

Universität Bayreuth
Fakultät für Mathematik und Physik

Dynamischer Zusammenbruch der schwachen Lokalisierung von Photonen

Diplomarbeit aus dem
Fachbereich Physik

von
Christian Wickles

Erstgutachter: Prof. Dr. H. Büttner
Zweitgutachter: Prof. Dr. W. Zimmermann
Betreuer: Dr. C. Müller

Tag der Einreichung: 16. Januar 2006

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Zusammenbruch der Interferenz in einem einfachen semi-klassischen Modell | 4 |
| 2.1. Atomare Wolken | 4 |
| 2.2. Einfaches Modell | 5 |
| 2.3. Streuphase | 6 |
| 2.4. Propagation im effektiven Medium | 7 |
| 2.5. Einfluss auf den Interferenzkontrast | 8 |
| 3. Physikalisches Modell | 10 |
| 4. Quantenmechanischer Streuquerschnitt der Doppelstreuung | 14 |
| 4.1. Hamiltonian des Systems | 14 |
| 4.2. Übergangsoperator | 16 |
| 4.3. Streuquerschnitt | 21 |
| 4.4. Kohärente und inkohärente Anteile in nullter Näherung | 22 |
| 4.4.1. Interpretation und welcher-Weg Information | 24 |
| 4.4.2. Konfigurationsmittel und Einfluss auf den Rückstreuikonus | 24 |
| 4.5. Übergangsoperator in der Zeitdarstellung | 26 |
| 5. Dynamischer Zusammenbruch der kohärenten Rückstreuung | 30 |
| 5.1. Analytischer Ausdruck für den Interferenzkontrast | 30 |
| 5.1.1. Thermische Mittelung | 31 |
| 5.1.2. Einfluss symmetrischer und antisymmetrischer Moden | 32 |
| 5.1.3. Allgemeines Resultat | 34 |
| 5.2. Quasi-freie Atome ($\omega_h \ll \Gamma$) | 35 |
| 5.2.1. Grenzfall tiefer Temperaturen | 36 |
| 5.2.2. Grenzfall hoher Temperaturen | 39 |
| 5.2.3. Schlussfolgerungen | 40 |
| 5.3. Enge Falle ($\omega_h \gg \Gamma$) | 42 |
| 5.3.1. Ergebnis erster Ordnung | 42 |
| 5.3.2. Interpretation | 44 |
| 5.4. Einfluss anisotroper Temperaturverteilung | 46 |
| 5.4.1. Experimentelle Motivation | 46 |
| 5.4.2. Ergebnis | 48 |
| 6. Quantitative Quantendualität | 51 |
| 6.1. Quantitative Quantendualität bei Streuprozessen | 52 |
| 6.2. Interferenz, Unterscheidbarkeit und Vorhersagbarkeit bei Doppelstreuung | 55 |

| | |
|--|-----------|
| 6.3. Quasi-freie Atome | 56 |
| 6.3.1. Verschwindende Temperatur | 57 |
| 6.3.2. Endliche Temperatur | 62 |
| 7. Zusammenfassung | 68 |
| A. Polarisation | 70 |
| A.1. Einfachstreuung | 70 |
| A.2. Doppelstreuung | 71 |
| A.3. Detektion im helizitätserhaltenden Kanal | 71 |
| B. Details zur Berechnung von α im Limes hoher Temperaturen | 73 |
| C. Dualität bei Systemen in reinen Quantenzuständen | 76 |

1. Einleitung

Obwohl P. Drude Anfang des 20. Jahrhunderts mit seiner Theorie über die Leitfähigkeit in Metallen mit geringer Unordnung, d.h. nur wenigen Störstellen, großen Erfolg verbuchen konnte, ignorierte diese eine wichtige Eigenschaft der für den Transport verantwortlichen Teilchen, in diesem Fall der Elektronen im Metall. In dieser Theorie bewegen sich die Elektronen auf klassischen Trajektorien, wobei Betrag und Richtung der Geschwindigkeit durch Streuung an Störstellen in zufälliger Weise umverteilt werden, und zwar unabhängig von allen anderen Prozessen.

Als Teilchen, welche den Gesetzen der Quantenmechanik unterliegen, zeigen diese jedoch Interferenzeffekte, was insbesondere einen Einfluss auf das mikroskopische Verhalten jener Teilchen nach sich zieht. Auf makroskopischen Skalen hingegen führt die Mittelung über alle Konfigurationen der Streuer zu einem "Auswaschen" der Interferenz, so dass die mittlere Propagation der Teilchen im Medium in der Tat durch eine klassische Beschreibung in guter Näherung gerechtfertigt werden kann. Das funktioniert zumindest für den Fall schwach ungeordneter Systeme, denn 1958 zeigte Anderson [1], dass es bei hinreichend starker Unordnung zu einem totalen Stillstand des Transports kommen kann, bedingt durch Dominanz von Interferenzeffekten. Das Metall wird zu einem Isolator. Dieses Phänomen ist allgemein bekannt unter dem Namen Anderson-Lokalisierung.

Allerdings findet man auch weit außerhalb des Bereichs der Anderson-Lokalisierung Einfluss von Interferenz auf den Transport. Betrachtet man die Interferenz zweier gegenläufiger und sich auf dem selben Streupfad befindenden Teilchenwellen in exakter Rückstreurichtung (siehe Abb. 1.1), so stellt man fest, dass diese Interferenz unabhängig von den Positionen der Streuer immer konstruktiv ist. Diese Aussage trifft für alle anderen Streurichtungen nicht zu. Daraus folgt aber, dass selbst nach einer Konfigurationsmittelung über die Unordnung dieser Beitrag erhalten bleibt. Man nennt dieses Phänomen *kohärente Rückstreuung*. Die Tatsache, dass die Rückstreuintensität um einen Faktor größer eins erhöht wird, führt letztendlich

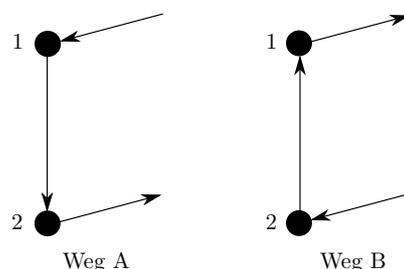


Abbildung 1.1.: Konstruktive Interferenz zwischen den beiden Streuwegen A und B ist die Ursache der kohärenten Rückstreuung.

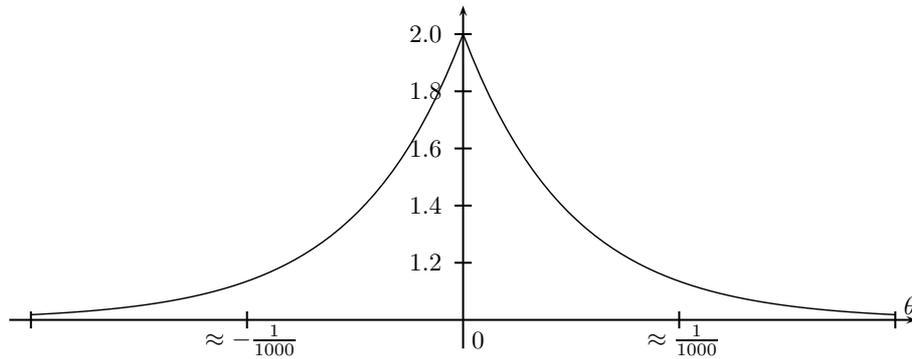


Abbildung 1.2.: Typische Form des Konus der kohärenten Rückstreuung. Es ist die auf die Hintergrundintensität normierte Gesamtintensität in einem engen Winkelbereich um die exakte Rückstreurichtung $\theta = 0$ aufgetragen.

zu Quantenkorrekturen typischer Transporteigenschaften, wie beispielsweise die Verringerung der Diffusionskonstanten. In diesem Zusammenhang spricht man daher auch von *schwacher Lokalisierung*. Es gibt aber auch weitere interessante Effekte wie beispielsweise *universelle Leitfähigkeitsfluktuationen*.

Obwohl die schwache Lokalisierung zunächst nur für Elektronen untersucht worden ist, fand in neuerer Zeit das photonische Analogon zunehmendes Interesse, wie z.B. die kohärente Rückstreuung von Licht durch Polystyrol-Suspension [2, 3] oder universelle Leitfähigkeitsfluktuationen von Licht [4, 5]. Photonen zeigen als Quantenteilchen ähnliche Verhaltensweisen wie Elektronen, bis auf die unterschiedlichen Dispersionsbeziehungen und die Art und Weise mit den Streuern bzw. Störstellen zu wechselwirken. Weiterhin ist das Auftreten von kohärenter Rückstreuung nicht nur auf Quantenobjekte beschränkt, sondern tritt unter anderem auch bei klassischen Wellen wie Ultraschall auf [6].

Das Aufkommen von Ionen- und Atomfallen führte danach zu völlig neuen Möglichkeiten, das Verhalten von Photonen in ungeordneten Medien im Detail zu studieren. So können Atome in Form von (ultra-)kalten atomaren Wolken eingefangen werden. Bei resonanter Streuung von Photonen an diesen Wolken erreicht man selbst bei relativ geringen atomaren Dichten eine hinreichend hohe Streuwahrscheinlichkeit. Die kohärente Rückstreuung lässt sich dann durch Messung des Rückstreukonus untersuchen [7, 8, 9]. Dieser Konus ist eine direkte Manifestation der kohärenten Rückstreuung und entspricht einer erhöhten Intensität (im Idealfall um einen Faktor 2) in exakter Rückstreurichtung $\theta = 0$ und fällt über einen Winkelbereich der typischen Größenordnung von $\Delta\theta \approx 1/1000$ auf den Wert der inkohärenten Hintergrundintensität ab (siehe Abbildung 1.2). Die sich ergebende Form erinnert an einen Konus, woher die Bezeichnung *backscattering cone* rührt.

Die Verwendung von Atomen als Streuobjekte erweist sich als vorteilhaft, da diese als identische Teilchen und durch ihr wohldefiniertes mikroskopisches Verhalten im Zusammenspiel mit Photonen ideale Untersuchungsobjekte sind, sowohl in theoretischer als auch in experimenteller Hinsicht. Eine zusätzliche angenehme Eigenschaft ist die Tatsache, dass Photonen im Gegensatz zu Elektronen nicht mit ihresgleichen wechselwirken. Ein weiterer Vorteil ist, dass man durch Verstimmung der Photonenfrequenz von der Resonanz die mittlere Streulänge und damit die optische Dicke verändern kann, ohne an der Probe selbst etwas zu verändern.

Es gibt nun eine Reihe von Einflüssen, welche zum Zusammenbruch der Interferenz in Rückstreurichtung führen. Zum einen sind das die internen Freiheitsgrade, also die interne Struktur der Atome. Ist beispielsweise der Grundzustand ein Multiplett, so kann dies eine drastische Abnahme der Interferenz zur Folge haben [10, 11].

Zum anderen sind das so genannte externe Freiheitsgrade, insbesondere die eigentlich immer vorhandene Schwerpunktsbewegung der Atome. Letztere bricht die Zeitumkehrsymmetrie, welche bei idealen, unbeweglichen Streuern zwischen den beiden Wegen A und B (aus Abb. 1.1) gegeben ist. Daher gibt es auch hier einen Verlust an Interferenz und man spricht in diesem Kontext von *dynamischem Zusammenbruch*. Allerdings können durch heutige Techniken der Laserkühlung Temperaturen erreicht werden, in welchen die Schwerpunktsbewegung der atomaren Streuer kaum eine Rolle spielt.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die genauere Untersuchung des Phänomens des dynamischen Zusammenbruchs der schwachen Lokalisierung von Photonen und die zugrundeliegenden physikalischen Mechanismen. Die Betonung liegt dabei auf dem Einfluss der externen Freiheitsgrade bzw. der Schwerpunktsbewegung, so dass Atome mit einfachst möglicher interner Struktur angenommen werden.

Im Folgenden soll auf die Vorgehensweise in dieser Arbeit kurz eingegangen werden. Zunächst soll in Kapitel 2 mit der Problematik bekannt gemacht werden. Dies erfolgt mit Hilfe eines semi-klassischen Modells, welches in einfachen Fällen bereits quantitative Aussagen über den Zusammenbruch der Interferenz liefert.

