Eine L^q-Theorie des Cosseratspektrums in beschränkten Gebieten und Außengebieten

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat)
genehmigte Abhandlung

von

Stephan Weyers,
geboren am 06.06.1979 in Bad Mergentheim.

1. Gutachter:	Prof. Dr. C.G. Simader
2. Gutachter:	Prof. Dr. W. von Wahl
3. Gutachter:	Prof. Dr. W. Velte

Tag der Einreichung:	11.11.2005
Tag des Kolloquiums:	24.03.2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, für welche (Eigenwerte) $\lambda \in \mathbb{R}$ nichttriviale Lösungen (Eigenfunktionen) der folgenden Problemstellungen existieren:

1. **klassisches Cosseratspektrum**

$$\underline{u} \in C^2(G)^n \cap C^0(\overline{G})^n$$
$$\Delta \underline{u} = \lambda \nabla \operatorname{div} \underline{u}$$
$$\underline{u}\Big|_{\partial G} = 0$$

2. **schwaches Cosseratspektrum**

$$\underline{u} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n$$
$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \; = \; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \quad \forall\, \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder ein Außengebiet und $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ (vgl. Definition 2.1) der geeignete Lösungsraum für schwache Lösungen ist.

Dieses Problem wurde erstmals von den Brüdern Eugène und Francois Cosserat untersucht. Es ist ein Spezialfall der Lamé-Gleichung und beschreibt die Auslenkung eines linearen, isotropen, homogenen elastischen Mediums ohne Einwirkung einer äußeren Kraft im statischen Fall.

In dieser Arbeit wird das schwache Cosseratspektrum für beschränkte Gebiete und Außengebiete $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ und $1 < q < \infty$ vollständig bestimmt. Es gilt nämlich (für die Definition von $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ vgl. Definition 3.1)

Theorem 14.1. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$.

1. Die Menge

$$W \; := \; \Big\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\; : \;\; \text{es gibt } 0 \neq \underline{u} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n, \text{ so dass für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n \text{ gilt } \left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \; = \; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \Big\}$$

ist endlich oder abzählbar.

2. Für $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ ist der Vektorraum

$$V_\lambda := \left\{ \underline{u} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n \;:\; \left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \; = \; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \;\; \forall\, \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n \right\}$$

endlichdimensional.

3. Für jede Folge $(\lambda_m) \subset W$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern gilt

$$\lambda_m \to 2 \qquad (m \to \infty)$$

4. Es gilt

$$\{\nabla s \;:\; s \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)\} \; \subset \; V_1$$

Also ist $\lambda = 1$ Eigenwert unendlicher Vielfachheit und $\lambda = 2$ Häufungspunkt von Eigenwerten endlicher Vielfachheit.
In dieser Allgemeinheit war das Resultat vorher nicht bekannt.

Die Gebrüder Cosserat bestimmten das klassische Cosseratspektrum für spezielle Gebiete wie Kugel, Annulus und Ellipsoid. Auch der Ansatz für die expliziten Lösungen in Kapitel 16 stammt von ihnen (siehe [Co1]-[Co9]).
Allgemeine Resultate stammen von Mikhlin [Mi, 1973], der das Cosseratspektrum im Fall $n = 3$ und $q = 2$ bestimmte, und Kozhevnikov [Ko2, 1993], der beschränkte Gebiete im Fall $n = 3$ und $q = 2$ behandelte. Kozhevnikovs Beweis beruht auf der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren.
Faierman, Fries, Mennicken und Möller [FFMM, 2000] führten einen direkten Beweis für beschränkte Gebiete, $n \geq 2$ und $q = 2$.
Michel Crouzeix gelang 1997 ein sehr einfacher Beweis für beschränkte Gebiete, $n = 2, 3$ und $q = 2$.

In dieser Arbeit wird die Beweisidee von Crouzeix aufgegriffen, und die obigen Resultate werden für beschränkte Gebiete und Außengebiete, $n \geq 2$ und $1 < q < \infty$ gezeigt.

In dieser Allgemeinheit neu ist außerdem folgende Regularitätsaussage über die Lösungen zu Eigenwerten $\lambda \notin \{1, 2\}$:

Theorem 15.5. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+3}$. Es gelte $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)^n$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ und

$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \; = \; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)^n$$

Dann gilt

1. $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,\tilde{q}}_{\bullet}(G)^n$ und $\nabla \underline{u} \in H^{k,\tilde{q}}(G)^{n^2}$ für alle $1 < \tilde{q} < \infty$,
2. $\underline{u} \in \overline{C}^k(G)$,
3. $\Delta \underline{u} \; = \; \lambda \nabla \operatorname{div} \underline{u}$

Es ist absolut erstaunlich, dass die Eigenräume zu Eigenwerten $\lambda \notin \{1, 2\}$ nicht von q abhängen! Außerdem erhalten wir für das klassische Cosseratspektrum ebenfalls wichtige Aussagen. Auch dort ist $\lambda = 2$ Häufungspunkt von Eigenwerten. $\lambda = 1$ ist auch klassisch immer ein Eigenwert, da für $s \in C_0^\infty(G)$ mit $\underline{u} := \nabla s$ stets $\Delta \underline{u} = \nabla \operatorname{div} \underline{u}$ gilt.

Im Folgenden soll nun geschildert werden, auf welchem Wege diese Resultate bewiesen werden konnten.

Ausgangspunkt war die Arbeit [Si] von Christian G. Simader. Dort wurde gezeigt, dass im Halbraum $H = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ genau zwei Eigenwerte existieren, nämlich $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$. Simader nutzte die Arbeit [MueR] und die darin bewiesene Zerlegung (vgl Theorem 4.2)

$$L^q(H) = A^q(H) \oplus B^q(H)$$

Er löste zunächst explizit in $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(H)^n$ die Gleichung

$$\big\langle \nabla \underline{T}_q(p), \nabla \underline{\phi} \big\rangle_H \;=\; \big\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \big\rangle_H \quad \forall\, \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(H)^n$$

für ein gegebenes $p \in L^q(H)$ und rechnete dann nach, dass für $p_0 \in A^q(H)$

$$\operatorname{div} \underline{T}_q(p_0) = p_0$$

und für $p_h \in B^q(H)$

$$\operatorname{div} \underline{T}_q(p_h) = \frac{1}{2}\, p_h$$

gilt.
Die Idee war nun, dieses Resultat zu benutzen, um das schwache Cosseratspektrum im leicht gekrümmten Halbraum $H_w = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > w(x')\}$ (für $w \in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$) und schließlich in Gebieten mit kompaktem Rand zu lösen. Dazu haben wir für ein geeignetes $\mu > 0$ und

$$\rho_\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \le \rho_\mu \le 1, \quad \rho_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } t \ge 4\mu \\ 1 & \text{, falls } t \le 2\mu \end{cases}$$

den Isomorphismus

$$f \,:\, H_w \to H, \qquad f(x) = \big(x', x_n - w(x')\rho_\mu(x_n)\big)$$

und die Piola-Transformation (vgl. [Cia, S.37ff])

$$P \,:\, \widehat{H}_\bullet^{1,q}(H_w)^n \to \widehat{H}_\bullet^{1,q}(H)^n, \qquad (P\underline{v})(y) = \big[\det f'(f^{-1}(y))\big]^{-1} f'(f^{-1}(y))\, \underline{v}(f^{-1}(y))$$

betrachtet und die Skalarprodukte

$$\big\langle \nabla P^{-1}\underline{v}, \nabla P^{-1}\underline{\phi} \big\rangle_{H_w} \quad \text{bzw.} \quad \big\langle \operatorname{div}(P^{-1}\underline{v}), \operatorname{div}(P^{-1}\underline{\phi}) \big\rangle_{H_w}$$

mittels der Transformationsformel in Skalarprodukte

$$\big\langle \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\phi} \big\rangle_H + B_1(\underline{v}, \underline{\phi}) \quad \text{bzw.} \quad \big\langle \operatorname{div} \underline{v}, \operatorname{div} \underline{\phi} \big\rangle_H + B_2(\underline{v}, \underline{\phi})$$

umgerechnet in der Hoffnung, dass B_1 und B_2 in irgend einer Form kompakt sein könnten. Aufgrund der divergenzerhaltenden Eigenschaft der Piola-Transformation ließ sich das für B_2 auch beweisen, aber für einige der in B_1 auftretenden Terme nicht.

Nachdem also das Umrechnen der Skalarprodukte in die neuen Koordinaten keinen Erkenntnisgewinn brachte, versuchten wir eine Zusammenhang zwischen der Greenschen Funktion zum Laplace-Operator $\mathcal{G}$ (vgl. Definition 17.4) und dem reproduzierenden Kern $\mathcal{R}$ in $B^q(G)$ (vgl. Definition 18.2) zu finden. Denn mit

Definition 11.1. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$.

1. Sei $\underline{T}_q : L^q(G) \to \widehat{H}^{1,q}_\bullet(G)^n$ definiert durch (vgl. Theorem 2.9)
$$\left\langle \nabla \underline{T}_q(p), \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G = \left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)^n$$
2. Setze $Z_q : L^q(G) \to L^q(G), \qquad Z_q(p) := \operatorname{div}(\underline{T}_q p)$

gilt

Theorem 11.3. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Es gelte: $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau dann ein $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_\bullet(G)^n$ mit
$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G = \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)^n,$$
wenn es ein $p \in L^q(G)$ gibt mit
$$\lambda\, Z_q(p) = p$$
In diesem Fall kann man $p = \operatorname{div} \underline{u}$ wählen.

Falls $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet ist, gilt für $p \in L^q(G)$ formal mit $\underline{u} := \underline{T}_q(p)$
$$\underline{u}(x) = \int_G \mathcal{G}(x,y)\,(-\Delta \underline{u})(y)\,dy = \int_G \mathcal{G}(x,y)\,(-\nabla p)(y)\,dy$$

$$\begin{aligned}
Z_q(p)(x) &= \operatorname{div} \underline{u}(x) = -\sum_{i=1}^n \int_G (\partial_{x_i}\mathcal{G})(x,y)\,(\partial_{y_i} p)(y)\,dy \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_{\partial G} \underbrace{(\partial_{x_i}\mathcal{G})(x,y)}_{=0}\, p(y)\, N_i(y)\, d\omega_y + \int_G p(y) \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{x_i}\mathcal{G}(x,y)\,dy \\
&= \int_G p(y) \sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{x_i}\mathcal{G}(x,y)\,dy
\end{aligned}$$

Wäre also
$$\sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{x_i}\mathcal{G}(x,y) - \frac{1}{2}\mathcal{R}(x,y)$$
ein kompakter Operator, so würde aus dem Spektralsatz für kompakte, hermitesche Operatoren die Aussage über das Cosseratspektrum folgen. Direkt konnten wir das nicht zeigen. Es gibt zwar Resultate über den Zusammenhang zwischen der Greenschen Funktion zum Bilaplace-Operator Δ^2 und dem reproduzierenden Kern in $B^2(G)$ (siehe [ELPP, Theorem 4.3, S.113]), den gesuchten Zusammenhang konnten wir jedoch nicht in der Literatur finden.
Nachdem wir aber das schwache Cosseratspektrum auf andere Weise bestimmt haben, folgt daraus als Anwendung

Theorem 19.1 Seien $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1 + \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{2+k}$. Sei

$$\mathcal{G}(x,y) = S(x-y) + h(x,y)$$

die Greensche Funktion zum Laplace-Operator in G und sei $\mathcal{R}$ der reproduzierende Kern in $B^q(G)$. Dann gilt

$$Z_q(p)(x) \;=\; p(x) \;+\; \sum_{i=1}^{n} \int_G p(y)\, \partial_{y_i} \partial_{x_i} h(x,y)\, dy \qquad \text{f.ü. für } p \in B^q(G)$$

Insbesondere ist

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \partial_{x_i} h(x,y) \;+\; \frac{1}{2}\, \mathcal{R}(x,y)$$

ein kompakter Operator.

Für die Einheitskugel B_1 (Kapitel 20) und den Halbraum kann man das auch direkt berechnen. In diesen Fällen sind nämlich reproduzierender Kern und Greensche Funktion explizit bekannt. Es ist sicherlich eine interessante Frage, ob man es auch allgemein direkt beweisen kann.

Ganz zufällig stießen wir schließlich auf die Arbeit [Cr] von Michel Crouzeix. Seine Beweisskizze für *beschränkte* Gebiete und $q = 2$ umfasst kaum eine halbe Seite. Er zeigt, dass für $p \in B^2(G)$ eine Abschätzung

$$\|Z_2(p) - \frac{1}{2}\, p\|_{1,2;G} \;\leq\; C\, \|p\|_{2;G} \tag{$*$}$$

gilt.[1]

1. Zunächst genügt es, die Behauptung $(*)$ für $p \in H^{k,2}(G) \cap B^2(G)$ zu zeigen, da $H^{k,2}(G) \cap B^2(G)$ dicht in $B^2(G)$ liegt bezüglich $\|\cdot\|_{2;G}$.
2. Klar ist
$$\|Z_2(p) - \frac{1}{2}\, p\|_{2;G} \;\leq\; C\, \|p\|_{2;G}$$
3. Man wählt dann ein genügend glattes $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit
$$\zeta\Big|_{\partial G} = 0, \qquad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N \text{ (äußere Normale)}$$

[1] Crouzeix betrachtet nur solche $p \in L^2(G)$, die zusätzlich mittelwertfrei sind (das heißt $\int_G p\, dx = 0$). Das bedeutet keine Einschränkung, da für beliebiges $p \in L^2(G)$ für $\underline{\phi} \in H_0^{1,2}(G)$ gilt:

$$\langle p - \int_G p\, dx, \operatorname{div} \underline{\phi} \rangle_G = \left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G$$

Außerdem gibt es nur für $p \in L^q(G)$ mit $\int_G p\, dx = 0$ eine Konstante $C > 0$, die nicht von p abhängt, mit

$$\|p\|_{q;G} \;\leq\; C \sup_{0 \neq \underline{\phi} \in H_0^{1,q'}(G)} \frac{\left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle}{\|\nabla \underline{\phi}\|_{q'}}$$

(siehe [St, Satz 8.2.1, S.256]). Für diese Arbeit ist aber eine Beschränkung auf die mittelwertfreien L^q-Funktionen nicht notwendig und wird auch nicht vorgenommen.

4. und definiert für $p \in H^{k,2}(G) \cap B^2(G)$ und $\underline{u} := \underline{T}_q(p) \in H_0^{1,2}(G)^n$

$$w := \underline{u}\,\nabla\zeta \,-\, \frac{1}{2}\,p\,\zeta$$

5. Man zeigt $w \in H_0^{1,2}(G)$ und

$$\Delta w = 2\nabla\underline{u}\cdot\nabla\nabla\zeta + \underline{u}\cdot\nabla\Delta\zeta - \frac{1}{2}p\Delta\zeta \;\in L^2(G)$$

   Daraus folgt $w \in H^{2,2}(G)$ und

$$\|w\|_{2,2;G} \;\leq\; C\,\|p\|_{2;G}$$

6. Weiter gilt

$$\nabla w\nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p) \in H_0^{1,2}(G)$$

7. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\nabla(\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\|_{2;G} \;&\leq\; \|\nabla(\nabla w\nabla\zeta)\|_{2;G} + \|\nabla\big[\nabla w\nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\big]\|_{2;G} \\ &\leq\; \tilde{C}\,\|p\|_{2;G} \end{aligned}$$

   und schließlich $(*)$.

8. Also folgt für beschränkte Gebiete nach dem Einbettungssatz von Rellich, dass $Z_2 - \frac{1}{2}I$ ein kompakter Operator ist, und nach dem Spektralsatz für kompakte, hermitesche Operatoren die Behauptung für das Cosseratspektrum.

Wir wollen nun einen Überblick geben, welche zusätzlichen Bemühungen nötig waren, um die einzelnen Beweisschritte auf unbeschränkte Gebiete und $1 < q < \infty$ zu übertragen.

1. wird in Kapitel 9 gezeigt. Benötigt werden dabei elliptische Regularitätssätze (Theorem 7.7 und 7.8) sowie für unbeschränkte Gebiete das Abfallverhalten harmonischer Funktionen (Lemma 8.9).

2. folgt direkt aus Definition 11.1 und Theorem 2.8.

3. Für $\zeta \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ wird in Theorem 6.1 $\partial G \in C^{k+1}$ benötigt. Es ist gut möglich, dass dafür $\partial G \in C^k$ genügt. Der Vorteil des hier aufgeführten Beweises ist jedoch, dass er sehr elementar ist.

4. Die Einführung von w war sicher der entscheidende geniale Einfall von Crouzeix, ohne den wir diese Arbeit nicht hätten verfassen können.

5. wird in Lemma 12.2 bzw. 13.2 gezeigt. Man benötigt dafür $p \in C^0(\overline{G})$ und $\underline{u} \in \overline{C}^1(G)^n$. Das wird in Lemma 12.1 bzw. 13.1 mit den Sobolevschen Einbettungssätzen gezeigt. Die Bedingung $\partial G \in C^{k+2}$ mit $k > \frac{n}{q}$ hat dort ihren Ursprung.

6. In Lemma 12.3 bzw. 13.3 braucht man zum Beweis dieser Aussage wieder die Regularität von p und $\underline{u}$ sowie einige Sätze über differenzierbare Funktionen (Kapitel 5).

7. Die Abschätzung folgt dann aus Theorem 2.8.

8. Das Analogon zum Einbettungssatz von Rellich für beschränkte Gebiete ist die Kompaktheit der Einbettung $H^{1,q}(G) \cap B^q(G)$ in $B^q(G)$ in Außengebieten (Theorem 10.1), dessen Beweis auf dem Abfallverhalten harmonischer Funktionen (Theorem 8.7) beruht. Für reelle Banachräume kann dann der Spektralsatz B.9 verwendet werden. Schließlich folgt Theorem 14.1.

Die Regularität der Lösungen (Theorem 15.5) lässt sich dann folgendermaßen zeigen: Falls $\underline{u} \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)^n$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1,2\}$ und

$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q'}(G)^n$$

so gilt mit $p := \operatorname{div} \underline{u}$ nach Theorem 11.3 und 11.4

$$p \in B^q(G), \qquad \lambda\, Z_q(p) = p$$

Mit $\mu := \frac{\lambda}{1-\frac{\lambda}{2}} \in \mathbb{R}$ folgt dann nach $(*)$ bzw. Theorem 12.4 und 13.4

$$p \;=\; \mu \left(Z_q(p) \;-\; \frac{1}{2}\, p \right) \in H^{1,q}(G)$$

Für $1 < q < n$ erhält man mit $q^* = \frac{nq}{n-q}$ zunächst $p \in L^{q^*}(G)$ und dann

$$p \;=\; \mu \left(Z_{q*}(p) \;-\; \frac{1}{2}\, p \right) \in H^{1,q^*}(G)$$

Iterativ erreicht man $p \in H^{1,s}(G)$ für ein $n < s < \infty$ und $p \in C^0(\overline{G})$. Aufgrund des Abfallverhaltens von B^q-Funktionen in Außengebieten (Theorem 8.12) gilt sogar

$$p \in H^{1,\tilde{q}}(G) \cap C^0(\overline{G}) \qquad \forall\, 1 < q < \infty$$

und

$$\nabla \underline{u} \in H^{1,\tilde{q}}(G)^{n^2} \cap \overline{C}^1(G) \qquad \forall\, 1 < q < \infty$$

Für höhere Regularität in den Ableitungen approximiert man $p \in B^q(G)$ bezüglich $\|\cdot\|_{q;G}$ durch $(p_m) \subset H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$ (Theorem 9.1 und 9.2) und nutzt eine Ungleichung der Form (Lemma 15.3)

$$\|Z_q(\pi) - \frac{1}{2}\,\pi\|_{k,q;G} \;\leq\; C_k\, \|\pi\|_{k-1,q;G}$$

um zu zeigen, dass

$$p \;=\; \mu^k \left(Z_s \;-\; \frac{1}{2} I \right)^k p \in H^{k,s}(G)$$

für alle $n < s < \infty$. Daraus folgt dann Theorem 15.5.

Danksagungen

Ich möchte diese Gelegenheit nutzen, um zwei ganz unterschiedlichen Menschen meinen tiefen Dank auszusprechen.

Ohne die Betreuung von Prof. Christian G. Simader wäre es mir sicherlich nicht gelungen, diese Arbeit zu vollenden. Er verbindet mathematische Gründlichkeit mit Einfallsreichtum und Hartnäckigkeit. Jeder Mensch braucht Lehrer, und ich hatte das Glück, in den vergangenen Jahren Schüler eines so ausgezeichneten Lehrers zu sein.

Über eineinhalb Jahre habe ich vergeblich versucht, das Cosseratspektrum zu lösen, ohne auch nur einen Fußbreit weiter zu kommen. Am 3.8.2005 habe ich geheiratet, und kaum eine Woche später überschlugen sich auch mathematisch die Ereignisse...

Teil I: Vorbereitungen

1 Bezeichnungen

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r < R$ bezeichnen wir

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\} \qquad B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$$

$$A_{r,R}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < R\} \qquad A_{r,R} := \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$$

Weiter definieren wir für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \overline{C}^k(G) \quad &:= \quad \{f \in C^k(G) : \text{ Zu } \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ |\alpha| \leq k \text{ gibt es } f^{(\alpha)} \in C^0(\overline{G}) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit } f^{(\alpha)}|_G = D^\alpha f\} \end{aligned}$$

$$C_0^k(G) \quad := \quad \{f \in C^k(G) : \operatorname{supp}(f) \subset G\}$$

Für $1 < q < \infty$ verwenden wir stets die Notation

$$q' := \frac{q}{q-1}$$

Falls $f \in L^q(G)$ ist, bezeichnen wir mit

$$\|f\|_{q;G} := \left(\int_G |f|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

die übliche Norm. Im Allgemeinen unterscheiden wir nicht streng zwischen einer Funktion und der zugehörigen Äquivalenzklasse in $L^q(G)$. Die Notation

$$f \in L^q(G) \cap C^0(G)$$

beispielsweise bedeutet, dass es einen stetigen Repräsentanten gibt.

Sei

$$H^{k,q}(G) := \{u : G \to \mathbb{R} \mid u \text{ messbar, } D^\alpha u \in L^q(G) \text{ für jedes } |\alpha| \leq k\}$$

Mit

$$\|u\|_{k,q;G} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{q;G}^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{für } u \in H^{k,q}(G)$$

ist $H^{k,q}(G)$ ein Banachraum. Setze

$$H_0^{k,q}(G) := \overline{C_0^\infty(G)}^{\|\cdot\|_{k,q;G}}$$

Unterstrichene Größen bezeichnen stets Vektoren

$$\underline{u} := (u_1, \ldots, u_n)$$

Häufig verwenden wir die Notation

$$\underline{u} \in H^{1,q}(G) \text{ statt } \underline{u} \in H^{1,q}(G)^n \quad \text{oder} \quad \nabla u \in L^q(G) \text{ statt } \nabla u \in L^q(G)^n$$

wenn dadurch keine Missverständnisse entstehen können. Weiterhin werden folgende Bezeichnungen verwendet (sofern die Ausdrücke auf den rechten Seiten überhaupt erklärt sind):

$$\begin{aligned}
\langle f, g\rangle_G &:= \int_G f g \, dx \\
\langle \nabla f, \nabla g\rangle_G &:= \sum_{i=1}^n \int_G (\partial_i f)\,(\partial_i g)\, dx \\
\left\langle \underline{f}, \underline{g}\right\rangle_G &:= \sum_{i=1}^n \int_G f_i \, g_i \, dx \\
\left\langle \nabla \underline{f}, \nabla \underline{g}\right\rangle_G &:= \sum_{i,j=1}^n \int_G (\partial_i f_j)\,(\partial_i g_j)\, dx \\
\left\langle \nabla^2 f, \nabla^2 g\right\rangle_G &:= \sum_{i,j=1}^n \int_G (\partial_i \partial_j f)\,(\partial_i \partial_j g)\, dx
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|\underline{f}\|_{q;G} &:= \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{q;G}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\|\nabla f\|_{q;G} &:= \left(\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{q;G}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\|\nabla^2 f\|_{q;G} &:= \left(\sum_{i,j=1}^n \|\partial_i \partial_j f\|_{q;G}^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
\|\nabla \underline{f}\|_{q;G} &:= \left(\sum_{i,j=1}^n \|\partial_j f_i\|_{q;G}^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Für das Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ schreiben wir meist

$$x\, y := \sum_{i=1}^n x_i \, y_i \qquad \text{falls } x,\, y \in \mathbb{R}^n$$

manchmal aber auch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n x_i \, y_i \qquad \text{falls } x,\, y \in \mathbb{R}^n$$

Ein **Außengebiet** ist ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^n \backslash G$ kompakt, und $0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{G}$.

$A \subset\subset B$ bedeutet: A, $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\overline{A}$ beschränkt und $\overline{A} \subset B$

Es sei noch

$$\|f\|_{\infty;G} := \sup_{x \in G} |f(x)|$$

Schließlich bezeichnen wir die Oberfläche der Einheitskugel und ihren Flächeninhalt

$$S_{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\} = \partial B_1 \qquad \omega_n := |S_{n-1}|_{n-1}$$

Ist X ein reeller normierter Vektorraum, so bezeichnen wir seinen topologischen Dualraum mit

$$X^* := \left\{ F^* : X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{F^*(x)}{\|x\|} < \infty \right\}$$

Als Eigenschaft (GA) bezeichnen wir folgende Voraussetzung für $G \subset \mathbb{R}^n$:

(GA) Es gibt eine offene Menge $\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ mit $G = \mathbb{R}^n \backslash \overline{K}$

2 Der Raum $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$

Definition 2.1. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann setze

$$\begin{aligned} \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G) \;:=\; & \{u : G \to \mathbb{R} \mid u \text{ messbar}, \, u \in L^q(G \cap B_R) \; \forall R > 0, \\ & \nabla u \in L^q(G) \text{ und für jedes } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ gilt } \eta u \in H_0^{1,q}(G)\} \end{aligned}$$

Definition 2.2. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann setze

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0^{1,q}(G) \;:=\; & \{u : G \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid u \in L^q(G \cap B_R) \; \forall R > 0, \; \nabla u \in L^q(G) \\ & \text{und es gibt eine Folge } (u_i) \subset C_0^\infty(G) \text{ mit} \\ & \|u - u_i\|_{q, G \cap B_R} \to 0 \quad \forall R > 0 \quad \text{und } \|\nabla u - \nabla u_i\|_{q,G} \to 0\} \end{aligned}$$

Theorem 2.3. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

(a) $H_0^{1,q}(G) \subset \widehat{H}_0^{1,q}(G) \subset \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$

(b) Für $u \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ ist durch $\|\nabla u\|_{q,G}$ eine Norm auf $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ definiert.

(c) Mit der $\|\nabla \cdot\|_{q,G}$-Norm ist $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ ein Banachraum. Für $1 < q < \infty$ ist $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ reflexiv. Ist $q = 2$, so ist $\widehat{H}_\bullet^{1,2}(G)$ ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle \nabla u, \nabla v \rangle$ für $u, v \in \widehat{H}_\bullet^{1,2}(G)$.

(d) $\widehat{H}_0^{1,q}(G)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$, und es gilt $\widehat{H}_0^{1,q}(G) = \overline{C_0^\infty(G)}^{\|\nabla \cdot\|_{q,G}}$.

Beweis. siehe [Si/So, Theorem I.2.2, S.27] □

Theorem 2.4. Sei $n \geq 2,\ 1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

$$\begin{aligned}\widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G) \quad = \quad & \{u : G \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid u \in L^q(G \cap B_R)\ \forall R > 0,\ \nabla u \in L^q(G) \\ & \text{ und es gibt eine Folge } (u_i) \subset C_0^\infty(G) \text{ mit} \\ & \|u - u_i\|_{q,G\cap B_R} + \|\nabla u - \nabla u_i\|_{q,G\cap B_R} \to 0 \quad \forall R > 0\}\end{aligned}$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem I.2.4, S.29] □

Theorem 2.5. Sei $n \geq 2,\ 1 \leq q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt

$$\widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G) = H_0^{1,q}(G)$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Definition 2.1 □

Theorem 2.6. Sei $2 \leq n \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

$$\widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G) = \widehat{H}_0^{1,q}(G)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem I.2.7, S.31] □

Theorem 2.7. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet. Es gelte $1 \leq q < n$. Wähle $r > 0$ mit $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_r$ und sei

$$\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \varphi_r \leq 1, \quad \varphi_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |x| \leq r \\ 1 & \text{, falls } |x| \geq 2r \end{cases}$$

Dann gilt

1. $\widehat{H}_0^{1,q}(G) \subset \widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)$ und $\widehat{H}_0^{1,q}(G) \neq \widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)$
2. $\widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G) = \widehat{H}_0^{1,q}(G) \oplus \{\alpha\varphi_r\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ im Sinne einer direkten Zerlegung.

Beweis. siehe [Si/So, Theorem I.2.16, S.36] □

Theorem 2.8 (Variationsungleichung in $\widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)$). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $\partial G \in C^1$. Es gelte $1 < q < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C_q = C(q, G) > 0$, so dass

$$\|\nabla u\|_{q,G} \ \leq\ C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q'}(G)} \frac{\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle}{\|\nabla \phi\|_{q',G}} \qquad \forall\, u \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.1.1, S.45] □

Theorem 2.9 (Funktionaldarstellung in $\widehat{H}^{1,q}_\bullet(G)$). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $\partial G \in C^1$. Es gelte $1 < q < \infty$. Dann gibt es für jedes $F^* \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)^*$ ein eindeutiges $u \in \widehat{H}^{1,q}_\bullet(G)$ mit

$$F^*(\phi) = \langle \nabla u, \nabla \phi \rangle \qquad \forall\, \phi \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)$$

Weiter gilt mit C_q aus Theorem 2.8

$$C_q^{-1} \|\nabla u\|_{q,G} \leq \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)} \frac{F^*(\phi)}{\|\nabla \phi\|_{q'}} \leq \|\nabla u\|_{q,G}$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.1.2, S.45] □

3 Der Raum $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$

Definition 3.1. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann setze

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G) \;:=\; & \{u : G \to \mathbb{R} \text{ messbar} \mid u,\, \nabla u \in L^q(G \cap B_R)\ \forall\, R > 0, \\ & \nabla^2 u \in L^q(G) \text{ und für jedes } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ gilt } \eta u \in H_0^{2,q}(G)\} \end{aligned}$$

Definition 3.2. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann setze

$$\begin{aligned} \widehat{H}^{2,q}_0(G) \;:=\; & \{u : G \to \mathbb{R} \mid u,\, \nabla u \in L^q(G \cap B_R)\ \forall\, R > 0,\ \nabla^2 u \in L^q(G) \\ & \text{und es gibt eine Folge } (u_i) \subset C_0^\infty(G) \text{ mit} \\ & \|u - u_i\|_{q,G\cap B_R} + \|\nabla u - \nabla u_i\|_{q,G\cap B_R} \to 0 \quad \forall\, R > 0 \\ & \text{und } \|\nabla^2 u - \nabla^2 u_i\|_{q,G} \to 0\} \end{aligned}$$

Theorem 3.3. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

(a) $H_0^{2,q}(G) \subset \widehat{H}^{2,q}_0(G) \subset \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$

(b) Für $u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ ist durch $\|\nabla^2 u\|_{q,G}$ eine Norm auf $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ definiert.

(c) Mit der $\|\nabla^2 \cdot\|_{q,G}$-Norm ist $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ ein Banachraum. Für $1 < q < \infty$ ist $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ reflexiv. Ist $q = 2$, dann ist $\widehat{H}^{2,2}_\bullet(G)$ ein Hilbertraum mit innerem Produkt $\langle \nabla^2 u, \nabla^2 v \rangle$ für $u, v \in \widehat{H}^{2,2}_\bullet(G)$.

(d) $\widehat{H}^{2,q}_0(G)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ und $\widehat{H}^{2,q}_0(G) = \overline{C_0^\infty(G)}^{\|\nabla^2 \cdot\|_{q,G}}$

Beweis. siehe [MueR, Satz II.1, S.126] □

Theorem 3.4. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

$$\begin{aligned}\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) \quad = \quad & \{u : G \to \mathbb{R} \mid u, \nabla u \in L^q(G \cap B_R)\ \forall R > 0,\ \nabla^2 u \in L^q(G) \\ & \text{und es gibt eine Folge } (u_i) \subset C_0^\infty(G) \text{ mit} \\ & \|u - u_i\|_{q,G\cap B_R} + \|\nabla u - \nabla u_i\|_{q,G\cap B_R} + \|\nabla^2 u - \nabla^2 u_i\|_{q,G\cap B_R} \to 0 \\ & \text{für jedes } R > 0\}\end{aligned}$$

Beweis. siehe [MueR, Lemma II.3, S.129] □

Theorem 3.5. Sei $n \geq 2$, $1 \leq q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt

$$\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) = H_0^{2,q}(G)$$

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus Definition 3.1 □

Theorem 3.6. Sei $2 \leq n \leq q < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ erfülle (GA). Dann gilt

$$\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) = \widehat{H}_0^{2,q}(G)$$

Beweis. siehe [MueR, Satz II.3, S.133] □

Theorem 3.7. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet. Es gelte $1 \leq q < n$. Wähle $r > 0$ mit $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_r$ und sei

$$\varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leq \varphi_r \leq 1, \quad \varphi_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |x| \leq r \\ 1 & \text{, falls } |x| \geq 2r \end{cases}$$

Weiter definiere $\psi_{ri}(x) := \varphi_r(x)x_i$ für alle $i = 1, .., n$. Dann gilt

1. $\varphi_r, \psi_{ri} \in \widehat{H}_\bullet^{2,s}(G)$ für alle $1 < s < \infty$,
2. $\widehat{H}_0^{2,q}(G) \subset \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ und $\widehat{H}_0^{2,q}(G) \neq \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$,
3. $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) = \widehat{H}_0^{2,q}(G) \oplus \{\alpha\varphi_r\ :\ \alpha \in \mathbb{R}\} \oplus \{\sum_{i=1}^n \beta_i\psi_{ri}\ :\ \beta_i \in \mathbb{R}\}$ für $1 < q < \frac{n}{2}$,
4. $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) = \widehat{H}_0^{2,q}(G) \oplus \{\sum_{i=1}^n \beta_i\psi_{ri}\ :\ \beta_i \in \mathbb{R}\}$ für $\frac{n}{2} \leq q < n$.

Beweis. siehe [MueR, Lemma II.8, S.140] und [MueR, Satz II.4, S.144] □

Theorem 3.8 (Variationsungleichung in $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $\partial G \in C^2$. Es gelte $1 < q < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C_q = C(q, n, G) > 0$, so dass

$$\|\Delta u\|_{q,G} \ \leq \ C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)} \frac{\langle \Delta u, \Delta \phi \rangle}{\|\Delta \phi\|_{q',G}} \qquad \forall\, u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$$

Beweis. siehe [MueR, Hauptsatz, S.191] □

Theorem 3.9 (Funktionaldarstellung in $\widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $\partial G \in C^2$. Es gelte $1 < q < \infty$. Dann gibt es für jedes $F^* \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)^*$ ein eindeutiges $u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ mit

$$F^*(\phi) = \langle \nabla^2 u, \nabla^2 \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$$

Weiter gibt es eine Konstante $D_q = D(q, G)$ mit

$$D_q^{-1} \|\nabla^2 u\|_{q,G} \leq \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)} \frac{F^*(\phi)}{\|\nabla^2 \phi\|_{q'}} \ \leq \|\nabla^2 u\|_{q,G}$$

Beweis. siehe [MueR, Lemma III.15, S.164] und Theorem 3.8 □

Lemma 3.10. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $1 < q < \infty$. Dann gilt

$$\left\langle \nabla^2 u, \nabla^2 \phi \right\rangle = \langle \Delta u, \Delta \phi \rangle \qquad \text{für } u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G),\ \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$$

Beweis. (a) Betrachte φ_r, ψ_{ri} aus Theorem 3.7. Es gilt

$$(\partial_j \varphi_r)(x) = (\partial_k \partial_j \varphi_r)(x) = 0 \qquad \text{für } |x| \leq r \text{ und für } |x| \geq 2r$$

Weiter gilt

$$(\partial_j \psi_{ri})(x) = (\partial_j \varphi_r)(x) x_i + \varphi_r(x) \delta_{ij}$$

$$(\partial_k \partial_j \psi_{ri})(x) = (\partial_k \partial_j \varphi_r)(x) x_i + (\partial_j \varphi_r)(x) \delta_{ik} + (\partial_k \varphi_r)(x) \delta_{ij}$$

Deshalb

$$\partial_j \partial_k \psi_{ri},\ \partial_j \partial_k \varphi_r \in C_0^\infty(A_{\frac{r}{2},3r})$$

(b) Sei nun $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet, $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{\frac{r}{2}}$. Nach Theorem 3.6 und 3.7 gibt es zu $u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ ein $v \in \widehat{H}^{2,q}_0(G)$ und ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial_i \partial_j f \in C_0^\infty(A_{\frac{r}{2},3r}) \subset C_0^\infty(G) \qquad \text{und} \qquad u = v + f$$

Nach Definition 3.2 gibt es eine Folge $(v_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit $\|\nabla^2(v_k - v)\|_{q;G} \to 0$.
Sei also $\phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla^2 u, \nabla^2 \phi \right\rangle_G &= \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i\partial_j v \; \partial_i\partial_j \phi \; dx \; + \; \sum_{i,j=1}^n \int_G \underbrace{\partial_i\partial_j f}_{\in C_0^\infty(G)} \; \partial_i\partial_j \phi \; dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i\partial_j v_k \; \partial_i\partial_j \phi \; dx \; - \; \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_j (\underbrace{\partial_i\partial_i f}_{\in C_0^\infty(G)}) \partial_j \phi \; dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i\partial_i v_k \; \partial_j\partial_j \phi \; dx \; + \; \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i\partial_i f \; \partial_j\partial_j \phi \; dx \\
&= \langle \Delta v, \Delta\phi \rangle_G + \langle \Delta f, \Delta \phi \rangle_G = \langle \Delta u, \Delta \phi \rangle_G
\end{aligned}
$$

(c) Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, so gilt $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G) = H_0^{2,q}(G)$, und die Behauptung folgt wie in (b) mit $f = 0$. $\square$

Theorem 3.11 (Funktionaldarstellung in $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$). Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet und sei $\partial G \in C^2$. Es gelte $1 < q < \infty$. Dann gibt es für jedes $F^* \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)^*$ ein eindeutiges $u \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ mit

$$F^*(\phi) = \langle \Delta u, \Delta \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$$

Weiter gibt es eine Konstante $K_q = K(n, q, G)$ mit

$$K_q^{-1} \|\Delta u\|_{q,G} \leq \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)} \frac{F^*(\phi)}{\|\Delta\phi\|_{q'}} \leq \|\Delta u\|_{q,G}$$

Beweis. Sei $F^* \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)^*$ gegeben. Nach Theorem 3.9 gibt es ein eindeutiges $u \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ mit

$$F^*(\phi) = \langle \nabla^2 u, \nabla^2 \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$$

Nach Lemma 3.10 gilt

$$F^*(\phi) = \langle \Delta u, \Delta \phi \rangle \qquad \forall \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$$

Die Abschätzung folgt aus Theorem 3.8 und der Hölderungleichung. $\square$

Bemerkung Aus Theorem 3.9 und Lemma 3.10 folgt sofort, dass $\|\nabla^2 \cdot\|_{q;G}$ und $\|\Delta \cdot\|_{q;G}$ äquivalente Normen auf $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ sind.

