) C heißt genau dann *orthogonal diagonalisierbar*, wenn es eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ gibt, für die $T^{-1}CT = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

Der Begriff einer orthogonalen Matrix wird in Definition 7.9 erklärt.

Es gibt vergleichsweise einfache Kriterien, um zu entscheiden, ob diese Eigenschaften jeweils erfüllt sind. Diese sind in den beiden nachfolgenden Sätzen zusammengefasst.

Satz 4.14

Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{K})$ diagonalisierbare Matrizen. A und B sind genau dann simultan diagonalisierbar, wenn $AB = BA$ gilt.

Wenn wir also wissen, dass zwei Matrizen A und B diagonalisierbar sind, dann genügt es nachzuweisen, dass $AB = BA$ gilt, um zu begründen, dass A und B sogar simultan diagonalisierbar sind.

Satz 4.15

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$. A ist genau dann orthogonal diagonalisierbar, wenn A symmetrisch ist.

Dieses zweite Kriterium für orthogonale Diagonalisierbarkeit ist sogar noch einfacher nachzuweisen. Wir müssen hierfür nur überprüfen, dass $A = A^T$ gilt. Ist dies nicht der Fall, ist A nicht orthogonal diagonalisierbar.

H24 – T1 – A3

Gegeben seien die Matrizen $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der beiden Matrizen Q und R sowie zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor.

b) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix T mit der Eigenschaft

$$T^{-1}QT = R.$$

Lösungsvorschlag

a) Die Eigenwerte der beiden Matrizen sind die Nullstellen der jeweiligen charakteristischen Polynome. Bestimme diese also für Q und R:

- $\chi_Q(\lambda) = \det(Q - \lambda E_2) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$,
  das heißt, die Eigenwerte von Q sind 1 und 5.
- $\chi_R(\lambda) = \det(R - \lambda E_2) = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 = (\lambda - 5)(\lambda - 1)$,
  das heißt, die Eigenwerte von R sind 1 und 5.

Wir bestimmen nun für beide Matrizen die zugehörigen Eigenräume und erhalten dadurch alle Eigenvektoren:

- $\mathrm{Eig}(Q, 1) = \ker(Q - E_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(Q, 5) = \ker(Q - 5 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(R, 1) = \ker(R - E_2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(R, 5) = \ker(R - 5 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) Für

$$T_1 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_2 := \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sind $\det(T_1) = -4$ und $\det(T_2) = 4$ ungleich Null und daher T_1 und T_2 invertierbar. Weiter gilt

$$T_1^{-1}QT_1 = T_2^{-1}RT_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =: D,$$

da die Spalten von T_1 und T_2 Eigenvektoren von Q bzw. R zu den entsprechenden Eigenwerten sind. Insgesamt erhalten wir also

$$T_1^{-1}QT_1 = T_2^{-1}RT_2 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 \cdot T_1^{-1} \cdot Q \cdot T_1 \cdot T_2^{-1} = R.$$

Als Produkt invertierbarer Matrizen ist auch $T_1 \cdot T_2^{-1}$ invertierbar und es gilt $\left(T_1 \cdot T_2^{-1}\right)^{-1} = T_2 \cdot T_1^{-1}$. Wir definieren also $T := T_1 \cdot T_2^{-1}$ und berechnen:

$$T = T_1 \cdot T_2^{-1} = T_1 \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

H24 – T2 – A3

Bestimmen Sie, ob es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beide Diagonalgestalt in dieser neuen Basis haben.

Lösungsvorschlag

Die Aufgabe verlangt eine Untersuchung, ob A und B simultan diagonalisierbar sind. Wir überprüfen dafür, ob A und B diagonalisierbar sind und ob zusätzlich $AB = BA$ gilt.

Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \lambda^2(2 - \lambda).$$

Damit sind 0 und 2 Eigenwerte von A, für die wir noch die Eigenräume bestimmen:

- $\operatorname{Eig}(A, 0) = \ker(A - 0 \cdot E_3) = \ker(A) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$
- $\operatorname{Eig}(A, 2) = \ker(A - 2E_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Wir nutzen ein analoges Vorgehen für B:

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = (-1 - \lambda)\left((3 - \lambda)(-3 - \lambda) + 8\right) = (-1 - \lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 1).$$

Damit sind -1 und 1 Eigenwerte von B, für die wir nun die Eigenräume bestimmen:

- $\operatorname{Eig}(B, -1) = \ker(B + E_3) = \ker\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$
- $\operatorname{Eig}(B, 1) = \ker(B - E_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Da sowohl für A als auch für B das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt und für alle Eigenwerte die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen, sind A und B jeweils diagonalisierbar. Zudem gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und daher sind wegen $AB = BA$ die beiden Matrizen A und B simultan diagonalisierbar, das heißt, es existiert eine Basis von $\mathbb{R}^3$, deren Elemente sowohl Eigenvektoren von A als auch Eigenvektoren von B sind.

Alternativ hätten wir eine solche Basis aus gemeinsamen Eigenvektoren auch konkret angeben können, etwa $(1, 1, 0)^T$, $(0, -1, 1)^T$ und $(1, 1, 1)^T$.

H24 – T3 – A3

In Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -s & -s-1 & -s-2 \\ s & s & s+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix A_s (unabhängig vom Parameter $s \in \mathbb{R}$) die einfache Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und die doppelte Nullstelle $\lambda_2 = 1$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass die Matrix A_s genau für $s = 0$ diagonalisierbar ist.

c) Bestimmen Sie im Fall $s = 0$ eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ mit

$$P^{-1} A_0 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir bestimmen das charakteristische Polynom $\chi_{A_s}(\lambda)$ von A_s durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\chi_{A_s}(\lambda) &= \det(A_s - \lambda E_3) \\
&= (1-\lambda)\left((s+1+\lambda)(s+1-\lambda) - s(s+2)\right) + s\left(2(s+1-\lambda) - 2s\right) \\
&\quad + s\left(2(-s-2) + (s+1+\lambda)\cdot 2\right) \\
&= (1-\lambda)\left((s+1)^2 - \lambda^2 - s^2 - 2s\right) + s(2-2\lambda) + s(2\lambda - 2) \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda^2) + 2s(1-\lambda) + 2s(\lambda - 1) \\
&= (1-\lambda)(1-\lambda^2) \\
&= (1-\lambda)^2(1+\lambda)
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass 1 eine doppelte und -1 eine einfache Nullstelle von $\chi_{A_s}(\lambda)$ ist, unabhängig von $s \in \mathbb{R}$.

b) Da $\chi_{A_s}(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt, ist A_s genau dann diagonalisierbar, wenn für alle Eigenwerte μ von A_s die algebraische Vielfachheit $\alpha(\mu)$ und die geometrische Vielfachheit $\beta(\mu)$ übereinstimmen. Da für jeden Eigenwerte μ von A stets

$$1 \le \beta(\mu) \le \alpha(\mu)$$

folgt für den Eigenwert -1 von A_s direkt

$$1 = \beta(-1) = \alpha(-1).$$

Wir suchen nun Werte von $s \in \mathbb{R}$, für die $\dim \mathrm{Eig}(A_s, 1) = \beta(1) = \alpha(1) = 2$ gilt.

$$\mathrm{Eig}(A_s, 1) = \ker(A_s - E_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -s & -s-2 & -s-2 \\ s & s & s \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ s & s & s \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & s & s \end{pmatrix}$$

Daraus folgt

$$\dim \operatorname{Eig}(A_s, 1) = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ s & s & s \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & \text{für } s \neq 0 \\ 2, & \text{für } s = 0 \end{cases}.$$

Insgesamt erhalten wir so also, dass A_s genau dann diagonalisierbar ist, wenn $s = 0$ gilt.

c) Aus Teil b) folgt für $s = 0$:

- $\operatorname{Eig}(A_0, 1) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(A_0, -1) = \ker(A_0 + E_3) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Definiere also

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\det(P) = 1 \neq 0$ und damit P invertierbar. Nach Konstruktion folgt außerdem, dass $P^{-1}A_0P$ die gewünschte Form besitzt, denn die Spalten von P sind gerade Eigenvektoren von A_0 zu passenden Eigenwerten.

H24 – T3 – A4

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine quadratische $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit der Eigenschaft

$$A^T = -A$$

betrachtet; dabei bezeichnet A^T die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist $\lambda = 0$.

b) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reell diagonalisierbar, so ist A die Nullmatrix.

c) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, so ist $n \in \mathbb{N}$ gerade.

Lösungsvorschlag

a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und bezeichne $\| \cdot \|$ die vom Standardskalarprodukt induzierte Norm auf $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$

$\Rightarrow \lambda \cdot \|v\|^2 = \lambda \cdot v^T v = v^T(\lambda v) = v^T(Av) = (A^T v)^T v = (-Av)^T v = -\lambda \cdot v^T v = -\lambda \|v\|^2$

$\Rightarrow 2\lambda \cdot \|v\|^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0, \quad$ denn $v \neq 0,$ das heißt $\|v\|^2 \neq 0$

b) Es sei A reell diagonalisierbar

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar mit $M^{-1}AM$ Diagonalmatrix mit Eigenwerten auf Diagonale

$\overset{a)}{\Rightarrow} M^{-1}AM = 0$

$\Rightarrow A = M \cdot 0 \cdot M^{-1} = 0$

c) Es sei A invertierbar. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Nach Voraussetzung und wegen der Eigenschaften der Determinante folgt

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det(A).$$

Angenommen n wäre ungerade, dann erhalten wir

$$\det(A) = -\det(A) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) = 0.$$

Dies steht jedoch im Widerspruch dazu, dass A invertierbar ist und damit $\det(A) \neq 0$ gilt. Folglich muss n gerade sein.

F24 – T2 – A1

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 3 & 5 & -9 \\ 3 & 3 & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass 2 ein Eigenwert von M ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

b) Zeigen Sie, dass M diagonaliierbar ist, und geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von M an.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_M(\lambda)$ und seine Nullstellen, um die Eigenwerte zu erhalten.

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_3) &= (5-\lambda)^2(-7-\lambda) - 9^2 - 9^2 + 9(7+\lambda) + 27(5-\lambda) + 27(5-\lambda) \\ &= -\left(\lambda^2 - 10\lambda + 25\right)(7+\lambda) - 2\cdot 9^2 + 9\lambda + 63 + 270 - 54\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 45\lambda - 175 - 162 - 45\lambda + 333 \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \end{aligned}$$

Es gilt: 2 ist Eigenwert von $M \Leftrightarrow \chi_M(2) = 0$.

Da $\chi_M(2) = -2^3 + 3\cdot 2^2 - 4 = -12 + 3\cdot 4 = 0$ ist 2 also ein Eigenwert von M.

$$\mathrm{Eig}(M, 2) = \ker(M - 2\cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 3 & 3 & -9 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Suche den Kern als Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems mithilfe der Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 3 & 3 & -9 \\ 3 & 3 & -9 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3 - Z_1}}{} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathrm{Eig}(M, 2)$: $\quad x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3x_3 - x_2$

Also folgt:

$$\mathrm{Eig}(M, 2) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) M diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von M

Suche also einen zweiten Eigenwert von M mithilfe des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$.

$$\chi_M(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$$

Da 2 eine doppelte (ganzzahlige) Nullstelle von $\chi_M(\lambda)$ ist, können wir über den konstanten Term -4 des charakteristischen Polynoms unmittelbar die dritte Nullstelle -1 identifizieren. Alternativ können wir auch eine Polynomdivision durchführen und das charakteristische Polynom durch $(\lambda - 2)^2$ teilen.

Es gilt: μ Eigenwert von $M \Leftrightarrow \chi_M(\mu) = 0 \Leftrightarrow \mu \in \{-1, 2\}$

Bestimme nun $\operatorname{Eig}(M, -1)$

$$\operatorname{Eig}(M, -1) = \ker(M + 1 \cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 3 & 6 & -9 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Löse das entsprechende homogene lineare Gleichungssystem, um den Kern zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 3 & 6 & -9 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{Z_2 - Z_3}{\underset{Z_1 - 2Z_3}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \overset{Z_3 - Z_1}{\underset{Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt für $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \operatorname{Eig}(M, -1)$: $\quad x_1 = x_3$ und $x_2 = x_3$

Damit folgt unmittelbar: $\operatorname{Eig}(M, -1) = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Offensichtlich ist $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig. (Das sehen wir etwa, weil der Rang der Matrix mit Vektoren als Zeilen 3 ist.)

Da zudem $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ und $|\mathcal{B}| = 3$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von $\mathbb{R}$. Damit ist M diagonalisierbar.

F24 – T3 – A2

Von einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei Folgendes bekannt:

- $Ax_1 = -x_1$ für ein $x_1 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- $A^T x_2 = 2x_2$ für ein $x_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- $\det(A) = 0$.

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Spur von A.

Lösungsvorschlag

Aus dem ersten Punkt lesen wir unmittelbar ab, dass -1 ein Eigenwert von A ist.

Da $\det(A)$ genau dann gilt, wenn $\ker(A)$ nicht trivial ist, wissen wir mit dem dritten Punkt:

$$\exists x_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : Ax_3 = 0.$$

Folglich ist auch 0 ein Eigenwert von A.

Der zweite Punkt sagt uns, dass 2 ein Eigenwert von A^T ist. Da Eigenwerte einer Matrix M aber gerade die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$ sind, folgt wegen

$$\chi_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda E_3) = \det(A^T - \lambda E_3^T) = \det\left((A - \lambda E_3)^T\right) = \det(A - \lambda E_3) = \chi_A(\lambda),$$

dass die Eigenwerte von A und A^T übereinstimmen. Somit ist also 2 auch ein Eigenwert von A.

Da A höchstens drei reelle Eigenwerte besitzen kann, folgt damit für das charakteristische Polynom von A:

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1) \cdot \lambda \cdot (\lambda - 2) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda.$$

Die Spur einer Matrix können wir über den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms vor λ^2 bestimmen. Es gilt:

$$-1 = (-1)^{3-1} \cdot \text{Spur}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \text{Spur}(A) = (-1)^{3-1} \cdot (-1) = -1.$$

H23 – T1 – A3

Seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von AB. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda = 0$, dann ist mindestens eine der beiden Matrizen A oder B nicht invertierbar.

b) Sei $\lambda \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann Bx ein Eigenvektor von BA ist.

Lösungsvorschlag

a) $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ invertierbar $\Leftrightarrow \ker(M) = \{0\}$

$\lambda = 0$ Eigenwert von $AB \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \quad AB \cdot v = 0 \cdot v = 0 \Rightarrow v \in \ker(AB)$

1. Fall: $Bv = w \neq 0 \Rightarrow \exists\, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: w \in \ker(A) \Rightarrow \ker(A) \neq \{0\} \Rightarrow$ A nicht invertierbar

2. Fall: $Bv = 0 \Rightarrow v \in \ker(B) \Rightarrow \ker(B) \neq \{0\} \Rightarrow B$ nicht invertierbar

b) x Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \neq 0$ von $AB \Rightarrow ABx = \lambda x \Rightarrow BA \cdot Bx = B \cdot ABx = B \cdot \lambda x = \lambda Bx$

Außerdem gilt $Bx \neq 0$, denn angenommen $Bx = 0$, dann $ABx = 0$. Das heißt, x Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 0$ von AB. Das ist jedoch ein Widerspruch zur Angabe, dass $\lambda \neq 0$.

Da $BA \cdot Bx = \lambda Bx$ und $Bx \neq 0$ ist Bx Eigenvektor zum Eigenwert λ von BA.

H23 – T3 – A3

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine quadratische $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachtet; ferner bezeichne $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix sowie $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Nullmatrix.

a) Zeigen Sie die folgende Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ mit vollständiger Induktion: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so ist λ^k ein Eigenwert der Matrix $A^k \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

b) Zeigen Sie die folgende Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ etwa unter Verwendung der Teilaufgabe a): Gilt $A^{2k} + A^k + E = O$, so besitzt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ keinen reellen Eigenwert.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A und v Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Behauptung: v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ^k von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$.

Ergänzung der Angabe um v, da wir den Eigenvektor für die vollständige Induktion benötigen. Denn eine reelle Zahl ist genau dann Eigenwert einer Matrix, wenn einen zugehörigen Eigenvektor gibt.

IA ($k = 1$): Klar nach Angabe, denn v Eigenvektor zum Eigenwert λ.

IS ($k \rightsquigarrow k+1$): Es sei v Eigenvektor zum Eigenwert λ^k von A^k für $k \geq 1$ beliebig (IV)

Zeige: v ist Eigenvektor zum Eigenwert λ^{k+1} von A^{k+1}

$$A^{k+1}v = A \cdot A^k v \overset{\text{IV}}{=} A \cdot \lambda^k v = \lambda^k A v \overset{\text{IA}}{=} \lambda^k \cdot \lambda v = \lambda^{k+1} v$$

Insgesamt folgt: Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A, dann ist λ^k Eigenwert von A^k für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$.

b) Beweis durch Widerspruch:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig.

Angenommen $A^{2k} + A^k + E = 0$ und A besitzt einen reellen Eigenwert λ.

$$\begin{aligned} \overset{a)}{\Rightarrow} \quad \exists\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \quad 0 = 0 \cdot v &= \left(A^{2k} + A^k + E\right) v \\ &= A^{2k}v + A^k v + Ev \\ &= \lambda^{2k}v + \lambda^k v + v \\ &= \left(\left(\lambda^k\right)^2 + \left(\lambda^k\right) + 1\right) v \end{aligned}$$

Da v als Eigenvektor ungleich dem Nullvektor ist, erhalten wir somit $\left(\lambda^k\right)^2 + \lambda^k + 1 = 0$.

Substituiere $\mu := \lambda^k$: $\mu^2 + \mu + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} \notin \mathbb{R} \quad \overset{\mu = \lambda^k}{\Rightarrow} \quad \lambda^k \notin \mathbb{R}$ Widerspruch zu $\lambda \in \mathbb{R}$.

Insgesamt erhalten wir also: Wenn $A^{2k} + A^k + E = 0$, dann besitzt A keine reellen Eigenwerte.

F23 – T1 – A1

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und für $s \in \mathbb{R}$ sei $f_s \colon V \to V$ diejenige lineare Abbildung, welche durch die folgende Zuordnung gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \beta + \gamma \\ \gamma + s^2 \cdot \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Basis von V an und bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Darstellungsmatrix A_s von f_s bezüglich der von Ihnen angegebenen Basis.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A_s aus Aufgabenteil a).

c) Bestimmen Sie diejenigen $s \in \mathbb{R}$, für welche die lineare Abbildung f_s diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Wähle $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Hierbei handelt es sich um die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig und ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und damit eine Basis. Es folgt:

$$A_s = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimme $\chi_{A_s}(\lambda) = \det(A_s - \lambda E_4)$ durch Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$\chi_{A_s}(\lambda) = (1-\lambda) \cdot \left[(1-\lambda)^3 - s^2(1-\lambda)\right] = (1-\lambda)^2 \left[(1-\lambda)^2 - s^2\right] \overset{(*)}{=} (1-\lambda)^2(1-\lambda+s)(1-\lambda-s)$$

(*) Hier wurde die 3. binomische Formel genutzt, um den 2. Faktor zu faktorisieren.

c) f_s diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A_s diagonalisierbar

A_s diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\chi_{A_s}(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{R}$ vollständig in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert μ von A_s stimmen geometrische $\beta(\mu)$ und algebraische Vielfachheit $\alpha(\mu)$ überein.

1. Fall: $s \neq 0$

Die paarweise verschiedenen Nullstellen von $\chi_{A_s}(\lambda)$ sind $1, 1+s, 1-s$.

Für jeden Eigenwert μ von A_s gilt $1 \leq \beta(\mu) \leq \alpha(\mu)$. Da $1+s \neq 1-s$, folgt $\alpha(1+s) = \alpha(1-s) = 1$. Mit der Ungleichung ergibt sich somit direkt $\beta(1+s) = \beta(1-s) = 1$ und somit insbesondere auch

$$\alpha(1+s) = \beta(1+s) \quad \text{und} \quad \alpha(1-s) = \beta(1-s).$$

Weiter gilt $\alpha(1) = 2$. Bestimme also $\beta(1) = \dim \operatorname{Eig}(A_s, 1) = \dim \ker(A_s - E_4)$. Überführe dafür die Koeffizientenmatrix des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform, um daraus dann $\dim \ker(A_s - E_4)$ abzulesen:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_3 + s^2 Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \beta(1) = 4 - 2 = 2 = \alpha(1).$$

Da also das charakteristische Polynom von A_s in Linearfaktoren zerfällt und für alle Eigenwerte von A_s die algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, sind die Matrix A_s und damit insbesondere auch f_s für $s \neq 0$ diagonalisierbar.

2. Fall: $s = 0$

$\lambda = 1$ ist einzige NST von $\chi_{A_0}(\lambda)$ und damit einziger EW von A_0. Weiter gilt $\alpha(1) = 4$. Bestimme nun $\beta(1)$ analog zum 1. Fall und prüfe, ob $\alpha(1) = \beta(1)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \beta(1) = \dim \ker (A_0 - E_4) = 4 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \beta(1) < \alpha(1).$$

Zwar zerfällt das charakteristsiche Polynom von A_0 in Linearfaktoren, für den einizigen Eigenwert 1 von A_0 stimmen geometrische und algebraische Vielfachheit jedoch nicht überein. Somit sind A_0 und damit insbesondere auch f_0 nicht diagonalisierbar.

F23 – T2 – A4

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Beweisen Sie:

a) Ist A symmetrisch, so ist auch A^2 symmetrisch.

b) Ist $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnlich zu A, so ist B^2 ähnlich zu A^2.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so ist auch A^2 diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag

a) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch $\Rightarrow A = A^T \Rightarrow \left(A^2\right)^T = (A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T = A \cdot A = A^2$

Es gilt also $(A^2)^T = A^2$, das heißt, A^2 ist symmetrisch.

b) B ähnlich zu A

$\Rightarrow \quad \exists\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}): \quad B = T^{-1}AT$

$\Rightarrow \quad \exists\, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}): \quad B^2 = \left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}AT\right) = T^{-1}AE_nAT = T^{-1}A^2T$

$\Rightarrow \quad B^2$ ähnlich zu A^2

Erinnerung: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R}) \mid A \text{ invertierbar}\}$

c) Wir bemerken zunächst, dass das Quadrat D^2 einer Diagonalmatrix D wieder eine Diagonalmatrix ist.

Das lässt sich einfach nachrechnen. Insbesondere sieht man dabei, dass die Diagonaleinträge von D^2 gerade den Quadraten der Diagonaleinträge von D entsprechen. Insbesondere gilt allgemein, dass das Produkt von zwei beliebigen Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist.

A diagonalisierbar $\Rightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix D

$\overset{b)}{\Rightarrow}$ A^2 ist ähnlich zu D^2

Da jedoch D^2 nach dem Kommentar vom Anfang dieser Teilaufgabe ebenfalls eine Diagonalmatrix ist, ist A^2 ähnlich zur Diagonalmatrix D^2 und damit diagonalisierbar.

F23 – T3 – A3

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ reell diagonalisierbar mit $\det(A) > 0$. Dann hat entweder A oder $-A$ nur strikt positive Eigenwerte.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ reell diagonalisierbar mit $\det(A) > 0$. Dann hat entweder A oder $-A$ nur strikt positive Eigenwerte.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass A^2 reell diagonalisierbar ist. Dann ist auch A reell diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

A ist diagonalisierbar, das heißt, es gibt $T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) : T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Eigenwerten von A.

$$\det(A) = \det(E_2) \cdot \det(A) = \det\left(T^{-1} \cdot T\right) \cdot \det(A) = \det\left(T^{-1}\right) \cdot \det(T) \cdot \det(A)$$
$$= \det\left(T^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(T) = \det\left(T^{-1}AT\right) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mu$$

Hier rechnen wir also nach, dass ähnliche Matrizen dieselbe Determinante besitzen. Das ist also ein Beweis für Satz 4.8 in Kapitel 4.

$\lambda \cdot \mu = \det(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda, \mu > 0$ oder $\lambda, \mu < 0$.

Da die Eigenwerte von $-A$ gerade $-\lambda$ und $-\mu$ sind, haben also A (für $\lambda, \mu > 0$) oder $-A$ (für $\lambda, \mu < 0$) nur strikt positive Eigenwerte.

b) Falsch.

Betrachte $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A ist offensichtlich diagonalisierbar, es gilt ebenfalls $\det(A) = 1 > 0$, aber A und $-A$ besitzen jeweils die Eigenwerte -1 und 1. Damit besitzt keine der beiden Matrizen nur strikt positive Eigenwerte.

c) Falsch.

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist offensichtlich diagonalisierbar.

Jedoch besitzt $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 + 1$ keine reellen Nullstellen, das heißt, $\chi_A(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren.

Damit ist A nicht diagonalisierbar, denn das wäre äquivalent dazu, dass $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt und die algebraische und geometrische Vielfachheit für alle Eigenwerte von A übereinstimmen.

H22 – T1 – A3

Entscheiden Sie begründet, ob es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der beide Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt haben, und geben Sie gegebenenfalls eine solche Basis an.

Lösungsvorschlag

Diese Aufgabe fragt danach, ob die beiden gegebenen Matrizen simultan diagonalisierbar sind.

Wir überprüfen zunächst, ob die Matrizen überhaupt diagonalisierbar sind. Bestimme dafür die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für beide Matrizen (wir nennen sie A und B).

Charakteristische Polynome:

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) = \lambda^2(-1 - \lambda)$. Damit sind -1 und 0 als Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ die Eigenwerte von A.

$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot E_3) = -\lambda \cdot (3 - \lambda)(1 - \lambda) + 2(1 - \lambda) = (1 - \lambda)[\lambda^2 - 3\lambda + 2] = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$. Damit sind 1 und 2 als Nullstellen von $\chi_B(\lambda)$ die Eigenwerte von B.

Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, 0) = \ker(A) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(B, 1) = \ker(B - E_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(B, 2) = \ker(B - 2E_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Definiere $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Da $\mathrm{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rang}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 3$ ist M linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ ist M sogar eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Zudem besteht M ausschließlich aus Eigenvektoren von A bzw. B, das heißt, bezüglich M besitzen A und B Diagonalgestalt.

H22 – T2 – A3

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 3$; ferner sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von V.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f: V \to V$ mit

$$f(b_1) = -b_2 + b_3, \quad f(b_1 + b_2) = -b_1 - b_2, \quad f(b_2 + b_3) = b_2 - b_3$$

gibt, und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von V.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus a) und geben Sie für jeden Eigenraum eine Basis an.

c) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f: V \to V$ aus a) diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Basis von V aus Eigenvektoren von f an.

Lösungsvorschlag

a) Es genügt zu zeigen, dass $b_1, b_1 + b_2, b_2 + b_3$ eine Basis von V ist, um die eindeutige Existenz von f zu begründen. Dafür genügt es wegen $\dim(V) = 3$ zu zeigen, dass $b_1, b_1 + b_2, b_2 + b_3$ linear unabhängig sind.

Zeige: $b_1, b_1 + b_2, b_2 + b_3$ linear unabhängig

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 (b_1 + b_2) + \lambda_3 (b_2 + b_3) = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) b_1 + (\lambda_2 + \lambda_3) b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$

Da b_1, b_2, b_3 eine Basis von V ist, sind die drei Vektoren insbesondere linear unabhängig.

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Somit sind $b_1, b_1 + b_2, b_2 + b_3$ linear unabhängig und wegen $\dim V = 3$ sogar eine Basis von V. Damit existiert genau eine lineare Abbildung f mit den gewünschten Bildern der Basisvektoren.

$$f(b_2) = f(b_1 + b_2 - b_1) \overset{f \text{ linear}}{=} f(b_1 + b_2) - f(b_1) \overset{\text{n.V.}}{=} -b_1 - b_2 + b_2 - b_3 = -b_1 - b_3 \qquad (*)$$

$$f(b_3) = f(b_2 + b_3 - b_2) \overset{f \text{ linear}}{=} f(b_2 + b_3) - f(b_2) \overset{\text{n.V.}}{\underset{(*)}{=}} b_2 - b_3 + b_1 + b_3 = b_1 + b_2$$

Insgesamt folgt also:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Um die Eigenwerte von M zu bestimmen, ermitteln wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_M(\lambda)$ der Matrix.

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda E_3) = (-\lambda)^3 - 1 + 1 - (-\lambda) + (-\lambda) - (-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Wir erhalten also die Eigenwerte $-1, 0$ und 1 der Matrix M. Um Basen der Eigenräume anzugeben, berechnen wir die Eigenräume. Es gilt:

- $\text{Eig}(M, -1) = \ker(M + E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 - Z_1 \\ Z_2 + Z_1}}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$

- $\operatorname{Eig}(M,0) = \ker(M) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_2+Z_3}{=} \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$
- $\operatorname{Eig}(M,1) = \ker(M - E_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_3+Z_1}}{=} \ker\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$

Somit sind

$$v_{-1} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jeweils Basisvektoren der zugehörigen Eigenräume.

c) Offensichtlich zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_M(\lambda)$ von M in Linearfaktoren und für jeden der drei Eigenwerte stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit überein – konkret gilt für alle drei Eigenwerte, dass algebraische und geometrische Vielfachheit jeweils den Wert 1 besitzen. Daher ist die Matrix M diagonalisierbar. Da eine darstellende Matrix von f diagonalisierbar ist, ist f selbst insbesondere auch diagonalisierbar.

Die in Teilaufgabe b) ermittelten Eigenvektoren v_{-1}, v_0 und v_1 von M sind Koordinatenvektoren bezüglich der Basis (b_1, b_2, b_3) von Eigenvektoren von f. Wenn wir die Koordinatenvektoren, die offensichtlich eine Basis des Koordinatenraums $\mathbb{R}^3$ bilden, also in Vektoren aus V übersetzen, erhalten wir eine Basis von V, die aus Eigenvektoren von f besteht.

Aus diesem Grund ist durch

$$w_1 \coloneqq 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3, \quad w_2 \coloneqq 1 \cdot b_1 + 1 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 \quad \text{und} \quad w_3 \coloneqq 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 1 \cdot b_3$$

eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von f gegeben.

F22 – T1 – A1

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass -3 ein Eigenwert von A_α ist.

Lösungsvorschlag

-3 Eigenwert von $A_\alpha \Leftrightarrow -3$ Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ von A_α

Bestimme $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \chi_{A_\alpha}(\lambda) &= \det(A_\alpha - \lambda \cdot E_3) = (\alpha - \lambda)^2(3 - \lambda) - (\alpha - \lambda) - (\alpha - \lambda) \\ &= (\alpha - \lambda)\left[(\alpha - \lambda)(3 - \lambda) - 2\right] \\ &= (\alpha - \lambda)\left[\lambda^2 - (3 + \alpha)\lambda + 3\alpha - 2\right] \end{aligned}$$

Nun ermitteln wir noch, für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom $\chi_{A_\alpha}(\lambda)$ die Nullstelle -3 besitzt.

$$\begin{aligned} \chi_{A_\alpha}(-3) = 0 &\Leftrightarrow 0 = (\alpha + 3)\left[9 + 9 + 3\alpha + 3\alpha - 2\right] = (\alpha + 3)(6\alpha + 16) \\ &\Leftrightarrow \alpha = -3 \text{ oder } \alpha = -\frac{16}{6} \end{aligned}$$

Insgesamt sehen wir also, dass -3 genau dann ein Eigenwert von A_α ist, wenn $\alpha \in \left\{-3, -\frac{16}{6}\right\}$ gilt.

F22 – T2 – A1

Seien

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

a) Berechnen Sie $A \cdot v$.

b) Zeigen Sie *ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms von A*, dass 6 ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts.

c) Bestimmen Sie *ohne weitere Rechnungen aber mit Begründung* das charakteristische Polynom χ_A von A in vollständig faktorisierter Form.

Lösungsvorschlag

a) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$

b) Für $w := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \neq 0$ gilt $(A - 6 \cdot E_6) \cdot w = 0$, das heißt, $Aw = 6w$.

Folglich ist 6 ein Eigenwert von A.

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 6 entspricht $\dim \ker (A - 6 \cdot E_6)$.

Offensichtlich gilt $\operatorname{rang} (A - 6 \cdot E_6) = 1$, denn alle Zeilen sind Vielfache der 1. Zeile. Damit folgt für die Dimension der Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - 6 \cdot E_6)\, x = 0,\ x \in \mathbb{R}^6$, die gerade $\ker(A - 6 \cdot E_6)$ entspricht:

$$\dim \ker (A - 6 \cdot E_6) = 6 - \operatorname{rang} (A - 6 \cdot E_6) = 6 - 1 = 5$$

c) Nach Teilaufgabe a) ist 0 ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \neq 0$. Nach Teilaufgabe b) ist 6 ein Eigenwert von A mit Eigenvektor w und geometrischer Vielfachheit 5. Das heißt, die algebraische Vielfachheit von 6 ist mindestens 5. Da das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A jedoch Grad 6 besitzt und 0 ebenfalls Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ ist, muss die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 6 genau 5 sein. Folglich ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 gleich $6 - 5 = 1$. Somit folgt mit dem Leitkoeffizient $(-1)^6 = 1$ für $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 6)^5.$$

F22 – T3 – A4

Für $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 8+t & 0 & 8+2t \\ 1 & 2t & 2 \\ -4-t & 0 & -4-2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Es bezeichne $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \varphi_t(x) = A_t \cdot x$ die zugehörige lineare Abbildung.

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von φ_t bzgl. der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ des } \mathbb{R}^3 \text{ an.}$$

b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die φ_t diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) A_t ist die Darstellungsmatrix von φ_t bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$. Suche also Basistauschmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ und $T_{\mathcal{E}}^{B} = \left(T_B^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$.

$$T_B^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Basisvektoren von B als Spalten der Matrix

$$T_{\mathcal{E}}^{B} = \left(T_B^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \tfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $T_{\mathcal{E}}^{B} = \left(T_B^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$ wurde mithilfe von Satz 1.13 aus Kapitel 1 ermittelt.

Die gesuchte Matrix ist dann

$$T_{\mathcal{E}}^{B} \cdot A_t \cdot T_B^{\mathcal{E}} = T_{\mathcal{E}}^{B} \cdot \begin{pmatrix} 8+t & 0 & 8+2t \\ 1 & 2t & 2 \\ -4-t & 0 & -4-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & t \\ 0 & 2t & 1 \\ -4 & 0 & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6t & 3 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

b) Wir suchen Eigenwerte von φ_t mithilfe des charakteristischen Polynoms der Darstellungsmatrix aus Teilaufgabe a) – nenne sie M_t:

$$\chi_{M_t}(\lambda) = \det\left(M_t - \lambda \cdot E_3\right) = (4-\lambda)(6t-\lambda)(-t-\lambda)$$

φ_t ist diagonalisierbar, wenn $\chi_{M_t}(\lambda)$ drei verschiedene Nullstellen besitzt, denn dann zerfällt $\chi_{M_t}(\lambda)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und für jeden Eigenwert von φ_t, das heißt jede Nullstelle von $\chi_{M_t}(\lambda)$, stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein – sie sind dann 1.

Prüfe, wenn einer der Eigenwerte algebraische Vielfachheit > 1 besitzt, ob auch dann algebraische und geometrische Vielfachheit für alle Eigenwerte übereinstimmen. Das ist genau dann der Fall, wenn mindestens zwei der Nullstellen übereinstimmen. Wir überprüfen im Folgenden also alle Fälle, in denen mindestens zwei der drei Nullstellen 4, $6t$ und $-t$ übereinstimmen.

1. Fall: $6t = -t \Rightarrow t = 0$
$\alpha(0) = 2, \quad \beta(0) = \dim \ker M_0 = 3 - \operatorname{rang}(M_0) = 3 - 2 = 1 < \alpha(0)$
$\Rightarrow \varphi_t$ für $t = 0$ nicht diagonalisierbar

2. Fall: $6t = 4 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$
$\alpha(4) = 2, \quad \beta(4) = \dim \ker \left(M_{\frac{2}{3}} - 4 \cdot E_3\right) = 3 - \operatorname{rang}\left(M_{\frac{2}{3}} - 4 \cdot E_3\right) = 3 - 1 = 2$
$\Rightarrow \alpha(4) = \beta(4)$
$\Rightarrow \varphi_t$ diagonalisierbar für $t = \frac{2}{3}$.

3. Fall: $-t = 4$
$\alpha(4) = 2, \quad \beta(4) = \dim \ker (M_{-4} - 4 \cdot E_3) = 3 - \operatorname{rang}(M_{-4} - 4 \cdot E_3) = 3 - 1 = 2$
$\Rightarrow \alpha(4) = \beta(4)$
$\Rightarrow \varphi_t$ diagonalisierbar für $t = -4$.

Insgesamt folgt somit, dass φ_t für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t \neq 0$ diagonalisierbar ist.

H21 – T1 – A3

Gegeben sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} s & s-1 & 1-s \\ 0 & s^2 & 1-s^2 \\ 0 & s^2-1 & 2-s^2 \end{pmatrix},$$

welche von einem reellen Parameter s abhängt.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s alle Eigenwerte von A_s mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von s die Matrix A_s diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme die Eigenwerte von A_s über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_{A_s}(\lambda)$ von A_s.

$$\begin{aligned} \chi_{A_s}(\lambda) &= \det(A_s - \lambda \cdot E_3) \\ &\overset{(*)}{=} (s-\lambda)\left[(s^2-\lambda)(2-s^2-\lambda) + (1+s^2)^2\right] \\ &= (s-\lambda)\left[\lambda^2 - 2\lambda - s^4 + 2s^2 + s^4 - 2s^2 + 1\right] \\ &= (s-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

(∗) Entwicklung nach der 1. Spalte

1. Fall: $s \neq 1$
$\alpha(s) = 1$ und da $1 \leq \beta(s) \leq \alpha(s)$ folgt direkt $\beta(s) = 1$.
$\alpha(1) = 2$ und

$$\beta(1) = \dim\ker(A_s - 1 \cdot E_3) = \dim\ker\begin{pmatrix} s-1 & s-1 & 1-s \\ 0 & s^2-1 & 1-s^2 \\ 0 & s^2-1 & 1-s^2 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

2. Fall: $s = 1$

$$\alpha(1) = 3,\ \beta(1) = \dim\ker(A_1 - E_3) = \dim\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

b) A_s diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\chi_{A_s}(\lambda)$ zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und für alle Eigenwerte λ_i von A_s gilt $\alpha(\lambda_i) = \beta(\lambda_i)$.

Dass χ_{A_s} in Linearfaktoren zerfällt ist nach a) für alle $s \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Mit dem Wissen zu algebraischer und geometrischer Vielfachheit von Eigenwerten von A_s aus Teilaufgabe a) folgt also:

- A_s nicht diagonalisierbar für $s \neq 1$, da $\beta(1) = 1 < 2 = \alpha(1)$
- A_s diagonalisierbar für $s = 1$, da $\alpha(1) = 3 = \beta(1)$

H21 – T2 – A2

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v} \neq 0$.

a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Menge R aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Menge S aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

c) Sei S die Menge aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist, mit $n = 2$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Basis von S.

Lösungsvorschlag

a) Diese Aussage ist falsch, denn die Menge R ist nicht additiv abgeschlossen.

Seien $A, B \in R$. Dann gilt:

$$(A+B)\cdot\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v} = 2\mathbf{v} \;\Rightarrow\; A + B \notin R$$

b) Es genügt zu zeigen, dass $S \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist.

1) $E_n \in S$, denn $E_n\mathbf{v} = \mathbf{v} \;\Rightarrow\; S \neq \emptyset$

2) Seien $A, B \in S$, das heißt $\exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$: $\quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$

$\Rightarrow\; (A+B)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + B\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v} = (\lambda+\mu)\mathbf{v} \;\Rightarrow\; A + B \in S$

3) Seien $A \in S$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. $\quad A \in S \;\Rightarrow\; \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$: $\quad A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$

$\Rightarrow\; (\lambda A)\cdot\mathbf{v} = \lambda\cdot(A\mathbf{v}) = \lambda\alpha\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \lambda A \in S$

$\Rightarrow\; S \subseteq \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{R})$ Untervektorraum und damit insbesondere S auch ein Vektorraum

c) Es sei $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$,

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor von $A \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+b\\ c+d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow a + b = c + d$$
$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & (a+b)-c\end{pmatrix} :\; a, b, c \in \mathbb{R}$$

Also ist $S = \left\{ \begin{pmatrix}a & b\\ c & (a+b)-c\end{pmatrix} : \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix} \right\rangle}_{=:B}$

Offensichtlich ist B ein Erzeugendensystem von S. Außerdem ist B linear unabhängig, denn seien $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \lambda = \mu = \varepsilon = 0$

$\Rightarrow$ B ist eine Basis von S.

H21 – T3 – A2

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $\operatorname{rang}(A) \geq \max\{n, m\}$, so ist A eine invertierbare Matrix.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, dann gibt es eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit
$$BAB^{-1} = D.$$

c) Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension n. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F\colon V \to V$ mit
$$\operatorname{Bild}(F) = \operatorname{Kern}(F) = U.$$

Lösungsvorschlag

a) Es gilt: $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$, das heißt nach Voraussetzung:

$\max\{m, n\} \leq \operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\} \Rightarrow \min\{m, n\} \geq \max\{m, n\}$.

Da also $\min\{m, n\} \geq \max\{m, n\}$ und nach Definition auch $\min\{m, n\} \leq \max\{m, n\}$ folgt insgesamt $\max\{m, n\} \Rightarrow m = n$ und damit insbesondere $\operatorname{rang}(A) = n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow A$ invertierbar

b) Die Aussage ist falsch. Dafür zeigen wir zunächst, dass die orthogonale Diagonalisierbarkeit von A impliziert, dass A symmetrisch ist.

Nehmen wir also an, dass es eine orthogonale Matrix B gibt, für die $BAB^{-1} = D$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Da B orthogonal ist, gilt $B^{-1} = B^T$ (das sehen wir in Definition 7.9 in Kapitel 8). Weil für die Diagonalmatrix D außerdem $D = D^T$ und nach geeignetem Umformen zudem $A = B^{-1}DB$ folgt insgsamt
$$A^T = (B^{-1}DB)^T = B^T D^T (B^{-1})^T = B^{-1}D(B^T)^T = B^{-1}DB = A.$$

Wir sehen also, dass es zum widerlegen der Aussage genügt, eine nicht symmetrische diagonalisierbare Matrix anzugeben. Ebenso ist es ausreichend, dies für eine beliebige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu tun, da die Aussage für beliebiges n formuliert ist. Gilt sie also für ein $n \in \mathbb{N}$ nicht, ist sie im Allgemeinen falsch.

Betrachte daher die Matrix $C := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mithilfe der üblichen Techniken vergewissern wir uns, dass C diagonalisierbar ist. Wir können auch einfach eine Basis aus Eigenvektoren angeben, etwa $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Damit belegen wir direkt, dass C diagonalisierbar ist. Angenommen, es gäbe nun eine Matrix B wie in der Aussage gefordert, dann wäre C gemäß des vorherigen Beweises symmetrisch. Ein Widerspruch, da C offensichtlich nicht symmetrisch ist.

Die orthogonale Diagonalisierbarkeit wird uns im Zusammenhang mit der euklidischen Normalform einer Quadrik noch einmal beschäftigen (vgl. Satz 10.3 in Kapitel 10). Dort werden wir genau die Umkehrung der oben bewiesenen Aussage benötigen, dass nämlich jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal diagonalisierbar ist, dass es also eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, für die $BAB^{-1} = D$ mit einer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

c) Diese Aussage ist wahr. Wir führen einen konstruktiven Beweis und geben eine lineare Abbildung F an, die die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Da U ein n-dimensionaler Untervektorraum von V ist, können wir eine Basis $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ von U angeben und diese zu einer Basis $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n\}$ ergänzen. Eine lineare Abbildung $F\colon V \to V$ ist eindeutig definiert, wenn wir die Bilder für eine Basis angeben. Definiere daher

$$F(u_i) = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad F(v_i) = u_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Offensichtlich gilt gemäß dieser Definition $U \subseteq \text{Kern}(F)$. Weiterhin gilt $U \subseteq \text{Bild}(F)$, denn sei $u \in U$ beliebig, dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ derart, dass $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_n u_n$. Für $v \coloneqq \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ gilt dann aber

$$F(v) = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n) = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = u.$$

Somit folgt, dass $\dim(\text{Kern}(F)) \geq \dim(U) = n$ und ebenso $\dim(\text{Bild}(F)) \geq \dim(U) = n$. Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen gilt aber

$$2n = \dim(V) = \dim(\text{Kern}(F)) + \dim(\text{Bild}(F)).$$

Mit den obigen Abschätzungen ergibt sich somit $\dim(\text{Kern}(F)) = \dim(\text{Bild}(F)) = n$ und damit wegen $\dim(U) = n$ insbesondere auch $\text{Kern}(F) = U = \text{Bild}(F)$.

F21 – T1 – A1

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

b) Weisen Sie nach, dass A diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0$ ist Eigenvektor zum Eigenwert -2.

b) Bestimme zunächst die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ von A.

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 3 - (1-\lambda) - 9(2-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 + 3 + \lambda - 1 - 18 + 9\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda - 14 \\ &\overset{(*)}{=} -(\lambda+2)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) \end{aligned}$$

Im Schritt $(*)$ gelangen wir mithilfe einer Polynomdivision zu einer ersten Faktorisierung. Dabei nutzen wir, dass wir aus Aufgabe a) bereits -2 als Eigenwert von A identifiziert haben, das heißt, $\lambda + 2$ lässt sich als Linearfaktor vom charakteristischen Polynom $\chi_A(\lambda)$ abspalten.

Die Nullstellen von $\lambda^2 - 6\lambda + 7$ sind $\lambda_1 := \frac{6+\sqrt{8}}{2} = 3 + \sqrt{2}$ und $\lambda_2 := 3 - \sqrt{2}$.

Damit folgt: $\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)\left(\lambda - 3 - \sqrt{2}\right)\left(\lambda - 3 + \sqrt{2}\right)$.

Die Eigenwerte von A sind somit -2, $3 + \sqrt{2}$ und $3 - \sqrt{2}$.

Für jeden der Eigenwerte μ von A ist die algebraische Vielfachheit $\alpha(\mu)$ gleich 1. Für die geometrische Vielfachheit $\beta(\mu)$ eines Eigenwerts μ von A gilt: $1 \leq \beta(\mu) \leq \alpha(\mu) = 1$. Somit folgt $\alpha(\mu) = \beta(\mu) = 1$ für alle Eigenwerte von A. Da $\chi_A(\lambda)$ über $\mathbb{R}$ außerdem in Linearfaktoren zerfällt, ist A also diagonalisierbar.

F21 – T1 – A4

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix mit $\text{Spur}(A) = 3$ und $\det(A) = 2$.

a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom von A die Form

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2$$

hat und folgern Sie daraus, dass A diagonalisierbar ist.

b) Folgern Sie, z.B. mit a), dass

$$\{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \text{Spur}(B) = 3, \det(B) = 2\}$$

die Menge aller zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ähnlichen Matrizen ist.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Nach Angabe gilt sowohl $\text{Spur}(A) = a + d = 3$ als auch $\det(A) = ad - bc = 2$.

Für das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A folgt daher:

$$\chi_A(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Es gilt: $\mu \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\mu) = 0$

Die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ sind $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{9-8}}{2} = 2$ und $\lambda_2 = 1$, das heißt $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ und folglich zerfällt $\chi_A(\lambda)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Für die algebraische Vielfachheit $\alpha(\lambda_i)$ der beiden Eigenwerte von A gilt: $\alpha(\lambda_i) = 1$.

Für die geometrische Vielfachheit $\beta(\lambda_i)$ der beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A folgt wegen $1 \leq \beta(\lambda_i) \leq \alpha(\lambda_i)$ direkt, dass $\beta(\lambda_i) = 1$.

Da $\chi_A(\lambda)$ in Linearfaktoren zerfällt und $\alpha(\lambda_i) = \beta(\lambda_i)$ füt alle Eigenwerte λ_i mit $i \in \{1, 2\}$ von A folgt, dass A diagonalisierbar ist.

b) Nenne die gegebene Menge M und definiere $N := \left\{ B \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; B \text{ ähnlich zu } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

Zeige: $M = N$

„$\subseteq$“: Sei $B \in M$ $\overset{a)}{\Rightarrow}$ $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ und B diagonalisierbar
$\Rightarrow$ $\exists\, T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar mit $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
(denn 1 und 2 sind EWe von B)
$\Rightarrow$ $B \in N$

„$\supseteq$“: Sei $B \in N$ $\Rightarrow$ $\exists\, T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar mit $T^{-1}BT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Es gilt $\det(B) = \det\left(T^{-1}BT\right) = 2$ und aus a) folgern wir für $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + \det(B)$

Weiter gilt für $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $\chi_D(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$

Da das charakteristische Polynom für ähnliche Matrizen gleich ist, folgt $\chi_D(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ und nach einem Koeffizientenvergleich auch $\text{Spur}(B) = a + d = 3$.

$\Rightarrow B \in M$

Allgemein gilt für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$: $\text{Spur}\left(T^{-1}BT\right) = \text{Spur}(A)$

F21 – T2 – A2

Es sei

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine invertierbare Matrix, E_4 die Einheitsmatrix und $A = TDT^{-1} - E_4$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt für das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_4) = \det\left(TDT^{-1} - E_4 - \lambda E_4\right) = \det\left(TDT^{-1} - TT^{-1} - \lambda TT^{-1}\right) \\ &= \det\left(T\left(D - E_4 - \lambda E_4\right)T^{-1}\right) = \det(T) \cdot \det(D - E_4 - \lambda E_4) \cdot \det\left(T^{-1}\right) \\ &= \det(D - E_4 - \lambda E_4) \cdot \det(T) \cdot \det(T)^{-1} = \det(D - E_4 - \lambda E_4) \\ &= (-2 - \lambda)^2(1 - \lambda)^2 \end{aligned}$$

Die Idee ist hier, dass $A = TDT^{-1} - E_4 = TDT^{-1} - TT^{-1} = T(D - E_4)T^{-1}$, das heißt, A ist ähnlich zu $D - E_4$ und somit besitzen A und $D - E_4$ dasselbe charakteristische Polynom.

b) Mit der Idee aus Teilaufgabe a) berechnen wir:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(TDT^{-1} - E_4) \\ &= \det(TDT^{-1} - TT^{-1}) \\ &= \det\left(T(D - E_4)T^{-1}\right) \\ &= \det(T) \cdot \det(D - E_4) \cdot \det\left(T^{-1}\right) \\ &= \det(D - E_4) \cdot \det(T) \cdot \det(T)^{-1} \\ &= \det(D - E_4) = (-2)^2 \cdot 1^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

H20 – T1 – A3

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für welche $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Zeigen Sie, dass A nicht orthogonal diagonalisierbar ist, d.h. dass es keine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, für welche S^TAS Diagonalgestalt hat.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) \\ &= (-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda) + 4 + 4 - 2(4-\lambda) - 2\lambda + 4(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[-4\lambda + \lambda^2 + 4] \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

Also sind 1 und 2 die Eigenwerte von A. Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \ker(A - E_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Eig}(A,2) = \ker(A - 2E_3) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(∗) Die Lösung ist in diesem Schritt für das Examen zu knapp.

Offensichtlich ist $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ linear unabhängig und wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Für $S := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt daher:

i) S invertierbar, denn $\det(S) \neq 0$ wegen $\mathcal{B}$ linear unabhängig

ii) $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Angenommen es gäbe eine solche Matrix S mit $S^TAS = D$ und D eine Diagonalmatrix. Da offensichtlich $D^T = D$ würde dann wegen $S^{-1} = S^T$ für die orthogonale Matrix S folgen:

$$S^TAS = D \;\Leftrightarrow\; A = SDS^T \quad \text{also} \quad A^T = (SDS^T)^T = \left(S^T\right)^T D^T S^T = SDS^T = A.$$

Somit wäre A symmetrisch, das ist jedoch offensichtlich ein Widerspruch, da A nicht symmetrisch ist.

F20 – T3 – A2

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die reelle 2×2-Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+2 & t \\ -t & t-2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Lösungsvorschlag

Untersuche, für welche $t \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A_t existiert.

Bestimme dafür zunächst Eigenwerte von A_t als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_{A_t}(\lambda)$ von A_t.

$$\chi_{A_t}(\lambda) = \det(A_t - \lambda E_2) = (t+2-\lambda)(t-2-\lambda) + t^2 = (t-\lambda)^2 - 2^2 + t^2 = \lambda^2 - 2t\lambda + 2t^2 - 4$$

$$\chi_{A_t}(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 4(2t^2-4)}}{2} = \frac{2t \pm \sqrt{16-4t^2}}{2} = t \pm \sqrt{4-t^2}$$

Für $t^2 > 4$, das heißt $|t| > 2$ bzw. $t > 2$ oder $t < -2$, besitzt $\chi_{A_t}(\lambda)$ keine reellen Nullstellen, weshalb $\chi_{A_t}(\lambda)$ nicht in Linearfaktoren zerfällt und folglich A_t nicht reell diagonalisierbar ist.

Für $t^2 < 4$, das heißt $|t| < 2$ bzw. $-2 < t < 2$, besitzt A_t zwei verschiedene Eigenwerte $\mu_1 = t + \sqrt{4-t^2}$ und $\mu_2 = t - \sqrt{4-t^2}$. Für deren algebraische Vielfachheit gilt: $\alpha(\mu_i) = 1$. Für die geometrische Vielfachheit $\beta(\mu_i)$ folgt wegen $1 \leq \beta(\mu_i) \leq \alpha(\mu_i)$ direkt, dass $\beta(\mu_i) = \alpha(\mu_i) = 1$. Da zudem $\chi_{A_t}(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)$ in Linearfaktoren zerfällt, ist A_t reell diagonalisierbar.

Für $t^2 = 4$ untersuche die Eigenräume zum einzigen Eigenwert t von A_t.

1. Fall: $t = 2$

$$\text{Eig}(A_2, 2) = \ker(A_2 - 2 \cdot E_2) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \beta(2) = 1 < \alpha(2) = 2$

$\Rightarrow A_2$ ist nicht reell diagonalisierbar

2. Fall: $t = -2$:

$$\text{Eig}(A_{-2}, -2) = \ker(A_{-2} + 2 \cdot E_2) = \ker\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \beta(-2) = 1 < \alpha(-2) = 2$

$\Rightarrow A_{-2}$ ist nicht reell diagonalisierbar

H19 – T1 – A3

Betrachten Sie die folgenden Unterräume

$$E = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, F = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, G = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie $E + F + G = \mathbb{R}^3$.

b) Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gelte:

- E ist Eigenraum zum Eigenwert 2,
- F ist Eigenraum zum Eigenwert -1,
- $G = \ker(f)$.

Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix im Bezug zur kanonischen Basis $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \in \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag

a) Zeige, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind

Seien also $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} \lambda - \varepsilon &= 0 \\ \lambda - \mu + 2\varepsilon &= 0 \\ \lambda + \mu &= 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} a\gamma + \alpha &= 0 \\ a\beta + 2\alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \lambda \\ \lambda = 0 \\ \mu = -\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = \varepsilon = 0$$

Es ist also $E + F + G \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\dim(E + F + G) \geq 3$ und daher $E + F + G = \mathbb{R}^3$

b) Gemäß Angabe wissen wirm dass $v_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 2, $v_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -1 und $v_3 \coloneqq \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0. Aus a) wissen wir zudem, dass $\mathcal{B} \coloneqq \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathcal{E} \coloneqq \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Gesucht: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$.

Es gilt: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ mit $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ Basistauschmatrix und $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$. Bestimme also die beiden Transformationsmatrizen:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}^{T} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Also

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) &= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \\ &= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H19 – T1 – A5

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix, deren Zeilenvektoren alle gleich sind.

Untersuchen Sie A (zum Beispiel in Abhängigkeit von ihrer Spur) auf Diagonalisierbarkeit.

Lösungsvorschlag

Nach Angabe gilt $\operatorname{rang}(A) = 1$ (denn alle Zeilenvektoren von A gleich heißt $\operatorname{rang}(A) \leq 1$ und $A \neq 0$ heißt $\operatorname{rang}(A) \geq 1$).

$\Rightarrow \dim \ker(A) = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rang}(A) = n - 1$

$\Rightarrow A$ besitzt genau $n - 1$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert 0.

$\Rightarrow$ Die geometrische Vielfachheit $\beta(0)$ des Eigenwerts 0 ist $\beta(0) = n - 1$

Da die algebraische Vielfachheit $\alpha(\mu)$ stets größer oder gleich der geometrischen Vielfachheit eines Eigenwerts μ ist, folgt unmittelbar, dass $n - 1 \leq \alpha(0)$, das heißt, die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 beträgt mindestens $n - 1$.

Für das charakteristische Polynom von A folgt damit:

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1} \left(\lambda - \operatorname{Spur}(A)\right),$$

denn 0 ist mindestens $(n-1)$-fache Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$ und die Koeffizienten von λ^n bzw. λ^{n-1} im charakteristischen Polynom sind $(-1)^n$ bzw. $(-1)^{n-1} \cdot \operatorname{Spur}(A)$.

Weiterhin wissen wir:

$$A \text{ diagonalisierbar über } \mathbb{R} \iff \begin{array}{l} \chi_A(\lambda) \text{ zerfällt über } \mathbb{R} \text{ in Linearfaktoren und} \\ \alpha(\mu) = \beta(\mu) \text{ für alle Eigenwerte } \mu \text{ von } A \end{array}$$

Anhand des charakteristischen Polynoms sehen wir, dass $\operatorname{Spur}(A)$ ein Eigenwert von A ist. Wir machen daher eine Fallunterscheidung hinsichtlich des Werts von $\operatorname{Spur}(A)$.

1. Fall: $\operatorname{Spur}(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Spur}(A)$ ist Eigenwert von A mit algebraischer Vielfachheit $\alpha\left(\operatorname{Spur}(A)\right) = 1$

Wegen $1 \leq \beta\left(\operatorname{Spur}(A)\right) \leq \alpha\left(\operatorname{Spur}(A)\right)$ mit $\beta\left(\operatorname{Spur}(A)\right)$ geometrische Vielfachheit von $\operatorname{Spur}(A)$, folgt also $\alpha\left(\operatorname{Spur}(A)\right) = \beta\left(\operatorname{Spur}(A)\right) = 1$.

Da zudem $\alpha(0) = \beta(0) = n - 1$ und da $\chi_A(\lambda)$ offensichtlich in Linearfaktoren zerfällt, ist A diagonalisierbar.

2. Fall: $\operatorname{Spur}(A) = 0$ $\operatorname{Spur}(A) = 0 \Rightarrow \alpha(0) = n$

Da wie oben bemerkt aus der Voraussetzung $A \neq 0$ bereits $\beta(0) = n - 1$ folgt und damit $\beta(0) = n - 1 \neq n = \alpha(0)$ ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.

H19 – T2 – A2

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

c) Finden Sie eine invertierbare Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $X^{-1}AX$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösungsvorschlag

a) Da $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

b) Bestimme die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3) = \lambda^2(2-\lambda) + 2\lambda - 3(2-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \overset{(*)}{=} -(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3).$$

Die Eigenwerte von A sind also $-2, 1, 3$.

(*) Aus Teilaufgabe a) kennen wir bereits den Eigenwert 1. Wir können bei Bedarf also das charakteristische Polynom durch $\lambda - 1$ dividieren und erhalten im Anschluss ein Polynom vom Grad 2, dessen Nullstellen wir mit bekannten Mitteln berechnen.

c) Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dann erhalten wir X, indem wir eine Basis aus Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix schreiben.

Bestimme zunächst die Eigenräume zu den Eigenwerten -2 und 3. Aus dem charakteristischen Polynom von A lesen wir für die algebraische Vielfachheit von 1 direkt $\alpha(1) = 1$ ab. Wegen $1 \le \beta(1) \le \alpha(1)$ erhalten wir für die geometrische Vielfachheit von 1 unmittelbar $\beta(1) = 1$. Mit Teilaufgabe a) folgt daher:

- $\text{Eig}(A, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\text{Eig}(A, -2) = \ker(A + 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $$= \left\{ \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ -3x_2 \end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\text{Eig}(A, 3) = \ker(A - 3 \cdot E_3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

  $$= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Definiere nun X als Matrix mit einer Basis aus Eigenvektoren als Spalten, das heißt

$$X := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det(X) = 30 \neq 0$ ist X invertierbar und es gilt

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

denn X ist gerade eine Basistauschmatrix bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren von A.

Bei den Diagonaleinträgen beachten wir, dass sich die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Diagonalen aus der Reihenfolge der Eigenvektoren in den Spalten von X ergibt.

H19 – T2 – A3

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Sei $S\colon V \to V$ die Abbildung, die jedem Polynom $p(x)$ das Polynom $p(x-1)$ zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass S eine lineare Abbildung (und damit ein Endomorphismus von V) ist.

b) Zeigen Sie, dass 0 kein Eigenwert von S ist.

c) Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von S ist, und geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

Lösungsvorschlag

a) Seien $p(x), q(x) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $S\big(p(x)+q(x)\big) = S\big((p+q)(x)\big) = (p+q)(x-1) = p(x-1)+q(x-1) = S\big(q(x)\big)$
- $S\big(\lambda \cdot p(x)\big) = S\big((\lambda p)(x)\big) = (\lambda p)(x-1) = \lambda p(x-1) = \lambda S\big(p(x)\big)$

$\Rightarrow$ S ist linear

→ Hier könnte im Examen eine ausführliche Lösung notwendig sein, die reelle Polynome $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$ mit $p_i, q_i \in \mathbb{R}$ aus der Menge V nutzt und so die Linearität von S etwas konkreter nachrechnet.

b) 0 ist Eigenwert von $S \Leftrightarrow \exists p(x) \in V$ mit $p(x) \neq 0\colon \quad S\big(p(x)\big) = 0$

Zeige also: $S\big(p(x)\big) = 0 \Rightarrow p(x) = 0$

Sei $p(x) \in V \Rightarrow \exists a_i \in \mathbb{R}\colon \quad p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Sei $0 \leq k \leq n$ maximal mit $a_k \neq 0$. Dann folgt:

$$S\big(p(x)\big) = p(x-1) = \sum_{i=0}^{k} a_i (x-1)^i = a_k x^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i \text{ mit } b_i \in \mathbb{R}.$$

$S\big(p(x)\big) = 0 \Rightarrow a_k = 0$ Widerspruch zu $a_k \neq 0$

$\Rightarrow$ Es gibt kein $a_k \neq 0$, wenn $S\big(p(x)\big) = 0$

$\Rightarrow$ 0 ist kein Eigenwert von S.

c) Sei $p(x) := 1 \in V$. Dann gilt:

$$S\big(p(x)\big) = S(1) = 1 = 1 \cdot p(x).$$

Da $p(x) \neq 0$, ist somit 1 ein Eigenwert von S und $p(x) = 1$ ein zugehöriger Eigenvektor.

H19 – T3 – A1

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Zeigen Sie:

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ist A^2 diagonalisierbar, so ist nicht unbedingt auch A diagonalisierbar.

b) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(U) = k < n$, so gibt es lineare Abbildungen

$$f_1, \ldots, f_{n-k} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

mit

$$U = \bigcap_{i=1}^{n-k} \mathrm{Kern}(f_i).$$

Lösungsvorschlag

a) Es genügt für ein $n \geq 2$ zu zeigen, dass es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, für die zwar A^2 diagonalisierbar, jedoch A nicht diagonalisierbar ist. Betrachte also $n = 2$ und definiere

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist A^2 als Diagonalmatrix diagonalisierbar. Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 + 1$ von A zerfällt (über $\mathbb{R}$) jedoch nicht in Linearfaktoren, weshalb A nicht diagonalisierbar ist.

Die obige Idee lässt sich verallgemeinern. So können wir etwa die Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten, die wie folgt definiert ist:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Dann gilt} \quad B^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

das heißt, B^2 ist als Diagonalmatrix diagonalisierbar. Da das charakterisitische Polynom $\chi_B(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(\lambda^2 + 1)$ nicht in Linearfaktoren zerfällt, ist B nicht diagonalisierbar.

b) Es sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U. Wir können diese durch $\{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ zu einer Basis $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzen. Eine lineare Abbildung f_i ist eindeutig bestimmt, wenn wir für jedes Element dieser Basis ein zugehöriges Bild angeben.

Definiere nun $f_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $i \in \{1, \ldots, n-k\}$ durch $f_i(u_j) = 0$ für $1 \leq j \leq k$ sowie $f_i(v_i) = 1$ und $f_i(v_j) = 0$ für $j \in \{1, \ldots, n-k\} \setminus \{i\}$.

Damit folgt

$$\ker(f_i) = \langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{n-k} \rangle$$

und daher

$$\bigcap_{i=1}^{n-k} \ker(f_i) = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle = U.$$

H19 – T3 – A2

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Weiter bezeichne E_r, $1 \leq r \leq n$ die $r \times r$-Einheitsmatrix. Zeigen Sie:

Ist

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

so ist das charakteristische Polynom f_{AB} von AB gleich dem charakteristischen Polynom f_{BA} von BA.

Lösungsvorschlag

Es sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $A \cdot B = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & 1 \leq i \leq n \text{ und } 1 \leq j \leq r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$B \cdot A = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & 1 \leq i \leq r \text{ und } 1 \leq j \leq n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Mit $A_1 := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ folgt also $A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ M_1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $M_1 \in \text{Mat}((n-r)\times r;\mathbb{R})$ und

$B \cdot A = \begin{pmatrix} A_1 & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $M_2 \in \text{Mat}(r \times (n-r);\mathbb{R})$

Nach den Rechenregeln für die Determinante von Blockmatrizen folgt somit:

$$\left.\begin{aligned} f_{AB} &= \det(AB - \lambda \cdot E_n) = (-\lambda)^{n-r} \cdot \det(A_1 - \lambda \cdot E_r) \\ f_{BA} &= \det(BA - \lambda \cdot E_n) = (-\lambda)^{n-r} \cdot \det(A_1 - \lambda \cdot E_r) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \; f_{AB} = f_{BA}$$

H19 – T3 – A3

Es sei $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Weiter sei

$$m_B \colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, A \mapsto AB.$$

a) Zeigen Sie, dass m_B eine lineare Abbildung ist und dass m_B genau dann surjektiv ist, wenn $\det(B) \neq 0$ gilt.

b) Es sei nun $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter sowie

$$B = \begin{pmatrix} 2 & t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von m_B. Bestimmen Sie zudem diejenigen t, für die m_B nicht diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Seien $M, N \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $m_B(M+N) = (M+N)B = MB + NB = m_B(M) + m_B(N)$
- $m_B(\lambda M) = (\lambda M) \cdot B = \lambda \cdot MB = \lambda m_B(M)$

$\Rightarrow$ m_B linear

Zeige nun noch m_B surjektiv $\Leftrightarrow$ $\det(B) \neq 0$

- **Zeige**: m_B surjektiv $\Rightarrow$ $\det(B) \neq 0$
  m_B surjektiv $\Rightarrow$ $\exists\, A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $E_2 = m_B(A) = A \cdot B$
  $\Rightarrow$ $1 = \det(E_2) = \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
  $\Rightarrow$ $\det(B) \neq 0$
- **Zeige**: $\det(B) \neq 0$ $\Rightarrow$ m_B surjektiv
  $\det(B) \neq 0$ $\Rightarrow$ B invertierbar.
  Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann gilt $A \cdot B^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und außerdem $m_B\left(AB^{-1}\right) = A$
  $\Rightarrow$ m_B surjektiv

b) Es sei $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Dann ist die darstellende Matrix von m_B bezüglich $\mathcal{E}$ gegeben durch:

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(m_B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ t-1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & t \end{pmatrix} =: M$$

Um die Eigenwerte von m_B zu bestimmen, berechnen wir diese als Nullstellen des charakteristischen Polynoms von M.

$$\begin{aligned} \chi_M(\lambda) &= \det(M - \lambda \cdot E_4) \\ &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ t-1 & t-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ t-1 & t-\lambda \end{pmatrix} \\ &= [(2-\lambda)(t-\lambda) - (t-1)]^2 \end{aligned}$$

$$= \left[\lambda^2 - (t+2)\lambda + 2t - t + 1\right]^2$$
$$= \left[\lambda^2 - (t+2)\lambda + (t+1)\right]^2$$

Bestimme die Nullstellen von $\chi_M(\lambda)$:

$$\chi_M(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{t+2 \pm \sqrt{(t+2)^2 - 4(t+1)}}{2} = \frac{t+2 \pm \sqrt{t^2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \lambda = t+1$$

Insgesamt folgt somit: $\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-(t+1))^2$.

Bestimme nun noch die Eigenräume zu den beiden Eigenwerten:

$$\operatorname{Eig}(M,1) = \ker(M - E_4) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ t-1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & t-1 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Eig}(M,t+1) = \ker(M - (t+1)E_4) = \ker\begin{pmatrix} 1-t & 1 & 0 & 0 \\ t-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & t-1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (t-1)x_1 \\ x_3 \\ (t-1)x_3 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t-1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit folgt:

- $\operatorname{Eig}(m_B,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(m_B,t+1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Gilt $t = 0$, dann folgt $\chi_M(\lambda) = (\lambda-1)^4$ und insbesondere $\operatorname{Eig}(m_B,1) = \operatorname{Eig}(m_B,t+1)$. Somit folgt $\dim\left(\operatorname{Eig}(m_B,1)\right) = 2 < 4 = \alpha(1)$, wobei $\alpha(1)$ die algebraische Vielfachheit von 1 bezeichnet. Damit ist m_B nicht diagonalisierbar.

Gilt $t \neq 0$, dann zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_M(\lambda)$ in Linearfaktoren, es ist $1 \neq t+1$ und $\dim\left(\operatorname{Eig}\left(m_B,\mu_i\right)\right) = \alpha\left(\mu_i\right)$ für $\mu_i \in \{1, t+1\}$, das heißt, die algebraische und die geometrische Vielfachheit stimmen für beide Eigenwerte überein. In diesen Fällen ist m_B diagonalisierbar.

F19 – T1 – A3

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Beweisen Sie: Wenn n ungerade ist und es eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$SAS^{-1} = -A$$

gibt, dann ist A nicht invertierbar.

b) Sei A invertierbar und es gebe eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$TAT^{-1} = A^{-1}.$$

Beweisen Sie: Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A ist, dann ist auch $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A und die geometrischen Vielfachheiten von λ und $\frac{1}{\lambda}$ sind gleich.

Lösungsvorschlag

a) $SAS^{-1} = -A$

$\Rightarrow \det\left(SAS^{-1}\right) = \det(-A)$
$\Rightarrow \det(S) \cdot \det(A) \cdot \det\left(S^{-1}\right) = (-1)^n \cdot \det(A)$
$\Rightarrow \det(S) \cdot \det(A) \cdot \det(S)^{-1} = (-1)^n \cdot \det(A)$
$\Rightarrow \det(A) = -\det(A)$, denn n ist ungerade
$\Rightarrow 2\det(A) = 0$
$\Rightarrow \det(A) = 0$
$\Rightarrow A$ nicht invertierbar

b) Da A invertierbar ist, folgt $\ker(A) = \{0\}$, das heißt, 0 ist kein Eigenwert von A, also insbesondere $\lambda \neq 0$.

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \quad Av = \lambda v \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v = TAT^{-1} v \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} T^{-1} v = AT^{-1} v \end{aligned}$$

Da $T^{-1}v \neq 0$ wegen T invertierbar folgt damit unmittelbar, dass $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A ist.

Somit gilt: $\text{Eig}\left(A, \frac{1}{\lambda}\right) = \left\{T^{-1}v \mid v \in \text{Eig}(A, \lambda)\right\}$. Für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, v \mapsto T^{-1}v$ folgt daher, dass $f\left(\text{Eig}(A, \lambda)\right) = \text{Eig}\left(A, \frac{1}{\lambda}\right)$.

f ist offensichtlich linear und bijektiv, da T^{-1} eine invertierbare Matrix ist. Daher folgt mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen

$$\dim\left(\text{Eig}(A, \lambda)\right) = \dim\left(\text{Eig}\left(A, \frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ und $\frac{1}{\lambda}$ von A stimmen somit überein.

F19 – T2 – A1

Für $t \in \mathbb{R}$ sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -t & 1+t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A_t.

b) Bestimmen Sie den Eigenraum von A_t zum Eigenwert 1.

c) Geben Sie alle t an, für die die Matrix A_t diagonalisierbar ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

d) Geben Sie im Fall, dass A_t diagonalisierbar ist, eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A_t an.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}\chi_{A_t}(\lambda) &= \det(A_t - \lambda \cdot E_3) = (1-\lambda)\left[(-\lambda)\cdot(1+t-\lambda)+t\right] \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - (1+t)\lambda + t) = (1-\lambda)^2(\lambda - t)\end{aligned}$$

b) $\operatorname{Eig}(A_t, 1) = \ker(A_t - E_3) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -t & t \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) A_t ist für $t \neq 1$ diagonalisierbar. Denn $\chi_{A_t}(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren und für den Eigenwert 1 stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein, denn $\alpha(1) = \beta(1) = 2$.

Für den Eigenwert $t \neq 1$ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist die algebraische Vielfachheit $\alpha(t) = 1$ und wegen $1 \leq \dim \operatorname{Eig}(A_t, t) \leq \alpha(t)$ folgt $\dim \operatorname{Eig}(A_t, t) = \beta(t) = \alpha(t) = 1$.

Gilt $t = 1$, so ist $\alpha(1) = 3$ nach Teilaufgabe a) und $\dim \operatorname{Eig}(A_t, 1) = 2$ nach Teilaufgabe b). Daher A_1 nicht diagonalisierbar.

d) Bestimme noch $\operatorname{Eig}(A_t, t)$ für $t \neq 1$:

$$\operatorname{Eig}(A_t, t) = \ker(A_t - t \cdot E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ 0 & -t & 1 \end{pmatrix} \overset{t\neq 1}{=} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ t x_2 \end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle$$

Damit ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A_t gegeben durch $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\}$.

F19 – T3 – A3

Gegeben sei eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $|a - c| > |2b|$, dann ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

b) Wenn $|a - c| < |2b|$, dann ist A über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag

Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (a - \lambda)(c - \lambda) + b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac + b^2$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda &= \frac{a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4(ac + b^2)}}{2} \\ &= \frac{a + c \pm \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 - 4b^2}}{2} \\ &= \frac{a + c \pm \sqrt{(a - c)^2 - 4b^2}}{2} \end{aligned}$$

a) $|a - c| > |2b| \;\Rightarrow\; (a - c)^2 > (2b)^2 \;\Rightarrow\; (a - c)^2 - 4b^2 > 0$

Somit hat $\chi_A(\lambda)$ zwei verschiedene Nullstellen $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Für deren algebraische Vielfachheit $\alpha(\mu_i)$ gilt: $\alpha(\mu_i) = 1$.

Da $1 \leq \dim \text{Eig}(A, \mu_i) \leq \alpha(\mu_i)$ folgt $\alpha(\mu_i) = 1 = \dim \text{Eig}(A, \mu_i)$. Weil zudem das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2)$ in Linearfaktoren zerfällt, ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

b) $|a - c| < |2b| \;\Rightarrow\; (a - c)^2 < 4b^2 \;\Rightarrow\; (a - c)^2 - 4b^2 < 0$

Folglich hat das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ keine reellen Nullstellen und zerfällt damit über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren

$\Rightarrow$ A über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar

H18 – T1 – A1

Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachte man die lineare Abbildung

$$f_t : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a+b & c \\ t^2 b & d \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von f_t sowie jeweils eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

b) Bestimmen Sie diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für welche f_t nicht diagonalisierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme die darstellende Matrix von f_t bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$M_t := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f_t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ermittle nun Eigenwerte von M_t als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_{M_t}(\lambda)$:

$$\chi_{M_t}(\lambda) = \det(M_t - \lambda \cdot E_4) = (1-\lambda)(-1-\lambda)(\lambda^2 - t^2) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-t)(\lambda+t)$$

$t = \pm 1$: Eigenwerte von f_t sind -1 und 1
$t = 0$: Eigenwerte von f_t sind $-1, 0$ und 1
sonst : Eigenwerte von f_t sind $-1, 1, -t$ und t

1. Fall: $|t| = 1$

$$\mathrm{Eig}(M_t, 1) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 2x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(f_t, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(M_t, -1) = \ker(M_t + E_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(f_t, -1) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

2. Fall: $t = 0$

$$\mathrm{Eig}(f_t, -1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \mathrm{Eig}(f_t, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

→ Folgt aus Rechnungen für $|t| = 1$, wenn die grün markierten Einträge durch 0 ersetzt werden

$$\text{Eig}(M_t, 0) = \ker(M_t) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(f_t, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3. Fall: $t \neq 0$ und $|t| \neq 1$

$\text{Eig}(f_t, 1)$ und $\text{Eig}(f_t, -1)$ wie in $t = 0$

→ Das sieht man wieder an den grün markierten Einträgen

$$\text{Eig}(M_t, t) = \ker(M_t - t \cdot E_4) = \ker\begin{pmatrix} -1-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ 0 & t^2 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-t \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (t+1)x_1 \\ (t^2+t)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \\ t^2+t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(f_t, t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t+1 \\ t^2+t & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Eig}(M_t, -t) = \ker(M_t + t \cdot E_4) = \ker\begin{pmatrix} -1+t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 0 & t^2 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ (t-1)x_1 \\ (t^2-t)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ t^2-t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{Eig}(f_t, -t) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ t^2-t & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) f_t ist für $|t| = 1$ und $t = 0$ nicht diagonalisierbar, da für je einen Eigenwert (-1 bzw. 0) die algebraische Vielfachheit nicht mit der geometrischen Vielfachheit übereinstimmt. Im Fall von $|t| = 1$ gilt $\beta(-1) = 1 < 2 = \alpha(-1)$ und im Fall von $t = 0$ gilt $\beta(0) = 1 < 2 = \alpha(0)$.

H18 – T1 – A3

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, welche die Gleichung $Ax = (x^T Ax)x$ erfüllen.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme Eigenwerte von A über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \lambda^2(4-\lambda) + 4(4-\lambda) = (\lambda^2+4)(4-\lambda)$$

$\chi_A(\lambda) = 0$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = 4$

Der einzige reelle Eigenwert von A ist 4. Komplexe Eigenwerte sind $2i$ und $-2i$.

b) Es ist $x^T Ax \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Suche also $x \in \mathbb{R}^3$, die Eigenvektoren von A sind, und prüfe dann, wann $x^T Ax$ dem Eigenwert entspricht.

$$\text{Eig}(A,4) = \ker(A - 4E_3) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$Ax = \left(x^T Ax\right) x$ mit $x \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow x \in \text{Eig}(A,4)$

Sei $x \in \text{Eig}(A,4) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad x = \lambda \cdot e_3$

$Ax = \left(x^T Ax\right) x$ und $x \in \text{Eig}(A,4) \Leftrightarrow A(\lambda e_3) = \lambda^2 \big(e_3^T \underbrace{Ae_3}_{=4e_3}\big)(\lambda e_3) = 4\lambda^2 \cdot (\lambda e_3) \Leftrightarrow \lambda^2 = 1$

Folglich sind e_3 und $-e_3$ die Lösungen der Gleichung

H18 – T3 – A3

Man betrachte einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit $V \neq \{0_V\}$ sowie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$. Man zeige:

a) f ist genau dann injektiv, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von f ist.

b) Ist f bijektiv und $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist v ein Eigenvektor von f^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

c) Ist $\dim(V) < \infty$ sowie f bijektiv und diagonalisierbar, so ist auch f^{-1} diagonalisierbar.

Lösungsvorschlag

a) f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(f - 0 \cdot \mathrm{id}) = \{0\} \Leftrightarrow (f(v) = 0 \cdot v \Leftrightarrow v = 0) \Leftrightarrow 0$ ist kein Eigenvektor von f

b) f bijektiv und v Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist nach a) $\lambda \neq 0$, denn f insbesondere injektiv.

$f(v) = \lambda v \Rightarrow f^{-1}(\lambda v) = v$

Da f linear ist, auch f^{-1} linear. Daher $v = f^{-1}(\lambda v) = \lambda \cdot f^{-1}(v) \Leftrightarrow f^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v$

Da v Eigenvektor zum Eigenwert λ ist $v \neq 0$ und mit obiger Gleichung folgt:

v Eigenvektor von f^{-1} zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$

c) f bijektiv und diagonalisierbar $\Rightarrow$ Es gibt Basis von V aus Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ von f zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \quad (n = \dim V)$

$\overset{b)}{\Rightarrow} v_1, \ldots, v_n$ ist eine Basis aus Eigenvektoren von f^{-1} zu den Eigenwerten $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist diagonalisierbar

F18 – T1 – A1

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und gilt $Av \in \mathbb{R}v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $Av = \lambda v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ähnlich zu $-A$, so ist $A = 0$.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

Nach Voraussetzung gibt es für $1 \leq i \leq n \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$: $\quad Ae_i = \lambda_i e_i$.

Angenommen es gibt $i \neq j$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow \lambda_i e_i + \lambda_j e_j = A\left(e_i + e_j\right) = \mu\left(e_i + e_j\right)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lambda_i = \mu = \lambda_j$ Widerspruch!

$\Rightarrow \ \lambda_i = \lambda_1$ für alle $1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow Av = \lambda_1 v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, denn $e_1, \ldots, e_n$ ist Basis des $\mathbb{R}^n$

b) Falsch.

Betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt:

$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A$. Das heißt, A ähnlich zu $-A$, aber $A \neq 0$.

F18 – T2 – A2

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine lineare Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f)$

(ii) $A^2 = 0$

b) Zeigen Sie, dass aus (i) oder (ii) folgt:

(iii) 0 ist der einzige reelle Eigenwert von A.

c) Bestimmen Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob (ii) aus (iii) folgt.

Lösungsvorschlag

a) i) $\Rightarrow$ ii):

Es sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig $\quad A^2 \cdot v = f(f(v)) = 0.$ $\quad (*)$

Da $A^2 v = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also insbesondere auch die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ gilt $A^2 = 0$.

$(*)$ Das gilt, da $f(v) \in \text{Im}\left(f\right) \subseteq \ker(f)$

ii) $\Rightarrow$ i):

Sei $v \in \text{Im}\left(f\right)$, das heißt $\exists\, w \in \mathbb{R}^n :\quad v = f(w)$.

$$f(v) = f(f(w)) = A \cdot A \cdot w = A^2 w \overset{A^2=0}{=} 0 \;\Rightarrow\; v \in \ker(f) \;\Rightarrow\; \text{Im}\left(f\right) \subseteq \ker(f)$$

b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein zugehöriger Eigenvektor, das heißt

$$f(v) = \lambda v \underset{\lambda v \in \text{Im}(f)}{\overset{\text{i)}}{\Rightarrow}} 0 = f(\lambda v) \overset{f \text{ lin.}}{=} \lambda f(v) = \lambda^2 v$$
$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$$

Somit ist 0 der einzige reelle Eigenwert von A

c) Betrachte $M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Offensichtlich ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto M \cdot x$ linear.

Es ist $\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda \cdot E_3) = -\lambda\left(\lambda^2 + 1\right)$ das charakteristische Polynom von M und folglich ist 0 die einzige reelle Nullstelle von $\chi_M(\lambda)$ und damit 0 der einzige reelle Eigenwert von M. Jedoch gilt

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir sehen also, dass ii) nicht aus iii) folgt.

5 Lineare Gleichungssysteme

Im fünften Kapitel beschäftigen wir uns mit linearen Gleichungssystemen und untersuchen ebensolche auf Lösbarkeit. Gleichungssysteme sind uns schon häufiger (implizit) begegnet und wir haben Verfahren, die wir in diesem Input kennenlernen, bereits genutzt, um Lösungen von Gleichungssystemen zu bestimmen. Das war etwa nötig, wenn wir Eigenräume berechnen oder Vektoren auf lineare Unabhängigkeit prüfen. Daher ist dieser Input eher eine Wiederholung bzw. eine Systematisierung von Dingen, die wir vermutlich bereits sehr gut kennen und beherrschen. Gerade dann, wenn wir alle Lösungen eines linearen Gleichungssystems angeben sollen, ist theoretisches Wissen über den Lösungsraum linearer Gleichungssysteme jedoch sehr hilfreich. Beginnen wir den Input mit einer Definition des zentralen Begriffes dieses Kapitels.

Definition 5.1

Ein *lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten* ist ein Schema der Form

$$\begin{array}{rcccl} a_{11}X_1+ & \dots & +a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1+ & \dots & +a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1+ & \dots & +a_{mn}X_n & = & b_m \end{array}$$

mit $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ und $\mathbb{K}$ ein Körper.

Setzen wir $a_i := \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ und $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$, so können wir das lineare Gleichungssystem kurz schreiben als $a_1X_1 + \dots + a_nX_n = b$. Dabei ist ein Element $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ genau dann eine Lösung, wenn $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ gilt.

Ist $b = 0$, so nennen wir das lineare Gleichungssystem *homogen*; ist $b \neq 0$, nennen wir es *inhomogen*.

Möchten wir etwa prüfen, ob die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$ linear unabhängig sind, so können wir sie als Spalten in eine Matrix A schreiben, das heißt $A = (v_1 \cdots v_2) \in \mathbb{K}^{m \times n}$, und überprüfen, ob das homogene lineare Gleichungssystem $A \cdot y = 0$ eine nichttriviale Lösung $y \in \mathbb{K}^n$ besitzt.

Wir werden uns im Folgenden zunächst auf die Suche nach Lösungen eines allgemeinen linearen Gleichungssystems begeben, bevor wir uns im Anschluss überlegen, wie es um Lösungen homogener linearer Gleichungssysteme bestellt ist. Eine sinnvolle erste Frage ist, ob ein lineares Gleichungssystem (LGS) überhaupt lösbar ist, ob also Lösungen $x \in \mathbb{K}^n$ existieren.[1]

[1] Im Folgenden besitzen LGS stets die Form wie in Definition 5.1.

Satz 5.2

Es seien $a_1, \dots, a_n \in K^m$ und $b \in K^m$. Dann sind äquivalent:

a) Das LGS aus Definition 5.1 ist lösbar.

b) $\dim_{\mathbb{K}}\langle a_1, \dots, a_n\rangle = \dim_{\mathbb{K}}\langle a_1, \dots, a_n, b\rangle$

Um Schreibarbeit zu sparen, ist es üblich, ein lineares Gleichungssystem in Form einer Matrix anzugeben.

Definition 5.3

In der Situation von Definition 5.1 ist das LGS gegeben durch $A \cdot X = b$, wobei wir

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

als die *Koeffizientenmatrix* des linearen Gleichungssystems bezeichnen.

Bei der *erweiterten Koeffizientenmatrix* eines linearen Gleichungssystems handelt es sich um die Matrix

$$(A;b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Mit dieser Definition können wir Satz 5.2 auch in der folgenden Form schreiben.

Satz 5.4

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A \cdot X = b$ mit $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Dann sind äquivalent:

a) Das LGS aus Definition 5.1 ist lösbar.

b) $rg(A) = rg(A;b)$.

Zwar liefern uns die Sätze 5.2 und 5.4 wertvolle theoretische Entscheidungskriterien, mit deren Hilfe wir eine Aussage über die Lösbarkeit eines LGS treffen können. Oftmals ist es jedoch umständlich, die entsprechenden Dimensionen oder Ränge direkt zu ermitteln, sodass die Sätze nur bedingt hilfreich sind.

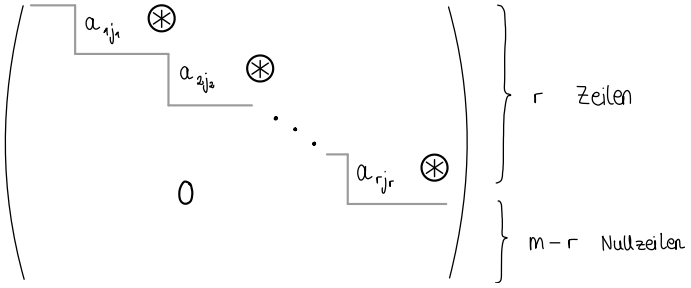
Wesentlich einfacher können wir die Dimensionen ermitteln, wenn wir die erweiterte Koeffizientenmatrix in eine andere Form, die sogenannte *Zeilenstufenform* überführen.

Definition 5.5

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ liegt genau dann in Zeilenstufenform vor, wenn gilt:

1) Es gibt eine Zahl r mit $0 \leq r \leq m$ derart, dass in den Zeilen mit Index 1 bis r jeweils nicht nur Nullen stehen und in den Zeilen mit Index $r+1$ bis m nur Nullen stehen.
2) Für jedes i mit $1 \leq i \leq r$ betrachten wir den niedrigsten Index j_i der Spalte, in der ein Eintrag ungleich Null steht, das heißt $j_i := \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\}$. Offensichtlich gilt $1 \leq j_i \leq n$. Es muss die Stufenbedingung $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ gelten.

Die folgende Abbildung zeigt den schematischen Aufbau einer Matrix in Zeilenstufenform:



Der Eintrag **0** in der Matrix bedeutet, dass alle Einträge unter der **Treppe** den Wert Null besitzen. Die Sterne in den ersten r Zeilen sagen aus, dass die Einträge nach dem führenden Eintrag a_{ij_i} keine weiteren Voraussetzungen erfüllen müssen, dass es also egal ist, welche Einträge hier stehen.

Mithilfe des Eliminationsverfahrens von Gauß kann eine Matrix in Zeilenstufenform überführt werden. Die dabei vorgenommenen Umformungen lassen die Lösungsmenge des Gleichungssystems unverändert, wenn wir also eine Aussage über die Lösbarkeit des LGS in Zeilenstufenform treffen und dafür die Lösungsmenge angeben können, erhalten wir unmittelbar eine Aussage über die Lösbarkeit des ursprünglichen LGS sowie dessen Lösungsmenge.

Wie hilft uns die Zeilenstufenform, eine Aussage über die Lösbarkeit eines inhomogenen LGS zu treffen?

Wir überführen dazu in der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A; b)$ die Matrix A in Zeilenstufenform. Dabei formen wir b mit um und erhalten so ein LGS der Form

$$\begin{array}{rcccl}
\alpha_{1j_1}X_{j_1}+ & \cdots & \cdots & \cdots & +\alpha_{1n}X_n = \beta_1 \\
 & \alpha_{2j_2}X_{j_2}+ & \cdots & \cdots & +\alpha_{2n}X_n = \beta_2 \\
 & & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 & & \alpha_{rj_r}X_{j_r} & \cdots & +\alpha_{rn}X_n = \beta_r \\
 & & & & 0 = \beta_{r+1} \\
 & & & & \vdots \quad \vdots \\
 & & & & 0 = \beta_m
\end{array}$$

Für die zu diesem LGS gehörende erweiterte Koeffizientenmatrix können wir die zweite Bedingung nach Satz 5.2 leicht prüfen. Sie gilt genau dann, wenn $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_m = 0$, nur in diesem Fall ist also das modifizierte und damit auch das ursprüngliche LGS lösbar.

Bemerkung: Wir sehen hier unmittelbar, dass jedes homogene LGS lösbar ist. Solche LGS besitzen stets die Lösung $x = \vec{0}$.

Mithilfe eines LGS in Zeilenstufenform lässt sich – Lösbarkeit vorausgesetzt – relativ einfach die Lösungsmenge ermitteln.

Definition 5.6

Es seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Wir bezeichnen mit

- $\mathbb{L}(A; b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ die Lösungsmenge des inhomogenen LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A; b)$.
- $\mathbb{L}(A; 0) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$ die Lösungsmenge des homogenen LGS mit Koeffizientenmatrix A.

Wie wir noch sehen werden, ist die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS weitgehend durch die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS bestimmt. Nachfolgend betrachten wir daher zunächst die Lösungsmenge eines homogenen LGS genauer.

Wir machen uns eine Eigenschaft der Lösungsmenge zunutze, um zu kontrollieren, ob wir alle Lösungen gefunden haben.

Satz 5.7

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ in Zeilenstufenform mit den Bezeichnungen aus Definition 5.5. Dann gilt:

- $\mathbb{L}(A; 0)$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.
- $\dim(\mathbb{L}(A; 0)) = n - r$

Geben wir die Lösungsmenge eines homogenen LGS demnach als Erzeugnis einer Menge S linear unabhängiger Vektoren aus $\mathbb{K}^n$ an, so muss $|S| = n - r$ gelten.

Wir können uns diesen Zusammenhang etwa mithilfe der folgenden Eselsbrücke merken:
Da wir eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ wählen, haben wir zunächst n Freiheitsgrade im Lösungsraum. Jede der r Gleichungen in der Zeilenstufenform nimmt uns einen Freiheitsgrad bzw. legt sie den Wert einer Variable fest. Daher können wir nur $n - r$ Variablen frei wählen, weshalb der Lösungsraum des Gleichungssystems auch die Dimension $n - r$ besitzt.

Oben haben wir bemerkt, dass die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS weitgehend von der Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS abhängt. Wie genau beide zusammenhängen sagt uns der nächste und letzte Satz in diesem Kapitel.

Satz 5.8

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n; \mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Dann ist $\mathbb{L}(A; b) \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum und es gilt:

$$\mathbb{L}(A; b) = v + \mathbb{L}(A; 0) \text{ mit } v \in \mathbb{L}(A; b) \quad \text{oder} \quad \mathbb{L}(A; b) = \emptyset.$$

H24 – T1 – A1

In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_\lambda) \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & \lambda x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ \lambda x_1 & + & & & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass (G_λ) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass die Lösung von (G_λ) die Gleichung $x_3 = 0$ erfüllt.

Lösungsvorschlag

a) Definiere

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A_\lambda x = b$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ besitzt genau dann exakt eine Lösung, wenn A_λ vollen Rang besitzt und damit invertierbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(A_\lambda) \neq 0$ gilt.

$$\det(A_\lambda) = 4 + 4\lambda^2 + 2\lambda = 4 \cdot \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

Somit folgt, dass das (G_λ) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.

b) Es sei $x = (x_1, x_2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ eine Lösung von G_λ. Dann gilt

$$A_\lambda \cdot x = b \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 + \lambda x_2 = 1 \\ 2x_2 = 2 \\ \lambda x_1 = 3 \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{r} x_1 = 1 - \lambda \\ x_2 = 1 \\ \lambda(1 - \lambda) = 3 \end{array} \right\}$$

Falls eine solche Lösung existiert, dann muss für $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

$$-\lambda^2 + \lambda - 3 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt jedoch keine Lösung, da die Diskriminante

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -11 < 0$$

ist. Somit besitzt (G_λ) für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Lösung, die die Gleichung $x_3 = 0$ erfüllt.

H24 – T2 – A1

Im folgenden Rätsel hat jeder Buchstabe E, I, N, R und T einen Wert $n \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq n \leq 9$. Verschiedene Buchstaben haben verschiedene Werte. Der Wert eines Wortes ist die Summe der Werte seiner Buchstaben. Zu bestimmen sind die Werte der Buchstaben. Die Werte folgender Wörter sind gegeben:

Wort	Wert
TITRIERT	52
INTERNIERT	48
RETTERINNEN	45
EINTRETEN	40

a) Beschreiben Sie das Problem als lineares Gleichungssystem.

b) Lösen Sie das Rätsel unter Verwendung des Gauß-Verfahrens.

Lösungsvorschlag

a) Im Folgenden bezeichnen die Buchstaben jeweils deren Wert. Die Angabe übersetzt sich dann in das folgende inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && 1\cdot E + 2\cdot I + 2\cdot R + 3\cdot T = 52\\
&\text{II.} && 2\cdot R + 2\cdot I + 2\cdot N + 2\cdot R + 2\cdot T = 48\\
&\text{III.} && 3\cdot R + 1\cdot I + 3\cdot N + 2\cdot R + 2\cdot T = 45\\
&\text{IV.} && 3\cdot R + 1\cdot I + 2\cdot N + 1\cdot R + 2\cdot T = 40
\end{aligned}$$

b) Wir übersetzen das inhomogene lineare Gleichungssystem aus Teil a) in die erweiterte Koeffizientenmatrix und nutzen das Gauß-Verfahren, um das Gleichungssystem zu lösen.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&2&3&52\\ 2&2&2&2&2&48\\ 3&1&3&2&2&45\\ 3&1&2&1&2&40 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_4}{\underset{Z_2-2Z_1}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&2&3&52\\ 0&-2&2&-2&-4&-56\\ 0&0&1&1&0&5\\ 3&1&2&1&2&40 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_4-3Z_1}{\underset{-\frac{1}{2}Z_2}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&2&3&52\\ 0&1&-1&1&2&28\\ 0&0&1&1&0&5\\ 0&-5&2&-5&-7&-116 \end{array}\right) \overset{Z_4+5Z_2}{\underset{Z_4+3Z_3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&2&3&52\\ 0&1&-1&1&2&28\\ 0&0&1&1&0&5\\ 0&0&0&3&3&39 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{1}{3}Z_4}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&2&3&52\\ 0&1&-1&1&2&28\\ 0&0&1&1&0&5\\ 0&0&0&1&1&13 \end{array}\right) \overset{Z_2+Z_3}{\underset{Z_1-2Z_4}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&2&0&0&1&26\\ 0&1&0&0&0&7\\ 0&0&1&1&0&5\\ 0&0&0&1&1&13 \end{array}\right) \overset{Z_1-2Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1&0&0&0&1&12\\ 0&1&0&0&0&7\\ 0&0&1&1&0&5\\ 0&0&0&1&1&13 \end{array}\right)$$

Da $N + R = 5$ mit $1 \leq N, R \leq 9$ und $R + T = 13$ mit $1 \leq R, T \leq 9$ folgt

$$N = 1, \quad R = 4 \quad \text{und} \quad T = 9.$$

Mit den weiteren Gleichungen erhalten wir außerdem $I = 7$ und $E + T = 12$, also $E = 3$.

H23 – T1 – A1

In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_\lambda) \quad \begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda x_1 & + & 3x_2 & + & 2\lambda x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (G_λ) für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden!

Lösungsvorschlag

Definiere

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 2\lambda & 3 & 2\lambda \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & \lambda & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A_\lambda x = b$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ besitzt genau dann exakt eine Lösung, wenn A_λ invertierbar ist.

A_λ invertierbar $\Leftrightarrow \det(A_\lambda) \neq 0$

Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$\det A_\lambda = 2\lambda(-10 - 3\lambda) + 2(9 + 4\lambda) = -6\lambda^2 - 20\lambda + 8\lambda + 18 = -6\lambda^2 - 12\lambda + 18$$

$\det(A_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-3, 1\}$

Also besitzt das lineare Gleichungssystem für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ genau eine Lösung.

Zeige nun noch: $A_\lambda x = b$ ist für $x \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \{-3, 1\}$ nicht lösbar. Dies ist äquivalent zu $\operatorname{rang}(A_\lambda) < \operatorname{rang}(A_\lambda, b)$.

1. Fall: $\lambda = -3$

$$(A_\lambda|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 3 & -6 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_1+3Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 9 & 14 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_1-3Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A_\lambda) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(A_\lambda, b)$ für $\lambda = -3$.

2. Fall: $\lambda = 1$

$$(A_\lambda|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A_\lambda) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(A_\lambda, b)$ für $\lambda = 1$.

H23 – T2 – A1

Gegeben sei die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} s & -2 & 1 \\ 2 & 1 & s \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie der Vektor} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $A_s\mathbf{x} = \mathbf{b}$

a) eine eindeutige Lösung besitzt.

b) keine Lösung hat.

c) mehr als eine Lösung besitzt. Bestimmen Sie für diese s die Lösungsmenge.

Lösungsvorschlag

a) Das lineare Gleichungssystem besitzt genau dann exakt eine Lösung, wenn A_s invertierbar ist, das heißt wenn $\det(A_s) \neq 0$.

$$\det(A_s) = s(1-s) - 2(-2-1) = -s^2 + s + 6$$
$$\det(A_s) = 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \{-2, 3\}$$

Damit besitzt das lineare Gleichungssystem für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$ genau eine Lösung

b) $A_s x = b$ ist nicht lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A, b)$

$A_s x = b$ besitzt unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$ Lineares Gleichungssystem lösbar und $\det(A_s) = 0$

Prüfe also $A_s x = b$ für $s \in \{-2, 3\}$ auf Lösbarkeit

1. Fall: $s = 3$

$$(A_3, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{Z_1 - 1{,}5Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3{,}5 & -3{,}5 & 4{,}5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{Z_1 + 3{,}5Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -2{,}5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(A_3) = 2 < 3 = \operatorname{rang}(A_3, b)$

$\Rightarrow$ $A_3 x = b$ nicht lösbar

c) 2. Fall: $s = -2$

$$(A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{Z_2 + Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \overset{Z_3 + Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit gilt: $\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1 - 2x_2 + x_3 &=& 3 \\ -x_2 - x_3 &=& 2 \end{array}\right\} \overset{\text{I+II}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} -2x_1 - 3x_2 &=& 5 \\ -x_2 - x_3 &=& 2 \end{array}\right\}$

$$\Leftrightarrow \mathbb{L}(A_{-2}, b) = \left\{ \begin{pmatrix} -2{,}5 - 1{,}5x_2 \\ x_2 \\ -2 - x_2 \end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also unendlich viele Lösungen für $s = -2$

H23 – T3 – A1

In Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_s) \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & (s+1)x_3 & + & (s+2)x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & sx_2 & + & (s-1)x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & (s+5)x_3 & + & (s+1)x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & (s+3)x_3 & + & (s-1)x_4 & = & 2 \end{array}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(unabhängig von $s \in \mathbb{R}$) eine Lösung von (G_s) ist.

b) Zeigen Sie, dass (G_s) für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eindeutig lösbar ist.

c) Bestimmen Sie für $s = 1$ die Lösungsmenge von G_1.

Lösungsvorschlag

Definiere $A_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 & s+1 & s+2 \\ 1 & s & s-1 & 1 \\ 1 & 2 & s+5 & s+1 \\ 1 & 3 & s+3 & s-1 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Zeige $A_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b$:

$$A_s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (s+1) - (s+2) \\ 1 - s + (s-1) - 1 \\ 1 - 2 + (s+5) - (s+1) \\ 1 - 3 + (s+3) - (s-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = b.$$

Somit ist der Vektor unabhängig vom Wert von s eine Lösung des linearen Gleichungssystems $A_s x = b$.

b) (G_s) eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ A_s invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A_s) \neq 0$

Berechne $\det(A_s)$ nach elementaren Zeilenumformungen, die den Wert der Determinante nicht verändern sowie einer Entwicklung nach der ersten Spalte.

$$\det(A_s) \overset{\substack{Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - Z_1 \\ Z_4 - Z_1}}{=} \det \begin{pmatrix} s & -2 & -s-1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = -12s + 6 - 4(s+1) - 12 + 2s + 12(s+1) = -2s - 2$$

Also gilt $\det(A_s) = 0 \Leftrightarrow s = 1$ und folglich $\det A_s \neq 0 \Leftrightarrow s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

c) Löse $A_1 x = 0$ mithilfe von Gauß-Elimination. Aus a) kennen wir die spezielle Lösung x, das heißt, das lineare Gleichungssystem $A_1 x = b$ ist lösbar und es gilt $\mathbb{L}(A_1, b) = x + \mathbb{L}(A_1, 0)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_2 - Z_1 \\ Z_3 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4 - Z_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_3 - 2Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4 - 3Z_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} Z_4 - Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_1 - Z_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also folgt: $\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 6x_3 & & \\ x_4 & = & -\frac{8}{3}x_3 & & \\ x_2 & = & 2x_3 & + & 2x_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & 6x_3 \\ x_4 & = & -\frac{8}{3}x_3 \\ x_2 & = & -\frac{10}{3}x_3 \end{array} \right\}$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{L}(A_1, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} 6x_3 \\ -\frac{10}{3}x_3 \\ x_3 \\ -\frac{8}{3}x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 18 \\ -10 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und wie oben beschrieben

$$\mathbb{L}(A_1, b) = (1, -1, 1, -1)^T + \mathbb{L}(A_1, 0)\,.$$

F23 – T1 – A4

a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$.
Bestimmen Sie den Kern von f.

b) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & b_3 \end{array}$$

für jeden Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ eine Lösung hat. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung!

Lösungsvorschlag

a) Bestimme $\ker(A) = \mathbb{L}(A, 0)$ mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_3-2Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_3-Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1-Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit folgt unmittelbar

$$\ker A = \mathbb{L}(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Betrachte $b = (0, 0, 1)$. Das lineare Gleichungssystem ist gegeben durch $Ax = b$ mit $x \in \mathbb{R}^4$. Das lineare Gleichungssystem ist genau dann nicht lösbar für b, wenn $\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A, b)$. Nach a) gilt: $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Betrachte die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ und nehme daran Zeilenumformungen wie in a) vor

$$(A|b) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \operatorname{rang}(A, b) = 3 > \operatorname{rang}(A)$$

Somit ist das lineare Gleichungssystem für b wie oben definiert nicht lösbar und damit insbesondere auch nicht für alle $b \in \mathbb{R}^3$.

F23 – T3 – A1

Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die beiden Gleichungen

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sind.

Lösungsvorschlag

Es sei

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wir übersetzen die beiden Gleichungen in ein lineares Gleichungssystem und lösen dieses. Das Gleichungssystem lautet:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} a+b & & & = 0 \\ & & c+ & d = 2 \\ a & +2c & & = 3 \\ & b & +2d & = 1 \end{array}\right\}.$$

Wir lösen dieses inhomogene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination und bestimmen so alle Lösungen für die Matrix X:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_3-Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_4+Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_4-2Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3-2z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können die Lösung nun direkt ablesen. Es gilt:

$$b = 1 - 2d, \quad c = 2 - d, \quad \text{und} \quad a = -b = -1 + 2d.$$

Das heißt, die gegebenen Gleichungen werden von allen Matrizen in der Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1+2d & 1-2d \\ 2-d & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

erfüllt.

H22 – T2 – A2

In Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma & \beta \\ -1 & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x$$

betrachtet. Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \quad \text{und zugleich} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Bild}(f).$$

Lösungsvorschlag

Es gilt

$$u := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(f) \Leftrightarrow Au = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2\beta + \alpha + \gamma \\ -2\alpha + \gamma + \beta \\ -3 - 2\gamma + \beta + \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Löse das lineare Gleichungssystem mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2+2Z_1 \\ Z_3-Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3+Z_2 \\ \frac{1}{3}Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit folgt $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad u \in \ker(f) \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle =: L$

Überprüfe nun, für welche $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in L$ zusätzlich noch $w := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}\,(f)$.

$$w \notin \mathrm{Im}\,(f) \Leftrightarrow Ax = w \text{ besitzt keine Lösung } x \in \mathbb{R}^4 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\,(A) < \mathrm{rang}\,(A, w)$$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in L \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1+\lambda \\ -1+\lambda \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit folgt: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\lambda & \lambda & -1+\lambda \\ 0 & \lambda & -1+\lambda & 1+\lambda \\ -1 & -1+\lambda & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

Nutze elementare Zeilenumformungen, um $\mathrm{rang}\,(A, w)$ und $\mathrm{rang}\,(A)$ gleichzeitig zu bestimmen:

$$(A|w) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+\lambda & \lambda & -1+\lambda & 3 \\ 0 & \lambda & -1+\lambda & 1+\lambda & -2 \\ -1 & -1+\lambda & 1+\lambda & \lambda & 0 \end{array}\right) \overset{Z_3+Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+\lambda & \lambda & -1+\lambda & 3 \\ 0 & \lambda & -1+\lambda & 1+\lambda & -2 \\ 0 & 2\lambda & 2\lambda+1 & 2\lambda-1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3-2Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+\lambda & \lambda & -1+\lambda & 3 \\ 0 & \lambda & -1+\lambda & 1+\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{Z_2+\frac{1}{3}Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1+\lambda & \lambda & -1+\lambda & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen also aufgrund der 2. Zeile: $\mathrm{rang}\,(A) < \mathrm{rang}\,(A, w) \Leftrightarrow \lambda = 0$

Insgesamt sind also $u \in \ker(f)$ und $w \notin \mathrm{Im}\,(f)$ genau dann, wenn $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, -1)$.

H22 – T3 – A3

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter s alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche gleichzeitig folgende zwei Bedingungen erfüllen:

$$A\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wir übersetzen die zwei Bedingungen in ein vom Parameter s abhängiges lineares Gleichungssystem und lösen dieses. Das Gleichungssystem lautet:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} sa + & b & & = -1 \\ & & sc + & d = 1 \\ a + & sb & & = 1 \\ & & c + & sd = s \end{array}\right\}$$

Wir lösen dieses inhomogene lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit von s mit Gauß-Elimination und bestimmen so alle Lösungen für die Matrix A:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} s & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s & 1 & 1 \\ 1 & s & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s & s \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1 - sZ_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_2 - sZ_4}}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1-s^2 & 0 & 0 & -1-s \\ 0 & 0 & 0 & 1-s^2 & 1-s^2 \\ 1 & s & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & s & s \end{array}\right)$$

1. Fall: $s = 1$

In diesem Fall sehen wir anhand der ersten Zeile ($0 = -2$), dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist. Folglich gibt es keine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

2. Fall: $s = -1$

In diesem Fall vereinfacht sich das lineare Gleichungssystem zu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = b + 1 \\ c = d - 1 \end{array}\right\}.$$

Damit erfüllen alle Matrizen

$$A \in \left\{ \begin{pmatrix} b+1 & b \\ d-1 & d \end{pmatrix} \middle| \, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

die beiden Gleichungen gleichzeitig.