In nachfolgendem Kapitel 3 wird das eigentliche Modell vorgestellt und daran anschließend wird in Kapitel 4 der entsprechende Übergangoperator der Doppelstreuung in geeigneter Näherung hergeleitet, worauf der restliche Teil dieser Arbeit baut.

In Kapitel 5 werden dann in verschiedenen physikalischen Regimes analytische Ausdrücke für den Interferenzkontrast bestimmt und die relevanten physikalischen Parameter für den Zusammenbruch gedeutet.

Schließlich wird in Kapitel 6 das Modell noch einmal genauer unter Aspekten der Quanteninformation analysiert. Unter anderem liefert diese Untersuchung für einige der im vorherigen Kapitel gewonnenen Ergebnisse eine alternative Interpretation der interferenzerstörenden Mechanismen.

2. Zusammenbruch der Interferenz in einem einfachen semi-klassischen Modell

2.1. Atomare Wolken

Wir betrachten zunächst eine Wolke, bestehend aus (ultra-)kalten Atomen, welche durch Lichtstreuung untersucht werden soll [7, 8, 9]. Dazu werden mit einem monochromatischen Laser schwacher Intensität Photonen \mathbf{k}_{in} in die Wolke geschickt, welche diese nach einigen Streuprozessen wieder verlassen. Die Dichte dieser Wolke ist derart gewählt, dass zwar der mittlere Abstand l der Streuer in dem atomaren Gas sehr viel größer als die Wellenlänge $\lambda_{\text{in}} = 2\pi/k_{\text{in}}$ der Photonen ist, andererseits aber auch die optische Dicke der Wolke groß genug ist, damit die Intensität von doppelt bzw. mehrfach gestreuten Photonen hinreichend stark wird, um detektiert werden zu können. Es muss auch beachtet werden, dass der mittlere Abstand der Atome nicht die Größenordnung der atomaren Wellenpakete erreicht, da es sonst zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommen würde. Eigentlich betrachten wir genau den entgegengesetzten Grenzfall, in dem die Wechselwirkung zwischen den jeweiligen Atomen vernachlässigt werden soll. Mit anderen Worten: wenn ein Photon gestreut wird, dann passiert das genau an einem Atom, und nur dieses ist in dem individuellen Streuprozess involviert. Für ein solches Verhalten muss gefordert werden, dass $k_{\text{in}}l \gg 1$. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, würde das gestreute Photon nicht nur ein, sondern zwei oder mehr Atome sehen, was beispielsweise zur *Super-* und *Subradianz* führt [12]. Genau dieses wollen wir aber ausschließen. Die eben genannte Bedingung impliziert aber auch, dass die mittlere freie Weglänge l_s der Photonen sehr viel größer als die Wellenlänge des Lichts ist. $k_{\text{in}}l_s \gg 1$ definiert aber genau das hier untersuchte Regime der schwachen Lokalisierung.

Die Forderung an die optische Dicke ist die, dass die Ausdehnung L der Wolke deutlich größer ist als die freie Weglänge l_s .

Um die Vielfachstreuung und insbesondere die Doppelstreuung und den Einfluss externer Freiheitsgrade genauer zu studieren, greifen wir uns zwei Streuer heraus, welche auf einem bestimmten Streupfad liegen. Dabei genügt es in einem ersten Schritt, sich zunächst nur auf die reine Doppelstreuung an zwei Atomen im Vakuum zu beschränken. Einerseits reicht dieses einfachere Modell bereits aus, um die wesentlichen physikalischen Mechanismen zu erkennen und zu verstehen, welche im Fall resonanter Photonenstreuung zu einem Zusammenbruch der schwachen Lokalisierung führen. Andererseits kann man die aus diesem Modell gewonnenen Resultate auf die Vielfachstreuung anwenden, indem man die Bethe-Salpeter-Gleichung in geeigneter Weise löst [13], was jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll. Dieses erfordert die Einführung eines effektiven Mediums mit frequenzabhängigem Brechungsindex $n(\omega)$, anstatt der unserem Modell zugrundeliegenden freien Propagation im Vakuum.

In diesem Kapitel werden wir eine weitere, jedoch eher phänomenologische Annäherung an das Problem des effektiven Mediums sehen.

2.2. Einfaches Modell

Bevor wir uns dem Problem streng quantenmechanisch nähern, soll zunächst eine semi-klassische Betrachtung entscheidende Mechanismen, welche zum Zusammenbruch des Interferenzkontrasts führen, aufzeigen. Die Idee entspricht im Wesentlichen derjenigen in [14], es ist jedoch instruktiv, das Vorgehen hier noch einmal explizit zu skizzieren, da wir in späteren Kapiteln auf (Teil-)Ergebnisse hiervon zurückgreifen werden, beispielsweise zu Vergleichszwecken. In der Tat wird man viele Dinge in nachfolgenden Kapiteln in etwas anderer und allgemeinerer Art und Weise wiederfinden. Außerdem enthält Formel (3) aus [14] einen falschen numerischen Faktor, welcher hier korrigiert werden soll.

Weiterhin ist dieses einfachere Modell dazu geeignet, das die beiden herausgegriffenen Streuer umgebende Medium in unkomplizierter Weise zu berücksichtigen. Denn gerade in der Nähe der Resonanz sind dadurch nicht vernachlässigbare Effekte zu erwarten, insbesondere wenn inelastische Streuung mit im Spiel ist.

Betrachten wir zunächst Abbildung 2.1. Das einlaufende Photon \mathbf{k}_{in} wird an den beiden Atomen 1 und 2 doppelt gestreut, wobei es die beiden gleichwertigen Alternativen A und B vorfindet. Beide Atome seien als frei bewegliche Streuer mit einer thermischen Geschwindigkeitsverteilung gemäß Maxwell-Boltzmann angenommen. Die Streuer selbst befinden sich in einem Abstand $|\mathbf{R}_0|$, welcher sehr viel größer als die Wellenlänge der verwendeten Lichts ist, d.h. $k_{\text{in}}|\mathbf{R}_0| \gg 1$. Daher können die beiden Streuprozesse als unabhängig voneinander angesehen werden.

Man erkennt sofort, dass es genau in Rückrichtung keine räumliche Phasendifferenz zwischen den beiden Wegen A und B gibt. Allerdings gibt es nun zum einen aufgrund der Dopperverschiebung durch die bewegten Streuer eine effektive Verschiebung von der Resonanz. Betrachtet man das Photon im Ruhesystem des Atoms, so hat es die Energie

$$\omega' = \omega_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{v} . \quad (2.1)$$

Dabei kann man sich auf den longitudinalen Dopplereffekt beschränken, denn der transversale ist von höherer Ordnung in v/c und somit hier nicht von Relevanz. Zum anderen ändert sich aber auch die Energie der Photonen durch Impulsüberträge auf die Atome. Insbesondere hat man in unserem Fall für die zwischen den beiden Atomen ausgetauschten Photonen für Weg A bzw. B

$$\omega_A = \omega_{\text{in}} - (\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}') \mathbf{v}_1 , \quad (2.2)$$

$$\omega_B = \omega_{\text{in}} - (\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}') \mathbf{v}_2 . \quad (2.3)$$

Dabei kann man annehmen, dass $|\mathbf{k}'| \approx |\mathbf{k}_{\text{in}}|$, denn Korrekturen hiervon wären ebenfalls von höherer Ordnung in v/c . Hier, sowie auch im Folgenden, ist $\mathbf{k}' \approx \widehat{\mathbf{R}}_0 |\mathbf{k}_{\text{in}}|$.

Es gibt nun zwei daraus resultierende, grundsätzlich verschiedene Effekte, welche schließlich zum Zusammenbruch der Interferenz in Rückstreurichtung führen. Wir sind hier zunächst nur an Korrekturen in führender Ordnung interessiert.

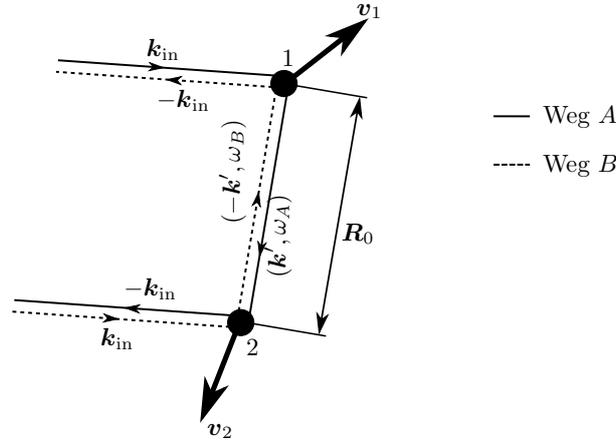


Abbildung 2.1.: Inelastische Streuung und Dopplerverschiebung durch zwei sich bewegende atomare Streuer im Abstand R_0 als Ursache für den dynamischen Zusammenbruch der Interferenz in Rückstreurichtung.

2.3. Streuphase

Der erste Effekt entsteht aufgrund einer Differenz in den beiden Streuphasen, welche letztendlich von der asymmetrischen Momentangeschwindigkeit der beiden Atome herrühren (wie z.B. im Fall von Abbildung 2.1 angedeutet). Damit einher geht die Tatsache, dass die beiden möglichen Streupfade sich nicht mehr durch Zeitumkehr ineinander überführen lassen. Diese Symmetrie führt ja im Fall ruhender Streuer (mit nicht entartetem Grundzustand der Atome) auf den idealen Verstärkungsfaktor 2 in Rückrichtung. Diese Phasendifferenz der beiden Alternativen A und B durch die Streuung nennen wir $\Delta\varphi_s = \varphi_s^{(A)} - \varphi_s^{(B)}$.

Um diese zu erhalten, betrachten wir den atomaren differentiellen Streuquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma}{4\pi}$$

isotroper Dipolstreuer, mit dem totalen Streuquerschnitt

$$\sigma = \frac{k_{\text{in}}^4 |\alpha|^2}{6\pi} = \frac{6\pi}{k_{\text{in}}^2} \frac{1}{1 + (2\delta/\Gamma)^2} \equiv \frac{\sigma_0}{1 + (2\delta/\Gamma)^2}, \quad (2.4)$$

wobei im Fall der Resonanz mit dem optischen Übergang $\omega_0 \gg \Gamma$ die atomare Polarisierbarkeit durch die komplexe Größe

$$\alpha(\delta) \approx -\frac{3\pi\Gamma c^3}{\omega_0^3} \frac{1}{\delta + i\Gamma/2} \quad (2.5)$$

gegeben ist (Verstimmung $\delta = \omega_{\text{in}} - \omega_0$). Die Annahme isotroper Streuer dient dazu, zusätzliche Effekte durch polarisiertes Licht zu vermeiden, denn daran sind wir an dieser Stelle nicht interessiert.

Betrag und Phase der Streuamplitude $a_s e^{i\varphi_s}$ sind damit

$$a_s(\delta) = \frac{\sqrt{\sigma_0}}{\sqrt{1 + (2\delta/\Gamma)^2}} \quad (2.6)$$

$$\varphi_s(\delta) = \frac{\pi}{2} + \arctan(2\delta/\Gamma) . \quad (2.7)$$

Man erkennt, dass sowohl Amplitude als auch Phase eine δ -Abhängigkeit aufweisen. Befindet man sich jedoch exakt bei Resonanz, d.h. $\delta = 0$, so gibt es in erster Ordnung δ keine Änderung in $a_s(\delta)$, während die Änderung in $\varphi_s(\delta)$ um $\delta = 0$ maximal ist. Beschränkt man sich also auf den Fall, dass die einlaufenden Photonen exakt bei Resonanz liegen ($\delta = 0$), so ist die Einschränkung auf lediglich die Phase in führender Ordnung gerechtfertigt. Nimmt die Verstimmung einen von Null verschiedenen Wert an, so muss man die Variation der Amplitude in die Rechnung mit einbeziehen.

Mit Hilfe von Gleichungen (2.1) - (2.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_s &= \varphi_s^{(A)} - \varphi_s^{(B)} \\ &= \varphi_s(\delta - \mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{v}_1) + \varphi_s(\delta - (\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}')\mathbf{v}_1 - \mathbf{k}'\mathbf{v}_2) \\ &\quad - [\varphi_s(\delta - \mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{v}_2) + \varphi_s(\delta - (\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}')\mathbf{v}_2 + \mathbf{k}'\mathbf{v}_1)] , \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei offensichtlich $\varphi_s^{(B)}$ durch die Ersetzungen $\mathbf{v}_1 \leftrightarrow \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{k}' \leftrightarrow -\mathbf{k}'$ aus $\varphi_s^{(A)}$ hervorgeht und *vice versa*.