4 Die Räume $A^q(G)$ und $B^q(G)$

Definition 4.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^2$. Sei $1 < q < \infty$. Dann sei

$$\begin{aligned} A^q(G) &:= \{\Delta u \,:\, u \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)\} \\ B^q(G) &:= \{h \in L^q(G) \,:\, \langle h, \Delta\phi\rangle_G = 0 \quad \forall\, \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)\} \end{aligned}$$

Theorem 4.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^2$. Sei $1 < q < \infty$. Dann gilt

$$L^q(G) = A^q(G) \oplus B^q(G)$$

im Sinne einer direkten Zerlegung

Beweis. siehe [MueR, Satz IV.2.1, S.201] □

Bemerkung Nach dem Lemma von Weyl gilt für $h \in B^q(G)$ insbesondere (für einen Repräsentanten) $\Delta h = 0$. Für beschränkte Gebiete gilt sogar

$$B^q(G) = \{h \in L^q(G) : \Delta h = 0\}$$

Für Außengebiete gibt es dagegen harmonische L^q-Funktionen, die **nicht** in $B^q(G)$ liegen (siehe dazu [MueR] oder Lemma 4.4).

Lemma 4.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^2$. Sei $1 < q < \infty$ und $h \in B^q(G) \cap H^{1,q}(G)$. Dann gilt

$$\langle \nabla h, \nabla\phi\rangle_G = 0$$

für jedes $\phi \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(G)$

Beweis. (a) Für $\phi \in \widehat{H}^{1,q'}_0(G)$ gibt es eine Folge $(\phi_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit

$$\|\nabla\phi_k - \nabla\phi\|_{q';G} \to 0$$

Daraus folgt

$$\langle \nabla h, \nabla\phi\rangle_G = \lim_{k\to\infty} \langle \nabla h, \nabla\phi_k\rangle_G = -\lim_{k\to\infty} \langle h, \Delta\phi_k\rangle_G = 0$$

(b) Für $\phi = \varphi_r$ gemäß Theorem 2.7 gilt $\nabla\varphi_r \in C_0^\infty(G)^n$ und $\varphi_r \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$. Damit gilt

$$\langle \nabla h, \nabla\varphi_r\rangle_G = -\langle h, \Delta\varphi_r\rangle_G = 0$$

(c) Aus Theorem 2.5 - 2.7 folgt die Behauptung. □

Lemma 4.4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^2$. Sei φ_r, ψ_{ri} wie in Theorem 3.7. Setze

$$S(z) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |z|^{2-n} & , \quad z \neq 0,\ n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|z| & , \quad z \neq 0,\ n = 2 \\ 0 & , \quad z = 0,\ n \geq 2 \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$\langle \partial_j S, \Delta \psi_{ri} \rangle_G \ = \ -\delta_{ij}$$

Beweis. Für $z \neq 0$ gilt

$$\partial_j S(z) \ = \ -\frac{1}{\omega_n} \frac{z_j}{|z|^n}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
\langle \partial_j S, \Delta \psi_{ri} \rangle_G \quad &= \quad \langle \partial_j S, \Delta(x_i \varphi_r) \rangle_G \\
&= \quad -\big\langle S, \Delta\big[\delta_{ij}\varphi_r + x_i(\partial_j \varphi_r)\big]\big\rangle_G \\
&\underset{\partial_m \varphi_r \in C_0^\infty(G)}{=\!=} \quad \delta_{ij} \langle \nabla S, \nabla \varphi_r \rangle_G - \langle \Delta S, x_i(\partial_j \varphi_r) \rangle_G \\
&\underset{\Delta S = 0}{=\!=} \quad \delta_{ij} \langle \nabla S, \nabla \varphi_r \rangle_{G \cap B_{2r}} \\
&= \quad -\delta_{ij} \langle \Delta S, \varphi_r \rangle_{G \cap B_{2r}} \\
&\qquad + \delta_{ij} \int_{\partial B_{2r}} \sum_{l=1}^n (\partial_l S)(z) \underbrace{\varphi_r(z)}_{=1} \frac{z_l}{|z|} \, d\omega_z \\
&= \quad -\delta_{ij} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_{2r}} \sum_{l=1}^n \frac{z_l}{|z|^n} \frac{z_l}{|z|} \, d\omega_z \ = \ -\delta_{ij}
\end{aligned}$$

□

5 Sätze über differenzierbare Funktionen

Lemma 5.1. Sei $n \geq 2,\ R > 0,\ h > 0$ und

$$\begin{aligned} Z^+_{R,h} &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x'| < R,\ 0 < x_n < h\} \\ Z^-_{R,h} &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x'| < R,\ -h < x_n < 0\} \\ Z_{R,h} &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x'| < R,\ |x_n| < h\} \\ E_R &:= \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ |x'| < R,\ x_n = 0\} \end{aligned}$$

Es gelte

$$f \in C^0\left(\overline{Z^+_{R,h}}\right) \cap \overline{C}^1\left(Z^+_{R,h}\right)$$

Setze

$$F(x) := \begin{cases} f(x', x_n) \quad , & \text{falls } 0 \leq x_n < h \\ -3f(x', -x_n) + 4f(x', -\frac{x_n}{2}) \quad , & \text{falls } -h < x_n < 0 \end{cases}$$

Dann gilt

$$F \in C^1(Z_{R,h}), \quad F|_{Z^+_{R,h}} = f$$

Beweis. (a) Es gibt $f_i \in C^0\left(\overline{Z^+_{R,h}}\right)$, $i = 1 \dots n$ mit $f_i|_{Z^+_{R,h}} = \partial_i f$

(b) Für $i = 1 \dots n-1$ und $|x'| < R$ sei $(h_k) \subset \mathbb{R}$ mit $0 < |h_k| < R - |x'|$, $h_k \to 0$. Sei $0 < x_n < h$. Dann ist $(x' + h_k e_i, x_n) \in Z^+_{R,h}$ und

$$f(x' + h_k e_i, x_n) - f(x', x_n) = \int_0^{h_k} (\partial_i f)(x' + te_i, x_n)\, dt$$

Für $x_n \to 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x' + h_k e_i, 0) - f(x', 0) \quad &= \quad \int_0^{h_k} f_i(x' + te_i, 0)\, dt \\ &\underset{\text{MWS Int}}{=} f_i(x' + \zeta_k e_i, 0) h_k \end{aligned}$$

mit ζ_k zwischen 0 und h_k (das bedeutet $|\zeta_k| \to 0$)
Deshalb

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x' + he_i, 0) - f(x', 0)}{h} = f_i(x', 0)$$

(c) Für $i = n$ und $|x'| < R,\ 0 < x_n < \frac{h}{2}$ sei $(h_k) \subset \mathbb{R}$ mit $0 < h_k < \frac{h}{2}$, $h_k \to 0$. Dann gilt

$$f(x', x_n + h_k) - f(x', x_n) = \int_0^{h_k} (\partial_n f)(x', x_n + t)\, dt$$

Für $x_n \to 0$ erhalten wir

$$f(x', h_k) - f(x', 0) = \int_0^{h_k} f_n(x', t)\, dt = f_n(x', \zeta_k) h_k$$

mit $0 < \zeta_k < h_k$. Also

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x',h)-f(x',0)}{h} = f_n(x',0)$$

(d) Offensichtlich ist

$$F|_{Z^+_{R,h}} \in C^1(Z^+_{R,h}) \qquad F|_{Z^-_{R,h}} \in C^1(Z^-_{R,h})$$

(e) Sei $i = 1 \dots n-1$ und $|x'| < R$. Dann gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x'+he_i,0)-F(x',0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x'+he_i,0)-f(x',0)}{h} \underset{\text{(b)}}{=} f_i(x',0)$$

(f) Sei $|x'| < R$. Dann gilt

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(x',h)-F(x',0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x',h)-f(x',0)}{h} \underset{\text{(c)}}{=} f_n(x',0)$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{F(x',h)-F(x',0)}{h} &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-3f(x',-h)+4f(x',-\frac{h}{2})-f(x',0)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-3f(x',-h)+3f(x',0)}{h} + \frac{4f(x',-\frac{h}{2})-4f(x',0)}{h} \\
&= \lim_{\substack{h'\to 0\\ h'>0}} \frac{3f(x',h')-3f(x',0)}{h'} - \frac{2f(x',h')-2f(x',0)}{h'} \\
&\underset{\text{(c)}}{=} f_n(x',0)
\end{aligned}$$

(g) Also für $i = 1, \dots, n-1$

$$\partial_i F(x) = \begin{cases} f_i(x',x_n) & , \quad x_n \geq 0 \\ -3f_i(x',x_n)+4f_i(x',-\frac{x_n}{2}) & , \quad x_n < 0 \end{cases}$$

und

$$\partial_n F(x) = \begin{cases} f_n(x',x_n) & , \quad x_n \geq 0 \\ 3f_n(x',x_n)-2f_n(x',-\frac{x_n}{2}) & , \quad x_n < 0 \end{cases}$$

Das heißt

$$\nabla F \in C^0\left(Z_{R,h}\right)^n$$

□

Theorem 5.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit $\partial G \in C^1$.
Dann ist $f \in \overline{C}^1(G)$ genau dann, wenn es ein $\tilde{f} \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ gibt mit $\tilde{f}|_G = f$

Beweis. Sei $f \in \overline{C}^1(G)$ (die Umkehrung ist trivial). Wir bezeichnen mit $f \in C^0(\overline{G})$ wieder die stetige Fortsetzung von f. Es gibt $f_i \in C^0(\overline{G})$ mit $f_i|_G = \partial_i f$

(a) Für $x_0 \in \partial G$ gibt es eine offene Menge $V_{x_0} \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in V_{x_0}$. Weiter existiert ein $R > 0$ und ein Diffeomorphismus $\phi_{x_0} : V_{x_0} \to Z_{R,R}$, so dass gilt: $\phi_{x_0}(V_{x_0} \cap \partial G) = E_R$ und $\phi_{x_0}(V_{x_0} \cap G) = Z^+_{R,R}$.
Sei $\widetilde{V}_{x_0} := \phi_{x_0}^{-1}(Z_{\frac{R}{2},\frac{R}{4}})$

(b) Mit $\widetilde{V}_x$ nach (a) ($x \in \partial G$) gilt:

$$\partial G \subset \bigcup_{x \in \partial G} \widetilde{V}_x$$

Wegen der Kompaktheit von ∂G gibt es $x_1, \ldots, x_N \in \partial G$, so dass mit $\widetilde{V}_i := \widetilde{V}_{x_i}$ gilt:

$$\partial G \subset \bigcup_{i=1}^N \widetilde{V}_i$$

Setze $\tilde{V}_0 := G$. Dann gilt

$$\overline{G} \subset \bigcup_{i=0}^N \widetilde{V}_i$$

Wähle eine zugehörige Zerlegung der Eins, d.h $\varphi_i \in C_0^\infty(\widetilde{V}_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, N$, so dass

$$\sum_{i=0}^N \varphi_i(x) = 1 \qquad \text{für alle } x \in \overline{G}$$

Definiere

$$g_i := \varphi_i f$$

Dann gilt

$$g_0 \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

und für $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n$ erhält man

$$\partial_j g_i \;=\; (\partial_j \varphi_i) f + \varphi_i(\partial_j f) \;=\; g_j^{(i)}|_G$$

mit $g_j^{(i)} := (\partial_j \varphi_i) f + \varphi_i f_j \;\in C^0(\overline{G})$

Definiere für $i = 1, \ldots, N$

$$h_i(x) \;:=\; g_i\left(\phi_i^{-1}(x)\right) \qquad \text{für alle } x \in Z^+_{R_i,R_i} \cup E_{R_i} = \phi_i(V_i \cap \overline{G})$$

Dann ist

$$h_i \in C^0\left(\overline{Z^+_{\frac{R_i}{2},\frac{R_i}{4}}}\right)$$

und

$$\partial_j h_i\Big|_{Z^+_{\frac{R_i}{2},\frac{R_i}{4}}} = \sum_{k=1}^{n} \left[g_k^{(i)}\left(\phi_i^{-1}\right)\right]\left[\partial_j\left(\phi_i^{-1}\right)_k\right]\Big|_{Z^+_{\frac{R_i}{2},\frac{R_i}{4}}}$$

Nach Lemma 5.1 gibt es ein

$$\tilde{h}_i \in C^1(Z_{\frac{R_i}{2},\frac{R_i}{4}}) \qquad \text{so dass} \qquad \tilde{h}_i\Big|_{Z^+_{\frac{R_i}{2},\frac{R_i}{4}}} = h_i$$

Anhand der Definition der Fortsetzung in Lemma 5.1 sehen wir

$$\tilde{h}_i \in C_0^1(Z_{R_i,R_i})$$

Sei

$$\tilde{f}_i(y) := \tilde{h}_i\left(\phi_i(y)\right) \qquad \text{für alle } y \in V_i = \phi_i^{-1}(Z_{R_i,R_i})$$

Dann gilt

$$\tilde{f}_i \in C_0^1(V_i) \qquad \text{and} \qquad \tilde{f}_i\Big|_{G\cap V_i} = g_i$$

Schließlich folgt

$$\tilde{f} := g_0 + \sum_{i=1}^{N} \tilde{f}_i \ \in C_0^1(\mathbb{R}^n), \qquad \tilde{f}\Big|_G = f$$

□

Lemma 5.3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$ und $|f'(t)| \leq L$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 < q < \infty$. Dann gilt für $u \in H^{1,q}(G)$

$$f(u) \in H^{1,q}(G) \qquad \nabla f(u) = f'(u)\nabla u$$

Beweis. siehe [SiDGL, Satz 6.14] □

Lemma 5.4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $u \in H^{1,q}(G)$. Betrachte (strenggenommen für einen Repräsentanten)

$$Z(u) \ := \ \{x \in G \ : \ u(x) = 0\}$$

Dann gilt

$$\partial_i u(x) = 0 \qquad \text{für fast alle } x \in Z(u) \quad \text{und für jedes } i = 1, \dots, n$$

Beweis. siehe [SiDGL, Satz 6.15] □

Theorem 5.5. Sei $1 \leq q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es gelte $u \in C^0(\overline{G}) \cap H^{1,q}(G)$ und $u\big|_{\partial G} = 0$. Dann gilt

$$u \in H_0^{1,q}(G)$$

Beweis. (a) Wähle

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \le \varphi \le 1, \quad \varphi(t) = \varphi(-t), \quad \varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } |t| \le 1 \\ 1 & \text{,falls } |t| \ge 2 \end{cases}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$f_k(t) := \int_0^t \varphi(ks)\, ds$$

Dann gilt

$$f_k(t) = 0 \qquad \forall\, |t| \le \frac{1}{k}$$

und

$$|t - f_k(t)| \le \int_0^{|t|} (1 - \varphi(ks))\, ds \le \min\left(|t|, \frac{2}{k}\right)$$

Weiter ist

$$f_k'(t) = \varphi(kt) \underset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{,falls } t = 0 \\ 1 & \text{,falls } t \ne 0 \end{cases}$$

(b) Sei

$$u_k(x) := f_k(u(x))$$

Nach Lemma 5.3 gilt

$$u_k \in H^{1,q}(G)$$

Wegen $u\big|_{\partial G} = 0$, $u \in C^0(\overline{G})$ und ∂G kompakt, gibt es $G_k \subset\subset G$ mit $|u(x)| \le \frac{1}{k}$ für alle $x \in G \backslash G_k$
Deshalb

$$u_k(x) = 0 \qquad \forall\, x \in G \backslash G_k$$

und

$$u_k \in H_0^{1,q}(G)$$

(c) Nun ist

$$|u_k(x) - u(x)| \;=\; |f_k(u(x)) - u(x)| \underset{(a)}{\le} \min\left(|u(x)|, \frac{2}{k}\right) \to 0$$

für jedes $x \in G$ und daher nach dem Satz von Lebesgue

$$\|u_k - u\|_{q;G} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

(d) Nach Lemma 5.4 gilt für fast alle $x \in Z(u)$:

$$\partial_i u(x) - \partial_i u_k(x) = \partial_i u(x) \Big[1 - \varphi(k\, u(x))\Big] = 0$$

Für $x \in G \backslash Z(u)$ erhalten wir aus (a):

$$\partial_i u(x) - \partial_i u_k(x) \to 0$$

Wieder folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}\int_G |\partial_i u - \partial_i u_k|^q \, dx &= \int_G \Big|\partial_i u(x)\Big[1 - \varphi(k\, u(x))\Big]\Big|^q \, dx \\ &= \int_{G \setminus Z(u)} \Big|\partial_i u(x)\Big[1 - \varphi(k\, u(x))\Big]\Big|^q \, dx \to 0\end{aligned}$$

(e) Wegen der Abgeschlossenheit von $H_0^{1,q}(G)$ in $H^{1,q}(G)$ gilt

$$u \in H_0^{1,q}(G)$$

□

Theorem 5.6. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial G \in C^1$. Es gelte $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $u\big|_{\partial G} = 0$. Dann gibt es $\lambda : \partial G \to \mathbb{R}$ mit

$$(\nabla u)(x) = \lambda(x) N(x) \qquad \text{für alle } x \in \partial G$$

wobei $N(x)$ die äußere Einheitsnormale in $x \in \partial G$ ist.

Beweis. Sei $x \in \partial G$. Dann existieren offene $U \subset \mathbb{R}^n$ $(x \in U)$ und $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$, und es gibt eine bijektive Abbildung $\phi : O \to \partial G \cap U$ mit $\phi \in C^1(O; \mathbb{R}^n)$ und $\phi(s) = x$ mit geignetem $s \in O$. Das bedeutet

$$u(\phi(t)) = 0 \qquad \forall\, t \in O$$

Durch Ableiten dieser Gleichung erhalten wir aus der Kettenregel

$$0 = \left\langle (\nabla u)(\phi(t)), \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(t) \right\rangle \qquad \forall\, t \in O$$

Insbesondere gilt für $t = s$

$$0 = \left\langle (\nabla u)(x), \frac{\partial \phi}{\partial t_i}(s) \right\rangle$$

Für den Tangentialraum gilt bekanntlich

$$T_x(\partial G) = \operatorname{span}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t_1}(s), \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial t_{n-1}}(s)\right)$$

und

$$N(x) \perp T_x(\partial G)$$

Daher muss ein $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$(\nabla u)(x) = \lambda(x) N(x)$$

□

Lemma 5.7. Sei $1 < q < \infty$ und sei $H := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ der obere Halbraum. Es gelte $u \in H_0^{1,q}(H) \cap C^0(\overline{H})$. Dann gilt

$$u\Big|_{\partial H} = 0$$

Beweis. Sei $u_k \in C_0^\infty(H)$ mit $\|u - u_k\|_{1,q;H} \to 0$. Dann gilt

$$u_k(x', x_n) = u_k(x', x_n) - \underbrace{u_k(x', 0)}_{=0} = \int_0^{x_n} (\partial_n u_k)(x', t)dt$$

Als konvergente Folge ist (u_k) beschränkt

$$\|u_k\|_{1,q;G} \leq C \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Für $x_n \leq a$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|u_k(x', x_n)| &\leq \left[\int_0^a |(\partial_n u_k)(x', t)|^q dt\right]^{\frac{1}{q}} a^{\frac{1}{q'}} \\
\int_{|x'|\leq r} |u_k(x', x_n)|^q dx' &\leq \int_{|x'|\leq r} \int_0^a |(\partial_n u_k)(x', t)|^q dt\, dx'\ a^{\frac{q}{q'}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty |(\partial_n u_k)(x', t)|^q dt\, dx'\ a^{\frac{q}{q'}} \\
&\leq C^q\, a^{q-1} \\
\int_0^a \int_{|x'|\leq r} |u_k(x', x_n)|^q dx' dx_n &\leq C^q\, a^q \qquad \forall\, r > 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^a\!\!\int_{|x'|\leq r} |u(x', x_n)|^q dx' dx_n\right]^{\frac{1}{q}} &\leq \left[\int_0^a\!\!\int_{|x'|\leq r} |u_k(x', x_n)|^q dx' dx_n\right]^{\frac{1}{q}} + \\
&\quad + \left[\int_0^a\!\!\int_{|x'|\leq r} |(u - u_k)(x', x_n)|^q dx' dx_n\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq Ca + \|u_k - u\|_{q;H}
\end{aligned}$$

Für $(k \to \infty)$ erhalten wir

$$\left[\int_0^a \int_{|x'|\leq r} |u(x', x_n)|^q dx' dx_n\right]^{\frac{1}{q}} \leq Ca \qquad \forall\, a > 0 \quad \forall\, r > 0$$

Setze für $r > 0$ und $0 \leq x_n \leq \infty$

$$f_r(x_n) := \int_{|x'|\leq r} |u(x', x_n)|^q dx'$$

Dann ist f_r stetig in $[0,\infty[$ für $r > 0$, und es gilt

$$\int_0^a f_r(x_n)\,dx_n \;\leq\; C^q a^q \qquad \forall\, a > 0$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_{|x'|\leq r} |u(x',0)|^q\,dx' &= f_r(0) \;=\; \frac{1}{a}\int_0^a f_r(0)\,dx_n \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a \left(f_r(0) - f_r(x_n)\right)\,dx_n + \frac{1}{a}\int_0^a f_r(x_n)\,dx_n \\
&\leq \max_{0\leq x_n\leq a} |f_r(0) - f_r(x_n)| \;+\; C^q a^{q-1}
\end{aligned}$$

Für $a \to 0$ folgt

$$\int_{|x'|\leq r} |u(x',0)|^q dx' \leq 0 \qquad \forall\, r > 0$$

Weil u stetig ist, folgt mit einem Standardargument

$$u(x',0) = 0 \qquad \forall\, x' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

□

Theorem 5.8. Sei $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\partial G \in C^1$. Es gelte $f \in \overline{C}^1(G) \cap H_0^{1,q}(G)$. Dann gilt

$$f\Big|_{\partial G} = 0$$

Beweis. Sei $x_0 \in \partial G$ beliebig, aber im Folgenden fest gewählt. Es existiert eine offene Menge $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $\phi : V \to Z_{R,R}$, $(R > 0)$ mit $\phi(V \cap \partial G) = E_R$, $\phi(V \cap G) = Z^+_{R,R}$ (für die Definition von $Z_{R,R}$, E_R, $Z^+_{R,R}$ siehe Lemma 5.1). Nach eventueller Verkleinerung der Menge V können wir annehmen, dass $\phi \in \overline{C}^1(V;\mathbb{R}^n)$ und $\phi^{-1} \in \overline{C}^1(Z_{R,R};\mathbb{R}^n)$ gilt.

Wähle $\varphi \in C_0^\infty(V)$, so dass $\varphi(x_0) = 1$. Nach Lemma A.13 wissen wir

$$g := \varphi f \in H_0^{1,q}(G \cap V)$$

und offensichtlich auch nach Theorem 5.2

$$g \in C_0^1(V)$$

Nach Lemma A.14 gilt

$$h := g \circ \phi^{-1} \in H_0^{1,q}(Z^+_{R,R}) \cap C_0^1(Z_{R,R})$$

Definiere

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & , \quad x \in Z_{R,R} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^n \backslash Z_{R,R} \end{cases}$$

Dann folgt

$$\tilde{h} \in H_0^{1,q}(H) \cap C^0(\overline{H})$$

Aus Lemma 5.7 ergibt sich

$$\tilde{h}\Big|_{\partial H} = 0$$

Deshalb gilt schließlich

$$0 = \tilde{h}(\phi(x_0)) = h(\phi(x_0)) = g(x_0) = \varphi(x_0)f(x_0) = f(x_0)$$

$\square$

6 Existenz von $\quad \zeta \in C_0^k(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$

Theorem 6.1. Sei $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+1}$. Dann gibt es eine Abbildung

$$\zeta \in C_0^k(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

wobei N die äußere Normale von G ist.

Beweis. (a) Setze $M := \partial G$. Für $x_0 \in M$ gibt es eine offene Menge $x_0 \in \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{h} : \widetilde{V} \to \mathbb{R}$, $\tilde{h} \in C^{k+1}(\widetilde{V})$, so dass $(\nabla\tilde{h})(x_0) \neq 0$ und

$$M \cap \widetilde{V} = \{x \in \widetilde{V} : \tilde{h}(x) = 0\}$$

Wie in Theorem 5.6 zeigt man

$$(\nabla\tilde{h})(x) = \pm|(\nabla\tilde{h})(x)|N(x) \qquad \forall\, x \in M \cap \widetilde{V}$$

Wegen $(\nabla\tilde{h})(x_0) \neq 0$ gibt es eine offene Menge $x_0 \in V \subset \widetilde{V}$, so dass

$$(\nabla\tilde{h})(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in V$$

$\nabla\tilde{h}$ und $|\nabla\tilde{h}|\, N$ sind je stetig in $V \cap M$ Also können wir ohne Einschränkung annehmen

$$(\nabla\tilde{h})(x) = +|(\nabla\tilde{h})(x)|N(x) \qquad \forall\, x \in M \cap V$$

Definiere nun

$$h := \frac{\tilde{h}}{|\nabla\tilde{h}|} \in C^k(V)$$

Dann gilt

$$h(x) = 0 \qquad \forall\, x \in M \cap V$$

und für jedes $x \in M \cap V$ gilt:

$$(\nabla h)(x) = \underbrace{\tilde{h}(x)}_{=0}\ \nabla\left(\frac{1}{|\nabla\tilde{h}(x)|}\right) + \underbrace{\frac{\nabla\tilde{h}}{|\nabla\tilde{h}|}}_{=N(x)} = N(x)$$

(b) Weil M kompakt ist und wegen (a), gibt es offene $V_1, \dots, V_m \subset \mathbb{R}^n$ und $h_i \in C^k(V_i)$, so dass

$$(\nabla h_i)(x) \neq 0 \qquad \forall\, x \in V_i \quad \forall i = 1, \dots, m$$

und

$$M \cap V_i = \{x \in V_i : h_i(x) = 0\}$$

Weiter gilt

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i$$

und

$$\nabla h_i(x) = N(x) \qquad \forall\, x \in M \cap V_i$$

Wähle eine zugehörige Zerlegung der Eins, d.h. $\phi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$0 \leq \phi_k \leq 1, \quad \operatorname{supp}(\phi_k) \subset V_k, \quad \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) = 1 \quad \forall\, x \in M$$

Definiere

$$f_j := \phi_j h_j \ \in C_0^k(V_j) \subset C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

und

$$f := \sum_{j=1}^{m} f_j \ \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$$

Für $x \in M$ gilt

$$f(x) = \sum_{\substack{j=1 \\ x \in V_j}}^{m} \phi_j(x) \underbrace{h_j(x)}_{=0} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
(\nabla f)(x) \quad &= \quad \sum_{\{j : x \in V_j\}} \nabla \left[\phi_j(x) h_j(x)\right] \ = \ \sum_{\{j : x \in V_j\}} \Big[(\nabla \phi_j)(x) \underbrace{h_j(x)}_{=0} + \phi_j(x) \underbrace{(\nabla h_j)(x)}_{=N(x)}\Big] \\
&= \quad \sum_{\{j : x \in V_j\}} \phi_j(x) N(x) \ = \ \sum_{j=1}^{m} \phi_j(x) N(x) \ = \ N(x)
\end{aligned}$$

$\square$

7 Elliptische Regularitätssätze

Theorem 7.1. Sei $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ erfülle (GA) und $\partial G \in C^{2+k}$. Sei $1 < q < \infty$ und sei $p \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)$. Sei $x_0 \in \partial G$ und $R_0 > 0$ und es gebe ein $f \in H^{k,q}(G \cap B_{R_0}(x_0))$, so dass

$$\langle \nabla p, \nabla \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \qquad \text{für alle } \phi \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G \cap B_{R_0}(x_0))$$

Dann existiert $0 < R_k < R_0$, so dass $p\big|_{G \cap B_{R_k}(x_0)} \in H^{2+k,q}(G \cap B_{R_k}(x_0))$ und mit einer Konstanten $C_k = C(k, R_k, R_1, G, q) > 0$ gilt

$$\|p\|_{2+k,q;G\cap B_{R_k}(x_0)} \ \leq \ C_k \left(\|f\|_{k,q;G\cap B_{R_0}(x_0)} + \|p\|_{1,q;G\cap B_{R_0}(x_0)} \right)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.8.8, S.91] □

Theorem 7.2. Sei $1 < q < \infty$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ und $p \in H^{1,q}(B_R(x_0))$. Sei $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$ und sei $f \in H^{k,q}(B_R(x_0))$. Weiter gelte

$$\langle \nabla p, \nabla \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \qquad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(B_R(x_0))$$

Dann gilt für $0 < R_1 < R$: $\quad p\big|_{B_{R_1}(x_0)} \in H^{2+k,q}(B_{R_1}(x_0))$, und es gibt eine Konstante $C_k = C(k, R, R_1, q) > 0$, so dass

$$\|p\|_{2+k,q;B_{R_1}(x_0)} \ \leq \ C_k \left(\|f\|_{k,q;B_R(x_0)} + \|p\|_{1,q;B_R(x_0)} \right)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.8.9, S.91] □

Theorem 7.3. Sei $R > 0$, $k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$ und $1 < q < \infty$. Sei $p \in L^q(B_s \backslash B_R)$ für alle $s > R$ und $\nabla p \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$. Weiter gebe es ein $f \in H^{k,q}(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$, so dass

$$\langle \nabla p, \nabla \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle \qquad \text{for all } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$$

Dann existiert $R < R_k < \infty$, so dass $\partial_j \partial_i p \in H^{k,q}(\mathbb{R}^n \backslash B_{R_k})$ für $i, j = 1, \ldots, n$ und mit $C_k = C(n, k, R, R_k, q) > 0$ gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} \|\partial_i \partial_j p\|_{k,q;\mathbb{R}^n \backslash B_{R_k}} \ \leq \ C_k \left(\|f\|_{k,q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} + \|p\|_{1,q;B_{2R_k}\backslash B_R} \right)$$

Beweis. siehe [Si/So, Corollary II.8.12, S.94] □

Theorem 7.4. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 0$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte $1 < q < \infty$. Es sei $u \in H_0^{1,q}(G)$, und es gebe $f \in H^{k,q}(G)$, so dass

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G)$$

Dann ist $u \in H^{2+k,q}(G)$ und es existiert eine Konstante $C_k = C_k(G, q, k, n) > 0$ mit

$$\|u\|_{2+k,q;G} \;\leq\; C_k \left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right)$$

Beweis. (a) Sei $x \in \partial G$. Dann gilt

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G \cap B_1(x)) \subset C_0^\infty(G)$$

Wegen $\widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G \cap B_1(x)) = H_0^{1,q'}(G \cap B_1(x)) = \overline{C_0^\infty(G \cap B_1(x))}^{\|\cdot\|_{1,q';G\cap B_1(x)}}$ gilt

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G \cap B_1(x))$$

und daher gibt es nach Theorem 7.1 ein $0 < R_x < 1$ und eine Konstante $C_1 = C_1(k, q, G, x)$, so dass

$$u\Big|_{G \cap B_{R_x}(x)} \in H^{2+k,q}(G \cap B_{R_x}(x))$$

und

$$\begin{aligned} \|u\|_{2+k,q;G\cap B_{R_x}(x)} &\leq C_1 \left(\|f\|_{k,q;G\cap B_1(x)} + \|u\|_{1,q;G\cap B_1(x)}\right) \\ &\leq C_1 \left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right) \end{aligned}$$

(b) Sei $x \in G$. Dann gibt es ein $R_x > 0$ mit $B_{2R_x}(x) \subset G$. Offensichtlich gilt

$$u\Big|_{B_{2R_x}(x)} \in H^{1,q}(B_{2R_x}(x))$$

und

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(B_{2R_x}(x))$$

Nach Theorem 7.2 erhalten wir

$$u\Big|_{B_{R_x}(x)} \in H^{2+k,q}(B_{R_x}(x))$$

und es existiert eine Konstante $C_2 = C_2(k, q, x, G) > 0$, so dass

$$\|u\|_{2+k,q;B_{R_x}(x)} \;\leq\; C_2 \left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right)$$

(c) Da $\overline{G}$ kompakt ist, finden wir $M, N \in \mathbb{N}$ und offene $V_i \subset \mathbb{R}^n$ wie in (a) und $U_j \subset G$ wie in (b) mit

$$\partial G \subset \bigcup_{i=1}^N V_i \qquad \overline{G} \subset \bigcup_{i=1}^N V_i \;\cup\; \bigcup_{j=1}^M U_j$$

Wähle eine zugehörige Zerlegung der Eins, d.h. $\varphi_j, \in C_0^\infty(U_j)$, $\phi_i \in C_0^\infty(V_i)$ mit $0 \le \varphi_j, \phi_i \le 1$ und

$$\sum_{j=1}^{M} \varphi_j(x) + \sum_{i=1}^{N} \phi_i(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \overline{G}$$

Nach (a) und (b) gilt

$$u\Big|_{U_j} \in H^{2+k,q}(U_j), \quad \|u\|_{2+k,q;U_j} \;\le\; C_{2,j}\,\left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right)$$

und

$$u\Big|_{G\cap V_i} \in H^{2+k,q}(G\cap V_i), \quad \|u\|_{2+k,q;G\cap V_i} \;\le\; C_{1,i}\,\left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right)$$

(d) Sei nun $z \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le 2+k$. Dann gilt

$$\int_G u\,(D^\alpha z)\;dx = \int_G u\; D^\alpha \left(\sum_{j=1}^{M} \varphi_j z + \sum_{i=1}^{N} \phi_i z \right)\; dx$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \int_{U_j} u\; D^\alpha \underbrace{(\varphi_j z)}_{\in C_0^\infty(U_j)}\; dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{G\cap V_i} u\; D^\alpha \underbrace{(\phi_i z)}_{\in C_0^\infty(G\cap V_i)}\; dx$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \sum_{j=1}^{M} \int_{U_j} D^\alpha \left(u\Big|_{U_j} \right)\; \varphi_j z\, dx + (-1)^{|\alpha|} \sum_{i=1}^{N} \int_{G\cap V_i} D^\alpha \left(u\Big|_{G\cap V_i} \right)\; \phi_i z\, dx$$

Definiere

$$g_j(x) := \begin{cases} D^\alpha \left(u\Big|_{U_j} \right) & , \quad x \in U_j \\ 0 & \quad \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$h_i(x) := \begin{cases} D^\alpha \left(u\Big|_{G\cap V_i} \right) & , \quad x \in G\cap V_i \\ 0 & \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$g_j,\, h_i \in L^q(G)$$

und mit

$$h := \sum_{i=1}^{N} \phi_i h_i + \sum_{j=1}^{M} \varphi_j g_j \;\in L^q(G)$$

gilt

$$\int_G u\,(D^\alpha z)\; dx = (-1)^{|\alpha|} \int_G hz\, dx$$

Deshalb existiert

$$D^\alpha u = h \in L^q(G) \qquad \forall\, |\alpha| \le 2+k$$

das heißt

$$u \in H^{2+k,q}(G)$$

und nach (c)

$$\|u\|_{2+k,q;G} \;\leq\; \left(\sum_{j=1}^{M} C_{2,j}^q + \sum_{i=1}^{N} C_{1,i}^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{1,q;G}\right)$$