3. Fall: $|s| \neq 1$

In diesem Fall gilt $1-s^2 \neq 0$ und $-1-s \neq 0$. Damit folgt aus der obigen erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left.\begin{array}{l} b = \dfrac{-1-s}{1-s^2} = -\dfrac{1}{1-s} \\ d = \dfrac{1-s^2}{1-s^2} = 1 \\ a = 1 - sb = \dfrac{1-s}{1-s} + \dfrac{s}{1-s} = \dfrac{1}{1-s} \\ c = s - sd = s - s = 0 \end{array}\right\}.$$

Das heißt, für $|s| \neq 1$ erfüllt genau die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-s} & -\dfrac{1}{1-s} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die beiden gegebenen Bedingungen gleichzeitig.

H21 – T1 – A1

a) Bestimmen Sie alle reellen, quadratischen Polynome p mit

$$p(-1) = 2 \quad p(0) = 3 \quad p(1) = 6 \tag{$*$}$$

b) Bestimmen Sie ein reelles, *nicht-quadratisches* Polynom p, welches ebenfalls die Bedingungen aus $(*)$ erfüllt.

Lösungsvorschlag

a) Wir schreiben p in der Form

$$p = a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad \text{mit} \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Dann übersetzen sich die Bedingungen aus $(*)$ in ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Es gilt:

$$\left\{\begin{array}{rrl} a_2 - a_1 + a_0 = 2 & & E_1 \\ a_0 = 3 & & E_2 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 6 & & E_3 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrl} a_2 - a_1 + a_0 = 2 & & E_1 \\ a_0 = 3 & & E_2 \\ 2a_1 = 4 & & E_3 - E_1 \end{array}\right\}$$

Für die Koeffizienten erhalten wir damit also

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_2 = 1.$$

Damit ist das einzige Polynom, das die Bedingungen aus $(*)$ erfüllt, das Polynom

$$p = X^2 + 2X + 3.$$

Es ist nicht überraschend, dass wir genau ein Polynom finden, das die Bedingungen aus $(*)$ erfüllt. Ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ ist eindeutig durch die Angabe von Bildern für $n+1$ verschiedene Argumente festgelegt.

b) **Idee**: Wir definieren ein Polynom q vom Grad 3, für das $q(-1) = q(0) = q(1) = 0$ gilt. Das gesuchte Polynom ist dann $p + q$.

Es sei

$$q := (X+1)X(X-1) = X^3 - X.$$

Offensichtlich gilt $q(-1) = q(0) = q(1) = 0$.

Behauptung: $p+q$ ist ein reelles, nicht-quadratisches Polynom, das die Bedingungen aus $(*)$ erfüllt

Offensichtlich ist $p + q = X^3 + X^2 + X + 3$ ein reelles, nicht-quadratisches Polynom. Weiterhin gilt

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) \overset{q(x)=0}{=} p(x) \quad \text{für alle } x \in \{-1, 0, 1\}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

H21 – T2 – A1

Es sei das Problem:

> Jetzt hat man 2 Rinder <und> 5 Schafe verkauft <und> damit 13 Schweine gekauft, <wobei> ein Rest von 1000 Geldstücken <übrig> blieb. Man hat 3 Rinder <und> 3 Schweine verkauft <und> damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe <und> 8 Schweine verkauft <und> damit 5 Rinder gekauft, <aber> das Geld reichte nicht <um> 600 <Geldstücke>.
> Frage: Wie hoch ist der Preis von jedem, vom Rind, Schaf <und> vom Schwein?
>
> (aus: Vogel, K. (2013). *Chiu Chang Suon Shu / Neun Bücher Arithmetischer Technik: Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr.)*. Vieweg+Teuber)

a) Beschreiben Sie das Problem als lineares Gleichungssystem.

b) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus, um eine Lösung zu bestimmen.

Lösungsvorschlag

Es bezeichne R, S, P den Preis für ein Rind, Schaf, bzw. Schwein.

a)

$$\begin{aligned} 2R + 5S &= 13P + 1000 \\ 3R + 3P &= 9S \\ 6S + 8P &= 5R - 600 \end{aligned}$$

Definiere $A := \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 3 & -9 & 3 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1000 \\ 0 \\ -600 \end{pmatrix}$. Dann wird das Problem beschrieben durch das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x = (R, S, P)^T \in \mathbb{R}^3$.

b) Nutze Gauß-Elimination, um das Problem zu lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3+Z_1 \\ Z_3+Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 400 \end{array}\right) \overset{Z_2-1{,}5Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & -\frac{33}{2} & \frac{45}{2} & -1500 \\ 0 & 2 & -2 & 400 \end{array}\right)$$

$$\overset{\left(-\frac{2}{3}Z_2\right)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & 11 & -15 & -1500 \\ 0 & 2 & -2 & 400 \end{array}\right) \overset{Z_2-\frac{11}{2}Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 0 & 0 & -4 & -1200 \\ 0 & 2 & -2 & 400 \end{array}\right)$$

Aus der 2. Zeile folgt: $\mathbf{P} = \frac{1}{4} \cdot 1200 = 300$ (I)

Aus der 3. Zeile folgt: $2S - 2P = 400 \overset{\text{I}}{\Leftrightarrow} \mathbf{S} = 200 + P = 500$ (II)

Aus der 1. Zeile folgt: $2R + 5S - 13P = 1000 \overset{\substack{\text{I} \\ \text{II}}}{\Leftrightarrow} \mathbf{R} = 500 + \frac{13}{2}P - \frac{5}{2}S = 1200$

F20 – T2 – A1

Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

ein eindimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösungsvorschlag

Definiere $A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$ und $b \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Wenn $\mathbb{L}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^3$ Untervektorraum, dann gilt insbesondere 0 ist eine Lösung des linearen Gleichungssystems, das heißt $0 = A \cdot 0 = b$. Folglich muss $\alpha = 0$ gelten.

$\dim \mathbb{L}(A, b) = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}(A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{L}(A, b) = 3 - 2 = 1.$

Suche also für $\alpha = 0$ diejenigen $\beta \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{rang}(A) = 2$. Überführe dafür A in Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{Z_3 - Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Z_2 + Z_3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta - 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt unmittelbar:

$$\operatorname{rang}(A) = 2 \overset{\alpha=0}{\Leftrightarrow} \beta = 1$$

F20 – T3 – A1

Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ für den unbekannten Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Beweisen oder widerlegen Sie jede der folgenden Aussagen:

a) Ist $m < n$, so ist (1) nie (d.h. für keine Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) eindeutig lösbar.

b) Ist $m > n$, so ist (1) nie (d.h. für keine Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) eindeutig lösbar.

c) Ist $m = n$, so ist (1) immer (d.h. für keine Wahl von $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) eindeutig lösbar.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

(1) ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow\ n - \operatorname{rang}(A) = \dim \mathbb{L}(A, b) = 0\ \Leftrightarrow\ \operatorname{rang}(A) = n$

Da $\operatorname{rang}(A) \leq \min(m, n)$ kann für $m < n$ wegen $\operatorname{rang}(A) \leq m < n$ das lineare Gleichungssystem (1) nie eindeutig lösbar sein.

b) Falsch.

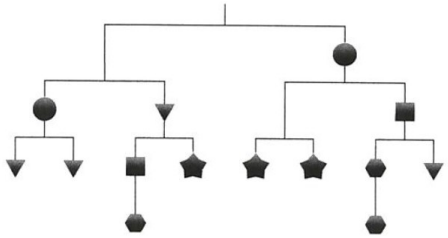
Betrachte zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist $\mathbb{L}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, das heißt, das lineare Gleichungssystem (1) ist eindeutig lösbar.

c) Falsch.

Betrachte $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\mathbb{L}(A, b) = \mathbb{R}^2$, das heißt, das lineare Gleichungssystem (1) ist nicht eindeutig lösbar.

H19 – T1 – A1

Im Mobile



seien alle horizontalen Stäbe und alle Fäden als gewichtslos angenommen. Alle Stäbe sind genau im Mittelpunkt aufgehängt. Anhänger der gleichen Form haben dieselbe Masse. Insgesamt wiegt das Mobile 320 g.

a) Beschreiben Sie den Gleichgewichtszustand des Mobiles durch ein inhomogenes lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie die Masse der Anhänger, für die sich das Mobile im Gleichgewicht befindet.

Lösungsvorschlag

Definiere:

K : Gewicht eines runden Anhängers
D : Gewicht eines dreieckigen Anhängers
S : Gewicht eines sternförmigen Anhängers
H : Gewicht eines sechseckigen Anhängers
V : Gewicht eines viereckigen Anhängers

a) Es gilt wegen der einzelnen im Gleichgewicht befindlichen Stäbe:

$$\begin{array}{rlcl}
\text{I:} & H+V & = & S \\
\text{II:} & 2H & = & D \\
\text{III:} & 2D+K & = & H+V+S+D \\
\text{IV:} & 2S & = & V+2H+D \\
\text{V:} & K+3D+V+S+H & = & K+2S+2H+V+D \\
\text{VI:} & 2K+4D+2V+3H+3S & = & 320
\end{array}$$

Definiere

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 320 \end{pmatrix},$$

wobei die 1. Spalte K, 2. Spalte D, 3. Spalte S, 4. Spalte H und die 5. Spalte V repräsentiert.

Dann wird für $x = (K, D, S, H, V)^T \in \mathbb{R}^5$ der Gleichgewichtszustand durch $Ax = b$ beschrieben.

b) Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 2 & 320 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_6-2Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_1 \leftrightarrow Z_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & 4 & 320 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_4-Z_2 \\ \rightsquigarrow \\ Z_5+2Z_2 \\ Z_6+2Z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 9 & 4 & 320 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_4+2Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ Z_5-Z_3 \\ Z_6+5Z_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 9 & 320 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_5+Z_4 \\ \rightsquigarrow \\ Z_6+7Z_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 320 \end{array}\right)$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{16} \cdot 320g && = 20g \\ H &= \frac{1}{2}V && = 10g \\ S &= V + H && = 30g \\ D &= 2H && = 20g \\ K &= S + H + V - D && = 40g \end{aligned}$$

H19 – T2 – A1

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von M_a den Wert

$$\det M_a = a^4 - 2a^2 + 1$$

hat.

b) Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die Lösungsmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : M_a x = b\}$$

mehr als ein Element hat. Geben Sie in diesem Fall / diesen Fällen die Lösungsmenge konkret an.

Lösungsvorschlag

a) Berechne die Determinante von M_α durch Entwicklung nach der 1. Spalte und mit der Regel von Sarrus:

$$\det(M_\alpha) = a \cdot \det\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \left(a^3 - a\right) + 1 \cdot \left(1 - a^2\right) = a^4 - 2a^2 + 1$$

b) $\dim(\mathbb{L}(M_a, b)) > 0 \;\Rightarrow\; \dim \mathbb{L}(M_a, 0) > 0$

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{L}(M_a, 0) > 0 &\Leftrightarrow 4 - \operatorname{rang}(M_a) = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rang}(M_a) = \dim \mathbb{L}(M_a, 0) > 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rang}(M_a) < 4 \\ &\Leftrightarrow \det M_a = a^4 - 2a^2 + 1 = \left(a^2 - 1\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \pm 1 \end{aligned}$$

Untersuche die Lösungsmenge $\mathbb{L}(M_a, b)$ also für $a \pm 1$ mithilfe der Gauß-Elimination:

1. Fall: $a = 1$

$$(M_a|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4 - Z_2}}{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{L}(M_1, b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} : \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2. Fall: $a = -1$

$$(M_a|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_3+Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_4+Z_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Da $2 = \operatorname{rang}(M_a) < \operatorname{rang}(M_a, b) = 3$ ist das inhomgene lineare Gleichungssystem für $a = -1$ nicht lösbar.

Insgesamt folgt somit also, dass das lineare Gleichungssystem $M_a x = b$ nur für $a = 1$ mehr als eine Lösung besitzt.

F19 – T3 – A1

a) Berechnen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ Determinante und Rang von

$$\begin{pmatrix} (\lambda-1)\lambda & 2\lambda & -4 \\ 2(\lambda-1)\lambda & 2\lambda & 2 \\ 2(\lambda-1)\lambda & \lambda & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie über $\mathbb{R}$ ein lineares Gleichungssystem in den Unbestimmten X_1, X_2, X_3 mit Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag

a) Es bezeichne M_λ die gegebene Matrix.

$$M_\lambda \overset{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3-2Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} (\lambda-1)\,\lambda & 2\lambda & -4 \\ 0 & -2\lambda & 10 \\ 0 & -3\lambda & 14 \end{pmatrix} \overset{Z_3-\frac{3}{2}Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} (\lambda-1)\,\lambda & 2\lambda & -4 \\ 0 & -2\lambda & 10 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da die vorgenommenen elementaren Zeilenumformungen die Determinante der Matrix nicht verändern, folgt unmittelbar:

$$\det(M_\lambda) = (\lambda-1)\,\lambda \cdot (-2\lambda) \cdot (-1) = 2\lambda^2(\lambda-1).$$

Zudem lesen wir aus der obigen Matrix unmittelbar ab, dass

$$\operatorname{rang}(M_\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 0 \\ 2, & \lambda = 1 \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Definiere $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ mit $\mathbb{L}(A,0) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}(A,b)$. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}(A,0) = \mathbb{L}(A,b).$$

Weiterhin wissen wir:

$$\dim \mathbb{L}(A,0) = \dim \mathbb{L}(A,b) = 1 \;\Rightarrow\; 2 = \operatorname{rang}(A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{L}(A,0)$$

Wir definieren also

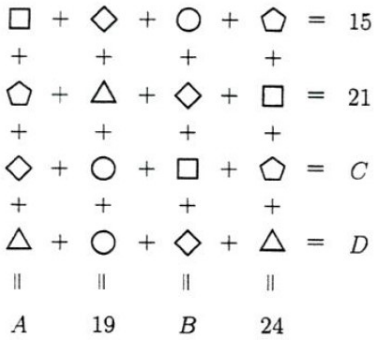
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit unmittelbar die gewünschte Menge $\mathbb{L}(A,0)$.

Da außerdem $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}(A,b)$ gelten soll, folgt direkt $b := A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

H18 – T2 – A4

Das folgende Rätsel sei gegeben.



Es sollen positive Zahlen $\{1, 2, \ldots, 9\}$ in die Felder eingetragen werden, so dass die Summe der Zahlen in einer Zeile bzw. Spalte die am Rand angegebene Zahl ergibt. Felder mit dem gleichen Symbol (Kreis, Quadrat etc.) enthalten dieselbe Zahl.

a) Beschreiben Sie das obige Rätsel als lineares Gleichungssystem und bringen Sie die zugehörige Matrix in Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Rätsels und die zugehörigen Summen A, B, C und D.

Lösungsvorschlag

a) Die Variablen seien wie folgt definiert:

Q : Quadrat 1. Spalte in A
R : Raute 2. Spalte in A
K : Kreis 3. Spalte in A Definiere außerdem:
F : Fünfeck 4. Spalte in A
D : Dreieck 5. Spalte in A

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 15 \\ 21 \\ 19 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Damit ist die Situation beschrieben durch das inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$Ax = b \text{ mit } x = (Q, R, K, F, D)^T \in \{1, \ldots, 9\}^5$$

Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 19 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 19 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3+Z_4 \\ Z_3+Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 34 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{Z_2 \leftrightarrow Z_4 \\ \text{danach} \\ Z_3 \leftrightarrow Z_4}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 34 \end{array}\right)$$

b) Da nur ganzzahlige Lösungen x mit $1 \leq x \leq 9$ für die einzelnen Variablen erlaubt sind, folgt:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} Q+R+K+F & & & = & 15 \\ -R-K+F+ & D & = & 9 \\ -K & +D & = & 6 \\ F+3D & & = & 34 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} Q=1 \\ R=4 \\ K=3 \\ D=9, \quad F=7 \end{array}\right\}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} A &= D+R+F+Q = 21 \\ B &= 2R+Q+K \quad = 12 \\ C &= R+K+Q+F = 15 \\ D &= 2D+R+K \quad = 25 \end{aligned}$$

H18 – T3 – A1

Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L_α des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & \alpha x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & \alpha x_4 & = & 1 \end{array}$$

Lösungsvorschlag

Definiere $M_a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt: $L_\alpha = \mathbb{L}(M_\alpha, b)$.

Bestimme $\mathbb{L}(M_\alpha, b)$ mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3-2Z_1 \\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & \alpha-2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_3+Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-3 & \alpha+3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3+(\alpha-3)Z_4}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right)$$

Definiere $N_\alpha := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{rang}(N_\alpha) = 4 \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

1. Fall: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Aus der obigen Zeilenstufenform des linearen Gleichungssystems lesen wir direkt $x_4 = \frac{1}{\alpha}, x_2 = \frac{1}{\alpha}, x_3 = \frac{1}{\alpha}$ und $x_1 = -\frac{1}{\alpha}$ ab. Das heißt

$$L_\alpha = \mathbb{L}(M_\alpha, b) = \left\{ \left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} \right)^T \right\}.$$

2. Fall: $\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right) \hat{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Anhand der 3. Zeile sehen wir direkt, dass wegen $\operatorname{rang}(M_\alpha) = 3 < 4 = \operatorname{rang}(M_\alpha, b)$ das lineare Gleichungssystem nicht lösbar ist und daher $L_0 = \emptyset$ gilt.

3. Fall: $\alpha = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha+1 & 1 \end{array}\right) \hat{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist $x = (-1, 1, 1, 1)^T$ eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems. Wir bestimmen nun noch die Lösungsmenge des homogenen Anteils, um so die Lösungsmenge L_1 angeben zu können.

Es ist

$$\mathbb{L}(M_1, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_4 \\ x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : \quad x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und daher

$$L_1 = \mathbb{L}(M_1, b) = x + \mathbb{L}(M_1, 0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

6 Skalarprodukte

Im sechsten Kapitel lernen wir weitere Hilfsmittel kennen, die uns dabei unterstützen, eher schulrelevante Fragestellungen der Geometrie zu beantworten. Dieses Kapitel – wie auch das folgende – basiert auf dem Begriff eines Skalarprodukts, bei dem es sich um eine besondere Form der Bilinearform handelt. Ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum ermöglicht es uns, unter anderem Längen und Winkel zu messen. Damit ist es uns möglich, etwa im $\mathbb{R}^3$ die Länge von Strecken oder den Winkel, der von zwei Vektoren eingeschlossen wird, anzugeben. Ebenso können wir wichtige Abbildungen, die sogenannten Bewegungen bzw. Isometrien, definieren, die Abstände unverändert lassen.

Dementsprechend ergibt sich die Gliederung dieses Inputs auch sehr natürlich aus dem mathematischen Aufbau der Thematik: Wir beschäftigen uns zunächst mit Bilinearformen, betrachten danach Skalarprodukte als besonderen Typ von Bilinearform, definieren mithilfe von Skalarprodukten den Längen- und Winkelbegriff und wiederholen am Ende das Gram-Schmidt-Verfahren zur Orthonormalisierung einer gegebenen Basis eines euklidischen Vektorraums.

Beginnen wir also zunächst mit Bilinearformen. Hier passt der Begriff zur Definition, da es sich um eine Abbildung handelt, die zwei Vektoren auf eine reelle Zahl abbildet und dabei in jeder Komponente linear ist.

Definition 6.1 (Bilinearform)

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$s : V \times V \to \mathbb{K}, (v, w) \mapsto s(v, w)$$

heißt *Bilinearform*, genau dann, wenn sie in beiden Komponenten linear ist, das heißt, wenn für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

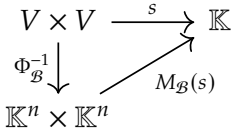
B1 $s(v + v', w) = s(v, w) + s(v', w)$ und $s(\lambda v, w) = \lambda s(v, w)$

B2 $s(v, w + w') = s(v, w) + s(v, w')$ und $s(v, \lambda w) = \lambda s(v, w)$.

Die Bilinearform s heißt *symmetrisch*, genau dann, wenn

S $s(v, w) = s(w, v)$.

Analog zu den linearen Abbildungen können wir Bilinearformen für endlichdimensionale Vektorräume mithilfe von Matrizen darstellen. Uns kann auch hier wieder ein Diagramm helfen, die Konstruktion der darstellenden Matrix zu verstehen. Es sei dafür V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und s eine Bilinearform auf V.



Mithilfe der Koordinatenabbildung $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ können wir Vektoren aus V auf die zugehörigen Koordina-

tenvektoren abbilden. Insbesondere gilt für die Basisvektoren $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = e_i$. Wir definieren nun

$$M_{\mathcal{B}}(s) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = s(v_i, v_j).$$

Mit dieser Vorarbeit zusammen mit der Linearität von s in beiden Komponenten erschließt sich unmittelbar der folgende Satz

Satz 6.2 (Darstellende Matrix einer Bilinearform)

Sei s eine Bilinearform auf dem n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit Basis $\mathcal{B}$. Für die wie oben definierte Matrix $M_{\mathcal{B}}(s)$ sowie die Vektoren $v, w \in V$ mit den Koordinaten $x = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ und $y = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$ gilt dann:

$$s(v, w) = x^T M_{\mathcal{B}}(s) y = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt, dass $M_{\mathcal{B}}(s)$ für eine symmetrische Bilinearform ebenfalls symmetrisch ist.

Meist interessieren uns jedoch nicht irgendwelche Bilinearformen, sondern ganz besondere Bilinearformen, mit denen wir im Nachgang sinnvoll weiter arbeiten und mit deren Hilfe wir Längen und Winkel definieren können. Wenn wir uns auf diese besonderen Bilinearformen beschränken, landen wir bei den sogenannten Skalarprodukten. Um sie zu definieren benötigen wir jedoch zuvor noch einen weiteren Begriff, der jedoch nur für $\mathbb{R}$-Vektorräume definiert wird.

Definition 6.3 (Positive Definitheit)

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $s : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. s heißt *positiv definit*, genau dann, wenn

$$s(v, v) > 0 \quad \text{für alle } v \in V \setminus \{0\}.$$

Da wir jede symmetrische Bilinearform in eine symmetrische Matrix übersetzen können (und umgekehrt), überträgt sich diese Definition auf symmetrische Matrizen. Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. A heißt *positiv definit*, genau dann, wenn

$$x^T A x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Es ist sinnvoll in dieser Definition $v = 0_V$ auszuschließen (um das Nullelement im Vektorraum und im Körper unterscheiden zu können, schreiben wir 0_V bzw. $0_{\mathbb{R}}$), da aufgrund der Linearität das Folgende gilt:

$$s(0_V, 0_V) = s(0_{\mathbb{R}} \cdot v, 0_V) = 0_{\mathbb{R}} s(v, 0_V) = 0_{\mathbb{R}}.$$

Vorsicht: Es kann $s(v_i, v_i) > 0$ für alle Vektoren v_i einer Basis sein, ohne dass s positiv definit ist. Man betrachte als Beispiel die symmetrische Linearform

$$s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$$

und überlege sich, welches Vorzeichen $s(v, v)$ in Abhängigkeit von v hat.

Mit dieser Vorarbeit kommen wir nun zur zentralen Definition dieses Inputs.

Definition 6.4 (Skalarprodukte)

Ist eine symmetrische Bilinearform auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum positiv definit, so wird sie *Skalarprodukt* genannt. Statt $s(v, w)$ schreibt man in diesem Fall oft $\langle v, w \rangle$.

Das bekannteste Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist das *Standardskalarprodukt*. Es ist wie folgt definiert:

$$\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T y.$$

Wir können an dieser Stelle für das Standardskalarprodukt überprüfen, dass es tatsächlich ein Skalarprodukt, das heißt eine positiv definite symmetrische Bilinearform ist. Auch können wir die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ angeben.

Für gegebene Abbildungen ist es meist vergleichsweise einfach zu zeigen, dass es sich um eine symmetrische Bilinearform handelt. Anspruchsvoller ist es, die Definition der positiven Definitheit zu überprüfen. Daher wäre es hilfreich, ein alternatives Kriterium an der Hand zu haben, mit dem wir begründen können, dass eine symmetrische Bilinearform positiv definit und damit ein Skalarprodukt ist. Der folgende Satz liefert uns ein solches Kriterium, er setzt dabei aber auf die darstellende Matrix einer symmetrischen Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum, also auf eine symmetrische Matrix $M_{\mathcal{B}}(s)$. Diese Matrix ist genau dann positiv definit, wenn die zugehörige symmetrische Bilinearform positiv definit ist.

Satz 6.5 (Positive Definitheit symmetrischer Matrizen)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (also beispielsweise die darstellende Matrix einer symmetrischen Bilinearform). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

a) A ist positiv definit

b) Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ von A sind positiv.

In der zweiten Aussage des vorangegangenen Satzes steckt eine weitere, weitreichende Erkenntnis, die uns garantiert, dass wir für symmetrische, reelle $n \times n$-Matrizen tatsächlich immer n (nicht notwendig verschiedene) reelle Eigenwerte angeben können. Dass dies so ist, halten wir im folgenden Satz fest.

Satz 6.6

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten besteht.

In anderen Worten: Ist $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, dann ist sie diagonalisierbar und alle Eigenwerte sind reell.

Es gibt ein weiteres hilfreiches Kriterium, um zu entscheiden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist. Hierfür greifen wir auf die sogenannten Hauptminoren zurück. Sei eine Matrix $A =$

$(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ gegeben, dann heißen die Matrizen $A_k := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die Hauptminoren von A.

Mit diesen Begriffen gilt dann der folgende Satz.

Satz 6.7

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

$$A \text{ positiv definit } \Leftrightarrow \det(A_k) > 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n.$$

In Worten: A ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten aller Hauptminoren größer als Null sind.

Reelle Vektorräume, die mit einem Skalarprodukt versehen sind, ermöglichen uns vielfältige neue Operationen. Solche Vektorräume erhalten daher einen eigenen Namen.

Definition 6.8 (Euklidische Vektorräume)

Ein reeller Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt heißt *euklidisch*.

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Für $v \in V$ definieren wir dann eine *Norm*

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

und für zwei Vektoren $v, w \in V$ den Abstand

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Normen und Abstände besitzen wichtige Eigenschaften.

Satz 6.9 (Eigenschaften von Normen und Abständen)

Es sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und dadurch induzierter Norm sowie induziertem Abstand. Dann gelten für alle $v, w, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

N1 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

N2 $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$

N3 $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

D1 $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$

D2 $d(v, w) = d(w, v)$

D3 $d(v, z) \leq d(v, w) + d(w, z)$

Wir können nun also basierend auf einem Skalarprodukt den Abstand zweier Vektoren bestimmen. Dieser Abstand variiert mit dem Skalarprodukt. Der Abstandsbegriff, den wir üblicherweise aus der Schule kennen, basiert auf dem Standardskalarprodukt. Dieses induziert im $\mathbb{R}^n$ den folgenden

Abstand zwischen zwei Punkten x und y:

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}.$$

Nach dem Abstand möchten wir nun auch den Winkelbegriff basierend auf dem Skalarprodukt definieren. Die entsprechende Definition lässt sich mit dem folgenden Satz motivieren.

Satz 6.10 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

Ist V ein euklidischer Vektorraum, so gilt für alle $v, w \in V$

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Aus diesem Satz können wir unmittelbar ableiten, dass für $v, w \neq 0$ gilt:

$$-1 \leq \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1.$$

Anhand der Werte, die der Quotient annehmen kann, lässt sich die folgende Definition motivieren.

Definition 6.11 (Winkel)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und v, w seien Vektoren. Für $\alpha := \sphericalangle(v, w)$ gilt:

$$\cos(\alpha) := \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Mit diesem Winkelbegriff können wir nun auch festlegen, wann zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Damit ergeben sich dann auch automatisch die Begriffe der Orthogonalität für Untervektorräume sowie des orthogonalen Komplements.

Definition 6.12 (Orthogonalität, orthogonales Komplement)

Es sei V ein euklidischer Vektorraum.

a) Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, in Zeichen $v \perp w$, genau dann, wenn $\langle v, w\rangle = 0$.

b) Zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$ heißen *orthogonal*, in Zeichen $U \perp W$, genau dann, wenn $u \perp w$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

c) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so ist sein *orthogonales Komplement* definiert als

$$U^\perp := \{v \in V \mid v \perp u \quad \text{für alle } u \in U\}.$$

Das orthogonale Komplement ist wieder ein Untervektorraum.

d) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in V heißt *orthogonal*, genau dann, wenn $v_i \perp v_j$ für alle

$i \neq j$. Die Menge heißt *orthonormal*, wenn zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle i, und *Orthonormalbasis*, falls die Menge auch eine Basis von V ist.

Im dreidimensionalen Raum können uns die folgenden Werkzeuge helfen, um das orthogonale Komplement zu einer Menge zu finden:

- Ist U eindimensional und damit eine Gerade, so können wir die Richtung dieser Gerade nutzen, um mithilfe der Hesse-Normalform eine Ebene zu definieren, die Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist, also den Ursprung beinhaltet, und für die alle Vektoren in der Ebene senkrecht auf Vektoren der Gerade stehen.
- Ist U eine Ebene, so können wir mithilfe des Kreuzproduktes zweier (linear unabhängiger) Richtungsvektoren der Ebene einen Vektor ermitteln, der senkrecht zur Ebene steht. Mit diesem Vektor erhalten wir dann direkt eine Ursprungsgerade als orthogonales Komplement zur Ebene U.

Wir nutzen an dieser Stelle einen Satz, der sich gut zur Kontrolle eignet, wenn wir ein orthogonales Komplement ermitteln müssen.

Satz 6.13

Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad \text{und} \quad V = W + W^\perp \quad \text{und} \quad \dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

Zuletzt betrachten wir noch ein Verfahren, das uns eine Orthonormalbasis liefert, wenn wir eine Basis vorgeben.

Satz 6.14 (Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt)

Jeder endlich-dimensionale euklidische Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Skalarprodukt auf einem endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und $\|\cdot\|$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm. Weiter sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann erhalten wir durch die folgende Konstruktion eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$:

Für $s \in \{0, \ldots, n-1\}$ seien bereits die Vektoren $b_1, \ldots, b_s$ definiert, das heißt insbesondere für $s = 0$ liegt noch kein Vektor der Orthonormalbasis vor.

Wir definieren dann

$$w_{s+1} := v_{s+1} - \sum_{i=1}^{s} \langle v_{s+1}, b_i \rangle b_i.$$

Durch Normierung von w_{s+1} erhalten wir dann den nächsten Vektor der Orthonormalbasis, das heißt

$$b_{s+1} := \frac{w_{s+1}}{\|w_{s+1}\|} = \frac{w_{s+1}}{\sqrt{\langle w_{s+1}, w_{s+1} \rangle}}.$$

F24 – T1 – A4

Es sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Es seien $u, v \in V$. Dann gilt:

$$(u,w) = (v,w) \text{ für alle } w \in V \Leftrightarrow u = v.$$

b) Sei $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und

$$W = \{w \in V \mid (u,w) = (v,w)\}.$$

Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von V ist, und bestimmen Sie die Dimension von W.

Lösungsvorschlag

a) „$\Leftarrow$“: Klar, denn für $u = v$ gilt $(u,w) = (v,w)$ für alle $w \in V$.
„$\Rightarrow$“: Nach Voraussetzung ist $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt, das heißt insbesondere bilinear und positiv definit. Nach Voraussetzung gilt weiterhin für alle $w \in V$:
$(u,w) = (v,w) \Leftrightarrow 0 = (u,w) - (v,w) = (u-v,w)$
Insbesondere gilt für $w = u - v$: $0 = (u-v, u-v)$ und wegen der positiven Definitheit somit $u - v = 0 \Leftrightarrow u = v$

b) **Zeige**: W ist Untervektorraum von V

i) Seien $x, y \in W$, das heißt $(u,x) = (v,x)$ und $(u,y) = (v,y)$

$$(u, x+y) \overset{(*)}{=} (u,x) + (u,y) \overset{\text{n.V.}}{=} (v,w) + (v,y) \overset{(*)}{=} (v, x+y) \quad \Rightarrow \quad x + y \in W$$

$(*)$ Linearität in 2. Komponente

ii) Sei $x \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, das heißt $(u,x) = (v,x)$

$$(u, \lambda x) \overset{(*)}{=} \lambda(u,x) \overset{\text{n.V.}}{=} \lambda(v,x) \overset{(*)}{=} (v, \lambda x) \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in W$$

$(*)$ Linearität in 2. Komponente

iii) $0 \in W$, denn $(u,0) = 0 = (v,0) \Rightarrow W \neq \emptyset$

Insgesamt folgt somit, dass W ein Untervektorraum von V ist. Wir sehen außerdem, dass

$$W = \{w \in V | (u,w) = (v,w)\} = \{w \in V | (u-v,w) = 0\}.$$

Da $u \neq v$ ist $u - v \neq 0$. Da mit $(u-v,w) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(\mu(u-v), w) = \mu(u-v,w) = \mu \cdot 0 = 0$$

ist W das orthogonale Komplement zu $\langle u - v\rangle \subseteq V$ und wegen $\dim\langle u-v\rangle = 1$ (denn: $u - v \neq 0$) folgt direkt $\dim W = \dim V - \dim\langle u-v\rangle = \dim V - 1$.

F24 – T2 – A3

Es bezeichne $\triangle$ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^2$, bezüglich denen $\triangle$ ein gleichseitiges Dreieck ist. (Die Längen und Winkel werden also von dem entsprechenden Skalarprodukt induziert.)

Lösungsvorschlag

Ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^2$ kann durch eine symmetrisch, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dargestellt werden. Es gilt dann für $x, y \in \mathbb{R}^2$: $\quad \langle x, y\rangle = x^T A y$.

Wir suchen also entsprechende Matrizen, für die die Verbindungsvektoren zwischen den Eckpunkten $u := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v := \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und $w := \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ insbesondere dieselbe Länge besitzen. Dabei gilt für die Länge $\|x\|$ eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$: $\quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T A x}$

Sei also $A := \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ symmetrisch mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Mit $\|u\| = \|v\| = \|w\|$ folgt wegen

$$\|u\| = \sqrt{a}, \|w\| = \sqrt{c} \quad \text{und} \quad \|v\| = \sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b-a\\ c-b\end{pmatrix}} = \sqrt{(a-b)+(c-b)}$$

direkt

I. $\sqrt{a} = \sqrt{c} \Rightarrow a = c$

II. $\sqrt{(a-b)+(c-b)} = \sqrt{a} \underset{a=c}{\overset{\text{I}}{\Rightarrow}} \sqrt{2(a-b)} = \sqrt{a} \Rightarrow 2a - 2b = a \Rightarrow b = \frac{1}{2}a$

Somit müssen geeignete Skalarprodukte gegeben sein durch eine Matrix $A = \begin{pmatrix}a & \frac{1}{2}a\\ \frac{1}{2}a & a\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
Prüfe nun, für welche $a \in \mathbb{R}$ die Matrix positiv definit ist, das heißt nur positive Eigenwerte besitzt.

Eigenwerte von A sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ von A.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (a-\lambda)^2 - \frac{1}{4}a^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + \frac{3}{4}a^2$$

Damit sind die Eigenwerte von A gegeben durch $\lambda = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3a^2}}{2} = \frac{2a \pm a}{2}$, das heißt, die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \frac{3}{2}a$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}a$.

Folglich ist A genau dann positiv definit, wenn $a > 0$.

Alternativ können wir auch die Determinanten der Hauptminoren berechnen und sicherstellen, dass diese > 0 sind. So erhalten wir $\det(A_1) = a > 0$ und $\det(A_2) = \det(A) = \frac{3}{4}a^2 > 0$, also $a > 0$ und $|a| > 0$ und somit insgesamt $a > 0$.

Behauptung: Für alle Skalarprodukte der Form $\langle\ ,\ \rangle$: $\quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle := x^T A y$ mit $A = \begin{pmatrix}a & \frac{1}{2}a\\ \frac{1}{2}a & a\end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^+$ ist $\triangle$ ein gleichseitiges Dreieck.

Berechne nun noch $\|u\| = \sqrt{a}$, $\|v\| = \sqrt{a}$ und $\|w\| = \sqrt{a}$. Da $\|u\| = \|v\| = \|w\|$ ist $\triangle$ gleichseitig.

F23 – T2 – A2

Für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sigma_A(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle$$

gegeben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Bilinearform σ_A symmetrisch ist.

b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass σ_A ein Skalarprodukt, also positiv definit ist.

c) Nun seien $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Orthonormalisieren Sie die Basis (e_1, e_2, e_3) bzgl. σ_A nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

Lösungsvorschlag

a) **Zeige**: $\sigma_A(x, y) = \sigma_A(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$\sigma_A(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle = \underbrace{(Ax)^T Ay}_{\in\mathbb{R}} = ((Ax)^T Ay)^T = (Ay)^T [(Ax)^T]^T = (Ay)^T Ax = \langle Ay, Ax \rangle$$

$$= \sigma_A(y, x)$$

$\Rightarrow \sigma_A$ ist symmetrisch

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. $\sigma_A(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay$.

Es ist $A^T A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, denn $(A^T A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T A$. Somit folgt:

$$\sigma_A \text{ positiv definit } \Leftrightarrow \ A^T A \text{ positiv definit } \Leftrightarrow \text{ Alle Eigenwerte von } A^T A \text{ sind positiv}$$

c) $A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} =: B$ und damit $\sigma_A(x, y) = x^T By$

- $\|e_1\| = \sqrt{\sigma_A(e_1, e_1)} = \sqrt{9} = 3 \quad \Rightarrow b_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{3} e_1$
- $w_2 := e_2 - \sigma_A(e_2, b_1)\, b_1 = e_2 - 0 \cdot b_1 = e_2, \quad \|w_2\| = \|e_2\| = 1 \quad \Rightarrow \quad b_2 := \frac{e_2}{\|e_2\|} = e_2$
- $w_3 := e_3 - \sigma_A(e_3, b_1)\, b_1 - \sigma(e_3, b_2) \cdot b_2 = e_3 - 2b_1 - 0b_3 = e_3 - 2b_1 = e_3 - \frac{2}{3} e_1, \quad \|w_3\| = 1$
  $\Rightarrow \quad b_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = w_3 = e_3 - \frac{2}{3} e_1$

Damit ist durch $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich σ_A gegeben.

H22 – T1 – A1

Sei $V = [X]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in X mit Grad ≤ 3 versehen mit dem durch

$$(X^i, X^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \text{für alle } 0 \leq i, j \leq 3$$

festgelegten Skalarprodukt. Sei $U \coloneqq \{p(X) \in V \mid p(1) = 0\} \subseteq V$ die Teilmenge aller Polynome mit Nullstelle 1.

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $p(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ ein Element von U ist und ergänzen Sie $p(X)$ zu einer orthogonalen Basis von U.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $U^\perp$.

Lösungsvorschlag

a) Wir überprüfen die drei Eigenschaften eines Untervektorraums:

   i) **Zeige**: $U \neq \emptyset$

   Da offensichtlich $X - 1 \in U$, folgt direkt, dass $U \neq \emptyset$.

   ii) Seien $p(X), q(X) \in U$. **Zeige**: $p(X) + q(X) \in U$

   Da $p(X), q(X) \in U$ gilt insbesondere $p(1) = q(1) = 0$. Damit folgt direkt, dass $p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$ und deshalb $p(X) + q(X) \in U$.

   iii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p(X) \in U$. **Zeige**: $\lambda p(X) \in U$

   Da $p(X) \in U$ gilt insbesondere $p(1) = 0$. Damit folgt direkt, dass $\lambda p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$ und deshalb $\lambda p(X) \in U$.

   Insgesamt haben wir somit gezeigt, dass $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist.

b) Offensichtlich ist $p(X) \in V$. Da außerdem $p(1) = 0$ gilt, folgt direkt, dass $p(X) \in U$.

   Wir bestimmen zunächst eine Basis von U und nutzen anschließend das Gram-Schmidt-Verfahren, um daraus eine Orthonormalbasis zu erhalten.

   Es ist $\{1, X, X^2, X^3\}$ eine Basis von V, das heißt, $\dim(V) = 4$. Da $1 \notin U$ folgt unmittelbar, dass $\dim(U) \leq 3$. Gleichzeitig sehen wir mithilfe eines Koeffizientenvergleichs direkt, dass die drei Polynome aus U

$$p(X) = X^3 - X^2 + X - 1, \quad q(X) = X^2 - 2X + 1 \quad \text{und} \quad r(X) = X - 1$$

   linear unabhängig sind und folglich als maximal linear unabhängige Teilmenge eine Basis von U bilden.

   Bevor wir daraus nun eine Orthonormalbasis erzeugen, halten wir fest, dass für zwei Polynome

$$a(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad \text{und} \quad b(X) = b_3X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$$

   das gegebene Skalarprodukt aufgrund seiner Bilinearität wie folgt berechnet werden kann:

$$(a(X), b(X)) = a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0.$$

Wenn wir für ein $a(X) \in V$ die Norm $\|a(X)\| = \sqrt{(a(x), a(x))}$ definieren, können wir nun das Gram-Schmidt-Verfahren wie üblich anwenden.

- $b_1 \coloneqq \frac{1}{\|p(X)\|} p(X) = \frac{1}{2}(X^3 - X^2 + X - 1)$.
- $w_2 \coloneqq q(X) - (q(x), b_1) \cdot b_1 = q(X) + 2 \cdot b_1 = q(X) + p(X) = X^3 - X$.
  $b_2 \coloneqq \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^3 - X)$.
- $w_3 \coloneqq r(X) - (r(X), b_1) \cdot b_1 - (r(X), b_2) \cdot b_2 = r(X) - 0 \cdot b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot b_2 = r(X) + \frac{1}{2}(X^3 - X) = \frac{1}{2}(X^3 + X - 2)$
  $b_3 \coloneqq \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(X^3 + X - 2)$

Aufgrund der Konstruktion ist somit

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

eine Orthonormalbasis von U bezüglich dem gegebenen Skalarprodukt.

c) Um $U^\perp$ zu bestimmen, identifizieren wir V mit seinem Koordinatenraum $\mathbb{R}^4$. Es gilt dann, dass

$$a(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \quad \text{mit dem Vektor} \quad \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} =: \mathbf{v_{a(X)}}$$

identifiziert wird. Weiter stellen wir fest, dass das Skalarprodukt auf V dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ entspricht, das heißt, es gilt für $a(X), b(X) \in V$:

$$(a(X), b(x)) = \left\langle \mathbf{v_{a(X)}}, \mathbf{v_{b(X)}} \right\rangle.$$

Da $V = U \oplus U^\perp$ wissen wir, dass $\dim(U^\perp) = 1$, das heißt, es gibt ein $s(X) \in V$ mit $U^\perp = \langle s(X) \rangle$. Suche nun also $\mathbf{v_{s(X)}}$ derart, dass $\left\langle \mathbf{v_{s(X)}} \right\rangle = \left\langle \mathbf{v_{b_1}}, \mathbf{v_{b_2}}, \mathbf{v_{b_3}} \right\rangle^\perp$. Somit ist $\mathbf{v_s}$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme nun also Lösungen mithilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \overset{Z_3 - \frac{2}{\sqrt{6}} Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \overset{Z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z_3 + \frac{2}{\sqrt{6}} Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= x_4 \\ x_1 &= x_3 = x_4 \\ x_2 &= 2x_3 - x_4 = x_4 \end{aligned} \right\}$$

Damit erhalten wir unmittelbar

$$\left\langle \mathbf{v_{s(X)}} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und nach Rückübersetzung in V sehen wir, dass

$$U^\perp = \left\langle X^3 + X^2 + X + 1 \right\rangle.$$

F22 – T1 – A3

Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen a, b und c gibt, so dass durch

$$\Phi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & 1 & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix} y$$

ein Skalarprodukt definiert ist.

Lösungsvorschlag

Φ ist aufgrund der Definition sowie der Regeln zum Rechnen mit Matrizen eine Bilinearform.

Prüfe also noch, für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ Φ symmetrisch und positiv definit ist. Definiere

$$M := \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & 1 & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

i) Φ **symmetrisch**:

Seien $x, y, \in \mathbb{R}^3$. Φ symmetrisch $\Leftrightarrow$ $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ $x^T M y = y^T M x = \left(y^T M x\right)^T = x^T M^T y$

$\Leftrightarrow$ M symmetrisch

$\Leftrightarrow$ $b = c$

ii) Φ **positiv definit**:

$\Phi(x, x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$

Angenommen es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit Φ positiv definit

$\Rightarrow \Phi(e_1, e_1) = a > 0$ und $\Phi(e_3, e_3) = -a > 0$ Widerspruch!

Es gibt keine Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, für die Φ positiv definit

$\Rightarrow$ Es gibt keine Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, für die Φ ein Skalarprodukt ist.

F22 – T3 – A2

Es bezeichne (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Skalarprodukte $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen, wobei die Norm, die Orthogonalität und die Winkel von Φ induziert werden.

$$\|e_3\| = 1, \quad e_2 \perp e_3, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 1, \quad \cos\sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{und} \quad \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{30}.$$

Lösungsvorschlag

Φ ist durch eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben, wobei $\Phi(x, y) = x^T A y$.

Sei also $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Da A positiv definit ist, gilt $a, d, f > 0$, denn $\Phi(e_i, e_i) > 0$ für $i = 1, 2, 3$.

Nach Voraussetzung gilt

- $1 = \|e_3\| = \sqrt{\Phi(e_3, e_3)} = \sqrt{f} \overset{f>0}{\Leftrightarrow} f = 1$
- $e_2 \perp e_3 \Leftrightarrow \Phi(e_2, e_3) = 0 \Leftrightarrow e = 0$
- $\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b+c\\d\\1\end{pmatrix} = b + c = 1 \Leftrightarrow b = -c$
- $\frac{1}{\sqrt{6}} = \cos\sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{\Phi(e_1,e_3)}{\|e_1\|\cdot\|e_3\|} = \frac{c}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{f}} \overset{f=1}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{\frac{a}{6}} \overset{b=-c}{\Leftrightarrow} b = -\sqrt{\frac{a}{6}}$
- $\sqrt{30} = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a+\sqrt{6a}\\\sqrt{\frac{a}{6}}\\-\sqrt{\frac{a}{6}}+6\end{pmatrix}} = \sqrt{a - \sqrt{6a} - \sqrt{6a} + 36}$

  $\Leftrightarrow 30 = a - 2\sqrt{6}\sqrt{a} + 36 \Leftrightarrow 0 = \left(\sqrt{a} - \sqrt{6}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{6} \overset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 6$

Damit folgt insbesondere $c = 1$ und $b = -1$.

Da Φ positiv definit ist, gilt insbesondere $d > 0$. Somit sind die Skalarprodukte mit den gewünschten Eigenschaften für $\Phi(x, y) = x^T M y$ gegeben durch $M = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ -1 & d & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit M positiv definit.

Nutze das Hauptminorenkriterium, um $d > 0$ zu bestimmen, für die M positiv definit:

- $\det(M_1) = \det(6) = 6$
- $\det(M_2) = \det\begin{pmatrix}6 & -1\\-1 & d\end{pmatrix} = 6d - 1 > 0 \Leftrightarrow d > \frac{1}{6}$
- $\det(M_3) = \det(M) = 5d - 1 > 0 \Leftrightarrow d > \frac{1}{5}$

Somit sind alle gesuchten Skalarprodukte durch M von oben mit $d > \frac{1}{5}$ gegeben.

H21 – T1 – A2

Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie eine beliebige quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werde die Matrix

$$A = P^T BP \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

sowie die zugehörige Bilinearform

$$\sigma_A \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \sigma_A(x,y) = x^T Ay$$

auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ betrachtet.

a) Man zeige, dass die Bilinearform σ_A symmetrisch ist und

$$\sigma_A(x,x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

b) Man zeige, dass die Bilinearform σ_A genau dann ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist, wenn die Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist.

Lösungsvorschlag

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. **Zeige**: $\sigma_A(x,y) = \sigma(x,y) = \sigma_A(y,x)$

$$\sigma_A(x,y) = x^T Ay = \underbrace{x^T P^T BPy}_{\in\mathbb{R}} = \left(x^T P^T BPy\right)^T = y^T P^T B^T \left(P^T\right)^T \left(x^T\right)^T \overset{B \text{ symm.}}{=} y^T P^T BPx$$

$$= y^T Ax = \sigma_A(y,x)$$

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. **Zeige**: $\sigma_A(x,x) \geq 0$

B positiv definit, das heißt $y^T By > 0$ für $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\sigma_A(x,x) = x^T P^T BPx = (Px)^T B(Px)$

Da $Px \in \mathbb{R}^n$ folgt somit wegen B positiv definit:

$$\sigma_A(x,x) \begin{cases} > 0, \text{ falls } Px \neq 0 \\ = 0, \text{ falls } Px = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\sigma_A(x,x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$

b) Aus a) folgt, dass σ_A eine symmetrische Bilinearform ist. Somit ist noch zu zeigen:
σ_A positiv definit $\Leftrightarrow$ P invertierbar

„$\Leftarrow$“: P invertierbar $\Rightarrow Px \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \sigma_A(x,x) = x^T P^T BPx = (Px)^T B(Px) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \sigma_A$ positiv definit

„$\Rightarrow$“: σ_A positiv definit $\Rightarrow 0 < \sigma_A(x,x) = (Px)^T B(Px)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} Px \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \ker(P) = \{0\}$ und insbesondere $P \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow P$ invertierbar

(*) B positiv definit

H21 – T3 – A4

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit Skalarprodukt

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}.$$

a) Sei $\mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearer Abbildungen von V nach V. Zeigen Sie: Ist $0 \neq v \in V$, so ist die Abbildung

$$\varphi \colon \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}, F \mapsto \langle v, F(v) \rangle$$

linear.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von φ.

Lösungsvorschlag

a) **Zeige**: φ linear

i) Seien $F, G \in \mathrm{End}\,(V)$

$$\varphi(F+G) = \langle v, (F+G)(v) \rangle = \langle v, F(v) + G(v) \rangle \overset{(*)}{=} \langle v, F(v) \rangle + \langle v, G(v) \rangle = \varphi(F) + \varphi(G)$$

$(*)$ $\langle\ ,\ \rangle$ linear in 2. Komponente

ii) Sei $F \in \mathrm{End}\,(V)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi(\lambda F) = \langle v, (\lambda F)(v) \rangle = \langle v, \lambda F(v) \rangle \overset{(*)}{=} \lambda \langle v, F(v) \rangle = \lambda \varphi(F)$$

$(*)$ $\langle\ ,\ \rangle$ linear in 2. Komponente

$\Rightarrow$ φ ist linear

b) φ ist linear und wegen $\dim V = n$ gilt $\dim \mathrm{End}\,(V) = n \cdot n$. Weiterhin gilt die Dimensionsformel:

$$\dim \mathrm{End}\,(V) = \dim \ker(\varphi) + \dim \mathrm{Im}\,(\varphi)$$

Da $\mathrm{Im}\,(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ Untervektorraum, folgt

$$0 \leq \dim \mathrm{Im}\,(\varphi) \leq 1.$$

Da $F = \mathrm{id}_V \in \mathrm{End}\,(V)$ und $\varphi(F) = \langle v, v \rangle > 0$, da $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist, ergibt sich

$$\dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = \dim \mathrm{End}\,(V) - \dim \mathrm{Im}\,(\varphi) \neq 0 \quad \text{und daher} \quad \dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = 1.$$

Insgesamt also:

$$\dim \ker(\varphi) = \dim \mathrm{End}\,(V) - \dim \mathrm{Im}\,(\varphi) = n^2 - 1.$$

F21 – T3 – A3

Ist A eine Matrix, dann bezeichnet A^T die transponierte Matrix von A. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann ist $B^T MB$ diagonalisierbar.

b) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix, dann ist M ähnlich zu $B^T MB$.

c) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch und positiv definit und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar, dann ist $B^T MB$ positiv definit.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

Die Matrix $B^T MB$ ist symmetrisch, denn $(B^T MB)^T = B^T M^T \left(B^T\right)^T \overset{(*)}{=} B^T MB$. Symmetrische reelle Matrizen sind stets reell diagonalisierbar.

$(*)$ M ist symmetrisch, also $M^T = M$.

b) Falsch.

Angenommen es ist M ähnlich zu $B^T MB$, dann folgt:

$$\begin{aligned}\det(M) &= \det(B^T MB) = \det(B^T)\det(M)\det(B) = \det(B)\det(M)\det(B)\\ &= \det(B)^2 \det(M)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(B) = \pm 1$$

Da es invertierbare Matrizen B, das heißt Matrizen mit $\det(B) \neq 0$ gibt, für die gleichzeitig $\det(B) \neq \pm 1$, etwa

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist die Aussage im Allgemeinen falsch.

c) Wahr.

Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Da B invertierbar ist $Bx \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Wegen M positiv definit, das heißt $y^T My > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ folgt direkt $x^T B^T MBx = (Bx)^T M(Bx) > 0$.

H20 – T3 – A2

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Weiter sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$.
Ist $\mathrm{Rang}(F) = \mathrm{Rang}(F^2)$, so gilt $\mathrm{Kern}(F) = \mathrm{Kern}(F^2)$.

b) Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit
$$\det(A^2 + A) = 0,$$
so ist -1 ein Eigenwert von A.

c) Es gibt einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und unendlich viele paarweise verschiedene Vektoren
$$v_1, v_2, v_3, \ldots \in V \setminus \{0\},$$
die zueinander paarweise orthogonal sind.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

Mit $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ist auch $F^2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Da weiter $\dim V < \infty$ gelten für F und F^2 die Dimensionsformel. Folglich
$$\dim \ker\left(F^2\right) = \dim V - \dim \operatorname{rang}\left(F^2\right) \overset{\text{n.V.}}{=} \dim V - \dim \operatorname{rang}(F) = \dim \ker(F).$$
Da außerdem $\ker(F) \overset{(*)}{\subseteq} \ker\left(F^2\right)$ folgt somit $\ker(F) = \ker\left(F^2\right)$

$(*)$ Sei $x \in \ker(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow x \in \ker\left(f^2\right)$

b) Wahr.

$\det\left(A^2 + A\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}\left(A^2 + A\right) < n \Rightarrow$ Spaltenvektoren von $A^2 + A$ sind linear abhängig
$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n,\ v \neq 0$ mit $\left(A^2 + A\right) \cdot v = 0 \Rightarrow A^2 v + Av = 0 \Rightarrow A^2 v = -Av$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} Av = A^{-1}A^2 v = A^{-1}(-Av) = -v \Rightarrow -1$ Eigenwert von A

$(*)$ Das folgt mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, das heißt A^{-1} existiert.

c) Falsch.

Angenommen es wäre so und $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnet das Skalarprodukt auf V.