Wir nehmen an, dass $k_{\text{in}}v \ll \Gamma$, so dass sich zusammen mit $\delta = 0$ in führender Ordnung $k_{\text{in}}v/\Gamma$ ergibt:

$$\Delta\varphi_s \approx \frac{4}{\Gamma} \mathbf{k}_{\text{in}}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) . \quad (2.9)$$

Man beachte das korrekte Vorzeichen verglichen mit [14]. Offensichtlich spielt die Relativgeschwindigkeit in Richtung \mathbf{k}_{in} hier die entscheidende Rolle.

In Ausblick auf das Folgende ist zu bemerken, dass dieser Effekt im Prinzip von der endlichen Lebensdauer $1/\Gamma$ im angeregten Zustand herrührt, wenn man dies im Zeitbild betrachtet. Diese Aussage wird bereits durch die $1/\Gamma$ -Proportionalität nahegelegt, wird aber in den kommenden Kapiteln noch klarer werden.

2.4. Propagation im effektiven Medium

Der zweite Effekt rührt von der eigentlich inelastischen Streuung her, welche dazu führt, dass sich die Verstimmung von der Resonanz ändert, wobei eben genau im Fall der Resonanz merkliche Änderungen in Streuamplitude und -phase zu erwarten sind, was sich folglich auch im (effektiven) Brechungsindex $n(\delta)$ niederschlägt. Betrachtet man der Einfachheit halber das Medium nur zwischen den Streuvorgängen durch die beiden Atome, so ist im Allgemeinen die Energie für hin- und rücklaufende Photonen der beiden Streualternativen A, B nicht gleich, weshalb $n(\delta)$ für unterschiedliche Frequenzen ausgewertet werden muss. Dieses resultiert in einem zusätzlichen Beitrag zur Phasendifferenz, welche im Folgenden als $\Delta\varphi_{\text{pro}} = \varphi_{\text{pro}}^{(A)} - \varphi_{\text{pro}}^{(B)}$ bezeichnet wird und nun ermittelt werden soll.

Der komplexe Brechungsindex eines optisch dünnen Mediums ($\rho|\alpha| \ll 1$ folgt direkt aus $k_{\text{in}}l_s \gg 1$) lautet:

$$n(\delta) \approx 1 + \frac{1}{2}\rho\alpha(\delta) = 1 - \frac{1}{2k_{\text{in}}l_s(\delta)}(2\delta/\Gamma - i) , \quad (2.10)$$

wobei ρ die atomare Dichte ist und durch die mittlere freie Weglänge

$$l_s(\delta) = \frac{1}{\rho\sigma_0} (1 + (2\delta/\Gamma)^2) \quad (2.11)$$

ausgedrückt wird. Da sich $l_s(\delta)$ um $\delta = 0$ in erster Ordnung nicht ändert, bleibt l_s in führender Ordnung kv/Γ konstant und wir setzen $l_s \approx R_0$. Damit ergibt sich

$$n(\delta) = 1 - \frac{1}{2k_{\text{in}}R_0}(2\delta/\Gamma - i) \quad (2.12)$$

und für die Phase, ebenfalls in führender Ordnung kv/Γ ,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{\text{pro}} &= n(\omega_A - \omega_0)\omega_A R_0/c - n(\omega_B - \omega_0)\omega_B R_0/c \\ &\approx (\omega_A - \omega_B)R_0/c - \frac{1}{\Gamma}(\omega_A - \omega_B) \\ &\approx \frac{1}{\Gamma} [(\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}')\mathbf{v}_1 - (\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}')\mathbf{v}_2] . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Im letzten Schritt wurde der Term $(\omega_A - \omega_B)R_0/c$, welcher die Phasendifferenz aufgrund der freien Propagation zwischen den beiden Atomen im Vakuum darstellt, vernachlässigt. Dies ist gerechtfertigt wegen der typischerweise viel längeren Lebensdauer $1/\Gamma$ verglichen mit der Laufzeit R_0/c des Photons im Vakuum, d.h. $1/\Gamma \gg R_0/c$. Der verbleibende Korrekturterm ist offensichtlich von gleicher Größenordnung wie der Streubeitrag aus Gl. (2.9).

Wenn wir hier, so wie wir es in den nachfolgenden Kapiteln tun werden, das effektive Medium ignorieren, sprich zwei resonante Streuer im Vakuum betrachten, so bleibt nur der Term $(\omega_A - \omega_B)R_0/c$, wobei die Gesamtphase dann jedoch durch den Streubeitrag dominiert wird. Die Propagation kann damit aber vollends vernachlässigt werden.

2.5. Einfluss auf den Interferenzkontrast

Die Gesamtintensität ist proportional zu

$$\left\langle \left| 1 + e^{i(\Delta\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{pro}})} \right|^2 \right\rangle_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} = 2 + 2 \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i(\Delta\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{pro}})} \right\rangle_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\} , \quad (2.14)$$

wobei die Mittelung über eine Maxwell-Boltzmann'sche Geschwindigkeitsverteilung erfolgt.

Man definiert den Überhöhungsfaktor (*enhancement factor*)

$$\alpha = \frac{L + C}{L} = 1 + \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i(\Delta\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{pro}})} \right\rangle \right\} , \quad (2.15)$$

welcher die Gesamtintensität $L + C$ bezogen auf den inkohärenten Anteil L angibt. Der inkohärente Anteil entspricht der nur schwach variierenden Hintergrundintensität, wie sie weit weg von der Rückstreurichtung $\theta \gg 1/k_{\text{in}}R_0$ angenommen wird.

Betrachten wir zunächst nur den Einfluss der Streuphase, was dem zuvor erwähnten Fall zweier atomarer Streuer im Vakuum entspricht. Mit der für Gauß-Verteilungen bekannten Beziehung

$$\langle e^{i\boldsymbol{\xi}\mathbf{v}} \rangle_{\mathbf{v}} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \langle (\boldsymbol{\xi}\mathbf{v})^2 \rangle_{\mathbf{v}} \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \xi^2 v_{\text{rms}}^2 \right\} \quad (2.16)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i\frac{4}{\Gamma} \mathbf{k}_{\text{in}}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)} \right\rangle_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \right\} \\ &= 1 + e^{-\left(\frac{4}{\Gamma} k_{\text{in}} v_{\text{rms}}\right)^2} \\ &\approx 2 - 16 \left(\frac{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{\Gamma} \right)^2 . \end{aligned} \quad (2.17)$$

$v_{\text{rms}}^2 = \langle v_i^2 \rangle$ ($i = x, y, z$) ist dabei das mittlere Geschwindigkeitsquadrat in einer Dimension.

Wenden wir uns abschließend noch dem Einfluss des effektiven Mediums auf den Interferenzkontrast zu. Die Gesamtphasendifferenz ist

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{pro}} = \frac{1}{\Gamma} [-(3\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}')\mathbf{v}_1 + (3\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}')\mathbf{v}_2] \quad (2.18)$$

und damit

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{v_{\text{rms}}^2}{\Gamma^2} [(3\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}')^2 + (3\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}')^2] \right\} \\ &= 1 + \exp \left\{ -10 \left(\frac{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{\Gamma} \right)^2 \right\} \\ &\approx 2 - 10 \left(\frac{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{\Gamma} \right)^2 . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Offensichtlich kompensiert die Propagation im effektiven Medium einen Teil der bei der Streuung akkumulierten Phasendifferenz, weshalb die Korrektur hier niedriger ausfällt als in Gl. (2.17), zumindest exakt bei Resonanz ($\delta = 0$), denn dies wurde ja in diesem Kapitel durchgehend angenommen. Der hier auftretenden relevanten Skala $k_{\text{in}} v_{\text{rms}}/\Gamma$ werden wir uns ebenfalls in späteren Kapiteln widmen.

3. Physikalisches Modell

Im Folgenden wollen wir durch Betrachten zweier möglicher Situationen zweigleisig verfahren. Zum einen sind das zwei Streuer fester Konfiguration, welche insbesondere das Studium der Geometrieabhängigkeit der kohärenten Rückstreuung erlauben. Zum anderen sind das die in Kapitel 2 kennengelernten atomaren Wolken. Bei diesen muss in einem nachfolgenden Schritt noch über alle Positionen der Streuer gemittelt werden, was dann letztlich auf den Rückstreukonus führt. Zunächst aber soll das zugrundeliegende Modell vorgestellt werden.

Wechselwirkung der Streuer mit ihrer Umgebung

Anstatt freier Atome, betrachten wir eine Situation, in welcher zwei Atome in harmonischen Fallen gebunden sind, charakterisiert durch die Fallenstärke ω_h (Abb. 3.1). Dabei sind beide Atome jeweils für sich in einem solchen Potential gebunden, welches als isotrop angenommen wird. Durch Betrachten des Grenzfalles kleiner ω_h findet man aber genau den Fall freier Atome wieder. Eine experimentelle Realisierung kann man sich z.B. durch Dipol-Fallen vorstellen [15, 16, 17].

In der Tat soll es keine direkte Wechselwirkung zwischen den beiden Atomen geben, da zum einen die beiden betrachteten Atome so weit voneinander entfernt sein sollen, dass die langreichweitige Dipol-Dipol-Wechselwirkung (durch virtuellen Photonaustausch) vernachlässigt werden kann. Zum anderen sind die Atome elektrisch neutral und erfahren deshalb im Gegensatz zu Atomen in Ionenfallen keine Coulombwechselwirkung. Würde man Ionen verwenden, so könnte man die Coulombabstoßung in erster Näherung wieder durch ein harmonisches Potential beschreiben und anschließend die entsprechenden Eigenmoden des Systems verwenden. Allerdings treten dann kollektive Schwingungsmoden auf, weshalb die beiden Atome nicht mehr jeweils für sich betrachtet werden können. Insbesondere wirkt sich bei Wechselwirkung mit dem einen Atom (z.B. bei der Photonenstreuung) diese auch auf das andere aus (eben über die Coulombkraft). In der späteren Rechnung werden wir uns aber genau diese Unabhängigkeit der Atome zunutze machen. Die Festlegung auf zunächst nur neutrale Atome ist aber keine wesentliche Einschränkung, da man das zu erhaltende Resultat besagter Rechnung später trotzdem auf den allgemeineren Fall geladener Atome anwenden kann, insbesondere also beide Atome involvierende Schwingungsmoden berücksichtigt werden können.

Struktur der Streuer

Die Atome selbst werden als ideale Punktstreuer in Dipolnäherung beschrieben. Das heißt, die Ausdehnung und Form der Atome, insbesondere der elektronischen Hülle, kann vernachlässigt werden. In dem vorliegenden Fall optischer Photonen ist das auf jeden Fall gerechtfertigt, da

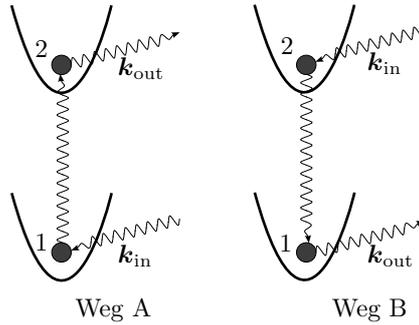


Abbildung 3.1.: Zwei Atome sind in unabhängigen harmonischen Fallen gefangen. An diesen wird ein Photon \mathbf{k}_{in} resonant gestreut. Die beiden Streualternativen der Doppelstreuung werden mit Weg A bzw. Weg B bezeichnet.

$\lambda_{\text{in}} \gg a_0$, wobei der Bohr'sche Radius a_0 die Größenordnung der Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktionen im Atom angibt. Daher kann auch die Wechselwirkung des Lichtes mit den Atomen in Dipolnäherung beschrieben werden, wobei in dem hier betrachteten Fall (quasi-)resonanter Streuung nur ein Dipolübergang mit der Energie ω_0 relevant ist, welcher durch die Frequenz der hier verwendeten Photonen festgelegt ist, d.h. $\omega_0 \approx \omega_{\text{in}}$. Die Wechselwirkung der Photonen mit anderen Übergängen kann dann vernachlässigt werden, wenn man weiterhin annimmt, dass die anderen angeregten Energieniveaus sehr viel weiter entfernt liegen als die charakteristischen Größen Lebenszeit $1/\Gamma$ des Übergangs und Verstimmung $\delta = \omega_{\text{in}} - \omega_0$ des Lasers von der Resonanz.