□

Theorem 7.5. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 0$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$ und $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{R_0}$. Es gelte $1 < q < \infty$. Sei $u \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und es gebe $f \in H^{k,q}(G)$, so dass

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G)$$

Dann ist $\nabla u \in H^{1+k,q}(G)$ und es gibt eine Konstante $C_k = C_k(G, q, k, n) > 0$ und $R_k > R_0$ mit

$$\|\nabla u\|_{1+k,q;G} \;\leq\; C_k \left(\|f\|_{k,q;G} + \|u\|_{q;G\cap B_{R_k}} + \|\nabla u\|_{q;G}\right)$$

Beweis. (a) Genauso wie in Theorem 7.4 zeigt man

$$\nabla u\Big|_{G\cap B_R} \in H^{1+k,q}(G \cap B_R) \qquad \forall\, R > R_0$$

und

$$\|\nabla u\|_{1+k,q;G\cap B_R} \;\leq\; C_1 \left(\|f\|_{k,q;G\cap B_{2R}} + \|u\|_{1,q;G\cap B_{2R}}\right)$$

(b) Nach Theorem 7.3 gibt es $R_k > R_0$ und $C_2 > 0$ mit

$$\nabla u\Big|_{\mathbb{R}^n\backslash B_{R_k}} \in H^{1+k,q}(\mathbb{R}^n \backslash B_{R_k})$$

und

$$\|\nabla u\|_{1+k,q;\mathbb{R}^n\backslash B_{R_k}} \;\leq\; C_2 \left(\|f\|_{k,q;\mathbb{R}^n\backslash B_{R_0}} + \|u\|_{1,q;B_{2R_k}\backslash B_{R_0}}\right)$$

(c) Aus (a),(b) und Lemma A.5 folgt schließlich die Behauptung. □

Theorem 7.6. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 0$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{2+k}$. Sei $u \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und $\Delta u \in H^{k,q}(G)$. Dann ist

$$\nabla u \in H^{1+k,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C_k = C_k(G, q, n, k) > 0$ und ein $R_k > 0$, so dass

$$\|\nabla u\|_{1+k,q;G} \;\leq\; C_k \left(\|\Delta u\|_{k,q;G} + \|u\|_{q;G\cap B_{R_k}} + \|\nabla u\|_{q;G}\right)$$

Beweis. Für $\phi \in C_0^\infty(G)$ gilt

$$\langle \nabla u, \nabla \phi \rangle_G = -\langle \Delta u, \phi \rangle_G$$

und die Behauptung folgt aus Theorem 7.4 und Theorem 7.5. □

Theorem 7.7. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 0$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{4+k}$. Es gelte $1 < q < \infty$. Sei $u \in H_0^{2,q}(G)$ und es gebe $f \in H^{k,q}(G)$, so dass

$$\langle \Delta u, \Delta \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G)$$

Dann ist

$$u \in H^{4+k,q}(G)$$

Beweis. siehe [SiLec, Theorem 9.12, S.157] mit $m = 2$. □

Theorem 7.8. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $k \geq 0$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{4+k}$. Es gelte $1 < q < \infty$. Sei $u \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$ und es gebe $f \in H^{k,q}(G)$, so dass

$$\langle \Delta u, \Delta \phi \rangle_G = \langle f, \phi \rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G)$$

Dann gilt für alle $r > 0$

$$u\Big|_{G \cap B_r} \in H^{4+k,q}(G \cap B_r)$$

Beweis. Die Behauptung lässt sich völlig analog zum Beweis von [SiLec, Theorem 9.12 bzw. 9.11, S.156] zeigen. □

Theorem 7.9. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^1$. Sei $1 < s < \infty$ und es gelte $p \in \widehat{H}_\bullet^{1,s}(G) = H_0^{1,s}(G)$. Sei $1 < q < \infty$ und es gelte

$$S_q(p) := \sup_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(G)} \frac{\langle \nabla p, \nabla \phi \rangle}{\|\nabla \phi\|_{q';G}} < \infty$$

Dann ist $p \in H_0^{1,q}(G)$ und mit $C_q > 0$ nach Theorem 2.8 gilt

$$\|\nabla p\|_{q;G} \;\leq\; C_q\, S_q(p)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.5.1, S.66] □

Theorem 7.10. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Sei $1 < s < \infty$ und es gelte $p \in \widehat{H}_\bullet^{1,s}(G)$. Sei $1 < q < \infty$ und es gelte

$$S_q(p) := \sup_{0 \neq \phi \in C_r^\infty(G)} \frac{\langle \nabla p, \nabla \phi \rangle}{\|\nabla \phi\|_{q';G}} < \infty$$

(wobei $C_r^\infty(G) := \{\phi_0 + c\varphi_r \,:\, \phi_0 \in C_0^\infty(G),\, c \in \mathbb{R}\}$ mit φ_r wie in Theorem 2.7)

Dann ist $p \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und mit $C_q > 0$ nach Theorem 2.8 gilt

$$\|\nabla p\|_{q;G} \;\leq\; C_q\, S_q(p)$$

Beweis. siehe [Si/So, Theorem II.5.3, S.67] □

8 Das Abfallverhalten harmonischer Funktionen in Außengebieten

Lemma 8.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es seien $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B_\rho(x)} \subset U$. Sei $p : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gilt

$$|(\partial_j p)(x)| \;\leq\; \frac{n(n+1)}{\omega_n} \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho} |p(x+y)|\, dy$$

Beweis. Mit $\Delta p = 0$ folgt auch $\Delta \partial_j p = 0$. Sei $0 < \varepsilon < \rho$. Nach der Mittelwerteigenschaft gilt

$$\begin{aligned}(\partial_j p)(x) &= \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} (\partial_j p)(x+y)\, dy \overset{\text{Gauß}}{=} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{\partial B_\varepsilon} p(x+y) \frac{y_j}{|y|}\, d\omega_y \\ &= \frac{n}{\varepsilon^n \omega_n} \varepsilon^{n-1} \int_{S_{n-1}} p(x+\varepsilon\xi)\, \xi_j\, d\omega_\xi \;=\; \frac{n}{\varepsilon\, \omega_n} \int_{S_{n-1}} p(x+\varepsilon\xi)\, \xi_j\, d\omega_\xi\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\varepsilon \frac{\omega_n}{n} (\partial_j p)(x) = \int_{S_{n-1}} p(x+\varepsilon\xi)\, \xi_j\, d\omega_\xi$$

und

$$\int_0^\rho \varepsilon^n \frac{\omega_n}{n} (\partial_j p)(x)\, d\varepsilon = \int_0^\rho \varepsilon^{n-1} \int_{S_{n-1}} p(x+\varepsilon\xi)\, \xi_j\, d\omega_\xi\, d\varepsilon$$

Als Nächstes erhalten wir

$$\frac{1}{n+1} \rho^{n+1} \frac{\omega_n}{n} (\partial_j p)(x) \;=\; \int_{B_\rho} p(x+y) \frac{y_j}{|y|}\, dy$$

und schließlich

$$|(\partial_j p)(x)| \;\leq\; \frac{n(n+1)}{\omega_n} \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho} |p(x+y)|\, dy$$

□

Lemma 8.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in L^q(G)$ $(1 \leq q < \infty)$ harmonisch in G. Es sei $G_1 \subset G$ mit $d := \operatorname{dist}(G_1, \partial G) > 0$. Dann gilt

$$\|\partial_i p\|_{q;G_1} \;\leq\; \frac{n+1}{R} \|p\|_{q;G} \qquad \text{für alle } 0 < R < \frac{d}{2}$$

Beweis. Aus Lemma 8.1 erhalten wir für $x \in G_1$ und $0 < R < \frac{d}{2}$:

$$\begin{aligned}
|(\partial_j p)(x)| &\leq \frac{n+1}{R\,|B_R|} \int_{B_R} |p(x+y)|\, dy \\
&\leq \frac{n+1}{R}\, |B_R|^{-1} \left(\int_{B_R} |p(x+y)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} |B_R|^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \frac{n+1}{R}\, |B_R|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} |p(x+y)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned}
\left(\int_{G_1} |(\partial_j p)(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \frac{n+1}{R}\, |B_R|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{G_1} \int_{B_R} |p(x+y)|^q\, dy\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{n+1}{R}\, |B_R|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \int_{G_1} |p(x+y)|^q\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{n+1}{R}\, |B_R|^{-\frac{1}{q}} \left(\int_{B_R} \int_{G} |p(z)|^q\, dz\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{n+1}{R}\, \|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

□

Lemma 8.3. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es seien $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\overline{B_\rho(x)} \subset U$. Sei $p : U \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Dann gilt für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$

$$|(\partial_i \partial_j p)(x)| \leq \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}\, \frac{2^{n+2}}{\rho^{n+2}} \int_{B_\rho} |p(x+y)|\, dy$$

und

$$|(\partial_i \partial_j \partial_k p)(x)| \leq \frac{n(n+1)^3}{\omega_n}\, 2^n\, \frac{3^{n+3}}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho} |p(x+y)|\, dy$$

Beweis. (a) Aus Lemma 8.1 erhalten wir

$$|(\partial_i \partial_j p)(x)| \leq \frac{n(n+1)}{\omega_n}\, \frac{2^{n+1}}{\rho^{n+1}} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x)} |(\partial_j p)(y)|\, dy$$

und für $y \in B_{\frac{\rho}{2}}(x)$

$$|(\partial_j p)(y)| \leq \frac{n(n+1)}{\omega_n}\, \frac{2^{n+1}}{\rho^{n+1}} \int_{B_{\frac{\rho}{2}}(y)} |p(z)|\, dz$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
|(\partial_i\partial_j p)(x)| &\leq \frac{n^2(n+1)^2}{{\omega_n}^2}\,\frac{2^{2(n+1)}}{\rho^{2(n+1)}}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x)}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}(y)} |p(z)|\,dz\,dy \\
&\leq \frac{n^2(n+1)^2}{{\omega_n}^2}\,\frac{2^{2(n+1)}}{\rho^{2(n+1)}}\int_{B_{\frac{\rho}{2}}(x)}\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz\,dy \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{{\omega_n}^2}\,\frac{2^{2(n+1)}}{\rho^{2(n+1)}}\left|B_{\frac{\rho}{2}}(x)\right|\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz \\
&= \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}\,\frac{2^{n+2}}{\rho^{n+2}}\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz
\end{aligned}
$$

(b) Aus Lemma 8.1 und (a) erhalten wir

$$
|(\partial_i\partial_j\partial_k p)(x)| \leq \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}\,\frac{3^{n+2}}{\rho^{n+2}}\int_{B_{\frac{2\rho}{3}}(x)} |(\partial_k p)(y)|\,dy
$$

und für $y \in B_{\frac{2\rho}{3}}(x)$

$$
|(\partial_k p)(y)| \leq \frac{n(n+1)}{\omega_n}\,\frac{3^{n+1}}{\rho^{n+1}}\int_{B_{\frac{\rho}{3}}(y)} |p(z)|\,dz
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
|(\partial_i\partial_j\partial_k p)(x)| &\leq \frac{n^2(n+1)^3}{{\omega_n}^2}\,\frac{3^{2n+3}}{\rho^{2n+3}}\int_{B_{\frac{2\rho}{3}}(x)}\int_{B_{\frac{\rho}{3}}(y)} |p(z)|\,dz\,dy \\
&\leq \frac{n^2(n+1)^3}{{\omega_n}^2}\,\frac{3^{2n+3}}{\rho^{2n+3}}\int_{B_{\frac{2\rho}{3}}(x)}\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz\,dy \\
&= \frac{n^2(n+1)^3}{{\omega_n}^2}\,\frac{3^{2n+3}}{\rho^{2n+3}}\,\frac{\omega_n}{n}\left(\frac{2\rho}{3}\right)^n\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz \\
&= \frac{n(n+1)^3}{\omega_n}\,2^n\,\frac{3^{n+3}}{\rho^{n+3}}\int_{B_{\rho}(x)} |p(z)|\,dz
\end{aligned}
$$

□

Lemma 8.4. Sei $n \geq 2$, $R > 0$, $1 \leq q < \infty$ und sei $u \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash B_R$. Sei

$$v(x) := |x|^{2-n}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\}$$

die Kelvin-Transformation. Dann ist v harmonisch in $B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\}$ und

$$\int_{B_{\frac{1}{R}}} |v(y)|^q\, |y|^{q(n-2)-2n}\, dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_R} |u(y)|^q\, dy$$

Beweis. (a) Für $\Delta v = 0$ siehe z.B. [ABR, S.62].

(b) Sei $r > R$. Dann gilt mit Lemma A.6

$$\begin{aligned}
\int_{A_{R,r}} |u(x)|^q\, dx \quad &\overset{x = \frac{y}{|y|^2}}{=\!=} \quad \int_{A_{\frac{1}{r},\frac{1}{R}}} \left| u\left(\frac{y}{|y|^2}\right)\right|^q \frac{1}{|y|^{2n}}\, dy \\
&= \int_{A_{\frac{1}{r},\frac{1}{R}}} \left| u\left(\frac{y}{|y|^2}\right) |y|^{2-n}\, |y|^{n-2}\right|^q \frac{1}{|y|^{2n}}\, dy \\
&= \int_{A_{\frac{1}{r},\frac{1}{R}}} |v(y)|^q\, |y|^{q(n-2)-2n}\, dy
\end{aligned}$$

Für $r \to \infty$ folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 8.5. Sei $n \geq 2$, $R > 0$, $1 \leq q < \infty$ und sei $u \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash B_R$. Sei

$$v(x) := |x|^{2-n}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\}$$

die Kelvin-Transformation. Dann gibt es eine Konstante $C(n,q) > 0$, so dass für alle $0 < r < \frac{1}{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |v(y)|\, dy \quad &\leq \quad C(n,q)\, r^{\frac{n}{q}+2} \left(\int_{B_r} |v(y)|^q\, |y|^{q(n-2)-2n}\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \quad C(n,q)\, r^{\frac{n}{q}+2} \left(\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Beweis. (a) Sei $1 < q < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |v(y)|\,dy &= \int_{B_r} |v(y)|\,|y|^{\frac{q(n-2)-2n}{q}}\,|y|^{\frac{2n-q(n-2)}{q}}\,dy \\
&\leq \left(\int_{B_r} |v(y)|^q\,|y|^{q(n-2)-2n}\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B_r} |y|^{\frac{2n-q(n-2)}{q-1}}\,dy\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&\overset{8.4}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} C(n,q)\left(r^{n+\frac{2n-q(n-2)}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} C(n,q)\,r^{\frac{n(q-1)+2n-q(n-2)}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} C(n,q)\,r^{\frac{n+2q}{q}}
\end{aligned}$$

(b) Sei $q = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B_r} |v(y)|\,dy &= \int_{B_r} |v(y)|\,|y|^{(n-2)-2n}\,|y|^{2+n}\,dy \\
&\leq r^{2+n}\int_{B_r} |v(y)|\,|y|^{(n-2)-2n}\,dy \\
&\overset{8.4}{=} r^{2+n}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|\,dx
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 8.6. Sei $n \geq 2$, $R > 0$, $1 \leq q < \infty$ und sei $u \in L^q(\mathbb{R}^n\setminus B_R)$ harmonisch in $\mathbb{R}^n\setminus B_R$. Sei

$$v(x) := |x|^{2-n}\,u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in B_{\frac{1}{R}}\setminus\{0\}$$

die Kelvin-Transformation. Dann gibt es ein $\tilde{v} \in C^\infty(B_{\frac{1}{R}})$ mit

$$\Delta\tilde{v} = 0 \text{ in } B_{\frac{1}{R}} \quad \text{and} \quad \tilde{v}|_{B_{\frac{1}{R}}\setminus\{0\}} = v$$

Beweis. (a) Sei

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } |t| \leq 1 \\ 1 & \text{,falls } |t| \geq 2 \end{cases}$$

Setze

$$\rho_k(x) := \rho\left(k|x|\right) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\rho_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \le \rho_k \le 1, \quad \rho_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } |x| \le \frac{1}{k} \\ 1 & \text{,falls } |x| \ge \frac{2}{k} \end{cases}$$

und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|\nabla \rho_k\|_\infty \le k\, C \quad \|\partial_i \partial_j \rho_k\|_\infty \le k^2 C$$

(b) Sei $\phi \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{R}})$. Dann ist $\rho_k \phi \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\})$ und

$$0 = \langle v, \Delta(\rho_k \phi)\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} = \langle v, \phi \Delta \rho_k\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} + 2\langle v, \nabla \rho_k \nabla \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} + \langle v, \rho_k \Delta \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}}$$

Wir können dann abschätzen

$$\begin{aligned} \left| \langle v, \phi \Delta \rho_k\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} \right| &\le \|\phi\|_\infty C k^2 \int_{B_{\frac{2}{k}}} |v(x)|\, dx \\ &\underset{\text{Lemma 8.5}}{\le} \|\phi\|_\infty C\, k^2\, C(n,q) \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{n}{q}+2} \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R} \\ &= K(n,q,\phi,u) \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{n}{q}} \to 0 \quad (k \to \infty) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\langle v, \nabla \rho_k \nabla \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

(c) Offensichtlich ist

$$\rho_k v \Delta \phi \to v \Delta \phi \qquad \text{fast überall in } B_{\frac{1}{R}}$$

und

$$|\rho_k v \Delta \phi| \ \le \ \|\Delta \phi\|_\infty |v| \ \underbrace{\in L^1(B_{\frac{1}{R}})}_{\text{nach Lemma 8.5}}$$

Nach dem Satz von Lebesgue folgt

$$\langle v, \rho_k \Delta \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} \ \to \ \langle v, \Delta \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} \quad (k \to \infty)$$

Aus (b) ergibt sich für $(k \to \infty)$

$$\langle v, \Delta \phi\rangle_{B_{\frac{1}{R}}} \ = \ 0$$

und schließlich nach dem Weylschen Lemma die Behauptung. $\square$

Theorem 8.7. Sei $n \geq 2$, $R > 0$, $1 \leq q < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(n, q, R) > 0$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ und jedes harmonische $u \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ gilt

$$|u(x)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} C \, \|u\|_{1;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{-3} & \text{,falls } q = 1 \\ \\ C \, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{-2} & \text{,falls } 1 < q \leq 2 \\ \\ C \, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{-1} & \text{,falls } 2 < q < \infty \end{array} \right\} \quad \text{falls } n = 2$$

$$|u(x)| \leq \left\{ \begin{array}{ll} C \, \|u\|_{1;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{-n-1} & \text{,falls } q = 1 \\ \\ C \, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{-n} & \text{,falls } 1 < q \leq \frac{n}{n-1} \\ \\ C \, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{1-n} & \text{,falls } \frac{n}{n-1} < q \leq \frac{n}{n-2} \\ \\ C \, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\backslash B_R} \, |x|^{2-n} & \text{,falls } \frac{n}{n-2} < q < \infty \end{array} \right\} \quad \text{falls } n \geq 3$$

Beweis. (a) Sei

$$v(x) := |x|^{2-n} \, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für alle } x \in B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\}$$

die Kelvin-Transformation. Nach Lemma 8.6 gibt es eine harmonische Fortsetzung von v auf $B_{\frac{1}{R}}$, die wir wieder mit v bezeichnen. Wegen der Mittelwerteigenschaft und Lemma 8.5 gilt für $0 < r < \frac{1}{R}$

$$\begin{aligned} |v(0)| &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} |v(y)| \, dy \\ &\leq \frac{1}{|B_r|} \, C(n,q) \, r^{\frac{n}{q}+2} \left(\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{n}{\omega_n} \, r^{-n} \, C(n,q) \, r^{\frac{n}{q}+2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{1}{r}}} |u(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}}_{\to 0 \ (r \to 0)} \end{aligned}$$

was gegen 0 strebt für $(r \to 0)$, wenn

$$\frac{n}{q} + 2 - n \geq 0 \qquad \text{d.h.} \qquad n \geq q(n-2)$$

Also erhalten wir

$$v(0) = 0 \qquad \text{wenn } n = 2$$

$$v(0) = 0 \qquad \text{wenn } n \geq 3 \text{ und } q \leq \frac{n}{n-2}$$

(b) Genauso folgt aus Lemma 8.1 und Lemma 8.5

$$
\begin{aligned}
|(\partial_j v)(0)| \;&\leq\; \frac{n(n+1)}{\omega_n}\,\frac{1}{r^{n+1}}\int_{B_r}|v(y)|\,dy \\
&\leq\; \frac{n(n+1)}{\omega_n}\,\frac{1}{r^{n+1}}\,C(n,q)\,r^{\frac{n}{q}+2}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{r}}}|u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\to 0\ (r\to 0)}
\end{aligned}
$$

was gegen 0 konvergiert für $(r \to 0)$, wenn

$$
\frac{n}{q}+2-(n+1)\;\geq\;0 \qquad \text{d.h.} \qquad n \geq q(n-1)
$$

Also gilt

$$
(\partial_j v)(0) = 0 \qquad \text{wenn } n \geq 2 \text{ und } q \leq \frac{n}{n-1}
$$

(c) Ebenso erhalten wir aus Lemma 8.3 und Lemma 8.5

$$
\begin{aligned}
|(\partial_i\partial_j v)(0)| \;&\leq\; \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}\,\frac{1}{r^{n+2}}\int_{B_{2r}}|v(y)|\,dy \\
&\leq\; \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}\,\frac{1}{r^{n+2}}\,C(n,q)\,r^{\frac{n}{q}+2}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{\frac{1}{2r}}}|u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\to 0\ (r\to 0)}
\end{aligned}
$$

was gegen 0 konvergiert für $(r \to 0)$, wenn

$$
\frac{n}{q}+2-(n+2)\;\geq\;0 \qquad \text{d.h.} \qquad 1 \geq q
$$

Also gilt

$$
(\partial_i\partial_j v)(0) = 0 \qquad \text{wenn } n \geq 2 \text{ und } q = 1
$$

(d) Für $x \in B_{\frac{1}{R}}$ gibt es nach der Taylorformel $a_x,\, b_x,\, c_x \in B_{\frac{1}{R}}$ mit

$$
\begin{aligned}
v(x) \;&=\; v(0) + \langle \nabla v(a_x), x\rangle \\
v(x) \;&=\; v(0) + \langle \nabla v(0), x\rangle + \frac{1}{2}\langle (\mathrm{Hess} v)(b_x)\,x, x\rangle \\
v(x) \;&=\; \sum_{|\alpha|\leq 2}\frac{(D^\alpha v)(0)}{\alpha!}\,x^\alpha + \sum_{|\alpha|=3}\frac{(D^\alpha v)(c_x)}{\alpha!}\,x^\alpha
\end{aligned}
$$

(e) Sei $n \geq 3$ und $\frac{n}{n-2} < q < \infty$. Sei $x \in B_{\frac{1}{2R}}$. Aus der Mittelwerteigenschaft und Lemma 8.5 folgt

$$\begin{aligned}
|v(x)| &\leq \frac{1}{\left|B_{\frac{1}{2R}}\right|} \int_{B_{\frac{1}{2R}}(x)} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_1(n,R) \int_{B_{\frac{1}{R}}} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_2(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}
\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ ist deshalb

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= |y|^{2-n}\, v\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \\
&\leq |y|^{2-n}\, K_2(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}
\end{aligned}$$

(f) Sei $n \geq 3$ und $\frac{n}{n-1} < q \leq \frac{n}{n-2}$ oder sei $n = 2$ und $2 < q < \infty$. Dann ist nach (a) $v(0) = 0$, und für $x \in B_{\frac{1}{2R}}$ gilt nach Lemma 8.1 und Lemma 8.5

$$\begin{aligned}
|(\partial_j v)(x)| &\leq \frac{n(n+1)}{\omega_n}(2R)^{n+1} \int_{B_{\frac{1}{2R}}(x)} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_3(n,R) \int_{B_{\frac{1}{R}}} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_4(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}
\end{aligned}$$

und daher nach (d)

$$\begin{aligned}
|v(x)| &= |\underbrace{v(0)}_{=0} + \langle \nabla v(a_x), x\rangle| \\
&\leq |\nabla v(a_x)|\, |x| \;\leq\; K_5(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}\, |x|
\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ gilt also

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= |y|^{2-n}\, v\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \\
&\leq |y|^{1-n}\, K_4(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}
\end{aligned}$$

(g) Sei $n \geq 2$ und $1 < q \leq \frac{n}{n-1}$. Dann erhalten wir aus (a) und (b) $v(0) = 0$, $\nabla v(0) = 0$, und für $x \in B_{\frac{1}{2R}}$ gilt nach Lemma 8.3 und Lemma 8.5

$$\begin{aligned}
|(\partial_i \partial_j v)(x)| &\leq \frac{n(n+1)^2}{\omega_n}(4R)^{n+2} \int_{B_{\frac{1}{2R}}(x)} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_6(n,R) \int_{B_{\frac{1}{R}}} |v(y)|\, dy \\
&\leq K_7(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R}
\end{aligned}$$

und also nach (d)

$$\begin{aligned}
|v(x)| &= |\underbrace{v(0)}_{=0} + \underbrace{\langle \nabla v(0), x\rangle}_{=0} + \frac{1}{2}\langle (\mathrm{Hess} v)(b_x)\, x, x\rangle| \\
&\le \frac{1}{2}\,|x|^2 \left(\sum_{i,j=1}^{n} |(\partial_i\partial_j v)(b_x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \;\le\; K_8(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\setminus B_R}\, |x|^2
\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ folgt deshalb

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= |y|^{2-n}\, v\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \\
&\le |y|^{-n}\, K_8(n,R,q)\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\setminus B_R}
\end{aligned}$$

(h) Sei $n \ge 2$ und $q = 1$. Dann erhalten wir aus (a), (b) und (c) $v(0) = 0$, $\partial_i v(0) = 0$ und $\partial_i\partial_j v(0) = 0$, und für $x \in B_{\frac{1}{2R}}$ gilt nach Lemma 8.3 und Lemma 8.5

$$\begin{aligned}
|(\partial_i\partial_j\partial_k v)(x)| &\le \frac{n(n+1)^3}{\omega_n}\, 2^n 3^{n+3}\, (2R)^{n+3} \int_{B_{\frac{1}{2R}}(x)} |v(y)|\, dy \\
&\le K_9(n,R) \int_{B_{\frac{1}{R}}} |v(y)|\, dy \\
&\le K_{10}(n,R)\, \|u\|_{1;\mathbb{R}^n\setminus B_R}
\end{aligned}$$

und also nach (d) genauso wie in (f) und (g)

$$|v(x)| \;\le\; K_{11}(n,R)\, \|u\|_{1;\mathbb{R}^n\setminus B_R}\, |x|^3$$

Für $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ folgt deshalb

$$\begin{aligned}
|u(y)| &= |y|^{2-n}\, v\left(\frac{y}{|y|^2}\right) \\
&\le |y|^{-n-1}\, K_{11}(n,R)\, \|u\|_{1;\mathbb{R}^n\setminus B_R}
\end{aligned}$$

□

Theorem 8.8. Sei $n \ge 2$, $R > 0$, $1 \le q < \infty$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(n,q,R) > 0$ und eine Funktion $f_q \in L^q(\mathbb{R}^n \setminus B_{2R})$, derart dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ und jedes harmonische $u \in L^q(\mathbb{R}^n \setminus B_R)$ gilt

$$|u(x)| \;\le\; C\, \|u\|_{q;\mathbb{R}^n\setminus B_R}\, f_q(x)$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$
\begin{aligned}
|\cdot|^{k-n} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{2R}^{\infty} r^{n-1+q(k-n)}\, dr \; < \; \infty \\
&\Leftrightarrow \quad n-1+q(k-n) < -1 \\
&\Leftrightarrow \quad n < q(n-k)
\end{aligned}
$$

Deshalb folgt

$$
\begin{aligned}
n = 2: &\quad |\cdot|^{-3} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > \tfrac{2}{3} \\
n = 2: &\quad |\cdot|^{-2} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > 1 \\
n = 2: &\quad |\cdot|^{-1} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > 2 \\
n \geq 3: &\quad |\cdot|^{-n-1} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > \tfrac{n}{n+1} \\
n \geq 3: &\quad |\cdot|^{-n} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > 1 \\
n \geq 3: &\quad |\cdot|^{1-n} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > \tfrac{n}{n-1} \\
n \geq 3: &\quad |\cdot|^{2-n} \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}) &&\Leftrightarrow \quad q > \tfrac{n}{n-2}
\end{aligned}
$$

und die Behauptung folgt aus Theorem 8.7 □

Lemma 8.9. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in L^q(G)$ $(1 \leq q < \infty)$ harmonisch in G. Sei $G_1 \subset G$ mit $d := \operatorname{dist}(G_1, \partial G) > 0$. Dann gilt

$$
p\Big|_{G_1} \in H^{\infty,q}(G_1)
$$

Beweis. (a) Es ist wohlbekannt, dass $p \in C^\infty(G)$. Wir zeigen durch vollständige Induktion

$$
p\Big|_{G'} \in H^{k,q}(G')
$$

für jedes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $G' \subset G$ mit $\operatorname{dist}(G', \partial G) > 0$.

(b) $\underline{\underline{k = 1:}}$ Nach Lemma 8.2 gilt für $G' \subset G$ mit $\operatorname{dist}(G', \partial G) > 0$

$$
\|\partial_i p\|_{q;G'} \;\leq\; \frac{4(n+1)}{\operatorname{dist}(G', \partial G)}\, \|p\|_{q;G} < \infty
$$

(c) $\underline{\underline{k \to k+1:}}$ Für $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$
D^\alpha p \in L^q(G')
$$

für alle $|\alpha| = k$ und alle $G' \subset G$ mit $\text{dist}(G', \partial G) > 0$.

Sei $G_0 \subset G$ mit $\text{dist}(G_0, \partial G) > 0$. Setze

$$G' := \{x \in G : \text{dist}(x, \partial G) > \frac{1}{2}\text{dist}(G_0, \partial G)\}$$

Dann ist $G_0 \subset G' \subset G$, $\text{dist}(G', \partial G) > 0$ und $\text{dist}(G_0, \partial G') > 0$.

Wegen $\Delta D^\alpha p = 0$ in G' und nach Induktionsvorraussetzung $D^\alpha p \in L^q(G')$ folgt aus Lemma 8.2

$$\|\partial_i D^\alpha p\|_{q;G_0} \ \le \ \frac{4(n+1)}{\text{dist}(G_0, \partial G')} \|D^\alpha p\|_{q;G'} < \infty$$

□

Lemma 8.10. Sei $n \ge 2$, $C > 0$, $R > 1$ und p sei harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{R}{2}}$.

1. Falls $n \ge 3$ und
$$|p(x)| \ \le \ C\,|x|^{2-n}$$
für alle $|x| \ge R$, so existiert ein $\tilde{C} > 0$ mit
$$|\partial_i p(x)| \ \le \ \tilde{C}\,|x|^{1-n}$$
für alle $|x| \ge 2R$ und alle $i = 1, \dots, n$.

2. Falls $n \ge 2$ und
$$|p(x)| \ \le \ C\,|x|^{1-n}$$
für alle $|x| \ge R$, so existiert ein $\tilde{C} > 0$ mit
$$|\partial_i p(x)| \ \le \ \tilde{C}\,|x|^{-n}$$
für alle $|x| \ge 2R$ und alle $i = 1, \dots, n$.

3. Falls $n \ge 2$ und
$$|p(x)| \ \le \ C\,|x|^{-n}$$
für alle $|x| \ge R$, so existiert ein $\tilde{C} > 0$ mit
$$|\partial_i p(x)| \ \le \ \tilde{C}\,|x|^{-n-1}$$
für alle $|x| \ge 2R$ und alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis. (a) Sei $n \ge 3$ und

$$|p(x)| \ \le \ C\,|x|^{2-n}$$

für alle $|x| \ge R$. Setze

$$s := \frac{n}{n-2}$$

Finde $s < q < \infty$ mit

$$n \ge (n-3)q$$

und

$$p \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{3R}{4}})$$

Dann gilt auch

$$p \in L^s(A_{r,4r})$$

für alle $r > R$. Nach Lemma 8.2 folgt

$$\begin{aligned}
\|\partial_i p\|_{s;A_{2r,3r}} &\leq \frac{4(n+1)}{r} \|p\|_{s;A_{r,4r}} = \frac{4(n+1)}{r} \left[\int_{A_{r,4r}} |p|^s \, dx \right]^{\frac{1}{s}} \\
&\underset{\text{mit } \frac{q}{s}>1}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} \frac{4(n+1)}{r} \left[\left(\int_{A_{r,4r}} |p|^q \, dx \right)^{\frac{s}{q}} |A_{r,4r}|^{\frac{q-s}{q}} \right]^{\frac{1}{s}} \\
&= \frac{C_1(n)}{r} \, r^{\frac{n(q-s)}{qs}} \, \|p\|_{q;A_{r,4r}}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{n(q-s)}{sq} \leq 1 &\iff n(q-s) \leq sq \iff nq - ns \leq sq \iff nq \leq s(q+n) \\
&\iff \frac{nq}{n+q} \leq \frac{n}{n-2} \iff q(n-2) \leq n+q \iff q(n-3) \leq n
\end{aligned}$$

Also ist für $r > R > 1$

$$\|\partial_i p\|_{s;A_{2r,3r}} \leq C_1(n) \, \|p\|_{q;A_{r,4r}}$$

und

$$\begin{aligned}
\|p\|^q_{q;A_{r,4r}} &\leq C^q \int_{A_{r,4r}} |x|^{q(2-n)} \, dx = C^q \, \omega_n \int_r^{4r} t^{n-1+q(2-n)} \, dt \\
&= \frac{C^q \omega_n}{n+q(2-n)} \left[(4r)^{n+q(2-n)} - r^{n+q(2-n)} \right] = C_2(n,q) \, r^{n+q(2-n)}
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\|\partial_i p\|^s_{s;A_{2r,3r}} \leq C_3(n,q) \, r^{\frac{s(n+q(2-n))}{q}}$$

und daraus

$$\begin{aligned}
\|\partial_i p\|^s_{s;\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} &= \sum_{m=1}^{\infty} \|\partial_i p\|^s_{s;A_{\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} 2R, \left(\frac{3}{2}\right)^m 2R}} = \sum_{m=1}^{\infty} \|\partial_i p\|^s_{s;A_{2\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} R, 3\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} R}} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} C_3(n,q) \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{m-1} R \right)^{\frac{s(n+q(2-n))}{q}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} C_4(n,q,R) \underbrace{\left[\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{s}{q} \overbrace{(q(n-2)-n)}^{>0}} \right]}_{<1}^m < \infty
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\partial_i p \in L^{\frac{n}{n-2}}(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R})$$

und $\partial_i p$ ist harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{R}{2}}$. Somit gilt auch

$$\partial_i p \in L^{\frac{n}{n-2}}(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$$

und nach Theorem 8.7 gibt es eine Konstante $C_5 = C_5(n, q, R, p) > 0$ mit

$$|(\partial_i p)(x)| \;\leq\; C_5 \, |x|^{1-n} \qquad \text{für alle } |x| \geq 2R$$

(b) Sei $n \geq 2$ und

$$|p(x)| \;\leq\; C \, |x|^{1-n}$$

für alle $|x| \geq R$. Setze

$$s := \frac{n}{n-1}$$

Finde $s < q < \infty$ mit

$$n \geq (n-2)q$$

und

$$p \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{3R}{4}})$$

Analog zu (a) folgt dann

$$|(\partial_i p)(x)| \;\leq\; \tilde{C} \, |x|^{-n} \qquad \text{für alle } |x| \geq 2R$$

(c) Sei $n \geq 2$ und

$$|p(x)| \;\leq\; C \, |x|^{-n}$$

für alle $|x| \geq R$. Setze

$$s := 1$$

Finde $1 = s < q < \infty$ mit

$$n \geq (n-1)q$$

und

$$p \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{\frac{3R}{4}})$$

Analog zu (a) folgt dann

$$|(\partial_i p)(x)| \;\leq\; \tilde{C} \, |x|^{-n-1} \qquad \text{für alle } |x| \geq 2R$$

$\square$

Lemma 8.11. Sei $n \geq 2$, $G \subset \mathbb{R}^n$ Außengebiet, und sei u harmonisch in G. Seien $r > 0$, φ_r und ψ_{ri} wie in Theorem 3.7.