Sei $n = \dim(V)$, dann sind $v_1, \ldots, v_{n+1} \in V \setminus \{0\}$ linear abhängig, das heißt $\exists\, \lambda_i \in \mathbb{R}$, nicht alle 0, mit $0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i$.

O.B.d.A. sei $\lambda_1 \neq 0$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle 0, v_1 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i, v_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \langle v_i, v_1 \rangle \overset{(*)}{=} \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

$(*)$ $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ nach Voraussetzung

Da $\lambda_1 \neq 0$ folgt also $\langle v_1, v_1 \rangle = 0$.

Widerspruch zu $\langle\ ,\ \rangle$ Skalarprodukt, denn dann ist $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit, also $\langle v_1, v_1 \rangle > 0$.

H20 – T3 – A4

Es sei $f: \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, gegeben durch $f(x) = A \cdot x$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von Kern(f).

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Bildes von f bezüglich des Standardskalarprodukts.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme $\ker(f)$ mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2-2Z_1 \\ Z_3+3Z_1 \\ Z_4-4Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 4 & -8 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2+2Z_3 \\ Z_4+3Z_3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 4 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_4-Z_2 \\ Z_3-Z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 - 2x_2 - x_6 \\ x_6 &= x_4 + 2x_5 \\ x_3 &= 2x_5 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_4 - 2x_2 \\ x_6 &= x_4 + 2x_5 \\ x_3 &= 2x_5 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Also folgt: } \ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_4 - 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_4 + 2x_5 \end{pmatrix} : \quad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=: \mathcal{B}}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $\ker(f)$

b) Nach Dimensionsformel gilt: $\dim \operatorname{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^6 - \dim \ker(f) = 6 - 3 = 3$.

Da $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)^\perp$ folgt somit $\dim \operatorname{Im}(f)^\perp = 1$.

Es gilt: $f(e_4), f(e_5), f(e_6) \in \operatorname{Im}(f)$ und diese drei Vektoren sind linear unabhängig.
(das heißt der vierte, fünfte und sechste Spaltenvektor von A)
$\Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \langle f(e_4), f(e_5), f(e_6) \rangle$

$x \in \operatorname{Im}(f)^\perp \Leftrightarrow x \perp f(e_4)$ und $x \perp f(e_5)$ und $x \perp f(e_6)$

Somit ist x Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $Bx = 0$ mit

$$B := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

wobei die 1. Zeile $f(e_4)^T$, die 2. Zeile $f(e_5)^T$, die 3. Zeile $f(e_6)^T$ entspricht.

Löse das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1+2Z_3 \\ \rightsquigarrow \\ \frac{1}{4}Z_2}}{} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = x_2 + 2x_4 \\ x_4 = x_3 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 + 4x_4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_4 = x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array} \right\}$$

Damit folgt

$$\mathbb{L}(B, 0) = \operatorname{Im}(f)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

F20 – T1 – A4

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Beweisen Sie:

a) Bezüglich des euklidischen Standardskalarprodukts $\langle\ ,\ \rangle$ von $\mathbb{R}^n$ stehen $\text{Kern}(A)$ und $\text{Bild}(A)$ aufeinander senkrecht.

b) Es gilt $\mathbb{R}^n = \text{Kern}(A) \oplus \text{Bild}(A)$.

Lösungsvorschlag

a) Seien $v \in \ker(A)$ und $u \in \text{Im}\,(A) \ \Rightarrow\ Av = 0$ und $\exists\ w \in \mathbb{R}^n$ mit $u = Aw$

$$\langle v, u\rangle = \langle v, Aw\rangle = v^T Aw \underset{\text{symm.}}{\overset{A}{=}} v^T A^T w = (Av)^T w = 0^T w = 0$$

$$\Rightarrow\ \ker(A) \perp \text{Im}\,(A)$$

b) **Zeige**: $\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \text{Im}\,(A)$

- **Behauptung**: $\ker(A) + \text{Im}\,(A) = \mathbb{R}^n$

  Es gilt $\ker(A) + \text{Im}\,(A) \subseteq \mathbb{R}^n$, da $\ker(A), \text{Im}\,(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorräume sind. Weiterhin gilt $\dim \text{Im}\,(A) = \text{rang}\,(A)$ und $\dim \ker(A) = n - \text{rang}\,(A)$.

  Insgesamt also $n = \dim \ker(A) + \text{rang}\,(A)$ und daher $\ker(A) + \text{Im}\,(A) = \mathbb{R}^n$.

- **Behauptung**: $\ker(A) \cap \text{Im}\,(A) = \{0\}$

  Sei $x \in \ker(A) \cap \text{Im}\,(A) \ \Rightarrow\ Ax = 0$ und $\exists\ w \in \mathbb{R}^n$ mit $x = Aw$.
  $\Rightarrow\ \langle x, x\rangle = \langle x, Aw\rangle = x^T Aw \overset{A^T = A}{=} x^T A^T w = (Ax)^T w = 0^T w = 0$
  $\Rightarrow\ x = 0$, denn $\langle\ ,\ \rangle$ positiv definit
  $\Rightarrow\ \ker(A) \cap \text{Im}\,(A) = \{0\}$

Aus den beiden Punkten folgt somit direkt

$$\mathbb{R}^n = \ker(A) \oplus \text{Im}\,(A)\,.$$

F20 – T3 – A3

Auf dem Unterraum

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

des $\mathbb{R}^4$ werde die symmetrische Bilinearform

$$\sigma\colon U \times U \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} y$$

betrachtet.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung σ ein Skalarprodukt auf dem Untervektorraum U ist.

b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von U bezüglich σ an.

Lösungsvorschlag

a) **Zeige**: σ ist positiv definit, das heißt $\sigma(x, x) > 0$ für alle $x \in U \setminus \{0\}$

$$U = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \quad x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right.$ werden im Folgenden jeweils als v_1, v_2, v_3 bezeichnet.$\Big)$

Sei also $x \in U \setminus \{0\}$, das heißt $x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)^T$ mit $x_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\sigma(x, x) = x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x^T \begin{pmatrix} -x_2 - 2x_3 - x_4 \\ x_2 - x_4 \\ x_2 + 3x_3 \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (-x_2 - x_3 - x_4)(-x_2 - 2x_3 - x_4) + (x_2 - x_4)x_2 + (x_2 + 3x_3)x_3 + (-x_2 - x_3 + 2x_4)x_4 \\ &= x_2^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 + 2x_3x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 + x_4^2x_2^2 - x_2x_4 + x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &\quad - x_2x_4 - x_3x_4 + 2x_4^2 \\ &= 2x_2^2 + 5x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_2x_3 + 2x_3x_4 \\ &= 2\left(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_3x_4 \\ &= 2(x_2 + x_3)^2 + \left(x_3^2 + 2x_3x_4 + x_4^2\right) + 2x_3^2 + 2x_4^2 \end{aligned}$$

$$= 2(x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2$$

$\Rightarrow\ \sigma(x,x) > 0$ für $x \in U \setminus \{0\}$

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis von U. Nutze das Gram-Schmidt-Verfahren, um daraus eine Orthonormalbasis zu erhalten.

Für $x \in U$ sei $\|x\| := \sqrt{\sigma(x,x)}$

- $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$
- $w_2 := v_2 - \sigma(v_2, b_1)\, b_1 = v_2 - \frac{1}{2}\sigma(v_2, v_1)\, v_1 = v_2 - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_1 = v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $b_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} w_2$
- $w_3 := v_3 - \sigma(v_3, b_1)\, b_1 - \sigma(v_3, b_2)\, b_2$

  $= v_3 - \frac{1}{2}\sigma(v_3, v_1)\, v_1 - \frac{1}{3}\sigma(v_3, w_2)\, w_2$

  $= v_3 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} v_1 - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} w_2$

  $= v_3 - \frac{1}{3} w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

  $b_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{3}{8} w_3$

Damit ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von U.

F19 – T1 – A4

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$, und sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum.

a) Zeigen Sie: Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V, so gibt es ein Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ auf V, sodass $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle ., . \rangle$ ist.

b) Seien $\langle ., . \rangle_1$ und $\langle ., . \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V. Zeigen Sie: Es gibt eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to V$, sodass für alle $v, w \in V$ gilt

$$\langle v, w \rangle_1 = \big\langle f(v), f(w) \big\rangle_2 .$$

Lösungsvorschlag

a) Es bezeichne $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ die gegebene Basis von V. Dann besitzt $\langle ., . \rangle$ bezüglich $\mathcal{B}$ die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(\langle ., . \rangle) = E_n$, denn nach Voraussetzung soll gelten

$$\big\langle b_i, b_j \big\rangle = \begin{cases} 1, \text{ für } i = j \\ 0, \text{ für } i \neq j \end{cases} .$$

Es bezeichne weiterhin

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$$

die Koordinatenabbildung bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Dann ist das gesuchte Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T E_n \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w).$$

Da die darstellende Matrix bezüglich $\mathcal{B}$ sowohl symmetrisch als auch positiv definit ist, handelt es sich bei der oben definierten Abbildung um ein Skalarprodukt mit der gewünschten Eigenschaft.

b) Wir können für jedes der beiden Skalarprodukte eine Orthonormalbasis von V bestimmen. Wir nennen diese $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$. Bezüglich dieser Basen besitzen die beiden Skalarprodukte die folgenden darstellenden Matrizen:

$$M_1 := M_{\mathcal{B}_1}(\langle ., . \rangle_1) = E_n \quad \text{und} \quad M_2 := M_{\mathcal{B}_2}(\langle ., . \rangle_2) = E_n.$$

Wie in Teilaufgabe a) erhalten wir, dass

$$\langle ., . \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v)^T \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(w)$$

und

$$\langle ., . \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(v)^T \Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}(w).$$

Wir definieren nun den Basistausch von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$ und erhalten damit

$$f := \Phi_{\mathcal{B}_2} \circ \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1} : V \to V.$$

Als Verknüpfung von zwei bijektiven, linearen Koordinatenabbildung ist auch f selbst bijektiv und linear. Außerdem gilt für $v, w \in V$:

$$\big\langle f(v), f(w) \big\rangle_2 = \left(\Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\Phi_{\mathcal{B}_2}\left(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v)\right)\right)\right)^T \left(\Phi_{\mathcal{B}_2}^{-1}\left(\Phi_{\mathcal{B}_2}\left(\Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(w)\right)\right)\right) = \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(v)^T \Phi_{\mathcal{B}_1}^{-1}(w) = \langle v, w \rangle_1 .$$

F19 – T2 – A3

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum der reellen 2×2 Matrizen. Für

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$$

sei die Spur von A definiert durch

$$\mathrm{Sp}(A) = a_{11} + a_{22}.$$

Die Spur von A ist also die Summe der Diagonaleinträge der Matrix A. Es sei

$$\sigma \colon V \times V \to R \colon (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB^T),$$

wobei B^T die zu B transponierte Matrix bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass σ ein Skalarprodukt ist.

b) Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich des Skalarprodukts σ.

Lösungsvorschlag

a) i) **Zeige**: σ ist bilinear

Seien $A, B, C \in V$.

$$\begin{aligned} \sigma(A + B, C) &= \mathrm{Spur}\left((A + B)C^T\right) = \mathrm{Spur}\left(AC^T + BC^T\right) = \mathrm{Spur}\left(AC^T\right) + \mathrm{Spur}\left(BC^T\right) \\ &= \sigma(A, C) + \sigma(B, C) \\ \sigma(A, B + C) &= \mathrm{Spur}\left(A \cdot (B + C)^T\right) = \mathrm{Spur}\left(A \cdot \left(B^T + C^T\right)\right) = \mathrm{Spur}\left(AB^T + AC^T\right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(AB^T\right) + \mathrm{Spur}\left(AC^T\right) = \sigma(A, B) + \sigma(A, C) \end{aligned}$$

Seien $A, B \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sigma(\lambda A, B) &= \mathrm{Spur}\left(\lambda AB^T\right) = \lambda \mathrm{Spur}\left(AB^T\right) = \lambda\sigma(A, B) \\ \sigma(A, \lambda B) &= \mathrm{Spur}\left(A(\lambda B)^T\right) = \mathrm{Spur}\left(\lambda AB^T\right) = \lambda\sigma(A, B) \end{aligned}$$

ii) **Zeige**: σ symmetrisch

Seien $A, B \in V$.

$$\sigma(A, B) = \mathrm{Spur}\left(AB^T\right) \overset{(*)}{=} \mathrm{Spur}\left(\left(AB^T\right)^T\right) = \mathrm{Spur}\left(BA^T\right) = \sigma(B, A)$$

$(*)$ Diagonaleinträge sind unter Transposition invariant!

iii) **Zeige**: σ positiv definit

Sei $A \in V \setminus \{0\}$, das heißt $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ nicht alle $a_{ij} = 0$. Dann gilt

$$\text{Spur}\left(A \cdot A^T\right) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2.$$

Damit folgt, dass $\sigma(A, A) = \text{Spur}\left(AA^T\right) = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 > 0$, denn mindestens ein $a_{ij} \neq 0$ und $a_{ij}^2 \geq 0$.

Also ist σ ein Skalarprodukt auf V.

b) Definiere $A := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dann gilt

$$\cos \sphericalangle(A, B) = \frac{\sigma(A, B)}{\|A\| \cdot \|B\|},$$

wobei $\|C\| := \sqrt{\sigma(C, C)}$ für $C \in V$.

$\|A\| = \sqrt{37}, \quad \|B\| = \sqrt{63}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 26 & -14 \\ 29 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma(A, B) = 15$

Insgesamt erhalten wir somit

$$\cos \sphericalangle(A, B) = \frac{15}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{63}} \approx 0,31.$$

H18 – T1 – A4

Es sei

$$\langle .,. \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, welches durch die Einheitsmatrix $\mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt wird. Man bestimme alle Skalarprodukte

$$(.,.) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

für welche gilt: Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, w \rangle = 0$, dann gilt auch $(v, w) = 0$.

Lösungsvorschlag

Es bezeichne M die Matrix, die gegeben ist durch $M = (m_{ij})$ mit $m_{ij} = (e_i, e_j)$, das heißt M ist die darstellende Matrix von $(\ ,\ )$ bezüglich der Standardbasis.

Da $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ für $i \neq j$ muss für die gesuchten Skalarprodukte ebenfalls $(e_i, e_j) = 0$ für $i \neq j$ gelten, das heißt, M ist eine Diagonalmatrix.

Seien nun $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Dann gilt:

$$\langle e_i - e_j, e_i + e_j \rangle = \langle e_i, e_i + e_j \rangle - \langle e_j, e_i + e_j \rangle = \langle e_i, e_i \rangle + \underbrace{\langle e_i, e_j \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle e_j, e_i \rangle}_{=0} - \langle e_j, e_j \rangle = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ 0 = (e_i - e_j, e_i + e_j) = (e_i, e_i) - (e_j, e_j) = m_{ii} - m_{jj} \ \Leftrightarrow\ m_{ii} = m_{jj}$$

Da $(\ ,\ )$ als Skalarprodukt zudem positiv definit, muss $m_{ii} > 0$ für $1 \leq i \leq n$ gelten.

Insgesamt folgt, dass die darstellenden Matrizen bezüglich der Standardbasis für die gesuchten Skalarprodukte gegeben sind durch

$$M := (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{mit} \quad m_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ m, & i = j \end{cases}, \quad \text{wobei } m \in \mathbb{R}^+.$$

Offensichtlich liefer Matrizen $M = m \cdot E_n$ wie eben definiert über die Abbildung

$$(.,.) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^T M y$$

ein Skalarprodukt, denn M ist symmetrisch und positiv definit.

Überprüfen wir also noch, ob für $\langle v, w \rangle = 0$ auch $(v, w) = 0$ gilt. Seien dafür $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, w \rangle = 0$.

$$\langle v, w \rangle = 0 \ \Leftrightarrow\ x^T y = 0 \overset{m>0}{\Leftrightarrow}\ m \cdot x^T y = 0 \ \Leftrightarrow\ x^T m \cdot E_n \cdot y = x^T M y = (x, y) = 0.$$

H18 – T2 – A2

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) seien die Ebene $E : x + y = 0$ und der Vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)^t \in E$ gegeben.

a) Ergänzen Sie $\mathbf{u}$ zu einer orthonormalen Basis von E.

b) Ergänzen Sie die in a) bestimmte Basis zu einer orthonormalen Basis von $\mathbb{R}^3$.

c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ die lineare Abbildung, die E als Eigenraum zum Eigenwert 2 und die $E^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 0 hat. Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix A bezüglich der kanonischen Basis.

Lösungsvorschlag

a) $E = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \quad x + y = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix} : \quad x, z \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$

wobei $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Folgenden als $\tilde{v}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als u bezeichnet wird.

Es ist $\langle u, \tilde{v} \rangle = 0$, das heißt für $v := \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist $\{u, v\}$ eine Orthonormalbasis von E.

b) Offensichtlich sind $\tilde{w} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u, v$ linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Nutze das Gram-Schmidt-Verfahren, um $\tilde{w}$ noch zu orthonormalisieren.

$w^* := \tilde{w} - \langle \tilde{w}, u \rangle u - \langle \tilde{w}, v \rangle v = \tilde{w} - u - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w := \frac{w^*}{\|w^*\|} = \sqrt{2} \cdot w^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit ist $\{u, v, w\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

c) Offensichtlich gilt $E^\perp = \langle w \rangle$. Für $\mathcal{B} := \{u, v, w\}$ gilt also:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es bezeichne $\mathcal{E}$ die kanonische Basis.

Suche nun die Basistauschmatrizen $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, wobei $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^T$, denn $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ orthogonal, da B eine Orthonormalbasis.

$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und somit $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit folgt:

$$A = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

F18 – T1 – A2

Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein Skalarprodukt $\sigma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\sigma(v_i, v_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

und

$$\sigma(v_1, v_1) = 1, \quad \sigma(v_2, v_2) = 2, \quad \sigma(v_3, v_3) = 3.$$

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement U von

$$\mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich des obigen Skalarprodukts σ und geben Sie eine Orthonormalbasis von U an.

Lösungsvorschlag

a) Ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ lässt sich durch eine symmetrisch, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreiben. Es gilt dann:

$\sigma(v, w) = v^T A w$ für $v, w \in \mathbb{R}^3$. Suche also eine solche Matrix, die die Eigenschaften erfüllt.

Sei $A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann muss gelten:

$$\sigma\left(v_i, v_j\right) = v_i^T A v_j = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\sigma(v_1, v_2) = 0: &\quad 6a - 3b = 0 \;\Leftrightarrow\; b = 2a \\
\sigma(v_1, v_3) = 0: &\quad 2(2a - b + c) - (2b - d + e) = 0 \overset{b=2a}{\Leftrightarrow} 2c - 4a + d - e = 0 \\
&\quad \overset{c=0}{\Leftrightarrow} -4a + d - e = 0 \\
\sigma(v_2, v_3) = 0: &\quad 3(2a - b + c) = 3c = 0 \overset{b=2a}{\Leftrightarrow} c = 0 \\
\sigma(v_1, v_1) = 1: &\quad 2(2a - b) - (2b - d) = 1 \overset{b=2a}{\Leftrightarrow} d = 1 + 4a \\
\sigma(v_2, v_2) = 2: &\quad 9a = 2 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2}{9} \\
\sigma(v_3, v_3) = 3: &\quad 2\underbrace{(2a - b)}_{=0} - \underbrace{(2b - d + e)}_{=0} + (-e + f) = 3 \;\Leftrightarrow\; f = 3 + e
\end{aligned}$$

Damit folgt insgesamt:

$$a = \frac{2}{9}, \quad b = 2a = \frac{4}{9}, \quad c = 0, \quad d = 1 + 4a = \frac{17}{9}, \quad e = d - 4a = 1, \quad f = 4.$$

Damit ergibt sich für das eindeutig bestimmte Skalarprodukt aus der Aufgabenstellung die folgende darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{17}{9} & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternative Lösung:

Es ist $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von V. Die darstellende Matrix $(\ ,\ )$ bezüglich $\mathcal{B}$ hat die Form $N = (n_{ij})$ mit $n_{ij} = (v_i, v_j)$. Mit den Angaben folgt also

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist darstellende Matrix A von $(\ ,\ )$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$. Für diese gilt

$$A = \left(T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}\right)^T \cdot N \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \quad \text{mit} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} \text{ Basistauschmatrix.}$$

Achtung: Als erster Faktor steht hier im Gegensatz zum Basistausch bei linearen Abbildungen die transponierte Matrix und nicht die Inverse!

b) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U$, dann gilt $\sigma\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x^T A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$

$$\sigma\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{10}{3}x_2 + 5x_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ 2x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ U = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

wobei $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Folgenden u_1 und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ u_2 genannt wird. Nutze nun das Gram-Schmidt-Verfahren, um aus $\{u_1, u_2\}$ eine Orthonormalbasis zu erzeugen.

- $b_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} u_1$ mit $\|x\| = \sqrt{\sigma(x, x)}$ für $x \in \mathbb{R}^3$
- $w_2 := u_2 - \sigma(u_2, b_1)\, b_1 = u_2 - \frac{1}{3} \underbrace{\sigma(u_2, u_1)}_{=3} \cdot u_1 = u_2 - u_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

  $b_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{18}} w_2$

Gemäß dem Gram-Schmidt-Verfahren ist $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von U.

7 Affine Abbildungen

Das siebte Kapitel dreht sich noch einmal rund um Abbildungen, dieses Mal aber nicht linearen Abbildungen, sondern affine Abbildungen. Diese bilden affine Räume aufeinander ab – ein Begriff, den wir zu Beginn einführen werden. Anschließend betrachten wir besondere Typen solcher Abbildungen, konkret orthogonale Projektionen und Bewegungen.

Definition 7.1 (Affiner Raum)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt *affiner Raum*, wenn $A = \emptyset$ oder wenn $A = p + U$ mit $p \in V$ und $U \subseteq V$ Untervektorraum.

Wir können uns affine Räume gemäß der obigen Definition also in den meisten Fällen als verschobene Untervektorräume vorstellen. Beispiele sind affine Räume im $\mathbb{R}^2$, die etwa Geraden sein können, die nicht notwendig durch den Ursprung verlaufen. Der folgende Satz sagt uns, dass der Aufpunkt p eines affinen Raums gegen jeden Punkt im affinen Raum ausgetauscht werden kann, der zugehörige Untervektorraum jedoch eindeutig festgelegt ist.

Satz 7.2

Sei A affiner Raum im $\mathbb{K}$-Vektorraum V und $A = p + U$. Seien weiter $q \in A$ und $W \subseteq V$ Untervektorraum. Wenn sich A auch folgendermaßen darstellen lässt $A = q + W$, dann gilt:

a) $\overrightarrow{pq} \coloneqq q - p \in U$

b) $U = W$

Bereits bei den Lösungsräumen für inhomogene lineare Gleichungssysteme, die affine Unterräume eines Vektorraums bilden, haben wir implizit die folgende Definition genutzt.

Definition 7.3 (Dimension affiner Räume)

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $A = p + U$ ein affiner Raum in V. Dann definieren wir

$$\dim(A) = \begin{cases} \dim(U), & \text{falls } A \neq \emptyset \\ -1, & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf affine Räume in $\mathbb{R}$-Vektorräumen der Form $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Zwar kann die gesamte Theorie auch für allgemeine affine Räume formuliert werden, wir erleichtern uns damit jedoch an vielen Stellen die Notation und außerdem sind (fast ausschließlich) affine Räume

dieser Art im Staatsexamen von Bedeutung.

Für Vektorräume haben wir bereits lineare Abbildungen betrachtet. Wir haben festgestellt, dass wir sie mithilfe darstellender Matrizen schreiben können. Eine lineare Abbildung F von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in einen $\mathbb{K}$-Vektorraum W kann dann vereinfacht mithilfe geeigneter Koordinatenvektoren in der Form $F(v) = Mv$ geschrieben werden, wobei $M \in \text{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$, wenn $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$.

Wir untersuchen nun Abbildungen zwischen affinen Räumen. Da affine Räume im Kern verschobene Untervektorräume sind, überrascht es nicht, dass sich die strukturerhaltenden Abbildungen zwischen ihnen auf eine ganz ähnliche Art darstellen lassen. Dabei beschränken wir uns auf sogenannte affine Selbstabbildungen, also strukturerhaltende Abbildungen von einem affinen Raum in sich selbst. Das Vektorraum-Pendant hierzu sind die Endomorphismen, die wir etwa im Zusammenhang mit Eigenwerten untersucht haben.

Definition 7.4 (Affine (Selbst-)Abbildungen)

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *affine Abbildung*, wenn es eine Matrix $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $t \in V$ gibt, für die gelten:

$$f(v) = Mv + t.$$

Eine affine Abbildung setzt sich also zusammen aus einem linearen Anteil (der Matrix) und einer Verschiebung (dem Vektor t).

Vergleichbar zu den Eigenvektoren gibt es auch bei affinen Selbstabbildungen Punkte im Raum, die von besonderem Interesse sind und uns bei der Untersuchung von solchen Abbildungen helfen können. Dabei handelt es sich um Fixpunkte.

Definition 7.5 (Fixpunkte)

Es sei A ein affiner Raum im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und weiter $f : A \to A$ eine affine Abbildung. Ein Punkt $p \in A$ heißt *Fixpunkt*, genau dann, wenn $f(p) = p$.

Wir bezeichnen die Menge aller Fixpunkte einer affinen Abbildung mit $\text{Fix}(f)$.

Da für Fixpunkte $f(p) = p$ gilt, ergibt sich die Menge aller Fixpunkte einer affinen Abbildung f mit $f(v) = Mv + t$ als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$Mp + t = p \quad \Leftrightarrow \quad Mp - p = -t \quad \Leftrightarrow \quad (M - E_n)p = -t.$$

Die Menge aller Fixpunkte besitzt einige schöne Eigenschaften.

Satz 7.6

Es sei A ein affiner Raum im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ sowie $f : A \to A$ eine affine Abbildung mit $f(v) = Mv + t$ für $M \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

a) $\text{Fix}(f)$ ist ein affiner Unterraum in A.[a]

b) Für $p \neq q \in \mathrm{Fix}(f)$ liegt auch die Gerade, die durch p und q gegeben ist, vollständig in $\mathrm{Fix}(f)$.

c) Es gelte $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, das heißt es gibt $p \in \mathrm{Fix}(f)$ und $U_F \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorraum mit $F = p + U_F$. Dann ist $v \in U_F \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von M.

[a] Das bedeutet, dass die Menge ein affiner Raum ist und der zugehörige Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des Untervektorraums ist, der zu A gehört.

Nach dieser Vorarbeit lernen wir nun die wichtigsten affinen (Selbst-)Abbildungen kennen, die uns im Staatsexamen begegnen können.

Definition 7.7 (Orthogonale Projektion)

Eine *orthogonale Projektion auf einen Untervektorraum U eines Vektorraums V* mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ ist eine lineare Abbildung $P_U : V \to V$, die für alle Vektoren $v \in V$ die beiden Eigenschaften erfüllt:

a) $P_U(v) \in U$

b) $\langle P_U(v) - v, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$

Es sei A ein affiner Raum im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $A = p + U$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ Untervektorraum und $p \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die *orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^n$ auf den affinen Unterraum A* die affine Abbildung

$$P_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, P_A(v) = p + (P_U(v) - P_U(p)) = p + P_U(v - p).$$

Die erste Eigenschaft der orthogonalen Projektion garantiert uns, dass die Bilder jeweils in U liegen. Die zweite Eigenschaft stellt sicher, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{vP_U(v)} = P_U(v) - v$ senkrecht auf alle Vektoren in U steht.

Die orthogonale Projektion auf einen Untervektorraum besitzt eine weitere wichtige Eigenschaft, bei der wir auf einen Begriff dem vorherigen Kapitel zurückgreifen.

Satz 7.8

Seien V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum sowie P_U die orthogonale Projektion auf U. Dann ist P_U linear und es gilt

$$\mathrm{Im}(P_U) = U \qquad \text{und} \qquad \ker(P_U) = U^\perp.$$

Der Kern der orthogonalen Projektion P_U entspricht also dem orthogonalen Komplement $U^\perp$ von U.

Wir betrachten außerdem die Klasse der Bewegungen, also affine Abbildungen, die Abstände unverändert lassen. In der Ebene sind das gerade die Kongruenzabbildungen. Bevor wir den Begriff einer Bewegung formal definieren, benötigen wir jedoch noch einen weiteren Begriff, der sich auf Matrizen bezieht. Dieser ist auch für spätere Themen wieder von Bedeutung.

Definition 7.9 (Orthogonale Matrizen)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. A heißt *orthogonal*, genau dann, wenn $A^{-1} = A^T$.

Orthogonale Matrizen besitzen einige schöne Eigenschaften.

Satz 7.10

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

a) $\det(A) = \pm 1$ Achtung: Im Allgemeinen gilt nicht $\det(A) = \pm 1 \Rightarrow A$ orthogonal.

b) Bezeichne a_i den i-ten Spaltenvektor von A. Dann gilt für das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\langle a_i, a_j \rangle = a_i^t a_j = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Außerdem ist die Menge $O(n)$ der orthogonalen Matrizen in $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Das heißt insbesondere, dass das Produkt zweier orthogonaler Matrizen wieder orthogonal ist.

Kommen wir nun aber zur Definition einer Bewegung. Wir beschränken und auch hier auf $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und versehen den Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt.

Definition 7.11 (Bewegung)

Es sei $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ der mit dem Standardskalarprodukt versehene euklidische Raum. Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt genau dann *Bewegung*, wenn es eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ gibt mit

$$f(v) = Av + t.$$

Wir bereits erwähnt sind die Bewegungen gerade die längentreuen Abbildungen.

Satz 7.12 (Eigenschaften von Bewegungen)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung. Dann gilt für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$:

a) $\|v - w\| = \|f(v) - f(w)\|$ (*Längentreue*)

b) $\sphericalangle(\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{uw}) = \sphericalangle(\overrightarrow{f(u)f(v)}, \overrightarrow{f(u)f(w)})$ (*Winkeltreue*)

Insgesamt lernen wir in der folgenden Klassifikation fünf unterschiedliche Bewegungstypen kennen. Möglicherweise finden wir diese nicht alle in Examensaufgaben, spätestens an der Schule sind sie aber

wieder von Bedeutung. Bei der Klassifikation von Bewegungen greifen wir einerseits auf den Wert der Determinante der zugehörigen orthogonalen Matrix zurück, der entweder 1 oder -1 sein kann. Andererseits untersuchen wir die Menge der Fixpunkte, die uns oftmals wichtige Bestimmungsstücke der entsprechenden Bewegung liefert.

Wir betrachten im Folgenden jeweils eine Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(v) = Av + t$ für eine orthogonale Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}^n$. In der folgenden Tabelle beschränken wir uns zudem auf den Fall $n = 2$, wir interessieren uns also ausschließlich Bewegungen der euklidischen Ebene.

Typ ($\mathbb{R}^2$)	**Fix(f)**	**Eigenschaften von A**
Identität	$\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}^2$	$A = E_n$, das heißt $\det(A) = 1$
Translation	$\emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = -1$	$A = E_n$, das heißt $\det(A) = 1$
Drehung	Punkt, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 0$	$\det(A) = 1$
Spiegelung	Gerade $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 1$	$\det(A) = -1$
Schubspiegelung	$\emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = -1$	$\det(A) = -1$

Wir können die Tabelle auch entsprechend anpassen, um eine Klassifikation der Bewegungen des euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$ zu erhalten. Die Tabelle sieht dann wie folgt aus:

Typ ($\mathbb{R}^3$)	**Fix(f)**	**Eigenschaften von A**
Identität	$\mathrm{Fix}(f) = \mathbb{R}^3$	$A = E_n$, das heißt $\det(A) = 1$
Translation	$\emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = -1$	$A = E_n$, das heißt $\det(A) = 1$
Drehung	Gerade, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 1$	$\det(A) = 1$
Schraubung (Drehung + Translation)	$\emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = -1$	$\det(A) = 1$
Ebenenspiegelung	Ebene $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 2$	$\det(A) = -1$
Schubspiegelung	$\emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = -1$	$\det(A) = -1$
Drehspiegelung	$\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 1$	$\det(A) = -1$
Punktspiegelung	$\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 0$	$\det(A) = -1$

Die orthogonalen Matrizen in den Fällen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ können wir zudem noch genauer beschreiben. Es gilt der folgende Satz.

Satz 7.13 (Klassifikation orthogonaler Matrizen)

Es sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Dann gilt:

a) $n = 2$: $\exists \alpha \in [0, 2\pi[$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =: D(\alpha) \quad (\det(D(\alpha)) = 1)$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =: S(\alpha) \quad (\det(D(\alpha)) = -1)$$

b) $n = 3$: Bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$ besitzt A die Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Im ersten Fall handelt es sich um eine Drehung um α mit Drehachse $\langle b_1 \rangle$, im zweiten Fall handelt es sich um eine Drehspiegelung, das heißt um eine Drehung um α um $\langle b_1 \rangle$ und eine Spiegelung an $\langle b_2, b_3 \rangle$.

Zuletzt betrachten wir noch einen Begriff, der im Examen zwar selten auftaucht, jedoch ab und an von Bedeutung sein kann.

Definition 7.14 (Orthogonale Abbildungen)

Es seien V und W euklidische Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\ ,\ \rangle_V$ und $\langle\ ,\ \rangle_W$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt *orthogonal*, genau dann, wenn

$$\langle v, w \rangle_V = \langle f(v), f(w) \rangle_W$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Satz 7.15

Es sei $f : V \to W$ eine orthogonale Abbildung. Dann gilt:

a) f ist eine lineare Abbildung.

b) $0 = \langle f(v), f(v) \rangle = \langle v, v \rangle \Rightarrow v = 0$.

H24 – T1 – A4

Gegeben seien in der Ebene die Punkte

$$A = (0,2), \quad B = (0,4), \quad C = (1,2) \quad \text{und} \quad D_\lambda = (1,\lambda),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

a) Bestimmen Sie sämtliche $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass es eine euklidische Bewegung des $\mathbb{R}^2$ gibt, die die Strecke $[AB]$ auf die Strecke $[CD_\lambda]$ abbildet.

b) Bestimmen Sie für jedes λ aus Teil a) jeweils alle euklidischen Bewegungen, die die Strecke $[AB]$ auf die Strecke $[CD_\lambda]$ abbilden.

Lösungsvorschlag

a) Bewegungen erhalten Abstände, wenn also die gegebenen Strecken von einer Bewegung aufeinander abgebildet werden, müssen sie dieselbe Länge besitzen. Das heißt, in diesen Fällen muss gelten:

$$\begin{array}{lll} \overline{[AB]} = \overline{[CD_\lambda]} & \Longleftrightarrow & \|A-B\| = \|C-D_\lambda\| \overset{\|\cdot\|\geq 0}{\Longleftrightarrow} \|A-B\|^2 = \|C-D_\lambda\|^2 \\ & \Longleftrightarrow & (-2)^2 = (2-\lambda)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \lambda \in \{0,4\} \end{array}$$

Eine Begründung dafür, dass für $\lambda \in \{0,4\}$ tatsächlich eine euklidische Bewegung des $\mathbb{R}^2$ mit der gewünschten Eigenschaft existiert, findet sich in der zweiten Teilaufgabe. Dort werden solche Bewegungen explizit angegeben.

b) Eine euklidische Bewegung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat die Form

$$\varphi(x) = Mx + t \quad \text{mit} \quad M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ orthogonal} \quad \text{und} \quad t \in \mathbb{R}^2.$$

Damit $\varphi([AB]) = [CD_\lambda]$ erfüllt ist, muss gelten

i) $\varphi(A) = C$ und $\varphi(B) = D_\lambda$ **oder**

ii) $\varphi(A) = D_\lambda$ und $\varphi(B) = C$

Wir bestimmen nun für die beiden möglichen Werte von λ aus Teil a) in den beiden eben beschriebenen Fällen alle euklidischen Bewegungen, die den jeweiligen Anforderungen genügen.

Seien dafür

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0$ (Fall i):

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi(A) = C & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2b + t_1 \\ 2d + t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \varphi(B) = D_\lambda & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4b + t_1 \\ 4d + t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2b &=& 0 \\ 2d &=& -2 \\ t_1 &=& 1 \\ t_2 &=& 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& 0 \\ d &=& -1 \\ t_1 &=& 1 \\ t_2 &=& 4 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Da M auch orthogonal ist, gilt weiterhin $M^T = M^{-1}$, also insbesondere auch $M \cdot M^T = E_2$ und daher

$$\left\{\begin{matrix} a^2+b^2=c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{matrix}\right\} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad (a^2=1) \ \wedge \ c=0.$$

Somit sind in diesem Fall zwei Bewegungen möglich:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0$ (Fall ii):

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(A) = D_\lambda & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2b+t_1 \\ 2d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(B) = C & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4b+t_1 \\ 4d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2b = 0 \\ 2d = 2 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} b = 0 \\ d = 1 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = -2 \end{matrix}\right\} \qquad (\clubsuit)$$

Da M auch orthogonal ist, gilt weiterhin $M^T = M^{-1}$, also insbesondere auch $M \cdot M^T = E_2$ und daher

$$\left\{\begin{matrix} a^2+b^2=c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{matrix}\right\} \overset{(\clubsuit)}{\Leftrightarrow} \quad (a^2=1) \ \wedge \ c=0.$$

Somit sind in diesem Fall zwei Bewegungen möglich:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 4$ (Fall i):

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(A) = C & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2b+t_1 \\ 2d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \varphi(B) = D_\lambda & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4b+t_1 \\ 4d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2b = 0 \\ 2d = 2 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} b = 0 \\ d = 1 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (\spadesuit)$$

Da M auch orthogonal ist, gilt weiterhin $M^T = M^{-1}$, also insbesondere auch $M \cdot M^T = E_2$ und daher

$$\left\{\begin{matrix} a^2+b^2=c^2+d^2=1 \\ ac+bd=0 \end{matrix}\right\} \overset{(\spadesuit)}{\Leftrightarrow} \quad (a^2=1) \ \wedge \ c=0.$$

Somit sind in diesem Fall zwei Bewegungen möglich:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 4$ (Fall ii):

$$\left\{\begin{matrix} \varphi(A) = D_\lambda & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2b+t_1 \\ 2d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \varphi(B) = C & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4b+t_1 \\ 4d+t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2b = 0 \\ 2d = 2 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 6 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} b = 0 \\ d = -1 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 6 \end{matrix}\right\} \qquad (\blacklozenge)$$

Da M auch orthogonal ist, gilt weiterhin $M^T = M^{-1}$, also insbesondere auch $M \cdot M^T = E_2$ und daher

$$\left\{\begin{matrix} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{matrix}\right\} \quad \overset{(\blacklozenge)}{\Leftrightarrow} \quad (a^2 = 1) \ \wedge \ c = 0.$$

Somit sind in diesem Fall zwei Bewegungen möglich:

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Für die insgesamt acht unterschiedlichen Bewegungen lässt sich rechnerisch zeigen, dass jede von ihnen die Strecke $[AB]$ auf die Strecke $[CD_\lambda]$ abbildet. Wir können uns dies aber auch plausibel machen, indem wir überlegen, welche Art Bewegung vorliegt und wie diese die Ebene $\mathbb{R}^2$ verändert.

H24 – T2 – A2

Der euklidische Raum $\mathbb{R}^3$ sei mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene mit der Gleichung $2x + y + 2z = 0$.

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von E sowie $E^\perp$.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix M der Spiegelung

$$S_E \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x}$$

an der Ebene E.

c) Bestimmen Sie $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, so dass $S_F \colon \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x} + \mathbf{t}$ die Spiegelung an der Ebene F mit der Gleichung $2x + y + 2z = 4$ ist.

Lösungsvorschlag

a) Es ergibt sich E als Lösungsmenge der Gleichung $2x + y + 2z = 0$, das heißt

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x + y + 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x - 2z \\ z \end{pmatrix} \middle| x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

wobei wir die beiden Richtungsvektoren von E mit u_1 bzw. u_2 bezeichnen. Nutze das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine orthonormale Basis von E zu bestimmen.

- $b_1 \coloneqq \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $w_2 \coloneqq u_2 - \langle u_2, b_1 \rangle b_1 = u_2 - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

  $b_2 \coloneqq \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Damit ist $\{b_1, b_2\}$ nach Konstruktion eine orthonormale Basis von E.

Es ist $\dim E^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim E = 3 - 2 = 1$. Wir benötigen also genau einen Vektor, um $E^\perp$ zu erzeugen. Diesen können wir über den Normalenvektor von E aus der Koordinatenform von E ablesen. Es gilt

$$E^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{das heißt} \quad b_3 \coloneqq \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist eine orthonormale Basis von } E^\perp.$$

b) Da nach der Definition des orthogonalen Komplements $\mathbb{R}^3 = E \oplus E^\perp$ gilt, ist $\mathcal{B} \coloneqq \{b_1, b_2, b_3\}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$. Bezüglich $\mathcal{B}$ hat S_E die darstellende Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

denn $E = \langle b_1, b_2 \rangle = \operatorname{Eig}(S_E, 1)$ und $E^\perp = \langle b_3 \rangle = \operatorname{Eig}(S_E, -1)$.

Für die Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$ und mit der orthogonalen Basistauschmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2\sqrt{5} \\ -6 & -2 & \sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

sowie

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{T} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \\ 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

folgt dann

$$M = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot D \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -4 & -2 & 5 \\ -2\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 5 & -20 & -40 \\ -20 & 35 & -20 \\ -40 & -20 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Offensichtlich ist $(2,0,0)^T \in F$, das heißt, $(2,0,0)^T$ ist ein Fixpunkt von S_F. Somit folgt:

$$M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

F24 – T1 – A5

Es bezeichne g die Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$, welche die Punkte $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ enthält. Weiter sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Geraden g.

a) Bestimmen Sie zu jedem Punkt $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ seinen Lotfußpunkt auf der Geraden g und die Koordinaten des Bildpunktes $F(x)$. Bestimmen Sie zudem eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$F(x) = Ax \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2.$$

b) Bestimmen Sie eine darstellende Matrix von F bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Lösungsvorschlag

Die Gerade g ist gegeben durch $g: \quad \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

a) Das Lot zu g durch x ist gegeben durch $l_x: \quad x + \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Damit gilt für den Lotfußpunkt f_x von x auf der geraden g: $\quad f_x \in g \cap l_x$.

Bestimme also $g \cap l_x$ durch Gleichsetzen. Seien dafür $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} = x + \mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Löse das lineare Gleichungssystem durch Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ -2 & -1 & x_2 \end{array}\right) \overset{Z_2+2Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x_1 \\ 0 & -5 & x_2 + 2x_1 \end{array}\right)$$

Somit folgt:

$$\mu = -\frac{1}{5}(x_2 + 2x_1), \quad \lambda = x_1 + 2\mu = \frac{1}{5}(x_1 - 2x_2).$$

Folglich gilt für den Lotfußpunkt: $f_x = \frac{1}{5}(x_1 - 2x_2)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Weiter ist $F(x) = x + 2\overrightarrow{xf_x} = x + 2(f_x - x) = 2f_x - x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3x_1 - 4x_2\\-4x_1 + 3x_2\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & -4\\-4 & 3\end{pmatrix}}_{=:A} \cdot x.$

b) A ist bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Bestimme also die Basistauschmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ und $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$.

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix}1 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}, \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot A \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -10\\-10 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Da die Basisvektoren von $\mathcal{B}$ die Richtung der Spiegelachse bzw. die Richtung der Lote und damit Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 bzw. -1 sind, war die ermittelte Diagonalmatrix als Ergebnis erwartbar.

F24 – T3 – A4

Der $\mathbb{R}^3$ sei versehen mit dem Standardskalarprodukt. Weiter seien

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3 von $\mathbb{R}^3$, so dass $U = \operatorname{span}\{b_1, b_2\}$.

b) Es sei $P_U \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonale Projektion auf U. Untersuchen Sie, ob die Gleichung

$$P_U(x) - x = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

eine Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag

a) Ergänze v_1 und v_2 durch $v_3 \coloneqq e_1$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$ und wende Gram-Schmidt-Verfahren auf sie an (offensichtlich bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis, denn $\operatorname{rang}(v_1, v_2, v_3) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$):

- $b_1 \coloneqq \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1$
- $w_2 \coloneqq v_2 - \langle v_2, b_1\rangle b_1 = v_2 - \frac{1}{3}\langle v_2, v_1\rangle v_1 = v_2 - \frac{2}{3}v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

  $b_2 \coloneqq \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$
- $w_3 \coloneqq v_3 - \langle v_3, b_1\rangle b_1 - \langle v_3, b_2\rangle b_2 = e_1 - \frac{1}{3}v_1 - \frac{1}{6}v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

  $b_3 \coloneqq \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

Aufgrund des Algorithmus folg $\langle b_1, b_2\rangle \subseteq \langle v_1, v_2\rangle$ und wegen $\dim\langle b_1, b_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = 2$ insbesondere $\langle b_1, b_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle = U$.

b) Nach den Eigenschaften der orthogonalen Projektion müsste für eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ der Gleichung gelten:

$$\langle e_1, u\rangle = \langle P_u(x) - x, u\rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U.$$

Da etwa $\langle e_1, v_1\rangle = 1 \neq 0$ kann die Gleichung keine Lösung besitzen.

H23 – T2 – A4

a) Sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} + \mathbf{t}$$

die Spiegelung an der Geraden $x + 2y = 5$. Bestimmen Sie die 2×2-Matrix A und den Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$.

b) Sei

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto B\mathbf{v} + \mathbf{s}$$

die Drehung um den Punkt $(-2, 1)^T$ mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie die 2×2-Matrix B und den Vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$.

c) Bestimmen Sie den Typ der Bewegung

$$g \circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto C\mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Bestimmen Sie weiterhin die Matrix C, den Vektor $\mathbf{u}$ sowie die bestimmenden Merkmale der Bewegung (z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.).

Lösungsvorschlag

a) Die Spiegelgerade sp ist gegeben durch sp: $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

Damit ist $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert 1. Weiter gilt $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, das heißt, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert -1.

$\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ ist somit eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bezüglich derer A die Form $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ besitzt. Mit der Basistauschmatrix $T := \begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ folgt dann

$$A = T \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot T^{-1} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & -2\end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & -3\end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in sp$ folgt

$$f\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + t = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow t = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

und damit insbesondere $f(v) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\-4 & -3\end{pmatrix}v + \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^2$.

Alternativ: 3 Punkte und deren Bilder bestimmen (ideal: 2 davon auf Spiegelachse, da diese Fixpunkte von f sind) und dann entsprechendes lineares Gleichungssystem lösen, um A und t zu bestimmen.

b) Sei $D := \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ die Drehmatrix zur Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Dann gilt für $v \in \mathbb{R}^2$ und $p := \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$:

$$Bv + s = g(v) = D \cdot (v - p) + p = D \cdot v + (p - D \cdot p)$$

also

$$B = D \quad \text{und} \quad s = p - Dp = p - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir nutzen hier, dass wir eine Drehung um einen beliebigen Punkt p beschreiben können, indem wir zunächst um $-p$ verschieben, anschließend um den Ursprung drehen und letztlich die erste Verschiebung rückgängig machen, das heißt um $+p$ verschieben.

c) $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = B \cdot (Av + t) + s = D \cdot A \cdot v + (Dt + s)$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{=:C} v + \underbrace{\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=:u}.$$

Es ist $\det(C) = -1$, das heißt, $g \circ f$ ist eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung.

Bestimme nun Fix $(g \circ f)$:

$$(g \circ f)(v) = v \;\Leftrightarrow\; Cv + u = v \;\Leftrightarrow\; (C - E_2)\, v = -u \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir sehen direkt, dass das lineare Gleichungssystem nicht lösbar, daher Fix $(g \circ f) = \emptyset$ und somit ist $g \circ f$ eine Gleitspiegelung.

Es ist $\operatorname{Eig}(C, 1)$ die Richtung der Spiegelachse.

$$\operatorname{Eig}(C, 1) = \ker(C - E_2) = \ker\left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Zerlege nun u in einen Anteil $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ senkrecht zur Spiegelachse und den „Schubanteil“ $\mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur Spiegelachse ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der „Spiegelungsanteil“ von $g \circ f$ gegeben durch $v \mapsto Cv - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Suche nun einen Fixpunkt dieser Abbildung, um einen Aufpunkt der Spiegelachse zu erhalten:

$$Cv - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = v \;\Leftrightarrow\; (C - E_2)\, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise löst $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ diese Gleichung.

Insgesamt folgt also, dass $g \circ f$ eine Gleitspiegelung mit Spiegelachse $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und Schubvektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist.

F23 – T1 – A3

Gegeben sei der $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Es sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ beschreibt und bestimmen Sie die zugehörige Drehachse sowie den Kosinus des Drehwinkels.

Lösungsvorschlag

Wir überprüfen zunächst, das A orthogonal ist und $\det(A) = 1$ gilt. Wenn wir danach noch argumentieren, dass für $f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ die Fixpunktmenge nicht leer ist, haben wir begründet, dass A eine Drehung beschreibt.

- **Zeige**: A ist orthogonal $\Leftrightarrow A^{-1} = A^T$:

  $$A^{-1} = \tfrac{1}{1}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}^T = A^T.$$

  Das heißt, A ist orthogonal.

- **Zeige**: $\det(A) = 1$.

  Die Determinante wurde bereits im ersten Punkt für A^{-1} bestimmt. Es gilt $\det(A) = 1$.

Da insbesondere $x = 0$ die Fixpunktgleichung

$$f_A(x) = x \;\Leftrightarrow\; Ax = x \;\Leftrightarrow\; (A - E_3)x = 0$$

löst, gilt $\operatorname{Fix}(f_A) \neq \emptyset$. Somit beschreibt A gemäß der Tabelle im Input entweder die Identität oder eine Drehung. Zwar ist auch die Identität eine Drehung, da jedoch offensichtlich $A \neq E_3$ gilt, ist A nicht die Identität und folglich eine „echte“ Drehung.

Wir wissen, dass A als Matrix eine Drehung um eine Ursprungsgerade beschreibt. Bestimme also die Drehachse über $\operatorname{Eig}(A, 1)$:

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \ker(A - E_3) = \ker \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2+Z_1 \\ Z_3+\sqrt{6}Z_1}}{=} \ker \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Da $e_3 \perp \operatorname{Eig}(A, 1)$, ergibt sich der Drehwinkel α von A durch $\alpha := \sphericalangle(e_3, Ae_3)$. Somit erhalten wir:

$$\cos\alpha = \frac{\langle e_3, Ae_3 \rangle}{\|e_3\| \cdot \|Ae_3\|} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

F23 – T3 – A4

Es sei

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass F eine euklidische Bewegung ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte p mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Für jedes } x \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt: } \|x - p\| = \|F(x) - p\|.$$

Hierbei sei mit $\|\cdot\|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Lösungsvorschlag

$$F(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} =: Ax + t$$

a) F ist eine euklidische Bewegung $\Leftrightarrow$ A orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$

Zeige: $A^{-1} = A^T$

$$A^{-1} = \tfrac{1}{1} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^T$$

b) Vermutung: Wegen $\det(A) = 1$ und $A \neq E_n$ ist F eine Drehung. Die Gleichung sollte also nur für $p \mathrel{\widehat{=}}$ Drehzentrum gelten.

Sei $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|x - p\| = \|F(x) - p\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \|e_2 - p\| = \|F(e_2) - p\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|e_2 - p\| = \|p\| \\ \Leftrightarrow p_1^2 + (1 - p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2p_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|e_1 - p\| = \|F(e_1) - p\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|e_1 - p\| = \left\|\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - p\right\| \\ \Leftrightarrow (1 - p_1)^2 + p_2^2 = \left(\sqrt{2} - p_1\right)^2 + p_2^2 \quad &\Leftrightarrow \quad -2p_1 + 1 = -2\sqrt{2}p_1 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad p_1 = \frac{1}{2(\sqrt{2} - 1)} \end{aligned}$$

Prüfe nun, ob der einzig mögliche Kandidat $p = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ die Gleichung löst. Zeige dafür $F(p) = p$:

$$F(p) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+1}{2} - \frac{1}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}+2}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+2\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2}{4} \end{pmatrix} = p$$

Da F Bewegung und $F(p) = p$ folgt somit für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\|x - p\| = \|F(x) - F(p)\| = \|F(x) - p\|.$$

H22 – T1 – A4

Gegeben sei die Spiegelung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Gerade $y + x = 3$ und die Drehung $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel $\frac{3\pi}{2}$ um den Punkt $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

a) Sei
$$\varphi := g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$
die Verknüpfung. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor $\mathbf{t}$.

b) Bestimmen Sie den Typ der Bewegung φ und ihre bestimmenden Merkmale (z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.).

Lösungsvorschlag

a) Suche $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $f(v) = A_1 v + t_1$ und $g(v) = A_2 v + t_2$.

Bestimme zunächst f:
Die Gerade $y + x = 3$ ist gegeben durch $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Definiere die Basis $\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

Dann hat wegen $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ die Matrix A_1 bezüglich $\mathcal{B}$ die Form $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

Für A_1, das heißt für die darstellende Matrix von f bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ folgt dann mit der Basistauschmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ ein Punkt auf der Spiegelachse ist, gilt

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; t_1 = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} - A_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhalten wir für die Spiegelung also

$$f(v) = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix} v + \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Bestimme nun g:
Definiere die Drehmatrix $D := \begin{pmatrix}\cos\frac{3\pi}{2} & -\sin\frac{3\pi}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2}\end{pmatrix}$ mit Drehwinkel $\frac{3\pi}{2}$ um den Koordinatenursprung. Dann gilt für mit dem Drehzentrum $p := \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ von g:

$$g(v) = D(v - p) + p = Dv + p - Dp$$

Damit also

$$A_2 = D \quad \text{und} \quad t_2 = p - Dp = p - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt somit

$$g(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit $(g \circ f)(v) = g(f(v)) = A_2(A_1 v + t_1) + t_2 = A_2 A_1 v + (A_2 t_1 + t_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} v + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=:t}$.

b) Da $\det(A) = -1$ ist $g \circ f$ eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung. Bestimme nun $\mathrm{Fix}(\varphi)$ zur weiteren Charakterisierung.

$$v \in \mathrm{Fix}(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \varphi(v) = v \;\Leftrightarrow\; Av + t = v \;\Leftrightarrow\; (A - E_2)v = -t \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Damit folgt $\mathrm{Fix}(\varphi) = \emptyset$ und folglich ist φ eine Gleitspiegelung.

Bestimme $\mathrm{Eig}(A, 1)$, das heißt die Richtung der Spiegelachse:

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - E_2) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle e_2 \rangle$$

Damit ist das orthogonale Komplement $\langle e_2 \rangle^\perp = \langle e_1 \rangle = \mathrm{Eig}(A, -1)$ die Richtung von Geraden senkrecht zur Spiegelachse.