Bezüglich der internen Struktur respektive der internen Freiheitsgrade ist im Wesentlichen entscheidend, dass der Grundzustand nicht entartet ist. Insbesondere soll es sich um einen einfachen Grundzustand handeln, dessen Entartung beispielsweise nicht durch Hyperfeinkopplung aufgespalten ist. Denn wie in [10, 11] gezeigt, führt das Vorhandensein mehrerer Grundzustände zu einer signifikanten Abnahme der kohärenten Rückstreuintensität. Wir wollen uns jedoch in dieser Arbeit lediglich dem Einfluss externer Freiheitsgrade bzw. der Bewegungsfreiheitsgrade widmen. Daher betrachten wir hier den einfachsten realistischen Fall eines nicht-entarteten Grundzustandes ($J_g = 0$) und eines dreifach entarteten angeregten Zustandes $J_e = 1$, wie er z.B. zum in Strontium realisiert ist. Diese Situation ist gut geeignet, um experimentell die unerwünschte Einfachstreuung herauszufiltern, welche typischerweise um ein Vielfaches stärker ist als Doppelstreuung. Dazu verwendet man zirkular polarisierte einlaufende Photonen und detektiert in Rückstreurichtung nur jene mit erhaltener Helizität. Die Helizität ist der Spin eines Teilchens (bei Photonen ist das die zirkulare Polarisierung) projiziert auf seine Geschwindigkeitsrichtung. Bei Einfachstreuung wechselt die Helizität ihr Vorzeichen, analog zu der Reflexion an einem Spiegel, da zwar der Spin erhalten bleibt, die Richtung sich aber umkehrt (genauer hierzu findet sich in Anhang A). Die beschriebenen Verhältnisse sind in Abbildung 3.2 zusammengefasst.

Streuung von Photonen

Kommen wir nun zum Streuvorgang selbst. Das einlaufende Photon \mathbf{k}_{in} wird zunächst an Atom 1 gestreut (wie in Abb. 3.3 skizziert) und geht über in ein Photon \mathbf{k}' , welches anschlie-

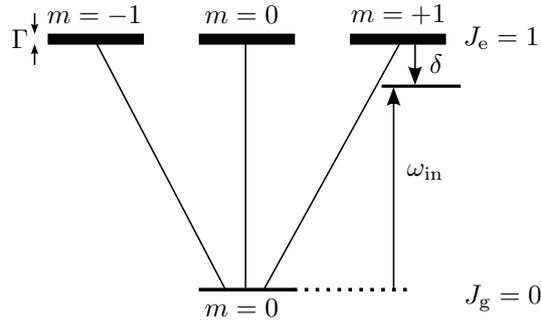


Abbildung 3.2.: Energieniveauschema: Der dreifach-entartete angeregte Zustand und der nicht-entartete Grundzustand $|g\rangle$ sind durch den Energieunterschied ω_0 getrennt. Der angeregte Zustand ist instabil gegenüber spontaner Emission mit der Lebensdauer $1/\Gamma$, dargestellt durch eine Verbreiterung des Niveaus.

ßend durch Atom 2 in den Photonen-Endzustand \mathbf{k}_{out} gestreut wird. Wir verwenden hier die so genannte ein-Photon-Näherung, welche im Grenzfall schwacher Laserintensitäten gültig ist: am gesamten Streuprozesses ist immer nur ein einziges Photon beteiligt. Mit anderen Worten heißt das, ein Photon des Sondenlasers sieht ein Atom immer im Grundzustand - die Intensität ist viel zu gering, als dass die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Photonen sich gleichzeitig am selben Atom treffen, merklich werden würde. Bei höheren Laserintensitäten treten aber genau diese Situationen auf, welche zu interessanten Sättigungseffekten führen [18, 19].

Die Schwerpunktspositionen der beiden Atome zum Zeitpunkt der Streuung sind einfach gegeben durch

$$\mathbf{R}_j(t) = \mathbf{R}_j^0 + \mathbf{u}_j(t) , \quad (3.1)$$

wobei $j = 1, 2$ für Atom 1 bzw. 2 steht. Wir nehmen an, dass die Oszillationen der atomaren Schwerpunkte wesentlich kleiner als der Ruheabstand $|\mathbf{R}_0|$ sind, d.h.

$$\langle \mathbf{u}_j^2 \rangle \ll \mathbf{R}_0^2 .$$

Wie zu Beginn schon erwähnt, soll der Abstand $|\mathbf{R}_0|$ zwischen beiden Atomen sehr viel größer als die Wellenlänge der beteiligten Photonen sein, d.h. $|\mathbf{R}_0|k_{in} \gg 1$. In unserem Fall bedeutet das nichts anderes, als dass die vom ersten Atom gestreute Wellenfunktion, noch bevor sie das zweite Atom erreicht, bereits wieder ihre asymptotische Form angenommen hat. Daher lässt sich der gesamte Streuprozess als Summe zweier individueller (unabhängiger) Streuprozesse auffassen, was die Rechnung wesentlich vereinfacht. Zuweilen spricht man auch von Fernfeld-Näherung.

Neben dem in Abb. 3.3 dargestellten Streupfad gibt es aber noch einen weiteren, bei dem die beiden Streuer ihre Rolle vertauschen. Wir nennen ersteren Weg A , den umgekehrten Weg B , so wie es in Abbildung 3.1 veranschaulicht wird.

Gleichgewichtszustand der atomaren Streuer

Es steht noch die Frage über den Anfangszustand der atomaren Bewegung aus. Dazu erinnern wir uns daran, dass wir letztendlich atomare Wolken beschreiben wollen, in welchen die

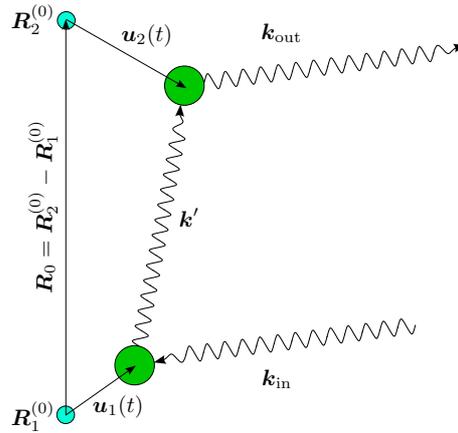


Abbildung 3.3.: Streugeometrie und Schwerpunktspositionen der atomaren Streuer, welche beide harmonisch gebunden sind und sich um ihre Ruhelagen \mathbf{R}_j^0 bewegen können (Auslenkung $\mathbf{u}_j(t)$). Das ein- bzw. auslaufende Photon ist mit \mathbf{k}_{in} bzw. \mathbf{k}_{out} bezeichnet, das zwischen den beiden Atomen ausgetauschte Photon mit \mathbf{k}' .

atomaren Streuer eine thermische Geschwindigkeitsverteilung besitzen. Daher liegt es nahe, auch in dem von uns betrachteten Fall den Atomen in den harmonischen Fallen eine thermische Anfangsverteilung entsprechend der Bose-Einstein-Statistik zu geben. Aber auch bei Atomen (dasselbe gilt natürlich auch für Ionen) ist diese effektive Beschreibung sinnvoll, wenn man bedenkt, dass wir hier nur den Grenzfall schwacher Laserintensitäten untersuchen. Die Kopplung an ein thermisches Bad erfolgt in diesem Fall durch die Kühl-Laser, deren Photondichte natürlich wesentlich größer ist als die des Untersuchungs-Lasers und damit auch die entsprechenden Streuraten. Betrachtet man einerseits wieder die atomare Wolke, so befinden sich in dieser sehr viele Atome, so dass die Wahrscheinlichkeit für die wiederholte Streuung von Photonen an einem bestimmten Atom viel zu gering ist, was in dem betrachteten Limes niedriger Intensitäten des Mess-Lasers eine sinnvolle Annahme ist. Andererseits wird durch alternierende Kühl- und Mess-Phasen das System zwischen den einzelnen Messungen wieder in das thermische Gleichgewicht relaxiert, welches durch Rückstoß-Impulsüberträge der Mess-Photonen gestört wurde. Die Photonen sehen also ein streuendes Atom immer im thermischen Gleichgewichtszustand.

4. Quantenmechanischer Streuquerschnitt der Doppelstreuung

Beginnen wir nun mit der eigentlichen Rechnung, welcher das in Kapitel 3 beschriebene Modell zugrundeliegt. Wir bestimmen den Übergangoperator der Doppelstreuung störungstheoretisch, woraus sich dann alle physikalischen Größen von Interesse berechnen lassen. Die Idee für das Modell und die Methode wurde inspiriert durch den Artikel von Itano *et al.* [20], in welchem jedoch nur Einfachstreuung untersucht wurde, wie in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Außerdem wurden dort Näherungen gemacht, welche sich hier als unzulänglich erweisen werden.

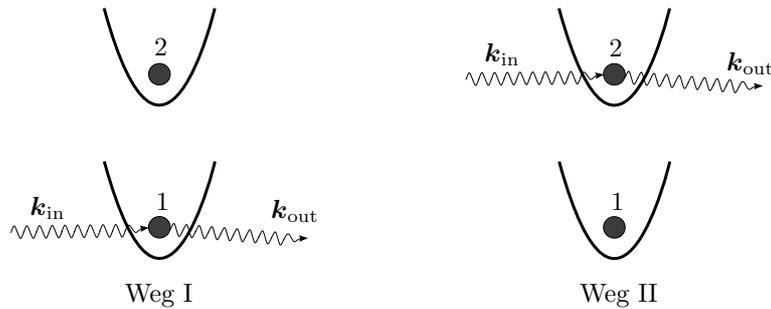


Abbildung 4.1.: Die in [20] betrachtete Streusituation, in der die beiden Amplituden der Einfachstreuung (Weg I/II) miteinander interferieren.

4.1. Hamiltonian des Systems

Wir beginnen mit dem Hamilton-Operator unseres Systems:

$$H = H_0 + V, \quad (4.1)$$

wobei V die Wechselwirkung zwischen Atomen und Photonen vermittelt und

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{ph} + H_{int} + H_{ext} \\ &= \sum_{\mu} \hbar\omega_{\mu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\mu} + \hbar\omega_0 (P_{e1} + P_{e2}) + \hbar\omega_h (\hat{N}_1 + \hat{N}_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

der ungestörte Hamiltonian ist, der sich aus 3 Beiträgen zusammensetzt.

H_{ph} ist der freie Hamiltonian für das Photonenfeld, wobei die Summation über $\mu = (\mathbf{k}, \hat{\mathbf{e}})$ als Summe über alle Feldmoden \mathbf{k} im Quantisierungsvolumen L^3 , mit jeweils 2 möglichen

transversalen Polarisationen $\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \perp \mathbf{k}$, zu verstehen ist, welche die Energie $\hbar\omega_\mu = ck$ besitzen. Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Photonen genügen den bekannten kanonischen Vertauschungsrelationen $[a_{\mu'}, a_\mu^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}'}}$. Ein-Photonen Fockzustände werden wir als $|\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}\rangle = a_{\mathbf{k}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}}^\dagger |0\rangle$ bezeichnen, wobei $|0\rangle$ den Vakuumzustand des quantisierten elektromagnetischen Feldes darstellt.

Der zweite Term H_{int} bezieht sich auf die internen Freiheitsgrade der Atome, welche sich in unserem Modell auf den resonanten Dipol-Übergang der Energie $\hbar\omega_0$ reduzieren lassen. Die $P_{ei} = \sum_{m_i} |m_i\rangle \langle m_i|$ (Atom $i = 1, 2$) sind Projektoren auf das Multiplett der angeregten Niveaus, gekennzeichnet durch die Drehimpulsquantenzahlen m_i . In unserem Fall $J_e = 1$ ist daher $m_i = 0, \pm 1$, der Grundzustand $|g\rangle$ ($J_g = 0$) ist nicht entartet.