1. Es gilt für alle $R > 2r$ und $k = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{G \cap B_R} u \, \Delta\varphi_r \, dx \; = \; -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x) \, \frac{x_i}{|x|} \, d\omega_x$$

und

$$\int\limits_{G \cap B_R} u \, \Delta\psi_{rk} \, dx \; = \; \int\limits_{\partial B_R} u(x) \, \frac{x_k}{|x|} \, d\omega_x \; - \; \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x) \, \frac{x_i x_k}{|x|} \, d\omega_x$$

2. Falls es $R > r$, $C > 0$ gibt mit

$$|u(x)| \; \leq \; C \, |x|^{1-n}$$

für alle $|x| \geq R$, so gilt

$$\int\limits_{G} u \, \Delta\varphi_r \, dx \; = \; 0$$

3. Falls es $R > r$, $C > 0$ gibt mit

$$|u(x)| \; \leq \; C \, |x|^{-n}$$

für alle $|x| \geq R$, so gilt für $k = 1, \ldots, n$

$$\int\limits_{G} u \, \Delta\psi_{rk} \, dx \; = \; 0$$

Beweis. (a) Sei $R > 2r$. Dann ist mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\int\limits_{G \cap B_R} u \, \Delta\varphi_r \, dx \; &= \; \int\limits_{G \cap B_R} (\nabla u) \, (\nabla\varphi_r) \, dx \\
&= \; \int\limits_{G \cap B_R} \underbrace{(\Delta u)}_{=0} \, \varphi_r \, dx \; - \; \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x) \, \underbrace{\varphi_r(x)}_{=1} \, \frac{x_i}{|x|} \, d\omega_x \\
&= \; -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x) \, \frac{x_i}{|x|} \, d\omega_x
\end{aligned}$$

(b) Sei $R > 2r$ und $k = 1, \ldots, n$. Mit dem Satz von Gauß berechnet man

$$\int\limits_{G \cap B_R} u \Delta\psi_{rk} \, dx \; = \; -\int\limits_{G \cap B_R} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)(x) \partial_i [x_k \varphi_r(x)] \, dx + \int\limits_{\partial B_R} u(x) \sum_{i=1}^{n} \partial_i [x_k \varphi_r(x)] \frac{x_i}{|x|} \, d\omega_x$$

$$= \int\limits_{G\cap B_R} \underbrace{(\Delta u)(x)}_{=0}\, x_k \varphi_r(x)\, dx \;-\; \int\limits_{\partial B_R} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)(x)\, x_k\, \underbrace{\varphi_r(x)}_{=1}\, \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x +$$

$$+ \int\limits_{\partial B_R} u(x) \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik}\, \underbrace{\varphi_r(x)}_{=1}\, \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x + \int\limits_{\partial B_R} u(x) \sum_{i=1}^{n} x_k\, \underbrace{(\partial_i \varphi_r)(x)}_{=0}\, \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x)\, \frac{x_i x_k}{|x|}\, d\omega_x + \int\limits_{\partial B_R} u(x)\, \frac{x_k}{|x|}\, d\omega_x$$

(c) Es gelte für alle $|x| \geq R$

$$|u(x)| \;\leq\; C\, |x|^{1-n}$$

Nach Lemma 8.10 ist dann

$$|(\partial_i u)(x)| \;\leq\; \tilde{C}\, |x|^{-n}$$

für alle $|x| \geq 2R$. Es folgt

$$\left| \int\limits_G u\, \Delta\varphi_r\, dx \right| \;=\; \left| \int\limits_{G\cap B_{2R}} u\, \Delta\varphi_r\, dx \right| \overset{\text{(a)}}{=} \left| \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_{2R}} (\partial_i u)(x)\, \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x \right|$$

$$\leq\; \sum_{i=1}^{n} (2R)^{n-1}\, \tilde{C}\, (2R)^{-n} \omega_n$$

Für $R \to \infty$ folgt

$$\int\limits_G u\, \Delta\varphi_r\, dx \;=\; 0$$

(d) Es gelte für alle $|x| \geq R$

$$|u(x)| \;\leq\; C\, |x|^{-n}$$

Nach Lemma 8.10 ist dann

$$|(\partial_i u)(x)| \;\leq\; \tilde{C}\, |x|^{-n-1}$$

für alle $|x| \geq 2R$. Es folgt

$$\left| \int\limits_G u\, \Delta\psi_{rk}\, dx \right| \;=\; \left| \int\limits_{G\cap B_{2R}} u\, \Delta\psi_{rk}\, dx \right|$$

$$\overset{\text{(b)}}{=} \left| -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\partial B_R} (\partial_i u)(x)\, \frac{x_i x_k}{|x|}\, d\omega_x + \int\limits_{\partial B_R} u(x)\, \frac{x_k}{|x|}\, d\omega_x \right|$$

$$\leq\; (2R)^{n-1}\, C\, (2R)^{-n} \omega_n + \sum_{i=1}^{n} (2R)^{n-1}\, \tilde{C}\, (2R)^{-n-1} R\, \omega_n$$

Für $R \to \infty$ folgt

$$\int_G u\, \Delta\psi_{rk}\, dx \;=\; 0$$

$\square$

Theorem 8.12. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $G \subset \mathbb{R}^n$ Außengebiet, und sei $u \in L^q(G)$ harmonisch in G. Dann ist

$$u \in B^q(G)$$

genau dann, wenn es $C > 0$, $R > 1$ gibt mit

$$|u(x)| \;\leq\; C\, |x|^{-n}$$

für alle $|x| \geq R$.

Beweis. (a) Es gelte für alle $|x| \geq R$

$$|u(x)| \;\leq\; C\, |x|^{-n}$$

Nach Lemma 8.11 ist dann für $k = 1, \ldots, n$

$$\int_G u\, \Delta\psi_{rk}\, dx \;=\; \int_G u\, \Delta\varphi_r\, dx \;=\; 0$$

Weiter gilt für $\phi \in C_0^\infty(G)$

$$0 \;=\; \int_G (\Delta u)\, \phi\, dx \;=\; \int_G u\, \Delta\phi\, dx$$

Also auch für $\phi \in \widehat{H}_0^{2,q'}(G)$

$$0 \;=\; \int_G u\, \Delta\phi\, dx$$

Nach Theorem 2.6 und 2.7 gilt dann

$$0 \;=\; \int_G u\, \Delta\phi\, dx \qquad \forall\, \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$$

und somit

$$u \in B^q(G)$$

(b) Umgekehrt gelte nun

$$u \in B^q(G)$$

Sei $R > 0$ mit $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{\frac{R}{2}}$. Sei

$$v(x) := |x|^{2-n}\, u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in B_{\frac{1}{R}} \backslash \{0\}$$

die Kelvin-Transformation. Nach Lemma 8.6 ist v harmonisch in 0 fortsetzbar. Diese Fortsetzung nennen wir wieder v. Nach der Taylorformel gibt es für jedes $x \in \overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ ein $a_x \in \overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ mit

$$v(x) \;=\; v(0) + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(a_x) x_i$$

Setze

$$w(x) \;:=\; v(x) - v(0) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(a_x) x_i$$

Da $\partial_i v$ beschränkt ist in $\overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ gibt es ein $M > 0$ mit

$$|w(x)| \;\leq\; M\,|x| \qquad \forall\; |x| \leq \frac{1}{2R}$$

Sei

$$(Kw)(x) := |x|^{2-n}\, w\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$$

die Kelvin-Transformation von w. Dann gilt für $|x| \geq 2R$

$$|(Kw)(x)| \;\leq\; |x|^{2-n}\, M\, \frac{1}{|x|} \;=\; M\,|x|^{1-n}$$

Außerdem ist nach [ABR, S.62]

$$\Delta K w = 0$$

Also erhalten wir aus Lemma 8.11

$$\int_G K w\, \Delta\varphi_r\, dx \;=\; 0$$

Nun ist aber auch

$$(Kw)(x) \;=\; u(x) - |x|^{2-n}\, v(0)$$

und somit

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \int_G K w\, \Delta\varphi_r\, dx \;=\; \underbrace{\int_G u\, \Delta\varphi_r\, dx}_{=0} - v(0) \int_G |x|^{2-n}\, (\Delta\varphi_r)(x)\, dx \\
&=\; v(0) \int_{G \cap B_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{x_i} |x|^{2-n}\right)\, (\partial_i \varphi_r)(x)\, dx \\
&=\; -v(0) \int_{G \cap B_{2r}} \varphi_r(x) \underbrace{\Delta |x|^{2-n}}_{=0}\, dx + v(0) \int_{\partial B_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_{x_i} |x|^{2-n}\right)\, \underbrace{\varphi_r(x)}_{=1} \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x \\
&=\; v(0) \int_{\partial B_{2r}} \sum_{i=1}^{n} (2-n)\, x_i\, |x|^{-n} \frac{x_i}{|x|}\, d\omega_x \\
&=\; v(0)\,(2-n)\,(2r)^{n-1}(2r)^{1-n} \omega_n \;=\; v(0)\,(2-n)\,\omega_n
\end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ folgt dann

$$v(0) = 0$$

Für $n = 2$ gilt ohnehin nach Beweisteil (a) von Theorem 8.7

$$v(0) = 0$$

Nach der Taylorformel gibt es für jedes $x \in \overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ ein $b_x \in \overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ mit

$$v(x) \;=\; \underbrace{v(0)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0) x_i + \frac{1}{2} \langle (\mathrm{Hess} v)(b_x)\, x, x \rangle$$

Setze

$$h(x) \;:=\; v(x) - \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0) x_i \;=\; \frac{1}{2} \langle (\mathrm{Hess} v)(b_x)\, x, x \rangle$$

Da $\partial_i \partial_j v$ beschränkt ist in $\overline{B_{\frac{1}{2R}}}$ gibt es ein $C > 0$ mit

$$|h(x)| \;\leq\; C\, |x|^2 \qquad \forall\, |x| \leq \frac{1}{2R}$$

Sei

$$(Kh)(x) := |x|^{2-n}\, h\left(\frac{x}{|x|^2}\right) \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$$

die Kelvin-Transformation von h. Dann gilt für $|x| \geq 2R$

$$|(Kh)(x)| \;\leq\; |x|^{2-n}\, C\, \frac{1}{|x|^2} \;=\; C\, |x|^{-n}$$

Außerdem ist nach [ABR, S.62]

$$\Delta Kh = 0$$

Also erhalten wir aus Lemma 8.11

$$\int_G Kh\, \Delta \psi_{rk}\, dx \;=\; 0$$

Nun ist aber auch

$$(Kh)(x) \;=\; u(x) - |x|^{2-n} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0) \frac{x_i}{|x|^2} \;=\; u(x) - \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0) \frac{x_i}{|x|^n}$$

und somit für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_G Kh\, \Delta \psi_{rk}\, dx \;=\; \underbrace{\int_G u\, \Delta \psi_{rk}\, dx}_{=0} - \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0) \int_G \frac{x_i}{|x|^n}\, (\Delta \psi_{rk})(x)\, dx \\ &\overset{4.4}{=} \; -\omega_n \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v)(0)\, \delta_{ik} \;=\; -\omega_n\, (\partial_k v)(0) \end{aligned}$$

Also gilt

$$\nabla v(0) \;=\; 0$$

Das bedeutet

$$u(x) \;=\; (Kh)(x) \qquad \forall\, |x| \geq 2R$$

und für $|x| \geq 2R$

$$|u(x)| \;=\; |(Kh)(x)| \;\leq\; C\, |x|^{-n}$$

□

9 Die Dichtheit von $H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$ in $B^q(G)$

Theorem 9.1. Sei $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{2+k}$. Es gelte $p \in B^q(G)$.
Dann gibt es eine Folge $(h_m) \subset H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$ mit

$$\|h_m - p\|_{q;G} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Beweis. (a) Betrachte die Friedrichssche Glättung p_ε für $\varepsilon > 0$. Da G beschränkt ist, folgt

$$p_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^{\infty,q}(G) \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

Nach Theorem 3.11 gibt es ein $s^{(\varepsilon)} \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ mit

$$\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G \;=\; \langle p_\varepsilon, \Delta\phi\rangle_G \qquad \forall\, \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$$

Wegen $\partial G \in C^{2+k}$, $k \geq 2$, $p_\varepsilon \in H^{\infty,q}(G)$ und

$$\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G \;=\; \langle \Delta p_\varepsilon, \phi\rangle_G \qquad \forall\, \phi \in C_0^\infty(G)$$

erhalten wir aus Theorem 7.7

$$\Delta s^{(\varepsilon)} \in H^{k,q}(G)$$

(b) Für $\phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G \;&=\; \langle p_\varepsilon, \Delta\phi\rangle_G - \underbrace{\langle p, \Delta\phi\rangle_G}_{=0} \\
&=\; \langle p_\varepsilon - p, \Delta\phi\rangle_G
\end{aligned}$$

und deshalb nach Theorem 3.8

$$\begin{aligned}
\|\Delta s^{(\varepsilon)}\|_{q;G} \;&\leq\; C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)} \frac{\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle}{\|\Delta\phi\|_{q'}} \\
&\leq\; C_q \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} \;\to 0 \quad (\varepsilon \to 0)
\end{aligned}$$

(c) Setze

$$h^{(\varepsilon)} := p_\varepsilon - \Delta s^{(\varepsilon)}$$

Dann ist nach (a)

$$h^{(\varepsilon)} \in H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$$

und nach (b)

$$\begin{aligned} \|h^{(\varepsilon)} - p\|_{q;G} &\leq \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} + \|\Delta s^{(\varepsilon)}\|_{q;G} \\ &\leq (1 + C_q) \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

□

Theorem 9.2. Sei $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{2+k}$. Es gelte $p \in B^q(G)$.
Dann gibt es eine Folge $(h_m) \subset H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$ mit

$$\|h_m - p\|_{q;G} \to 0 \quad (m \to \infty)$$

Beweis. (a) Betrachte wieder p_ε für $\varepsilon > 0$. Es gelte $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{\frac{R}{2}}$ für ein $R > 0$. Dann ist

$$\operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \backslash B_R, \partial G) > \operatorname{dist}(\mathbb{R}^n \backslash B_R, \partial B_{\frac{R}{2}}) = \frac{R}{2}$$

Daher gilt nach Lemma A.12 für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_R$ und alle $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$

$$p_\varepsilon(x) = p(x)$$

und folglich ist $p_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ harmonisch in $\mathbb{R}^n \backslash B_R$. Aus Lemma 8.9 erhalten wir

$$p_\varepsilon \Big|_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} \in H^{\infty,q}(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R})$$

Weil $p_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, gilt offensichtlich für jedes $r > 0$

$$p_\varepsilon \Big|_{B_r} \in H^{\infty,q}(B_r)$$

Schließlich ist somit für $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$

$$p_\varepsilon \in H^{\infty,q}(\mathbb{R}^n)$$

(b) Aus Theorem 3.11 erhalten wir ein $s^{(\varepsilon)} \in \widehat{H}^{2,q}_\bullet(G)$ mit

$$\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G = \langle p_\varepsilon, \Delta\phi \rangle_G \qquad \forall \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)$$

Wegen $\partial G \in C^{2+k}$, $k \geq 2$, $p_\varepsilon \in H^{\infty,q}(G)$ und

$$\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G = \langle \Delta p_\varepsilon, \phi \rangle_G \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(G)$$

gilt nach Theorem 7.8 für jedes $r > 0$ und für alle $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$

$$\Delta s^{(\varepsilon)}\Big|_{G \cap B_r} \in H^{k,q}(G \cap B_r)$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash B_R) \subset \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$. Dann ist nach (a) für alle $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$

$$\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G = \langle p_\varepsilon, \Delta\phi \rangle_G = 0$$

Deshalb ist nach dem Lemma von Weyl $\Delta s^{(\varepsilon)} \in L^q(G)$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^n \backslash B_R$. Nach Lemma 8.9 folgt

$$\Delta s^{(\varepsilon)}\Big|_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} \in H^{\infty,q}(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R})$$

Aus Lemma A.5 erhalten wir schließlich für jedes $0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$

$$\Delta s^{(\varepsilon)} \in H^{k,q}(G)$$

(c) Für $\phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle_G &= \langle p_\varepsilon, \Delta\phi \rangle_G - \underbrace{\langle p, \Delta\phi \rangle_G}_{=0} \\ &= \langle p_\varepsilon - p, \Delta\phi \rangle_G \end{aligned}$$

und daraus nach Theorem 3.8

$$\begin{aligned} \|\Delta s^{(\varepsilon)}\|_{q;G} &\leq C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)} \frac{\left\langle \Delta s^{(\varepsilon)}, \Delta\phi \right\rangle}{\|\Delta\phi\|_{q'}} \\ &\leq C_q \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

(d) Setze

$$h^{(\varepsilon)} := p_\varepsilon - \Delta s^{(\varepsilon)}$$

Nach (a) und (b) gilt

$$h^{(\varepsilon)} \in H^{k,q}(G) \cap B^q(G) \qquad \forall\, 0 < \varepsilon < \frac{R}{2}$$

und nach (c)

$$\begin{aligned} \|h^{(\varepsilon)} - p\|_{q;G} &\leq \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} + \|\Delta s^{(\varepsilon)}\|_{q;G} \\ &\leq (1 + C_q)\, \|p_\varepsilon - p\|_{q;G} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

□

10 Die Kompaktheit der Einbettung $H^{1,q}(G) \cap B^q(G) \subset B^q(G)$ in Außengebieten

Theorem 10.1 Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^1$.
Dann ist die Einbettung

$$H^{1,q}(G) \cap B^q(G) \to B^q(G)$$

kompakt.

Beweis. (a) Es ist $H^{1,q}(G)$ reflexiv. Jeder abgeschlossene Teilraum eines reflexiven Raumes ist reflexiv (vgl. [Alt, Satz 6.8, S.216]). Also ist $H^{1,q}(G) \cap B^q(G)$ reflexiv. Mit dem Satz von Hahn-Banach zeigt man leicht

$$\Big(H^{1,q}(G) \cap B^q(G)\Big)^* \;=\; H^{1,q}(G)^*\Big|_{H^{1,q}(G)\cap B^q(G)}$$

Nach Lemma B.5 genügt es also zu zeigen: Für jede Folge $(h_k) \subset H^{1,q}(G) \cap B^q(G)$ mit $F^*(h_k) \to 0$ für alle $F^* \in H^{1,q}(G)^*$ gilt: $\|h_k\|_{q;G} \to 0$.

(b) Sei $R > 0$ derart, dass $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{\frac{R}{2}}$. Dann ist

$$G_r := G \cap B_r$$

für $r > R$ beschränkt und

$$\partial G_r \in C^1$$

Sei $F^* \in H^{1,q}(G_r)^*$ gegeben. Definiere

$$\tilde{F}^*(h) := F^*\left(h\big|_{G_r}\right) \qquad \forall\, h \in H^{1,q}(G)$$

Dann ist offensichtlich $\tilde{F}^* \in H^{1,q}(G)^*$ und daher

$$\tilde{F}^*(h_k) \to 0$$

das heißt

$$F^*(h_k\big|_{G_r}) \to 0$$

Weil die Einbettung $H^{1,q}(G_r) \to L^q(G_r)$ kompakt ist (siehe z.B. [Alt, Satz 8.8, S.314]) erhalten wir

$$\|h_k\|_{q;G\cap B_r} \to 0 \qquad (k \to \infty) \qquad \forall\, r > R$$

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$. Definiere

$$F^*(h) := h(x) \qquad \forall\, h \in H^{1,q}(G) \cap B^q(G)$$

Dann folgt aus der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned} |F^*(h)| &= |h(x)| \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |h(x+y)|\, dy \\ &\leq |B_R|^{-1} \, \|h\|_{q;G} \, |B_R|^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq |B_R|^{-\frac{1}{q}} \, \|h\|_{1,q;G} \end{aligned}$$

Also ist

$$F^* \in H^{1,q}(G)^*$$

Das bedeutet

$$h_k(x) = F^*(h_k) \to 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$$

(d) Nach Theorem 8.8 gibt es ein $f_q \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R})$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ gilt:

$$|h_k(x)| \leq C \, \|h_k\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_R} \, f_q(x)$$

Wegen der schwachen Konvergenz der Folge gibt es ein $C' > 0$ mit

$$\|h_k\|_{q;G} \leq C' \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Deshalb folgt nach (c) und dem Satz von Lebesgue

$$\|h_k\|_{q;\mathbb{R}^n \backslash B_{2R}} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

(e) Aus (b) und (d) folgt schließlich

$$\|h_k\|_{q;G} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

$\square$

Teil II: Das Cosserat Spektrum

11 Definition des Operators Z_q und seine grundlegenden Eigenschaften

Definition 11.1. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$.

1. Sei $\underline{T}_q : L^q(G) \to \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n$ definiert durch (vgl. Theorem 2.9)
$$\left\langle \nabla \underline{T}_q(p), \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G = \left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n$$
2. Setze $Z_q : L^q(G) \to L^q(G), \qquad Z_q(p) := \operatorname{div}(\underline{T}_q p)$

Theorem 11.2. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Dann gilt

1. $Z_q\Big|_{A^q(G)} : A^q(G) \to A^q(G), \qquad Z_q(p_0) = p_0 \quad$ für jedes $p_0 \in A^q(G)$
2. $Z_q\Big|_{B^q(G)} : B^q(G) \to B^q(G)$

Beweis. (a) Sei $p_0 \in A^q(G)$. Dann ist $p_0 = \Delta s$ mit $s \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$. Wie im Beweis von Lemma 3.10 gibt es $v \in \widehat{H}_0^{2,q}(G)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass
$$\partial_i \partial_j f \in C_0^\infty(G) \qquad \text{und} \qquad s = v + f$$
Nach Definition 3.2 gibt es eine Folge $(v_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit $\|\nabla^2(v_k - v)\|_{q;G} \to 0$.
Sei nun $\underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla \nabla s, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G &= \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i \partial_j v \; \partial_i \phi_j \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_G \underbrace{\partial_i \partial_j f}_{\in C_0^\infty(G)} \; \partial_i \phi_j \, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i \partial_j v_k \; \partial_i \phi_j \, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_G (\partial_j \underbrace{\partial_i \partial_i f}_{\in C_0^\infty(G)}) \phi_j \, dx \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i \partial_i v_k \; \partial_j \phi_j \, dx + \sum_{i,j=1}^n \int_G \partial_i \partial_i f \; \partial_j \phi_j \, dx \\
&= \left\langle \Delta v, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G + \left\langle \Delta f, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G = \left\langle p_0, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G
\end{aligned}$$
Es folgt
$$\nabla s = \underline{T}_q(p_0)$$
und
$$Z_q(p_0) = \operatorname{div}(\underline{T}_q p_0) = \Delta s = p_0$$

(b) Sei jetzt $p_h \in B^q(G)$. Sei $\varphi \in \widehat{H}_\bullet^{2,q'}(G)$. Dann ist $\nabla \varphi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n$. Wie in (a) gibt es $v \in \widehat{H}_0^{2,q'}(G)$ und $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit
$$\partial_i \partial_j f \in C_0^\infty(G) \qquad \text{und} \qquad \varphi = v + f$$

Es existiert wieder $(v_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit $\|\nabla^2(v_k - v)\|_{q;G} \to 0$. Dann folgt

$$
\begin{aligned}
0 = \langle p_h, \Delta\varphi\rangle_G &= \langle p_h, \operatorname{div}\nabla\varphi\rangle_G = \left\langle \nabla \underline{T}_q(p_h), \nabla\nabla\varphi\right\rangle_G \\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle \nabla \underline{T}_q(p_h), \nabla\nabla v_k\right\rangle_G + \langle \nabla \underline{T}_q(p_h), \underbrace{\nabla\nabla f}_{\in C_0^\infty(G)} \rangle_G \\
&= -\lim_{k\to\infty} \left\langle \underline{T}_q(p_h), \nabla\Delta v_k\right\rangle_G - \langle \underline{T}_q(p_h), \nabla \underbrace{\Delta f}_{\in C_0^\infty(G)} \rangle_G \\
&= \left\langle \operatorname{div}(\underline{T}_q(p_h)), \Delta\varphi\right\rangle_G
\end{aligned}
$$

und daher

$$
Z_q(p_h) = \operatorname{div}(\underline{T}_q(p_h)) \in B^q(G)
$$

$\square$

Theorem 11.3. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Es gelte: $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau dann ein $\underline{u} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n$ mit

$$
\left\langle \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\phi}\right\rangle_G = \lambda \left\langle \operatorname{div}\underline{u}, \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n,
$$

wenn es ein $p \in L^q(G)$ gibt mit

$$
\lambda\, Z_q(p) = p
$$

In diesem Fall kann man $p = \operatorname{div}\underline{u}$ wählen.

Beweis. (a) Angenommen, es gibt $\underline{u} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)^n$ mit

$$
\left\langle \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\phi}\right\rangle_G = \lambda \left\langle \operatorname{div}\underline{u}, \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n
$$

Setze

$$
p := \operatorname{div}\underline{u}
$$

Dann ist

$$
\lambda\, \underline{T}_q(p) = \underline{u}
$$

und

$$
\lambda\, Z_q(p) = \operatorname{div}\underline{u} = p
$$

(b) Andererseits gebe es $p \in L^q(G)$ mit

$$
\lambda\, Z_q(p) = p
$$

Dann setze

$$
\underline{u} := \underline{T}_q(p)
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
\left\langle \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\phi}\right\rangle_G &= \left\langle p, \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G = \lambda \left\langle Z_q(p), \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G \\
&= \lambda \left\langle \operatorname{div}\underline{u}, \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)^n
\end{aligned}
$$

$\square$

Theorem 11.4. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $p \in L^q(G)$ gelte

$$Z_q(p) = \lambda\, p$$

Dann ist $\lambda = 1$ oder $p \in B^q(G)$

Beweis. Zerlege gemäß Theorem 4.2

$$p = p_0 + p_h, \qquad p_0 \in A^q(G), \quad p_h \in B^q(G)$$

Dann gilt nach Theorem 11.2

$$\lambda\, p_0 + \lambda\, p_h \;=\; Z_q(p_0) + Z_q(p_h) \;=\; p_0 + Z_q(p_h)$$

Wir erhalten die Zerlegung

$$\underbrace{(\lambda-1)p_0}_{\in A^q(G)} + \underbrace{\lambda\, p_h - Z_q(p_h)}_{\in B^q(G)} = 0$$

Wegen der Direktheit der Zerlegung in Theorem 4.2 gilt deshalb

$$(\lambda - 1)p_0 = 0$$

Das bedeutet $\lambda = 1$ oder $p_0 = 0$ □

12 Die Eigenwerte in $B^q(G)$ für Außengebiete

Dieses Kapitel beruht auf der Idee von Michel Crouzeix [Cr], die in der Einleitung skizziert worden ist.

Lemma 12.1. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte $p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$ und $\underline{u} := \underline{T}_q(p)$. Dann gilt

1. $\nabla \underline{u} \in H^{k,q}(G)^{n^2}$ und $\|\nabla \underline{u}\|_{k,q;G} \;\leq\; C(G,k,q,n)\, \|p\|_{k,q;G}$
2. $\Delta \underline{u} = \nabla p$
3. $\underline{u} \in \overline{C}^1(G)^n$ (falls $k > \frac{n}{q}$)
4. $p \in C^0(\overline{G})$ (falls $k > \frac{n}{q}$)

Beweis. (a) Für $\phi \in C_0^\infty(G)^n$ ist

$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; -\left\langle \nabla p, \underline{\phi} \right\rangle_G$$

und für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle_G \;=\; -\langle \partial_i p, \varphi \rangle_G$$

Wegen $\partial G \in C^{k+2}$ erhalten wir aus Theorem 7.5, Lemma A.15 und Theorem 2.8

$$\nabla \underline{u} \in H^{k,q}(G)^{n^2}$$

und

$$\begin{aligned}
\|\nabla \underline{u}\|_{k,q;G} &\leq C_1(G,k,q,n)\left[\|\nabla p\|_{k-1,q;G} + \|\underline{u}\|_{q;G\cap B_{R_k}} + \|\nabla \underline{u}\|_{q;G}\right] \\
&\leq C_2(G,k,q,n)\,\|p\|_{k,q;G}
\end{aligned}$$

(b) Für $\phi \in C_0^\infty(G)^n$ gilt

$$\left\langle \Delta \underline{u}, \underline{\phi}\right\rangle_G = -\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi}\right\rangle_G = \left\langle \nabla p, \underline{\phi}\right\rangle_G$$

Daher folgt

$$\Delta \underline{u} = \nabla p$$

(c) Es gelte $k > \frac{n}{q}$. Sei $R > 0$ groß genug, dass $\partial(G \cap B_R) \in C^{k+2}$. Dann ist

$$\underline{u} \in H^{k+1,q}(G \cap B_r)^n \qquad \forall\, r > R$$

und aus den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) folgt

$$\underline{u} \in \overline{C}^1(G \cap B_r)^n \qquad \forall\, r > R$$

Schließlich gilt dann auch

$$\underline{u} \in \overline{C}^1(G)^n$$

Genauso kann man zeigen

$$p \in C^0(\overline{G})$$

□

Lemma 12.2. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2} \cap C^4$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G) \qquad \underline{u} := \underline{T}_q(p)$$

Weiter sei

$$\zeta \in C_0^3(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

Definiere

$$w := \underline{u}\,\nabla\zeta - \frac{1}{2}\,p\,\zeta$$

Dann gilt

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap H^{2,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

und es gibt eine Konstante $C = C(n,q,G,\zeta) > 0$ mit

$$\|w\|_{2,q;G} \leq C\,\|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Sei $R > 0$ mit $\mathrm{supp}(\zeta) \subset B_R$ und $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_R$. Wähle $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 1$ für $x \in \mathrm{supp}(\zeta)$. Nach der Definition von $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ gilt

$$\eta \underline{u} \in H_0^{1,q}(G)^n$$

Aus Lemma A.3 folgt

$$\underline{u}\, \nabla\zeta \;=\; (\eta\underline{u})\, \nabla\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

Weil (nach Theorem 5.5) gilt

$$\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

und

$$\|\zeta\|_\infty + \|\nabla\zeta\|_\infty < \infty$$

erhalten wir aus Lemma A.4

$$p\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

und schließlich zusammen mit Lemma 12.1, Theorem 5.2 und dem Ergänzungssatz von Tietze

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

(b) Es ist

$$\partial_i w \;=\; \sum_{j=1}^n \underbrace{\partial_i u_j}_{H^{1,q}} \underbrace{\partial_j \zeta}_{H^{1,q}} + \sum_{j=1}^n \underbrace{u_j}_{H^{1,q}(G\cap B_R)} \underbrace{\partial_i \partial_j \zeta}_{C_0^1(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{2} \underbrace{\partial_i p}_{C^\infty(G)} \underbrace{\zeta}_{C^\infty} - \frac{1}{2} \underbrace{p}_{H^{1,q}} \underbrace{\partial_i \zeta}_{H^{1,q}}$$

Daher existieren nach Lemma A.1 und Lemma 12.1 lokal die zweiten Ableitungen von w, und es gilt die Produktregel. Also ist

$$\begin{aligned}
\Delta w \;&=\; \underbrace{\Delta\underline{u}}_{=\nabla p} \cdot \nabla\zeta + 2\nabla\underline{u} \cdot \nabla\nabla\zeta + \underline{u} \cdot \nabla\Delta\zeta - \frac{1}{2}\zeta \underbrace{\Delta p}_{=0} - \nabla p \nabla\zeta - \frac{1}{2} p \Delta\zeta \\
&=\; 2\nabla\underline{u} \cdot \nabla\nabla\zeta + \underline{u} \cdot \nabla\Delta\zeta - \frac{1}{2} p\Delta\zeta
\end{aligned}$$

Wegen Lemma A.15 und Theorem 2.9 können wir schließen

$$\begin{aligned}
\|\Delta w\|_{q;G} \;&\leq\; C_1(\zeta)\|\nabla\underline{u}\|_{q;G} + C_2(\zeta)\|\underline{u}\|_{q;G\cap B_R} + C_3(\zeta)\|p\|_{q;G} \\
&\leq\; C_4(\zeta, n, q, G, R)\|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

(c) Ebenfalls nach Lemma A.15 und Theorem 2.9 gilt

$$\begin{aligned}
\|w\|_{q;G} \;&\leq\; C_5(\zeta)\|\underline{u}\|_{q;G\cap B_R} + C_6(\zeta)\|p\|_{q;G} \\
&\leq\; C_7(\zeta, q, G, R)\|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

(d) Es ist $w \in H_0^{1,q}(G)$ und $w(x) = 0$ für $|x| > R$. Daher gilt

$$w \in H_0^{1,q}(G \cap B_{2R})$$

und aus Theorem 2.8 und dem Lemma von Poincaré folgt

$$\begin{aligned}
\|\nabla w\|_{q;G} &= \|\nabla w\|_{q;G\cap B_{2R}} \;\le\; C_q \sup_{0\neq\phi\in C_0^\infty(G\cap B_{2R})} \frac{\langle \nabla w, \nabla\phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \\
&= C_q \sup_{0\neq\phi\in C_0^\infty(G\cap B_{2R})} \frac{\langle \Delta w, \phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \\
&\le C_8(q,G,R)\, \|\Delta w\|_{q;G\cap B_{2R}} \;=\; C_8(q,G,R)\, \|\Delta w\|_{q;G}
\end{aligned}$$

(e) Wegen Theorem 7.6 gilt $w \in H^{2,q}(G)$, und wir können letztlich abschätzen

$$\begin{aligned}
\|w\|_{2,q;G} &\le C_9(G,q,n)\, \left(\|\Delta w\|_{q;G} + \|w\|_{1,q;G}\right) \\
&\underset{(b),(c),(d)}{\le} C_{10}(G,q,n,\zeta,R)\, \|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

□

Lemma 12.3. Sei $n \ge 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

Dann gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C = C(n,q,G) > 0$, so dass

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p\|_{1,q;G} \;\le\; C\, \|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Mit $\underline{u} := \underline{T}_q(p)$ gilt $Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p = \operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p$. Nach Lemma 12.1 und Theorem 11.2 gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

und aus Theorem 2.9 wissen wir

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p\|_{q;G} \;\le\; C_1(n,q)\, \|p\|_{q;G}$$

(b) Sei nun nach Theorem 6.1

$$\zeta \in C_0^3(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

und definiere

$$w := \underline{u}\, \nabla\zeta \;-\; \frac{1}{2}\, p\, \zeta$$

Dann gilt nach Lemma 12.2

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap H^{2,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

Wegen Lemma A.1 folgt deshalb

$$\nabla w \nabla \zeta \in H^{1,q}(G)$$

und

$$\partial_i w \;=\; \sum_{j=1}^n (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta) + \sum_{j=1}^n u_j(\partial_i \partial_j \zeta) - \frac{1}{2}(\partial_i p)\zeta - \frac{1}{2} p(\partial_i \zeta)$$

$$\begin{aligned}\nabla w \nabla \zeta \;&=\; \sum_{i,j=1}^n (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) + \sum_{i,j=1}^n u_j(\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\partial_i p)\,\zeta\,(\partial_i \zeta) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} p(\partial_i \zeta)(\partial_i \zeta)\end{aligned}$$

Weiter ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p) \;&=\; \left[\sum_{i,j=1}^n (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) - \operatorname{div} \underline{u}\right] \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n u_j(\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\partial_i p)\,\zeta\,(\partial_i \zeta) + \frac{1}{2} p \left[1 - \sum_{i=1}^n (\partial_i \zeta)(\partial_i \zeta)\right] \\ &=: \; f_1 + f_2 + f_3 + f_4\end{aligned}$$

(c) Weil nach Lemma 12.1 $\underline{u} \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q}(G)^n \cap \overline{C}^1(G)^n$ gilt, können wir aus Theorem 5.8 ableiten:

$$\underline{u}\Big|_{\partial G} = 0$$

und nach Theorem 5.6 gilt für $x \in \partial G$

$$(\nabla u_i)(x) = \lambda_i(x) N(x)$$

Für $x \in \partial G$ gilt deswegen

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^n (\partial_i u_j)(x)(\partial_j \zeta)(x)(\partial_i \zeta)(x) \;&=\; \sum_{i,j=1}^n \lambda_j(x) N_i(x) N_j(x) N_i(x) \\ &=\; |N(x)|^2 \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) N_j(x) \;=\; \sum_{j=1}^n (\partial_j u_j)(x) \\ &=\; \operatorname{div} \underline{u}(x)\end{aligned}$$

und daher

$$f_1 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap H^{1,q}(G), \qquad f_1\Big|_{\partial G} = 0$$

Für $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\eta) \subset B_R$, $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_R$ gilt $\eta f_1 \in H^{1,q}(G \cap B_R) \cap C^0(\overline{G \cap B_R})$ und

$$\eta f_1\Big|_{\partial G \cup \partial B_R} = 0$$

Nach Theorem 5.5 erhalten wir daraus

$$\eta f_1 \in H_0^{1,q}(G \cap B_R) \subset H_0^{1,q}(G)$$

und

$$f_1 \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$$

(d) Es gilt $u_j \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und $(\partial_i\partial_j\zeta)(\partial_i\zeta) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Sei $\mathrm{supp}(\zeta) \subset B_R$, $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_R$. Wähle $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 1$ für $x \in B_R$. Dann ist $\eta u_j \in H_0^{1,q}(G)$ und nach Lemma A.3

$$f_2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_j(\partial_i\partial_j\zeta)(\partial_i\zeta) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta u_j(\partial_i\partial_j\zeta)(\partial_i\zeta) \in H_0^{1,q}(G)$$

(e) Nach Theorem 5.5 gilt $\zeta \in H_0^{1,q}(G)$ und $\partial_i p \in H^{1,q}(G)$, $\partial_i\zeta \in H^{1,q}(G)$. Aus Lemma A.4 erhalten wir

$$f_3 \in H_0^{1,q}(G)$$

(f) Es ist

$$1 - \sum_{i=1}^{n}(\partial_i\zeta)(\partial_i\zeta)\Big|_{\partial G} = 1 - |N|^2\Big|_{\partial G} = 0$$

Deshalb gilt

$$f_4 \in H^{1,q}(G) \cap C^0(\overline{G}), \qquad f_4\Big|_{\partial G} = 0$$

und nach Theorem 5.5

$$f_4 \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$$

(g) Nach (c)-(f) gilt

$$\nabla w \nabla\zeta - (\mathrm{div}\, \underline{u} - \frac{1}{2}\, p) \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$$

und deshalb ist nach Theorem 2.8

$$\|\nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta - (\mathrm{div}\,\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\Big]\|_{q;G} \;\leq$$

$$\leq\; C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)} \frac{\Big\langle \nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta - (\mathrm{div}\,\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\Big], \nabla\phi\Big\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \;=$$

$$\underset{\text{Lemma 4.3}}{=}\; C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)} \frac{\Big\langle \nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta\Big], \nabla\phi\Big\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \;\leq\; C_q\|\nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta\Big]\|_{q;G}$$

Schließlich folgt aus Lemma 12.2

$$\begin{aligned}\|\nabla(\operatorname{div}\underline{u}-\frac{1}{2}\,p)\|_{q;G} &\leq \|\nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta-(\operatorname{div}\underline{u}-\frac{1}{2}\,p)\Big]\|_{q;G}+\|\nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta\Big]\|_{q;G}\\ &\leq (1+C_q)\,\|\nabla\Big[\nabla w\nabla\zeta\Big]\|_{q;G} \;\leq\; C_2(q,\zeta)\,\|w\|_{2,q;G}\\ &\leq C_3(n,q,G,\zeta)\|p\|_{q;G}\end{aligned}$$

(h) Aus (a) und (g) folgt die Behauptung. □

Theorem 12.4. Sei $n\geq 2$, $1<q<\infty$, $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, $k>\frac{n}{q}$ und sei $G\subset\mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G\in C^{k+2}$. Es gelte

$$p\in B^q(G)$$

Dann gilt

$$Z_q(p)-\frac{1}{2}\,p\in B^q(G)\cap H^{1,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C=C(n,q,G)>0$ mit

$$\|Z_q(p)-\frac{1}{2}\,p\|_{1,q;G}\;\leq\;C\,\|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Wegen Theorem 9.2 gibt es eine Folge $(p_m)\subset B^q(G)\cap H^{k,q}(G)$ mit

$$\|p_m-p\|_{q;G}\to 0$$

Nach Lemma 12.3 gilt

$$\|\big(Z_q(p_m)-\frac{1}{2}\,p_m\big)-\big(Z_q(p_{m'})-\frac{1}{2}\,p_{m'}\big)\|_{1,q;G}\;\leq\;C\,\|p_{m'}-p_m\|_{q;G}\;\to 0$$

Wegen der Vollständigkeit von $H^{1,q}(G)$ existiert ein $u\in H^{1,q}(G)$, so dass

$$\|(Z_q(p_m)-\frac{1}{2}\,p_m)-u\|_{1,q;G}\;\to 0$$

Weil

$$\|Z_q(p_m)-\frac{1}{2}\,p_m\|_{1,q;G}\;\leq\;C\,\|p_m\|_{q;G}$$

gilt, erhalten wir für $(m\to\infty)$

$$\|u\|_{1,q;G}\;\leq\;C\,\|p\|_{q;G}$$

(b) Aus Theorem 11.2 folgt

$$Z_q(p)-\frac{1}{2}\,p\in B^q(G)$$

und nach Theorem 2.9 und der Definition von Z_q existiert ein $C_1(n,q) > 0$ mit

$$\|Z_q(\pi) - \frac{1}{2}\,\pi\|_{q;G} \;\le\; C_1(n,q)\,\|\pi\|_{q;G} \qquad \forall\,\pi \in B^q(G)$$

Deswegen ist

$$\|\big(Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m\big) - \big(Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\big)\|_{q;G} \;\le\; C_1\,\|p - p_m\|_{q;G} \;\to 0$$

Daraus ergibt sich

$$u = Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p$$

und die Behauptung folgt aus (a) □

Theorem 12.5. Sei $n \ge 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Dann ist

$$Z_q \;-\; \frac{1}{2}\,I \;:\; B^q(G) \to B^q(G)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Nach Theorem 12.4 gilt für jedes $p \in B^q(G)$

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\|_{1,q;G} \;\le\; C\,\|p\|_{q;G}$$

Sei $(p_m) \subset B^q(G)$ mit $\|p_m\|_{q;G} \le \tilde{C} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\|Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m\|_{1,q;G} \;\le\; C\,\tilde{C} < \infty$$

Weil die Einbettung $B^q(G) \cap H^{1,q}(G) \to B^q(G)$ kompakt ist (Theorem 10.1), gibt es eine Teilfolge $(p_{m_l}) \subset (p_m)$, so dass $(Z_q(p_{m_l}) - \frac{1}{2}\,p_{m_l})$ Cauchyfolge ist in $B^q(G)$. □

13 Die Eigenwerte in $B^q(G)$ für beschränkte Gebiete

Dieses Kapitel beruht auf der Idee von Michel Crouzeix [Cr], die in der Einleitung skizziert worden ist.