Da $t = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = (-4) \cdot e_2 + 0 \cdot e_1$ ist $-4e_2$ der Schubvektor von φ, also der Anteil der Translation, der parallel zur Spiegelachse erfolgt.

Die Spiegelgerade ergibt sich aus der Fixpunktmenge der Spiegelung $v \overset{h}{\mapsto} Av + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v \in \mathrm{Fix}(h) \;\Leftrightarrow\; Av = v \;\Leftrightarrow\; v \in \mathrm{Eig}(A, 1) = \langle e_2 \rangle$$

Damit folgt für die Spiegelachse s von φ:

$$s: \quad \mathrm{Fix}(\varphi) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

H22 – T3 – A2

Gegeben sei der affine Unterraum E von $\mathbb{R}^3$ in Parameterform

$$E := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

und die affine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}y+2z+1\\x+y+z-3\\2x+y-5\end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $f(E)$ in Parameterform.

b) Schreiben Sie E als Lösungsmenge einer linearen Gleichung.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(E)$.

Lösungsvorschlag

a) Aus der gegebenen Abbildung lesen wir direkt ab, dass

$$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + t \quad \text{für} \quad A = \begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Sei nun $w \in E$ beliebig, dann gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$w = p + \lambda v_1 + \mu v_2 \quad \text{wobei} \quad p := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } v_2 := \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f(w) = A \cdot (p + \lambda v_1 + \mu v_2) + t = (A \cdot p + t) + A \cdot \lambda v_1 + A \cdot \mu v_2 = f(p) + \lambda A v_1 + \mu A v_2.$$

Mit dieser Überlegung folgt unmittelbar, dass

$$f(E) = f(p) + \langle Av_1, Av_2 \rangle = \begin{pmatrix}3\\-1\\-3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix} \right\rangle.$$

b) Wir suchen $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ derart, dass $E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x + a_2 y + a_3 z = b\}$. Aufgrund der Struktur von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme wissen wir, dass v_1 und v_2 Lösungen des homogenen Anteils sind und p eine spezielle Lösung des gesamten linearen Gleichungssystems. Somit erhalten wir für die vier Variablen das folgende homogene lineare Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} a_1 + & a_2 + & a_3 & = 0\\ a_1 + 2a_2 + & & 3a_3 & = 0\\ a_1 & + & a_3 - b & = 0 \end{array}\right\} \underset{Z_3 - Z_1}{\overset{Z_2 - Z_1}{\Leftrightarrow}} \left\{\begin{array}{rrrr} a_1 + a_2 + & & a_3 & = 0\\ & a_2 + & 2a_3 & = 0\\ & - a_2 & - b & = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = -a_2 - a_3 = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}b\\ a_3 = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2}b\\ a_2 = -b \end{array}\right\}$$

Für $b = 2$ erhalten wir also, dass

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 2\}.$$

c) Es sei $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in f^{-1}(E) \quad &\Leftrightarrow \quad f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y + 2z + 1 \\ x + y + z - 3 \\ 2x + y - 5 \end{pmatrix} \in E \\
&\Leftrightarrow \quad (y + 2z + 1) - 2(x + y + z - 3) + (2x + y - 5) = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2 = 2
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass $f^{-1}(E) = \mathbb{R}^3$.

H22 – T3 – A4

In $\mathbb{R}^2$ seien die Gerade $g\colon 2x + y = 3$ und der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Spiegelung an g werde mit σ_g bezeichnet. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne τ_v die Translation mit v.

a) Zerlegen Sie u in einen Vektor s senkrecht zu g und einen weiteren Vektor p parallel zu g:

$$u = s + p.$$

b) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_s \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

c) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_p \circ \tau_s \circ \sigma_g = \tau_u \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

Lösungsvorschlag

a) $g\colon \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, das heißt, $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ steht senkrecht auf die Richtung von g.

Suche also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da $\mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ sind λ und μ eindeutig bestimmt.

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem $\left\{ \begin{array}{rl} 2 = & \lambda + 2\mu \\ -1 = & -2\lambda + \mu \end{array} \right\} \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5},\ \mu = \frac{3}{5}$

Damit sind $s = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $p = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Es gibt $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal mit $\det(A) = -1$ und $t \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $\sigma_g(v) = Av + t$. Weiter gilt:

- $\operatorname{Fix}(\sigma_g) = g$
- $\operatorname{Eig}(A, 1) = \langle p \rangle$ und $\operatorname{Eig}(A, -1) = \langle s \rangle$
- $(\tau_s \circ \sigma_g)(v) = \tau_s(\sigma_g(v)) = Av + (t + s)$

Als Verkettung von Bewegungen ist auch $\tau_s \circ \sigma_g$ eine Bewegung. Da $\det(A) = -1$ handelt es sich entweder um eine Spiegelung oder um eine Gleitspiegelung. Wir bestimmen also

$$\operatorname{Fix}(\tau_s \circ \sigma_g) = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \middle| (\tau_s \circ \sigma_g)(v) = v \right\},$$

um den Typ der Bewegung zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \tau_s \circ \sigma_g(v) = v \quad &\Leftrightarrow \quad Av + t + s = v \quad &&\Leftrightarrow \quad Av + \frac{1}{2}s + t = v - \frac{1}{2}s \\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad Av - A\left(\frac{1}{2}s\right) + t = v - \frac{1}{2}s \quad &&\Leftrightarrow \quad A\left(v - \frac{1}{2}s\right) + t = v - \frac{1}{2}s \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad v - \frac{1}{2}s \in \operatorname{Fix}(\sigma_g) \qquad\qquad \Leftrightarrow \quad v \in \frac{1}{2}s + \operatorname{Fix}(\sigma_g)$$

(∗) $\frac{1}{2}s \in \operatorname{Eig}(A, -1)$

Wegen $\operatorname{Fix}(\sigma_g) = g$ ist $\tau_s \circ \sigma_g$ eine Spiegelung mit Spiegelgerade $\frac{1}{2}s + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

Alternativ: A und t für σ_g konkret bestimmen und $\tau_s \circ \sigma_g$ wie in Herbst 2022, Thema 1, Aufgabe 4 untersuchen.

c) Da $\langle p \rangle \parallel g$ ist $\tau_p \circ \tau_s \circ \sigma_g$ per Definition eine Gleitspiegelung mit der Spiegelgerade von $\tau_s \circ \sigma_g$ und dem Schubvektor p.

Die zusätzliche Translation τ_p erfolgt also parallel zur Spiegelachse von $\tau_s \circ \sigma_g$, was genau der Definition einer Schubspiegelung entspricht.

F22 – T1 – A4

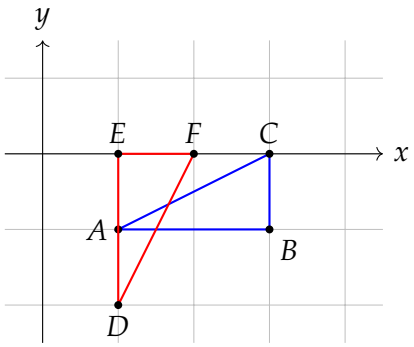
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\triangle_1 \subset \mathbb{R}^2$ sei das Dreieck mit den Ecken A, B und C und $\triangle_2 \subset \mathbb{R}^2$ sei das Dreieck mit den Ecken D, E und F. Bestimmen Sie alle euklidischen Bewegungen $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche $\triangle_1$ auf $\triangle_2$ abbilden. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich bei der euklidischen Bewegung um eine Translation, eine Drehung, eine Geradenspiegelung oder eine Gleitspiegelung handelt.

Lösungsvorschlag

Wir beginnen damit, die Dreiecke in ein Koordinatensystem zu zeichnen, um eine Idee dafür zu bekommen, welche Eckpunkte aufeinander abgebildet werden können.



Wie wir anhand der Zeichnung sehen, muss für eine Bewegung g mit $g(\triangle_1) = \triangle_2$ gelten, dass

$$g(A) = D, \quad g(B) = E \quad \text{und} \quad g(C) = F. \tag{$*$}$$

Im Staatsexamen könnten wir dies neben einer Zeichnung noch mit den Abständen der Punkte voneinander begründen. Da Bewegungen Abstände erhalten, müssen die Abstände der Bildpunkte voneinander mit denen der Ausgangspunkte übereinstimmen.

Da es sich bei g um eine Bewegung handelt, gibt es eine orthogonale Matrix

$$M = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit $g(v) = Mv + t$ für $v \in \mathbb{R}^2$. Ausgehend von den Gleichungen aus ($*$) können wir nun M und t bestimmen. Wir erhalten die folgenden linearen Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} \text{I.} & w - x + t_1 & = & 1 \\ \text{II.} & y - z + t_2 & = & -2 \\ \text{III.} & 3w - x + t_1 & = & 1 \\ \text{IV.} & 3y - z + t_2 & = & 0 \\ \text{V.} & 3w + t_1 & = & 2 \\ \text{VI.} & 3y + t_2 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcr} \text{I.} & w - x + t_1 & = & 1 \\ \text{II.} & y - z + t_2 & = & -2 \\ \text{III.} - \text{I.} & 2w & = & 0 \\ \text{IV.} - \text{II.} & 2y & = & 2 \\ \text{V.} & 3w + t_1 & = & 2 \\ \text{VI.} & 3y + t_2 & = & 0 \end{array}\right\} \overset{(\clubsuit)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ z & = & 0 \\ w & = & 0 \\ y & = & 1 \\ t_1 & = & 2 \\ t_2 & = & -3 \end{array}\right\}$$

Im Schritt ($\clubsuit$) haben wir ausgehend von der dritten und vierten Gleichung sukzessive bekannte Werte eingesetzt, um Lösungen zu bestimmen.

Damit ist die einzige Bewegung g, für die $g(\triangle_1) = \triangle_2$ gilt, die Bewegung

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die Matrix orthogonal, das heißt, es handelt sich bei der ermittelten affinen Abbildung g tatsächlich um eine Bewegung.

Um den Typ der Bewegung zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Determinante der Matrix. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1,$$

das heißt, es handelt sich bei g entweder um eine Geradenspiegelung oder eine Gleitspiegelung.

Um zu entscheiden, welcher der beiden Typen vorliegt, bestimmen wir die Fixpunktmenge $\mathrm{Fix}\,(g)$ von g. Es gilt:

$$v \in \mathrm{Fix}\,(g) \quad \Leftrightarrow \quad g(v) = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da dieses inhomogene lineare Gleichungssystem offensichtlich von keinem $v \in \mathbb{R}^2$ gelöst wird, folgt $\mathrm{Fix}\,(g) = \emptyset$. Demnach handelt es sich bei g um eine Gleitspiegelung.

F22 – T2 – A4

a) Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) < 0$ ist reell diagonalisierbar.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, welche sowohl 1 als auch -1 als Eigenwerte hat. Wir bezeichnen mit V_j den Eigenraum von B zum Eigenwert $j \in \{-1, 1\}$. Zeigen Sie, dass V_1 und V_{-1} bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ aufeinander senkrecht stehen.

Lösungsvorschlag

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $\det(A) = ad - bc < 0$.

Für das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A gilt dann:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_2 = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+b)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + \det(A).$$

Die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ sind gegeben durch

$$\lambda_{1/2} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4 \cdot \det(A)}}{2}.$$

Da $(-4) \cdot \det(A) > 0$, folgt für die Diskriminante:

$$(a+b)^2 - 4 \cdot \det(A) > 0.$$

Somit hat $\chi_A(\lambda)$ zwei verschiedene reelle Nullstellen und folglich A zwei verschiedene Eigenwerte.

Für beide Eigenwerte stimmen die algebraische $\alpha(\lambda_i)$ und die geometrische Vielfachheit $\beta(\lambda_i)$ wegen

$$1 \leq \beta(\lambda_i) \leq \alpha(\lambda_i) \leq 1 \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2\}$$

überein. Da zudem $\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ in Linearfaktoren zerfällt, ist A (reell) diagonalisierbar.

b) Seien $v \in \mathrm{Eig}(B, 1), w \in \mathrm{Eig}(B, -1)$ beliebig.

$$\begin{aligned}\langle v, w\rangle = \langle Bv, -Bw\rangle &\overset{(*_1)}{=} -\langle Bv, Bw\rangle = -(Bv)^T Bw = -v^T B^T Bw \overset{(*_2)}{=} -v^T B^{-1} Bw = -v^T E_n w \\ &= -v^T w = -\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

($*_1$) Linearität in der zweiten Komponente

($*_2$) B orthogonal, das heißt $B^{-1} = B^T$

Insgesamt folgt

$$2\langle v, w\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0$$

Da dies für alle $v \in \mathrm{Eig}(B, 1)$ und $w \in \mathrm{Eig}(B, -1)$ gilt, ergibt sich unmittelbar $V_1 \perp V_{-1}$.

F22 – T3 – A5

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Jede orthogonale Projektion ist eine orthogonale Abbildung.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung, so gilt $m = n$.

c) Die Komposition zweier Spiegelungen an Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist eine Drehung.

Lösungsvorschlag

a) Falsch.

Betrachte zum Beispiel in $\mathbb{R}^2$ die orthogonale Projektion P_F auf die Gerade $F = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \langle e_1 \rangle$. Dann gilt:

$$P_F \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_F \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Damit folgt aber

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \neq \left\langle P_F \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, P_F \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 2.$$

Die Abbildung P_F ist also nicht orthogonal, denn sonst müsste $0 = 2$ gelten.

b) Falsch.

Betrachte das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar ($x = 1$), es gilt jedoch $m = 2 > 1 = n$.

c) Falsch.

Betrachte die Spiegelung f an der Ebene $\{x_3 = 0\}$ und die Spiegelung g an der Ebene $\{x_3 = 1\}$. Dann gilt

$$f(x) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} x \quad \text{und} \quad g(x) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$(g \circ f)(x) = x + \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

und insbesondere

$$\operatorname{Fix}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}^3 | (g \circ f)(x) = x\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} = \emptyset.$$

Da Drehungen Fixpunkte besitzen ist also $g \circ f$ keine Drehung. Stattdessen ist $g \circ f$ wegen der parallelen, nicht-identischen Spiegelebenen eine Translation.

H21 – T1 – A4

Berechnen Sie die Abbildungsvorschrift der Spiegelung an der durch die Gleichung $x + 2y + 2z = \frac{9}{2}$ gegebenen Ebene in $\mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag

Bezeichne die Spiegelung mit f und sei E die durch $x + 2y + 2z = \frac{9}{2}$ definierte Ebene.

Da f eine Bewegung ist, gibt es eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $t \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax + t$.

Wir bemerken zunächst, dass für die Richtung U von E gilt:

$$U = \{x + 2y + 2z = 0\}.$$

Und damit

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aus der Koordinatenform lesen wir direkt ab: $U^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Da f eine Spieglung an E ist, folgt unmittelbar $\mathrm{Eig}(A, 1) = U$ und $\mathrm{Eig}(A, -1) = U^\perp$. Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ hat A also die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit den Basistauschmatrizen $T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \left(T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1}$, wobei $\mathcal{E}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ bezeichne, ergibt sich dann:

$$A = T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{9} T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist $p := \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)^T \in E$, das heißt

$$f(p) = p \quad \Leftrightarrow \quad Ap + t = p \quad \Leftrightarrow \quad t = p - Ap = p - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt somit: $f(x) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

H21 – T2 – A3

a) Sei E der durch die Gleichung $2x - y + 2z = 0$ gegebene Unterraum des $\mathbb{R}^3$ und sei

$$P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

die orthogonale Projektion auf E. Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Sei F der durch die Gleichung $2x - y + 2z = 3$ gegebene affine Unterraum $\mathbb{R}^3$ und

$$P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

die orthogonale Projektion auf F. Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

Lösungsvorschlag

a) Es ist $E : 2x - y + 2z = 0$. Bestimme die Parameterform von E:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x + 2z \\ z \end{pmatrix} : \quad x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad E^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Abgelesen wurde das orthogonale Komplement aus den Koeffizienten in Koordinatenform → vgl. Hesse Normalform einer Ebene in $\mathbb{R}^3$

Nach den Eigenschaften der orthogonalen Projektion gilt

$$E = \operatorname{Eig}(A, 1) \quad \text{und} \quad E^\perp = \ker(A) = \operatorname{Eig}(A, 0).$$

Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ besitzt A also die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$ erhalten wir mit den Basistauschmatrizen

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$$

für die Matrix A die folgende Form:

$$A = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{9} \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Es ist $F\colon \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, das heißt $F \parallel E$.

Dann entspricht t dem Vektor in $E^\perp$, für den gilt: $\tau_t(E) = F$, wobei τ_t Translation um Vektor t.

Um den senkrecht zu E verlaufenden Anteils der Verschiebung von E nach F zu erhalten, stellen wir den Aufpunkt von F als eindeutig bestimmte Linearkombination aus den Richtungsvektoren von E und $E^\perp$ dar. Suche also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Löse das lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1+2Z_2 \\ Z_3+2Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{Z_1-Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right) \overset{Z_3-4Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

Damit folgt $\beta = \gamma = \frac{1}{3}$ und $\alpha = \frac{1}{3}$.

Folglich ist $t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Damit gilt dann $P_F(x) = P_E(x) + t = Ax + t$ und somit $B = A$.

Anstatt einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ nur auf E zu projizieren, verschieben wir das Bild $P_E(x)$ noch um den Vektor t, damit wir ein Bild $P_E(x) + t \in F$ erhalten. Weil $F \parallel E$ ist die Projektion auf F weiterhin orthogonal, wenn wir $B = A$ nutzen.

F21 – T1 – A3

Bestimmen Sie alle Bewegungen β des $\mathbb{R}^2$, die

$$\beta\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$$

erfüllen.

Lösungsvorschlag

Eine Bewegung $\beta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist von der Form $\beta(x) = Ax + t$ mit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal und $t \in \mathbb{R}^2$.

Definiere $A := \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ und $t := \begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}$. Da A orthogonal ist, gilt $A^{-1} = A^T$ und insbesondere $|\det(A)| = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = A^T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d \text{ und } c = -b, & \text{für } \det(A) = 1\\ a = -d \text{ und } c = b, & \text{für } \det(A) = -1\end{cases}$$

Aus der Angabe folgt wegen $\beta(x) = Ax + t$ außerdem:

$$\beta\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & 4a + 5b + t_1 = -3\\ \text{II.} & 4c + 5b + t_2 = 7\end{array}\right\} \quad \text{und} \quad \beta\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \text{III.} & 5a + 4b + t_1 = -2\\ \text{IV.} & 5c + 4b + t_2 = 8\end{array}\right\}$$

1. Fall: $\det(A) = 1$

Mit $a = d$ und $c = -b$ erhalten wir aus den obigen vier Gleichungen das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & 4a + 5b + t_1 = -3\\ \text{II.} & -4b + 5a + t_2 = 7\\ \text{III.} & 5a + 4b + t_1 = -2\\ \text{IV.} & -5b + 4a + t_2 = 8\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \text{I.} + \text{II.} & 9a + b + t_1 + t_2 = 4\\ \text{II.} + \text{III.} & 10a + t_1 + t_2 = 5\\ \text{III.} & 5a + 4b + t_1 = -2\\ \text{I.} + \text{IV.} & 8a + t_1 + t_2 = 5\end{array}\right\}$$

Aus der zweiten und vierten Gleichung erhalten wir direkt $a = 0$ und damit auch $t_1 + t_2 = 5$. Nutzen wir diese Informationen, liefert uns die erste Gleichung $b = -1$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir dann noch $t_1 = 2$ und folglich $t_2 = 3$.

Somit ist

$$\beta(x) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

für diesen Fall die einzige Bewegung, die den Voraussetzungen genügt.

2. Fall: $\det(A) = -1$

Mit $a = -d$ und $c = b$ erhalten wir aus den obigen vier Gleichungen das folgende Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & 4a + 5b + t_1 = -3\\ \text{II.} & 4b - 5a + t_2 = 7\\ \text{III.} & 5a + 4b + t_1 = -2\\ \text{IV.} & 5b - 4a + t_2 = 8\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \text{I.} + \text{II.} & -a + 9b + t_1 + t_2 = 4\\ \text{II.} + \text{III.} & 8b + t_1 + t_2 = 5\\ \text{III.} & 5a + 4b + t_1 = -2\\ \text{I.} + \text{IV.} & 10b + t_1 + t_2 = 5\end{array}\right\}$$

Aus der zweiten und vierten Gleichung erhalten wir direkt $b = 0$ und damit auch $t_1 + t_2 = 5$. Nutzen wir diese Informationen, liefert uns die erste Gleichung $a = 1$. Aus der dritten Gleichung erhalten wir dann noch $t_1 = -7$ und folglich $t_2 = 12$.

Somit ist

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

für diesen Fall die einzige Bewegung, die den Voraussetzungen genügt.

Da für die Bewegung β stets $|\det(A)| = 1$ gelten muss, sind die beiden oben behandelten Fälle die einzigen, die auftreten können. Somit wurden alle möglichen Bewegungen gefunden, die den Voraussetzungen aus der Angabe genügen.

F21 – T3 – A1

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem euklidischen Standardskalarprodukt. Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibe die orthogonale Projektion auf den Untervektorraum

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Sei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie $U^\perp$.

b) Bestimmen Sie die Matrix A.

c) Bestimmen Sie $v \in \mathbb{R}^3$, sodass $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + U^\perp$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = v$ ist.

Lösungsvorschlag

a) $U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u\rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.

Nach der Dimensionsformel gilt wegen $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$: $\quad \dim U^\perp = 3 - \dim U = 1$.

$U^\perp$ ist wegen der Bilinearität von $\langle\ ,\ \rangle$ die Lösungsmenge $\mathbb{L}(B, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Bx = 0$ mit $B := \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. Es folgt also unmittelbar:

$$U^\perp = \mathbb{L}(B, 0) = \left\{\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\-x_2\end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

b) Gemäß den Eigenschaften der orthogonalen Projektion gilt

$$\operatorname{Eig}(A, 1) = U \quad \text{und} \quad \operatorname{Eig}(A, 0) = \ker(A) = U^\perp.$$

Bezüglich der Basis

$$\mathcal{B} := \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ besitzt die orthogonale Projektion also die darstellende Matrix

$$M := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Es ist dann A die darstellende Matrix bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$. Mit der Basistauschmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\2 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

folgt also:

$$A = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^T$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Nach b) gilt $U^\perp = \ker(A) = \mathbb{L}(A, 0)$. Somit ist für gesuchtes $v \in \mathbb{R}^3$ der Vektor $(0, 0, 3)^T$ als Aufpunkt der Lösungsmenge eine Lösung von $Ax = v$, das heißt

$$v = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

F21 – T3 – A2

Es bezeichne $R_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die orthogonale Matrix, welche die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Drehwinkel φ (im positiven Drehsinn) beschreibt. Sei $E_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie: Für $\varphi \in]0, 2\pi[$ ist die Matrix $E_2 - R_\varphi$ invertierbar.

b) Seien $\varphi \in]0, 2\pi[$ und $t \in \mathbb{R}^2$ und sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto R_\varphi \cdot x + t.$$

Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^2$ hat.
Was ist die geometrische Bedeutung dieses Fixpunktes p?

c) Sei $R = R_{\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der Drehung mit Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$. Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto R \cdot x + t,$$

wobei $t \in \mathbb{R}^2$, und sei

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto R \cdot x.$$

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Drehzentrum von $g \circ h$ ist.

Lösungsvorschlag

a) $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Achtung: Negatives Vorzeichen an anderer Position wegen **positivem** Drehsinn.

Es gilt: $E_2 - R_\varphi$ invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(E_2 - R_\varphi) \neq 0$. Bestimme also die Determinante der Matrix:

$$\det(E_2 - R_\varphi) = (1 - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = 1 - 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} = 2(1 - \cos\varphi) \neq 0$$

für $\varphi \in]0, 2\pi[$, denn $1 - \cos\varphi > 0$ für $\varphi \in]0, 2\pi[$. Folglich ist die Matrix $E_2 - R_\varphi$ für $\varphi \in]0, 2\pi[$ invertierbar.

b) $x \in \mathbb{R}^2$ Fixpunkt von $f \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow R_\varphi x + t = x \Leftrightarrow (E_2 - R_\varphi)\, x = t \overset{a)}{\Leftrightarrow} x = (E_2 - R_\varphi)^{-1} t$

Somit gibt es genau einen Fixpunkt für die Drehung f, der das Zentrum der Drehung darstellt.

c) $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und damit $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = R(Rx) + t = R^2 x + t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + t.$

Wir bestimmen nun noch $t \in \mathbb{R}^2$ derart, dass $g \circ h$ die gewünschte Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{aligned} z := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Drehzentrum von } g \circ h \quad &\Leftrightarrow \quad z \text{ Fixpunkt von } g \circ h \\ &\Leftrightarrow \quad (g \circ h)(z) = z \\ &\Leftrightarrow \quad t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

H20 – T1 – A4

Gegeben sei der Untervektorraum

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

b) Bestimmen Sie eine Drehspiegelung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit Drehwinkel $\frac{\pi}{6}$ und Spiegelungsebene U.

Lösungsvorschlag

a) Definiere $v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $v_2 := \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$. Nutze nun das Gram-Schmidt-Verfahren für $\{v_1, v_2\}$:

- $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{3}v_1$
- $w_2 := v_2 - \langle v_2, b_1\rangle\, b_1 = v_2 - \frac{1}{9}\cdot\langle v_1, v_2\rangle\, v_1 = v_2 - 2\cdot v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

  $b_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{3}w_2$

Damit ist $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von U bezüglich des Standardskalarprodukts.

b) Ergänze $\{b_1, b_2\}$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Wir nutzen dabei wieder das Gram-Schmidt-Verfahren für die Basis $\{b_1, b_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$.

- $w_3 := e_3 - \langle e_3, b_1\rangle\, b_1 - \langle e_3, b_2\rangle\, b_2 = e_3 - \frac{2}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{2}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

  $b_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

Sei $\mathcal{B} := \{b_1, b_2, b_3\}$, dann besitzt die gesuchte Drehspiegelung bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ die darstellende Matrix

$$M := \begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} & 0\\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Definiere nun die Basistauschmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

mit $\mathcal{E}$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

Da $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis ist, ist $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ orthogonal, das heißt $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{T}$.

Definiere weiter

$$
\begin{aligned}
D &:= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{T} \\
&= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{T} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & \sqrt{3} - \frac{1}{2} & \sqrt{3} + 1 \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 - \sqrt{3} \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 3 & 2\sqrt{3} + \frac{9}{2} & 1 - \sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 & \frac{5\sqrt{3}}{2} - 4 & \sqrt{3} + 5 \\ -6 & \sqrt{3} - 1 & 4\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Damit ist die gesuchte Drehspiegelung gegeben durch $v \mapsto D \cdot v$.

Wie wir sehen benötigt es einigen Rechenaufwand, um die Matrix D konkret zu bestimmen. Folglich könnte es im Examen sinnvoll sein, die Matrix lediglich in der Form $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{T}$ anzugeben und erst am Ende der Prüfung, bei ausreichend Zeit, die konkrete Berechnung vorzunehmen.

F20 – T1 – A1

Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ so, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto A \cdot x + t$$

die Gleitspiegelung mit Gleitspiegelachse

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und Verschiebevektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist.

Lösungsvorschlag

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax + b$ mit $b \in \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der gegebenen Spiegelachse.

Aus den Angaben zu f in der Aufgabe können wir die folgenden Eigenschaften ableiten:

- $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(A, 1)$
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Fixpunkt von g $(*)$
- Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Eig}(A, -1)$

Bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ hat A folglich die Form

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Basistauschmatrizen

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^2$ folgt dann:

$$A = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot M \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wegen $(*)$ folgt weiterhin:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + b \;\Leftrightarrow\; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt gilt dann für die Gleitspiegelung:

$$f(x) = g(x) + v = Ax + b + v = Ax + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{das heißt} \quad t = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F20 – T2 – A4

Es seien $G_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 = 3\}$ und $G_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Euklidische Bewegung, welche die Bedingungen $f(G_1) = G_2$ und $f(G_2) = G_1$ erfüllt.

a) Begründen Sie, dass f einen Fixpunkt hat.

b) Untersuchen Sie, ob f eine Drehung, eine Translation, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Lösungsvorschlag

a) **Idee**: Schnittpunkt von G_1 und G_2 ist Fixpunkt von f.

Da die Geraden unterschiedliche Steigung besitzen, gibt es genau einen Schnittpunkt von G_1 und G_2. Dabei handelt es sich um $s := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nach Voraussetzung gibt es wegen $f(G_1) = G_2$ und $f(G_2) = G_1$ Punkte $p_i \in G_i$, $i = 1, 2$ mit $f(p_i) = s$. Für diese gilt dann:

$$\|p_1 - p_2\| \overset{f \text{ Bewegung}}{=} \|f(p_1) - f(p_2)\| = \|s - s\| = 0.$$

Also folgt

$$p_1 = p_2 \in G_1 \cap G_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = s = p_2 \quad \Rightarrow \quad f(s) = s$$

und damit s Fixpunkt von f.

b) Da $G_1 \neq G_2$ kann f nicht die Identität sein. Weil f mindestens einen Fixpunkt besitzt, kann f keine (echte) Translation und keine (echte) Gleitspiegelung sein, die jeweils keine Fixpunkte besitzen.

Idee: f ist eine Spiegelung an einer Winkelhalbierenden von G_1 und G_2

Zeige nun noch, dass f keine Drehung ist.

Angenommen f wäre eine Drehung, dann muss wegen $f(f(G_1)) = G_1$ gelten, dass f einen Drehwinkel von $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ besitzt, das heißt, wegen $f(G_1) = G_2$ muss der Winkel zwischen G_1 und G_2 ein Vielfaches von 90° betragen.

Es sind $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Richtungen von G_1 bzw. G_2.

Damit folgt für $\alpha := \sphericalangle(v_1, v_2)$:

$$\cos\alpha = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \text{ denn dann wäre } \cos\alpha \in \{0, \pm 1\}$$

Folglich ist f auch keine Drehung.

Wie oben bemerkt kann f jedoch eine Spiegelung an einer der beiden Winkelhalbierenden von G_1 und G_2 sein. Diese sind als Spiegelungen Bewegungen und zudem gilt $f(f(E)) = E$ für jede Menge $E \subseteq \mathbb{R}^2$, also insbesondere G_1 und G_2. Weiter gilt $f(G_1) = G_2$ und $f(G_2) = G_1$.

Beide Winkelhalbierenden sind eindimensionale Teilmengen von

$$W := \left\{w \in \mathbb{R}^2 | d(w, G_1) = d(w, G_2)\right\}.$$

F20 – T3 – A4

Für Punkte $p, q \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $\overline{pq}$ die (ungerichtete) Strecke von p nach q.

a) Geben Sie vier verschiedene Bewegungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und φ_4 der Ebene $\mathbb{R}^2$ an, welche die Strecke $\overline{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$ auf die Strecke $\overline{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}}$ abbilden.

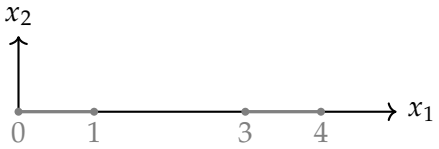
b) Bestimmen Sie $\varphi_i \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ für $i = 1, 2, 3, 4$.

c) Geben Sie (mit Begründung) für jede der Bewegungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und φ_4 an, um welchen Typ von Bewegung es sich handelt. Als Typen stehen zur Verfügung:

- Translation
- Drehung
- Achsenspiegelung
- Gleitspiegelung (auch Schubspiegelung genannt)

Lösungsvorschlag

Wir skizzieren uns zunächst die gegebene Situation im Koordinatensystem:



a) Wir überlegen uns für die unterschiedlichen Bewegungstypen im $\mathbb{R}^2$ je eine Bewegung, die den Anforderungen der Aufgabenstellung genügt. Wir erhalten so:

$\varphi_1(x) = x + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ Translation

$\varphi_2(x) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ Spiegelung an der Geraden $x_1 = 2$

$\varphi_3(x) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ Schubspiegelung an $x_2 = 0$ mit Schubvektor $\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

$\varphi_4(x) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ Drehung um π um $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

b) Anhand der oben angegebenen Funktionsterme der jeweiligen Bewegung ermitteln wir das Bild des Punktes $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$:

i	1	2	3	4
$\varphi_i \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$

c) Eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$ hat die Form $x \mapsto Ax + t$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal und $t \in \mathbb{R}^2$. Abhängig von $\det(A)$ und der Menge der Fixpunkte kann eine Aussage über die Bewegung getroffen werden.

Fall φ_1:

Es ist $A = E_n$, das heißt $\det(A) = 1$. Weiterhin gilt $\text{Fix}(\varphi_1) = \left\{x + \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = x | x \in \mathbb{R}^2\right\} = \emptyset$.

$\Rightarrow$ φ_1 ist eine Translation.

Fall φ_2:

Es ist $\det(A) = -1$. Weiterhin folgt für die Menge der Fixpunkte

$$\varphi_2(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Fix}(\varphi_2) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \langle e_2 \rangle .$$

$\Rightarrow$ φ_2 ist eine Spiegelung an $\text{Fix}(\varphi_2)$.

Fall φ_3:

Es ist $\det(A) = -1$. Weiterhin folgt für die Menge der Fixpunkte

$$\varphi_3(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & -2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Fix}(\varphi_3) = \emptyset.$$

$\Rightarrow$ φ_3 ist eine Schubspiegelung.

Fall φ_4:

Es ist $\det(A) = 1$. Weiterhin folgt für die Menge der Fixpunkte

$$\varphi_4(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Fix}(\varphi_4) = \left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\} .$$

$\Rightarrow$ φ_4 ist eine Drehung um das Drehzentrum $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

H19 – T1 – A4

Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit

$$\mathbf{u}' := f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}' := f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für $\mathbf{w}' := f(\mathbf{w})$.

b) Bestimmen Sie für jede der oben genannten Möglichkeiten den Typ der Bewegung f und die zugehörigen Eigenschaften (je nach Fall Drehzentrum, Drehwinkel, Translationsvektor, Spiegelachse oder Schubvektor).

Lösungsvorschlag

a) Da f eine Bewegung gibt es $A := \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal und $t = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = Ax + t$

Es ist A orthogonal, das heißt $A^{-1} = A^T$ und insbesondere $|\det(A)| = 1$. Somit folgt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix} = A^T \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = d \text{ und } c = -b, & \text{für } \det(A) = 1\\ a = -d \text{ und } c = b, & \text{für } \det(A) = -1\end{cases}$$

1. Fall: $\det(A) = 1$

Wegen $f(u) = u'$ und $a = d$ sowie $c = -b$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & a + b + t_1 = -2\\ \text{II.} & a - b + t_2 = 0\end{array}\right\}$$

Wegen $f(v) = v'$ und $a = d$ sowie $c = -b$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{III.} & b + t_1 = -2\\ \text{IV.} & a + t_2 = 1\end{array}\right\}$$

Mit I−III und IV−II ergibt sich $a = 0$ bzw. $b = 1$ und damit $t_1 = -3$ und $t_2 = 1$.

Damit folgt unmittelbar

$$w' = \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\det(A) = -1$ Wegen $f(u) = u'$: und $a = -d$ sowie $c = b$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{I.} & a + b + t_1 = -2\\ \text{II.} & b - a + t_2 = 0\end{array}\right\}$$

Wegen $f(v) = v'$: und $a = -d$ sowie $c = b$ erhalten wir:

$$\left\{\begin{array}{rl} \text{III.} & b + t_1 = -2\\ \text{IV.} & -a + t_2 = 1\end{array}\right\}$$

Mit I–III und II–IV folgt $a = 0$ und $b = -1$ und damit $t_1 = -1$ und $t_2 = 1$.

Damit folgt unmittelbar

$$w' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) 1. Fall: $\det(A) = 1$

Da $A \neq E_2$ ist A eine Drehung. Der Drehwinkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ kann aus der Drehmatrix A abgelesen werden. Es gilt

$$\cos\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sin\alpha = -1,$$

das heißt wegen des Intervalls, in dem der Winkel enthalten sein muss, dass $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ gilt.

Das Drehzentrum entspricht dem Fixpunkt von f. Suche also $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Somit ist f eine Drehung um den Winkel $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(-1, 2)^T$.

2. Fall: $\det(A) = -1$

Um den Typ der Bewegung zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Fixpunkte von f. Sei also $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x$. Dann folgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das lineare Gleichungssystem ist offensichtlich nicht lösbar, das heißt, f besitzt keine Fixpunkte. Dementsprechend handelt es sich bei f um eine Gleitspiegelung.

Die Richtung der Spiegelachse von f ist durch den Eigenraum zum Eigenwert 1 gegeben. Daher entspricht die Richtung der Spiegelachse

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir zerlegen nun den Translationsvektor im Funktionsterm von f in den Anteil der in Richtung der Spiegelachse sowie orthogonal dazu verläuft. Offensichtlich gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das heißt, der Translationsvektor ist bereits der Schubvektor und $\mathrm{Eig}(A, 1)$ ist die Spiegelachse von f.

$(*)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}(A, -1)$ wurde orthogonal zur Spiegelachse gewählt.

H19 – T2 – A4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

wobei a, b, c reelle Zahlen seien.

a) Bestimmen Sie alle $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix A orthogonal ist.

b) Für welche $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt A eine Drehung? Geben Sie den Cosinus des Drehwinkels sowie die Drehachse an.

c) Für welche $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt A eine Spiegelung? An welchem Unterraum wird gespiegelt?

Lösungsvorschlag

a) Wir nutzen die zentrale Eigenschaft orthogonaler Matrizen, um $a, b, c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die A orthogonal ist.

$$\begin{aligned} A \text{ orthogonal} &\Leftrightarrow A^{-1} = A^T \Rightarrow A^T A = E_3 \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a + 2b - 2c &=& 0 \\ 2a + b + 2c &=& 0 \\ \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) &=& 1 \end{array} \right\} \overset{\text{I+II}}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + 3b &=& 0 \\ 2a + b + 2c &=& 0 \\ \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) &=& 1 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& -b \\ a &=& -2c \\ c^2 &=& 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} a = 2, & b = -2,\ c = -1 \\ & \textbf{oder} \\ a = -2, & b = 2,\ \ c = 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Da wir lediglich die Gleichung $A^T A = E_3$ für unsere Herleitung genutzt haben, überprüfen wir rechnerisch, dass für die beiden Zahlentripel

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

die Gleichungen

$$A^T A = E_3 = A A^T$$

erfüllt sind. Da dies der Fall ist, haben wir alle Werte für a, b, c gefunden, für die A orthogonal ist.

b) Es beschreibt A als orthogonale Matrix genau dann eine Drehung, wenn $\det(A) = 1$. Da

$$\det(A) = \frac{1}{9}(2a - 2b - c)$$

beschreibt A für $a = -2, b = -2, c = -1$ eine Drehung.

Bestimme den Drehwinkel als den Winkel zwischen dem Vektor e_1 und seinem Bild Ae_1. Für den Drehwinkel α mit $\alpha = \sphericalangle(e_1, Ae_1)$ gilt dann:

$$\cos\alpha = \frac{\langle e_1, Ae_1 \rangle}{\|e_1\| \cdot \|Ae_1\|} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}.$$

Die Drehachse ist durch den Eigenraum zum Eigenwert 1 von A gegeben, der gleichzeitig auch die Menge der Fixpunkte der Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ ist.

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \ker(A - E_3) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

c) Es beschreibt A als orthogonale Matrix genau dann eine Spiegelung, wenn $\det(A) = -1$. Somit wird für $a = -2, b = 2, c = 1$ von A eine Spiegelung beschrieben.

Der gesuchte Unterraum ist wieder durch $\operatorname{Eig}(A,1)$ bzw. die Fixpunktmenge von f gegeben.

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A,1) = \ker(A - E_3) = \ker \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}. \end{aligned}$$

F19 – T1 – A2

a) Geben Sie eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(A) = -1$ und $A \neq -E_3$ an, die *keine* Spiegelung an einem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ beschreibt, und begründen Sie, weshalb die von Ihnen angegebene Matrix die gewünschten Eigenschaften hat.

b) Beweisen Sie: Eine orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^3$ beschreibt, hat Determinante 1.

Lösungsvorschlag

a) Definiere

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten, dass diese Matrix allen Anforderungen genügt und begründen dies im Folgenden.

- Offensichtlich gilt $A \neq -E_3$.
- A ist orthogonal, da $A^T A = E_3 = AA^T$, das heißt $A^T = A^{-1}$.
- Es gilt $\det(A) = 1 \cdot (-1) = -1$.
- A beschreibt keine Spiegelung an einem zweidimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^3$, denn sonst müsste $\dim \mathrm{Eig}(A, 1) = 2$ gelten. Es ist jedoch

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ das heißt } \dim \mathrm{Eig}(A, 1) = 0$$

A beschreibt eine Drehspiegelung.

b) Bezeichne v_1 die Richtung der Spiegelgeraden. Wähle Basis v_2, v_3 für $\langle v_1 \rangle^\perp$, das heißt $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$.

Da A eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden $\langle v_1 \rangle$ beschreibt, gilt insbesondere

$$\mathrm{Eig}(A, 1) = \langle v_1 \rangle \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}(A, -1) = \langle v_1 \rangle^\perp = \langle v_2, v_3 \rangle.$$

Somit hat A bezüglich dieser Basis die Form

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

das heißt, A ist ähnlich zu M und somit $\det(A) = \det(M) = 1 \cdot (-1)^2 = 1$.

H18 – T2 – A1

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch Erklärung oder Widerlegung.

a) Ein reelles lineares Gleichungssystem kann genau zwei Lösungen haben.

b) Eine $n \times n$-Matrix mit reellen Koeffizienten hat n reelle Eigenwerte.

c) Sind A und B zwei invertierbare $n \times n$-Matrizen, so ist $A + B$ invertierbar.

d) Die Komposition zweier Spiegelungen der Ebene

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ist wieder eine Spiegelung der Ebene.

Lösungsvorschlag

a) Falsch.

Angenommen ein reelles lineares Gleichungssystem hat exakt die beiden (verschiedenen) Lösungen $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Da die Lösungsmenge eines reellen linearen Gleichungssystems ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, sind mit x und y mit $x \neq y$ auch $x + \lambda(y - x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Lösungen des reellen linearen Gleichungssystems. Da weiterhin $|\mathbb{R}| = \infty$ handelt es sich hierbei um unendlich viele (verschiedene) Elemente.

Anschaulich lautet die Begründung wie folgt: Wenn zwei Punkte x und y in $\mathbb{R}^n$ Lösungen eines reellen linearen Gleichungssystems sind, dann ist auch jeder Punkt auf der eindeutig durch x und y bestimmten Geraden in $\mathbb{R}^n$ eine Lösung des reellen linearen Gleichungssystems.

b) Falsch.

Betrachte dafür etwa $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \lambda^2 + 1$$

besitzt keine reellen Nullstellen und folglich hat A keine reellen Eigenwerte.

c) Falsch.

Betrachte etwa $A := E_n$ und $B := -E_n$. Offensichtlich sind die Matrizen invertierbar und es gilt $A^{-1} = A$ und $B^{-1} = B$. Jedoch ist $A + B = 0$ nicht invertierbar.

d) Falsch.

Betrachte etwa für $v \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v \quad \text{und} \quad \psi(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v$$

also die Spiegelung an der x-Achse bzw. an der y-Achse. Dann ist

$$(\psi \circ \varphi)(v) = \psi(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot v$$

eine Drehung um 180° um den Koordinatenursprung. Insbesondere ist $\psi \circ \varphi$ wegen

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

keine Spiegelung.

H18 – T3 – A4

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$a' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c' = \begin{pmatrix} -2 \\ s \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man zeige, dass es genau eine affine Abbildung $f_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_s(a) = a', \qquad f_s(b) = b' \qquad \text{und} \qquad f_s(c) = c'$$

gibt, und gebe ihre Abbildungsvorschrift explizit an.

b) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist f_s eine Bewegung? Man zeige, dass in diesem Fall f_s eine Drehung ist und bestimme das Drehzentrum und den Drehwinkel von f_s.

Lösungsvorschlag

a) Für f_s gibt es $A_s = \begin{pmatrix} m & n \\ k & l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $t_s = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $f_s(x) = Ax + t$.

Bestimme nun A_s und t_s:

$$\left\{\begin{array}{lll} f_s(a) = a': & \text{I.} & -n + t_1 = 0 \\ & \text{II.} & -l + t_2 = 1 \\ f_s(b) = b': & \text{III.} & 2m + t_1 = -1 \\ & \text{IV.} & 2k + t_2 = 3 \\ f_s(c) = c': & \text{V.} & 3m + n + t_1 = -2 \\ & \text{VI.} & 3k + l + t_2 = s \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \text{V} - 2 \cdot \text{III} + \text{I}: & -m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \\ \text{Damit folgt aus III:} & t_1 = -1 \\ \text{Damit folgt aus I:} & n = -1 \\ \text{VI} - 2 \cdot \text{IV} + \text{II}: & -k = s - 5 \Leftrightarrow k = 5 - s \\ \text{Damit folgt aus IV:} & t_2 = 2s - 7 \\ \text{Damit folgt aus II:} & l = 2s - 8 \end{array}\right\}$$

Also gilt

$$f_s(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 - s & 2s - 8 \end{pmatrix}}_{=:A_s} x + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2s - 7 \end{pmatrix}}_{=:t_s},$$

das heißt, dass f_s insbesondere eindeutig bestimmt ist.

b) Es gilt: f_s Bewegung $\Leftrightarrow$ A_s orthogonal $\Rightarrow$ $\pm 1 = \det(A) = 5 - s \Leftrightarrow s \in \{4, 6\}$

Überprüfe also für die beiden Fälle $s = 4$ und $s = 6$, ob es sich bei f_s um eine Bewegung handelt.

1. Fall: $s = 4$

$A_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, denn wie wir leicht nachrechnen gilt $A^T = A^{-1}$.

2. Fall: $s = 6$

$A_s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal, denn $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 17 \end{pmatrix} \neq E_2$, das heißt $A^T \neq A^{-1}$.

Also ist f_s nur für $s = 4$ eine Bewegung. Wir bestimmen für $s = 4$ die Fixpunkte von f_s.

Sei $x \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\begin{aligned} f_s(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad A_s x + t_s = x \quad &&\Leftrightarrow \quad (E_2 - A_s)\, x = t_s \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad &&\Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da $\det(A_s) = 1$ und f_s genau einen Fixpunkt besitzt, ist f_s für $s = 4$ eine Drehung. Das Drehzentrum entspricht dem Fixpunkt. Den Drehwinkel $\alpha \in [0, 2\pi[$ lesen wir aus A_s ab. Es gilt

$$A_s = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

das heißt wegen $\cos\alpha = 0$ und $\sin\alpha = 1$ folgt unmittelbar $\alpha = \frac{\pi}{2} \mathrel{\widehat{=}} 90°$.

F18 – T2 – A3

Betrachten Sie folgende lineare Unterräume des $\mathbb{R}^3$:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad F = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von $E \cap F$.

b) Ergänzen Sie diese Basis zu orthonormalen Basen von E bzw. F bzw. $\mathbb{R}^3$.

c) Es seien $P_E \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $P_F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Projektionen auf E bzw. F. Zeigen Sie $P_E \circ P_F = P_F \circ P_E$, und dass $P_F \circ P_E$ eine orthogonale Projektion P_G auf einen Unterraum G ist. Bestimmen Sie G.

Lösungsvorschlag

a) Offensichtlich ist $\dim E = \dim F = 2$ und $E \neq F$. Das heißt:

$$\dim E \cap F = \dim E + \dim F - \underbrace{\dim(E + F)}_{=\mathbb{R}^3} = 1$$

Außerdem gilt für die Gerade $g \colon \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\quad g \subseteq E$ und $g \subseteq F \quad \Rightarrow \quad g = E \cap F$.

Damit ist durch $\{b_1\}$ mit $b_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Orthonormalbasis von $g = E \cap F$ gegeben.

b) Definiere $w_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $\|b_2\| = 1$ und $b_1 \perp b_2$. Da $b_2 \in E$ und b_1, b_2 linear unabhängig, ist $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von E.

Definiere $w_3 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $b_3 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Offensichtlich gilt $\|b_3\| = 1$ und $b_1 \perp b_3$. Da $b_3 \in F$ und außerdem b_1, b_3 linear unabhängig, ist $\{b_1, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von F.

Alternative: Ergänze b_1 zu einer Basis von E bzw. F und nutze dann das Gram-Schmidt-Verfahren.

c) Es ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, denn offensichtlich sind b_1, b_2, b_3 linear unabhängig und zudem gilt $b_2 \perp b_3$.

Sei nun $v \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$.

Damit gilt:

$$\left.\begin{aligned} (P_E \circ P_F)(v) &= P_E(P_F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3)) \\ &= P_E(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2) = \lambda_1 b_1 \\ (P_F \circ P_E)(v) &= P_F(P_E(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3)) \\ &= P_F(\lambda_1 b_1 + \lambda_3 b_3) \overset{(*)}{=} \lambda_1 b_1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad P_E \circ P_F = P_F \circ P_E$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass es sich bei $P_F \circ P_E$ um eine orthogonale Projektion auf einen Unterraum G handelt. Da wir außerdem zunächst auf E und anschließend auf F projizieren, ist zudem die Vermutung, dass es sich bei G um $E \cap F$ handelt.

Zeige: $P_F \circ P_E$ ist orthogonale Projektion auf $G = \langle b_1 \rangle = E \cap F$

1. $(P_F \circ P_E)(v) \in E \cap F$: Klar nach (∗), da mit v wie oben $(P_F \circ P_E)(v) = \lambda_1 b_1 \in E \cap F = \langle b_1 \rangle$
2. $\langle (P_F \circ P_E)(v) - v, u \rangle \overset{!}{=} 0$ für alle $u \in E \cap F$.

   Sei $u \in E \cap F$, das heißt $\exists \mu \in \mathbb{R}$: $u = \mu b_1$. Weiter seien $v, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wie oben. Dann gilt:

$$\langle (P_F \circ P_E)(v) - v, u \rangle = \left\langle -\lambda_2 b_2 - \lambda_3 b_3, \mu b_1 \right\rangle = -\lambda_2 \mu \underbrace{\langle b_2, b_1 \rangle}_{=0} - \lambda_3 \mu \underbrace{\langle b_3, b_1 \rangle}_{=0} = 0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. Folglich ist $P_F \circ P_E$ eine orthogonale Projektion auf den Unterraum $G = \langle b_1 \rangle$.

F18 – T2 – A4

Bestimmen Sie eine invertierbare 2×2-Matrix A und einen Vektor $t \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \mathbf{x} \mapsto A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{t}$$

eine Gleitspiegelung ist, die die Gerade $y - 2x = 5$ als Spiegelachse und die den Punkt $(-3, 4)$ auf den Punkt $(2, 4)$ abbildet.

Lösungsvorschlag

Bestimme zunächst die Spiegelung h an der gegebenen Geraden k. Ihre Parameterform lautet

$$k\colon \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Suche nun $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $w \in \mathbb{R}^2$ mit $h(x) = Cx + w$.

Offensichtlich gilt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, das heißt, $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist das orthogonale Komplement zur Richtung $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ von k.

Da h eine Spiegelung an k ist, gilt

$$\operatorname{Eig}(C, 1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad \operatorname{Eig}(C, -1) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Bezüglich der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$ hat C folglich die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Mit der Basistauschmatrix

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

für die Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ folgt:

$$\begin{aligned} C &= T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \frac{1}{5} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Aufpunkt und Element von k ein Fixpunkt von h, das heißt

$$h\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - C \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die gesuchte Schubspiegelung gilt $g(x) = h(x) + s$ mit $s \in \mathbb{R}^2$ Schubvektor parallel zu k. Damit folgt $s = f(x) - h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ und somit insbesondere

$$s = f\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) - h\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - C \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt nun:

$$A = C \quad \text{und} \quad t = w + s = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

F18 – T3 – A3

a) Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

genau eine affine Abbildung $b\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ festgelegt ist und bestimmen Sie diese Abbildung b konkret.

b) Zeigen Sie, dass b eine Gleitspiegelung ist, und bestimmen Sie die Spiegelungsachse s, an welcher dabei zunächst gespiegelt wird, und den zu s parallelen Vektor v, um welchen anschließend verschoben wird.

Lösungsvorschlag

a) Die affine Abbildung b lässt sich für $x \in \mathbb{R}^2$ durch $b(x) = Ax + t$ mit

$$A = \begin{pmatrix}m & n\\k & l\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

darstellen. Um A und t zu bestimmen, lösen wir das inhomogene lineare Gleichungssystem, das durch die Gleichungen gegeben ist.

$$\begin{aligned}
b\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} &\quad\Leftrightarrow\quad t = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
b\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} &\quad\Leftrightarrow\quad A\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad 2\begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}m\\k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\
b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} &\quad\Leftrightarrow\quad A\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}n\\l+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}n\\l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist b eindeutig bestimmt und es gilt:

$$b(x) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

b) Es ist A orthogonal, denn $A^T = A$ und $A \cdot A = E_2$, das heißt $A = A^T = A^{-1}$. Somit ist b eine Bewegung. Weiter ist $\det(A) = -1$, daraus folgt, dass b entweder eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung ist.

Zeige also noch, dass b keinen Fixpunkt besitzt, damit folgt dann, dass b eine Gleitspiegelung ist.

$$\begin{aligned}
x \in \mathbb{R}^2 \text{ Fixpunkt von } b \quad &\Leftrightarrow \quad b(x) = Ax + t = x \quad \Leftrightarrow \quad (E_2 - A)\,x = t\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \overset{Z_2+Z_1}{\Leftrightarrow} \quad \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Anhand der zweiten Zeile des inhomogenen linearen Gleichungssystems sehen wir direkt, dass $\mathrm{Fix}\,(b) = \emptyset$ gilt. Folglich ist b eine Gleitspiegelung.

Die Richtung der Spiegelachse ist durch $\mathrm{Eig}\,(A, 1)$ gegeben. Wir bestimmen also den Eigenraum:

$$\mathrm{Eig}\,(A, 1) = \ker\,(A - E_2) = \ker\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich gilt:

$$\operatorname{Eig}(A,1)^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir zerlegen nun den Vektor t in den Anteil parallel bzw. senkrecht zur Spiegelachse. Suche dafür

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = t = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt $\lambda = 1$ und $\mu = 0$. Da also nach der Spiegelung an $\operatorname{Eig}(A,1)$ keine weitere Verschiebung senkrecht zur Richtung dieser Ursprungsgeraden stattfindet, folgt unmittelbar

$$s = \operatorname{Eig}(A,1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad v = t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8 Affine Geometrie

Im achten Kapitel fordern wir unser räumliches Vorstellungsvermögen heraus, wenn wir uns mit affiner Geometrie und der Frage nach der Lagebeziehung von geometrischen Objekten sowie deren Abstand beschäftigen. Bevor wir dies tun, wärmen wir uns jedoch etwas auf und überlegen uns, welche verschiedenen Möglichkeiten wir haben, geometrische Objekte – konkret Geraden und Ebenen – in einer formalen Form darzustellen. Dabei lernen wir die Parameterform, die Koordinatenform sowie die Hessesche Normalform kennen.