Schließlich beschreibt H_{ext} die freie Schwerpunktsbewegung (externe Freiheitsgrade) der atomaren Streuer in der harmonischen Falle der Stärke ω_h . H_{ext} ist im Wesentlichen durch die Besetzungszahloperatoren $\hat{N}_i = \hat{N}_{ix} + \hat{N}_{iy} + \hat{N}_{iz} \equiv \hat{\mathbf{a}}_i^\dagger \cdot \hat{\mathbf{a}}_i$ für Atome $i = 1, 2$ gegeben. Dabei ist $\hat{\mathbf{a}}_i = (\hat{a}_{ix}, \hat{a}_{iy}, \hat{a}_{iz})$ ein Vektor aus Vernichtern für die 3 Komponenten der Schwerpunktsbewegung. Um Verwirrung mit den Photonenerzeugern und -vernichtern zu vermeiden, werden die Operatoren des harmonischen Potentials mit einem Dach versehen, obwohl sich das Auftreten der Photonenoperatoren auf dieses Unterkapitel beschränkt.

V können wir hier in der so genannten Dipol-Näherung verwenden, was deshalb möglich ist, da die Wellenlänge des Lichtes wesentlich größer ist als die Ausdehnung der elektronischen Wellenfunktionen innerhalb des Atoms. In einer geeigneten Eichung [12], der so genannten Längeneichung, kann man daher schreiben

$$V = -\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_1) - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}_2) , \quad (4.3)$$

mit dem elektrischen Feldoperator des quantisierten elektromagnetischen Feldes

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = i \sum_{\mu} \sqrt{\frac{\hbar\omega_\mu}{2\epsilon_0 L^3}} \left[a_{\mu} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mu} e^{i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{R}} - a_{\mu}^{\dagger} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mu}^* e^{-i\mathbf{k}_{\mu} \cdot \mathbf{R}} \right] . \quad (4.4)$$

Das Quantisierungsvolumen L^3 fällt am Ende der Rechnung im Limes $L^3 \rightarrow \infty$ wieder heraus. \mathbf{D}_1 bzw. \mathbf{D}_2 bezeichnen die Dipolübergangsoperatoren zwischen Grundzustand $|g\rangle$ und angeregten Zuständen $|m_i\rangle$ für Atom 1 bzw. 2. Da wir die Atome als Punktstreuer behandeln, können wir das elektrische Feld an den entsprechenden Schwerpunktskoordinaten (3.1) der Atome auswerten. Die Summe über μ besteht, wie schon zuvor, aus allen Feldmoden mit jeweils den beiden Polarisationsrichtungen $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mu}$.

Dieser Wechselwirkungsoperator koppelt nun alle, in H_0 zunächst unabhängigen Teilsysteme. Die Kopplung an die externen Freiheitsgrade erfolgt über die Schwerpunktskoordinaten \mathbf{R}_j , welche tatsächlich als Operatoren zu verstehen sind, da diese vom jeweiligen Zustand in der Falle abhängen. Explizit hat man

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_j^{(0)} + \mathbf{u}_j = \mathbf{R}_j^{(0)} + \lambda_h \left(\hat{\mathbf{a}}_j^{\dagger} + \hat{\mathbf{a}}_j \right) , \quad (4.5)$$

mit der charakteristischen Oszillatorlänge

$$\lambda_h = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_h}} \quad (4.6)$$

und der Masse m der Atome. Eventuelle Zeitabhängigkeiten der Erzeuger und Vernichter im Wechselwirkungsbild übertragen sich natürlich auf \mathbf{R}_j , wie dies in Formel (3.1) bereits angedeutet wurde.

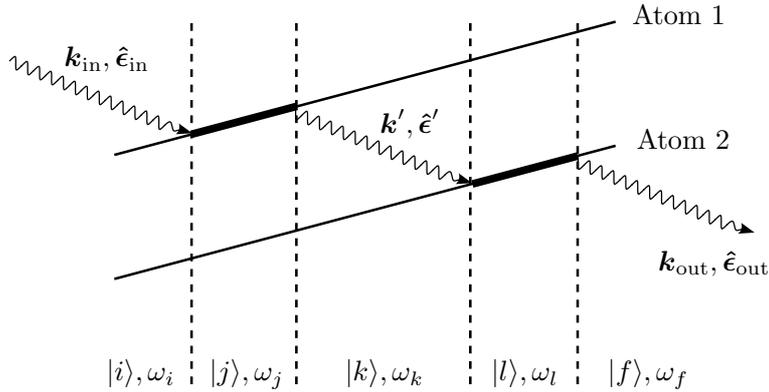


Abbildung 4.2.: Feynman-Graph der Doppelstreuung. Die dicken Linien kennzeichnen das Atom im angeregten Zustand. Jede der 4 gestrichelten vertikalen Linien beschreibt einen Absorptions- bzw. Emissionsprozess. Die unterste Zeile gibt die entsprechenden Zustände und Energien in den externen Freiheitsgraden an.

4.2. Übergangoperator

Wir gehen vom Übergangoperator T aus, welcher über den Streuoperator

$$S = \mathbb{1} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T(E_i + i\eta) \quad (4.7)$$

definiert ist, wobei letzterer im Gegensatz zu T den ungestreuten Anteil enthält. Das führt dazu, dass T im Allgemeinen kein unitärer Operator ist. Die Delta-Distribution sorgt für die Energieerhaltung des Streuprozesses im Langzeitlimit. Der kleine imaginäre Zusatz $i\eta$ mit positivem $\eta \rightarrow 0$ sorgt für die Retardierung der in T auftretenden Propagationen.

Der Übergangoperator ist als Born'sche Reihe gegeben durch [12]

$$T(z) = V + VG_0(z)V + VG_0(z)VG_0(z)V + VG_0(z)VG_0(z)VG_0(z)V + \dots, \quad (4.8)$$

wobei V das Wechselwirkungspotential bezeichnet, in unserem Fall also durch Gl. (4.3) gegeben ist. $G_0(z) = 1/(z - H_0)$ ist die Resolvente des freien Hamiltonians H_0 , d.h. die Fouriertransformierte des Zeitentwicklungsoperators $e^{-iH_0 t/\hbar}$.

$G_0(E_i + i\eta)$ beschreibt dabei die freie, *retardierte Propagation*, den *avancierten Propagator* erhält man entsprechend aus $G_0(E_i - i\eta)$.

Zu Beginn seien beide Atome im Grundzustand $|g\rangle$. Betrachten wir nun den für uns relevanten Prozess, in dem zunächst das einlaufende Photon, beschrieben durch eine ebene Welle im Fock-Zustand $|\mathbf{k}_{\text{in}}, \hat{\epsilon}_{\text{in}}\rangle = a_{\mathbf{k}_{\text{in}}, \hat{\epsilon}_{\text{in}}}^\dagger |0\rangle$, von Atom 1 absorbiert wird und als $|\mathbf{k}', \hat{\epsilon}'\rangle$ wieder emittiert wird. Anschließend wird das Photon von Atom 2 in den Endzustand $|\mathbf{k}_{\text{out}}, \hat{\epsilon}_{\text{out}}\rangle$ gestreut. Abbildung 4.2 soll die Situation veranschaulichen. Bei jedem dieser 4 Prozesse ändert sich natürlich der Zustand der externen Freiheitsgrade und damit die entsprechende Energie, bezeichnet mit ω_i für den Anfangszustand $|i\rangle \equiv |i_1, i_2\rangle$; $\omega_j, \omega_k, \omega_l$ für die Zwischenzustände und ω_f für den Endzustand $|f\rangle \equiv |f_1, f_2\rangle$.

Wir bemerken noch, dass wir V in der so genannten *rotating wave approximation* verwenden, d.h. wir vernachlässigen die antiresonanten Terme. Dies ist möglich, da wir (quasi-)resonante

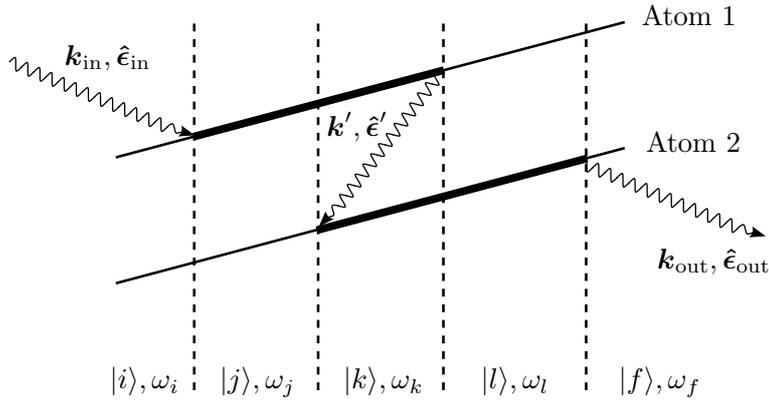


Abbildung 4.3.: Derselbe Prozess wie in Abb. 4.2, nur der Austausch des Photons \mathbf{k}' erfolgt als antiresonanter Prozess. Im Fall (quasi-)resonanter Streuung ist dieser jedoch vernachlässigbar.

Streuprozesse betrachten wollen. Ein solcher antiresonanter Prozess ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

Unser Prozess wird beschrieben durch den vierten Term in Gl. (4.8). Prozesse zweiter Ordnung treten bei uns deshalb nicht auf, da wir diese, wie weiter oben beschrieben, durch geeignete Polarisation der Photonen ausblenden wollen.

Wir können damit die Oszillator-Matrixelemente $\langle f|T(\omega_{\text{in}} + \omega_i + i\eta)|i\rangle$ des Übergangsoperators für unser System angeben, zunächst nur für Weg A:

$$\langle f|T_A|i\rangle = \frac{\omega_0 d^4}{\hbar(2\epsilon_0)^2 L^3 (2\pi)^3} \sum_{jkl} \int d^3\mathbf{k}' \omega' \sum_{\hat{\epsilon}' \perp \mathbf{k}'} (\hat{\epsilon}'_{\text{out}}^* \hat{\epsilon}') (\hat{\epsilon}'^* \hat{\epsilon}_{\text{in}}) \frac{\langle f|e^{-i\mathbf{k}'_{\text{out}} \mathbf{R}_2}|l\rangle \langle l|e^{i\mathbf{k}' \mathbf{R}_2}|k\rangle \langle k|e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{R}_1}|j\rangle \langle j|e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{R}_1}|i\rangle}{(\gamma - \omega_l + \omega_i) (\omega_{\text{in}} - \omega' - \omega_k + \omega_i + i\eta) (\gamma - \omega_j + \omega_i)}. \quad (4.9)$$

Die Summe über j, k, l läuft über den vollständigen Satz von Zwischenzuständen, charakterisiert durch die 6 Quantenzahlen, die man benötigt, um den Zustand der externen Freiheitsgrade vollständig zu beschreiben, d.h. jeweils 3 unabhängige harmonische Oszillatoren für die beiden Atome.

Bevor wir diesen Ausdruck vereinfachen werden, sind noch einige Bemerkungen angebracht. Der komplexe Parameter

$$\gamma \equiv \delta + i\Gamma/2 = \omega_{\text{in}} - \omega_0 + i\Gamma/2 \quad (4.10)$$

ist die Verstimmung von der Resonanz, erweitert um den rein imaginären Term $i\Gamma/2$ mit der spontanen Zerfallsrate Γ bzw. inversen Lebensdauer $1/\Gamma$. Die Ursache dieses Zusatzes liegt in der eigentlich immer vorhandenen Kopplung an die quantisierten Photonenmoden, in Verbindung mit den Vakuumsfluktuationen des elektromagnetischen Feldes. Zum einen führt das zu einer Termverschiebung (*Lamb-shift*), welche durch Renormierung der Übergangsenergie $\hbar\omega_0$ bereits berücksichtigt wurde. Andererseits erhalten angeregte Zustände einen zusätzlichen Imaginärteil $-i\Gamma/2$, als Ausdruck des spontanen Übergangs in die dicht liegenden Photonenzustände. Mathematisch lässt sich das erreichen, indem man einen Teil der Born'schen

Reihe (4.8) vollständig aufsummiert (siehe z.B. [12]). Im Prinzip sind das alle Terme, welche geschlossene Schleifen¹ bezüglich des entsprechenden instabilen Niveaus enthalten. Die einfachste Realisierung einer solchen Schleife ist die Emission eines Photons, welches gleich wieder durch denselben Übergang absorbiert wird.