Lemma 13.1. Sei $n \ge 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte $p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$ und $\underline{u} := \underline{T}_q(p)$. Dann gilt

1. $\nabla\underline{u} \in H^{k,q}(G)^{n^2}$ und $\|\nabla\underline{u}\|_{k,q;G} \;\le\; C(G,k,q,n)\,\|p\|_{k,q;G}$
2. $\Delta\underline{u} = \nabla p$
3. $\underline{u} \in \overline{C}^1(G)^n$ (falls $k > \frac{n}{q}$)
4. $p \in C^0(\overline{G})$ (falls $k > \frac{n}{q}$)

Beweis. (a) Für $\phi \in C_0^\infty(G)^n$ ist

$$\big\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \big\rangle_G \;=\; \big\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \big\rangle_G \;=\; -\big\langle \nabla p, \underline{\phi} \big\rangle_G$$

und für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und $i = 1, \ldots, n$ gilt

$$\langle \nabla u_i, \nabla \varphi \rangle_G \;=\; -\langle \partial_i p, \varphi \rangle_G$$

Wegen $\partial G \in C^{k+2}$ erhalten wir aus Theorem 7.4, Theorem 2.8 und dem Lemma von Poincaré

$$\nabla \underline{u} \in H^{k,q}(G)^{n^2}$$

und

$$\begin{aligned} \|\nabla \underline{u}\|_{k,q;G} &\leq C_1(G,k,q,n)\, [\|\nabla p\|_{k-1,q;G} + \|\underline{u}\|_{q;G} + \|\nabla \underline{u}\|_{q;G}] \\ &\leq C_2(G,k,q,n)\, \|p\|_{k,q;G} \end{aligned}$$

(b) Für $\phi \in C_0^\infty(G)^n$ gilt

$$\big\langle \Delta \underline{u}, \underline{\phi} \big\rangle_G \;=\; -\big\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \big\rangle_G \;=\; \big\langle \nabla p, \underline{\phi} \big\rangle_G$$

Daher folgt

$$\Delta \underline{u} = \nabla p$$

(c) Es gelte $k > \frac{n}{q}$. Aus (a) folgt

$$\underline{u} \in H^{k+1,q}(G)^n$$

Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) erhalten wir daher

$$\underline{u} \in \overline{C}^1(G)^n$$

Genauso folgt

$$p \in C^0(\overline{G})$$

□

Lemma 13.2. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2} \cap C^4$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G) \qquad \underline{u} := \underline{T}_q(p)$$

Weiter sei

$$\zeta \in C_0^3(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

Definiere

$$w := \underline{u}\,\nabla\zeta \;-\; \frac{1}{2}\,p\,\zeta$$

Dann gilt

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap H^{2,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

und es gibt eine Konstante $C = C(n,q,G,\zeta) > 0$ mit

$$\|w\|_{2,q;G} \;\leq\; C\, \|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Aus Lemma A.3 folgt

$$\underline{u}\,\nabla\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

Weil (nach Theorem 5.5) gilt

$$\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

erhalten wir aus Lemma A.4

$$p\zeta \in H_0^{1,q}(G)$$

und schließlich

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

(b) Es ist

$$\partial_i w \;=\; \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\partial_i u_j}_{H^{1,q}} \underbrace{\partial_j \zeta}_{H^{1,q}} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{u_j}_{H^{1,q}} \underbrace{\partial_i \partial_j \zeta}_{H^{1,q}} - \frac{1}{2} \underbrace{\partial_i p}_{C^\infty(G)} \underbrace{\zeta}_{C^\infty} - \frac{1}{2} \underbrace{p}_{H^{1,q}} \underbrace{\partial_i \zeta}_{H^{1,q}}$$

Daher gilt nach Lemma A.1 und Lemma 13.1

$$\begin{aligned}\Delta w \;&=\; \underbrace{\Delta \underline{u}}_{=\nabla p} \cdot \nabla\zeta + 2\nabla\underline{u} \cdot \nabla\nabla\zeta + \underline{u} \cdot \nabla\Delta\zeta - \frac{1}{2}\zeta \underbrace{\Delta p}_{=0} - \nabla p \nabla\zeta - \frac{1}{2} p\Delta\zeta \\ &=\; 2\nabla\underline{u} \cdot \nabla\nabla\zeta + \underline{u} \cdot \nabla\Delta\zeta - \frac{1}{2} p\Delta\zeta\end{aligned}$$

Wegen des Lemmas von Poincaré und Theorem 2.9 können wir schließen

$$\begin{aligned}\|\Delta w\|_{q;G} \;&\le\; C_1(\zeta)\|\nabla u\|_{q;G} + C_2(\zeta)\|u\|_{q;G} + C_3(\zeta)\|p\|_{q;G} \\ &\le\; C_4(\zeta, n, q, G)\|p\|_{q;G}\end{aligned}$$

(c) Ebenfalls nach dem Lemma von Poincaré und Theorem 2.9 gilt

$$\begin{aligned}\|w\|_{q;G} \;&\le\; C_5(\zeta)\|u\|_{q;G} + C_6(\zeta)\|p\|_{q;G} \\ &\le\; C_7(\zeta, q, G)\|p\|_{q;G}\end{aligned}$$

(d) Es ist $w \in H_0^{1,q}(G)$, und aus Theorem 2.8 und dem Lemma von Poincaré folgt

$$\begin{aligned}\|\nabla w\|_{q;G} \;&\le\; C_q \sup_{0\neq\phi\in C_0^\infty(G)} \frac{\langle \nabla w, \nabla\phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \\ &=\; C_q \sup_{0\neq\phi\in C_0^\infty(G)} \frac{\langle \Delta w, \phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q'}} \\ &\le\; C_8(q, G)\,\|\Delta w\|_{q;G}\end{aligned}$$

(e) Wegen Theorem 7.6 gilt $w \in H^{2,q}(G)$ und wir können letztlich abschätzen

$$\begin{aligned} \|w\|_{2,q;G} &\leq C_9(G,q,n)\,\left(\|\Delta w\|_{q;G} + \|w\|_{1,q;G}\right) \\ &\underset{(b),(c),(d)}{\leq} C_{10}(G,q,n,\zeta)\,\|p\|_{q;G} \end{aligned}$$

□

Lemma 13.3. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

Dann gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C = C(n,q,G) > 0$, so dass

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\|_{1,q;G} \;\leq\; C\,\|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Mit $\underline{u} := \underline{T}_q(p)$ gilt $Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p = \operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p$. Nach Lemma 13.1 und Theorem 11.2 gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

und aus Theorem 2.9 wissen wir

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\|_{q;G} \;\leq\; C_1(n,q)\,\|p\|_{q;G}$$

(b) Sei nun nach Theorem 6.1

$$\zeta \in C_0^3(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

und definiere

$$w := \;\underline{u}\,\nabla\zeta \;-\; \frac{1}{2}\,p\,\zeta$$

Dann gilt nach Lemma 13.2

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap H^{2,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

Wegen Lemma A.1 folgt deshalb

$$\nabla w \nabla \zeta \in H^{1,q}(G)$$

und

$$\partial_i w \;=\; \sum_{j=1}^n (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta) + \sum_{j=1}^n u_j(\partial_i\partial_j\zeta) - \frac{1}{2}(\partial_i p)\zeta - \frac{1}{2}p(\partial_i\zeta)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla w \nabla \zeta \;&=\; \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) + \sum_{i,j=1}^{n} u_j (\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\partial_i p)\,\zeta\,(\partial_i \zeta) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p (\partial_i \zeta)(\partial_i \zeta)
\end{aligned}
$$

Weiter ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\,p) \;&=\; \left[\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i u_j)(\partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) - \operatorname{div} \underline{u} \right] \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n} u_j (\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(\partial_i p)\,\zeta\,(\partial_i \zeta) + \frac{1}{2} p \left[1 - \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \zeta)(\partial_i \zeta) \right] \\
&=: \; f_1 + f_2 + f_3 + f_4
\end{aligned}
$$

(c) Weil nach Lemma 13.1 $\underline{u} \in H_0^{1,q}(G)^n \cap \overline{C}^1(G)^n$ gilt, können wir aus Theorem 5.8 ableiten:

$$
\underline{u}\Big|_{\partial G} = 0
$$

und nach Theorem 5.6 gilt für $x \in \partial G$

$$
(\nabla u_i)(x) = \lambda_i(x) N(x)
$$

Für $x \in \partial G$ gilt deswegen

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i u_j)(x)(\partial_j \zeta)(x)(\partial_i \zeta)(x) \;&=\; \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j(x) N_i(x) N_j(x) N_i(x) \\
&=\; |N(x)|^2 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) N_j(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (\partial_j u_j)(x) \\
&=\; \operatorname{div} \underline{u}(x)
\end{aligned}
$$

und daher nach Theorem 5.2

$$
f_1 \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap H^{1,q}(G), \qquad f_1\Big|_{\partial G} = 0
$$

Nach Theorem 5.5 erhalten wir daraus

$$
f_1 \in H_0^{1,q}(G)
$$

(d) Es gilt $u_j \in H_0^{1,q}(G)$ und $(\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dann ist nach Lemma A.3

$$
f_2 = \sum_{i,j=1}^{n} u_j (\partial_i \partial_j \zeta)(\partial_i \zeta) \in H_0^{1,q}(G)
$$

(e) Nach Theorem 5.5 gilt $\zeta \in H_0^{1,q}(G)$ und $\partial_i p \in H^{1,q}(G)$, $\partial_i \zeta \in H^{1,q}(G)$. Aus Lemma A.4 erhalten wir

$$f_3 \in H_0^{1,q}(G)$$

(f) Es ist

$$1 - \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \zeta)(\partial_i \zeta)\Big|_{\partial G} = 1 - |N|^2\Big|_{\partial G} = 0$$

Deshalb gilt

$$f_4 \in H^{1,q}(G) \cap C^0(\overline{G}), \qquad f_4\Big|_{\partial G} = 0$$

und nach Theorem 5.5

$$f_4 \in H_0^{1,q}(G)$$

(g) Nach (c)-(f) gilt

$$\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p) \in H_0^{1,q}(G)$$

und deshalb ist nach Theorem 2.8

$$\|\nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p)\Big]\|_{q;G} \ \le$$

$$\le\ C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)} \frac{\Big\langle \nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p)\Big], \nabla \phi \Big\rangle}{\|\nabla \phi\|_{q'}} \ =$$

$$\underset{\text{Lemma 4.3}}{=}\ C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(G)} \frac{\Big\langle \nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta\Big], \nabla \phi \Big\rangle}{\|\nabla \phi\|_{q'}} \ \le\ C_q \|\nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta\Big]\|_{q;G}$$

Schließlich folgt aus Lemma 13.2

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p)\|_{q;G} \ &\le\ \|\nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta - (\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2}\, p)\Big]\|_{q;G} + \|\nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta\Big]\|_{q;G} \\
&\le\ (1 + C_q)\, \|\nabla \Big[\nabla w \nabla \zeta\Big]\|_{q;G} \ \le\ C_2(q, \zeta)\, \|w\|_{2,q;G} \\
&\le\ C_3(n, q, G, \zeta) \|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

(h) Aus (a) und (g) folgt die Behauptung. □

Theorem 13.4. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es gelte

$$p \in B^q(G)$$

Dann gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p \in B^q(G) \cap H^{1,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C = C(n, q, G) > 0$ mit

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\|_{1,q;G} \;\leq\; C\,\|p\|_{q;G}$$

Beweis. (a) Wegen Theorem 9.1 gibt es eine Folge $(p_m) \subset B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$ mit

$$\|p_m - p\|_{q;G} \to 0$$

Nach Lemma 13.3 gilt

$$\|\big(Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m\big) - \big(Z_q(p_{m'}) - \frac{1}{2}\,p_{m'}\big)\|_{1,q;G} \;\leq\; C\,\|p_{m'} - p_m\|_{q;G} \;\to 0$$

Wegen der Vollständigkeit von $H^{1,q}(G)$ existiert ein $u \in H^{1,q}(G)$, so dass

$$\|(Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m) - u\|_{1,q;G} \;\to 0$$

Weil

$$\|Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m\|_{1,q;G} \;\leq\; C\,\|p_m\|_{q;G}$$

gilt, erhalten wir für $(m \to \infty)$

$$\|u\|_{1,q;G} \;\leq\; C\,\|p\|_{q;G}$$

(b) Aus Theorem 11.2 folgt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p \in B^q(G)$$

und nach Theorem 2.9 und der Definition von Z_q gilt

$$\|Z_q(\pi) - \frac{1}{2}\,\pi\|_{q;G} \;\leq\; C_1(n,q)\,\|\pi\|_{q;G} \qquad \forall \pi \in B^q(G)$$

Deswegen ist

$$\|\big(Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\,p_m\big) - \big(Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p\big)\|_{q;G} \;\leq\; C_1\,\|p - p_m\|_{q;G} \;\to 0$$

Daraus ergibt sich

$$u = Z_q(p) - \frac{1}{2}\,p$$

und die Behauptung folgt aus (a) □

Theorem 13.5. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Dann ist

$$Z_q - \frac{1}{2} I \, : \, B^q(G) \to B^q(G)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Nach Theorem 13.4 gilt für jedes $p \in B^q(G)$

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2}\, p\|_{1,q;G} \;\leq\; C\, \|p\|_{q;G}$$

Sei $(p_m) \subset B^q(G)$ mit $\|p_m\|_{q;G} \leq \tilde{C} < \infty$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\|Z_q(p_m) - \frac{1}{2}\, p_m\|_{1,q;G} \;\leq\; C\, \tilde{C} < \infty$$

Weil die Einbettung $H^{1,q}(G) \to L^q(G)$ kompakt ist (siehe z.B. [Alt, Satz 8.9, S.314]), gibt es eine Teilfolge $(p_{m_l}) \subset (p_m)$, so dass $(Z_q(p_{m_l}) - \frac{1}{2}\, p_{m_l})$ Cauchyfolge ist in $B^q(G)$. $\square$

14 Das Cosserat Spektrum

Theorem 14.1. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$.

1. Für $s \in \widehat{H}^{2,q}_{\bullet}(G)$ und $\underline{u}_0 := \nabla s$ gilt
$$\left\langle \nabla \underline{u}_0, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \left\langle \operatorname{div} \underline{u}_0, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)$$

2. Falls $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)$ mit
$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)$$
so ist $\lambda = 1$ oder $\operatorname{div} \underline{u} \in B^q(G)$

3. Die Menge
$$W \;:=\; \Big\{ \lambda \in \mathbb{R} \;:\; \begin{array}{l} \text{es gibt } 0 \neq \underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G), \text{ so dass für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G) \\ \text{gilt } \left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \end{array} \Big\}$$
ist endlich oder abzählbar.

4. Für $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ ist der Vektorraum
$$V_\lambda := \Big\{ \underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G) \;:\; \left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \text{ für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G) \Big\}$$
endlichdimensional.

5. Für jede Folge $(\lambda_m) \subset W$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern gilt
$$\lambda_m \to 2 \qquad (m \to \infty)$$

Beweis. (a) Sei $s \in \widehat{H}^{2,q}_{\bullet}(G)$. Aus Theorem 2.5 - 2.7 erhalten wir für $\underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)$
$$\left\langle \nabla \nabla s, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \left\langle \Delta s, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \left\langle \operatorname{div} \nabla s, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)$ mit
$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)$$
Nach Theorem 11.3 gilt mit $p := \operatorname{div} \underline{u}$
$$\lambda Z_q(p) = p$$
Falls $\lambda = 0$ gilt, so ist $\underline{u} = 0$ und trivialerweise $\operatorname{div} \underline{u} \in B^q(G)$. Falls $\lambda \neq 0$, folgt aus Theorem 11.4
$$\lambda = 1 \quad \text{oder} \quad \operatorname{div} \underline{u} \in B^q(G)$$

(c) Nach Theorem 11.3 und (b) gilt: $\lambda \in W \backslash \{0, 1\}$ genau dann, wenn es ein $p \in B^q(G)$ gibt mit $Z_q(p) = \frac{1}{\lambda} p$

Wegen Theorem 12.5, Theorem 13.5 und Theorem B.9 ist $\sigma_p^{(\mathbb{R})}(Z_q)$ endlich oder abzählbar. Deshalb ist auch

$$W\backslash\{0,1\} \;=\; \left\{\mu \in \mathbb{R} \;:\; \frac{1}{\mu} \in \sigma_p^{(\mathbb{R})}(Z_q)\right\}$$

endlich oder abzählbar.

(d) Sei $\lambda \in W\backslash\{0,1,2\}$. Für $\underline{u} \in V_\lambda$ gilt nach Theorem 11.3 und (b)

$$\operatorname{div}\underline{u} \;\in\; N\left(\frac{1}{\lambda}I - Z_q\right)$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, und $\underline{u}^{(1)}, \ldots, \underline{u}^{(m)} \in V_\lambda$ seien linear unabhängig. Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ gegeben mit

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \operatorname{div}\underline{u}^{(i)} \;=\; 0$$

Dann ist für $\underline{\phi} \in \widehat{H}_{\bullet}^{1,q'}(G)$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \left\langle \nabla\underline{u}^{(i)}, \nabla\underline{\phi}\right\rangle_G \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_i\, \lambda \left\langle \operatorname{div}\underline{u}^{(i)}, \operatorname{div}\underline{\phi}\right\rangle_G \;=\; 0$$

Aus Theorem 2.8 folgt

$$\sum_{i=1}^{m} a_i\, \underline{u}^{(i)} \;=\; 0$$

und nach Voraussetzung

$$a_1 = \ldots = a_m = 0$$

Also ergibt sich

$$\dim V_\lambda \;\le\; \dim N\left(\frac{1}{\lambda}I - Z_q\right)$$

Nun wissen wir aber aus Theorem 12.5, Theorem 13.5 und Theorem B.9

$$\dim N\left(\frac{1}{\lambda}I - Z_q\right) \;<\; \infty$$

(e) Sei $(\lambda_m) \subset W$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $\lambda_m \notin \{0,1,2\}$ gilt. Dann ist

$$\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) \subset \sigma_p^{(\mathbb{R})}(Z_q)\Big\backslash \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

eine Folge von paarweise verschiedenen Eigenwerten von Z_q. Nach Theorem 12.5, Theorem 13.5 und Theorem B.9 gilt

$$\frac{1}{\lambda_m} \longrightarrow \frac{1}{2} \qquad (m \to \infty)$$

Das bedeutet

$$\lambda_m \to 2 \qquad (m \to \infty)$$

$\square$

15 Regularität der Lösungen

Theorem 15.1. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet oder beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{k+2}$. Es sei $p \in B^q(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ mit

$$Z_q(p) \;=\; \lambda\, p$$

Dann gilt für alle $1 < \tilde{q} < \infty$

$$p \in H^{1,\tilde{q}}(G) \cap C^0(\overline{G})$$

und

$$Z_q(p) \;=\; Z_{\tilde{q}}(p)$$

Beweis. (a) Nach Theorem 12.4 bzw. 13.4 gilt mit $\mu := \lambda - \frac{1}{2} \neq 0$

$$p \;=\; \frac{1}{\mu}\left(Z_q(p) \;-\; \frac{1}{2}\,p\right) \;\in H^{1,q}(G)$$

(b) Falls $q = n$, so folgt mit der Hölderungleichung und Theorem 8.7

$$p \in H^{1,\hat{q}}(G)$$

für ein $1 < \hat{q} < n$.

(c) Falls $1 < q < n$, so folgt mit

$$q^* \;=\; \frac{nq}{n-q} \;>\; q$$

aus den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.9, S.314])

$$p \in L^{q^*}(G \cap B_r) \qquad \forall\, r > 0$$

Wegen Theorem 8.7 gilt auch

$$p \in L^{q^*}(G)$$

Nach Theorem 7.9 bzw. 7.10 folgt

$$\underline{T}_q(p) \in \widehat{H}^{1,q^*}_{\bullet}(G)^n$$

und

$$\left\langle \nabla \underline{T}_q(p), \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \left\langle p, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,(q^*)'}_{\bullet}(G)^n$$

Wegen der Eindeutigkeit in Theorem 2.9 gilt daher

$$\underline{T}_q(p) \;=\; \underline{T}_{q^*}(p)$$

also auch

$$Z_q(p) \;=\; Z_{q^*}(p)$$

Nach Theorem 12.4 bzw. 13.4 gilt daher

$$p \;=\; \frac{1}{\mu}\left(Z_q(p) \;-\; \frac{1}{2}\,p\right) \;=\; \frac{1}{\mu}\left(Z_{q^*}(p) \;-\; \frac{1}{2}\,p\right) \;\in H^{1,q^*}(G)$$

Man zeigt leicht

$$(q^*)^* \;=\; \frac{nq}{n-2q}, \qquad\qquad q^{\overbrace{*\cdots*}^{m-\mathrm{mal}}} \;=\; \frac{nq}{n-mq}$$

Iterativ erhält man damit für ein $n < s < \infty$

$$p \in H^{1,s}(G)$$

(d) Es gelte also für ein $n < s < \infty$: $p \in H^{1,s}(G)$. Nach den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) gilt

$$p \in C^0(\overline{G \cap B_r}) \qquad \forall\, r > 0$$

Also auch

$$p \in C^0(\overline{G})$$

Somit erhalten wir insbesondere mit der Hölderungleichung

$$p \in L^{\tilde{q}}(G \cap B_r) \qquad \forall\, r > 0 \quad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

und mit Theorem 8.12

$$p \in L^{\tilde{q}}(G) \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

Wie in (c) zeigt man

$$Z_q(p) \;=\; Z_{\tilde{q}}(p) \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

und aus Theorem 12.4 bzw. 13.4 folgt daraus

$$p \;=\; \frac{1}{\mu}\left(Z_q(p) \;-\; \frac{1}{2}\,p\right) \;=\; \frac{1}{\mu}\left(Z_{\tilde{q}}(p) \;-\; \frac{1}{2}\,p\right) \;\in H^{1,\tilde{q}}(G) \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

□

Lemma 15.2. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+4}$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G) \qquad \underline{u} := \underline{T}_q(p)$$

Weiter sei

$$\zeta \in C_0^{k+3}(\mathbb{R}^n), \quad \zeta\Big|_{\partial G} = 0, \quad \nabla\zeta\Big|_{\partial G} = N$$

Definiere

$$w := \;\underline{u}\,\nabla\zeta \;-\; \frac{1}{2}\,p\,\zeta$$

Dann gilt

$$w \in H_0^{1,q}(G) \cap H^{2+k,q}(G) \cap C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

und es gibt eine Konstante $C_k = C_k(k,n,q,G,\zeta) > 0$ mit

$$\|w\|_{2+k,q;G} \;\leq\; C_k\,\|p\|_{k,q;G}$$

Beweis. Es sind alle Voraussetzungen von Lemma 12.2 bzw. 13.2 erfüllt. Wir können daher alle dort im Beweis vorkommenden Gleichungen und Ungleichungen verwenden. Nach Beweisteil (b) von Lemma 12.2 bzw. 13.2 gilt

$$\Delta w \; = \; 2\nabla \underline{u} \cdot \nabla\nabla\zeta + \underline{u} \cdot \underbrace{\nabla\Delta\zeta}_{\in H^{k,q}(G)} - \frac{1}{2} p \Delta\zeta$$

Nach Lemma 12.1 bzw. 13.1 und Lemma A.15 bzw. dem Lemma von Poincaré folgt

$$\begin{aligned} \|\Delta w\|_{k,q;G} &\leq C_1(\zeta) \|\nabla \underline{u}\|_{k,q;G} + C_2(\zeta) \|\underline{u}\|_{k,q;G\cap B_R} + C_3(\zeta) \|p\|_{k,q;G} \\ &\leq C_4(\zeta, n, q, G, R) \|p\|_{k,q;G} \end{aligned}$$

Somit ist nach Theorem 7.6

$$w \in H^{2+k,q}(G)$$

und

$$\begin{aligned} \|w\|_{2+k,q;G} &\leq C_5(G, q, n, k) \; (\|\Delta w\|_{k,q;G} + \|w\|_{1,q;G}) \\ &\leq C_6(G, q, n, \zeta, R, k) \; \|p\|_{k,q;G} \end{aligned}$$

nach Beweisteil (c) und (d) von Lemma 12.2 bzw. 13.2. □

Lemma 15.3. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1 + \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+3}$. Es gelte

$$p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

Dann gilt

$$Z_q(p) - \frac{1}{2} p \in B^q(G) \cap H^{k,q}(G)$$

und es gibt eine Konstante $C_k = C(k, n, q, G) > 0$, so dass

$$\|Z_q(p) - \frac{1}{2} p\|_{k,q;G} \; \leq \; C_k \; \|p\|_{k-1,q;G}$$

Beweis. Es sind alle Voraussetzungen von Lemma 12.3 bzw. 13.3 erfüllt. Wir können daher alle dort im Beweis vorkommenden Gleichungen und Ungleichungen verwenden. Außerdem können wir dort wegen Theorem 6.1

$$\zeta \in C_0^{k+2}(\mathbb{R}^n)$$

wählen. Mit den Bezeichnungen des Beweises von Lemma 12.3 bzw. 13.3 gilt nach Beweisteil (g)

$$\nabla w \nabla\zeta - \underbrace{(\operatorname{div} \underline{u} - \frac{1}{2} p)}_{\in B^q(G)} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)$$

Weiter ist

$$\Delta\big[\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\big] \;=\; \Delta(\nabla w \nabla\zeta)$$

Nach Lemma 15.2 angewendet auf $\tilde{k} = k-1$ und $p \in B^q(G) \cap H^{\tilde{k},q}(G)$ gilt

$$\Delta(\nabla w \nabla\zeta) \in H^{k-2,q}(G)$$

und

$$\|\Delta(\nabla w \nabla\zeta)\|_{k-2,q;G} \;\le\; C_1(\zeta)\,\|w\|_{1+k,q;G} \;\le\; C_2(\zeta,n,k,q,G)\,\|p\|_{k-1,q;G}$$

Aus Theorem 7.6 folgt

$$\|\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\|_{k,q;G} \;\le$$

$$\le\; C_2(\zeta,n,k,q,G)\,\Big[\|\Delta(\nabla w \nabla\zeta)\|_{k-2,q;G} + \|\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\|_{1,q;G}\Big]$$

Aus Beweisteil (a) und (g) von Lemma 12.3 bzw. 13.3 lesen wir ab

$$\|\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p\|_{q;G} \;\le\; C_4(n,q)\,\|p\|_{q;G}$$

und

$$\|\nabla\Big[\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\Big]\|_{q;G} \;\le\; C_5(n,q,G,\zeta)\,\|p\|_{q;G}$$

Nach Lemma 12.2 bzw. 13.2 gilt weiter

$$\|\nabla w \nabla\zeta\|_{1,q;G} \;\le\; C_6(\zeta)\,\|w\|_{2,q;G} \;\le\; C_7(\zeta,n,q,G)\,\|p\|_{q;G}$$

Also erhalten wir

$$\|\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\|_{k,q;G} \;\le\; C_8(\zeta,n,q,G,k)\,\|p\|_{k-1,q;G}$$

Wie man oben sieht, ist auch

$$\|\nabla w \nabla\zeta\|_{k,q;G} \;\le\; C_9(\zeta)\,\|w\|_{k+1,q;G} \;\le\; C_{10}(\zeta,n,q,G,k)\,\|p\|_{k-1,q;G}$$

Insgesamt folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}\|\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p\|_{k,q;G} \;&\le\; \|\nabla w \nabla\zeta\|_{k,q;G} + \|\nabla w \nabla\zeta - (\operatorname{div}\underline{u} - \frac{1}{2}\,p)\|_{k,q;G} \\ &\le\; C_{11}(\zeta,n,q,G,k)\,\|p\|_{k-1,q;G}\end{aligned}$$

□

Theorem 15.4. Sei $n \ge 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+3}$. Es gelte $p \in B^q(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$ und

$$Z_q(p) \;=\; \lambda\,p$$

Dann gilt für alle $1 < \tilde{q} < \infty$

$$p \in H^{k,\tilde{q}}(G)$$

Beweis. Nach Theorem 15.1 ist für alle $1 < \tilde{q} < \infty$

$$p \in H^{1,\tilde{q}}(G) \cap C^0(\overline{G})$$

und

$$Z_q(p) \;=\; Z_{\tilde{q}}(p)$$

Wähle ein $1 < s < \infty$ mit $s > n$. Nach Theorem 9.1 bzw. 9.2 gibt es eine Folge $(p_m) \subset H^{k,s}(G) \cap B^s(G)$ mit

$$\|p_m - p\|_{s;G} \;\to\; 0 \qquad (m \to \infty)$$

Nach Lemma 15.3 (beachte $k \geq 2 > 1 + \frac{n}{s}$) gilt

$$(Z_s - \frac{1}{2}I)^l p_m \in H^{k,s}(G) \cap B^s(G) \qquad \forall\, l \in \mathbb{N}$$

und

$$\begin{aligned}
\|(Z_s - \frac{1}{2}I)^k (p_m - p_{m'})\|_{k,s;G} \quad &\leq \quad C_k \,\|(Z_s - \frac{1}{2}I)^{k-1}(p_m - p_{m'})\|_{k-1,s;G} \\
&\leq \quad \ldots \\
&\leq \quad C_k\, C_{k-1} \ldots C_2 \,\|(Z_s - \frac{1}{2}I)(p_m - p_{m'})\|_{1,s;G} \\
&\underset{13.4}{\overset{12.4}{\leq}} \quad C_k\, C_{k-1} \ldots C_2\, C \,\|p_m - p_{m'}\|_{s;G} \;\to\; 0
\end{aligned}$$

Da $H^{k,s}(G)$ vollständig ist, gibt es ein $g \in H^{k,s}(G)$ mit

$$\|g - (Z_s - \frac{1}{2}I)^k p_m\|_{k,s;G} \;\to\; 0 \qquad (m \to \infty)$$

Da $(Z_s - \frac{1}{2}I)^k$ ein beschränkter Operator ist, gilt auch

$$\|(Z_s - \frac{1}{2}I)^k p - (Z_s - \frac{1}{2}I)^k p_m\|_{s;G} \;\to\; 0 \qquad (m \to \infty)$$

Also ist

$$(Z_s - \frac{1}{2}I)^k p \;=\; g \in H^{k,s}(G)$$

Mit $\mu := \lambda - \frac{1}{2} \neq 0$ gilt

$$Z_s(p) \;-\; \frac{1}{2}\, p \;=\; \mu\, p$$

also

$$(Z_s - \frac{1}{2}I)^k p \;=\; \mu^k\, p$$

und somit

$$p \;=\; \frac{1}{\mu^k} \left(Z_s - \frac{1}{2}I\right)^k p \,\in H^{k,s}(G)$$

für alle $1 < s < \infty$ mit $s > n$.