Im Kern gibt es zwei unterschiedliche Möglichkeiten, wie wir Geraden und Ebenen in einem affinen Raum A, meist dem $\mathbb{R}^3$ darstellen.

- Die *Parameterform* gibt den Aufpunkt $p \in A$ sowie die zugehörige Richtung $\mathcal{V}$ an. Für eine Gerade also $g : p + \mathbb{R}v$ und für eine Ebene $p + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$, wobei $p, v, w \in \mathbb{R}^3$.
- Die *Koordinatenform* nutzt Gleichungen, um Gerade und Ebene zu beschreiben. Im affinen Raum besitzt eine Gerade dann also die Form $g = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d \wedge ex + fy + gz = h\}$, wobei beide Gleichungen unabhängig sind. Zur Definition einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ genügt uns eine Gleichung, das heißt etwa $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$.

In manchen Aufgaben werden wir die beiden Formen ineinander überführen müssen bzw. ist eine der beiden Formen in gewissen Situationen möglicherweise günstiger. Das Überführen kann dabei stets nach einem festen Schema erfolgen:

- *Parameterform* → *Koordinatenform*: Wir müssen ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit A Matrix und b Vektor passender Größe suchen, für das gilt: $\mathbb{L}(A; 0) = \mathcal{V}$ und $p \in \mathbb{L}(A; b)$. Die Richtung der Gerade bzw. Ebene muss also die Lösungsmenge des homogenen Anteils des linearen Gleichungssystems sein und der Aufpunkt eine Lösung des gesamten Gleichungssystems. Dies hängt mit der Struktur der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zusammen, die wir bereits in einem früheren Kapitel wiederholt haben.
- *Koordinatenform* → *Parameterform*: Durch die Gleichungen, die die Mengen bestimmen, wird ein lineares Gleichungssystem gegeben. Dieses lösen wir und erhalten im Ergebnis dann die Parameterform der zugehörigen Gerade bzw. Ebene.

Für Ebenen betrachten wir noch eine weitere Darstellungsform, die uns später beim Berechnen des Abstands sehr helfen wird.

Definition 8.1 (Hessesche Normalform)

Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Normalenvektor $n = (n_1, n_2, n_3)^T$, das heißt, n steht auf allen Richtungsvektoren der Ebene E senkrecht. Dann besitzt E für ein $d \in \mathbb{R}$ eine Darstellung der Form

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle - d = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - d = 0\}.$$

Man nennt diese Form auch die *Normalform* der Ebene (Achtung: Gleichzeitig handelt es sich dabei auch um die Koordinatenform). Ist n normiert, das heißt $\|n\| = 1$, so spricht man von der *Hesseschen Normalform*.

An dieser Stelle ein kurzer Exkurs dazu, wie wir eine Ebene, die uns in Parameterform gegeben ist, in Hessesche Normalform überführen können. Dies wird sich später im Zusammenhang mit der Berechnung von Abständen als hilfreich erweisen.

Beispiel 8.2

Gegeben sei eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ der Form $E : p + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$. Um die Hessesche Normalform zu bestimmen, benötigen wir zunächst einen Normalenvektor n von E. Diesen ermitteln wir mithilfe des Kreuzprodukts aus den beiden Richtungsvektoren. Es gilt $n := v \times w$. Um die Hessesche Normalform zu erhalten, müssen wir diesen Vektor nun noch normieren, das heißt $n^* := \frac{n}{\|n\|}$.

Damit ist E für eine reelle Zahl d gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$\langle x, n^* \rangle - d = 0.$$

Da p ein Element der Ebene ist, löst p die obige Gleichung. Somit folgt:

$$\langle p, n^* \rangle - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = \langle p, n^* \rangle,$$

womit wir nun auch d und damit die Hessesche Normalform bestimmt haben.

Möchten wir nur die Normalform einer Ebene erhalten, genügt es, mit n zu arbeiten.

Außerdem sehen wir, dass wir aus der Koordinatenform einer Ebene über die Koeffizienten von x, y, z stets einen Normalenvektor der Ebene ablesen können. Auch dies kann in manchen Situationen hilfreich sein.

Oft interessiert uns, welchen Abstand geometrische Objekte im Raum zueinander besitzen. Hierfür benötigen wir noch eine Definition des Abstands.

Definition 8.3 (Abstand)

Es seien $M_1, M_2 \subseteq V$ zwei Teilmengen eines euklidischen Vektorraums V. Dann nennt man

$$d(M_1, M_2) := \min\{d(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\} = \min\{\|m_1 - m_2\| \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

den *Abstand* von M_1 und M_2.

Wir betrachten nun zunächst den Abstand von zwei Geraden zueinander und untersuchen im Nachgang, wie wir den Abstand von einer Gerade zu einer Ebene bestimmen können. Dabei beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^3$, da dieser affine Raum im Examen üblicherweise von Bedeutung ist.

Bevor wir den Abstand zweier Geraden ermitteln, kann es sinnvoll sein, sich über mögliche Lagebeziehungen von Geraden Gedanken zu machen. Abhängig davon kann der Lösungsweg zur Bestimmung des Abstandes nämlich variieren. Für zwei Geraden $g : p + \mathbb{R}v$ und $h : q + \mathbb{R}w$ unterscheiden wir die folgenden Lagebeziehungen:

- Die beiden Geraden können *identisch* sein, das heißt $g = h$.
- Die beiden Geraden können *echt parallel* sein, das heißt $g \cap h = \emptyset$ und v und w sind linear abhängig bzw. $\mathbb{R}v = \mathbb{R}w$.

- Die beiden Geraden können sich *schneiden*, das heißt $g \cap h \neq \emptyset$. Hierunter fällt insbesondere auch der Fall identischer Geraden.
- Die Geraden können *windschief* sein, das heißt, sie schneiden sich nicht und sind nicht parallel, besitzen also linear unabhängige Richtungsvektoren.

Die Frage nach dem Abstand ist für die Fälle sich schneidender Geraden schnell beantwortet. In diesen Fällen gilt $d(g, h) = 0$.

Somit genügt es, die Fälle paralleler oder windschiefer Geraden genauer zu betrachten. Entsprechende Ausführungen sparen wir uns an dieser Stelle und verweisen stattdessen auf die folgende Webseite, die uns für die Abstandsbestimmung von Punkt zu Gerade, von windschiefen Geraden sowie von Punkten zu Ebenen vielfältige Möglichkeiten erklärt und mit geeigneten Grafiken visualisiert.

Als Erklärungen dazu sei noch gegeben:

- Den Abstand zweier paralleler Geraden bestimmen wir, indem wir auf einer Geraden einen beliebigen Punkt, z. B. den Aufpunkt, wählen und den Abstand dieses Punkts zur zweiten Gerade bestimmen.
- Den Abstand einer zu einer Ebene parallelen Gerade bestimmen wir, indem wir einen beliebigen Punkt der Gerade, z. B. den Aufpunkt, wählen und dessen Abstand zur Ebene bestimmen.

Der erste Teil dieses Inputs schließt mit einem zentralen Satz, der uns sagt, wie wir mithilfe der Hesseschen Normalform den Abstand eines Punkts von einer Ebene bestimmen können.

Satz 8.4

Gegeben sei die Ebene $E : \langle x, n\rangle - d = 0$ im $\mathbb{R}^3$ in Hessescher Normalform sowie ein Punkt $p \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$d(p, E) = \left|\langle p, n\rangle - d\right|.$$

Selten wird im Examen nach dem kleinsten affinen Unterraum gefragt, der gegebene affine Unterräume beinhaltet. Diesen nennen wir auch Verbindungsraum.

Definition 8.5 (Verbindungsraum)

Es sei A ein affiner Raum und $B_1, B_2 \subseteq A$ affine Unterräume. Mit $B_1 \vee B_2$ bezeichnen wir den kleinsten affinen Unterraum von A, der $B_1 \cup B_2$ enthält.

Kleinster bedeutet dabei, dass jeder affine Unterraum von A, der $B_1 \cup B_2$ enthält, auch $B_1 \vee B_2$ enthält.

Das Konzept des Verbindungsraums für affine Räume verallgemeinert das Konzept des Spans bzw. der Summe von Vektorräumen. Dementsprechend überträgt sich auch die Dimensionsformel auf affine Unterräume und deren Verbindungsraum.

Satz 8.6 (Dimensionsformel)

Es seien B_1 und B_2 affine Unterräume in einem endlichen affinen Raum A, das heißt $\dim(A) < \infty$, mit zugehörigen Richtungen $\mathcal{V}_{B_1}$ bzw. $\mathcal{V}_{B_2}$. Dann gilt:

a) Für $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$:
$\dim(B_1 \vee B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(B_1 \cap B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(\mathcal{V}_{B_1} \cap \mathcal{V}_{B_2})$

b) Für $B_1 \cap B_2 = \emptyset$:
$\dim(B_1 \vee B_2) = \dim(B_1) + \dim(B_2) - \dim(\mathcal{V}_{B_1} \cap \mathcal{V}_{B_2}) + 1$

Diese beiden Formeln können uns eine Idee geben, wie wir den Verbindungsraum konstruieren können.

- Für $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$: Wir nutzen ein Element im Schnitt als Aufpunkt und erhalten die Richtung als die Summe der beiden Richtungen von B_1 und B_2. Das heißt für $p \in B_1 \cap B_2$ gilt:

$$B_1 \vee B_2 = p + (\mathcal{V}_{B_1} + \mathcal{V}_{B_2})$$

- Für $B_1 \cap B_2 = \emptyset$: Wir nutzen einen beliebigen Punkt in B_1 oder B_2 als Aufpunkt und wählen als Richtung die Summe der beiden Richtungen von B_1 und B_2, die wir aber noch um einen Verbindungsvektor zwischen einem Punkt in B_1 und einem Punkt in B_2, etwa den Verbindungsvektor zwischen beiden Aufpunkten, ergänzen. Das heißt mit den Aufpunkten p_1 und p_2 von B_1 und B_2 gilt:

$$B_1 \vee B_2 = p_1 + (\mathcal{V}_{B_1} + \mathcal{V}_{B_2} + \langle\overrightarrow{p_1 p_2}\rangle)$$

Betrachten wir als Beispiel den Verbindungsraum für zwei Geraden g und h. Wir unterscheiden wieder die vier Fälle, wie die Geraden zueinander liegen können.

Beispiel 8.7

- *Identisch*: In diesem Fall gilt offensichtlich $g \vee h = g = h$.
- *Schnitt*: Wir nehmen an, dass die Geraden einen Schnittpunkt q besitzen, aber unterschiedliche Richtungsvektoren, das heißt $g = q + \mathbb{R}v$ und $h = q + \mathbb{R}w$ mit $\mathbb{R}v \neq \mathbb{R}w$. Dann gilt:

$$g \vee h = q + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$$

- *Parallel*: Es bezeichne p nun den Aufpunkt von g und q den Aufpunkt von h. Dann können wir die parallelen Geraden darstellen als $g = p + \mathbb{R}v$ und $h = q + \mathbb{R}v$. Es gilt:

$$g \vee h = p + \mathbb{R}v + \mathbb{R}(\overrightarrow{pq})$$

- *Windschief*: Es seien $g = p + \mathbb{R}v$ und $h = q + \mathbb{R}w$ mit v, w linear unabhängig und $g \cap h = \emptyset$. Dann gilt:

$$g \vee h = p + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w + \mathbb{R}(\overrightarrow{pq})$$

H24 – T1 – A2

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie: Für zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$ gilt genau dann $\|a - b\| = 1$, wenn $\langle a, b\rangle = \frac{1}{2}$.

b) Bezeichne

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie nicht-negative reelle Zahlen x_1, x_2, y_2, x_3, y_3 und z_3 so, dass für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ \frac{1}{2} & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, dass die Vektoren v_1, v_2 und v_3 aus Teil b) zusammen mit dem Nullvektor $v_0 = 0$ die Eckpunkte eines gleichseitigen Tetraeders bilden.

Lösungsvorschlag

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $\|a\| = \|b\| = 1$. **Zeige**: $\|a - b\| = 1 \Leftrightarrow \langle a, b\rangle = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\|a - b\| = 1 &\overset{\|\cdot\| \geq 0}{\Longleftrightarrow} \|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b\rangle = 1 \\
&\Longleftrightarrow 1 = \langle a, a - b\rangle - \langle b, a - b\rangle = \langle a, a\rangle - \langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \\
&\quad = \|a\|^2 - 2\langle a, b\rangle + \|b\|^2 \\
&\quad = 1 - 2\langle a, b\rangle + 1 \\
&\Longleftrightarrow 1 = 2\langle a, b\rangle \\
&\Longleftrightarrow \langle a, b\rangle = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b) Aus den Bedingungen, die an die Werte des Skalarprodukts gestellt werden, können wir die folgenden Gleichungen ableiten:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && \langle v_1, v_1\rangle = 1 && \Longleftrightarrow && x_1^2 = 1 && \overset{x_1 \geq 0}{\Longleftrightarrow} && x_1 = 1 \\
&\text{II.} && \langle v_1, v_2\rangle = \tfrac{1}{2} && \Longleftrightarrow && x_1 x_2 = \tfrac{1}{2} && \overset{\text{I}}{\Longleftrightarrow} && x_2 = \tfrac{1}{2} \\
&\text{III.} && \langle v_1, v_3\rangle = \tfrac{1}{2} && \Longleftrightarrow && x_1 x_3 = \tfrac{1}{2} && \overset{\text{I}}{\Longleftrightarrow} && x_3 = \tfrac{1}{2} \\
&\text{IV.} && \langle v_2, v_2\rangle = 1 && \Longleftrightarrow && x_2^2 + y_2^2 = 1 && \overset{\text{II}}{\Longleftrightarrow} && y_2^2 = \tfrac{3}{4} && \overset{y_2 \geq 0}{\Longleftrightarrow} && y_2 = \sqrt{\tfrac{3}{4}} \\
&\text{V.} && \langle v_2, v_3\rangle = \tfrac{1}{2} && \Longleftrightarrow && x_2 x_3 + y_2 y_3 = \tfrac{1}{2} && \overset{\text{II, III}}{\underset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow}} && y_3 = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \tfrac{1}{2\sqrt{3}} \\
&\text{VI.} && \langle v_3, v_3\rangle = 1 && \Longleftrightarrow && x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1 && \overset{\text{III}}{\underset{\text{V}}{\Longleftrightarrow}} && z_3^2 = 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{2}{3} && \overset{z_3 \geq 0}{\Longleftrightarrow} && z_3 = \sqrt{\tfrac{2}{3}}
\end{aligned}$$

Damit erfüllen die Zahlen

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad y_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad z_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

die Bedingungen aus der Aufgabe.

c) Da $\operatorname{rang}(v_1, v_2, v_3) = 3$ sind die Punkte zusammen mit v_0 nicht komplanar, das heißt, sie liegen nicht in einer Ebene, und bilden folglich einen Tetraeder.

Nach der Konstruktion aus Teil b) gilt

$$\|v_i - v_0\| = \|v_i\| = 1 \quad \text{für} \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

und da $\langle v_i, v_j \rangle = \frac{1}{2}$ für $i \neq j$ mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gemäß unserer Konstruktion in Teil b) folgt mit der Erkenntnis aus Teil a) zudem

$$\|v_i - v_j\| = 1 \quad \text{für} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad \text{mit} \quad i \neq j.$$

Somit sind alle Seiten des Tetraeders gleich lang, das heißt, es liegt ein gleichseitiger Tetraeder vor.

H23 – T1 – A2

Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ und einer reellen Zahl μ bezeichne $E_\mu(v)$ die Ebene mit Normalenvektor v und $\mu v \in E_\mu(v)$. Gegeben seien außerdem die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Ebenen $E_\mu(a)$ und $E_\mu(b)$.

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade $g = E_\mu(a) \cap E_\mu(b)$.

c) Ermitteln Sie, für welche $\mu \in \mathbb{R}$ g einen Punkt x mit $\|x\| = 1$ enthält.

Lösungsvorschlag

Idee: Die Richtungsvektoren von $E_\mu(v)$ stehen senkrecht auf v und μv ist Aufpunkt der Ebene. Bezüglich dem Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ hat $E_\mu(v)$ also die Hessesche Normalform

$$E_\mu(v) : \langle x, v\rangle - \langle \mu v, v\rangle .$$

a) Mit obiger Idee folgt unmittelbar:

$$E_\mu(a): \quad \langle x, a\rangle = \langle \mu a, a\rangle \quad \Leftrightarrow \quad E_\mu(a) = \{x_1 = \mu\}$$

$$E_\mu(b): \quad \langle x, b\rangle = \langle \mu b, b\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 = \mu \underbrace{\langle b, b\rangle}_{=\|b\|^2=1} \quad \Leftrightarrow \quad E_\mu(b) = \left\{\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 = \mu\right\}$$

b) $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in g \quad \Leftrightarrow \quad x \in E_\mu(a) \quad \text{und} \quad x \in E_\mu(b)$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \mu \quad \text{und} \quad 3x_1 + 4x_2 = 5\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \mu \quad \text{und} \quad 3\mu + 4x_2 = 5\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \mu \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{2}\mu$$
$$\Leftrightarrow \quad g = \left\{\begin{pmatrix}\mu\\\frac{1}{2}\\\mu x_3\end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix}\mu\\\frac{1}{2}\mu\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

c) Nach der vorangegangenen Teilaufgabe gilt:

$$x \in g \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix}\mu\\\frac{1}{2}\mu\\\lambda\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Also: $\|x\| = \sqrt{\mu^2 + \frac{1}{4}\mu^2 + \lambda^2} = \sqrt{\frac{5}{4}\mu^2 + \lambda^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{4}\mu^2 + \lambda^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 = \frac{4}{5}\left(1 - \lambda^2\right)$

Da $\|x\| = 1$ gilt in jedem Fall $0 \le \lambda^2 \le 1$ und damit $0 \le 1 - \lambda^2 \le 1$. Folglich also auch $0 \le \mu^2 \le \frac{4}{5}$ und damit $0 \le |\mu| \le \sqrt{\frac{4}{5}}$ beziehungsweise äquivalent dazu $-\sqrt{\frac{4}{5}} \le \mu \le \sqrt{\frac{4}{5}}$.

Wir können also schlussfolgern, dass g für $-\sqrt{\frac{4}{5}} \le \mu \le \sqrt{\frac{4}{5}}$ einen Punkt x mit $\|x\| = 1$ enthält.

H23 – T1 – A4

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien in $\mathbb{R}^3$ die Gerade

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebene

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4z = 25\}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene E in Abhängigkeit von α.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(2, 3, \alpha)^T$ von der Ebene E in Abhängigkeit von α.

Lösungsvorschlag

a) Es sei $(x, y, z)^T \in h$, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda \\ 3 + \lambda \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Gilt zudem $(x, y, z)^T \in E$, dann gilt zusätzlich auch $3x + 4z = 25$.

Für $x \in h \cap E$ ergibt sich also:

$$3(2 - \lambda) + 4\alpha = 25 \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda = 4\alpha - 19 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}(4\alpha - 19).$$

Somit folgt:

$$x \in h \cap E \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(4\alpha - 19) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{3} - \frac{4}{3}\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha - \frac{10}{3} \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

b) Überführe E in Hessesche Normalform. Hierfür nutzen wir die in der Aufgabe gegebene Normalform und nehmen ausgehend vom zugehörigen Normalenvektor eine Normierung vor:

$$E\colon \left\langle x, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 25 \quad \Leftrightarrow \quad E\colon \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{25}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5} \cdot 25$$

$$\Leftrightarrow \quad E\colon \left\langle x, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle - 5 = 0 \text{ (Hessesche Normalform)}$$

Damit folgt unmittelbar:

$$d\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, E \right) = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle - 5 \right| = \left| \left(\frac{6}{5} + \frac{4}{5}\alpha \right) - 5 \right| = \left| \frac{4}{5}\alpha - \frac{19}{5} \right|.$$

H23 – T2 – A2

Gegeben seien die drei Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 2x - y = 2 \wedge y - z = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen

a) f und h

b) f und g

c) g und h

Lösungsvorschlag

a) Bestimme $f \cap h$ durch Einsetzen von $p_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in f$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ in die Gleichungen von h:

$$\left.\begin{array}{rrcl} \text{I:} & 2(1+\lambda) - 2\lambda & = & 2 \\ \text{II:} & 2\lambda - (-1+\lambda) & = & 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 2 = 2 \\ \lambda = 0 \end{array}\right\}$$

Damit folgt $f \cap h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \neq \emptyset$ und daher $d(f, h) = 0$.

b) Wir sehen unmittelbar, dass $f \parallel g$, denn

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das heißt, der Richtungsvektor von f und der Richtungsvektor von g sind linear abhängig. Zudem gilt $f \neq g$, denn $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in g$, aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin f$.

Bestimme nun eine Hilfsebene E derart, dass f und g senkrecht zu E sind.

Ansatz: Normalform mit Richtung von f als Normalenvektor und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E$:

$$E\colon \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \text{ das heißt } E = \{x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Damit folgt unmittelbar $E \cap g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Bestimme nun noch $f \cap E$ durch Einsetzen von p_λ aus Teilaufgabe a) in die Gleichung von E. Damit ergibt sich

$$(1+\lambda) + 2 \cdot (2\lambda) + (-1+\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$$

Somit folgt:

$$E \cap f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und daher} \quad d(f, g) = d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ -1-0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}.$$

c) Überführe zunächst h in Parameterform:

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}y \\ y \\ -1 + y \end{pmatrix} : \quad y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Suche nun ein gemeinsames Lot von g und h. Bestimme hierfür zunächst einen Vektor n, der senkrecht auf die Richtungen von g und h steht:

$$n := \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $q_\lambda := \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \in g$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Punkt auf g. Wir definieren die Hilfsgerade

$$l_{\lambda,\mu} := \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $r_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in h, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$. Wir suchen nun $\lambda, \mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ für die $l_{\lambda,\mu} = r_\varepsilon$ gilt.

→ Hierbei handelt es sich dann um einen Schnittpunkt von l_λ und h, weshalb l_λ für das gefundene λ dann das gesuchte gemeinsame Lot ist.

$$l_{\lambda,\mu} = r_\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} -2\lambda - 4\mu &= 1 + \varepsilon \\ -4\lambda + 2\mu &= 2\varepsilon \\ -2\lambda &= -1 + 2\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= -\tfrac{7}{10} \\ \mu &= \tfrac{1}{2} + \lambda \\ \varepsilon &= \tfrac{1}{2} - \lambda \end{aligned} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{7}{10} \\ \mu & = & -\frac{2}{10} \\ \varepsilon & = & \frac{12}{10} \end{array} \right\}$$

Der Abstand zwischen den windschiefen Geraden g und h entspricht dann gerade der Länge von $\mu \cdot n$, da es sich hierbei um den Vektor handelt, der die Schnittpunkte von g und h mit dem gemeinsamen Lot l_λ verbindet. Somit folgt

$$d(g,h) = \left\| \mu \cdot n \right\| = \frac{1}{5} \left\| n \right\| = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

H22 – T1 – A2

Sei

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ 0 & -s & -s^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad \mathbf{b_s} = \begin{pmatrix} 2s \\ s^2+1 \\ -s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Sei

$$f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A_s\mathbf{x}$$

die von A_s definierte lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s die Lösungsmenge $\mathbb{L}_s$ der Gleichung $f_s(\mathbf{x}) = \mathbf{b_s}$.

b) Betrachten Sie die Gerade

$$g = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die g und $\mathbb{L}_s$
i) sich schneiden, bzw. *ii)* windschief oder *iii)* parallel sind.

Lösungsvorschlag

a) Bestimme $\mathbb{L}_s$ mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & s & s^2 & 2s \\ s & 1 & s & s^2+1 \\ 0 & -s & -s^2 & -s \end{array}\right) \overset{Z_1+Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s \\ s & 1 & s & s^2+1 \\ 0 & -s & -s^2 & -s \end{array}\right) \overset{Z_2-s\cdot Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & -s & -s^2 & -s \end{array}\right)$$

$$\overset{Z_3+s\cdot Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 1 & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{L}_s = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ 1 - s\cdot x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt: $\mathbb{L}_s \parallel g \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad s = -1$

iii) Da $(-1,1,0)^T \in \mathbb{L}_{-1}$, aber offensichtlich $(-1,1,0)^T \notin g$ (vgl. erste Komponente) gilt:

$$\mathbb{L}_{-1} \neq g, \text{ also } \mathbb{L}_{-1} \text{ und } g \text{ echt parallel.}$$

Suche nun $s \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{L}_s \cap g \neq \emptyset$. Seien dafür $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s = -2 \\ -s\lambda + 1 = 1 + \mu \\ \lambda = \mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s = -2 \\ 1 + 2\mu = 1 + \mu \\ \lambda = \mu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s = -2 \\ \mu = 0 \\ \lambda = 0 \end{array}\right\}$$

Die Geraden $\mathbb{L}_s$ und g besitzen also nur für $s = -2$ einen Schnittpunkt. Damit können wir die noch verbleibenden Lagebeziehungen spezifizieren.

i) Es gilt $\mathbb{L}_s \cap g \neq \emptyset$ genau dann, wenn $s = -2$ und $\mathbb{L}_{-2} \cap g = \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

ii) Für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ gilt nach obigen Ausführungen $\mathbb{L}_s \cap g = \emptyset$ und $\mathbb{L}_s \nparallel g$, das heißt, $\mathbb{L}_s$ und g sind in diesen Fällen windschief.

F22 – T2 – A3

Seien A, B und C drei Punkte im $\mathbb{R}^2$, welche nicht auf einer Geraden liegen. Sei $\triangle$ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten A, B und C. Beweisen Sie mit Mitteln der analytischen Geometrie folgenden bekannten Satz:
Die drei Seitenhalbierenden von $\triangle$ schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich im Schwerpunkt $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ von $\triangle$.

Lösungsvorschlag

Es bezeichnen

$$M_A = \frac{1}{2}(B + C), \quad M_B = \frac{1}{2}(A + C) \quad \text{und} \quad M_C = \frac{1}{2}(A + B)$$

die Mittelpunkte der Seiten, die dem jeweils im Index genannten Punkt des Dreiecks $\triangle$ gegenüberliegen. Die Seitenhalbierenden sind dann gegeben durch

$$S_A \colon A + \langle M_A - A \rangle, \quad S_B \colon B + \langle M_B - B \rangle \quad \text{und} \quad S_C \colon C + \langle M_C - C \rangle.$$

Zeige: $S_A \cap S_B = \{S\}$

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned}
& A + \lambda(M_A - A) = B + \mu(M_B - B) \\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad & A + \frac{\lambda}{2}(B - A) + \frac{\lambda}{2}(C - A) = B + \frac{\mu}{2}(A - B) + \frac{\mu}{2}(C - B) \\
\Leftrightarrow \quad & (A - B) + \frac{\lambda}{2}(B - A) + \frac{\mu}{2}(B - A) + \frac{\lambda}{2}(C - A) + \frac{\mu}{2}(B - C) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & -(B - A) + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}\right)(B - A) + \frac{\lambda}{2}(C - A) + \frac{\mu}{2}(B - A + A - C) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\lambda + \mu}{2} - 1\right)(B - A) + \frac{\lambda}{2}(C - A) + \frac{\mu}{2}(B - A) - \frac{\mu}{2}(C - A) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2} - 1\right)(B - A) + \left(\frac{\lambda - \mu}{2}\right)(C - A) = 0
\end{aligned}$$

Da die drei Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, sind die Verbindungsvektoren $B - A$ und $C - A$ linear unabhängig. Daher folgt aus der obigen Gleichung:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{2} - 1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\lambda - \mu}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \mu = \frac{2}{3}$$

Somit ist $A + \frac{2}{3}(M_A - A) = \frac{1}{3}(A + B + C) = S$ der einzige Schnittpunkt von S_A und S_B.

Zeige noch: $S \in S_C$, denn dann folgt direkt $S_A \cap S_B \cap S_C = \{S\}$

Es gilt $C + \frac{2}{3}(M_C - C) = \frac{1}{3}(A + B + C) = S$ und daher gilt $S \in S_C$.

F22 – T3 – A3

Gegeben seien die beiden affinen Teilräume

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ und } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei A und B um windschiefe Geraden handelt.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen A und B.

c) Es bezeichne U die (eindeutige) Gerade durch den Ursprung, die zu A parallel ist. Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen U und B.

Lösungsvorschlag

a) Überführe zunächst B in Parameterform, indem das zugehörige lineare Gleichungssystem gelöst wird:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_2-2Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Z_1+Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} : \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (*)$$

Offensichtlich besitzen A und B unterschiedliche Richtung, da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind. Zeige nun, dass $A \cap B = \emptyset$. Seien dafür $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \mu \\ -1 + 2\lambda &= -\mu \\ -2 + 3\lambda &= \mu \end{aligned} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \mu \\ \lambda &= \tfrac{1}{3} \\ \lambda &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt keine Lösung. Es gilt daher $A \cap B = \emptyset$ und somit folgt, dass A und B windschief sind.

(*) Der Aufpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wurde hier nicht extra notiert.

b) Bestimme mithilfe des Kreuzprodukts einen Normalenvektor n, der senkrecht auf A und B steht .

$$n := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 3-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Definiere nun in Abhängigkeit von Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ das Lot l_λ auf B:

$$l_\lambda : \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot n.$$

Suche nun $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $l_\lambda \cap A \neq \emptyset$. Seien dafür $\mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} Z_2+Z_1 \\ \rightsquigarrow \\ Z_3-Z_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{Z_3+Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right) \overset{Z_2+7Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & -22 \\ 0 & -1 & -5 & -3 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \epsilon = \frac{11}{19} \\ \mu = 3 - 5\epsilon = \frac{2}{19} \\ \lambda = \epsilon - 5\mu = \frac{1}{19} \end{array}\right\}.$$

Nun gilt:

$$d(A,B) = \|\mu \cdot n\| = |\mu| \cdot \|n\| = \frac{2}{19} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2} = \frac{2}{19} \cdot \sqrt{38} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{19}}.$$

c) Es ist $U = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Für den in der Teilaufgabe beschriebenen Winkel α gilt dann:

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1 - 2 + 3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

H21 – T2 – A5

Gegeben seien die Geraden

$$f = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

und

$$g_s = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rcrcrcl} sx & - & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & sz & = & 1 \end{array} \right\},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ es eine Ebene $E_s \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die f und g_s enthält. Geben Sie in diesem Fällen jeweils eine Gleichung der Ebene E_s an.

Lösungsvorschlag

Es gibt solche Ebene genau dann, wenn f und g_s nicht windschief sind. Suche also $s \in \mathbb{R}$ mit $f \cap g_s \neq \emptyset$ oder $f \parallel g_s$.

Überführe zunächst g_s in Parameterform und löse dafür das zugehörige lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & s & 1 \end{array}\right) \overset{Z_2 - Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} s & -1 & 0 & 0 \\ 1-s & 0 & s & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad g_s = \begin{pmatrix}1\\s\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}s\\s^2\\s-1\end{pmatrix}$$

Dabei ist $\begin{pmatrix}1\\s\\1\end{pmatrix}$ die spezielle Lösung und $\begin{pmatrix}s\\s^2\\s-1\end{pmatrix}$ Lösung des homogenen Anteils.

Wir untersuchen zunächst, für welche $s \in \mathbb{R}$ die beiden Geraden f und g_s **parallel** sind.

$$\begin{aligned} f \parallel g_s \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\colon \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s\\s^2\\s-1\end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad s = \lambda = 1 \end{aligned}$$

Insbesondere sehen wir, dass $f = g_1$ gilt. Somit gibt es eine Ebene E_1, die f und g_1 enthält (es gibt sogar unendlich viele solcher Ebenen). Wir können E_1 etwa wie folgt wählen:

$$E_1\colon \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen nun noch, für welche $s \in \mathbb{R}$ die beiden Geraden f und g_s sich **schneiden**.

Seien also λ und μ reelle Zahlen mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\s\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}s\\s^2\\s-1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 1+\lambda &=& 1+\mu\cdot s \\ \lambda &=& s+\mu\cdot s^2 \\ 1 &=& 1+\mu(s-1) \end{array} \right\}$$

Aus der dritten Gleichung lesen wir unmittelbar ab, dass $f \cap g_s \neq \emptyset$ genau dann, wenn $\mu = 0$ oder $s = 1$ gilt. Den Fall $s = 1$ haben wir oben bereits behandelt, wir müssen im Folgenden also lediglich $\mu = 0$ genauer untersuchen.

Für $\mu = 0$ vereinfacht sich das obige Gleichungssystem wie folgt:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+\lambda &=& 1 \\ \lambda &=& s \\ 1 &=& 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0 \\ \lambda &=& s \\ 1 &=& 1 \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda &=& 0 \\ s &=& 0 \end{array}\right\}.$$

Wir sehen also, dass neben $s = 1$ nur für $s = 0$ die beiden Geraden einen nicht-leeren Schnitt besitzen.

Wir bestimmen nun noch den Schnitt von f und g_0. Für diesen gilt offensichtlich

$$f \cap g_s = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir nutzen diesen gemeinsamen Schnittpunkt sowie die beiden Richtungsvektoren von f bzw. g_0 um die gesuchte Ebene E_0 zu definieren. Es gilt dann:

$$E_0 \colon \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Geraden f und g_s sind für alle weiteren Werte von s, das heißt für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ windschief. Foglich existiert in all diesen Fällen keine Ebene E_s, die f und g_s beinhaltet. Denn sonst müsste $f \vee g_s \subseteq E_s$ gelten, also insbesondere

$$3 = \dim(f \vee g_s) \leq \dim(E_s) = 2.$$

Dies ist jedoch offensichtlich ein Widerspruch.

H21 – T3 – A3

Es sei

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $b \in \mathbb{R}^3$, welches E als Lösung hat.

b) Bestimmen Sie ein windschiefes Geradenpaar (G_1, G_2) mit $G_1 \subseteq E$ und $G_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus E$, welches den Abstand 1 zueinander hat.

Lösungsvorschlag

a) Für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^3$ muss gelten:

$$\mathbb{L}(A, 0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und insbesondere} \quad \operatorname{rang}(A) = 1 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathbb{L}(A, 0).$$

Weiterhin muss gelten:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}(A, b) \quad \text{das heißt} \quad A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = b.$$

Definiere mit diesen Überlegungen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt direkt wie gewünscht:

$$\mathbb{L}(A, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{L}(A, 0) = E.$$

b) Es sei $G_1 \colon \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Um nun G_2 mit Abstand 1 zu G_1 festzulegen, verschieben wir den Aufpunkt von G_1 senkrecht zu E um einen Vektor n, wobei $\|n\| = 1$. Um G_2 festzulegen nutzen wir den so erhaltenen Punkt als Aufpunkt und wählen eine beliebige Richtung, die parallel zu E verläuft.

Konstruktion von n: $\tilde{n} := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad n := \frac{1}{\|\tilde{n}\|} \cdot \tilde{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Damit folgt: $G_2 \colon \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -17 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Da nach unserer Konstruktion $G_2 \parallel E$ und $G_2 \cap E = \emptyset$ und $G_1 \nparallel G_2$ und $G_1 \subseteq E$ gilt, folgt insbesondere $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Damit erfüllen G_1 und G_2 alle gewünschten Eigenschaften.

F21 – T2 – A4

Gegeben sei die Ebene $E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 3\}$ und die Gerade

$$g = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \middle| \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $g = \mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$.

b) Bestimmen Sie den Punkt $\mathbf{a} \in g$, der von E den Abstand $\sqrt{6}$ hat und der am nächsten zum Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ liegt.

c) Sei $\mathbf{a}$ wie in Teilaufgabe 4b. Bestimmen Sie eine Gerade $h \subset \mathbb{R}^3$, für die gilt:

- $\mathbf{a} \in h$,
- $h \perp g$ und
- $h \cap E = \emptyset$.

Lösungsvorschlag

a) Löse das inhomogene lineare Gleichungssystem mit Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_1 - Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad g = \left\{ \begin{pmatrix} 1+z \\ 1-2z \\ z \end{pmatrix} : \quad z \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: v} + \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: w}$$

b) Überführe E durch Normierung mit dem Inversen der Länge des Normalenvektors in Hessesche Normalform:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{also} \quad E: \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(x + 2y - z - 3) = 0.$$

Sei nun $p \in g$, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p = v + \lambda w$. Mithilfe der Hesseschen Normalform berechnen wir dann:

$$p = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1-2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{also} \quad d(p, E) = \left| \frac{1}{\sqrt{6}}((1+\lambda) + 2(1-2\lambda) - \lambda - 3) \right| = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot |-4\lambda|$$

Somit folgt:

$$\sqrt{6} = d(p, E) \quad \Leftrightarrow \quad |-4\lambda| = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad p \in \left\{ \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0,5 \\ 4 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da $d(p, 0) = \|p\|$ folgt wegen

$$\left\| \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right\| < \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17} \quad \text{und} \quad \left\| \begin{pmatrix} -0,5 \\ 4 \\ -1,5 \end{pmatrix} \right\| > \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17},$$

dass $a = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ der gesuchte Punkt ist.

c) Da $h \cap E = \emptyset$ muss $h \parallel E$ gelten. Das heißt, jeder Richtungsvektor $r \in \mathbb{R}^3$ von h steht senkrecht auf den Normalenvektor $n := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ von E, also $\langle r, n \rangle = 0$. Weiter gilt wegen $h \perp g$ auch $\langle r, w \rangle = 0$. Damit ist $r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$\left\{\begin{matrix} r_1 + 2r_2 - r_3 = 0 \\ r_1 - 2r_2 + r_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} 2r_1 = 0 \\ r_1 - 2r_2 + r_3 = 0 \end{matrix}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_3 = 2r_2 \end{matrix}\right\}$$

Somit folgt, dass für Richtungsvektoren von h gilt: $r \in \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Wir erhalten also:

$$h: \quad a + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

F20 – T1 – A2

Im $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Geraden gegeben:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 1 \text{ und } x + y - z = 1 \right\} \quad \text{und}$$

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Entscheiden Sie, ob g und h parallel sind, sich schneiden oder windschief sind.

b) Bestimmen Sie die gemeinsame Lotgerade l von g und h, und berechnen Sie den Abstand $d(g, h)$ von g und h.

Lösungsvorschlag

a) Überführe g in Parameterform durch Lösen des inhomogenen linearen Gleichungssystems mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_2 - Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Damit folgt:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : \quad y \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (siehe etwa dritte Komponente), das heißt $g \nparallel h$.

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} 1 - \lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 1 \\ 0 = 1 - \mu \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mu = -\lambda \\ \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix} \mu = -1 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 1 \end{Bmatrix}$$

Offensichtlich ist das lineare Gleichungssystem nicht lösbar, das heißt, es gilt $g \cap h = \emptyset$. Da $g \nparallel h$ und $g \cap h = \emptyset$ sind g und h windschief.

b) Es gilt $l \perp g$ und $l \perp h$. Damit ist das Kreuzprodukt von Richtungsvektoren von g und h ein Richtungsvektor von l:

$$n := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in g$ und somit ist

$$l_\lambda : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Lot von g. Suche nun $\lambda \in \mathbb{R}$ für das $l_\lambda \cap h \neq \emptyset$, dann ist l_λ gemeinsames Lot von g und h.

Seien $\mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Bestimme $\lambda, \mu, \varepsilon$ durch das Lösen des linearen Gleichungssystems mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_2+Z_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_2-2Z_3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Die erste Spalte repräsentiert dabei λ, die zweite Spalte μ und die dritte Spalte ε.

Damit folgt

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \qquad \mu = \varepsilon - 1 = -\frac{2}{3} \qquad \text{und} \qquad \lambda = -\mu - \varepsilon = \frac{1}{3}.$$

Also ist

$$l: \quad \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

gemeinsames Lot von g und h. Weiter folgt für den Abstand der beiden Geraden:

$$d(g,h) = \|\mu \cdot n\| = \left\|\frac{2}{3} \cdot n\right\| = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

H18 – T2 – A5

Gegeben seien die von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ abhängigen geraden $g_s, h_t \in \mathbb{R}^3$:

$$g_s = \begin{pmatrix}1\\0\\s\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h_t = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{rcrcrcl} x & + & ty & - & z & = & 0 \\ -x & + & ty & - & z & = & 0 \end{array} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von $s, t \in \mathbb{R}$, für die g_s und h_t windschief sind.

b) Bestimmen Sie alle Werte von $s, t \in \mathbb{R}$, für die g_s und h_t den Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ haben.

Lösungsvorschlag

a) Überführe h_t in Parameterform. Löse dazu das zugehörige lineare Gleichungssystem mithilfe von Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix}1 & t & -1\\ -1 & t & -1\end{pmatrix} \overset{Z_2+Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & t & -1\\ 0 & 2t & -2\end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1-\frac{1}{2}Z_2\\ \frac{1}{2}Z_2}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & t & -1\end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$h_t : \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix}.$$

Ein Vergleich der Richtungen (etwa erste Komponente) zeigt, dass $g_s \nparallel h_t$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Bestimme nun $g_s \cap h_t$ in Abhängigkeit von s und t. Seien dafür $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\s\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 1+\lambda &=& 0\\ \lambda &=& \mu\\ s &=& t\cdot\mu \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \lambda = -1\\ \mu = -1\\ s = -t \end{array}\right\}$$

Somit folgt $g_s \cap h_t = \emptyset$ für $s \neq -t$ und $g_s \cap h_t \neq \emptyset$ für $s = -t$. Insbesondere gilt g_s und h_t sind windschief für $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s \neq -t$.

b) Bestimme eine Ebene E mit $g_s \subseteq E$ und $h_t \parallel E$. Dann gilt $d\left(g_s, h_t\right) = d\left(E, h_t\right) = d(E, p)$ für $p \in h_t$.

E besitzt aufgrund der Voraussetzungen den Normalenvektor

$$n_t \coloneqq \begin{pmatrix}0\\1\\t\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-t\\t\\-1\end{pmatrix}.$$

Da $g_s \subseteq E$ ist insbesondere $(1, 0, s)^T \in E$. Somit ist E gegeben durch

$$E: \; -tx + ty - z = b \quad \text{mit} \quad b \coloneqq -t - s.$$

Die Hessesche Normalform von E ist gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2t^2+1}}(-tx + ty - z + t + s) = 0$$

Mit den obigen Ausführungen folgt dann für den Abstand von g_s und h_t:

$$d\left(g_s, h_t\right) = d\left(E, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \left|\frac{t+s}{\sqrt{2t^2+1}}\right|.$$

Wir bestimmen nun noch die Werte von s und t, für die $d(g_s, h_t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\left|\frac{t+s}{\sqrt{2t^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad (t+s)^2 = t^2 + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2st + s^2 = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad st = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}s^2$$

$$\Leftrightarrow \quad s \neq 0 \quad \wedge \quad t = \frac{1-2s^2}{4s}$$

F18 – T2 – A1

Sei $L_{s,t}$ der Lösungsraum des von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ abhängigen linearen Gleichungssystems $A_{s,t}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$A_{s,t} := \begin{pmatrix} 0 & s & s+t \\ t & 0 & t \\ s+t & s & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie $\det(A_{s,t})$ und den Rang von $A_{s,t}$ in Abhängigkeit von s und t.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $L_{s,t}$ in Abhängigkeit von s und t. Dabei sie die Dimension der leeren Menge gleich -1.

c) Bestimmen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ der Raum $L_{s,t}$ eine zu

$$g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

windschiefe Gerade ist.

Lösungsvorschlag

a) Es ist

$$\det(A_{s,t}) = 2st(s+t).$$

Um den Rang von $A_{s,t}$ in Abhängigkeit von s und t zu bestimmen, nutzen wir den folgenden Zusammenhang:

$$\operatorname{rang}(A_{s,t}) = 3 \;\Leftrightarrow\; \det(A_{s,t}) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; (s \neq 0) \;\wedge\; (t \neq 0) \;\wedge\; (s \neq -t)$$

Wir müssen also nun noch den Rang von $A_{s,t}$ bestimmen, falls $s = 0$ oder $t = 0$ oder $s = -t$ gilt.

1. Fall: $s = 0$

$$A_{0,t} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ t & 0 & t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A_{0,t}) = \begin{cases} 2, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

2. Fall: $t = 0$

$$A_{s,0} = \begin{pmatrix} 0 & s & s \\ 0 & 0 & 0 \\ s & s & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A_{s,0}) = \begin{cases} 2, & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}$$

3. Fall: $s = -t$

$$A_{-t,t} = \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A_{-t,t}) = \begin{cases} 2, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

b) Das lineare Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, das heißt $\dim(L_{s,t}) = 0$, falls $\det A_{s,t} \neq 0$. Denn dann ist $A_{s,t}$ invertierbar und damit ist $x = (A_{s,t})^{-1} b$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems. Somit folgt:

$$(s \neq 0) \;\wedge\; (t \neq 0) \;\wedge\; (s \neq -t) \quad \Rightarrow \quad \dim L_{s,t} = 0$$

Der Rang von $A_{s,t}$ ist genau dann Null, wenn $s = 0 = t$ gilt. In diesem Fall besitzt das lineare Gleichungssystem wegen $\mathbf{b} \neq 0$ keine Lösung, also:

$$s = t = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{0,0} = 0 \quad \Rightarrow \quad L_{0,0} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dim L_{0,0} = -1$$

Für die weiteren Fälle führen wir eine Fallunterscheidung durch und nutzen unsere Erkenntnisse aus Teilaufgabe a):

$$s = 0, t \neq 0: \quad \operatorname{rang}(A_{0,t}, b) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & t & 1 \\ t & 0 & t & 0 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = 2 = \operatorname{rang}(A_{0,t})$$
$$\Rightarrow \quad L_{0,t} \neq \emptyset \text{ und } \dim L_{0,t} = \dim \mathbb{R}^3 - \operatorname{rang}(A_{0,t}) = 3 - 2 = 1$$

$$t = 0, s \neq 0: \quad \operatorname{rang}(A_{s,0}, b) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & s & s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & s & 0 & -1 \end{array}\right) = 2 = \operatorname{rang}(A_{s,0})$$
$$\Rightarrow \quad L_{s,0} \neq \emptyset \text{ und } \dim L_{s,0} = 3 - \operatorname{rang}(A_{s,0}) = 1$$

$$s = -t \text{ und } t \neq 0: \quad \operatorname{rang}(A_{-t,t}, b) = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -t & 0 & 1 \\ t & 0 & t & 0 \\ 0 & -t & 0 & -1 \end{array}\right) = 3 > \operatorname{rang}(A_{-t,t})$$
$$\Rightarrow \quad L_{-t,t} = \emptyset \text{ und } \dim L_{-t,t} = -1$$

c) Wir müssen lediglich die beiden Fälle $s = 0 \wedge t \neq 0$ sowie $t = 0 \wedge s \neq 0$ untersuchen, da nur hier $L_{s,t}$ Dimension 1 besitzt und damit eine Gerade ist. In diesen Fällen gilt für $x \in L_{s,t}$

$$L_{s,t} = x + \mathbb{L}(A_{s,t}, 0).$$

Wenn g und $L_{s,t}$ windschief sind, muss weiterhin gelten:

$$g \cap L_{s,t} = \emptyset \quad \text{und} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \neq \mathbb{L}(A_{s,t}, 0).$$

1. Fall: $s = 0$ und $t \neq 0$

Aus dem bisher Erarbeiteten lesen wir unmittelbar ab:

$$L_{0,t} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ 0 \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich sind g und $L_{0,t}$ nicht parallel zueinander, das heißt, es muss lediglich

$$g \cap L_{0,t} = \emptyset$$

sichergestellt werden. Wir sehen jedoch relativ leicht, dass für jede Wahl von $t \neq 0$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ -\frac{2}{t} \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix} \in g \cap L_{0,t},$$

das heißt insbesondere, dass g und $L_{0,t}$ für kein $t \neq 0$ windschief sind.

2. Fall: $t = 0$ und $s \neq 0$

Aus dem bisher Erarbeiteten lesen wir unmittelbar ab:

$$L_{s,0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ -\frac{1}{s} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Offensichtlich sind g und $L_{s,0}$ nicht parallel zueinander, das heißt, es muss lediglich

$$g \cap L_{s,0} = \emptyset$$

sichergestellt werden.

Sei also $s \neq 0$ mit $g \cap L_{s,0} \neq \emptyset$. Dann existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ -\frac{1}{s} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \lambda - \mu = \frac{1}{s} \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ -\lambda - \mu = -\frac{1}{s} \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{s} \\ \mu = -\frac{2}{s} \\ \frac{3}{s} = -\frac{1}{s} \end{array} \right\}.$$

Die letzte Zeile zeigt, dass für kein $s \neq 0$ Lösungen für λ und μ existieren, somit folgt

$$g \cap L_{s,0} = \emptyset \quad \text{für alle} \quad s \neq 0.$$

Damit sind g und $L_{s,0}$ windschief für alle $s \neq 0$.

F18 – T3 – A4

Gegeben seien die Geraden

$$g = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$h = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$.

a) Berechnen Sie alle gemeinsamen Lote von g und h.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen g und h.

c) Berechnen Sie den kleinsten affinen Unterraum von $\mathbb{R}^4$, welcher g und h enthält.

Lösungsvorschlag

a) Jeder Richtungsvektor n des gemeinsamen Lots steht senkrecht auf die Richtungen von g und h. Für das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\mathbb{R}^4$ folgt somit:

$$\left\langle n, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle n, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Bestimme also $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)^T$ als Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \overset{Z_2 - 2Z_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \overset{Z_1 + 2Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \in \left\{ \begin{pmatrix} n_3 + 2n_4 \\ -2n_3 - 3n_4 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix} : \quad n_3, n_4 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in g$$

Punkt auf g und

$$l_\alpha : \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (*)$$

$(*)$ Hilfs-„Lotebene“ anstelle von Hilfs-„Lotgerade“ im dreidimensionalen Fall.

die Menge aller Lote von g durch den von α abhängigen Punkt. Suche nun die Werte von α mit $l_\alpha \cap h \neq \emptyset$. Für diese α lassen sich dann Vektoren v und zugehörige Skalare $\epsilon, \eta \in \mathbb{R}$ finden, mit

$$v = \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

für die dann

$$l_{\alpha,v}: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \epsilon \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ein gemeinsames Lot von g und h ist.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Löse das entsprechende lineare Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 - 3Z_1 \\ Z_4 - 4Z_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -7 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z_4 - Z_2 \\ \\ \frac{1}{2} Z_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} Z_2 - 4Z_3 \\ \rightsquigarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Damit folgt:

$$\delta = 1, \qquad \gamma = -1, \qquad \beta = 1 \qquad \text{und} \qquad \alpha = 1.$$

Somit ist das einzige gemeinsame Lot von g und h gegeben durch

$$l: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Da die Länge des in der ersten Teilaufgabe durch β und γ bestimmten Normalenvektors von l den kürzesten Abstand zwischen g und h liefert, erhalten wir

$$d(g,h) = \left\| 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4} = 2.$$

c) Offensichtlich sind g und h nicht parallel und $g \cap h = \emptyset$, denn sonst $d(g,h) = 0$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

der gesuchte kleinste affine Unterraum von $\mathbb{R}^4$, wobei

- der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Aufpunkt von h ist,
- der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g ist,
- der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von h ist und
- der Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Verbindungsvektor zwischen den Aufpunkten von g und h ist.

9 Affine Normalform von Quadriken

Am Ende dieses Buches beschäftigen wir uns mit Quadriken und deren Normalformen. Bei Quadriken handelt es sich, vereinfacht gesagt, um Nullstellenmengen quadratischer Gleichungen. Aus der Schule wissen wir bereits, dass quadratische Gleichungen in einer Variablen eine unterschiedliche Anzahl von Lösungen besitzen können. Im Examen sind meist quadratische Gleichungen in zwei Variablen zu untersuchen, für die die Lösungsmenge ebenfalls verschiedene Formen annehmen kann. Im Folgenden betrachten wir also zunächst eine formale Definition von Quadriken, bevor wir eine Technik kennenlernen, mit deren Hilfe wir den Typ einer Quadrik, also die Gestalt der zugehörigen Nullstellenmenge identifizieren können.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf Quadriken im zweidimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^2$. Für die Bearbeitung der Examensprüfungen der vergangenen Jahre ist dieses Wissen ausreichend.

Definition 9.1 (Quadrik)

Wir nennen $P(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$ mit $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ und nicht alle $a_{ij} = 0$ ein *quadratisches Polynom*.

Die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : P(x_1, x_2) = 0\}$$

heißt *Quadrik* oder *Kegelschnitt* in $\mathbb{R}^2$.

Ein Ziel in der Mathematik ist es, eine möglichst einfache Klassifikation aller Quadriken anzugeben, aus der gewisse Eigenschaften bzw. die Art der Quadrik ableitbar sind. Hierfür nutzen wir die sogenannte affine Normalform einer Quadrik. Für diese unterscheiden wir die folgenden:

Normalform	Bezeichnung
$x^2 + y^2 = 1$	Ellipse
$x^2 - y^2 = 1$	Hyperbel
$x^2 - y = 0$	Parabel
$x^2 + y^2 = 0$	Punkt
$x^2 - y^2 = 0$	Zwei sich schneidende Geraden
$x^2 = 1$	Zwei parallele Geraden
$x^2 = 0$	Eine Gerade
$x^2 + y^2 = -1$	Leere Menge
$x^2 = -1$	Leere Menge

Wie finden wir aber heraus, welcher Normalform wir eine beliebige Quadrik zuordnen können? Dafür nutzen wir das Konzept der affinen Äquivalenz, das wir im Folgenden definieren.

Definition 9.2 (Affine Äquivalenz)

Zwei Quadriken Q und Q' in $\mathbb{R}^2$ heißen genau dann *affin äquivalent*, wenn es eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt mit $Q' = f(Q)$.

Anmerkung: Die bijektive affine Abbildung f besitzt die Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R})$ invertierbar (denn f bijektiv) und $b \in \mathbb{R}^2$.

Basierend auf dieser Definition sagen wir nun, dass eine Quadrik Q eine bestimmte Normalform besitzt, wenn Sie zu der entsprechenden Normalform affin äquivalent ist.

Der folgende Satz besitzt eher theoretische Bedeutung und garantiert uns, dass wir durch das Abbilden einer Quadrik mittels einer bijektiven affinen Abbildung wieder eine Quadrik erhalten.