An dieser Stelle bietet es sich an, zu erwähnen, dass es sich hier nicht um einen Prozess 4. Ordnung im eigentlichen Sinn handelt, sondern vielmehr um 2 Prozesse 2. Ordnung. Der Grund ist einfach, dass die beiden Atome um viele Lichtwellenlängen voneinander entfernt sind. Jeder Prozess, der beide Atome involviert, ist von höherer Ordnung in $1/k_{\text{in}}R_0$, insbesondere in Bezug auf die oben erwähnten Schleifen. Wir sind jedoch nur an der führenden Ordnung in $1/k_{\text{in}}R_0$ interessiert. Daher sind die hier auftretenden Zerfallsraten Γ in der Tat jene für das isolierte Atom. Oder anders ausgedrückt: die vom ersten Atom gestreute Wellenfunktion nimmt bereits wieder ihre asymptotische Form an, noch bevor sie das zweite Atom erreicht, sprich, es befindet sich im Fernfeld der Streuwelle.

Die Herkunft von Faktoren der Form $d^2(\hat{\epsilon}'^*\hat{\epsilon}_{\text{in}})$ wird in Anhang A genauer erläutert. d ist im Prinzip ein Maß für die Stärke der Kopplung des Photonenfeldes an den Dipolübergang.

Die Summe über die beiden Polarisierungen $\hat{\epsilon}'$ kann ersetzt werden durch

$$\sum_{\hat{\epsilon}' \perp \hat{\mathbf{k}}'} (\hat{\epsilon}'_{\text{out}}^* \hat{\epsilon}') (\hat{\epsilon}'^* \hat{\epsilon}_{\text{in}}) = \hat{\epsilon}'_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{k}}'} \hat{\epsilon}_{\text{in}} , \quad (4.11)$$

wobei

$$\Delta_{\hat{\mathbf{k}}} \equiv \mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

der Projektor auf die zu dem Einheitsvektor $\hat{\mathbf{k}}$ senkrechte Ebene ist.²

Die Energieerhaltung fordert, dass die Frequenz des auslaufenden Photons \mathbf{k}_{out}

$$\omega_{\text{out}} = \omega_{\text{in}} + (\omega_i - \omega_f) \quad (4.13)$$

beträgt. Allerdings macht man bei dem hier betrachteten optischen Übergang keinen Fehler, wenn man im Vorfaktor $\omega_{\text{in}} \approx \omega_{\text{out}} \approx \omega_0$ setzt, insbesondere ist $\Gamma \ll \omega_0$. Wir werden dies von nun an stillschweigend ausnutzen.

Jedes der 4 Matrixelemente faktorisiert in ein Produkt aus einem Matrixelement bezüglich nur eines Atoms und einem Kronecker-Delta, da das Beobachteratom seinen Zustand nicht ändert. Ein Teil der Summen über die Oszillatorzustände kann dann direkt ausgeführt werden und es lässt sich schreiben

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2 | T_A | i_1, i_2 \rangle &= \frac{\omega_0 d^4}{\hbar (2\epsilon_0)^2 L^3 (2\pi)^3} \sum_{jl} \frac{\langle f_2 | e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{R}_2} | l \rangle \langle j | e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{R}_1} | i_1 \rangle}{(\gamma - \Delta\omega_{l2} - \Delta\omega_{f1})(\gamma - \Delta\omega_{j1})} \\ &\quad \langle f_1, l | \int d^3\mathbf{k}' \omega' (\hat{\epsilon}'_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{k}}'} \hat{\epsilon}_{\text{in}}) \frac{e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{\omega_{\text{in}} - \omega' - \Delta\omega_{f1} + i\eta} | j, i_2 \rangle , \quad (4.14) \end{aligned}$$

wobei jetzt die Summation über j bzw. l den vollständigen Satz von Oszillatorzuständen bezüglich jeweils nur Atom 1 bzw. Atom 2 durchläuft. Die im Energienenner auftretenden

¹Sie sind besser bekannt unter der Bezeichnung *loops*. Diese sind im Sinne von Feynman-Graphen zu verstehen.

² $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$ ist das dyadische Produkt zweier Vektoren, d.h. $(\mathbf{a} \circ \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j$.

Energiedifferenzen beziehen sich dann ebenfalls jeweils nur auf das entsprechende Atom, z.B. $\Delta\omega_{f1} \equiv (\omega_f - \omega_i)_1$, $\Delta\omega_{j1} \equiv (\omega_j - \omega_i)_1$ für Atom 1.

Richten wir unser Augenmerk nun auf das \mathbf{k}' -Integral, d.h. den freien Propagator des zwischen den beiden Atomen ausgetauschten Photons \mathbf{k}' . Unter Verwendung von

$$\int d^3\mathbf{k} \Delta_{\hat{\mathbf{k}}} f(k) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = 4\pi \int_0^\infty k^2 dk f(k) \left\{ \frac{\sin(kx)}{kx} \Delta_{\hat{\mathbf{x}}} + \frac{1}{k^2 x^2} \left(\cos(kx) - \frac{\sin(kx)}{kx} \right) (1 - 3\hat{\mathbf{x}} \circ \hat{\mathbf{x}}) \right\} \quad (4.15)$$

können wir die Winkelintegration ausführen, so dass sich im Fernfeld (nur der führende Term in $1/kx$) für den freien Photonenpropagator (untere Zeile in (4.14)), im Folgenden mit P_{ph} bezeichnet, ergibt:

$$P_{\text{ph}} = \frac{2\pi}{ic^2 |\mathbf{R}_{21}|} \int_0^\infty \frac{d\omega' \omega'^2}{\omega_{\text{in}} - \omega' - \Delta\omega_{f1} + i\eta} \left(e^{i\frac{\omega'}{c} |\mathbf{R}_{21}|} - e^{-i\frac{\omega'}{c} |\mathbf{R}_{21}|} \right) \Delta_{\mathbf{R}_{21}},$$

dabei ist $\mathbf{R}_{21} \equiv \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ der Schwerpunktsabstand der Streuer. Die untere Integrationsgrenze kann mit verschwindendem Fehler bis $-\infty$ ausgedehnt werden³

$$P_{\text{ph}} \approx \frac{2\pi}{ic^2 |\mathbf{R}_{21}|} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega' \omega'^2}{\omega_{\text{in}} - \omega' - \Delta\omega_{f1} + i\eta} \left(e^{i\frac{\omega'}{c} |\mathbf{R}_{21}|} - e^{-i\frac{\omega'}{c} |\mathbf{R}_{21}|} \right) \Delta_{\mathbf{R}_{21}},$$

und mit Hilfe des Residuensatzes folgt schließlich

$$P_{\text{ph}} \approx - \frac{(2\pi)^2 \omega_{\text{in}}^2}{c^2 |\mathbf{R}_{21}|} e^{i(\omega_{\text{in}} - \Delta\omega_{f1}) |\mathbf{R}_{21}|/c} \Delta_{\mathbf{R}_{21}}, \quad (4.16)$$

wobei der zweite Term verschwindet, da in der unteren komplexen Halbebene keine Polstellen existieren.

Dass im Fernfeld nur $\Delta_{\mathbf{R}_{21}}$ auftritt, ist nicht weiter verwunderlich, da mit Hilfe des Arguments der stationären Phase und $k' |\mathbf{R}_{21}| \gg 1$ die Hauptbeiträge zum \mathbf{k}' -Integral von Werten $\hat{\mathbf{k}}' \parallel \mathbf{R}_{21}$ zu erwarten sind.

Erinnern wir uns daran, dass die in den Beträgen auftretenden \mathbf{R}_j eigentlich Operatoren sind, welche auf die Zustände der Schwerpunktsbewegung wirken. Anstatt des ursprünglichen Integrals haben wir nun den komplizierten Operatorausdruck (4.16), welcher jedoch schwer zu handhaben ist. Daher machen wir von der Annahme

$$\langle u_j^2 \rangle \ll R_0$$

Gebrauch, und entwickeln diesen Ausdruck für kleine Auslenkungen \mathbf{u}_j . Für den Abstandsbetrag ergibt sich zusammen mit Gleichung (4.5)

$$|\mathbf{R}_{21}| \approx R_0 + \hat{\mathbf{R}}_0 (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \quad (4.17)$$

³Der Fehler, den man dabei macht ist von der Größenordnung des antiresonanten Beitrags aus Abbildung 4.3. In der Tat kompensiert dieser antiresonante Term näherungsweise den Fehler, den man durch die Ausdehnung der Integralgrenze macht.

bis zu linearen Termen in \mathbf{u}_j . Wir bezeichnen mit $\mathbf{R}_0 \equiv \mathbf{R}_2^{(0)} - \mathbf{R}_1^{(0)}$ den Verbindungsvektor der Ruhepositionen der beiden Atome, R_0 ist der Betrag dieses Abstandes und $\hat{\mathbf{R}}_0$ ist der Einheitsvektor der Verbindungsrichtung.

Die Differenz \mathbf{R}_{21} tritt in Gleichung (4.16) an drei verschiedenen Stellen auf: In der Amplitude, in der Phase und dem Projektor $\Delta_{\mathbf{R}_{21}}$, letzterer ist eine Folge der transversalen Polarisierung der Photonen.

Es zeigt sich nun, dass in führender Ordnung $\langle u^2 \rangle / R_0^2$ nur Variationen in der Phase relevant sind und nicht jene in der Amplitude bzw. in der Polarisierung.

In der Tat erwarten wir den dominanten Beitrag von Änderungen in Phasenfaktoren der Form $e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}}$, da $\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}$ in der Größenordnung von 1 bereits drastischen Einfluss auf T hat, während in der Amplitude $1/k_{\text{in}}R$ diese noch vernachlässigbar sind, da wir uns im Regime $k_{\text{in}}R_0 \gg 1$ befinden. Ebenso können wir $\Delta_{\mathbf{R}_{21}} \approx \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0}$ setzen, d.h. die Polarisierung liegt näherungsweise in der Ebene senkrecht zur Verbindungsachse der beiden Ruhepositionen.

Damit nimmt der freie Photonpropagator (4.16) folgende, wesentlich einfachere Form

$$P_{\text{ph}} \approx -\frac{(2\pi)^2 \omega_{\text{in}}^2}{c^2 R_0} e^{i(\omega_{\text{in}} - \Delta\omega_{f1})R_0/c + i\omega_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)/c} \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \quad (4.18)$$

an, wobei der Term $\Delta\omega_{f1}\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{u}_j/c$ in der Phase vernachlässigt wurde. Wir werden später sogar Terme der Form $\Delta\omega_{f1}R_0/c$ weglassen (siehe ausführliche Diskussion in Abschnitt 4.5).

Für den Ausdruck des Übergangsoperators (4.14) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \langle f|T_A|i\rangle &= -\aleph \frac{1}{R_0} e^{i(\omega_{\text{in}} - \Delta\omega_{f1})R_0/c} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{R}_2^{(0)}} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{R}_1^{(0)}} (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}) \\ &\sum_{jl} \frac{\langle f_2|e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{u}_2}|l\rangle \langle l|e^{i\omega_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{u}_2/c}|i_2\rangle \langle f_1|e^{-i\omega_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{u}_1/c}|j\rangle \langle j|e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}_1}|i_1\rangle}{(\gamma - \Delta\omega_{l2} - \Delta\omega_{f1})(\gamma - \Delta\omega_{j1})}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die konstanten Vorfaktoren wurden in $\aleph \equiv \frac{d^4\omega_0^3}{\hbar(2\pi)(2\epsilon_0)^2 L^3 c^2}$ zusammengefasst. Den entsprechenden Übergangsoperator für Weg B erhält man aus T_A durch die Vertauschungen $\mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2$, d.h.

$$\begin{aligned} \langle f|T_B|i\rangle &= -\aleph \frac{1}{R_0} e^{i(\omega_{\text{in}} - \Delta\omega_{f2})R_0/c} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{R}_1^{(0)}} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{R}_2^{(0)}} (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}) \\ &\sum_{jl} \frac{\langle f_1|e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{u}_1}|l\rangle \langle l|e^{-i\omega_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{u}_1/c}|i_1\rangle \langle f_2|e^{i\omega_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0\mathbf{u}_2/c}|j\rangle \langle j|e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}_2}|i_2\rangle}{(\gamma - \Delta\omega_{l1} - \Delta\omega_{f2})(\gamma - \Delta\omega_{j2})}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dabei ist zu beachten, dass Permutation von Atom 1 und 2 das Vorzeichen von $\hat{\mathbf{R}}_0$ bzw. $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_2^{(0)} - \mathbf{R}_1^{(0)}$ umkehrt.