Nach der Hölderungleichung ist

$$p \in H^{k,\tilde{q}}(G \cap B_r) \qquad \forall\, r > 0 \quad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

Wir wissen bereits

$$p \in H^{1,\tilde{q}}(G) \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

Mit Lemma 8.10 und Theorem 8.7 folgt schließlich

$$p \in H^{k,\tilde{q}}(G) \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

□

Theorem 15.5. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $k > \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^{k+3}$. Es gelte $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,q}_{\bullet}(G)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$ und

$$\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_{\bullet}(G)^n$$

Dann gilt

1. $\underline{u} \in \widehat{H}^{1,\tilde{q}}_{\bullet}(G)^n$ und $\nabla \underline{u} \in H^{k,\tilde{q}}(G)^{n^2}$ für alle $1 < \tilde{q} < \infty$,
2. $\underline{u} \in \overline{C}^k(G)$,
3. $\Delta \underline{u} \;=\; \lambda \nabla \operatorname{div} \underline{u}$

Beweis. Nach Theorem 11.3 und Theorem 11.4 gilt mit $p := \operatorname{div} \underline{u}$

$$p \in B^q(G)$$

und

$$\lambda Z_q(p) \;=\; p$$

Für $\lambda = 0$ ist $\underline{u} = 0$. Für $\lambda \neq 0$ folgt aus Theorem 15.1 und 15.4 für alle $1 < \tilde{q} < \infty$

$$p \in H^{k,\tilde{q}}(G), \qquad Z_q(p) \;=\; Z_{\tilde{q}}(p)$$

Nach Lemma 12.1 bzw. 13.1 ist dann

$$\nabla \underline{u} \in H^{k,\tilde{q}}(G)^{n^2} \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

Wegen Theorem 7.9 bzw. 7.10 gilt auch

$$\underline{u} \in \widehat{H}^{1,\tilde{q}}_{\bullet}(G)^n \qquad \forall\, 1 < \tilde{q} < \infty$$

Aus den Einbettungssätzen von Sobolev (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) folgt

$$\underline{u} \in \overline{C}^k(G)$$

Wegen $k \geq 1$ gilt für $\underline{\phi} \in C_0^\infty(G)^n$

$$\left\langle \Delta \underline{u}, \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; -\left\langle \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; -\lambda \left\langle \operatorname{div} \underline{u}, \operatorname{div} \underline{\phi} \right\rangle_G \;=\; \lambda \left\langle \nabla \operatorname{div} \underline{u}, \underline{\phi} \right\rangle_G$$

Also

$$\Delta \underline{u} \;=\; \lambda \nabla \operatorname{div} \underline{u}$$

□

16 Explizite Lösungen für B_1 und $\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}$

Lemma 16.1. Sei $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -\frac{n}{2}$ und sei $\Omega = B_1$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}$. $f \in C^0(\overline{\Omega})$ sei eine in Ω harmonische Funktion und es gelte für alle $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ mit $\lambda x \in \Omega$

$$f(\lambda x) \;=\; \lambda^k f(x)$$

Definiere für $x \in \Omega$

$$v(x) \;:=\; \frac{1}{2n+4k}\,\left(|x|^2 - 1\right)\, f(x)$$

Dann gilt

$$v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega), \qquad \Delta v \;=\; f, \qquad v\Big|_{\partial\Omega} \;=\; 0.$$

Beweis. (a) Klar ist

$$v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega), \qquad v\Big|_{\partial\Omega} \;=\; 0$$

(b) Wir erhalten also für $x \in \Omega$ wegen der Eulerschen Identität

$$\begin{aligned}
\Delta v(x) \;&=\; \frac{1}{2n+4k}\Big[f(x)\,\Delta\left(|x|^2-1\right) \,+\, 2\,(\nabla f)(x)\,\nabla\left(|x|^2-1\right) \\
&\qquad\qquad + \left(|x|^2-1\right)\,\underbrace{\Delta f(x)}_{=0}\Big] \\
&=\; \frac{1}{2n+4k}\Big[f(x)\,2n \,+\, 2\sum_{i=1}^{n} 2\,(\partial_i f)(x)\,x_i\Big] \\
&=\; \frac{1}{2n+4k}\Big[2n\,f(x) \,+\, 4k\,f(x)\Big] \;=\; f(x)
\end{aligned}$$

□

Theorem 16.2. Sei $n \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq -\frac{n}{2} + 1$ und sei $\Omega = B_1$ oder $\Omega = \mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}$. $p \in \overline{C}^1(\Omega)$ sei eine in Ω harmonische Funktion und es gelte für alle $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ mit $\lambda x \in \Omega$

$$p(\lambda x) \;=\; \lambda^k p(x)$$

Definiere

$$\underline{u}(x) \;:=\; \frac{1}{2n+4(k-1)}\,\left(|x|^2-1\right)\,(\nabla p)(x)$$

Dann gilt

1. $\underline{u} \in C^0(\overline{\Omega})^n \cap C^\infty(\Omega)^n$, $\Delta\underline{u} \;=\; \nabla p$, $\underline{u}\Big|_{\partial\Omega} \;=\; 0$,

2. $\operatorname{div}\underline{u} = \begin{cases} \frac{1}{2}\,p & , \quad n=2 \\ \frac{1}{2+\frac{n-2}{k}}\,p & , \quad n \geq 3 \end{cases}$

Beweis. (a) Für $\lambda > 0$, $x \in \Omega$ mit $\lambda x \in \Omega$ ist

$$p(\lambda x) \;=\; \lambda^k\, p(x)$$

Durch Differenzieren nach x_i erhält man

$$(\partial_i p)(\lambda x)\,\lambda \;=\; \lambda^k\,(\partial_i p)(x)$$

das heißt

$$(\partial_i p)(\lambda x) \;=\; \lambda^{k-1}\,(\partial_i p)(x)$$

Es ist $\partial_i p \in C^0(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Also gilt nach Lemma 16.1

$$\underline{u} \in C^0(\overline{\Omega})^n \cap C^\infty(\Omega)^n$$

und

$$\Delta\underline{u} \;=\; \nabla p, \qquad \underline{u}\Big|_{\partial\Omega} \;=\; 0$$

(b) Weiter ist für $x \in \Omega$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\underline{u}(x) \;&=\; \frac{1}{2n+4(k-1)}\Big[\sum_{i=1}^n 2\,(\partial_i p)(x)\,x_i \;+\; \big(|x|^2-1\big)\underbrace{\sum_{i=1}^n (\partial_i\partial_i p)(x)}_{=0}\Big] \\
&=\; \frac{1}{n+2(k-1)}\underbrace{\sum_{i=1}^n (\partial_i p)(x)\,x_i}_{=kp(x)} \;=\; \frac{k}{n+2(k-1)}\,p(x)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 16.3. (a) Für den Fall der Einheitskugel $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir harmonisch homogene Polynome vom Grade $k \geq 1$. Wir bezeichnen eine Folge solcher Polynome mit (p_k) (beispielsweise könnte man $p_k(x) = x_1^k$ wählen). Auf p_k ist Theorem 16.2 anwendbar und wir setzen

$$\underline{u}_k(x) \;:=\; \frac{1}{2n+4(k-1)}\,\big(|x|^2-1\big)\,(\nabla p_k)(x)$$

Dann gilt also nach Theorem 16.2

$$\underline{u}_k \in C^0(\overline{B_1})^n \cap C^\infty(B_1)^n, \qquad \Delta\underline{u}_k \;=\; \nabla p_k \quad \text{in } B_1$$

und

$$\underline{u}_k\Big|_{\partial B_1} \;=\; 0, \qquad \operatorname{div}\underline{u}_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\,p_k & ,\quad n = 2 \\[2ex] \frac{1}{2+\frac{n-2}{k}}\,p_k & ,\quad n \geq 3 \end{cases} \qquad \text{in } B_1$$

Also für $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta\underline{u}_k \;=\; 2\,\nabla\operatorname{div}\underline{u}_k \qquad \text{falls } n = 2$$

und

$$\Delta \underline{u}_k \;=\; \left(2 + \frac{n-2}{k}\right) \nabla \mathrm{div}\, \underline{u}_k \qquad \text{falls } n \geq 3$$

Im Falle $n \geq 3$ erhält man also eine Folge $(\underline{u}_k)$ von klassischen Eigenfunktionen zu Eigenwerten, die gegen 2 konvergieren.

(b) Da offensichtlich

$$\underline{u}_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \underline{u}_k\Big|_{\partial B_1} \;=\; 0$$

folgt nach Theorem 5.5 für jedes $1 < q < \infty$

$$\underline{u}_k \in H_0^{1,q}(B_1)^n \;=\; \widehat{H}_\bullet^{1,q}(B_1)^n$$

und für $\underline{\phi} \in C_0^\infty(B_1)$

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla \underline{u}_k, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_{B_1} \;&=\; -\left\langle \Delta \underline{u}_k, \underline{\phi} \right\rangle_{B_1} \;=\; -\left(2 + \frac{n-2}{k}\right) \left\langle \nabla \mathrm{div}\, \underline{u}_k, \underline{\phi} \right\rangle_{B_1} \\
&=\; \left(2 + \frac{n-2}{k}\right) \left\langle \mathrm{div}\, \underline{u}_k, \mathrm{div}\, \underline{\phi} \right\rangle_{B_1}
\end{aligned}$$

Da

$$H_0^{1,q'}(B_1)^n \;=\; \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(B_1)^n$$

gilt auch

$$\left\langle \nabla \underline{u}_k, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_{B_1} \;=\; \left(2 + \frac{n-2}{k}\right) \left\langle \mathrm{div}\, \underline{u}_k, \mathrm{div}\, \underline{\phi} \right\rangle_{B_1} \qquad \forall\, \underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(B_1)^n$$

und $(\underline{u}_k)$ ist auch eine Folge von schwachen Eigenfunktionen zu den gleichen Eigenwerten.

Bemerkung 16.4. (a) Für den Fall des Äußeren der Einheitskugel $\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}$ betrachten wir die Grundlösung

$$S(z) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} \, |z|^{2-n} & , \quad z \neq 0, \; n \geq 3 \\[2ex] -\frac{1}{2\pi} \, \ln |z| & , \quad z \neq 0, \; n = 2 \\[2ex] 0 & , \quad z = 0, \; n \geq 2 \end{cases}$$

und deren Ableitungen. Falls $n \geq 3$ definieren wir für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\underline{u}_\alpha(x) \;:=\; \frac{1}{2n + 4(2 - n - |\alpha| - 1)} \left(|x|^2 - 1\right) (\nabla D^\alpha S)(x)$$

Falls $n = 2$, so betrachten wir nur $|\alpha| \geq 1$. Nach Theorem 16.2 ist dann für die betrachteten α

$$\underline{u}_\alpha \in C^0(\mathbb{R}^n \backslash B_1)^n \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n, \qquad \underline{u}_\alpha\Big|_{\partial B_1} \;=\; 0$$

und

$$\Delta\underline{u}_\alpha \;=\; \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|}\right)\nabla \mathrm{div}\,\underline{u}_\alpha \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}$$

(b) Wie man sich leicht überlegt, ist für die betrachteten α

$$\underline{u}_\alpha \in L^q(B_r\backslash\overline{B_1})^n \qquad \forall\, 1 < q < \infty \quad \forall\, r > 0$$

und

$$\nabla\underline{u}_\alpha \in L^q(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1})^{n^2} \quad \text{für} \begin{cases} 1 < q < \infty & , \text{ falls } |\alpha| \geq 2,\ n \geq 2 \\ \frac{n}{n-1} < q < \infty & , \text{ falls } |\alpha| = 1,\ n \geq 2 \\ \frac{n}{n-2} < q < \infty & , \text{ falls } \alpha = 0,\ n \geq 3 \end{cases}$$

Für $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{supp}(\eta) \subset B_R$ $(R > 1)$ ist mit dem entsprechenden q

$$\eta\underline{u}_\alpha \in H^{1,q}(B_R\backslash\overline{B_1})^n \cap C^0(\overline{B_R}\backslash B_1)^n$$

und

$$\eta\underline{u}_\alpha\Big|_{\partial B_R \cup \partial B_1} \;=\; 0$$

Also gilt nach Theorem 5.5

$$\eta\underline{u}_\alpha \in H_0^{1,q}(B_R\backslash\overline{B_1})^n$$

und somit auch

$$\eta\underline{u}_\alpha \in H_0^{1,q}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1})^n$$

Das bedeutet

$$\underline{u}_\alpha \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1})^n \quad \text{für} \begin{cases} 1 < q < \infty & , \text{ falls } |\alpha| \geq 2,\ n \geq 2 \\ \frac{n}{n-1} < q < \infty & , \text{ falls } |\alpha| = 1,\ n \geq 2 \\ \frac{n}{n-2} < q < \infty & , \text{ falls } \alpha = 0,\ n \geq 3 \end{cases}$$

(c) Falls $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \geq 2$, so gilt für $\underline{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1})^n$

$$\begin{aligned} \langle \nabla\underline{u}_\alpha, \nabla\underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}} &= -\langle \Delta\underline{u}_\alpha, \underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}} \\ &= -\left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|}\right)\langle \nabla\mathrm{div}\,\underline{u}_\alpha, \underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}} \\ &= \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|}\right)\langle \mathrm{div}\,\underline{u}_\alpha, \mathrm{div}\,\underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}} \end{aligned}$$

Somit gilt auch

$$\langle \nabla\underline{u}_\alpha, \nabla\underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}} \;=\; \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|}\right)\langle \mathrm{div}\,\underline{u}_\alpha, \mathrm{div}\,\underline{\phi}\rangle_{\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1}}$$

für alle $\underline{\phi} \in \widehat{H}_0^{1,q'}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n$.

(d) Sei φ_r wie in Theorem 2.7 (d.h. $r > 1$). Für $|\alpha| \geq 2$ und $i = 1, \ldots, n$ ist dann

$$\langle \nabla u_{\alpha i}, \nabla \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}} \; = \; \lim_{\rho \to \infty} \langle \nabla u_{\alpha i}, \nabla \varphi_r \rangle_{B_\rho \backslash \overline{B_1}} \; =$$

$$= \lim_{\rho \to \infty} \left[-\langle \Delta u_{\alpha i}, \varphi_r \rangle_{B_\rho \backslash \overline{B_1}} + \int\limits_{\partial B_\rho} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j u_{\alpha i})(z) \underbrace{\varphi_r(z)}_{=1\,(\rho > 2r)} \frac{z_j}{|z|} \, d\omega_z \right]$$

$$\stackrel{(a)}{=} \lim_{\rho \to \infty} \left[-\left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \right) \langle \partial_i \mathrm{div}\, u_\alpha, \varphi_r \rangle_{B_\rho \backslash \overline{B_1}} + \int\limits_{\partial B_\rho} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j u_{\alpha i})(z) \frac{z_j}{|z|} \, d\omega_z \right]$$

$$= \lim_{\rho \to \infty} \left[\left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \right) \langle \mathrm{div}\, u_\alpha, \partial_i \varphi_r \rangle_{B_\rho \backslash \overline{B_1}} - \right.$$

$$\left. - \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \right) \int\limits_{\partial B_\rho} \mathrm{div}\, u_\alpha \frac{z_i}{|z|} \, d\omega_z + \int\limits_{\partial B_\rho} \sum_{j=1}^{n} (\partial_j u_{\alpha i})(z) \frac{z_j}{|z|} \, d\omega_z \right]$$

Weil für große $|z|$ und $l, m = 1, \ldots, n$ gilt

$$|(\partial_l u_{\alpha m})(z)| \; \leq \; C(n, \alpha) \, |z|^2 \, |z|^{2-n-2-|\alpha|} \; = \; C(n, \alpha) \, |z|^{2-n-|\alpha|}$$

so folgt

$$\lim_{\rho \to \infty} \int\limits_{\partial B_\rho} |(\partial_l u_{\alpha m})(z)| \, d\omega_z \; \leq \; \tilde{C}(n, \alpha) \lim_{\rho \to \infty} \rho^{n-1+2-n-|\alpha|} \; = \; 0 \quad (\text{für } |\alpha| \geq 2)$$

Also

$$\langle \nabla u_{\alpha i}, \nabla \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}} \; = \; \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \right) \langle \mathrm{div}\, u_\alpha, \partial_i \varphi_r \rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}}$$

(e) Nach Theorem 2.5 - 2.7 folgt dann aus (c) und (d) für $|\alpha| \geq 2$

$$\left\langle \nabla \underline{u}_\alpha, \nabla \underline{\phi} \right\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}} \; = \; \left(2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \right) \left\langle \mathrm{div}\, \underline{u}_\alpha, \mathrm{div}\, \underline{\phi} \right\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}}$$

für alle $\underline{\phi} \in \widehat{H}_\bullet^{1,q'}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n$.

Das bedeutet, dass $\{\underline{u}_\alpha \, : \, |\alpha| \geq 2\}$ eine abzählbare Menge von schwachen Eigenfunktionen zu Eigenwerten, die 2 als einzigen Häufungspunkt besitzen, ist. Insbesondere folgt aus

$$2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \; \neq \; 1 \qquad \forall \, |\alpha| \geq 1$$

und nach Theorem 11.3 und 11.4

$$\mathrm{div}\, \underline{u}_\alpha \in B^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}) \qquad \forall \, |\alpha| \geq 2 \quad \forall \, 1 < q < \infty$$

und somit

$$D^\alpha S \in B^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}) \qquad \forall \, |\alpha| \geq 2 \quad \forall \, 1 < q < \infty$$

(f) Sei nun $n \geq 2$ und $\frac{n}{n-1} < q < \infty$. Dann gilt nach Lemma 4.4 für $j = 1, \ldots, n$

$$\partial_j S \notin B^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}), \qquad \partial_j S \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})$$

Also ist auch für $|\alpha| = 1$

$$\operatorname{div} \underline{u}_\alpha \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}) \Big\backslash B^q(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})$$

Nach (b) gilt

$$\underline{u}_\alpha \in \widehat{H}^{1,q}_\bullet(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n$$

Würde für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $\underline{\phi} \in \widehat{H}^{1,q'}_\bullet(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n$ gelten

$$\big\langle \nabla \underline{u}_\alpha, \nabla \underline{\phi} \big\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}} \;=\; \lambda \big\langle \operatorname{div} \underline{u}_\alpha, \operatorname{div} \underline{\phi} \big\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}}$$

so folgte für $\underline{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1})^n$

$$\big\langle \Delta \underline{u}_\alpha, \underline{\phi} \big\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}} \;=\; \lambda \big\langle \nabla \operatorname{div} \underline{u}_\alpha, \underline{\phi} \big\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}}$$

also

$$\Delta \underline{u}_\alpha \;=\; \lambda \, \nabla \operatorname{div} \underline{u}_\alpha$$

Nach (a) wäre dann

$$2 + \frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \;=\; \lambda$$

Nach Theorem 11.3 und 11.4 wissen wir jedoch

$$\lambda \;=\; 1$$

Das heißt

$$\frac{n-2}{2-n-|\alpha|} \;=\; 1$$

also $|\alpha| = 0$, ein Widerspruch!

Also ist $\underline{u}_\alpha$ für $|\alpha| = 1$ klassische Lösung der Eigenwertgleichung, aber keine schwache Lösung.

Teil III: Greensche Funktion und reproduzierender Kern

17 Existenz der Greenschen Funktion

Lemma 17.1. Sei $n \geq 2$ und sei

$$S(z) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_n} |z|^{2-n} & , \quad z \neq 0,\ n \geq 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \ln|z| & , \quad z \neq 0,\ n = 2 \\ 0 & , \quad z = 0,\ n \geq 2 \end{cases}$$

die **Fundamentallösung** zum Laplace-Operator. Dann gilt für jedes $R > 0$ und alle $f \in C^0(\overline{B_R})$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial B_\varepsilon} |S(z)\, f(z)|\, d\omega_z &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^n \int_{\partial B_\varepsilon} (\partial_i S)(z)\, f(z)\, \frac{z_i}{|z|}\, d\omega_z &= -f(0) \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} |S(z)|\, dz &= 0 \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_\varepsilon} |(\partial_j S)(z)|\, dz &= 0 \end{aligned}$$

Beweis. (a) Es gibt $M < \infty$ mit $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \overline{B_R}$. Daraus folgt

$$\int_{\partial B_\varepsilon} |S(z) f(z)|\, d\omega_z \leq \left\{ \begin{array}{ll} M\,\varepsilon^{n-1} \frac{1}{n-2} \varepsilon^{2-n} & , \quad n \geq 3 \\ M\,\varepsilon \Big| \ln|\varepsilon| \Big| & , \quad n = 2 \end{array} \right\} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

(b) Für jedes $n \geq 2$ gilt

$$(\partial_i S)(z) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{z_i}{|z|^n}$$

Deshalb ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_{\partial B_\varepsilon} (\partial_i S)(z)\, f(z)\, \frac{z_i}{|z|}\, d\omega_z &= -\varepsilon^{n-1} \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{n-1}} \varepsilon^{1-n} f(\varepsilon\xi)\, d\omega_\xi \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{S_{n-1}} f(\varepsilon\xi)\, d\omega_\xi \\ &\to -f(0) \quad (\varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

(c) Sei $n \geq 3$. Dann ist

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{B_\varepsilon} |S(z)|\, dz = \frac{1}{(n-2)\varepsilon} \int_0^\varepsilon r^{n-1+2-n}\, dr = \frac{1}{(n-2)2} \varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

(d) Sei $n = 2$. Dann gilt für $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_\varepsilon} |S(z)|\,dz &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon r\,\ln r\,dr \;=\; -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}r^2\,\ln r\Big|_0^\varepsilon - \int_0^\varepsilon \frac{1}{2}r^2\,\frac{1}{r}\,dr\right]\\ &= -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{2}\varepsilon^2\,\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2\right] \;=\; -\frac{1}{2}\varepsilon\,\ln\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon \;\to 0 \quad (\varepsilon\to 0)\end{aligned}$$

(e) Für $n \geq 2$ gilt

$$\int_{B_\varepsilon} |(\partial_j S)(z)|\,dz \;\leq\; \int_0^\varepsilon r^{n-1+1-n}\,dr \;=\; \varepsilon \;\to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$$

□

Theorem 17.2. Sei $n \geq 2$ und sei S die Fundamentallösung zum Laplace-Operator. Dann gilt für jedes $z \neq 0$

$$\Delta S(z) = 0$$

und für alle $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$u(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} S(x-y)\,[-\Delta u(y)]\,dy$$

Beweis. siehe [SiDGL, Satz 3.1] □

Theorem 17.3. Sei $n \geq 2$ und sei S die Fundamentallösung zum Laplace-Operator. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^1$. Angenommen, es ist $h : G \times \overline{G} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in G$ gilt

$$h(x,\cdot) \in \overline{C}^1(G) \cap C^2(G), \qquad \Delta_y h(x,y) = 0$$

Setze

$$\phi(x,y) := S(x-y) + h(x,y)$$

Es gelte $u \in \overline{C}^1(G) \cap C^2(G)$ und $f := -\Delta u \in C^0(\overline{G})$. Dann gilt für $x \in G$

$$u(x) \;=\; \int_{\partial G}\left[\phi(x,y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial N} - u(y)\,\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial N_y}\right]\,d\omega_y + \int_G \phi(x,y)\,f(y)\,dy$$

(wobei $\frac{\partial}{\partial N}$ die Ableitung nach der äußeren Normalen in ∂G bezeichnet.)

Beweis. siehe [SiDGL, Satz 3.3] □

Theorem und Definition 17.4. Sei $n \geq 2$ und sei S die Fundamentallösung zum Laplace-Operator. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^3$. Dann existiert genau ein $h : G \times \overline{G} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in G$

$$h(x, \cdot) \in \overline{C}^2(G), \qquad \Delta_y h(x, y) = 0$$

und für $x \in G$, $y \in \partial G$ gilt

$$h(x, y) = -S(x - y)$$

Durch

$$\mathcal{G}(x, y) \; := \; S(x - y) + h(x, y)$$

definieren wir die **Greensche Funktion** zum Laplace-Operator in G.

Beweis. (a) Wähle $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & , \quad |t| \leq 1 \\ 1 & , \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

Setze für $r > 0$

$$S_r(z) := \rho\left(\frac{|z|}{r}\right) S(z)$$

Dann ist $S_r \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und daher

$$S_r \in H^{\infty, 2n}(G)$$

Für $x \in G$ wähle $0 < r_x \leq \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x, G)$. Wegen Theorem 2.9 gibt es $f_{r_x}(x, \cdot) \in H_0^{1,2n}(G)$ mit

$$\langle \nabla_y f_{r_x}(x, \cdot), \nabla\varphi \rangle_G \; = \; \langle \nabla_y S_{r_x}(x - \cdot), \nabla\varphi \rangle_G \qquad \forall\, \varphi \in H_0^{1,(2n)'}(G)$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ folgt

$$\langle \nabla_y f_{r_x}(x, \cdot), \nabla\varphi \rangle_G \; = \; -\langle \Delta_y S_{r_x}(x - \cdot), \varphi \rangle_G$$

Nach Theorem 7.4 gilt wegen $\partial G \in C^3$ also

$$f_{r_x}(x, \cdot) \in H_0^{1,2n}(G) \cap H^{3,2n}(G)$$

Wegen $3 - \frac{n}{2n} = 2 + \frac{1}{2}$ folgt nach den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319])

$$f_{r_x}(x, \cdot) \in \overline{C}^2(G) \qquad \forall\, x \in G$$

Nach dem Weylschen Lemma folgt weiter

$$\Delta_y \Big[f_{r_x}(x, y) - S_{r_x}(x - y) \Big] \; = \; 0 \qquad \forall\, x, y \in G$$

Aus Theorem 5.8 erhalten wir außerdem

$$f_{r_x}(x, y) = 0 \qquad \forall\, x \in G \quad \forall\, y \in \partial G$$

Setze

$$h(x,y) \;:=\; f_{r_x}(x,y) - S_{r_x}(x-y)$$

Dann sind alle Behauptungen des Satzes erfüllt.

(b) Seien $h^{(1)}$ und $h^{(2)}$ zwei Funktionen mit den obigen Eigenschaften. Für ein festes $x_0 \in G$ gilt

$$h^{(1)}(x_0,\cdot)\Big|_{\partial G} = h^{(2)}(x_0,\cdot)\Big|_{\partial G}$$

und

$$\Delta_y\Big[h^{(1)}(x_0,y) - h^{(2)}(x_0,y)\Big] = 0 \quad \forall\, y \in \partial G$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann

$$h^{(1)} = h^{(2)}$$

□

Lemma 17.5. Sei $n \geq 2$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^3$. Dann gilt für die Greensche Funktion

$$\mathcal{G}(x,y) \;=\; \mathcal{G}(y,x) \qquad \text{für alle } x,y \in G$$

Beweis. (nach [He, S. 238])

Seien $x_1, x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$. Sei $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x_1) \subset G$, $B_\varepsilon(x_2) \subset G$ und

$$B_\varepsilon(x_1) \cap B_\varepsilon(x_2) = \emptyset$$

Dann folgt aus der zweiten Greenschen Formel

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; \int\limits_{G\setminus(B_\varepsilon(x_1)\cup B_\varepsilon(x_2))} \big[\mathcal{G}(x_1,y)\, \underbrace{\Delta_y \mathcal{G}(x_2,y)}_{=0} - \mathcal{G}(x_2,y)\, \underbrace{\Delta_y \mathcal{G}(x_1,y)}_{=0}\big]\, dy \\
&=\; \int\limits_{\partial G} \big[\underbrace{\mathcal{G}(x_1,y)}_{=0}\, \frac{\partial}{\partial N_y}\mathcal{G}(x_2,y) \;-\; \underbrace{\mathcal{G}(x_2,y)}_{=0}\, \frac{\partial}{\partial N_y}\mathcal{G}(x_1,y)\big]\, d\omega_y \\
&\quad - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_1)} \sum_{i=1}^n \big[\mathcal{G}(x_1,y)\, \partial_{y_i}\mathcal{G}(x_2,y)\, \frac{y_i}{|y|} \;-\; \mathcal{G}(x_2,y)\, \partial_{y_i}\mathcal{G}(x_1,y)\, \frac{y_i}{|y|}\big]\, d\omega_y \\
&\quad - \int\limits_{\partial B_\varepsilon(x_2)} \sum_{i=1}^n \big[\mathcal{G}(x_1,y)\, \partial_{y_i}\mathcal{G}(x_2,y)\, \frac{y_i}{|y|} \;-\; \mathcal{G}(x_2,y)\, \partial_{y_i}\mathcal{G}(x_1,y)\, \frac{y_i}{|y|}\big]\, d\omega_y
\end{aligned}$$

Für $\varepsilon \to 0$ erhalten wir aus Lemma 17.1

$$0 = -\mathcal{G}(x_2,x_1) + \mathcal{G}(x_1,x_2)$$

□

Lemma 17.6. Sei $n \geq 2$, $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^3$. Dann gilt für die Greensche Funktion $\mathcal{G}(x,y) = S(x-y) + h(x,y)$ und für alle $i, j = 1, \ldots, n$

1. $\partial_{x_i} h \in L^q(G \times G)$
2. $\partial_{x_j}\partial_{x_i} h \in L^q(G \times G)$
3. $\partial_{y_j}\partial_{x_i} h \in L^q(G' \times G)$ für alle $G' \subset\subset G$
4. $\partial_{x_i} h \in C^0(G \times \overline{G})$

Beweis. (a) Sei $x \in G$ und $r_x := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x, G)$. Wie man im Beweis von Theorem 17.4 sehen kann, gilt

$$\langle \nabla_y f_{r_x}(x,\cdot), \nabla\varphi \rangle_G \;=\; \langle \nabla_y S_{r_x}(x-\cdot), \nabla\varphi \rangle_G \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Nach Theorem 7.9 folgt

$$\|\nabla_y f_{r_x}(x,\cdot)\|_{q;G} \;\leq\; C_q \, \|\nabla_y S_{r_x}(x-\cdot)\|_{q;G}$$

Weil $\big[(x,y) \mapsto \nabla_y S_{r_x}(x-y)\big] \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ und G beschränkt ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_{G\times G} |\partial_{y_i} h(x,y)|^q \; dx\, dy \;&\leq\; \int\limits_{G\times G} \Big[|\partial_{y_i} f_{r_x}(x,y)|^q + |\partial_{y_i} S_{r_x}(x-y)|^q \Big] \, dx\, dy \\
&\leq\; (C_q^q + 1) \int\limits_{G\times G} \underbrace{|\partial_{y_i} S_{r_x}(x-y)|^q}_{\leq M} \, dx\, dy \;<\; \infty
\end{aligned}$$

Also gilt nach Lemma 17.5

$$\begin{aligned}
\int\limits_{G\times G} |\partial_{x_i} h(x,y)|^q \; dx\, dy \;&=\; \int\limits_{G\times G} \big|\partial_{x_i} \big[h(y,x)\big]\big|^q \; dx\, dy \\
&=\; \int\limits_{G\times G} |(\partial_{y_i} h)(y,x)|^q \; dx\, dy \\
&\underset{\text{Fubini}}{=}\; \int\limits_{G\times G} |\partial_{y_i} h(x,y)|^q \; dx\, dy \;<\; \infty
\end{aligned}$$

(b) Wie in (a) gilt mit $r_x := \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x, G)$

$$\langle \nabla_y f_{r_x}(x,\cdot), \nabla\varphi \rangle_G \;=\; \langle \nabla_y S_{r_x}(x-\cdot), \nabla\varphi \rangle_G \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Also wegen $f_{r_x}(x,\cdot) \in \overline{C}^2(G)$

$$\langle \Delta_y f_{r_x}(x,\cdot), \varphi \rangle_G \;=\; \langle \Delta_y S_{r_x}(x-\cdot), \varphi \rangle_G \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(G)$$

Weil $C_0^\infty(G)$ dicht liegt in $L^{q'}(G)$, folgt

$$\langle \Delta_y f_{r_x}(x,\cdot), \varphi \rangle_G \;=\; \langle \Delta_y S_{r_x}(x-\cdot), \varphi \rangle_G \qquad \forall\, \varphi \in L^{q'}(G)$$

Wegen der $L^q - L^{q'}$-Dualität erhalten wir

$$\|\Delta_y f_{r_x}(x,\cdot)\|_{q;G} \;=\; \sup_{\varphi \in L^{q'}(G)} \frac{\langle \Delta_y f_{r_x}(x,\cdot), \varphi\rangle_G}{\|\varphi\|_{q'}} \;\leq\; \|\Delta_y S_{r_x}(x-\cdot)\|_{q;G} \quad \forall\, x \in G$$

Also

$$\int\limits_{G\times G} |\Delta_y f_{r_x}(x,y)|^q \, dx\, dy \;\;\leq\;\; \int\limits_{G\times G} |\Delta_y S_{r_x}(x-y)|^q \, dx\, dy \;<\; \infty$$

Nach Theorem 7.6 ist

$$\begin{aligned} \|f_{r_x}(x,\cdot)\|_{2,q;G} \quad &\leq \quad C(G,q,n)\left[\|\Delta_y f_{r_x}(x,\cdot)\|_{q;G} + \|f_{r_x}(x,\cdot)\|_{1,q;G}\right] \\ &\underset{\text{Poincaré}}{\leq} \quad \tilde{C}(G,q,n)\left[\|\Delta_y f_{r_x}(x,\cdot)\|_{q;G} + \|\nabla_y f_{r_x}(x,\cdot)\|_{q;G}\right] \end{aligned}$$

Somit ist nach (a)

$$\int\limits_{G\times G} \left|\partial_{y_j}\partial_{y_i} f_{r_x}(x,y)\right|^q \, dx\, dy \;<\; \infty$$

Also auch

$$\int\limits_{G\times G} \left|\partial_{y_j}\partial_{y_i} h(x,y)\right|^q \, dx\, dy \;<\; \infty$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \int\limits_{G\times G} \left|\partial_{x_j}\partial_{x_i} h(x,y)\right|^q \, dx\, dy \quad &= \quad \int\limits_{G\times G} \left|\partial_{x_j}\partial_{x_i}\big[h(y,x)\big]\right|^q \, dx\, dy \\ &= \quad \int\limits_{G\times G} \left|\partial_{x_j}\big[(\partial_{y_i} h)(y,x)\big]\right|^q \, dx\, dy \\ &= \quad \int\limits_{G\times G} \left|(\partial_{y_j}\partial_{y_i} h)(y,x)\right|^q \, dx\, dy \\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \quad \int\limits_{G\times G} \left|(\partial_{y_j}\partial_{y_i} h)(x,y)\right|^q \, dx\, dy \;<\; \infty \end{aligned}$$

(c) Sei $x_0 \in G$, $\delta > 0$ und $B_{16\delta}(x_0) \subset G$. Aus der Eindeutigkeit von h im Beweis von Theorem 17.4 folgt

$$h(x,y) \;=\; f_{r_x}(x,y) - S_{r_x}(x-y) \qquad \forall\, 0 < r_x \leq \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x,G)$$

Für $x \in B_{4\delta}(x_0)$ gilt deshalb

$$h(x,y) \;=\; f_\delta(x,y) - S_\delta(x-y)$$

Sei $x \in B_{2\delta}(x_0)$. Dann ist für jedes $\varphi \in C_0^\infty(G)$ und jedes $0 < |h| < \delta$

$$\big\langle \nabla_y\big[f_\delta(x+he_i,\cdot) - f_\delta(x,\cdot)\big], \nabla\varphi\big\rangle_G \;=\; \big\langle \nabla_y\big[S_\delta(x+he_i-\cdot) - S_\delta(x-\cdot)\big], \nabla\varphi\big\rangle_G$$

Nach Theorem 7.9 folgt

$$\|\nabla_y\big[f_\delta(x+he_i,\cdot)-f_\delta(x,\cdot)\big]\|_{q;G} \;\le\; C_q\,\|\nabla_y\big[S_\delta(x+he_i-\cdot)-S_\delta(x-\cdot)\big]\|_{q;G}$$

Weil $S_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und G beschränkt ist, ergibt sich mit dem Mittelwertsatz

$$\int_{B_{2\delta}(x_0)} \frac{1}{|h|^q}\,\|\nabla_y\big[S_\delta(x+he_i-\cdot)-S_\delta(x-\cdot)\big]\|_{q;G}^q\,dx \;\le\; C_1(\delta,x_0,G)<\infty$$

für jedes $0<|h|<\delta$. Daher ist

$$\int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} \left|\frac{\partial_{y_j}f_\delta(x+he_i,y)-\partial_{y_j}f_\delta(x,y)}{h}\right|^q dx\,dy \;<\; C_2(\delta,x_0,G,q)<\infty$$

für jedes $0<|h|<\delta$.

Aufgrund der schwachen Kompaktheit von L^q gibt es ein $g_{ij}\in L^q(B_{2\delta}(x_0)\times G)$ und eine Folge $(h_k)\subset\mathbb{R}$ mit $0<|h_k|<\delta$ und $h_k\to 0$ $(k\to\infty)$, so dass

$$\int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} \frac{\partial_{y_j}f_\delta(x+h_ke_i,y)-\partial_{y_j}f_\delta(x,y)}{h_k}\,\phi(x,y)\,dx\,dy \;\to$$

$$\to \int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} g_{ij}(x,y)\,\phi(x,y)\,dx\,dy \qquad (k\to\infty)$$

für alle $\phi\in C_0^\infty(B_{2\delta}(x_0)\times G)$.