Satz 9.3

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine bijektive affine Abbildung und Q in $\mathbb{R}^2$ eine Quadrik. Dann ist auch $f(Q)$ eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$.

Nun wissen wir zwar, wie wir theoretisch die affine Normalform und damit den Typ einer Quadrik bestimmen können, es stellt sich aber noch die Frage, wie wir die Abbildung f ermitteln können, die gemäß Definition 9.2 notwendig ist. Dabei greifen wir auf eine Technik zurück, die wir bereits aus der Schule kennen – quadratische Ergänzung. Hierzu folgt kein Satz, das Vorgehen wird stattdessen an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 9.4 (Affine Normalform bestimmen)

Wir suchen die Normalform der Quadrik $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + xy - 6y^2 + 4x + y + 2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
0 &= 2x^2 + 4xy - 2y^2 + 4x - 4y - 3 \\
&= 2(x^2 + 2xy + 2x) - 2y^2 - 4y - 3 \\
&= 2(x^2 + 2x(y+1)) - 2y^2 - 4y - 3 \\
&= 2(x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 - (y+1^2)) - 2y^2 - 4y - 3 \\
&= 2(x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2) - 2(y+1)^2 - 2y^2 - 4y - 3 \\
&= 2(x + (y+1))^2 - 2(y^2 + 2y + 1) - 2y^2 - 4y - 3 \\
&= 2(x + (y+1))^2 - 4y^2 - 8y - 5 \\
&= 2(x + y + 1)^2 - 4(y^2 + 2y) - 5 \\
&= 2(x + y + 1)^2 - 4(y^2 + 2y \cdot 1 + 1 - 1) - 5 \\
&= 2(x + y + 1)^2 - 4(y+1)^2 - 1 \\
\Leftrightarrow 1 &= 2(x + y + 1)^2 - 4(y+1)^2
\end{aligned}
$$

Wir sind nun fast am Ziel. Um die affine Normalform zu erhalten, müssen wir neue Koordinaten definieren. Über diese Koordinatentransformation erhalten wir gleichzeitig die bijektive affine Abbildung, die die Quadrik in Normalform überführt. Wir benötigen lediglich noch einen weiteren Umformungsschritt:

$$\begin{aligned} 1 &= 2(x+y+1)^2 - 4(y+1)^2 \\ &= (\sqrt{2}(x+y+1))^2 - (2(y+1))^2 \\ &= \underbrace{(\sqrt{2}(x+y+1))^2}_{=:v} - \underbrace{(2(y+1))^2}_{=:w} \\ &= v^2 - w^2 \end{aligned}$$

Wir können nun mithilfe der Tabelle die affine Normalform N von Q bestimmen. Es gilt

$$N : v^2 - w^2 = 1,$$

damit handelt es sich um eine *Hyperbel*.

Die zugehörige Koordinatentransformation, das heißt die gesuchte bijektive affine Abbildung ist gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x+y+1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt: $f(Q) = N$. Dass diese Gleichheit – und nicht etwa $f(N) = Q$ – gilt, können wir anhand der Abbildungsvorschrift ablesen. Diese gibt an, dass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$$

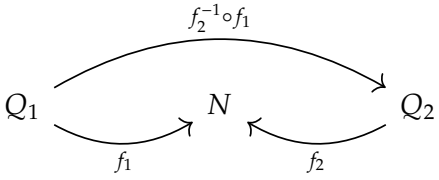
und somit werden die Koordinaten von Q auf die Koordinaten von N abgebildet. Damit ergibt sich dann $f(Q) = N$.

Mithilfe dieser Technik können wir auch für zwei beliebige, affin äquivalente Quadriken Q_1 und Q_2 eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ angeben, für die $f(Q_1) = Q_2$ gilt. Grundlegend dafür ist der folgende Satz.

Satz 9.5

Es seien Q_1 und Q_2 zwei affin äquivalente Quadriken in $\mathbb{R}^2$. Dann besitzen Q_1 und Q_2 dieselbe Normalform.

Wie wir nun die Abbildung f von oben finden, wird durch das folgende Diagramm visualisiert:



Das nächste Beispiel geht noch einmal genauer darauf ein.

Beispiel 9.6

Es seien Q_1 und Q_2 affin äquivalente Normalformen in $\mathbb{R}^2$. Weiter bezeichne N die zugehörige Normalform. Dann gibt es

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{bijektive affine Abbildung mit} \quad f_1(Q_1) = N$$

und

$$f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{bijektive affine Abbildung mit} \quad f_2(Q_2) = N.$$

Dann ist aber $f := f_2^{-1} \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ebenfalls eine bijektive affine Abbildung für die gilt:

$$(f_2^{-1} \circ f_1)(Q_1) = f_2^{-1}(f_1(Q_1)) = f_2^{-1}(N) = Q_2.$$

Das obige Vorgehen mit quadratischer Ergänzung schlägt fehl, wenn wir keinen rein-quadratischen Term x^2 oder y^2 vorliegen haben. In diesem Fall benötigen wir einen Trick, den wir wieder exemplarisch anhand eines Beispiels kennenlernen.

Beispiel 9.7 (Vorgehen ohne rein-quadratischen Term)

Gegeben sei die Quadrik $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Trick besteht nun darin, die neuen Koordinaten (v, w) wie folgt zu definieren:

$$x = v + w \quad \text{und} \quad y = v - w.$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} 1 &= xy \\ &= (v + w)(v - w) \\ &= v^2 - w^2 \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass es sich bei Q um eine Hyperbel handelt. Die zugehörige bijektive affine Abbildung können wir nicht unmittelbar ablesen, hierfür braucht es einen Zwischenschritt. Aus der Definition der neuen Koordinaten erhalten wir die bijektive affine Abbildung

$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + w \\ v - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Mit den Überlegungen von oben können wir anhand der Koordinaten ablesen, dass $g(N) = Q$ gilt, wir haben als mit g gerade die zur gesuchten bijektiven affinen Abbildung f inverse Abbildung bestimmt, das heißt $g = f^{-1}$. Damit folgt $f = g^{-1}$ und daher

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

In Examensaufgaben geht es häufig auch darum, bestimmte charakteristische Punkte oder Mengen einer Quadrik – konkret Mittelpunkte, Scheitelpunkte oder Asymptoten – zu bestimmen. Bevor wir uns damit beschäftigen, definieren wir noch den Begriff eines Mittelpunkts.

Satz 9.8 (Mittelpunkt)

Es sei Q eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$ mit Normalform N. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ die bijektive affine Abbildung mit $f(Q) = N$.

Dann ist die Menge aller Mittelpunkte von Q die Lösungsmenge bezüglich der (x, y)-Koordinaten des homogenen linearen Gleichungssystems

$$v = 0 \qquad \text{oder} \qquad v = 0 \text{ und } w = 0,$$

wobei jeweils diejenigen Variablen gleich Null gesetzt werden, die in der Normalform auftauchen. Dabei nutzen wir, dass

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wir können also v und w in Abhängigkeit von x und y ausdrücken und somit die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems bezüglich der (x, y)-Koordinaten ermitteln.

Insbesondere heißt $m \in \mathbb{R}^2$ genau dann Mittelpunkt von Q, wenn Q punktsymmetrisch zu m liegt.

Für die Normalformen in der obigen Tabelle können wir uns überlegen, wann Mittelpunkte existieren und welche Punkte jeweils Mittelpunkte sind. Damit erhalten wir unmittelbar eine Aussage darüber, welche Quadriken im Allgemeinen Mittelpunkte besitzen. Einen Überblick über die Mittelpunkte gibt die folgende Tabelle, in der nur die affinen Normalformen aufgeführt sind, für die es mindestens einen Mittelpunkt gibt:

Normalform	Bezeichnung	Mittelpunkt(e)
$v^2 + w^2 = 1$	Ellipse	$(0, 0)$
$v^2 - w^2 = 1$	Hyperbel	$(0, 0)$
$v^2 + w^2 = 0$	Punkt	$(0, 0)$
$v^2 - w^2 = 0$	Zwei sich schneidende Geraden	$(0, 0)$
$v^2 = 1$	Zwei parallele Geraden	$v = 0$
$v^2 = 0$	Eine Gerade	$v = 0$

Ganz allgemein können wir besondere Punkte oder Punktmengen für Quadriken ermitteln, indem wir auf die entsprechenden Punkte oder Mengen für die zugehörige Normalform zurückgreifen. Wir betrachten dies am Beispiel der Asymptoten zur Hyperbel aus dem obigen Beispiel. Das Prinzip lässt sich für andere Punkte und Mengen verallgemeinern.

Beispiel 9.9 (Asymptoten einer Hyperbel)

Gegeben ist die Quadrik $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + xy - 6y^2 + 4x + y + 2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Normalform $N : v^2 - w^2 = 1$ und der zugehörigen Koordinatentransformation

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(x + y + 1) \\ 2(y + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind die Asymptoten von Q.

Wir kennen die Asymptoten von N, dabei handelt es sich um die Geraden $\{v - w = 0\}$ und $\{v + w = 0\}$. Wenn wir nun die zu f inverse affine Abbildung f^{-1} betrachten, dann bildet diese N auf Q und außerdem die Asymptoten von N auf die Asymptoten von Q ab. Damit folgt also, dass die beiden Asymptoten A_1 und A_2 von Q gegeben sind durch

$$A_1 = f^{-1}(\{v - w = 0\}) \quad \text{und} \quad A_2 = f^{-1}(\{v + w = 0\}).$$

Um das Bild der beiden Mengen unter f^{-1} zu bestimmen, ersetzen wir die Koordinaten v und w einfach durch ihre Darstellungen bezüglich der Koordinaten x und y, die wir unmittelbar aus der Abbildungsvorschrift von f ablesen können. Damit gilt dann:

$$A_1 = \left\{(\sqrt{2}(x + y + 1) - 2(y + 1)) = 0\right\} = \left\{\sqrt{2}x + (\sqrt{2} - 2)y + (\sqrt{2} - 2) = 0\right\}$$

und

$$A_2 = \left\{(\sqrt{2}(x + y + 1) + 2(y + 1)) = 0\right\} = \left\{\sqrt{2}x + (\sqrt{2} + 2)y + (\sqrt{2} + 2) = 0\right\}$$

Dieses Vorgehen funktioniert genauso, wenn wir Mittelpunkte oder Scheitelpunkte ermitteln möchten. Wir müssen dann lediglich die Menge anpassen, deren Bild wir unter f^{-1} suchen.

F24 – T2 – A5

Es sei α ein reeller Parameter. Gegeben seien die Kegelschnitte

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 1 \right\}$$

und

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 x^2 + 4\alpha xy + (4-\alpha)y^2 - \alpha - 2 = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ von Q_α in Abhängigkeit von α.

b) Geben Sie für diejenigen $\alpha \in \mathbb{R}$, für die H und Q_α affin äquivalent sind, eine Affinität (= bijektive affine Abbildung) $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die Q_α auf H abbildet.

Lösungsvorschlag

a) Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^2 x^2 + 4\alpha xy + (4-\alpha)y^2 - \alpha - 2 \\ &= \left[(\alpha x)^2 + 2(\alpha x)\cdot 2y + (2y)^2\right] - (2y)^2 + (4-\alpha)y^2 - \alpha - 2 \\ &= (\alpha x + 2y)^2 - \alpha y^2 - \alpha - 2 \\ \Leftrightarrow\ & (\alpha x + 2y)^2 - \alpha y^2 = 2 + \alpha \end{aligned}$$

1.Fall: $\alpha = 0$ (**Typ**: Zwei parallele Geraden)

$$4y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\underbrace{\sqrt{2}y}_{=:w})^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w^2 = 1$$

2. Fall: $\alpha = -2$ (**Typ**: Ein Punkt)

$$(-2x+2y)^2 + 2y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(-2x+2y)}_{=:v}^2 + (\underbrace{\sqrt{2}y}_{=:w})^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 + w^2 = 0$$

3. Fall: $\alpha < -2$ (**Typ**: Leere Menge)

$$\begin{aligned} (\alpha x + 2y) - \alpha y^2 = 2 + \alpha \quad &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\frac{1}{2+\alpha}}_{<0}(\alpha x + 2y)^2 - \underbrace{\frac{\alpha}{2+\alpha}}_{>0} y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -\Bigg(\underbrace{\sqrt{-\frac{1}{2+\alpha}}(\alpha x + 2y)}_{=:v}\Bigg)^2 - \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\, y}_{=:w}\Bigg)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad v^2 + w^2 = -1 \end{aligned}$$

4. Fall: $-2 < \alpha < 0$ (**Typ**: Ellipse)

$$(\alpha x + 2y)^2 + \alpha y^2 = 2 + \alpha \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\frac{1}{2+\alpha}}_{>0}(\alpha x + 2y)^2 - \underbrace{\frac{\alpha}{2+\alpha}}_{<0} y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}}(\alpha x + 2y)}_{=:v}\right)^2 + \left(\underbrace{\sqrt{-\frac{\alpha}{2+\alpha}}\, y}_{=:w}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow v^2 + w^2 = 1$$

5. Fall $\alpha > 0$ (**Typ**: Hyperbel)

$$(\alpha x + 2y)^2 - \alpha y^2 = 2 + \alpha \overset{\alpha \neq -2}{\Leftrightarrow} \underbrace{\frac{1}{2+\alpha}}_{>0}(\alpha x + 2y)^2 - \underbrace{\frac{\alpha}{2+\alpha}}_{>0} y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2+\alpha}}(\alpha x + 2y)}_{=:v}\right)^2 - \left(\underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\, y}_{=:w}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow v^2 - w^2 = 1$$

b) Mit $x = v + w$ und $y = v - w$ folgt für H :

$$1 = xy \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (v+w)(v-w) = v^2 - w^2,$$

das heißt, H ist eine Hyperbel.

Somit folgt: H und Q_α affin äquivalent $\Leftrightarrow$ $\alpha > 0$.

Definiere

$$g_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot \alpha x + \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} \cdot 2y \\ \sqrt{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\, y \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$g_\alpha(Q_\alpha) = N,$$

wobei

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \quad v^2 - w^2 = 1 \right\}.$$

Sei weiter $h \colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+w \\ v-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$. Dann gilt $h(N) = H$.

Insgesamt gilt also für $f_\alpha := h \circ g_\alpha$:

$$f_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{\frac{1}{2+\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & \sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2+\alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & 2+\sqrt{\alpha} \\ \alpha & 2-\sqrt{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und insbesondere

$$f_\alpha(Q_\alpha) = (h \circ g_\alpha)(Q_\alpha) = h\left(g_\alpha(Q_\alpha)\right) = h(N) = H.$$

H23 – T1 – A5

Sei $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$ die Normalparabel.

a) Geben Sie alle bijektiven affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die $f(N) \subseteq N$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie, welche von den in Teil a) bestimmten Abbildungen euklidische Bewegungen sind.

Lösungsvorschlag

a) Eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ besitzt die Form

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertierbar} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sei also $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in N$, das heißt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$f\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \in N$$

$$\Leftrightarrow \quad A\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} + b \in N \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} ax + bx^2 + t_1 \\ cx + dx^2 + t_2 \end{pmatrix} \in N \quad \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad cx + dx^2 + t_2 = \left(ax + bx^2 + t_1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad cx + dx^2 + t_2 = a^2x^2 + abx^3 + at_1x + abx^3 + b^2x^4 + bt_1x^2 + at_1x + bt_1x^2 + t_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2x^4 + 2abx^3 + \left(a^2 + 2bt_1 - d\right)x^2 + (2at_1 - c)\,x + \left(t_1^2 - t_2\right) = 0$$

$(*) \quad y = x^2$

Wir können die linke Seite obiger Gleichung, die für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss, als Polynom vom Grad 4 in x auffassen. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann:

- x^4: $b^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$
- x^3: $2ab = 0$, da $b = 0$ insbesondere a (vorerst) beliebig
- x^2: $a^2 + 2bt_1 - d = 0 \overset{b=0}{\Leftrightarrow} a^2 = d \quad \Leftrightarrow \quad d \geq 0$ und $|a| = \sqrt{d}$
- x^1: $2at_1 - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2at_1$
- x^0: $t_1^2 - t_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 \geq 0$ und $|t_1| = \sqrt{t_2}$

Da A invertierbar gilt zudem $0 \neq |\det(A)| = |ad - bc| = |ad| = \sqrt{d} \cdot d$. Somit $d \neq 0$

Die gesuchten bijektiven affinen Abbildungen sind also von der Form

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2at_1 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

mit $t_2 \geq 0, d > 0, |t_1| = \sqrt{t_2}$ und $|a| = \sqrt{d}$

b) f aus Teil a) ist Bewegung $\Leftrightarrow$ A orthogonal $\Leftrightarrow$ $A^{-1} = A^T$

A orthogonal $\Rightarrow$ $1 = |\det(A)| = \sqrt{d} \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad d = 1$

Wenn A also orthogonal ist, muss gelten

$$E_2 = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2at_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2at_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a^2t_1 \\ 2a^2t_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad a = \pm 1$ (das war wegen $|a| = \sqrt{a} = \sqrt{1} = 1$ klar) und $2a^2 t_1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a = \pm 1$ und $t_1 = 0$

Insgesamt folgt wegen $0 = |t_1|$ auch $t_2 = 0$ und somit sind nur

$$f_1 : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und

$$f_2 : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bewegungen unter den Abbildungen in Teil a).

Dass wir nur f_1 und f_2 als Bewegungen finden ist nicht überraschend. Bei diesen Abbildungen handelt es sich nämlich um die Identität (für $a = 1$) bzw. eine Spiegelung an der y-Achse (für $a = -1$). Wir können uns sehr einfach anschaulich überlegen, dass diese beiden Bewegungen bzw. Kongruenzabbildungen die einzigen sind, die die Normalparabel $\{y = x^2\}$ auf sich selbst abbilden.

H23 – T2 – A5

Bestimmen Sie die Asymptoten der Hyperbel H im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung

$$H : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10x + 5y = 8$$

beschrieben wird.

Lösungsvorschlag

Überführe die Quadrik H zunächst in ihre affine Normalform N.

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^2 + 3xy - 10x - 2y^2 + 5y - 8 \\
&= 2\left(x^2 + 2x \cdot \left(\frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2\right) - 2y^2 + 5y - 8 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - 2y^2 + 5y - 8 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{8}y^2 + \frac{15}{2}y - \frac{25}{2} - 2y^2 + 5y - 8 \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}y^2 + \frac{25}{2}y - \frac{41}{2} \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}y^2 + \frac{25}{2}y - \frac{41}{2} \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y^2 - 4y\right) - \frac{41}{2} \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y^2 - 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) - \frac{41}{2} \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - 2\right)^2 + \frac{25}{2} - \frac{41}{2} \\
&= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - 2\right)^2 - 8 \\
\Leftrightarrow \quad H: \quad 8 &= 2\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y - 2\right)^2 \\
\Leftrightarrow 1 &= \frac{1}{4}\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{64}(y-2)^2 \\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right)\right]}_{=:v}^2 - \underbrace{\left[\frac{5}{8}(y-2)\right]}_{=:w}^2
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$N : v^2 - w^2 = 1$$

die Normalform von H ist. Die Hyperbel N hat bekanntermaßen die Asymptoten

$$A_1 = \left\{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | v - w = 0\right\} \quad \text{und} \quad A_2 = \left\{(v, w) \in \mathbb{R}^2 | v + w = 0\right\}.$$

Durch Substitution von v und w wie oben definiert, erhalten wir die Asymptoten von H.

Somit folgt:

$$A_{H,1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{8}(y-2) = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 0\right\}$$

und

$$A_{H,2} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{2}\right) + \frac{5}{8}(y-2) = 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \frac{1}{2}x + y = \frac{10}{4}\right\}$$

sind die beiden Asymptoten von H.

H23 – T3 – A5

In der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\alpha xy + (\alpha^2 + \alpha)y^2 - 2\alpha y - 3 = 0 \right\}$$

gegeben; dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die affine Normalform und den Typ der Quadrik Q_α.

b) Es werde nun speziell für den Parameterwert $\alpha = 1$ die Quadrik Q_1 sowie der Einheitskreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit dem Ursprung im Mittelpunkt betrachtet. Begründen Sie, dass es (mindestens) eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(K) = Q_1$ gibt, und geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

Lösungsvorschlag

a) Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2\alpha xy + \left(\alpha^2 + \alpha\right) y^2 - 2\alpha y - 3 \\ &= x^2 + 2x \cdot \alpha y + \left(\alpha y\right)^2 - \left(\alpha y\right)^2 + \left(\alpha^2 + \alpha\right) y^2 - 2\alpha y - 3 \\ &= \left(x + \alpha y\right)^2 + \alpha y - 2\alpha y - 3 \\ &= \left(x + \alpha y\right)^2 + \alpha \left(y - 2y \cdot 1 + 1^2 - 1^2\right) - 3 \\ &= \left(x + \alpha y\right)^2 + \alpha (y-1)^2 - 3 - \alpha \\ \Leftrightarrow \quad Q_\alpha : \quad & (x + \alpha y)^2 + \alpha (y-1)^2 = 3 + \alpha \end{aligned}$$

1. Fall: $\alpha = 0$ (**Typ**: Zwei parallele Geraden)

$$x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} x\right)}_{=:v}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = 1$$

2. Fall: $\alpha = -3$ (**Typ**: Zwei sich schneidende Geraden)

$$(x - 3y)^2 - 3(y-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x-3y)}_{=:v}^2 - \underbrace{(\sqrt{3}(y-1))}_{=:w}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 - w^2 = 0$$

3. Fall: $\alpha < -3$ (**Typ**: Hyperbel)

$$(x + \alpha y)^2 + \alpha (x-1)^2 = 3 + \alpha \quad \overset{\alpha \neq -3}{\Leftrightarrow} \quad \underbrace{\frac{1}{3+\alpha}}_{<0} (x + \alpha y)^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{3+\alpha}}_{>0} (y-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left[\sqrt{\frac{\alpha}{3+\alpha}} (y-1)\right]}_{=:v}^2 - \underbrace{\left[\sqrt{-\frac{1}{3+\alpha}} (x + \alpha y)\right]}_{=:w}^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 - w^2 = 1$$

4. Fall: $-3 < \alpha < 0$ (**Typ**: Hyperbel)

$$(x+\alpha y)^2 + \alpha(y-1)^2 = 3+\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{3+\alpha}}_{>0}(x+\alpha y)^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{3+\alpha}}_{<0}(y-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big[\underbrace{\sqrt{\frac{1}{3+\alpha}}(x+\alpha y)}_{=:v}\Big]^2 - \Big[\underbrace{\sqrt{-\frac{\alpha}{3+\alpha}}(y-1)}_{=:w}\Big]^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 - w^2 = 1$$

5. Fall: $\alpha > 0$ (**Typ**: Ellipse)

$$\frac{1}{3+\alpha}(x+\alpha y)^2 + \frac{\alpha}{3+\alpha}(y-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big[\underbrace{\sqrt{\frac{1}{3+\alpha}}(x+\alpha y)}_{=:v}\Big]^2 + \Big[\underbrace{\sqrt{\frac{\alpha}{3+\alpha}}(y-1)}_{=:w}\Big]^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad v^2 + w^2 = 1$$

b) Teilaufgabe a) zeigt, dass $K = \{v^2 + w^2 = 1\}$ die affine Normalform von Q_1 ist, folglich sind K und Q_1 affin äquivalent. Daraus folgt unmittelbar die Existenz der bijektiven affinen Abbildung f mit den Eigenschaften aus der Angabe.

Aus den in a) definierten Koordinaten v, w lesen wir f^{-1} ab:

$$f^{-1}\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(*) Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist wie folgt entstanden: $\sqrt{\frac{1}{3+\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{3+1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Bestimme nun f als Inverse von f^{-1} und löse dafür den Funktionsterm nach $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ auf:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit folgt:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F21 – T1 – A5

Geben Sie die Gleichung einer Hyperbel im $\mathbb{R}^2$ an, deren Asymptoten durch die Gleichungen

$$x - y = 0$$
$$x + y = 2$$

bestimmt sind.

Lösungsvorschlag

Wir suchen eine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die die Asymptoten

$$A_1 = \{v - w = 0\} \quad \text{und} \quad A_2 = \{v + w = 0\}$$

der Hyperbel

$$N = \left\{v^2 - w^2 = 1\right\}$$

auf die gegebenen Asymptoten

$$H_1 \coloneqq \{x - y = 0\} \quad \text{und} \quad H_2 \coloneqq \{x + y = 2\}$$

abbildet. Das heißt, $f(A_1) = H_1$ und $f(A_2) = H_2$. Dann ist $f(N)$ eine Hyperbel mit den Asymptoten H_1 und H_2.

Da wir $f(A_i)$ für $i = 1, 2$ mithilfe von f^{-1} bestimmen, ermitteln wir zunächst den Funktionsterm für f^{-1}, um anschließend daraus f abzuleiten. Es gilt:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertierbar} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Nach Voraussetzung soll gelten:

$$\begin{aligned} f(A_1) &= \left\{(ax + by) + t_1 - \left[(cx + dy) + t_2\right] = 0\right\} \\ &= \left\{(a - c)x + (c - d)y + (t_1 - t_2) = 0\right\} = H_1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad a - c = 1 \ \wedge \ b - d = -1 \ \wedge \ t_1 - t_2 = 0 \qquad (*)$$

Weiterhin soll gelten:

$$f(A_2) = \left\{(a + c)x + (b + d)y + (t_1 + t_2) = 0\right\} = H_2$$

$$\Leftrightarrow \quad a + c = 1 \ \wedge \ b + d = 1 \ \wedge \ t_1 + t_2 = -2 \qquad (\#)$$

Aus $(*)$ und $(\#)$ erhalten wir:

- $t_1 - t_2 = 0 \ \wedge \ t_1 + t_2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 \ \wedge \ t_1 + t_2 = -2 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = t_2 = -1$
- $a - c = 1 \ \wedge \ a + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a = 2 \ \wedge \ a + c = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \ \wedge \ c = 0$
- $b - d = -1 \ \wedge \ b + d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 0 \ \wedge \ b + d = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \ \wedge \ d = 1$

Damit folgt:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Insgesamt erhalten wir also die gesuchte Hyperbel durch

$$H = f(N) = \left\{(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 1\right\} = \left\{x^2 - 2x - y^2 + 2y = 1\right\}.$$

H20 – T2 – A5

Gegeben ist die Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2xy + s^2y^2 + 2x + 2sy + 1 = 0 \right\};$$

dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den affinen Typ von Q_s.

b) Es sei nun $s = 3$ gewählt; ferner sei

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1 \right\}.$$

Man entscheide, ob es eine bijektive affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t, \qquad \text{mit} \qquad f(Q_3) = K$$

gibt, und gebe gegebenenfalls eine geeignete Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen geeigneten Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ an.

Lösungsvorschlag

a) Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2xy + 2x + s^2y^2 + 2sy + 1 \\ &= x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 - (y+1)^2 + s^2y^2 + 2sy + 1 \\ &= (x + (y+1))^2 + (s^2-1)y^2 + 2(s-1)y \end{aligned}$$

1. Fall: $|s| \neq 1$

$$\begin{aligned} 0 &= (x+y+1)^2 + (s^2-1)\left[y^2 + 2y \cdot \frac{1}{s+1} + \left(\frac{1}{s+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{s+1}\right)^2 \right] \\ &= (x+y+1)^2 + (s^2-1)\left[y + \frac{1}{s+1} \right]^2 - \frac{s-1}{s+1} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{s-1}{s+1} &= (x+y+1)^2 + (s^2-1)\left[y + \frac{1}{s+1} \right]^2 \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{s+1}{s-1}(x+y+1)^2 + \underbrace{(s+1)^2}_{>0}\left[y + \frac{1}{s+1} \right]^2 \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} Q_s \text{ ist eine Ellipse} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{s+1}{s-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s > 1 \quad \text{oder} \quad s < -1 \\ Q_s \text{ ist eine Hyperbel} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{s+1}{s-1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < s < 1 \end{aligned}$$

2. Fall: $s = 1$

$0 = (x + y + 1)^2$, das heißt, Q_s ist eine Gerade.

3. Fall: $s = -1$

$0 = (x + y + 1)^2 - (4y)$, das heißt, Q_s ist eine Parabel.

b) Sowohl Q_3 als auch K sind Ellipsen und damit affin äquivalent. Folglich gibt es ein f wie gesucht. Mit Teil a) folgt:

$$Q_3: \quad 1 = 2 \cdot (x + y + 1)^2 + 4^2 \left[y + \frac{1}{4} \right]^2 = \underbrace{(\sqrt{2}(x + y + 1))^2}_{=:u} + \underbrace{(4y + 1)^2}_{=:v}$$

Damit bestimmen wir unmittelbar

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2} \\ 4y + 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:t}$$

für das $f(Q_3) = K$ gilt.

F20 – T3 – A5

Zeigen Sie, dass der Kegelschnitt

$$H = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : -11x^2 - 4y^2 + 24xy + 26x - 32y - 20 = 0\}$$

eine Hyperbel ist und bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten von H.

Lösungsvorschlag

Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned}
0 &\overset{(*)}{=} -4y^2 + 24xy - 32y - 11x^2 + 26x - 20 \\
&= -4\left(y^2 - 6xy + 8y\right) - 11x^2 + 26x - 20 \\
&= -4\left(y^2 - 2y(3x-4) + (3x-4)^2 - (3x-4)^2\right) - 11x^2 + 26x - 20 \\
&= -4(y - (3x-4))^2 + 4 \cdot (3x-4)^2 - 11x^2 + 26x - 20 \\
&= -4(y - 3x+)^2 + 36x^2 - 96x + 64 - 11x^2 + 26x - 20 \\
&= -4(y - 3x + 4)^2 + 25x^2 - 70x + 44 \\
&= -4(y - 3x + 4)^2 + 25\left(x^2 - 2x \cdot \frac{7}{5} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2\right) + 44 \\
&= -4(y - 3x + 4)^2 + 25\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - 5 \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= 5\left(x - \frac{7}{5}\right)^2 - \frac{4}{5}(y - 3x + 4)^2 \\
&= \Bigg(\underbrace{\sqrt{5}\left(x - \frac{7}{5}\right)}_{=:v}\Bigg)^2 - \Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{4}{5}}(y - 3x + 4)}_{=:w}\Bigg)^2
\end{aligned}$$

(∗) Beginn der quadratischen Ergänzung mit y, da für diese Variable der Koeffizient schöner ist.

Folglich ist die affine Normalform von H gegeben durch $N = \{v^2 - w^2 = 1\}$ und H ist eine Hyperbel.

Die Asymptoten von H erhalten wir, wenn wir in den Asymptoten $\{v - w = 0\}$ und $\{v + w = 0\}$ von N die Koordinaten v und w wie oben definiert substituieren. Damit folgt:

$$A_1 = \left\{\sqrt{5}\left(x - \frac{7}{5}\right) - \sqrt{\frac{4}{5}}(y - 3x + 4) = 0\right\}$$

und

$$A_2 = \left\{\sqrt{5}\left(x - \frac{7}{5}\right) + \sqrt{\frac{4}{5}}(y - 3x + 4) = 0\right\}$$

sind die Asymptoten von H.

H19 – T1 – A2

Sei Q_s die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s : x^2 + 2xy + (s+1)y^2 + 2x - (2s^2 - 2)y + 1 = 0.$$

Bestimmen Sie den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit von s.

Lösungsvorschlag

Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + 2xy + 2x + (s+1)y^2 - \left(2s^2 - 2\right) y + 1 \\
&= x^2 + 2x(y+1) + (y+1)^2 - (y+1)^2 + (s+1)y^2 - (2s-2)y + 1 \\
&= (x+y+1)^2 - y^2 - 2y - 1 + (s+1)y^2 - \left(2s^2 - 2\right) y + 1 \\
&= (x+y+1)^2 + sy^2 - 2s^2 y \\
&= (x+y+1)^2 + s\left(y^2 - 2y \cdot s + s^2 - s^2\right) \\
&= (x+y+1)^2 + s(y-s)^2 - s^3 \\
\Leftrightarrow \quad Q_s : &\quad (x+y+1)^2 + s(y-s)^2 = s^3
\end{aligned}$$

1. Fall: $s = 0$ (**Typ**: Eine Gerade)

$Q_0 : \quad (x+y+1)^2 = 0$

2. Fall: $s > 0$ (**Typ**: Ellipse)

$$Q_s : \quad \underbrace{\frac{1}{s^3}}_{>0} (x+y+1)^2 + \underbrace{\frac{s}{s^3}}_{>0} (y-s)^2 = 1$$

3. Fall: $s < 0$ (**Typ**: Hyperbel)

$$Q_s : \quad \underbrace{\frac{1}{s^3}}_{<0} (x+y+1)^2 + \underbrace{\frac{s}{s^3}}_{=\frac{1}{s^2}>0} (y-s)^2 = 1$$

F19 – T2 – A5

Betrachten Sie für $t \in \mathbb{R}$ den Kegelschnitt

$$K_t := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + (t-1)y^2 + 2xy - 4x + (4t-12)y + (4t-5) = 0 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t den affinen Typ von K_t.

b) Geben Sie für $t = 1$ eine bijektive affine Abbildung an, die K_1 auf

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy = 1 \right\}$$

abbildet.

Lösungsvorschlag

a) Um den affinen Typ der Quadrik zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + 2xy - 4x + (t-1)y^2 + (4t-12)y + (4t-5) \\ &= x^2 + 2x(y-2) + (y-2)^2 - (y-2)^2 + (t-1)y^2 + (4t-12)y + (4t-5) \\ &= (x+y-2)^2 - y^2 + 4y - 4 + (t-1)y^2 + (4t-12)y + (4t-5) \\ &= (x+y-2)^2 + (t-2)y^2 + (4t-8)y + (4t-9) \\ &= (x+y-2)^2 + (t-2)\left(y^2 + 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) + (4t-9) \\ &= (x+y-2)^2 + (t-2)(y+2)^2 - 4(t-2) + (4t-9) \\ &= (x+y-2)^2 + (t-2)(y+2)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \quad K_t: \quad 1 &= (t-2)(y+2)^2 + (x+y-2)^2 \end{aligned}$$

1. Fall: $t = 2$ (**Typ**: Zwei parallele Geraden)

$K_2: \quad 1 = (x+y-2)^2$

2. Fall: $t > 2$ (**Typ**: Ellipse)

$K_t: \quad 1 = \underbrace{(t-2)}_{>0}(y+2)^2 + \underbrace{1}_{>0} \cdot (x+y-2)^2$

3. Fall: $t < 2$ (**Typ**: Hyperbel)

$K_t: \quad 1 = \underbrace{(t-2)}_{<0}(y+2)^2 + \underbrace{1}_{>0} \cdot (x+y-2)^2$

b) Bestimme für K_1 und H die affine Normalform:

$$K_1: \quad 1 = \underbrace{(x+y-2)}_{=:v}^2 - \underbrace{(y+2)}_{=:w}^2$$

Damit ist $N = \{v^2 - w^2 = 1\}$ die affine Normalform von K_1 und für

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$f(K_1) = N.$$

Sei außerdem

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+w \\ v-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix},$$

dann gilt:

$$g^{-1}(H) = \{(v+w)(v-w) = 1\} = \left\{v^2 - w^2 = 1\right\} = N.$$

Um g zu definieren nutzen wir den Trick aus dem Input für quadratische Polynome ohne rein quadratischen Term, wir definieren also neue Variablen v und w durch $x = v + w$ und $y = v - w$.

Insgesamt erhalten wir so für $g \circ f$:

$$g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

und insbesondere

$$(g \circ f)(K_1) = g\left(f(K_1)\right) = g(N) = H.$$

F18 – T2 – A5

Gegeben seien die Kegelschnitte

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - y^2 - 2xy - 4 = 0\} \quad \text{und} \quad K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy + 1 = 0\}.$$

a) Bestimmen Sie den affinen Typ von H und von K.

b) Bestimmen Sie eine affine Abbildung, die H auf K abbildet.

Lösungsvorschlag

a) Um den affinen Typ der Quadriken zu bestimmen, überführen wir sie in affine Normalform:

$$\begin{aligned} H\colon \quad 0 &= -y^2 - 2xy + 3x^2 - 4 \\ &= -\left(y^2 + 2y \cdot x + x^2 - x^2\right) + 3x^2 - 4 \\ &= -(y - x)^2 + 4x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \underbrace{x^2}_{=:v} - \Big[\underbrace{\frac{1}{2}(y - x)}_{=:w}\Big]^2 \end{aligned}$$

das heißt, H hat den affinen Typ „Hyperbel“.

Seien $x = w + v$ und $y = w - v$, dann folgt für K:

$$\begin{aligned} k\colon \quad 0 &= (w + v)(w - v) + 1 \\ &= w^2 - v^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= v^2 - w^2 \end{aligned}$$

Damit folgt, dass der affine Typ von K ebenfalls „Hyperbel“ ist.

b) Wir definieren

$$h\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dann gilt wegen a):

$$h(H) = \left\{v^2 - w^2 = 1\right\}.$$

Weiterhin definieren wir

$$k\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w + v \\ w - v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Dann gilt erneut wegen a):

$$k\left(\left\{v^2 - w^2 = 1\right\}\right) = K.$$

Somit erhalten wir die gesuchte affine Abbildung durch

$$k \circ h\colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

denn nach Definition gilt

$$(k \circ h)(H) = k(h(H)) = k\left(\left\{v^2 - w^2 = 1\right\}\right) = K.$$

F18 – T3 – A5

Für welche reellen Parameterwerte λ ist

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (\lambda^2-1)x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 1 = 0\right\}$$

eine Ellipse, eine Parabel, eine Hyperbel?

Lösungsvorschlag

Wir bestimmen die affine Normalform der Quadrik in Abhängigkeit von λ:

$$\begin{aligned}
0 &= 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_2 + \left(\lambda^2-1\right)x_1^2 + 4x_1 + 1\\
&= 2\left(x_2^2 - x_1x_2 + 2x_2\right) + \left(\lambda^2-1\right)x_1^2 + 4x_1 + 1\\
&= 2\left(x_2^2 - 2x_2\cdot\left(\frac{x_1}{2}-1\right) + \left(\frac{x_1}{2}-1\right)^2 - \left(\frac{x_1}{2}-1\right)^2\right) + \left(\lambda^2-1\right)x_1^2 + 4x_1 + 1\\
&= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 - 2\left(\frac{x_1^2}{4} - x_1 + 1\right) + \left(\lambda^2-1\right)x_1^2 + 4x_1 + 1\\
&= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \left(\lambda^2 - \frac{3}{2}\right)x_1^2 + 6x_1 - 1
\end{aligned}$$

1. Fall: $\lambda^2 = \frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$0 = 2\left(x_2 - \tfrac{x_1}{2} + 1\right)^2 + 6x_1 - 1 = \underbrace{\left[\sqrt{2}\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)\right]}_{=:v}^2 - \underbrace{(1 - 6x_1)}_{=:w} = v^2 - w$$

Damit ist die Quadrik eine Parabel.

2. Fall: $\lambda^2 \neq \frac{3}{2}$ und $\mu := \lambda^2 - \frac{3}{2} \neq 0$

$$\begin{aligned}
0 &= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \mu\left(x_1^2 + \frac{1}{\mu}\cdot 6x_1\right) - 1\\
&= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \mu\left(x_1^2 + 2x_1\cdot\frac{3}{\mu} + \left(\frac{3}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{3}{\mu}\right)^2\right) - 1\\
&= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \mu\left(x_1 + \frac{3}{\mu}\right)^2 - \frac{9}{\mu} - 1\\
\Leftrightarrow\quad 1 + \frac{9}{\mu} &= 2\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \mu\left(x_1 + \frac{3}{\mu}\right)^2
\end{aligned}$$

Es gilt $\mu = \lambda^2 - \frac{3}{2} \overset{(*)}{\geq} -\frac{3}{2}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und daher $1 + \frac{9}{\mu} \neq 0$ für alle möglichen Werte von μ.

Somit folgt:

$$1 = \frac{2\mu}{9+\mu}\left(x_2 - \frac{x_1}{2} + 1\right)^2 + \frac{\mu^2}{9+\mu}\left(x_1 + \frac{3}{\mu}\right)^2$$

Anhand der Vorzeichen der Koeffizienten vor den beiden quadratischen Termen können wir entscheiden, welcher affine Typ vorliegt. Mithilfe dieser Überlegung erhalten wir die folgende Klassifikation:

Die Quadrik ist eine Ellipse

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\mu}{9+\mu} > 0 \quad \textbf{und} \quad \frac{\mu^2}{9+\mu} > 0 \\
&\overset{(\#)}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2\mu}{9+\mu} > 0 \quad \textbf{und} \quad 9+\mu > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\mu > 0 \quad \textbf{und} \quad 9+\mu > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu > 0 \quad \textbf{und} \quad 9+\mu > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \frac{3}{2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^2 > \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda < -\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \textbf{oder} \quad \lambda > \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

(#) $\mu^2 \geq 0$

Die Quadrik ist eine Hyperbel

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \text{Die Koeffizienten } \frac{2\mu}{9+\mu} \text{ und } \frac{\mu^2}{9+\mu} \text{ haben unterschiedliche Vorzeichen} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\mu}{9+\mu} \cdot \frac{\mu^2}{9+\mu} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\mu^3 < 0, \quad \text{denn } 9+\mu > 0 \text{ nach } (*) \\
&\Leftrightarrow \quad \mu < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \frac{3}{2} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda^2 < \frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad -\sqrt{\frac{3}{2}} < \lambda < \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die gegebene Quadrik für

- $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ eine **Parabel** ist.
- $\lambda < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ oder $\lambda > \sqrt{\frac{3}{2}}$ eine **Ellipse** ist.
- $-\sqrt{\frac{3}{2}} < \lambda < \sqrt{\frac{3}{2}}$ eine **Hyperbel** ist.

10 Euklidische Normalform von Quadriken

Im letzten Kapitel betrachten wir noch einmal Quadriken und deren Normalformen. Dieses Mal widmen wir uns jedoch der sogenannten euklidischen Normalform, die sich von der zuletzt thematisierten affinen Normalform einer Quadrik unterscheidet.

Während wir bei der affinen Normalform einer Quadrik beliebige affine Transformationen nutzen, um diese in eine standardisierte Form zu überführen, dürfen wir für die euklidische Normalform nur auf Bewegungen zurückgreifen. Dies wirkt sich unmittelbar auf die Normalform der Quadriken aus. Während bei der affinen Normalform nur der Typ, nicht jedoch die exakte Form der Quadrik erhalten bleibt, ist bei der euklidischen Normalform neben dem Typ auch die exakte Form unverändert. Dies hängt mit der Eigenschaft von Bewegungen zusammen, Abstände unverändert zu lassen. Aus diesem Grund kann aus einer echten Ellipse unter einer Transformation basierend auf Bewegungen beispielsweise nie ein Kreis werden.

Wie auch bei der affinen Normalform beschränken wir uns hier auf Quadriken im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$. Bevor wir uns genauer mit dem Verfahren zur Bestimmung der euklidischen Normalform beschäftigen, müssen wir uns etwas Theorie widmen. Motivation dafür ist die folgende Beobachtung:

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ eine Quadrik, dann gibt es ein quadratisches Polynom

$$P(x, y) = a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c$$

derart, dass

$$Q = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

Wir können die Quadrik für

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b \coloneqq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

dann aber auch wie folgt beschreiben:

$$Q : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

Wenn uns also das quadratische Polynom gegeben ist, durch dessen Nullstellenmenge eine Quadrik Q bestimmt ist, können wir daraus immer eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$, einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ermitteln, sodass Q die oben beschriebene Form besitzt. Umgekehrt erhalten wir für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ mit $A \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$ über die obige Gleichung auch immer eine Quadrik.

Diese Darstellung ist nun die Motivation, uns weiter mit den Besonderheiten symmetrischer reeller Matrizen zu beschäftigen. Sie haben schöne Eigenschaften, die uns beim Bestimmen der euklidischen Normalform helfen können. Eine davon wiederholen wir an dieser Stelle – wir haben sie bereits im Zusammenhang mit Skalarprodukten kennengelernt.

Satz 10.1

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

a) Alle Eigenwerte der Matrix A sind reell.

b) Es gibt eine Basis aus Eigenvektoren zur Matrix A, das heißt, A ist diagonalisierbar.

Der obige Satz garantiert uns also, dass wir die Matrix A immer diagonalisieren können. Noch besser macht dies nur die folgende Aussage:

Satz 10.2

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt für Eigenvektoren v_i und v_j zu unterschiedlichen(!) Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_j$ von A:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix stehen also senkrecht aufeinander.

Mit diesem Wissen können wir das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren nutzen, um für jeden der Eigenräume eine Orthonormalbasis zu bestimmen. Fügen wir die Vektoren dann zusammen, erhalten wir eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Im Ergebnis erhalten wir dann den folgenden Satz.

Satz 10.3

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A. Insbesondere ist $M^T AM$ für die Matrix $M := (v_1 \cdots v_n)$ eine Diagonalmatrix mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Dass es diese Verbindung zwischen der symmetrischen Matrix A einer Quadrik und Skalarprodukten gibt, hat übrigens einen gut nachvollziehbaren Grund. Grundlage für Skalarprodukte waren symmetrische Bilinearformen, die zusätzlich auch positiv definit sind. Wenn wir eine solche symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit darstellender Matrix

$$M_{\mathcal{E}}(s) = (a_{ij})$$

bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ betrachten, dann erhalten wir daraus den quadratischen Anteil des quadratischen Polynoms zu einer Quadrik, indem wir definieren:

$$q(x) := s(x,x) = x^T M_{\mathcal{E}} x = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ij} x_i x_j.$$

Bei $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto q(x)$ handelt es sich um eine sogenannte *quadratische Form*.

Betrachten wir an einem Beispiel, wie wir Satz 10.3 nutzen können. Das Vorgehen benötigen wir später, um die euklidische Normalform einer Quadrik zu bestimmen.

Beispiel 10.4

Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist diese reelle 2×2-Matrix symmetrisch, wir können also Satz 10.3 anwenden. Dafür bestimmen wir zunächst die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren mithilfe der bekannten Techniken.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (41 - \lambda)(34 - \lambda) - 144 = \lambda^2 - 75\lambda + 1250 = (\lambda - 50)(\lambda - 25)$$

Da Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ von A genau die Lösungen von $\chi_A(\lambda) = 0$ sind, hat A die Eigenwerte 50 und 25. Wir bestimmen für beide die Eigenräume.

$$\operatorname{Eig}(A, 50) = \ker(A - 50E_2) = \ker \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ -12 & -16 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$\operatorname{Eig}(A, 25) = \ker(A - 25E_2) = \ker \begin{pmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer symmetrischen Matrix orthogonal zueinander sind, genügt eine Normierung, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ zu erhalten. Diese ist gegeben durch:

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun diese Orthonormalbasis als Spaltenvektoren in eine Matrix M schreiben, erhalten wir

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

wobei M aufgrund der Definition eine orthogonale Matrix ist, das heißt, es gilt $M^T = M^{-1}$. Insbesondere gilt:

$$M^T A M = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} =: D.$$

Haben wir also eine Quadrik Q, die gegeben ist durch $Q\colon x^T A x = 0$ mit $x \in \mathbb{R}^2$, so erhalten wir durch die Koordinatentransformation $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y \mapsto x = My$ die folgende Quadrik $\tilde{Q}$ bezüglich der neuen Koordinaten y:

$$\tilde{Q}\colon (My)^T A(My) = y^T M^T A M y = y^T D y = 50y_1^2 + 25y_2^2 = 0.$$

Wir haben durch f also die gemischt-quadratischen Terme eliminiert. Insbesondere handelt es sich bei f um eine Bewegung, da M eine orthogonale Matrix ist.

Wählen wir M derart, dass $\det(M) = 1$, so handelt es sich bei M um eine Drehung, für $\det(M) = -1$ erhalten wir eine Spiegelung. Da in manchen Examensaufgaben, etwa in Aufgabe 5 aus Thema 2 im Herbst 2022, eine geometrische Interpretation der Bewegung oder eine Skizze der Quadrik verlangt wird, kann es sinnvoll sein, die Matrix M stets so zu definieren, dass $\det(M) = 1$ gilt. Dies können wir durch eine geschickte Platzierung der Basisvektoren in den Spalten oder eine günstige Wahl von Basisvektoren erreichen, die negative Vorzeichen an passenden Stellen besitzen.

Im obigen Beispiel kann die Quadrik $\tilde{Q}$ durch eine weitere Termumformung direkt in die euklidische

Normalform überführt werden. Es kann aber auch noch ein weiterer Schritt notwendig sein, um die euklidische Normalform zu bestimmen. Sie ist in diesen Fällen aber nur eine Translation entfernt. Auch für diesen letzten Schritt betrachten wir ein Beispiel, wobei wir dafür das vorangegangene Beispiel erweitern, um uns den ersten Schritt auf dem Weg zur euklidischen Normalform sparen zu können.

Beispiel 10.5 (Herbst 2022, Thema 3, Aufgabe 5)

Wir betrachten die durch

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 30x - 40x - 25 = 0$$

gegebene Quadrik E.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von E.

Wir übersetzen die Gleichung der Quadrik zunächst in eine andere Form. Seien dafür

$$A := \begin{pmatrix} 41 & -12 \\ -12 & 34 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} -30 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := -25.$$

Dann gilt:

$$E\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

Wie oben bestimmen wir ausgehend von der Matrix A die Koordinatentransformation

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Wenden wir diese auf E an, so erhalten wir die neue Quadrik

$$E'\colon \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T \left(M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) + c = 0.$$

Wenn wir nun auch noch das Ergebnis für $b^T \left(M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$ ermitteln, erhalten wir insgesamt

$$E'\colon 50u^2 + 25v^2 + \begin{pmatrix} 0 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c = 50u^2 + 25v^2 - 50v - 25 = 0.$$

Da hier v sowohl quadratisch als auch linear in der Gleichung auftaucht, müssen wir noch einmal quadratisch ergänzen, um beide Variablen ausschließlich in quadratischer Form vorliegen zu haben.

$$\begin{aligned} 0 &= 50u^2 + 25v^2 - 50v - 25 \\ &= 50u^2 + 25(v^2 - 2v) - 25 \\ &= 50u^2 + 25(v^2 - 2v + 1 - 1) - 25 \\ &= 50u^2 + 25(v-1)^2 - 50 \end{aligned}$$

Bei der Suche nach der euklidischen Normalform dürfen wir lediglich Bewegungen zur Koordinatentransformation nutzen. Aus diesem Grund bleiben hier – im Gegensatz zur affinen Normalform – die Koeffizienten vor den Klammern stehen. Dadurch erhalten wir als Koordinatentransformation eine Translation, bei der es sich um eine Bewegung handelt. Wir definieren also

$$E'\colon 50(\underbrace{u}_{=:s})^2 + 25(\underbrace{v-1}_{=:t})^2 - 50 = 0$$

und erhalten damit durch die Koordinatentransformation

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Quadrik

$$E''\colon 50s^2 + 25t^2 - 50 = 0.$$

Mit unserem Wissen, das wir im Zusammenhang mit der affinen Normalform von Quadriken gewonnen haben, können wir nach einem Blick auf die Koordinaten in den Abbildungsvorschriften direkt schlussfolgern, dass für

$$h := g \circ f^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g\left(f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \qquad \text{gilt:} \qquad h(E) = E''.$$

Insbesondere ist h als Verkettung zweier Bewegungen selbst eine Bewegung und wegen $f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ insbesondere

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hier bestätigt sich die Aussage, dass es sich bei h um eine Bewegung handelt, denn die Matrix M^T ist – wie auch M selbst – orthogonal. Über diese Eigenschaft haben wir gerade Bewegungen definiert.

Die euklidische Normalform erhalten wir dann nach einer weiteren kleinen Umformung der Gleichung. Bevor wir dies tun, folgt jedoch zunächst eine Auflistung der euklidischen Normalformen von Quadriken im $\mathbb{R}^2$.

Normalform	Bezeichnung
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	Ellipse
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	Hyperbel
$\frac{x^2}{\alpha^2} - 2y = 0$	Parabel
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 0$	Punkt
$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$	Zwei sich schneidende Geraden
$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1$	Zwei parallele Geraden
$\frac{x^2}{\alpha^2} = 0$	Eine Gerade
$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = -1$	Leere Menge
$\frac{x^2}{\alpha^2} = -1$	Leere Menge

In diesen Gleichungen sind $\alpha, \beta > 0$ und sie sind die Längen der *Hauptachsen* der Quadrik.

Mit diesem Wissen können wir unser Beispiel nun abschließen.

Beispiel 10.6 (Fortsetzung von Beispiel 10.5)

Wir haben bereits bestimmt das E durch Transformation mit h in die Form

$$E'': 50s^2 + 25t^2 - 50 = 0$$

überführt werden kann. Basierend darauf ermitteln wir

$$E'': 50s^2 + 25t^2 - 50 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 + \frac{1}{2}t^2 = 1.$$

Wir sehen somit, dass E eine Ellipse mit der euklidischen Normalform

$$E'': \frac{s^2}{1^2} + \frac{t^2}{\sqrt{2}^2} = 1$$

ist.

Manchmal wird in Examen nach Haupt- oder Symmetrieachsen bzw. Mittelpunkten von Quadriken gefragt. Um diese zu bestimmen, gehen wir analog zur affinen Normalform vor. Wir überlegen uns zunächst, welche Mengen das bezüglich der euklidischen Normalform sind, und nutzen im Anschluss die ermittelte Bewegung h bzw. deren Umkehrung h^{-1}, um diese Mengen bezüglich der ursprünglichen Quadrik Q zu ermitteln.

Betrachten wir hierfür den Rest der Examensaufgabe aus dem Beispiel 10.5.

Beispiel 10.7 (Fortsetzung Beispiel 10.5)

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Symmetrieachsen von E.

Wir wissen, dass der Mittelpunkt der euklidischen Normalform E'' im Ursprung liegt. Somit gilt für den Mittelpunkt $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ von E, dass dieser durch h auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abgebildet wird. Aus dieser Überlegung resultiert das homogene lineare Gleichungssystem

$$h\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad M^T \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Symmetrieachsen der euklidischen Normalform E'' sind gegeben durch

$$S_1 = \{s = 0\} \quad \text{und} \quad S_2 = \{t = 0\}.$$

Wir erhalten also die Symmetrieachsen, indem wir das Bild von S_1 und S_2 unter h^{-1} betrachten. Wir erhalten damit die Symmetrieachsen s_1 und s_2 von E zu

$$s_1 = \left\{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y = 0\right\} \quad \text{und} \quad s_2 = \left\{\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 1\right\}.$$

Die Bilder unter h^{-1} ermitteln wir wie bereits für die affinen Normalformen, indem wir die aus h ablesbare Darstellung der Koordinaten s und t in den alten Variablen x und y in die Gleichungen von S_1 und S_2 einsetzen. Für h gilt nämlich:

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4x - 3y \\ 3x + 4y - 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 10.8 (Metrische Äquivalenz)

Es seien $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^n$ Quadriken. Wir sagen, Q_1 und Q_2 sind *metrisch äquivalent* oder *kongruent*, wenn es eine Bewegung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, für die $f(Q_1) = Q_2$ gilt, die also Q_1 auf Q_2 abbildet.