Zunächst wollen wir uns mit den Operatoren in dieser Form zufrieden geben und daraus ein erstes, physikalisch relevantes Ergebnis ableiten.

4.3. Streuquerschnitt

Der Streuquerschnitt σ_{fi} für den Übergang von $|i\rangle$ nach $|f\rangle$ ergibt sich aus der Übergangsrate Γ_{fi} durch Normierung auf den einlaufenden Photonstrom $\frac{c}{L^3}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{fi} &= \frac{L^3}{c} \frac{2\pi}{\hbar} \Gamma_{fi} \\
&= \frac{L^3(2\pi)}{\hbar^2 c} \sum_{\mathbf{k}_{\text{out}}} \delta(\omega_{\text{out}} - \omega_{\text{in}} + \omega_f - \omega_i) \left| \langle f | T_A + T_B | i \rangle \right|^2 \\
&= \frac{L^3(2\pi)}{\hbar^2 c^4} \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \omega_{\text{out}}^2 d\omega_{\text{out}} d\Omega_{\text{out}} \delta(\omega_{\text{out}} - \omega_{\text{in}} + \omega_f - \omega_i) \left| \langle f | T_A + T_B | i \rangle \right|^2,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

womit sich für den winkelauflösenden differentiellen Streuquerschnitt für das Photon ergibt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{out}}} = \left\langle \sum_f \frac{d\sigma_{fi}}{d\Omega_{\text{out}}} \right\rangle_i = \frac{\omega_0^2 L^6}{(2\pi)^2 \hbar^2 c^4} \left\langle \sum_f \left| \langle f | T_A + T_B | i \rangle \right|^2 \right\rangle_i. \tag{4.22}$$

\sum_f summiert über alle Endzustände der externen Freiheitsgrade. Die thermische Mittelung $\langle \rangle_i$ erfolgt über die nach der Bose-Einstein-Statistik verteilten Anfangszustände der externen Freiheitsgrade, d.h. dem Zustand $|i\rangle$ wird das statistische Gewicht

$$p_i = \langle i | e^{-\beta H_{\text{ext}}} | i \rangle / Z$$

zugeordnet, mit der inversen Temperatur $\beta = 1/k_B T$ und der Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{ext}}}. \tag{4.23}$$

Mit Hilfe der Dichtematrix $\rho^{(i)} = e^{-\beta H_{\text{ext}}} / Z$ für den Anfangszustand der Schwerpunktsbewegung können wir auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{out}}} &= \left(\frac{\omega_0 L^3}{(2\pi) \hbar c^2} \right)^2 \text{Tr} \left\{ (T_A + T_B) \rho^{(i)} (T_A + T_B)^\dagger \right\} \\
&= \left(\frac{\omega_0 L^3}{(2\pi) \hbar c^2} \right)^2 \left[\underbrace{\text{Tr} \left\{ T_A \rho^{(i)} T_A^\dagger + T_B \rho^{(i)} T_B^\dagger \right\}}_L + 2 \text{Re} \text{Tr} \left\{ T_B \rho^{(i)} T_A^\dagger \right\} \right],
\end{aligned} \tag{4.24}$$

wobei die Spur nur bezüglich der externen Freiheitsgrade zu nehmen ist. Man erkennt, dass das eingeführte Quantisierungsvolumen L^3 im Ausdruck für den Streuquerschnitt herausfällt, so wie es natürlich sein muss. Im letzten Schritt haben wir den Streuquerschnitt in zwei Anteile zerlegt, in obiger Reihenfolge sprechen wir von inkohärentem Anteil L (*ladder term*) und kohärentem Anteil C (*crossed term*), welcher für die Interferenz verantwortlich ist. Die in Klammern angegebenen Namen rühren von diagrammatischer Störungstheorie [13] her, da das zum jeweiligen Teil gehörende Diagramm entsprechende Gestalt hat.

Der inkohärente Beitrag L liefert die nur schwach winkelabhängige Hintergrundintensität, während das durch C gegebene Interferenzmuster hier auf der Skala $1/k_{\text{in}} R_0$ stark variiert.

4.4. Kohärente und inkohärente Anteile in nullter Näherung

Betrachtet man die Ausdrücke für die beiden Übergangsoperatoren T_A, T_B (Formeln (4.19), (4.20)) genauer, so stellt man fest, dass die darin auftretenden Energiedifferenzen $\hbar\Delta\omega$ der externen Freiheitsgrade die Rechnung wesentlich erschweren. Daher vernachlässigen wir zunächst alle diese Korrekturen, um zu sehen, ob es bereits interessante Effekte gibt. Da wir diese Energiekorrekturen komplett vernachlässigen, sprechen wir von einer Näherung in nullter Ordnung. Die Gültigkeit dieses Regimes liegt in einem Bereich, in dem Energieüberträge (z.B. durch Rückstoß oder Dopplerverschiebung) gegenüber Γ komplett vernachlässigbar sind. Diese grobe Vereinfachung ermöglicht uns die Elimination der Summen über j, l durch Ausnutzen der Vollständigkeitsrelation für den kompletten Satz der Zustände des Systems der harmonischen Oszillatoren. Daher können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega_{\text{out}}} &= \left(\frac{d^2\omega_0^2}{2\epsilon_0(2\pi)\hbar c^2} \right)^4 \frac{1}{R_0^2} \frac{1}{|\gamma|^4} \left| \hat{\epsilon}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\epsilon}_{\text{in}} \right|^2 \left\langle \sum_f |X_A + X_B|^2 \right\rangle_i \\ &= \aleph \left| \hat{\epsilon}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\epsilon}_{\text{in}} \right|^2 \left\langle \sum_f \left\{ |X_A|^2 + |X_B|^2 + 2\text{Re}(X_A^* X_B) \right\} \right\rangle_i \\ &= L^{(0)} + C^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

mit unbedeutenden Vorfaktoren, welche wieder in einer Konstanten \aleph versteckt wurden. Dabei ist

$$\begin{aligned} |X_A + X_B|^2 &= \left| \langle f | e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{u}_2} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{u}_2} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{u}_1} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}_1} | i \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{R}_0} \langle f | e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{u}_1} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{u}_1} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{u}_2} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}}\mathbf{u}_2} | i \rangle \right|^2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

mit $\mathbf{k}' \equiv \omega_{\text{in}} \hat{\mathbf{R}}_0 / c$.

Die beiden Terme, welche $L^{(0)}$ ergeben, sind trivial unter Verwendung von

$$\sum_f \left| \langle f | e^{i\mathbf{k}\mathbf{u}} | i \rangle \right|^2 = \sum_f \langle i | e^{-i\mathbf{k}\mathbf{u}} | f \rangle \langle f | e^{i\mathbf{k}\mathbf{u}} | i \rangle = \langle i | i \rangle = 1, \quad (4.27)$$

während der Mischterm nach thermischer Mittelung

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_f X_A^* X_B \right\rangle_i &= e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{R}_0} \left\langle e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)} \right\rangle_{i_1, i_2} \\ &= e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{R}_0} \exp \left\{ - \left\langle ((\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{u})^2 \right\rangle \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ist. Im letzten Schritt wurde von der für den harmonischen Oszillator gültigen Beziehung $\langle e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{u}} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle (\mathbf{k}\mathbf{u})^2 \rangle}$ Gebrauch gemacht.⁴ Das mittlere Amplitudenquadrat der Schwerpunktsbewegung im harmonischen Oszillator lautet

$$\left\langle ((\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{u})^2 \right\rangle = 2(1 + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}) \frac{\omega_{\text{r}}}{\omega_{\text{h}}} (2\langle n \rangle + 1), \quad (4.29)$$

⁴Man bemerke die Analogie zu Gl. (2.16). In der Tat handelt es sich hierbei ebenfalls um Gauß'sche Integration.

wobei $\hbar\omega_r \equiv \hbar^2 k_{in}^2/2m$ die Rückstoßenergie ist und $\langle n \rangle = (e^{\beta\hbar\omega_h} - 1)^{-1}$ die Bose-Einstein Verteilungsfunktion für einen harmonischen Oszillator in einer Dimension.

Das auf die inkohärente Intensität $L^{(0)} = |X_A|^2 + |X_B|^2$ normierte Interferenzmuster ist schließlich:

$$1 + \frac{C^{(0)}}{L^{(0)}} = 1 + \cos[\mathbf{R}_0(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out})] \cdot \exp\left\{-2(1 + \hat{\mathbf{k}}_{in}\hat{\mathbf{k}}_{out})\frac{\omega_r}{\omega_h}(2\langle n \rangle + 1)\right\}. \quad (4.30)$$

Der zweite Term beschreibt die Interferenz, moduliert mit einem von der Temperatur abhängigen Exponentialfaktor ähnlich dem Debye-Waller-Faktor [21]. Dabei beschreibt $\mathbf{R}_0(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out})$ die räumliche Phasendifferenz zwischen den beiden Streupfaden. In Rückrichtung $\mathbf{k}_{out} = -\mathbf{k}_{in}$ ist diese Differenz Null, wie man sich auch leicht bildlich klarmachen kann.

Wie erwartet nimmt mit steigender Temperatur der Interferenzkontrast ab. Den dafür verantwortlichen Exponentialfaktor können wir noch etwas umschreiben, indem wir die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ durch ein effektives mittleres Geschwindigkeitsquadrat im harmonischen Oszillator ausdrücken. Dies erreichen wir durch den thermischen Erwartungswert des quadrierten Impulsoperators

$$\begin{aligned} m^2 v_{rms}^2 &= \langle p^2 \rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega_h m \langle (\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}})^2 \rangle = \frac{d}{2}\hbar\omega_h m (2\langle n \rangle + 1) \\ \Rightarrow k_{in}^2 v_{rms}^2 &= d\omega_r\omega_h (2\langle n \rangle + 1), \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit der Dimension d , welche wir immer als $d = 1$ annehmen, d.h. v_{rms} verwenden wir durchgehend als mittleres Geschwindigkeitsquadrat bezüglich einer Geschwindigkeitsverteilung in einer Dimension.

Wir geben das Resultat noch einmal in dieser Form an:

$$1 + \frac{C^{(0)}}{L^{(0)}} = 1 + \cos[\mathbf{R}_0(\mathbf{k}_{in} + \mathbf{k}_{out})] \cdot \exp\left\{-2(1 + \hat{\mathbf{k}}_{in}\hat{\mathbf{k}}_{out})\left(\frac{k_{in}v_{rms}}{\omega_h}\right)^2\right\}. \quad (4.32)$$

Die hier auftretende Energie der Form $k_{in}v_{rms}$ hat nun eine anschauliche Bedeutung: sie ist die Dopplerverschiebung aufgrund eines bewegten Atoms mit Geschwindigkeit v_{rms} . Diese Energie ist charakteristisch für Energieüberträge auf das Atom durch den Rückstoßimpuls des Photons. Terme derselben Form traten zuvor schon in den Formeln (2.1)-(2.3) auf. Offensichtlich treten Korrekturen aufgrund thermischer Schwerpunktsbewegung auf einer Skala $k_{in}v_{rms}/\omega_h$ auf.

Wir haben zuvor erwähnt, dass wir besonderes Interesse am Fall freier Streuer haben. Man muss jedoch Vorsicht walten lassen, wenn man sich dem Grenzfall $\omega_h \rightarrow 0$ nähert, da ω_h immer hinreichend groß sein muss, um die Annahme $\langle u^2 \rangle \ll R_0^2$ nicht zu verletzen. Die Amplitude der Oszillation wird entsprechend mit der charakteristischen Oszillatorlänge $\lambda_h = \sqrt{\hbar/2m\omega_h}$ skaliert, welche für $\omega_h \rightarrow 0$ divergieren würde (und damit der Interferenzterm in Formel (4.30) verschwinden würde). Man kann also nicht einfach den Limes $\omega_h \rightarrow 0$ im streng mathematischen Sinn nehmen, um den Fall freier Atome zu erhalten.