Für $\phi\in C_0^\infty(B_\delta(x_0)\times G)$ gilt dann

$$\int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} \frac{\partial_{y_j}f_\delta(x+h_ke_i,y)-\partial_{y_j}f_\delta(x,y)}{h_k}\,\phi(x,y)\,dx\,dy \;=$$

$$= \int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} \partial_{y_j}f_\delta(x,y)\,\left[\frac{\phi(x-h_ke_i,y)-\phi(x,y)}{h_k}\right]dx\,dy \;\to$$

$$\underset{\text{nach (a)}}{\longrightarrow} \; - \int\limits_{B_{2\delta}(x_0)\times G} \partial_{y_j}f_\delta(x,y)\,\partial_{x_i}\phi(x,y)\,dx\,dy \qquad (k\to\infty)$$

Daher ist

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_\delta(x_0)\times G} g_{ij}(x,y)\,\phi(x,y)\,dx\,dy &= -\int\limits_{B_\delta(x_0)\times G} \partial_{y_j}f_\delta(x,y)\,\partial_{x_i}\phi(x,y)\,dx\,dy\\ &= \int\limits_{B_\delta(x_0)\times G} f_\delta(x,y)\,\partial_{y_j}\partial_{x_i}\phi(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

für alle $\phi\in C_0^\infty(B_\delta(x_0)\times G)$. Wir folgern

$$\partial_{y_j}\partial_{x_i}f_\delta = g_{ij}\in L^q(B_\delta(x_0)\times G)$$

und

$$\partial_{y_j}\partial_{x_i} h \in L^q(B_\delta(x_0) \times G)$$

(d) Für $G' \subset\subset G$ gibt es $N \in \mathbb{N}$, $\delta_i > 0$ und $x_i \in G$, so dass $B_{16\delta_i}(x_i) \subset G$ und

$$G' \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\delta_i}(x_i)$$

bzw.

$$G' \times G \subset \left(\bigcup_{i=1}^{N} B_{\delta_i}(x_i)\right) \times G$$

Dann folgt $\partial_{y_j}\partial_{x_i} h \in L^q(G' \times G)$ aus (c) und einer zugehörigen Zerlegung der Eins.

(e) Nach (a), (b) und (d) gilt

$$\partial_{x_i} h \in H^{1,q}(G' \times G) \qquad \forall\, G' \subset\subset G \quad \forall\, 1 < q < \infty$$

Aus den Sobolevschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) folgt

$$\partial_{x_i} h \in C^0(G \times \overline{G})$$

$\square$

18 Existenz des reproduzierenden Kerns in $B^q(G)$

Theorem 18.1. Sei $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet. Es gelte $F^* \in B^{q'}(G)^*$. Dann existiert genau ein $h \in B^q(G)$ mit

$$F^*(\pi) = \langle h, \pi \rangle_G \qquad \text{für alle } \pi \in B^{q'}(G)$$

und mit der Konstanten C_q aus Theorem 3.8 gilt

$$(1 + C_q)^{-1} \|h\|_{q;G} \;\leq\; \sup_{0 \neq \pi \in B^{q'}(G)} \frac{F^*(\pi)}{\|\pi\|_{q'}} \;\leq\; \|h\|_{q;G}$$

Beweis. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert $\tilde{F}^* \in L^{q'}(G)^*$ mit

$$\tilde{F}^*\Big|_{B^{q'}(G)} = F^* \qquad \|\tilde{F}^*\| = \|F^*\|$$

Daher gibt es ein $f \in L^q(G)$ mit

$$\tilde{F}^*(g) = \langle f, g \rangle_G \qquad \forall\, g \in L^{q'}(G)$$

und

$$\|f\|_{q;G} = \|\tilde{F}^*\| = \|F^*\|$$

Nach Theorem 4.2 kann man zerlegen

$$f = \underbrace{\Delta s}_{\in A^q(G)} + \underbrace{h}_{\in B^q(G)}$$

und für $\pi \in B^{q'}(G)$ gilt

$$F^*(\pi) \;=\; \tilde{F}^*(\pi) \;=\; \langle f, \pi \rangle \;=\; \underbrace{\langle \Delta s, \pi \rangle}_{=0\,(4.1)} + \langle h, \pi \rangle \;=\; \langle h, \pi \rangle$$

Weiter folgt aus Theorem 3.8

$$\|\Delta s\|_{q;G} \;\leq\; C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)} \frac{\langle \Delta s, \Delta\phi \rangle}{\|\Delta\phi\|_{q'}} \;=\; C_q \sup_{0 \neq \phi \in \widehat{H}^{2,q'}_\bullet(G)} \frac{\langle f, \Delta\phi \rangle}{\|\Delta\phi\|_{q'}} \;\leq\; C_q \,\|f\|_{q;G}$$

und daraus

$$\|h\|_{q;G} \;\leq\; (1 + C_q)\,\|f\|_{q;G} \;=\; (1 + C_q)\,\|F^*\|$$

und

$$\|F^*\| \;\leq\; \|h\|_{q;G}$$

nach der Hölder-Ungleichung.

(b) Seien $h^{(1)}$, $h^{(2)} \in B^q(G)$ mit

$$\left\langle h^{(1)}, \pi \right\rangle_G = \left\langle h^{(2)}, \pi \right\rangle_G \qquad \text{für alle } \pi \in B^{q'}(G)$$

Dann ist nach Theorem 4.2

$$\left\langle h^{(1)}, g \right\rangle_G = \left\langle h^{(2)}, g \right\rangle_G \qquad \text{für alle } g \in L^{q'}(G)$$

und schließlich

$$h^{(1)} = h^{(2)}$$

fast überall. $\square$

Theorem und Definition 18.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet.

1. Sei $1 < q < \infty$. Dann existiert für jedes $x \in G$ ein eindeutiges
$$\mathcal{R}_q(x, \cdot) \in B^{q'}(G)$$
mit
$$p(x) \;=\; \int_G \mathcal{R}_q(x,y)\, p(y)\, dy \qquad \text{fast überall für jedes } p \in B^q(G)$$
Wir nennen die Abbildung
$$\mathcal{R}_q : G \times G \to \mathbb{R}$$
reproduzierender Kern von $B^q(G)$ für jedes $1 < q < \infty$.

2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für $1 < q, s < \infty$ gilt für alle $x,\ y \in G$
$$\mathcal{R}_q(x,y) \;=\; \mathcal{R}_s(x,y), \qquad \mathcal{R}_q(x,y) \;=\; \mathcal{R}_q(y,x)$$
Im Falle des beschränkten Gebietes können wir daher
$$\mathcal{R} \;:=\; \mathcal{R}_q$$
schreiben.

Beweis. (a) Für $p \in B^q(G)$ existiert nach dem Weylschen Lemma ein eindeutiges $\tilde{p} \in C^\infty(G)$ mit $\tilde{p} = p$ fast überall und $\Delta\tilde{p} = 0$. Wir identifizieren dieses $\tilde{p}$ mit der Äquivalenzklasse $p \in B^q(G)$. In diesem Sinne ist die Schreibweise $p \in B^q(G) \cap C^\infty(G)$ zu verstehen.

Sei $x \in G$. Für $p \in B^q(G)$ $(\cap C^\infty(G))$ und $r < \operatorname{dist}(x, \partial G)$ gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$\begin{aligned}
|p(x)| \;&\le\; \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r(x)} |p(y)|\, dy \;\le\; |B_r|^{-1}\, |B_r|^{\frac{q-1}{q}} \left(\int\limits_{B_r(x)} |p(y)|^q\, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\le\; \left(\frac{\omega_n r^n}{n}\right)^{-\frac{1}{q}} \|p\|_{q;G}
\end{aligned}$$

Für $r \to \operatorname{dist}(x, \partial G)$ erhalten wir

$$|p(x)| \;\le\; \left(\frac{\omega_n}{n}\right)^{-\frac{1}{q}} \Big[\operatorname{dist}(x, \partial G)\Big]^{-\frac{n}{q}} \|p\|_{q;G}$$

Deshalb ist für festes $x \in G$ die Abbildung

$$\Big[p \mapsto p(x)\Big] \;\in B^q(G)^*$$

Nach Theorem 18.1 gibt es genau ein $\mathcal{R}_q(x,\cdot) \in B^{q'}(G)$ mit

$$p(x) \;=\; \int_G \mathcal{R}_q(x,y)\,p(y)\,dy$$

fast überall für jedes $p \in B^q(G)$ $(\cap C^\infty(G))$

(b) Für x, $y \in G$ gilt

$$\mathcal{R}_q(x,y) \;=\; \int_G \mathcal{R}_{q'}(y,z)\,\mathcal{R}_q(x,z)\,dz \;=\; \int_G \mathcal{R}_q(x,z)\,\mathcal{R}_{q'}(y,z)\,dz \;=\; \mathcal{R}_{q'}(y,x)$$

Insbesondere für $q = 2$

$$\mathcal{R}_2(x,y) \;=\; \mathcal{R}_2(y,x)$$

(c) Sei nun $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann gilt nach dem Lemma von Weyl und Theorem 2.5

$$B^q(G) \;=\; \{h \in L^q(G) \,:\, \Delta h = 0\}$$

Ist $2 < t < \infty$, so ist $t' < 2 = 2'$. Nach der Hölderungleichung ist deshalb

$$\mathcal{R}_2(x,\cdot) \in B^{t'}(G)$$

und für $p \in B^t(G) \subset B^2(G)$ gilt fast überall

$$p(x) \;=\; \int_G \mathcal{R}_2(x,y)\,p(y)\,dy$$

Wegen der Eindeutigkeit in (a) folgt

$$\mathcal{R}_2(x,y) \;=\; \mathcal{R}_t(x,y) \qquad \forall\, 2 \le t < \infty$$

Ist $1 < t < 2$, so ist $2 < t' < \infty$ und daher nach (b)

$$\mathcal{R}_t(x,y) \;=\; \mathcal{R}_{t'}(y,x) \;=\; \mathcal{R}_2(y,x) \;=\; \mathcal{R}_2(x,y)$$

$\square$

19 Ein Zusammenhang zwischen der Greenschen Funktion und dem reproduzierenden Kern

Theorem 19.1 Seien $n \geq 2$, $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1 + \frac{n}{q}$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial G \in C^{2+k}$. Sei

$$\mathcal{G}(x,y) = S(x-y) + h(x,y)$$

die Greensche Funktion zum Laplace-Operator in G und sei $\mathcal{R}$ der reproduzierende Kern in $B^q(G)$. Dann gilt

$$Z_q(p)(x) \;=\; p(x) \;+\; \sum_{i=1}^n \int_G p(y)\, \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\, dy \qquad \text{f.ü. für } p \in B^q(G)$$

Insbesondere ist

$$\sum_{i=1}^n \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y) \;+\; \frac{1}{2}\,\mathcal{R}(x,y)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. (a) Zunächst nehmen wir an, dass $p \in H^{k,q}(G) \cap B^q(G)$. Nach Lemma 13.1 gilt

$$\underline{u} := \underline{T}_q(p) \in \overline{C}^1(G)^n, \qquad \nabla \underline{u} \in H^{k,q}(G)^{n^2}, \qquad \Delta \underline{u} = \nabla p$$

Nach den Sobolvschen Einbettungssätzen (siehe z.B. [Alt, Satz 8.13, S.319]) ist sogar

$$p \in \overline{C}^1(G), \qquad \underline{u} \in \overline{C}^2(G)^n$$

Wegen Theorem 5.8 gilt

$$\underline{u}\Big|_{\partial G} = 0$$

und daher nach Theorem 17.3

$$u_i(x) \;=\; \int_G \mathcal{G}(x,y)\,(-\Delta u_i)(y)\,dy \;=\; \int_G \Big[S(x-y) + h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy$$

Für $r > 0$ betrachten wir S_r aus dem Beweis von Theorem 17.4. Setze

$$u_i^{(r)}(x) \;:=\; \int_G \Big[S_r(x-y) + h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy$$

Dann folgt aus Lemma 17.6 $u_i^{(r)} \in C^1(G)$ und

$$\partial_j u_i^{(r)}(x) \;=\; \int_G \Big[\partial_{x_j} S_r(x-y) + \partial_{x_j} h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |u_i^{(r)}(x) - u(x)| \;&\leq\; \int_G \left[1 - \rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)\right] |S(x-y)|\,|(\partial_i p)(y)|\,dy \\ &\leq\; \int_{B_{2r}(x)} |S(x-y)|\,\underbrace{|(\partial_i p)(y)|}_{\leq M}\,dy \;\leq\; M \int_{B_{2r}} |S(z)|\,dz \end{aligned}$$

Nach Lemma 17.1 ist $(u_i^{(r)})$ deshalb gleichmäßig konvergent in G gegen u für $(r \to 0)$. Weiterhin ist

$$\left|\partial_j u_i^{(r)}(x) \;-\; \int_G \Big[(\partial_j S)(x-y) + \partial_{x_j} h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy\right| \;=$$

$$= \;\left|\int_G (\partial_j S_r)(x-y)\,(\partial_i p)(y)\,dy \;-\; \int_G (\partial_j S)(x-y)\,(\partial_i p)(y)\,dy\right| \;\le$$

$$\le\; \int_{B_{2r}(x)} \frac{1}{r}\,\underbrace{\left|\rho'\left(\frac{|x-y|}{r}\right)\right|}_{\le C}\,|S(x-y)|\,\underbrace{|(\partial_i p)(y)|}_{\le M}\,dy \;+$$

$$+\;\int_{B_{2r}(x)} \underbrace{\left[1-\rho\left(\frac{|x-y|}{r}\right)\right]}_{\le 1}\,|(\partial_j S)(x-y)|\,\underbrace{|(\partial_i p)(y)|}_{\le M}\,dy \;\le$$

$$\le\; K\left[\frac{1}{r}\int_{B_{2r}} |S(z)|\,dz \;+\; \int_{B_{2r}} |(\partial_j S)(z)|\,dz\right]$$

Daher ist wieder nach Lemma 17.1 $(\partial_j u_i^{(r)})$ gleichmäßige Cauchyfolge in G für $(r \to 0)$. Nach Lemma A.16 existiert daher

$$\operatorname{div}\underline{u}(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\int_G \Big[\partial_{x_i} S(x-y) + \partial_{x_i} h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy$$

Wegen Lemma 17.6 können wir den Satz von Gauß anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\underline{u}(x) \;&=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{G\setminus B_\varepsilon(x)} \Big[\partial_{x_i} S(x-y) + \partial_{x_i} h(x,y)\Big]\,(-\partial_i p)(y)\,dy \\
&=\; \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G\setminus B_\varepsilon(x)} \Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\partial_{x_i} S(x-y)}_{=-\Delta S(x-y)=0} + \sum_{i=1}^{n}\partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\Big]\,p(y)\,dy \\
&\quad -\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial G} \Big[\partial_{x_i} S(x-y) + \partial_{x_i} h(x,y)\Big]\,p(y)\,N_i(y)\,d\omega_y \\
&\quad +\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Big[\partial_{x_i} S(x-y) + \partial_{x_i} h(x,y)\Big]\,p(y)\,\frac{y_i - x_i}{|y-x|}\,d\omega_y
\end{aligned}$$

Nach Definition der Greenschen Funktion gilt

$$S(x-y) + h(x,y) = 0 \qquad \forall\, y \in \partial G \quad \forall\, x \in G$$

und deswegen auch

$$\partial_{x_i}\big[S(x-y) + h(x,y)\big] = 0 \qquad \forall\, y \in \partial G \quad \forall\, x \in G$$

Wegen $p \in C^0(G)$ und $\partial_{x_i} h \in C^0(G \times \overline{G})$ folgt weiter

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_{x_i} h(x,y)\,p(y)\,\frac{y_i - x_i}{|y-x|}\,d\omega_y \;=\; 0$$

Schließlich gilt nach Lemma 17.1

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \partial_{x_i} S(x-y)\, p(y)\, \frac{y_i - x_i}{|y-x|}\, d\omega_y \;=$$

$$=\;\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial B_\varepsilon} -(\partial_i S)(z)\, p(x-z)\, \frac{z_i}{|z|}\, d\omega_z \;=\; p(x)$$

Zusammengefasst folgt

$$Z_q(p)(x) \;=\; \operatorname{div}\underline{u}(x) \;=\; p(x) + \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\, p(y)\, dy$$

für jedes $x \in G$ und alle $p \in H^{k,q}(G)\cap B^q(G)$.

(b) Sei nun $p \in B^q(G)$ beliebig. Dann identifizieren wir p und den eindeutigen harmonischen Repräsentanten $\tilde{p} \in C^\infty(G)$ mit $\tilde{p} = p$ fast überall in G. Setze

$$F(p)(x) \;:=\; \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\, p(y)\, dy \qquad \forall\, x \in G$$

Nach Theorem 9.1 gibt es eine Folge $(p_m) \subset H^{k,q}(G)\cap B^q(G)$ mit

$$\|p_m - p\|_{q;G} \to 0 \qquad (m\to\infty)$$

Nach (a) gilt

$$F(p_m) \;=\; Z_q(p_m) - p_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Weil Z_q ein beschränkter Operator ist, erhalten wir $F(p_m) \in L^q(G)$ und

$$\|F(p_m) - F(p_{m'})\|_{q;G} \;\le\; \|Z_q(p_m) - Z_q(p_{m'})\|_{q;G} + \|p_m - p_{m'}\|_{q;G} \;\to 0$$

Also gibt es $g \in L^q(G)$ mit

$$\|F(p_m) - g\|_{q;G} \;\to 0$$

und

$$g \;=\; Z_q(p) - p$$

Aus dem Satz von Riesz-Fischer erhalten wir die Existenz einer Teilfolge (die wir wieder mit (p_m) bezeichnen) mit $F(p_m) \to g$ punktweise fast überall in G. Weiter ist

$$\begin{aligned}
|F(p_m)(x) - F(p)(x)| \;&\le\; \int\limits_G \sum_{i=1}^{n} |\partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)|\, |p_m(y) - p(y)|\, dy \\
&\le\; \underbrace{\left(\int\limits_G \sum_{i=1}^{n} |\partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)|^{q'}\, dy\right)^{\frac{1}{q'}}}_{<\infty \text{ (Lemma 17.6)}} \|p_m - p\|_{q;G} \;\to 0
\end{aligned}$$

Deshalb gilt $F(p) = g \in L^q(G)$ und $F(p) = Z_q(p) - p$, das heißt

$$Z_q(p)(x) \;=\; p(x) + \int_G \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\, p(y)\, dy$$

für fast jedes $x \in G$ und alle $p \in B^q(G)$.

(c) Nach (b) gilt für $p \in B^q(G)$ und fast alle $x \in G$

$$\int_G \sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y)\, p(y)\, dy \;+\; \frac{1}{2}\int_G \mathcal{R}(x,y)\, p(y)\, dy \;=\; Z_q(p)(x) \;-\; \frac{1}{2}\, p(x)$$

und weil nach Theorem 13.5 $Z_q - \frac{1}{2}I$ ein kompakter Operator ist, gilt in diesem Sinne, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i}\partial_{x_i} h(x,y) \;+\; \frac{1}{2}\,\mathcal{R}(x,y)$$

ein kompakter Operator ist. □

20 Explizite Rechnung für B_1

Theorem 20.1. Sei $n \geq 2$. Sei S die Fundamentallösung zum Laplace-Operator. Dann ist

$$\mathcal{G}_{B_1} \;=\; S(x-y) + h_{B_1}(x,y)$$

mit

$$h_{B_1}(x,y) \;:=\; \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\,\omega_n}\left[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right]^{\frac{2-n}{2}} & , \quad \text{für } n \geq 3 \\[2ex] \frac{1}{2\pi}\,\ln\sqrt{1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2} & , \quad \text{für } n = 2 \end{cases}$$

die Greensche Funktion zum Laplace-Operator für die Einheitskugel B_1.

Beweis. Klar nach Definition 17.4. □

Theorem 20.2. Sei $n \geq 2$. Dann ist

$$\mathcal{R}_{B_1}(x,y) \;=\; \frac{(n-4)\,|x|^4\,|y|^4 \;+\; \big(8\langle x,y\rangle - 2n - 4\big)\,|x|^2\,|y|^2 \;+\; n}{\omega_n\left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{1+\frac{n}{2}}}$$

der reproduzierende Kern von $B^q(G)$ für $1 < q < \infty$.

Beweis. siehe [ABR, Theorem 8.13, S.157] und Theorem 18.2. □

Bemerkung 20.3. (a) Wir berechnen nun direkt den Operator

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} \partial_{x_i} h_{B_1}(x,y) \; + \; \frac{1}{2}\, \mathcal{R}_{B_1}(x,y)$$

aus Theorem 19.1. Für $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
\partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \quad &= \quad \frac{1}{2\omega_n} \Big[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \Big]^{-\frac{n}{2}} \big(-2x_i + |x|^2\, 2y_i \big) \\
&= \quad \frac{1}{\omega_n} \Big[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \Big]^{-\frac{n}{2}} \big(-x_i + |x|^2\, y_i \big)
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\omega_n\, \partial_{x_i} \partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \quad &= \quad -\frac{n}{2} \Big[\ldots \Big]^{-\frac{n}{2}-1} \big(-x_i + |x|^2\, y_i \big) \big(-2y_i + 2x_i\, |y|^2 \big) \; + \\
&\quad + \Big[\ldots \Big]^{-\frac{n}{2}} \big(-1 + 2x_i\, y_i \big)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
&\omega_n \Big[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \Big]^{\frac{n}{2}+1} \partial_{x_i} \partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \; = \\
&= \; \big(-x_i + |x|^2 y_i \big) \big(n y_i - n x_i |y|^2 \big) + \big(-1 + 2x_i y_i \big) \big(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \big) \; = \\
&= \; -n\, x_i\, y_i \; + \; n\, |x|^2\, y_i^2 \; + \; n\, x_i^2\, |y|^2 \; - \; n\, |x|^2\, |y|^2\, x_i\, y_i \; - \; 1 \; + \; 2x_i\, y_i \, + \\
&\quad + 2\langle x,y\rangle \; - \; 4x_i\, y_i\, \langle x,y\rangle \; - \; |x|^2\, |y|^2 \; + \; 2|x|^2\, |y|^2\, x_i\, y_i
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&\omega_n \Big[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \Big]^{\frac{n}{2}+1} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \; = \\
&= \; -n\, \langle x,y\rangle \; + \; n\, |x|^2\, |y|^2 \; + \; n\, |x|^2\, |y|^2 \; - \; n\, |x|^2\, |y|^2\, \langle x,y\rangle \; - \; n \; + \; 2\langle x,y\rangle \, + \\
&\quad + 2n\, \langle x,y\rangle \; - \; 4\langle x,y\rangle^2 \; - \; n\, |x|^2\, |y|^2 \; + \; 2|x|^2\, |y|^2\, \langle x,y\rangle \; = \\
&= \; (n+2)\, \langle x,y\rangle \; + \; n\, |x|^2\, |y|^2 \; + \; (2-n)\, |x|^2\, |y|^2\, \langle x,y\rangle \; - \; n \; - \; 4\langle x,y\rangle^2
\end{aligned}$$

Schließlich berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\omega_n \Big[1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2 |y|^2 \Big]^{\frac{n}{2}+1} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \; + \; \tfrac{1}{2}\, \mathcal{R}_{B_1}(x,y) \Big\} \; = \\
&= \; (n+2)\, \langle x,y\rangle \; + \; n\, |x|^2\, |y|^2 \; + \; (2-n)\, |x|^2\, |y|^2\, \langle x,y\rangle \; - \; n \; - \; 4\langle x,y\rangle^2 \, + \\
&\quad + (\tfrac{n}{2} - 2)\, |x|^4\, |y|^4 \; + \; 4\langle x,y\rangle\, |x|^2\, |y|^2 \; - \; (n+2)\, |x|^2\, |y|^2 \; + \; \tfrac{n}{2} \; = \\
&= \; (n+2)\langle x,y\rangle - \tfrac{n}{2} - 2|x|^2|y|^2 + (6-n)|x|^2|y|^2\langle x,y\rangle - 4\langle x,y\rangle^2 + (\tfrac{n}{2} - 2)|x|^4|y|^4 \\
&= \; \Big(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 \Big) \Big(-\tfrac{n}{2} + 2\langle x,y\rangle + (\tfrac{n}{2} - 2)|x|^2|y|^2 \Big)
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{y_i} h_{B_1}(x,y) \;+\; \frac{1}{2}\,\mathcal{R}_{B_1}(x,y) \;=\; \frac{-\frac{n}{2} + 2\langle x,y\rangle + (\frac{n}{2}-2)|x|^2|y|^2}{\omega_n\Big(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\Big)^{\frac{n}{2}}}$$

(b) Als Nächstes zeigen wir, dass der Integralkern

$$K_n(x,y) \;=\; \frac{-\frac{n}{2} + 2\langle x,y\rangle + (\frac{n}{2}-2)|x|^2|y|^2}{\omega_n\Big(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\Big)^{\frac{n}{2}}}$$

kompakt ist in $L^q(B_1)$. Dafür setzen wir

$$f(x,y) \;:=\; 1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2$$

und

$$g_n(x,y) \;:=\; -\frac{n}{2} + 2\langle x,y\rangle + \Big(\frac{n}{2}-2\Big)\,|x|^2|y|^2$$

(c) Für $n = 2$ ist

$$g_2(x,y) \;:=\; -1 + 2\langle x,y\rangle - |x|^2|y|^2 \;=\; -f(x,y)$$

Also ist

$$K_2(x,y) \;=\; -\frac{1}{2\pi}$$

als Hilbert-Schmidt-Kern kompakt.

(d) Es ist für $x, y \in \overline{B_1}$

$$\begin{aligned} g_3(x,y) \;&=\; -\frac{3}{2} + 2\langle x,y\rangle - \frac{1}{2}\,|x|^2|y|^2 \;=\; -\frac{1}{2} + \underbrace{\langle x,y\rangle}_{\le |x||y|} - \frac{1}{2}\,|x|^2|y|^2 + \langle x,y\rangle - 1 \\ &\le\; -\frac{1}{2}\,\underbrace{(|x|\,|y|-1)^2}_{\ge 0} + \underbrace{\langle x,y\rangle - 1}_{\le 0} \;\le 0 \end{aligned}$$

und für $n \ge 4$

$$g_n(x,y) \;\le\; -\frac{n}{2} + 2|x|\,|y| + \underbrace{\Big(\frac{n}{2}-2\Big)}_{\ge 0}|x|^2|y|^2 \;\le\; -\frac{n}{2} + 2 + \Big(\frac{n}{2}-2\Big) \;=\; 0$$

Weiter gilt

$$f(x,y) \;\ge\; 1 - 2|x|\,|y| + |x|^2|y|^2 \;=\; (1 - |x|\,|y|)^2 \;\ge 0$$

Somit folgt für $n \geq 3$ und $x, y \in \overline{B_1}$

$$\begin{aligned}
|K_n(x,y)| &= \frac{\frac{n}{2} - 2\langle x,y\rangle + (2-\frac{n}{2})|x|^2|y|^2}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 + \overbrace{|x|^2|y|^2 - 1}^{\leq 0} + \frac{n}{2}\left(1 - |x|^2|y|^2\right)}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&\leq \frac{1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 + \frac{n}{2}\left(1 - |x|\,|y|\right)\overbrace{(1 + |x|\,|y|)}^{\leq 2}}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&\leq \frac{1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 + n\left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{1}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n}{2}-1}} + \frac{n}{\omega_n \left(1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
|x-y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x,y\rangle \\
&= 1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 + |x|^2 - 1 + |y|^2 - |x|^2|y|^2 \\
&= 1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2 + |x|^2 - 1 + \underbrace{|y|^2}_{\leq 1}(1 - |x|^2) \\
&\leq 1 - 2\langle x,y\rangle + |x|^2|y|^2
\end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned}
|K_n(x,y)| &\leq \frac{1}{\omega_n\,|x-y|^{n-2}} + \frac{n}{\omega_n\,|x-y|^{n-1}} \\
&= \frac{|x-y| + n}{\omega_n\,|x-y|^{n-1}} \leq \frac{2+n}{\omega_n\,|x-y|^{n-1}}
\end{aligned}$$

und K_n ist als Schurscher Integralkern kompakt.

Anhang

A Kleine Hilfssätze und ihre Beweise

Lemma A.1. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $1 < q < \infty$. Es gelte $f, g \in H^{1,q}(G)$ und $\|f\|_{\infty;G} + \|\nabla f\|_{\infty;G} < \infty$. Dann gilt

$$f \cdot g \in H^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad \partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$$

Beweis. Es ist $f \cdot g \in L^q(G)$, weil f beschränkt ist.

Wegen $H = W$ [Me/Se] gibt es eine Folge $(g_k) \subset C^\infty(G) \cap H^{1,q}(G)$ mit

$$\|g - g_k\|_{1,q;G} \to 0$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(G)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_G f\, g\, \partial_i \phi\, dx \quad &\underset{\text{f beschränkt}}{=} \quad \lim_{k\to\infty} \int_G f\, g_k\, \partial_i \phi\, dx \\
&= \quad \lim_{k\to\infty} \int_G f\, \partial_i \underbrace{(g_k \phi)}_{\in C_0^\infty(G)}\, dx - \int_G f\, (\partial_i g_k)\, \phi\, dx \\
&= \quad \lim_{k\to\infty} -\int_G (\partial_i f)\, g_k\, \phi\, dx - \int_G f\, (\partial_i g_k)\, \phi\, dx \\
&= \quad -\int_G [(\partial_i f)\, g + f\, (\partial_i g)]\, \phi\, dx
\end{aligned}$$

Deshalb existiert

$$\partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g) \in L^q(G)$$

□

Lemma A.2. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $1 < q < \infty$. Es gelte $f \in H^{1,q}(G)$, $g \in C_0^\infty(G)$. Dann gilt

$$f \cdot g \in H_0^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad \partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$$

Beweis. Nach Lemma A.1 gilt $f \cdot g \in H^{1,q}(G)$ und $\partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$

Wegen $H = W$ [Me/Se] gibt es eine Folge $(f_k) \subset C^\infty(G) \cap H^{1,q}(G)$ mit

$$\|f - f_k\|_{1,q;G} \to 0$$

Dann gilt

$$\|f_k g - fg\|_{q;G} \quad \leq \quad \|g\|_{\infty;G} \|f_k - f\|_{q;G} \to 0$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f_k g - fg)\|_{q;G} \quad &\leq \quad \|(\nabla f_k - \nabla f)g\|_{q;G} + \|(f_k - f)\nabla g\|_{q;G} \\
&\leq \quad \|g\|_{\infty;G} \|(\nabla f_k - \nabla f)\|_{q;G} + \|\nabla g\|_{\infty;G} \|(f_k - f)\|_{q;G}
\end{aligned}$$

was gegen 0 konvergiert für $(k \to \infty)$. Wegen $f_k g \in C_0^\infty(G) \subset H_0^{1,q}(G)$ und der Abgeschlossenheit von $H_0^{1,q}(G)$ in $H^{1,q}(G)$ folgt die Behauptung. □

Lemma A.3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $1 < q < \infty$. Es gelte $f \in H^{1,q}(G)$, $g \in H_0^{1,q}(G)$ und $\|f\|_{\infty;G} + \|\nabla f\|_{\infty;G} < \infty$. Dann gilt

$$f \cdot g \in H_0^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad \partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$$

Beweis. Es gibt eine Folge $(g_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit

$$\|g - g_k\|_{1,q;G} \to 0$$

Daraus folgt

$$\|g_k f - fg\|_{q;G} \leq \|f\|_{\infty;G}\|g_k - g\|_{q;G} \to 0$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(g_k f - fg)\|_{q;G} &\leq \|(\nabla g_k - \nabla g)f\|_{q;G} + \|(g_k - g)\nabla f\|_{q;G} \\
&\leq \|f\|_{\infty;G}\|(\nabla g_k - \nabla g)\|_{q;G} + \|\nabla f\|_{\infty;G}\|(g_k - g)\|_{q;G}
\end{aligned}$$

was gegen 0 konvergiert für $(k \to \infty)$. Wegen $g_k f \in H_0^{1,q}(G)$ (Lemma A.2) und der Abgeschlossenheit von $H_0^{1,q}(G)$ in $H^{1,q}(G)$ folgt die Behauptung. □

Lemma A.4. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet mit $\partial G \in C^1$. Es gelte $f \in H^{1,q}(G)$, $g \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und $\|g\|_{\infty;G} + \|\nabla g\|_{\infty;G} < \infty$. Dann gilt

$$f \cdot g \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad \partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$$

Beweis. (a) Sei zunächst G beschränkt, das heißt $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G) = H_0^{1,q}(G)$ nach Lemma 2.5.

Nach Lemma A.1 erhalten wir $f \cdot g \in H^{1,q}(G)$ und $\partial_i(f \cdot g) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g)$

Sei ein beliebiges $1 < s < \infty$ gegeben. Dann ist

$$g \in L^s(G), \quad \nabla g \in L^s(G)$$

weil $|G| < \infty$ und $\|g\|_{\infty;G} + \|\nabla g\|_{\infty;G} < \infty$. Deshalb

$$\sup_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(G)} \frac{\langle \nabla g, \nabla \phi \rangle}{\|\nabla \phi\|_{s';G}} \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla g\|_{s;G} < \infty$$

Aus Theorem 7.9 können wir folgern

$$g \in H_0^{1,s}(G) \qquad \forall\, 1 < s < \infty$$

(b) Sei nun $1 < s < q$ beliebig, aber im Folgenden fest. Dann ist $f \in H^{1,s}(G)$ nach der Hölder-Ungleichung, weil G beschränkt ist. Sei $\lambda := \frac{q}{s} > 1$. Wegen

$$g \in H_0^{1,\frac{s\lambda}{\lambda-1}}(G)$$

gibt es eine Folge $(g_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit

$$\|g_k - g\|_{1,\frac{s\lambda}{\lambda-1};G} \to 0$$

Nach Lemma A.2 gilt

$$fg_k \in H_0^{1,s}(G)$$

und

$$\begin{aligned}
\|fg_k - fg\|_{s;G}^s &= \int_G |f|^s\,|g_k - g|^s\,dx \\
&\underset{\text{Hölder mit }\lambda}{\leq} \underbrace{\left(\int_G |f|^{s\lambda}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\int_G |g_k - g|^{\frac{s\lambda}{\lambda-1}}\,dx\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}_{\to 0} \;\to\; 0
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\|\nabla(fg_k - fg)\|_{s;G} \;\leq\; \|(\nabla f)(g_k - g)\|_{s;G} + \|f(\nabla g_k - \nabla g)\|_{s;G}$$

und

$$\|(\nabla f)(g_k - g)\|_{s;G}^s \;\leq\; \underbrace{\left(\int_G |\nabla f|^{s\lambda}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\int_G |g_k - g|^{\frac{s\lambda}{\lambda-1}}\,dx\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}}_{\to 0} \;\to\; 0$$

genau wie eben. Analog folgt auch

$$\|f(\nabla g_k - \nabla g)\|_{s;G} \to 0$$

Schließlich erhalten wir also

$$\|fg_k - fg\|_{1,s;G} \to 0$$

Daher ist

$$fg \in H_0^{1,s}(G)$$

und

$$\sup_{0 \neq \phi \in C_0^\infty(G)} \frac{\langle \nabla(fg), \nabla\phi\rangle}{\|\nabla\phi\|_{q';G}} \;\leq\; \|\nabla(fg)\|_{q;G} \;<\; \infty$$

Aus Theorem 7.9 folgt letztendlich

$$fg \in H_0^{1,q}(G)$$

(c) Sei nun G ein Außengebiet. Dann gilt

$$fg \in L^q(G)$$

weil $f \in L^q(G)$ und g beschränkt ist. Wegen $H = W$ [Me/Se] gibt es eine Folge $(f_k) \subset C^\infty(G) \cap H^{1,q}(G)$ mit

$$\|f - f_k\|_{1,q;G} \to 0$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(G)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_G f\, g\, \partial_i \phi\, dx \quad &\underset{\text{g beschränkt}}{=} \quad \lim_{k\to\infty} \int_G g\, f_k\, \partial_i \phi\, dx \\
&= \quad \lim_{k\to\infty} \int_G g\, \partial_i \underbrace{(f_k \phi)}_{\in C_0^\infty(G)}\, dx - \int_G g\, (\partial_i f_k)\, \phi\, dx \\
&= \quad \lim_{k\to\infty} - \int_G (\partial_i g)\, f_k\, \phi\, dx - \int_G g\, (\partial_i f_k)\, \phi\, dx \\
&= \quad - \int_G [(\partial_i f)\, g + f\, (\partial_i g)]\, \phi\, dx
\end{aligned}$$

Daher existiert

$$\partial_i (f \cdot g) = (\underbrace{\partial_i f}_{\in L^q}) g + \underbrace{f}_{\in L^q} (\partial_i g) \in L^q(G)$$

Sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann ist nach Definition von $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$:

$$\eta g \in H_0^{1,q}(G)$$

Für $K := \operatorname{supp}(\eta)$ gibt es ein $R > 0$ mit $K \subset B_R$ und $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_R$. Definiere $U := G \cap B_R$. Dann ist U ein beschränktes Gebiet mit $\partial U \in C^1$. Es gilt

$$\eta g\Big|_U \in H_0^{1,q}(U), \qquad f\Big|_U \in H^{1,q}(U)$$

Aus (b) erhalten wir

$$(\eta g) f|_U \in H_0^{1,q}(U)$$

und

$$\eta(gf) \in H_0^{1,q}(G)$$

Nach Definition von $\widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ erhalten wir schließlich

$$fg \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$$

□

Lemma A.5. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet. Sei $u \in L^q(G \cap B_R)$ für alle $R > 0$. Es gebe $f_i^{(R)} = \partial_i \big(u\big|_{G \cap B_R}\big) \in L^q(G \cap B_R)$ und $g_i = \partial_i \big(u\big|_{\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1}}\big) \in L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1})$ für $i = 1, \ldots, n$ (mit $\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1} \subset G$). Dann gilt

$$\nabla u \in L^q(G)$$

Beweis. Für $R' > R$ gilt

$$f_i^{(R')} = f_i^{(R)} \text{ fast überall in } G \cap B_R$$

Also können wir definieren:

$$f_i(x) := f_i^{(R)}(x) \text{ fast überall für } x \in G \cap B_R$$

Dann ist

$$f_i \in L^q(G \cap B_R) \qquad \forall\ R > 0$$

Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1})$ mit $\operatorname{supp}(\phi) \subset G \cap B_R$ Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle g_i, \phi\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1}} &= -\langle u, \partial_i \phi\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1}} = -\langle u, \partial_i \phi\rangle_{G \cap B_R} \\ &= -\langle f_i, \phi\rangle_{G \cap B_R} = \langle f_i, \phi\rangle_{\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1}}\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$f_i = g_i \quad \text{fast überall in } L^q(\mathbb{R}^n \backslash B_{R_1})$$

und

$$\partial_i u = f_i \in L^q(G)$$

$\square$

Lemma A.6. Für $n \geq 2$ sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $f(x) := \frac{x}{|x|^2}$. Dann ist $f^{-1} = f$ und

$$\det f'(x) = -\frac{1}{|x|^{2n}}$$

Beweis. nach einer Skizze von C.G. Simader

Offensichtlich ist $f^2 = \mathrm{id}$ und

$$\partial_j f_i(x) = \partial_j \left(\frac{x_i}{|x|^2} \right) = \frac{|x|^2 \delta_{ij} - 2x_i x_j}{|x|^4}$$