Gemäß dieser Definition sind eine Quadrik und ihre euklidische Normalform stets metrisch äquivalent. Insbesondere sind zwei Quadriken Q_1 und Q_2 in $\mathbb{R}^2$ (aber auch in $\mathbb{R}^n$) mit derselben euklidischen Normalform N metrisch äquivalent. Es gibt dann nämlich

$$f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ Bewegung mit } f_1(Q_1) = N \quad \text{und} \quad f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ Bewegung mit } f_2(Q_2) = N.$$

Insgesamt erhalten wir dann, dass $f_2^{-1} \circ f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ebenfalls eine Bewegung ist, für die $(f_2^{-1} \circ f_1)(Q_1) = f_2^{-1}(f(Q_1)) = f_2^{-1}(N) = Q_2$ gilt.

H24 – T2 – A5

Sei $Q_s \subset \mathbb{R}^2$ die vom reellen Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik mit der Gleichung

$$sx^2 + 2\sqrt{3}xy + (s-2)y^2 + \sqrt{3}(s+1)x + (s+1)y + 2 = 0.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit von s.

Lösungsvorschlag

Definiere $A := \begin{pmatrix} s & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & s-2 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} \sqrt{3}(s+1) \\ s+1 \end{pmatrix}$ und $c := 2$. Dann ist Q_s gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

Wir bestimmen zunächst eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Dafür ermitteln wir als Erstes die Eigenwerte von A als Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - 2E_2) = (s-\lambda)(s-2-\lambda) - 3 = \lambda^2 - (2s-2)\lambda + s(s-2) - 3.$$

Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2s - 2 \pm \sqrt{(2s-2)^2 - 4s(s-2) + 12}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{s-3, s+1\}$$

Folglich sind $s-3$ und $s+1$ die Eigenwerte von A. Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A, s-3) = \ker(A - (s-3)E_2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(A, s+1) = \ker(A - (s+1)E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Damit ist

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Definiere nun noch

$$M := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist M per Definition orthogonal, das heißt $M^T = M^{-1}$. Außerdem gilt

$$M^T A M = \begin{pmatrix} s-3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}.$$

Definiere außerdem neue Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$. Dann ergibt sich die neue Quadrik Q_s' im (u, w)-Koordinatensystem zu

$$Q_s' : \quad 0 = \left[M \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\right]^T A \left[M \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\right] + b^T \cdot M \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + c$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} s-3 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} + 2 \\
&= (s-3)u^2 + (s+1)w^2 + 2(s+1)w + 2 \\
&= (s-3)u^2 + (s+1)(w+1)^2 - (s+1) + 2
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir

$$
Q_s' \colon \quad s - 1 = (s-3)u^2 + (s+1)\underbrace{(w+1)}_{=:v}{}^2
$$

und mit der neuen Koordinate v die Quadrik Q_s'' im (u, v)-Koordinatensystem zu

$$
Q_s'' \colon \quad s - 1 = (s-3)u^2 + (s+1)v^2.
$$

Um die euklidischen Normalformen sowie den affinen Typ in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ zu ermitteln, machen wir eine Fallunterscheidung für die Vorzeichen der Koeffizienten. Für einen systematischen Überblick über die Fälle legen wir eine Vorzeichentabelle an:

		-1		1		3	
$s-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
$s+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
$s-1$	$-$		$-$		$+$		$+$

Mit dieser Fallunterscheidung können wir nun eine Tabelle anlegen, in der strukturiert alle möglichen Kombinationen der Vorzeichen aufgeführt sind.

Fall	**Euklidische Normalform**	**Affiner Typ**
$s < -1$	$\frac{u^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s-3}}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}^2} = 1$	Ellipse
$s = -1$	$\frac{u^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s-3}}^2} = 1$	Zwei parallele Geraden
$-1 < s < 1$	$\frac{u^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s-3}}^2} - \frac{v^2}{\sqrt{\frac{-(s-1)}{s+1}}^2} = 1$	Hyperbel
$s = 1$	$-\frac{u^2}{\sqrt{\frac{1}{-(s-3)}}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{\frac{1}{s+1}}^2} = 0$	Zwei sich schneidende Geraden
$1 < s < 3$	$-\frac{u^2}{\sqrt{\frac{s-1}{-(s-3)}}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}^2} = 1$	Hyperbel
$s = 3$	$\frac{v^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}^2} = 1$	Zwei parallele Geraden
$s > 3$	$\frac{u^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s-3}}^2} + \frac{v^2}{\sqrt{\frac{s-1}{s+1}}^2} = 1$	Ellipse

F24 – T1 – A3

Gegeben sei die Quadrik

$$P: \quad X^2 - 2XY + Y^2 - 3X + Y + 4 = 0.$$

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von P und zeigen Sie, dass P eine Parabel ist.

b) Bestimmen Sie den Scheitelpunkt und die Symmetrieachse der Parabel P.

Lösungsvorschlag

a) Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c := 4$.

Dann gilt

$$E: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0.$$

Bestimme nun die Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

Es ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Folglich sind 0 und 2 als Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ die Eigenwerte von A.

Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A, 0) = \ker(A - 0 \cdot E_2) = \ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(A, 2) = \ker(A - 2 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Damit ist $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine gesuchte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Definiere $M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Es ist M per Definition orthogonal, das heißt

$$M^{-1} = M^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt $M^T A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: D$.

Durch die Definition der Matrix M erhalten wir nach einer entsprechenden Transformation den quadratischen Teil $2v^2 + 0v^2$. Grundsätzlich kann die Reihenfolge der Spaltenvektoren in M auch vertauscht werden, in diesem Fall lautet der quadratische Teil nach Transformation dann $0v^2 + 2v^2$. Es kann in manchen Situationen aber einfacher sein, die Normalform zu erkennen, wenn die zweite Koordinate im quadratischen Teil entfällt.

Definiere weiterhin $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich die neue Quadrik P' zu

$$
\begin{aligned}
P': \quad 0 &= \left(M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)^T \cdot A \cdot M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c \\
&= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T M^T A M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c \\
&= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c \\
&= 2u^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}u - \frac{2}{\sqrt{2}}v + 4 \\
&= 2\left(u^2 - 2u \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}v + 4 \\
&= 2\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}v + 3 \\
&= 2\underbrace{\left(u - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}_{=:\,s} - \frac{2}{\sqrt{2}}\underbrace{\left(v - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}_{=:\,t}
\end{aligned}
$$

Mit den Koordinaten s und t ergibt sich die neue Quadrik P'' zu

$$
P'': \quad 2s^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}t = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{2}s^2 - 2t = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{s^2}{\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^2} - 2t = 0
$$

P'' ist die euklidische Normalform von P. Anhand der euklidischen Normalform ist unmittelbar zu erkennen, dass es sich bei P'' und damit auch bei P um eine Parabel handelt.

b) Definiere

$$
f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.
$$

Es gilt $f(P) = P''$.

Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Scheitelpunkt von P'' und $\{s = 0\}$ die Spiegelachse von P'' sind, sind

$f^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Scheitelpunkt von P und

$f^{-1}(\{s = 0\}) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0\right\} = \{x - y - 1 = 0\}$ die Spiegelachse von P.

F24 – T3 – A5

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix, die nicht die Einheitsmatrix ist. Weiter sei $\text{Spur}(A) = 2$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x = x^T x\}$$

eine Quadrik beschreibt, und bestimmen Sie deren Typ.

Lösungsvorschlag

Nach Angabe gilt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2-a \end{pmatrix}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ wobei nicht gleichzeitig $a = 1$ und $b = 0$ gelten darf.

Damit folgt

$$\begin{aligned} Q &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T (A - E_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (a-1)\,x^2 + (1-a)\,y^2 + 2bxy = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $a \neq 1$ oder $b \neq 0$ ist, ist Q als Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms eine Quadrik.

Da $A - E_4 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, gibt es $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal mit $M^T (A - E_4) M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

wobei λ_1, λ_2 die reellen Eigenwerte von $A - E_4$ sind. Bezüglich der Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ hat Q dann die Form $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2 = 0$. Somit ist der Typ von Q durch die Eigenwerte von $A - E_4$ bestimmt. Diese werden nun ermittelt, wobei $B := A - E_4$.

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_2) = (a - 1 - \lambda)(1 - a - \lambda) - b^2 = (\lambda + (1-a)) - b^2 = \lambda^2 - (1-a)^2 - b^2$$

Damit sind $\sqrt{(1-a)^2 + b^2}$ und $-\sqrt{(1-a)^2 + b^2}$ die Eigenwerte von $A - E_4$. (Beachte: Es gilt $(1-a)^2 + b^2 > 0$, da $a \neq 1$ oder $b \neq 0$ und damit 1. oder 2. Summand größer als 0).

Wegen $\sqrt{(1-a)^2 + b^2} > 0$ und $-\sqrt{(1-a)^2 + b^2} < 0$ ist Q folglich vom Typ „Zwei sich schneidende Geraden“.

H23 – T3 – A4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = -2$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(P) = 1$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass

$$P^T AP = D$$

gilt.

Lösungsvorschlag

Wir stellen zunächst fest, dass die Matrix A symmetrisch ist, das heißt $A^T = A$. Folglich ist sie reell diagonalisierbar und Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht zueinander.

Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ von A und zeigen, dass -2 eine Nullstelle davon ist.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = (-1-\lambda)^2(2-\lambda) + 4 + 4 - (2-\lambda) - 4(-1-\lambda) - 4(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16.$$

Offensichtlich gilt $\chi_A(-2) = 0$, das heißt, -2 ist ein Eigenwert von A. Durch Polynomdivision erhalten wir zudem

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-4),$$

das heißt, es ist 4 der zweite Eigenwert von A.

Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

- $\operatorname{Eig}(A,-2) = \ker(A+2E_3) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(A,4) = \ker(A-4E_3) = \ker\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & -24 & 12 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Bestimme nun mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis des Eigenraums zum Eigenwert -2 von A, wobei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

- Es sei $w_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann definieren wir $b_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Es sei $w_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 \right\rangle \cdot b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Dann definieren wir $b_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun ist $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Eig}(A, -2)$ und mit $b_3 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ist durch

$$\{b_1, b_2, b_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von A gegeben.

Wir schreiben diese Vektoren nun als Spalten in eine Matrix und achten dabei darauf, dass die entstehende Matrix die Determinante 1 besitzt. So erhalten wir dann P. Mit dieser Überlegung ergibt sich

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1\\ 0 & \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}.$$

Für die so definierte Matrix gilt

- $\det(P) = 1$.
- P orthogonal per Definition, da die Spaltenvektoren eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bilden.
- $P^T AP$ besitzt Diagonalgestalt und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} =: D.$$

Unser Vorgehen bei dieser Aufgabe ist identisch zu dem, das wir als erstes bei der Bestimmung der euklidischen Normalform einer Quadrik nutzen. Die Matrix A in der Aufgabe entspricht der Matrix, die wir aus den Koeffizienten der quadratischen Terme ermitteln.

F23 – T1 – A5

Es sei Q die folgende Quadrik in $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 7u^2 - 48uv - 7v^2 + 125u + \frac{175}{4} = 0\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q sowie eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$, welche Q auf ihre euklidische Normalform abbildet.

Lösungsvorschlag

Es seien $A := \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 125 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $c := \frac{175}{4}$.

Dann folgt

$$Q: \quad 0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c$$

Bestimme nun eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. Es ist

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= (7-\lambda)(-7-\lambda) - 24^2 \\ &= \lambda^2 - 7^2 - 24^2 \\ &= \lambda^2 - 625 \\ &= (\lambda - 25)(\lambda + 25) \end{aligned}$$

Somit sind 25 und -25 die Eigenwerte von A. Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}(A, 25) = \ker(A - 25 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -18 & -24 \\ -24 & -32 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Eig}(A, -25) = \ker(A + 25 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} 32 & -24 \\ -24 & 18 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Definiere nun $M := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. M ist orthogonal per Definition, das heißt $M^T = M^{-1}$. Außerdem gilt $M^T A M = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}$.

Definiere neue Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich die neue Quadrik Q' zu

$$\begin{aligned} Q': \quad 0 &= \left(M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^T A \left(M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + b^T M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{175}{4} \\ &= 25x^2 - 25y^2 + 100x + 75y + \frac{175}{4} \\ &= 25\left(x^2 + 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) - 25\left(y^2 - 2y \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) + \frac{175}{4} \end{aligned}$$

$$= 25\,(x+2)^2 - 25\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 100 + \frac{225}{4} + \frac{175}{4}$$
$$= 25\underbrace{\left(x+2\right)}_{=:\,s}^2 - 25\underbrace{\left(y - \frac{3}{2}\right)}_{=:\,t}^2$$

Für die Koordinaten $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ erhalten wir dann die Normalform Q'' von Q. Es gilt:

$$Q'': \quad 0 = 25s^2 - 25t^2 = s^2 - t^2$$

Wegen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und der obigen Definition von $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ ist die gesuchte Bewegung gegeben durch

$$f: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

F23 – T2 – A5

Für die Punkte $R, S \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $d(R,S)$ den euklidischen Abstand zwischen diesen Punkten. Es seien

$$\ell = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Für $t > 0$ sei

$$Q_t = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : d((x,y),P) = t \cdot d((x,y)^T, \ell)\},$$

wobei $d((x,y)^T, \ell)$ den euklidischen Abstand von $(x,y)^T$ zur Geraden ℓ bezeichnet.

a) Weisen Sie nach, dass Q_t für alle $t > 0$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Skizzieren Sie die Quadriken Q_t für $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $t = \sqrt{2}$ in einem Koordinatensystem.

Lösungsvorschlag

a) Da der Abstand zweier geometrischer Objekte stets ≥ 0 ist und da $t > 0$ ist, gilt:

$$d\left((x,y)^T, P\right) = t \cdot d\left((x,y)^T, \ell\right) \Leftrightarrow d\left((x,y)^T, P\right)^2 = t^2 \cdot d\left((x,y)^T, \ell\right)^2.$$

Es ist $d\left((x,y)^T, P\right)^2 = x^2 + (y-2)^2$ und $d\left((x,y)^T, \ell\right)^2 = y^2$, denn der kürzeste Abstand von $(x,y)^T$ zu ℓ ist gegeben durch die Länge der Strecke zwischen $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, da die Richtung der Strecke senkrecht auf die Richtung von ℓ steht, das heißt $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alternativ können wir uns überlegen, dass

$$d\left((x,y)^T, \ell\right)^2 = \min\{\|(x,y)^T - z\|^2 : z \in \ell\} = \min\left\{\left\|\begin{pmatrix} x-\lambda \\ y \end{pmatrix}\right\|^2 : \lambda \in \mathbb{R}\right\} = y^2$$

Damit folgt:

$$Q_t = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 4y + 4 = t^2 y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + (1-t^2)\, y^2 - 4y + 4}_{=:P(x,y)} = 0\}$$

Da Q_t Nullstellenmenge des quadratischen Polynoms $P(x,y)$ ist, handelt es sich bei Q_t per Definition eine Quadrik.

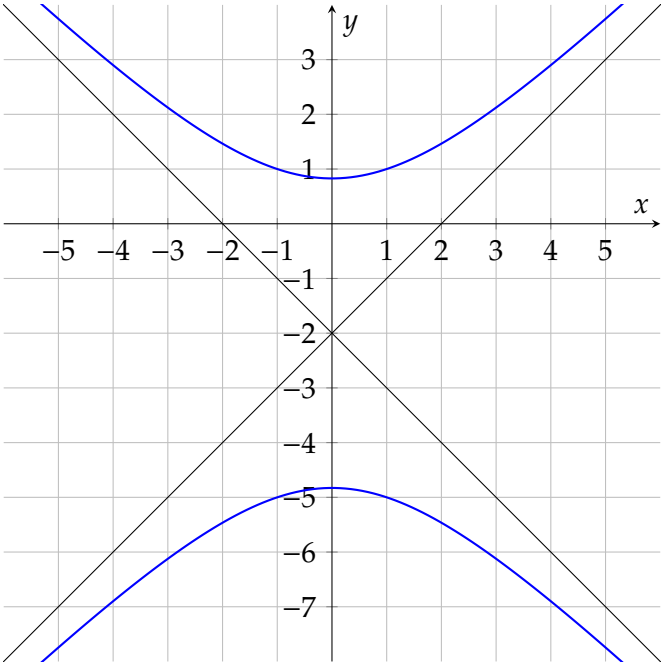
b) 1. Fall: $t = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} Q_t: \quad 0 &= x^2 - y^2 - 4y + 4 \\ &= x^2 - \left(y^2 + 2y \cdot 2 + 2^2 - 2^2\right) + 4 \\ &= x^2 - (y+2)^2 + 8 \\ \Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{1}{8}(y+2)^2 - \frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

Q_t ist eine Hyperbel, für deren Mittelpunkt $(m_1, m_2)^T$ gilt: $0 = m_1$ und $0 = m_2 + 2$, das heißt $(m_1, m_2)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Asymptoten sind gegeben durch

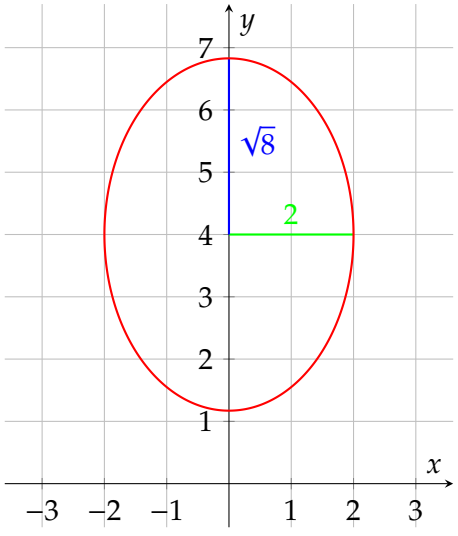
$$\left\{\tfrac{1}{\sqrt{8}}(y+2) - \tfrac{1}{\sqrt{8}}x = 0\right\} \Leftrightarrow \{y = x - 2\} \text{ und } \left\{\tfrac{1}{\sqrt{8}}(y+2) + \tfrac{1}{\sqrt{8}}x = 0\right\} \Leftrightarrow \{y = -x - 2\}.$$



2. Fall: $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
Q_t: \quad 0 &= x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 4y + 4 \\
&= x^2 + \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y \cdot 4 + 16 - 16\right) + 4 \\
&= x^2 + \frac{1}{2}\left(y-4\right)^2 - 4 \\
\Leftrightarrow \quad 1 &= \frac{x^2}{2^2} + \frac{\left(y-4\right)^2}{\sqrt{8}^2}
\end{aligned}
$$

Q_t ist eine Ellipse. Analog zu oben ermitteln wir ihren Mittelpunkt zu $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Die Längen der Hauptachsen sind 2 (in x-Richtung) und $\sqrt{8}$ in (y-Richtung).



F23 – T3 – A5

Es sei A eine symmetrische Matrix mit den reellen Eigenwerten α und β. Weiter sei

$$Q_{\alpha,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^T A x = \alpha - \beta\} \ .$$

a) Entscheiden Sie begründet, ob es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Q_{\alpha,\beta}$ ein Kreis ist.

b) Ermitteln Sie, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $Q_{\alpha,\beta}$ aus zwei parallelen Geraden besteht.

Lösungsvorschlag

a) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch, daher gibt es $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal mit $M^T A M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, dann folgt:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,\beta} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha - \beta \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \left(M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)^T A \left(M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) = \alpha - \beta \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \alpha u^2 + \beta v^2 = \alpha - \beta \right\} \end{aligned}$$

$Q_{\alpha,\beta}$ ist Kreis $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq \beta$ und $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{\beta}{\alpha-\beta} > 0$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq \beta$ und $\alpha = \beta$ Widerspruch!

Es gibt also keine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für die $Q_{\alpha,\beta}$ ein Kreis ist.

b) $Q_{\alpha,\beta}$ entspricht zwei parallelen Geraden

$\Leftrightarrow$ Entweder $\left(\alpha = 0, \beta \neq 0 \text{ und } \underbrace{\frac{\beta}{\alpha - \beta}}_{=-1} > 0 \right)$ oder $\left(\beta = 0, \alpha \neq 0 \text{ und } \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha - \beta}}_{=1} > 0 \right)$

$\Leftrightarrow \beta = 0$ und $\alpha \neq 0$

H22 – T1 – A5

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt seien die Punkte

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - \mathbf{u}\| + \|x - \mathbf{v}\| = 8\}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass M Teilmenge einer Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $\mathbf{m}$, die Hauptachsen und die euklidische Normalform von Q.

Lösungsvorschlag

a) Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M$

$$\begin{aligned}
&\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad 8 = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 8 - \sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad x^2 + (y-2)^2 = 8^2 + (x-6)^2 + y^2 - 16\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4y + 4 = 64 + x^2 - 12x + 36 + y^2 - 16\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad 12x - 4y - 96 = -16\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad -3x + y + 24 = 4\sqrt{(x-6)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow \quad 9x^2 + y^2 + 576 - 6xy - 144x + 48y = 16\left(x^2 - 12x + 36 + y^2\right) \\
&\Rightarrow \quad 7x^2 +^5 y^2 + 6xy - 48x - 48y = 0
\end{aligned}$$

Damit folgt: $M \subseteq Q := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon 7x^2 + 15y^2 + 6xy - 48x - 48y = 0 \right\}$

Im Schritt $(*)$ ergibt sich $\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ aus

$$\begin{aligned}
\|x - u\| &= \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x - u_1 \\ y - u_2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{(x-u_1)^2 + (y-u_2)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}
\end{aligned}$$

Analog für $\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$.

b) Definiere $A := \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} -48 \\ -48 \end{pmatrix}$. Dann gilt $Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T A x + b^T x = 0 \right\}$.

Bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu A. Ermittle dafür zunächst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_2) = (7 - \lambda)(15 - \lambda) - 9 = \lambda^2 - 22\lambda + 96 = (\lambda - 6)(\lambda - 16)$$

Da die Eigenwerte von A den Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ entsprechen, hat A die Eigenwerte 6 und 16. Für diese bestimmen wir nun die Eigenräume.

$$\text{Eig}(A, 6) = \ker(A - 6 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Eig}(A, 15) = \ker(A - 16 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Definiere $M = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist M per Definition orthogonal und es gilt $M^{-1} = M^T$ sowie $M^T A M = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Bezüglich neuer Koordinaten $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ erhalten wir dann die Quadrik Q' mit

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad Q': \quad 0 &= \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}^T M^T A M \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + b^T M \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\
&= 6s^2 + 16t^2 - \frac{96}{\sqrt{10}} s - \frac{192}{\sqrt{10}} t \\
&= 6\left(s^2 - 2s \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} + \frac{64}{10} - \frac{64}{10}\right) + 16\left(t^2 - 2t \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} + \frac{36}{10} - \frac{36}{10}\right) \\
&= 6\left(s - \frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{3 \cdot 64}{5} + 16\left(t - \frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{8 \cdot 36}{5} \\
\Leftrightarrow \quad Q': \quad 96 &= 6\left(s - \frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2 + 16\left(t - \frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad Q': \quad 1 &= \frac{\left(s - \frac{8}{\sqrt{10}}\right)^2}{4^2} + \frac{\left(t - \frac{6}{\sqrt{10}}\right)^2}{\sqrt{6}^2}
\end{aligned}$$

Für $a := s - \frac{8}{\sqrt{10}}$ und $b := t - \frac{6}{\sqrt{10}}$ erhalten wir die euklidische Normalform Q'' von Q:

$$Q'': \quad \frac{a^2}{4^2} + \frac{b^2}{\sqrt{6}^2} = 1.$$

Die Längen der Hauptachsen sind damit 4 und $\sqrt{6}$ und da $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt von Q'' ist, ist der Mittelpunkt m von Q gegeben durch

$$m = M \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

→ Mit den Hauptachsen könnten auch die Symmetrieachsen $\{a = 0\}$ und $\{b = 0\}$ bezüglich des x-y-Koordinatensystems gemeint sein.

H22 – T2 – A4

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über $n \times n$-Matrizen für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) Eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

c) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

Lösungsvorschlag

a) Wahr.

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, das heißt $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, für das $Av = \lambda v$ gilt. Da A orthogonal ist, gilt $A^TA = E_n$. Damit folgt für die durch das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Norm $\|\cdot\|$:

$$\|v\|^2 = v^Tv = v^TA^TAv = (Av)^TAv = \|Av\|^2 = \|\lambda v\|^2 = |\lambda|^2\|v\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\lambda|^2 = 1 \quad \overset{\lambda\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \quad \lambda = \pm 1.$$

b) Falsch.

Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ sind $\lambda = 1$ und $\lambda = -1$, das heißt, die Matrix A hat höchstens die Eigenwerte 1 oder -1. Die Basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

besteht aus Eigenvektoren von A, weshalb die Matrix A diagonalisierbar ist. Da jedoch

$$A^TA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq E_2$$

ist $A^T \neq A^{-1}$ und daher A nicht orthogonal.

c) Wahr.

Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist reell diagonalisierbar. Da A höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, können wir für die beiden Eigenräume Orthonormalbasen $\mathcal{B}_\infty$ und $\mathcal{B}_{-1}$ wählen. Es ist dann $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und wenn wir die Vektoren dieser Basis als Spalten in eine Matrix schreiben, erhalten wir eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die

$$P^TAP = D$$

und D ist eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge entweder 1 oder -1 sind. Für D gilt daher $D^2 = E_n$. Wegen $D^T = D$ und $P^T = P^{-1}$, das heißt insbesondere $P^TP = PP^T = E_n$, folgt dann:

$$\begin{aligned} D^2 = E_n \;&\Leftrightarrow\; D^TD = E_n \;\Leftrightarrow\; (P^TAP)^T(P^TAP) = E_n \;\Leftrightarrow\; P^TA^TPP^TAP = E_n \\ &\Leftrightarrow\; P^TA^TAP = E_n \;\Leftrightarrow\; A^TA = PP^T = E_n. \end{aligned}$$

Analog zeigen wir wegen $D^2 = DD^T = E_n$ auch $AA^T = E_n$ und damit $A^T = A^{-1}$, das heißt A orthogonal.

H22 – T2 – A5

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Quadrik

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (2t+1)(x^2+y^2) + 2xy + \sqrt{2}(x-y) = 0 \right\}$$

gegeben; dabei ist $t \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die euklidische Normalform der Quadrik Q_t.

b) Skizzieren Sie die Quadrik Q_0 im x-y-Koordinatensystem.

Lösungsvorschlag

a) Definiere $A := \begin{pmatrix} 2t+1 & 1 \\ 1 & 2t+1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Bestimme nun eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. Ermittle dazu zunächst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = (2t+1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2 \cdot (2t+1)\,\lambda + 4t^2 + 4t$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$, also

$$\lambda_{1/2} = \frac{4t+2 \pm \sqrt{(4t+2)^2 - 4 \cdot (4t^2+4t)}}{2} = \frac{4t+2 \pm 2}{2}.$$

Somit sind $2t+2$ und $2t$ die Eigenwerte von A.

Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

$$\operatorname{Eig}(A, 2t+2) = \ker(A - (2t+2) \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\operatorname{Eig}(A, 2t) = \ker(A - (2t) \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Definiere $M := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nach Deinition ist M orthogonal, das heißt $M^T = M^{-1}$. Außerdem gilt $M^T A M = \begin{pmatrix} 2t+2 & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$.

Definiere neue Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir aus Q_t die Quadrik Q_t':

$$Q_t' \colon \quad 0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T M^T A M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (2t+2)\,u^2 + 2t \cdot v^2 - 2v$$

1. Fall: $t = 0$

$Q_0'\colon 0 = 2u^2 - 2v = \frac{u^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - 2v$ ist die euklidische Normalform von Q_0.

2. Fall: $t \neq 0$

$$\begin{aligned} Q_t'\colon \quad 0 &= (2t+2)\,u^2 + 2t\left(v^2 - 2v\cdot\frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^2} - \frac{1}{4t^2}\right) \\ &= (2t+2)\,u^2 + 2t\left(v - \frac{1}{2t}\right)^2 - \frac{1}{2t} \\ \Leftrightarrow Q_t'\colon \quad 1 &= \left(4t^2+4t\right)\underbrace{u^2}_{=:a} + 4t^2\underbrace{\left(v - \frac{1}{2t}\right)^2}_{=:b} \end{aligned}$$

Mit den neuen Koordinaten a und b erhalten wir die euklidische Normalform Q_t'' von Q_t in Abhängigkeit des Wertes von $4t^2 + 4t$:

$4t^2 + 4t > 0 \Leftrightarrow t < -1$ oder $t > 0$, dann gilt:

$$Q_t''\colon \quad \frac{a^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{t^2+t}}\right)^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{1}{2t}\right)^2} = 1$$

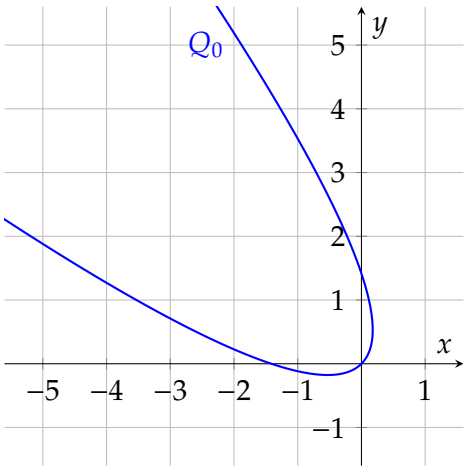
$4t^2 + 4t < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 0$, dann gilt:

$$Q_t''\colon \quad -\frac{a^2}{\left(\frac{1}{2\sqrt{t^2+t}}\right)^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{1}{2t}\right)^2} = 1$$

$4t^2 + 4t = 0 \overset{t\neq 0}{\Leftrightarrow} t = -1$, dann gilt:

$$Q_t''\colon \quad \frac{b^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

b) Q_0 ist eine Parabel für deren Scheitelpunkt s gilt: $s = M^T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist der Scheitel der euklidischen Normalform. Q_0 entsteht aus Q_0' durch Drehung um 45° gegen den Uhrzeigersinn. Das lesen wir unmittelbar aus der Matrix M in der Transformation $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = M\cdot\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ ab, denn M orthogonal und $\det(M) = 1$, das heißt, M ist eine Drehmatrix mit $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Außerdem sehen wir: $Q_0'\colon v = u^2$. Damit also:



F22 – T1 – A5

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Quadriken

$$Q_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4xy - 2y^2 = 6\}$$

und

$$Q_2 = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 6xy - 5y^2 = 12\}$$

gegeben.

Man zeige, dass die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 metrisch äquivalent (kongruent) sind und bestimme eine euklidische Bewegung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche Q_1 auf Q_2 abbildet.

Lösungsvorschlag

Überführe Q_1 und Q_2 in euklidische Normalform. Sei dafür $A_1 \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ und $c_1 \coloneqq -6$. Dann gilt: $Q_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_1 = 0\right\}$.

Bestimme Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A_1. Ermittle dafür zunächst die Eigenwerte von A_1:

$\chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda \cdot E_2) = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$.

Da $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von A_1 genau dann, wenn $\chi_{A_1}(\lambda) = 0$, hat A_1 die Eigenwerte 2 und -3.

Bestimme nun die Eigenräume zu den Eigenwerten von A_1.

- $\operatorname{Eig}(A_1, 2) = \ker(A_1 - 2 \cdot E_2) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(A_1, -3) = \ker(A_1 + 3 \cdot E_2) = \ker\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Definiere $M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. M ist per Definition orthogonal, das heißt $M^T = M^{-1}$. Außerdem gilt $M^T A_1 M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Definiere nun neue Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Mit $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt für $Q_1' = f_1(Q_1)$:

$$\begin{aligned} Q_1' = f_1(Q_1): \quad & 0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T M^T A_1 M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c_1 = 2u^2 - 3v^2 - 6 \\ \Leftrightarrow Q_1': \quad & 1 = \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

Analog für Q_2: $A_2 \coloneqq \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $c_2 \coloneqq -12$.

$\chi_{A_2}(\lambda) = (3-\lambda)(-5-\lambda) - 9 = \lambda^2 + 2\lambda - 24 = (\lambda - 4)(\lambda + 6)$

- $\operatorname{Eig}(A_2, 4) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(A_2, -6) = \ker \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Definiere $N = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ orthogonal mit $N^T A_2 N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

Definiere außerdem $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ und $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = N^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} Q_2' = f_2(Q_2): \quad & 0 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T N^T A_2 N \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c_2 = 4u^2 - 6v^2 - 12 \\ \Leftrightarrow Q_2': \quad & 1 = \frac{1}{3}u^2 - \frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

Da Q_1 und Q_2 dieselbe euklidische Normalform $Q_1' = Q_2'$ besitzen, sind die Quadriken metrisch äquivalent.

Für

$$f := f_2^{-1} \circ f_1 \colon \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = N \cdot M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt außerdem $f(Q_1) = f_2^{-1}(f_1(Q_1)) = f_2^{-1}(Q_1') = f_2^{-1}(Q_2') = Q_2$.

H21 – T1 – A5

Wir betrachten die durch

$$-4x^2 + 24xy - 11y^2 + 80x + 60y = 0$$

gegebene Quadrik H in $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von H.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt und alle Scheitel von H.

Lösungsvorschlag

a) Seien $A := \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 12 & -11 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 80 \\ 60 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$H: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. Ermittle dafür zunächst die Eigenwerte von A:

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (-4-\lambda)(-11-\lambda) - 144 = \lambda^2 + 15\lambda + 44 - 144 = \lambda^2 + 15\lambda - 100 = (\lambda - 5)(\lambda + 20)$,

das heißt, die Eigenwerte von A sind 5 und -20.

Bestimme nun die zugehörigen Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A, 5) = \ker(A - 5 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\mathrm{Eig}(A, -20) = \ker(A + 20 \cdot E_2) = \ker \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Definiere $M = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist per Definition orthogonal, das heißt $M^{-1} = M^T$, und es gilt $M^T A M = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$.

In neuen Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, definiert durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, erhalten wir dann die Quadrik H':

$$\begin{aligned} H': \quad 0 &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} M^T A M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= 5u^2 - 20v^2 + 100u \\ &= 5(\underbrace{u + 10}_{=: s})^2 - 20 \underbrace{v^2}_{=: t} - 500 \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten s und t erhalten wir dann die euklidische Normalform

$$H'': \quad 1 = \frac{s^2}{10^2} - \frac{t^2}{5^2}$$

und wir sehen unmittelbar, dass es sich um eine Hyperbel handelt.

b) Es ist

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u+10 \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

eine Bewegung mit $f(H) = H''$. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Mittelpunkt von H'' ist, gilt für den Mittelpunkt m von H:

$$f(m) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^T \cdot m + \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow m = M \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Scheitel von H'' sind gegeben durch die Schnittpunkte der Symmetrieachsen $\{s = 0\}$ und $\{t = 0\}$ mit H''.

Da $-\frac{t^2}{5^2} < 0 < 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, gilt $\{s = 0\} \cap H'' = \emptyset$.

Für die Scheitel $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ von H'' gilt also $t = 0$ und $s^2 = 10^2$, das heißt, $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind die Scheitel von H''. Für die Scheitel s_i mit $i \in \{1, 2\}$ von H gilt: $f(s_i) \in \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Somit:

$$f(s_1) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^T s_1 + \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(s_2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M^T s_2 = \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow s_2 = M \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

H21 – T2 – A4

Sei $Q_{s,t}$ die von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$, $(s,t) \neq (0,0)$ abhängige Quadrik

$$sx^2 + 2txy + sy^2 + 2\sqrt{2}sx + 2\sqrt{2}ty - s^2 - 1 = 0$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von $Q_{s,t}$ und geben Sie eine Bewegung an, die $Q_{s,t}$ auf diese Normalform abbildet.

b) Bestimmen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ die Quadrik $Q_{s,t}$ affin äquivalent zur Quadrik $x^2 + y^2 = 1$ ist.

c) Bestimen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ die Quadrik $Q_{s,t}$ metrisch äquivalent zur Quadrik $x^2 + y^2 = 1$ ist.

Lösungsvorschlag

a) Seien $A := \begin{pmatrix} s & t \\ t & s \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}s \\ 2\sqrt{2}t \end{pmatrix}$, $c := -s^2 - 1$, dann ist $Q_{s,t}\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0$.

Bestimme eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. Ermittle dazu zunächst die Eigenwerte von A:

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = (s-\lambda)^2 - t^2 = \lambda^2 - 2s\lambda + s^2 - t^2$.

Die Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ sind

$$\frac{2s \pm \sqrt{4s^2 - 4(s^2 - t^2)}}{2} = \frac{2s \pm 2t}{2} = s \pm t.$$

Bestimme nun die Eigenräume zu den Eigenwerten:

- $\operatorname{Eig}(A, s+t) = \ker(A - (s+t)E_2) = \ker \begin{pmatrix} -t & t \\ t & -t \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\operatorname{Eig}(A, s-t) = \ker(A - (s-t)E_2) = \ker \begin{pmatrix} t & t \\ t & t \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Für $t = 0$ gilt: $\operatorname{Eig}(A, s) = \mathbb{R}^2$

Definiere nun $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Matrix ist orthogonal per Definition, das heißt $M^T = M^{-1}$, und es gilt $M^T A M = \begin{pmatrix} s+t & 0 \\ 0 & s-t \end{pmatrix}$.

Definiere neue Koordinaten $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir die Quadrik $Q'_{s,t}$:

$$\begin{aligned} Q'_{s,t}\colon \quad 0 &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^T M^T A M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + b^T \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c \\ &= (s+t)u^2 + (s-t)v^2 + 2(s+t)u - 2(s-t)v - s^2 - 1 \\ &= (s+t)\left(u^2 + 2u + 1 - 1\right) + (s-t)\left(v^2 - 2v + 1 - 1\right) - s^2 - 1 \\ &= (s+t)(u+1)^2 + (s-t)(v-1)^2 - s^2 - 2s - 1 \end{aligned}$$

$$= (s+t)\underbrace{\left(u+1\right)}_{=:\,a}^2 + (s-t)\underbrace{\left(v-1\right)}_{=:\,b}^2 - (s+1)^2$$

Mit den nun definierten Koordinaten a und b erhalten wir die euklidische Normalform $Q''_{s,t}$ von $Q_{s,t}$:

$$Q''_{s,t}: \quad (s+t)\,a^2 + (s-t)\,b^2 = (s+1)^2\,.$$

Die gesuchte Bewegung ergibt sich aus einer Verkettung der Koordinatentransformationen. So erhalten wir:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = M^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für f gilt per Definition: $f\,(Q_{s,t}) = Q''_{s,t}$.

b) $Q_{s,t}$ ist affin äquivalent zu $x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $s+1 \neq 0$ und $s+t > 0$ und $s-t > 0$ (denn $(s-1)^2 \geq 0\ \forall\, s \in \mathbb{R}$)
$\Leftrightarrow$ $s \neq -1$ und $s > |t|$
$\Leftrightarrow$ $s > |t|$

c) $Q_{s,t}$ ist metrisch äquivalent zu $x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $s \neq -1$ und $\dfrac{s+t}{(s+1)^2} = 1 = \dfrac{s-t}{(s+1)^2}$
$\Rightarrow$ $s \neq -1$ und $s+t = s-t$
$\Rightarrow$ $s \neq -1$ und $t = 0$

Damit folgt:

$Q_{s,t}$ metrisch äquivalent zu $x^2 + y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $s \neq -1$ und $\dfrac{s}{(s+1)^2} = 1$ und $t = 0$
$\Leftrightarrow$ $s \neq -1$ und $s = s^2 + 2s + 1$ und $t = 0$
$\Leftrightarrow$ $s \neq -1$ und $s^2 + s + 1 = 0$ und $t = 0$

Da $s^2 + s + 1 = 0$ wegen $1 - 4 < 0$ keine reellen Lösungen besitzt, ist $Q_{s,t}$ nie metrisch äquivalent zu $x^2 + y^2 = 1$.

F21 – T3 – A5

Gegeben seien die Quadriken

$$Q = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0\}$$

und

$$\tilde{Q} = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 - 4 = 0\}.$$

Bestimmen Sie eine Gleitspiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q) = \tilde{Q}$

Lösungsvorschlag

Da in Q keine gemischt quadratischen Terme vorkommen, können die Schritte „Berechnung der Eigenräume“, „Definition einer orthogonalen Matrix“ und „Koordinatentransformation“ ausgelassen werden. Sie dienen nämlich nur dem Zweck, die gemischt quadratischen Terme durch eine Koordinatentransformation zu eliminieren.

$$\begin{aligned} Q: \quad 0 &= 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 \\ &= 2\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + \left(y^2 + 2y \cdot 3 + 9 - 9\right) + 7 \\ &= 2(x-1)^2 + (y+3)^2 - 11 + 7 \\ &= 2(x-1)^2 + (y+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

Definiere nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: b} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b.$

- Es ist f eine Bewegung, da A orthogonal, denn $A \cdot A^T = A^T A = E_n$, das heißt $A^T = A^{-1}$.
- f ist eine Gleitspiegelung, denn $\det A = -1$ und $\operatorname{Fix}(f) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \emptyset$, da das inhomogene lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ keine Lösung besitzt. Denn für Lösungen $(x, y)^T$ würde sowohl $x - y = 3$ als auch $-x + y = -1$ gelten, das ist jedoch äquivalent zu $0 = 2$.
- Nach Definition gilt: $f^{-1}\left(\tilde{Q}\right) = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \quad (y+3)^2 + 2(x-1)^2 - 4 = 0\right\} = Q$ und daher insbesondere $f(Q) = \tilde{Q}$ (das Bild von Q unter f bestimmen wir über die Abbildungsvorschrift von f).

H20 – T2 – A4

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Man entscheide, ob es eine orthogonale Matrix $P \in O_4(\mathbb{R})$ mit $P^T AP = D$ gibt, und bestimme gegebenenfalls eine solche Matrix P; dabei bezeichne P^T die zu P transponierte Matrix.

Lösungsvorschlag

Offensichtlich ist A symmetrisch, das heißt $A = A^T$. Da $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ ist die Matrix somit orthogonal diagonalisierbar, das heißt, es gibt eine Matrix $M \in O_4(\mathbb{R})$, für die $M^T AM$ Diagonalgestalt besitzt.

Wir bestimmen nun die Eigenwerte von A als die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ von A:

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3+Z_2 \\ Z_4+Z_2}}{=} \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} -\lambda \cdot \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1-\lambda & -1-\lambda & 0 \\ -1-\lambda & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda\left(-\lambda(-1-\lambda)^2 + 2(-1-\lambda)^2\right) + \left((-1)(-1-\lambda)^2 - 2(-1-\lambda)^2\right) \\
&= (-1-\lambda)^2\left[(-\lambda)(-\lambda+2) - 3\right] \\
&= (\lambda+1)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) \\
&= (\lambda+1)^3(\lambda - 3)
\end{aligned}$$

(∗) Entwicklung nach der 1. Spalte

Die Matrix A hat folglich die Eigenwerte -1 und 3. Aufgrund der algebraischen Vielfachheit der beiden Eigenwerte können wir schlussfolgern, dass eine orthogonale Matrix P, wie in der Aufgabenstellung beschrieben, existiert.

Um P zu bestimmen, berechnen wir nun die Eigenräume zu den beiden Eigenwerten und ermitteln jeweils eine Orthonormalbasis für diese.

- $$\mathrm{Eig}(A, -1) = \ker(A + E_4) = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
- $$\mathrm{Eig}(A, 3) = \ker(A - 3E_4) = \ker\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \overset{(\clubsuit)}{=} \ker\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(♣) Die Überführung der Matrix in Zeilenstufenform ist hier aus Platzgründen stark verkürzt dargestellt.

Wir nutzen nun das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine Orthonormalbasis für $\operatorname{Eig}(A, -1)$ zu bestimmen. Benenne die drei erzeugenden Vektoren des Eigenraums dafür mit v_1, v_2 und v_3. Bei der Berechnung legen wir das Standardskalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ sowie die dadurch induzierte Norm zugrunde.

- $b_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $w_2 := v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle\, b_1 = v_2 - \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 := \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $w_3 := v_3 - \langle v_3, b_1 \rangle\, b_1 - \langle v_3, b_2 \rangle\, b_2 = v_3 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $b_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Für den Eigenraum zum Eigenwert 3 von A erhalten wir eine Orthonormalbasis, indem wir den Vektor, der den Eigenraum erzeugt, normieren. Mit der Bezeichnung v_4 für diesen Vektor gilt dann:

- $b_4 := \frac{v_4}{\|v_4\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die gesuchte Matrix P erhalten wir dann, wenn wir die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_3, die insbesondere eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ bilden, in der passenden Reihenfolge als Spalten in eine Matrix schreiben. So erhalten wir die Matrix

$$P := \begin{pmatrix} b_1 & b_4 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},$$

die nach Konstruktion orthogonal ist und für die $P^T A P = D$ gilt.

H20 – T3 – A3

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.

a) Es seien A, B zudem positiv definit. Zeigen Sie

$$\det(A + B) > 0.$$

b) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie:
Für alle $v \in \text{Kern}(A - \lambda_1 E_n)$ und alle $w \in \text{Kern}(A - \lambda_2 E_n)$ gilt:

$$v^T A w = 0.$$

c) Es sei A positiv definit. Weiter sei

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T A x = 1\}.$$

Zeigen Sie:
Es gibt Eigenwerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ von A mit

$$\frac{1}{\alpha} \leq x^T x \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{für alle } x \in M.$$

Lösungsvorschlag

a) Da A und B symmetrisch sind, ist insbesondere auch $A + B$ symmetrisch. Wir wissen, dass symmetrische reelle Matrizen diagonalisierbar sind, das heißt, es gibt eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ für die $T^{-1}(A + B)T$ eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ ist.

Da die Matrizen $A + B$ und D ähnlich sind, folgt $\det(A + B) = \det(D) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$.

Zeige: $d_i > 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

Es ist $d_i \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A+B$, das heißt, es gibt einen zugehörigen Eigenvektor $v_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\|v_i\| = 1$, für den $(A + B)v_i = d_i v_i$ gilt. Da A und B positiv definit, gilt insbesondere $v_i^T A v_i > 0$ und $v_i^T B v_i > 0$. Insgesamt folgt:

$$d_i = d_i \cdot \|v_i\|^2 = d_i v_i^T v_i = v_i^T (d_i v_i) = v_i^T (A + B) v_i = v_i^T A v_i + v_i^T B v_i > 0.$$

Insbesondere erhalten wir somit auch

$$\det(A + B) = \det(D) = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n > 0.$$

b) Wir bemerken zunächst, dass $v \in \text{Kern}(A - \lambda_1 E_n)$ bedeutet, dass $Av = \lambda_1 v$. Analoges gilt für $w \in \text{Kern}(A - \lambda_2 E_n)$. Somit erhalten wir wegen $A^T = A$:

$$\lambda_2 v^T A w = v^T A (Aw) = v^T A^T (Aw) = (Av)^T A w = \lambda_1 v^T A w \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda_2 - \lambda_1) \underbrace{v^T A w}_{\in \mathbb{R}} = 0$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt damit direkt $v^T A w = 0$.

c) Als symmetrische Matrix ist A orthogonal diagonalisierbar. Das heißt, es gibt eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, für die $Q^T AQ$ eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist.

Da A positiv definit ist, sind die Diagonaleinträge, die die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A darstellen, alle positiv.

Definiere nun

$$\alpha := \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \quad \text{und} \quad \beta := \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}.$$

Sei nun $x \in M$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit $x = Qy$. Es gilt dann:

$$1 = x^T Ax = (Qy)^T A(Qy) = y^T Q^T AQy = y^T Dy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Weiterhin erhalten wir durch eine geeignete Abschätzung

$$\beta \cdot \sum_{i_1}^{n} y_i^2 \;\le\; 1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \;\le\; \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Da

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^T y = (Q^T x)^T (Q^T x) = x^T QQ^T x = x^T x$$

ergibt sich durch die obige Abschätzung dann

$$\beta \cdot (x^T x) \;\le\; 1 \;\le\; \alpha \cdot (x^T x)$$

und damit insbesondere wegen $\alpha, \beta > 0$

$$\frac{1}{\alpha} \;\le\; x^T x \;\le\; \frac{1}{\beta}.$$

F20 – T1 – A5

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) Hat eine Quadrik Q im $\mathbb{R}^2$ zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen s_1 und s_2, dann ist der Schnittpunkt m dieser Symmetrieachsen ein Mittelpunkt von Q.

b) Sind Q_1 und Q_2 zwei kongruente (metrisch äquivalente) Quadriken im $\mathbb{R}^2$, dann gibt es nur endlich viele euklidische Bewegungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$.

Lösungsvorschlag

a) O.B.d.A. seien die x- bzw. y-Achse die Symmetrieachsen s_1 bzw. s_2 und $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ihr Schnittpunkt.

→ Andernfalls Hauptachsentransformation

Sei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T \in Q$. Dann ist wegen der Symmetrieachse s_1 auch $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix} \in Q$ und wegen der Symmetrieachse s_2 auch $(-x,-y) \in Q$.

Da $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ Ergebnis einer Punktspiegelung an $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ist, folgt:

Für alle $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in Q$ ist auch das Bild $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$ unter Punktspiegelung an $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ Element der Quadrik. Per Definition ist damit $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ein Mittelpunkt.

b) Es seien $Q_1 = Q_2 = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\right\}$, das heißt, Q_1 und Q_2 sind Kreise mit Mittelpunkt in $(x,y) = (0,0)$ und Radius 1.

Beide Quadriken sind gleich und damit offensichtlich metrisch äquivalent, da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(Q_1) = Q_2$ und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ eine Bewegung, das heißt eine abstandserhaltende affine Abbildung ist.

Außerdem ist für alle $\alpha \in [0, 2\pi[$ die Abbildung

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

eine Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel α, also eine Bewegung mit $f_\alpha(Q_1) = Q_2$. Insbesondere gibt es unendlich viele (verschiedener) solcher Bewegungen, da die Menge $[0, 2\pi[$ überabzählbar ist. Die Aussage ist folglich falsch.

Die hier beschriebene Situation trat in Aufgabe 4 (Herbst 2021 – Thema 2) für $t = 0$ auf. Wir konnten dort eine beliebige Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ zur Definition von M wählen.

F18 – T3 – A2

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix und sei $S_X \coloneqq X + X^T$.

a) Zeigen Sie: Die Matrix S_X ist (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar.

b) Zeigen Sie: Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von S_X, dann gilt

$$X^2 v \in \operatorname{span}\{v, Xv\}.$$

c) Folgern Sie: Es gibt einen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $1 \leq \dim(U) \leq 2$ und

$$\{X \cdot u \mid u \in U\} \subseteq U.$$

Lösungsvorschlag

a) Offensichtlich ist S_X symmetrisch, denn $S_X^T = (X + X^T)^T = X^T + (X^T)^T = X^T + X = X + X^T = S_x$. Symmetrische reellwertige Matrizen sind immer (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar.

b) Da $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von S_X ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \lambda v = (X + X^T)v = Xv + X^T v \quad &\Leftrightarrow \quad Xv = \lambda v - X^T v \quad \overset{X^T = X^{-1}}{\Leftrightarrow} \quad Xv = \lambda v - X^{-1} v \\ &\overset{\cdot X}{\Leftrightarrow} \quad X^2 v = \lambda X v - v \end{aligned}$$

Es folgt also, dass

$$X^2 v = -v + \lambda X v \in \operatorname{span}\{v, Xv\}.$$

c) Es sei $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von S_X.

Behauptung: $U \coloneqq \operatorname{span}\{v, Xv\}$ ist erfüllt die gewünschten Eigenschaften

Offensichtlich ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ per Definition ein Untervektorraum. Weiter gilt wegen $v \neq 0$

$$\dim(U) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v \text{ und } Xv \text{ linear abhängig} \\ 2, & \text{falls } v \text{ und } Xv \text{ linear unabhängig} \end{cases}$$

Wir müssen also noch zeigen, dass $\{X \cdot u \mid u \in U\} \subseteq U$ gilt.

Sei dafür $u \in U$, das heißt, es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $u = \lambda_1 v + \lambda_2 Xv$. Dann gilt:

$$X \cdot u = X \cdot (\lambda_1 v + \lambda_2 Xv) = \lambda_1 \cdot Xv + \lambda_2 \cdot X^2 v.$$

Da wir nach Teilaufgabe b) wissen, dass $X^2 v \in \operatorname{span}\{v, Xv\}$ und deshalb insbesondere auch $\lambda_2 \cdot X^2 v \in \operatorname{span}\{v, Xv\}$, erhalten wir insgesamt

$$X \cdot u \in \operatorname{span}\{v, Xv\} = U, \quad \text{also} \quad \{X \cdot u \mid u \in U\} \subseteq U.$$

Damit ist die Existenz eines Untervektorraums U mit den gewünschten Eigenschaften nachgewiesen.

Weitere Aufgaben

In der Ersten Staatsprüfung kommen in der Teilprüfung zur *Linearen Algebra und Analytischen Geometrie* häufig Aufgaben zur euklidischen Normalform von Quadriken vor – mehr als hier mit Lösungsvorschlägen versehen dargestellt werden können. Dennoch wurde versucht, durch die Aufgabenauswahl die typischen Aufgabentypen abzudecken. Für die in den Prüfungen bis zum Frühjahr 2018 enthaltenen Aufgaben, die in diesem Kapitel nicht besprochen wurden, fasst die nachfolgende Tabelle daher zusammen, nach welcher Idee die Lösung dieser Aufgaben erfolgen kann.

Aufgabe			Lösungsidee	
Jahrgang	Thema	Aufgabe	Kapitel	Aufgabe
Herbst 2024	1	5	9	3
Herbst 2024	3	5	10	2
Herbst 2022	3	5	10	2
Frühjahr 2022	2	5	10	2
Herbst 2021	3	5	10	5
Frühjahr 2021	2	5	10	13
Herbst 2020	1	5	10	13
Herbst 2020	3	5	10	5
Frühjahr 2020	2	5	10	10
Herbst 2019	2	5	10	6
Herbst 2019	3	5	10	10
Frühjahr 2019	1	5	10	2
Frühjahr 2019	3	5	10	10
Herbst 2018	1	5	10	2
Herbst 2018	2	3	10	11
Herbst 2018	3	5	10	11
Frühjahr 2018	1	5	10	10