Also

$$\det f'(x) = \frac{(-2)^n}{|x|^{4n}} \begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_1 x_2 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1 x_n & \cdots & & x_n^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix}$$

Wir beweisen nun

$$\begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_1 x_2 & \cdots & x_1 x_n \\ x_1 x_2 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1 x_n & \cdots & & x_n^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix} = -\frac{|x|^{2n}}{(-2)^n}$$

$\underline{\underline{n = 2 :}}$ Der Fall $n = 2$ kann leicht berechnet werden

$\underline{\underline{n \to n + 1 :}}$ Sei die Behauptung richtig für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Für $x_1 = 0$ gilt $|x| = |(x_2, \ldots, x_{n+1})|$ und nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1x_n & \cdots & & x_n^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{|x|^2}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & x_n^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{|x|^2}{2}\left(-\frac{|x|^{2n}}{(-2)^n}\right) = -\frac{|x|^{2(n+1)}}{(-2)^{n+1}}$$

Für $x_1 \neq 0$ ist dagegen

$$\begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_1x_2 & \cdots & x_1x_{n+1} \\ x_1x_2 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_1x_{n+1} & \cdots & & x_{n+1}^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} x_1 - \frac{|x|^2}{2x_1} & x_1x_2 & \cdots & x_1x_{n+1} \\ x_2 & x_2^2 - \frac{|x|^2}{2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ x_{n+1} & x_2x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^2 - \frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix}$$

Wir ziehen nun das x_j-fache der 1. Spalte von der j-ten Spalte ab:

$$= x_1 \begin{vmatrix} x_1 - \frac{|x|^2}{2x_1} & \frac{x_2|x|^2}{2x_1} & \frac{x_3|x|^2}{2x_1} & \cdots & \frac{x_{n+1}|x|^2}{2x_1} \\ x_2 & -\frac{|x|^2}{2} & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{|x|^2}{2} & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ x_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & -\frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix}$$

Jetzt multiplizieren wir die erste Zeile mit x_1:

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & \frac{x_2|x|^2}{2} & \frac{x_3|x|^2}{2} & \cdots & \frac{x_{n+1}|x|^2}{2} \\ x_2 & -\frac{|x|^2}{2} & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -\frac{|x|^2}{2} & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ x_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & -\frac{|x|^2}{2} \end{vmatrix}$$

Indem wir die letzten n Spalten durch $\frac{|x|^2}{2}$ teilen, erhalten wir:

$$= \frac{|x|^{2n}}{2^n} \begin{vmatrix} x_1^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_2 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ x_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

Schließlich addieren wir noch das x_j-fache der j-ten Spalte zur ersten Spalte für $(j = 2, \dots, n)$:

$$= \frac{|x|^{2n}}{2^n} \begin{vmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - \frac{|x|^2}{2} & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ 0 & -1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{|x|^{2n}}{2^n} \frac{|x|^2}{2} (-1)^n = -\frac{|x|^{2(n+1)}}{(-2)^{n+1}}$$

□

Lemma A.7. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet mit $\mathbb{R}^n \backslash G \subset B_{\frac{R}{2}}$. Es gelte $1 < q < \infty$. Sei $u \in \widehat{H}^{2,q}_{\bullet}(G)$ und

$$\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \le \rho \le 1, \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{,falls } |x| \le R \\ 1 & \text{,falls } |x| \ge 2R \end{cases}$$

Dann gilt

$$\rho u \in \widehat{H}^{2,q}_{\bullet}(G)$$

und

$$\partial_i(\rho u) = (\partial_i \rho) u + \rho(\partial_i u)$$

$$\partial_j \partial_i(\rho u) = (\partial_j \partial_i \rho) u + (\partial_i \rho)(\partial_j u) + (\partial_j \rho)(\partial_i u) + \rho(\partial_j \partial_i u)$$

Beweis. (a)

$$\|\rho u\|_{q;G\cap B_r} \le \|u\|_{q;G\cap B_r} < \infty \qquad \forall\, r > 0$$

(b) Sei $\phi \in C_0^\infty(G)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_G \rho\, u\, \partial_i \phi\, dx &= \int_G u\, \partial_i \underbrace{(\rho \phi)}_{\in C_0^\infty(G)}\, dx - \int_G u\, (\partial_i \rho)\, \phi\, dx \\ &= -\int_G (\partial_i u)\, \rho\, \phi\, dx - \int_G u\, (\partial_i \rho)\, \phi\, dx \end{aligned}$$

Deshalb existiert

$$\partial_i(\rho u) = (\partial_i \rho) u + \rho(\partial_i u) \in L^q(G \cap B_r) \qquad \forall\, r > 0$$

(c) Sei $\phi \in C_0^\infty(G)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\int_G \rho\, u\, (\partial_j \partial_i \phi)\, dx &\overset{(b)}{=} -\int_G [\partial_i(\rho\, u)]\, \partial_j \phi\, dx \\
&\overset{(b)}{=} -\int_G (\partial_i u)\, \rho\, (\partial_j \phi)\, dx - \int_G u\, (\partial_i \rho)\, (\partial_j \phi)\, dx \\
&= -\int_G (\partial_i u)\, \partial_j \underbrace{(\rho\phi)}_{\in C_0^\infty(G)}\, dx + \int_G (\partial_i u)\, (\partial_j \rho)\, \phi\, dx \\
&\quad -\int_G u\, \partial_j \underbrace{[(\partial_i \rho)\phi]}_{\in C_0^\infty(G)}\, dx + \int_G u\, (\partial_j \partial_i \rho)\, \phi\, dx \\
&= \int_G [(\partial_j \partial_i \rho) u + (\partial_i \rho)(\partial_j u) + (\partial_j \rho)(\partial_i u) + \rho(\partial_j \partial_i u)]\, \phi\, dx
\end{aligned}$$

Daher existiert

$$\partial_j \partial_i(\rho u) = (\partial_j \partial_i \rho) u + (\partial_i \rho)(\partial_j u) + (\partial_j \rho)(\partial_i u) + \rho(\partial_j \partial_i u) \in L^q(G)$$

(d) Für $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\eta\rho \in C_0^\infty(G)$ und deshalb nach Definition von $\widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$

$$\eta(\rho u) = (\eta\rho) u \in H_0^{2,q}(G)$$

Also schließlich

$$\rho u \in \widehat{H}_\bullet^{2,q}(G)$$

□

Definition A.8 (Friedrichssche Glättung).

(i) Sei $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 0$, $j(x) = 0$ für $|x| \geq 1$, $j(x) = j(-x)$ und $\int\limits_{\mathbb{R}^n} j(x)\, dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ sei $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Mit einem geeigneten $\tilde{j} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ können wir außerdem annehmen, dass $j(x) = \tilde{j}(|x|)$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(ii) Sei $1 \leq q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^q(G)$. Setze

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in G \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann bezeichnen wir mit

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x - y) g(y)\, dy \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \varepsilon > 0$$

die **Friedrichssche Glättung**.

Wir können z.B.

$$\tilde{j}(t) := \begin{cases} c\,e^{-\frac{1}{1-t^2}} & , \quad |t| < 1 \\ 0 & , \quad |t| \geq 1 \end{cases}$$

wählen mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}$

Lemma A.9. Sei $1 < q < \infty$ und $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\langle f, g_\varepsilon \rangle = \langle f_\varepsilon, g \rangle \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

Beweis. Nach dem Satz von Fubini

$$\langle f_\varepsilon, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y) f(y)\, dy\, dx = \langle f, g_\varepsilon \rangle$$

$\square$

Lemma A.10. Sei $1 \leq q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in L^q(G)$ mit $\nabla f \in L^q(G)$. Sei $G' \subset G$ mit $d = \operatorname{dist}(G', \partial G) > 0$. Sei $0 < \varepsilon < d$. Dann gilt

$$(\partial_i f)_\varepsilon(x) = \Big[\partial_i (f_\varepsilon)\Big](x) \qquad \forall\, x \in G'$$

Beweis. Sei

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in G \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \Big[\partial_i (f_\varepsilon)\Big](x) &= \int_{B_\varepsilon(x)} \partial_{x_i} j_\varepsilon(x-y) g(y) dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(x)} \partial_{x_i} j_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\ &= -\int_{B_\varepsilon(x)} \partial_{y_i} j_\varepsilon(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(x-y) \partial_{y_i} f(y) dy \\ &= (\partial_i f)_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

$\square$

Lemma A.11. Sei $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gelte $f \in L^q(G)$. Dann gilt

1. $\|f_\varepsilon\|_{q;\mathbb{R}^n} \leq \|f\|_{q;G} \qquad \forall \varepsilon > 0$
2. $\|f_\varepsilon - f\|_{q;G} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0)$

Beweis. siehe [SiDGL, Satz 2.5] □

Lemma A.12. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion. Es sei $G_1 \subset G$ mit $d := \operatorname{dist}(G_1, \partial G) > 0$. Dann ist

$$u_\varepsilon(x) = u(x)$$

für jedes $x \in G_1$ und für alle $0 < \varepsilon < d$

Beweis.

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) \quad &= \quad \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(x-z)u(z)\,dz \;=\; \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(z-x)u(z)\,dz \\
&\underset{z=x+y}{=} \quad \int_{B_\varepsilon(0)} j_\varepsilon(y)u(x+y)\,dy \\
&= \quad \int_0^\varepsilon r^{n-1}\,\varepsilon^{-n}\,\tilde{j}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{S_{n-1}} u(x+r\xi)\,d\omega_\xi\,dr \\
&\underset{\text{MWE}}{=} \quad \int_0^\varepsilon r^{n-1}\,\varepsilon^{-n}\,\tilde{j}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) dr\,\omega_n\,u(x) \\
&= \quad u(x) \int_0^\varepsilon r^{n-1} \int_{S_{n-1}} j_\varepsilon(r\xi)\,d\omega_\xi\,dr \\
&= \quad u(x) \int_{B_\varepsilon(x)} j_\varepsilon(z)\,dz \;=\; u(x)
\end{aligned}$$

□

Lemma A.13. Sei $1 < q < \infty$ und seien $G, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gelte $f \in H_0^{1,q}(G)$ und $\varphi \in C_0^\infty(V)$. Dann gilt

$$\varphi \cdot f \in H_0^{1,q}(G \cap V)$$

Beweis. Nach Lemma A.1 gilt

$$f \cdot \varphi \in H^{1,q}(G) \quad \text{und} \quad \partial_i(f \cdot \varphi) = (\partial_i f)\varphi + f(\partial_i \varphi)$$

Sei $f_k \in C_0^\infty(G)$ mit

$$\|f_k - f\|_{1,q;G} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Definiere

$$g_k := \varphi f_k \in C_0^\infty(G \cap V)$$

Dann folgt

$$\|f_k\varphi - f\varphi\|_{q;G\cap V} \;\leq\; \|\varphi\|_\infty \|f_k - f\|_{q;G} \to 0$$

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f_k\varphi - f\varphi)\|_{q;G\cap V} \;&\leq\; \|(\nabla f_k - \nabla f)\varphi\|_{q;G\cap V} + \|(f_k - f)\nabla\varphi\|_{q;G\cap V} \\
&\leq\; \|\varphi\|_\infty \|(\nabla f_k - \nabla f)\|_{q;G} + \|\nabla\varphi\|_\infty \|(f_k - f)\|_{q;G}
\end{aligned}$$

was gegen 0 konvergiert für $(k \to \infty)$. □

Lemma A.14. Sei $1 < q < \infty$ und seien $G, G' \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es sei $\phi : G \to G'$ ein C^1-Diffeomorphismus mit $\phi \in \overline{C}^1(G;\mathbb{R}^n)$ und $\phi^{-1} \in \overline{C}^1(G';\mathbb{R}^n)$.

1. Ist $g \in C_0^0(G)$, so gilt $h := g \circ \phi^{-1} \in C_0^0(G')$.
2. Ist $g \in C^1(G) \cap H_0^{1,q}(G)$, so folgt $h := g \circ \phi^{-1} \in C^1(G') \cap H_0^{1,q}(G')$.

Beweis. (a) Sei $g \in C_0^0(G)$. Sei $x \in G'$ mit $h(x) \neq 0$. Dann gilt $g\left(\phi^{-1}(x)\right) \neq 0$. Das bedeutet $\phi^{-1}(x) \in \operatorname{supp}(g)$. Wir erhalten $x \in \phi\left(\operatorname{supp}(g)\right)$. Daraus folgt

$$\left\{x \in G' : h(x) \neq 0\right\} \subset \phi\left(\operatorname{supp}(g)\right)$$

und

$$\operatorname{supp}(h) \subset \phi\left(\operatorname{supp}(g)\right) \subset \phi(G) = G'$$

(b) Sei $g \in C^1(G) \cap H_0^{1,q}(G)$. Offensichtlich gilt $h \in C^1(G')$ und

$$(\partial_i h)(x) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k g)(\psi(x))(\partial_i \psi_k)(x)$$

wobei $\psi := \phi^{-1}$. Weiter ist

$$\int_{G'} |h(x)|^q \, dx \;=\; \int_G |g(y)|^q \underbrace{|\det \phi'(y)|}_{\text{beschränkt}} \, dy \;< \infty$$

und

$$\int_{G'} |\partial_i h(x)|^q \, dx \;=\; \int_G \Big| \sum_{k=1}^{n} (\partial_k g)(y) \underbrace{(\partial_i \psi_k)(\phi(y))}_{\text{beschränkt}} \Big|^q \underbrace{|\det \phi'(y)|}_{\text{beschränkt}} \, dy \;< \infty$$

Deshalb gilt

$$h \in H^{1,q}(G')$$

Wähle $g_k \in C_0^\infty(G)$ mit

$$\|g_k - g\|_{1,q;G} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

Definiere

$$h_k := g_k \circ \phi^{-1} \in C_0^1(G') \subset H_0^{1,q}(G')$$

Es folgt

$$\int_{G'} |h(x) - h_k(x)|^q \, dx \;=\; \int_G |g(y) - g_k(y)|^q \underbrace{|\det \phi'(y)|}_{\text{beschränkt}} \, dy \;\to 0$$

und

$$\int_{G'} |\partial_i h(x) - \partial_i h_k(x)|^q \, dx =$$

$$= \int_G \Big| \sum_{l=1}^{n} \Big[(\partial_l g)(y) - (\partial_l g_k)(y) \Big] \underbrace{(\partial_i \psi_l)(\phi(y))}_{\text{beschränkt}} \Big|^q \underbrace{|\det \phi'(y)|}_{\text{beschränkt}} \, dy \;\to 0$$

$\square$

Lemma A.15. Sei $1 < q < \infty$ und sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Außengebiet. Dann existiert eine Konstante $C = C(n,q,G) > 0$, so dass für $u \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$ und $R > 0$ gilt

$$\|u\|_{q;G\cap B_R} \;\leq\; C\, R^{1+\frac{n-1}{q}}\; \|\nabla u\|_{q;G\cap B_R}$$

Beweis. (a) Sei $\delta > 0$ mit $0 \in B_\delta \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{G}$. Sei $u \in C_0^\infty(G)$, $0 < r < R$ und $\xi \in S_{n-1}$. Dann gilt

$$u(r\xi) \;=\; u(r\xi) - u(\delta) \;=\; \int_\delta^r \;\nabla u(t\xi)\cdot \xi \, dt$$

Es folgt

$$|u(r\xi)|^q \;\leq\; r^{q-1} \int_\delta^r \;|\nabla u(t\xi)|^q\; dt \;\leq\; R^{q-1} \int_\delta^R \;|\nabla u(t\xi)|^q\; dt$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\int_{S_{n-1}} |u(r\xi)|^q \, d\omega_\xi \;&\leq\; R^{q-1} \int_\delta^R \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}} \int_{S_{n-1}} |\nabla u(t\xi)|^q \; d\omega_\xi \, dt \\
&\leq\; R^{q-1}\delta^{1-n} \underbrace{\int_\delta^R \; t^{n-1} \int_{S_{n-1}} |\nabla u(t\xi)|^q \; d\omega_\xi \, dt}_{=\|\nabla u\|^q_{q;G\cap B_R}}
\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\|u\|^q_{q;G\cap B_R} \;=\; \int_0^R \; r^{n-1} \int_{S_{n-1}} |u(r\xi)|^q \, d\omega_\xi \, dr \;\leq\; \frac{1}{n}\, R^{n+q-1}\, \delta^{1-n}\, \|\nabla u\|^q_{q;G\cap B_R}$$

Daher gilt die Behauptung für $u \in C_0^\infty(G)$

(b) Sei nun $u \in \widehat{H}_\bullet^{1,q}(G)$. Wähle $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = 1$ für $|x| < R$. Dann ist $\eta u \in H_0^{1,q}(G)$ und es gibt eine Folge $(u_k) \subset C_0^\infty(G)$ mit

$$\|\eta u - u_k\|_{1,q;G} \to 0$$

Insbesondere folgt

$$\|u - u_k\|_{1,q;G\cap B_R} \;=\; \|\eta u - u_k\|_{1,q;G\cap B_R} \;\leq\; \|\eta u - u_k\|_{1,q;G} \to 0$$

und die Behauptung folgt aus (a). □

Lemma A.16. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es gelte $f_k \in C^1(G)$ $(k \in \mathbb{N})$, und es gebe $f : G \to \mathbb{R}$, so dass $f_k(x) \to f(x)$ punktweise für jedes $x \in G$ und dass $(\partial_i f_k)$ gleichmäßige Cauchyfolge in G ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

Dann ist $f \in C^1(G)$ und

$$\partial_i f = \lim_{k\to\infty} \partial_i f_k$$

Beweis. Bezeichne

$$f_i := \lim_{k\to\infty} \partial_i f_k$$

Dann ist f_i stetig. Für $x \in G$, $\rho > 0$, $B_\rho(x) \subset G$, $h \in \mathbb{R}$ and $|h| < \rho$ gilt

$$f_k(x + he_i) - f_k(x) \;=\; \int_0^h (\partial_i f_k)(x + te_i)\, dt$$

Für $k \to \infty$ erhalten wir

$$f(x + he_i) - f(x) \;=\; \int_0^h f_i(x + te_i)\, dt \;=\; h\, f_i(x + t_h e_i)$$

mit t_h zwischen 0 und h. Deshalb existiert

$$\lim_{0\neq h\to 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \;=\; f_i(x)$$

□

B Ein Spektralsatz für kompakte Operatoren in reellen Banachräumen

Die Beweise dieses Abschnitts sind wortwörtlich aus [Alt] übernommen. Dort [Alt, Satz 9.8, S.363] wird ausdrücklich ein Spektralsatz für *komplexe* Banachräume gezeigt. Um völlig sicher zu gehen, dass ein analoger Satz für reelle Banachräume ganz genauso gezeigt werden kann, sind die Beweise hier noch einmal aufgeführt.

Theorem B.1. Sei X ein normierter reeller Vektorraum, und sei $Y \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum mit $Y \neq X$. Dann gibt es für jedes $0 < \theta < 1$ ein $x_\theta \in X$ mit

$$\|x_\theta\| = 1 \quad \text{und} \quad \theta \leq \operatorname{dist}(x_\theta, Y)$$

Beweis. siehe [Alt, Satz 2.4, S.87] □

Lemma B.2. Sei X ein normierter reeller Vektorraum, und sei $Y \subset X$ endlichdimensionaler Teilraum. Dann ist Y ein abgeschlossener Teilraum von X.

Beweis. siehe [Alt, Satz 2.8, S.91] □

Theorem B.3. Sei X ein normierter reeller Vektorraum, und sei $\overline{B_1(0)} \subset X$ kompakt. Dann gilt

$$\dim X < \infty$$

Beweis. siehe [Alt, Satz 2.9, S.92] □

Definition und Theorem B.4. Seien X und Y reelle Banachräume. Ein beschränkter linearer Operator $T : X \to Y$ heißt **kompakt**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. $\overline{T(B_1(0))}$ ist kompakt in Y.
2. Für jede beschränkte Folge $(x_n) \subset X$ gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}), so dass $(Tx_{n_k}) \subset Y$ konvergent ist.

Beweis. siehe [Alt, Definition 8.1, S.301] □

Lemma B.5. Seien X und Y reelle Banachräume, und sei X reflexiv. Dann ist ein linearer Operator $T : X \to Y$ kompakt genau dann, wenn für jede Folge $(x_n) \subset X$ mit

$$x_n \overset{\text{weak}}{\longrightarrow} x \in X \qquad (n \to \infty)$$

folgt:

$$\|Tx_n - Tx\|_Y \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

Beweis. siehe [Alt, Lemma 8.2, S.302] □

Lemma B.6. Seien X, Y und Z reelle Banachräume. Seien $T_1 : X \to Y$ und $T_2 : Y \to Z$ beschränkte, lineare Operatoren. T_1 oder T_2 sei kompakt. Dann ist

$$T_2 T_1 \text{ kompakt.}$$

Beweis. (a) Sei $(x_n) \subset X$ eine beschränkte Folge.

(b) Sei T_1 kompakt. Dann existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), so dass $(T_1 x_{n_k}) \subset Y$ konvergent ist. Weil T_2 beschränkt ist, ist auch $(T_2 T_1 x_{n_k}) \subset Z$ konvergent.

(c) Sei T_2 kompakt. Dann ist auch $(T_1 x_{n_k}) \subset Y$ eine beschränkte Folge, und daher gibt es nach Definition B.4 eine Teilfolge $(T_1 x_{n_k})$, so dass $(T_2 T_1 x_{n_k}) \subset Z$ konvergent ist. □

Definition B.7. Sei X ein reeller Banachraum, und sei $T : X \to X$ ein beschränkter, linearer Operator. Wir definieren durch

1. $N(T) := \{x \in X \,:\, Tx = 0\}$ den **Nullraum** von T,
2. $R(T) := \{y \in X \,:\, \text{es gibt } x \in X \text{ mit } Tx = y\}$ den **Bildraum** von T,
3. $\rho^{(\mathbb{R})}(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, N(\lambda I - T) = \{0\} \text{ und } R(\lambda I - T) = X\}$ die **reelle Resolventenmenge** von T,
4. $\sigma^{(\mathbb{R})}(T) := \mathbb{R} \backslash \rho^{(\mathbb{R})}(T)$ das **reelle Spektrum** von T,
5. $\sigma_p^{(\mathbb{R})}(T) := \left\{\lambda \in \sigma^{(\mathbb{R})}(T) \,:\, N(\lambda I - T) \neq \{0\}\right\}$ die **Menge der Eigenwerte** von T.

Theorem B.8. Sei X ein reeller Banachraum, und sei $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Setze $A := I - T$. Dann gilt

1. $\dim N(A) < \infty$,
2. $R(A)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von X,
3. falls $N(A) = \{0\}$ gilt, so ist $R(A) = X$.

Beweis. (a) Sei $x \in N(A)$ mit $\|x\| < 1$. Dann ist $\|Tx\| = \|x\| < 1$. Deshalb gilt

$$B_1(0) \cap N(A) \subset T(B_1(0))$$

und

$$\overline{B_1(0) \cap N(A)} \subset \overline{T(B_1(0))}$$

Weil T kompakt ist, ist $\overline{T(B_1(0))}$ kompakt, und da $\overline{B_1(0) \cap N(A)}$ abgeschlossen ist, erhalten wir, dass $\overline{B_1(0) \cap N(A)}$ auch kompakt ist. Nach Theorem B.3 folgt dann

$$\dim N(A) < \infty$$

(b) Sei $x \in \overline{R(A)}$. Dann existieren $\tilde{x}_n \in X$ mit $A\tilde{x}_n \to x$. Wähle $a_n \in N(A)$, so dass

$$\|\tilde{x}_n - a_n\| \leq 2 \operatorname{dist}(\tilde{x}_n, N(A))$$

Setze $x_n := \tilde{x}_n - a_n$. Dann ist $\operatorname{dist}(\tilde{x}_n, N(A)) = \operatorname{dist}(x_n, N(A))$, $A\tilde{x}_n = Ax_n$. Zusammengefasst gilt

$$x_n \in X, \qquad Ax_n \to x, \qquad \|x_n\| \leq 2\, d_n := 2 \operatorname{dist}(x_n, N(A))$$

Angenommen, (d_n) wäre nicht beschränkt. Dann gäbe es eine Teilfolge (d_{n_k}) mit $0 < d_{n_k} \to \infty$ für $k \to \infty$. Setze

$$y_k := \frac{x_{n_k}}{d_{n_k}}$$

Dann gilt

$$Ay_k = \frac{Ax_{n_k}}{d_{n_k}} \to 0$$

Da (y_k) beschränkt und T kompakt ist, existiert eine Teilfolge (y_{k_l}) mit $Ty_{k_l} \to y$ für $l \to \infty$. Daraus ergibt sich

$$y_{k_l} \;=\; Ay_{k_l} + Ty_{k_l} \;\to y$$

und wegen der Stetigkeit von A folgt

$$Ay \;=\; \lim_{l\to\infty} Ay_{k_l} \;=\; 0$$

Daher ist $y \in N(A)$ und

$$\|y_{k_l} - y\| \;\geq\; \operatorname{dist}(y_{k_l}, N(A)) \;=\; \operatorname{dist}\left(\frac{x_{n_{k_l}}}{d_{n_{k_l}}}, N(A)\right) \;=\; \frac{\operatorname{dist}\big(x_{n_{k_l}}, N(A)\big)}{d_{n_{k_l}}} \;=\; 1$$

ein Widerspruch!. Also ist (d_n) doch beschränkt, also auch (x_n). Also gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit

$$Tx_{n_k} \to z \qquad (k \to \infty)$$

Schließlich gilt

$$x \;\leftarrow\; Ax_{n_k} \;=\; A\left(Ax_{n_k} + Tx_{n_k}\right) \;\to\; A(x+z)$$

und

$$x \;=\; A(x+z) \in R(A)$$

(c) Es gelte $N(A) = \{0\}$. Angenommen, es gäbe ein $x \in X\backslash R(A)$.

Wäre $A^n x \in R(A^{n+1})$ für $n \geq 0$, so gäbe es ein $y \in X$ mit $A^n x = A^{n+1} y$, das heißt $A^n(x - Ay) = 0$. Wegen $N(A) = \{0\}$ folgte $x - Ay = 0$, und somit $x \in R(A)$, Widerspruch! Also gilt

$$A^n x \in R(A^n)\backslash R(A^{n+1}) \qquad \forall\, n \geq 0$$

Weiter ist

$$A^{n+1} \;=\; (I - T)^{n+1} \;=\; I + \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-T)^k}_{\text{kompakt nach Lemma B.6}}$$

Nach (b) ist damit $R(A^{n+1})$ abgeschlossen. Deshalb gibt es $a_{n+1} \in R(A^{n+1})$, so dass

$$0 \;<\; \|A^n x - a_{n+1}\| \;\leq\; 2 \operatorname{dist}\big(A^n x, R(A^{n+1})\big)$$

Betrachte

$$x_n \;:=\; \frac{A^n x - a_{n+1}}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \;\in R(A^n)$$

Für $y \in R(A^{n+1})$ gilt

$$\|x_n - y\| \;=\; \frac{\|A^n x - (a_{n+1} + \|A^n x - a_{n+1}\| y)\|}{\|A^n x - a_{n+1}\|}$$

$$\geq\; \frac{\operatorname{dist}\big(A^n x, R(A^{n+1})\big)}{\|A^n x - a_{n+1}\|} \;\geq\; \frac{1}{2}$$

Für $m > n$ erhalten wir

$$\|Tx_n - Tx_m\| \;=\; \|x_n - \underbrace{(Ax_n + x_m - Ax_m)}_{\in R(A^{n+1})}\| \;\geq\; \frac{1}{2}$$

Andererseits ist (x_n) beschränkt und T kompakt, also gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit

$$\|Tx_{n_k} - Tx_{n_l}\| \to 0 \qquad (k, l \to \infty)$$

Widerspruch! □

Theorem B.9. Sei X ein reeller Banachraum, und sei $T : X \to X$ ein kompakter Operator. Dann gilt

1. $\sigma^{(\mathbb{R})}(T) \backslash \{0\} \subset \sigma_p^{(\mathbb{R})}(T)$,
2. $\sigma^{(\mathbb{R})}(T)$ ist endlich oder abzählbar,
3. $\sigma^{(\mathbb{R})}(T)$ ist beschränkt,
4. jede Folge $(\lambda_k) \subset \sigma^{(\mathbb{R})}(T) \backslash \{0\}$ mit paarweise verschiedenen Folgengliedern konvergiert gegen Null,
5. $\dim N(\lambda I - T) < \infty$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Beweis. (a) Sei $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist nach Theorem B.8 $\dim N(I - \frac{T}{\lambda}) < \infty$ und daher

$$\dim N(\lambda I - T) < \infty$$

(b) Sei $0 \neq \lambda \notin \sigma_p^{(\mathbb{R})}(T)$. Dann ist nach Definition $\dim N(I - \frac{T}{\lambda}) = \{0\}$ und nach Theorem B.8 gilt $N(I - \frac{T}{\lambda}) = X$, d.h. $\lambda \in \rho^{(\mathbb{R})}(T)$. Das zeigt

$$\sigma^{(\mathbb{R})}(T) \backslash \{0\} \subset \sigma_p^{(\mathbb{R})}(T)$$

(c) Sei $(\lambda_k) \subset \sigma^{(\mathbb{R})}(T) \backslash \{0\}$ mit $\lambda_k \neq \lambda_l$ $(k \neq l)$. Wegen (b) gibt es Eigenvektoren $e_n \in X \backslash \{0\}$ mit $Te_n = \lambda_n e_n$. Definiere

$$X_n := \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$$

Angenommen, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ seien linear unabhängig. Seien $a_k \in \mathbb{R}$, so dass

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k = 0$$

Falls $a_n = 0$, folgt nach Voraussetzung $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Falls $a_n \neq 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; Te_n - \lambda_n e_n \;=\; \frac{1}{a_n} (\lambda_n - T) \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k \\ &=\; \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \underbrace{(\lambda_n - \lambda_k)}_{\neq 0} e_k \end{aligned}$$

und daher $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Also auch $a_n = 0$, Widerspruch! Mittels vollständiger Induktion folgt somit

$$\dim X_n = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Nach Theorem B.1 und Theorem B.2 gibt es $x_n \in X_n$ mit

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \leq \operatorname{dist}(x_n, X_{n-1})$$

Weiter gilt

$$(T - \lambda_n)x_n \;=\; (T - \lambda_n)\sum_{k=1}^{n} a_{nk}e_k \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(\lambda_k - \lambda_n)e_k \;\in X_{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und

$$Tx_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{nk}\,\lambda_k\, e_k \;\in X_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Für $m < n$ ergibt sich

$$\|T(\frac{x_n}{\lambda_n}) - T(\frac{x_m}{\lambda_m})\| \;=\; \|x_n + \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(Tx_n - \lambda_n x_n) - \frac{1}{\lambda_m}Tx_m}_{\in X_{n-1}}\| \;\geq\; \frac{1}{2}$$

Weil T kompakt ist, kann keine Teilfolge von $(\frac{x_n}{\lambda_n})$ beschränkt sein. Deshalb folgt

$$\frac{1}{|\lambda_n|} \;=\; \|\frac{x_n}{\lambda_n}\| \;\to \infty \qquad (n \to \infty)$$

und

$$\lambda_n \;\to 0 \qquad (n \to \infty)$$

(d) Aus (c) folgern wir, dass $\sigma^{(\mathbb{R})}(T) \setminus [-r, r]$ endlich ist für jedes $r > 0$. Somit ist $\sigma^{(\mathbb{R})}(T)$ beschränkt und

$$\sigma^{(\mathbb{R})}(T)\setminus\{0\} \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma^{(\mathbb{R})}(T) \setminus \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

Als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist $\sigma^{(\mathbb{R})}(T)$ endlich oder abzählbar. $\square$

Literatur

[ABR] Axler, S., P. Bourdon und W. Ramey: *Harmonic Function Theory*. Graduate Texts in Mathematics 137, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1992

[Alt] Alt, H.W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1999 (3.Auflage)

[BS] Bergman, S. und M. Schiffer: *Kernel functions and differential equations*. Academic Press, London 1953

[Cia] Ciarlet, P.G.: *Mathematical elasticity Volume 1: Three dimensional elasticity*. Studies in mathematics and its applications, North-Holland, Amsterdam, New York, 1988

[Co1] Cosserat, E. und F.: *Sur les équations de la théorie de l'élasticité*. C.R. Acad. Sci. 126 (1898), Paris

[Co2] Cosserat, E. und F.: *Sur les fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité*. C.R. Acad. Sci. 126 (1898), Paris

[Co3] Cosserat, E. und F.: *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique*. C.R. Acad. Sci. 127 (1898), Paris

[Co4] Cosserat, E. und F.: *Sur la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les valeurs des inconnues á la frontière sont données*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Co5] Cosserat, E. und F.: *Sur une application des fonctions potentielles de la théorie de l'élasticité*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Co6] Cosserat, E. und F.: *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Co7] Cosserat, E. und F.: *Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Co8] Cosserat, E. und F.: *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoide élastique soumis à des efforts données sur la frontière*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Co9] Cosserat, E. und F.: *Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité dans le cas où les efforts sur la frontière sont données*. C.R. Acad. Sci. 133 (1901), Paris

[Cr] Crouzeix, M.: *On an operator related to the convergence of Uzawa's algorithm for the Stokes equation*. In: M.-O. Bristeau et al. (Hrsg.): Computational science for the 21st century. Wiley, Chichester 1997

[ELPP] Englis, M., D. Lukkassen, J. Peetre und L.-E. Persson: *On the formula of Jacques-Louis Lions for reproducing kernels of harmonic and other functions*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 570 (2004), 89-129

[FFMM] FAIERMAN, M., R. J. FRIES, R. MENNICKEN, M. MÖLLER: *On the essential spectrum of the linearized Navier-Stokes operator.* Integral Equations Operator Theory 38 (2000), no. 1, 9–27

[He] HELLWIG, G.: *Partielle Differentialgleichungen.* Teubner Verlag, Stuttgart 1960

[Ko1] KOZHEVNIKOV, ALEXANDER: *A history of the Cosserat spectrum.* Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 109 (1999), 223-234

[Ko2] KOZHEVNIKOV, ALEXANDER: *The basic boundary value problems of static elasticity theory and their Cosserat spectrum.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 213, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1993

[Mes] MESCHKOWSKI, H.: *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1962

[Me/Se] MEYERS, N.G. UND J.SERRIN: *H=W.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA 51 (1964), 1055-1056

[Mi] MIKHLIN, S.G.: *The spectrum of a family of operators in the theory of elasticity for infinite domains.* Russian Math. Surveys 28 (3), 1973

[MueR] MÜLLER, R.: *Das schwache Dirichletproblem in L^q für den Bipotentialoperator in beschränkten Gebieten und Außengebieten.* Bayreuther Math. Schriften 49, 115-211 (1995)

[Ro] ROACH, G.F.: *Green's functions.* Cambrigde University Press, Cambridge 1982

[Si] SIMADER, C.G.: *Sketch of an alternative approach to weak L^q-solutions of Stokes' system in a half-space*: Topics in mathematical fluid mechanics, 293-319, Quad. Mat., 10, Dept. Math., Seconda Univ. Napoli, Caserta, 2002

[SiDGL] SIMADER, C.G.: *Partielle Differentialgleichungen*: Skript zur Vorlesung, Universität Bayreuth, 2003

[SiLec] SIMADER, C.G.: *On Dirichlet's boundary value problem*: Lecture notes in Mathematics, Vol. 268. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1972

[Si/So] SIMADER, C.G. UND H.SOHR: *The Dirichlet Problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains.* Pitman Research Notes in Mathematical Series, Vol. 360, Addison Wesley Longman Ltd., Harlow 1996

[St] STARK, M.: *Das schwache Dirichletproblem in L^q für das Differentialgleichungssystem $\Delta \underline{v} = \nabla p$ und die Lösung der Divergenzgleichung.* Bayreuther Math. Schriften 70 (2004)