Andererseits gibt es aber auch einen von der Streugeometrie abhängigen Faktor $(1 + \hat{\mathbf{k}}_{in}\hat{\mathbf{k}}_{out})$: in Rückstreurichtung ist dieser 0 und es gibt keinen abschwächenden Effekt, man erhält also den idealen Interferenzkontrast 1! In Vorwärtsrichtung ist der Effekt maximal. Das heißt jedoch, dass Interferenz in Rückstreurichtung wesentlich robuster gegenüber thermischen Einflüssen ist als alle anderen Richtungen und somit ausgezeichnet ist. Dieses Verhalten werden wir nun näher beleuchten.

4.4.1. Interpretation und welcher-Weg Information

Wir können obiges Resultat im Rahmen von *welcher-Weg Information* und *Quantendualität* interpretieren. Wir tun dies in Vorgriff auf das nachfolgende Kapitel 6, in welchem wir diese Begriffe genauer und auch quantitativer betrachten werden. Wir benötigen an dieser Stelle nur das aus der Quantentheorie folgende fundamentale Prinzip, dass Teilcheneigenschaften (man kennt die Trajektorie des Teilchens) und Welleneigenschaften (Interferenz) zueinander komplementär sind. Dass heißt, wenn wir nach der Streuung eines Photons dessen Weg bestimmen können, beispielsweise durch eine geeignete Messung an den Freiheitsgraden der Schwerpunktsbewegung, führt das zwangsläufig zu einer Abnahme der Interferenz. In der Tat kann man aus den Impulsüberträgen der Photonen auf die Atome Information über den gewählten Weg des Photons gewinnen. Und dass diese Information im System verfügbar ist, und im Prinzip durch eine Messung erhalten werden kann, reicht auch schon aus, um die Interferenz zu zerstören.

Die Beschränkung auf die beiden Extremfälle $\mathbf{k}_{\text{out}} = \mathbf{k}_{\text{in}}$ und $\mathbf{k}_{\text{out}} = -\mathbf{k}_{\text{in}}$ ist hinreichend, um das Wesentliche zu verstehen.

Aus Abbildung 4.4 ist ersichtlich, dass bei Vorwärtsstreuung der Unterschied in den beiden Wegen A und B maximal ist, da die Impulsüberträge in Richtung \mathbf{k}_{in} für beide Wege genau entgegengesetzt zueinander sind. In Rückstreurichtung $\mathbf{k}_{\text{out}} = -\mathbf{k}_{\text{in}}$ sind dagegen die Impulsüberträge gleich, unabhängig davon, welchen Weg das Photon gelaufen ist. In letzterem Fall liefert also die Bestimmung der Impulsüberträge allein keinerlei Information über den Weg des Photons. Diese Aussagen sind in völliger Übereinstimmung mit Gleichung (4.30).

Der Effekt, den wir in nullter Näherung berechnet haben rührt also alleine von der Tatsache her, dass wir im System der Schwerpunktsbewegung für beide Wege *nicht identische Impulsüberträge* hinterlassen. Genau der gleiche Mechanismus ist auch für den in [22, 20] betrachteten Fall der Einzelstreuung (siehe Abbildung 4.1) für die Abnahme des Interferenzkontrastes verantwortlich. In der Tat ist der dort angegebene Ausdruck von derselben Struktur wie Gl. (4.30), mit dem Unterschied, dass der relevante Geometriefaktor durch den Impulsübertrag $\mathbf{k}_{\text{out}} - \mathbf{k}_{\text{in}}$ gegeben ist, d.h. die Richtungsabhängigkeit ist genau umgekehrt zu unserem Fall. Mit ähnlicher Argumentation wie bei der Doppelstreuung ist das auch sofort einsichtig: bei Vorwärtsstreuung gibt es keinen Nettoimpulsübertrag (da aufgenommener und abgegebener Impuls genau in entgegengesetzter Richtung liegen) und der Betrag des Impulses selbst ist nicht länger geeignet, um welcher-Weg Information aus der Schwerpunktsbewegung zu extrahieren.

4.4.2. Konfigurationsmittel und Einfluss auf den Rückstreukonus

Wir haben zuvor gesehen, dass der Grenzfall $\omega_{\text{h}} \rightarrow 0$ freier Streuer in Formel (4.30) Probleme bereitet. Andererseits sind wir aber hauptsächlich an der kohärenten Rückstreuung interessiert, bei welcher der Geometriefaktor $1 + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$ verschwindet und damit den Grenzfall freier Streuer retten könnte. Untersuchen wir daher den Einfluss von Ergebnis (4.28) insbesondere auf den Rückstreukonus. Dieser liegt symmetrisch um die exakte Rückstreurichtung $\theta = 0$ und hat eine charakteristische Breite $\Delta\theta \approx 1/k_{\text{in}}l$, wobei l eine typische Streulänge in der atomaren Wolke ist. Der Konus selbst ist eine Folge der Konfigurationsmittelung über alle atomaren Positionen. Die Interferenz wird dabei für Richtungen weit weg von der Rückstreu-

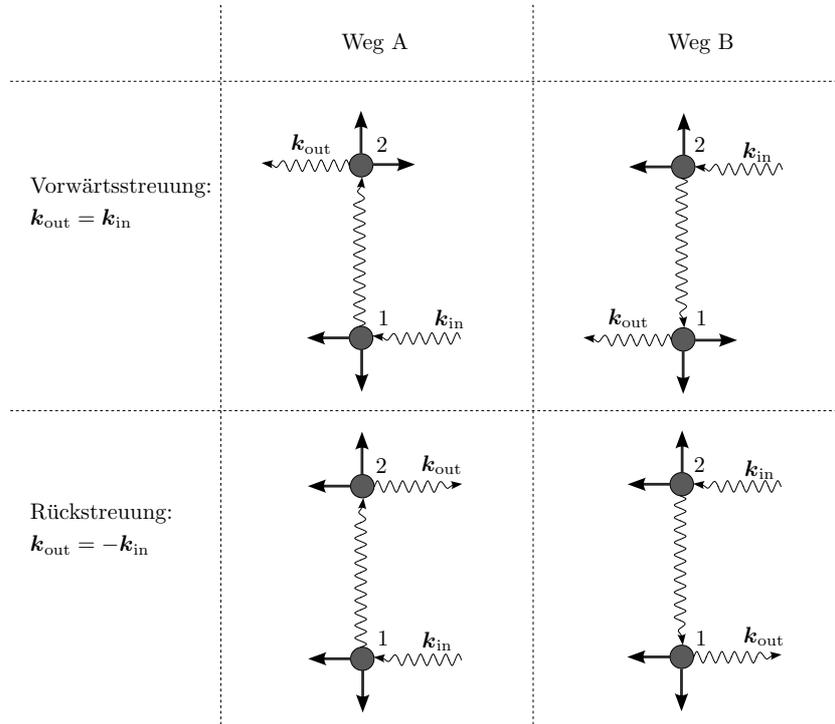


Abbildung 4.4.: Impulsüberträge (dargestellt durch dicke Pfeile) auf die Atome bei Vorwärtsstreuung $\mathbf{k}_{\text{out}} = \mathbf{k}_{\text{in}}$ (oben) und Rückstreuung $\mathbf{k}_{\text{out}} = -\mathbf{k}_{\text{in}}$ (unten), jeweils für Weg A bzw. B.

richtung weggemittelt, nur ganz in der Nähe dieser ausgezeichneten Richtung überlebt die Interferenz diese Prozedur und formt den Rückstreukonus.

Um das Gesagte in mathematischer Weise zu illustrieren, soll diese Mittelung über alle Positionen der beiden Streuer explizit anhand des Ergebnisses in nullter Näherung durchgeführt werden. Wegen der Translationsinvarianz des Gesamtsystems ist eine Mittelung über alle Relativpositionen \mathbf{R}_0 ausreichend. Aus Gründen der Einfachheit wird der richtungsabhängige Vorfaktor $|\hat{\mathbf{e}}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\mathbf{e}}_{\text{in}}|$ weggelassen. Dann ergibt sich mit (4.25)-(4.28)

$$\left\langle L^{(0)} + C^{(0)} \right\rangle_{\mathbf{R}_0} = 2 + 2\text{Re} \left\langle e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}})\mathbf{R}_0} \right\rangle_{\mathbf{R}_0} e^{-(\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} + \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}})^2 k_{\text{in}}^2 \langle u^2 \rangle}. \quad (4.33)$$

Wenn man bedenkt, dass in atomaren Wolken die beiden Streuer typischerweise im Abstand von der Größenordnung der mittleren Streulänge l liegen, so ist die Mittelung über alle Abstände $|\mathbf{R}_0|$ mit einem geeigneten Gewichtungsfaktor $P(\mathbf{R}_0)$ zu versehen. In der Regel wählt man

$$P(\mathbf{R}_0) = \frac{1}{8\pi l^3} e^{-R_0/l}, \quad (4.34)$$

so dass sich die Lorentzkurve

$$\left\langle e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}_0} \right\rangle_{\mathbf{R}_0} = \frac{1}{(1 + l^2 k^2)^2} \quad (4.35)$$

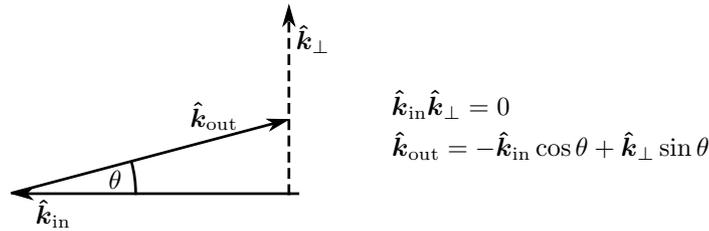


Abbildung 4.5.: Zur Definition von θ .

ergibt. Weiterhin ist (siehe Abbildung 4.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}} = k_{\text{in}}(\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} + \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}) = k_{\text{in}} \left[\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}(1 - \cos \theta) + \hat{\mathbf{k}}_{\perp} \sin \theta \right] \\ &\Rightarrow (\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} + \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}})^2 = 2 - 2 \cos \theta = 4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \theta^2, \end{aligned} \quad (4.36)$$

wobei der letzte Schritt wegen $k_{\text{in}}l \gg 1$ gerechtfertigt ist.

Damit ergibt sich schließlich

$$1 + \frac{\langle C^{(0)} \rangle_{\mathbf{R}_0}}{\langle L^{(0)} \rangle_{\mathbf{R}_0}} = 1 + \frac{1}{(1 + l^2 k^2)^2} e^{-\theta^2 k_{\text{in}}^2 \langle u^2 \rangle}. \quad (4.37)$$

Der Überhöhungsfaktor α ist definiert als der Wert auf dem Maximum des Konus, also bei $\theta = 0$. Dass sich die Form des Konus hier qualitativ von Abb. 1.2 unterscheidet, liegt daran, dass hier nur Doppelstreuung betrachtet wurde und Streuprozesse höherer Ordnung ignoriert wurden. Desweiteren gehen Form und Dichteprofil der atomaren Wolke in das Aussehen des Konus ein.

Für das Argument des Exponentialfaktors gilt dann im Ausdehnungsbereich des Konus

$$\theta^2 k_{\text{in}}^2 \langle u^2 \rangle \ll \theta^2 (k_{\text{in}} R_0)^2 \approx \theta^2 (k_{\text{in}} l)^2 \approx 1. \quad (4.38)$$

Offensichtlich hat das Ergebnis nullter Näherung innerhalb der Gültigkeit unserer Annahme $\langle u^2 \rangle \ll R_0^2$ einen vernachlässigbaren Einfluss auf den Rückstreukonus. Insbesondere gibt es für $\theta = 0$ überhaupt keinen Effekt und damit bleibt der Überhöhungsfaktor $\alpha^{(0)}$ unverändert bei seinem idealen Wert $\alpha^{(0)} = 2$. Falls wir also einen Effekt der thermischen Schwerpunktsbewegung der Atome auf die Rückstreurichtung sehen wollen, muss der zugrundeliegende Mechanismus anderer Natur sein.

4.5. Übergangoperator in der Zeitdarstellung

Wir haben im Fall der Rückwärtsstreuung gesehen, dass die Vernachlässigung der Energiedifferenzen $\hbar\Delta\omega$ der externen Freiheitsgrade dazu führt, dass kein Interferenzverlust durch Schwerpunktsbewegung der Streuer mehr beobachtet werden kann. Wir müssen diese Differenzen offensichtlich in (4.19) und (4.20) mitnehmen, um den dynamischen Zusammenbruch von kohärenter Rückstreuung studieren zu können.

Wir wollen aber zunächst die beiden verschiedenen Arten von dann auftretenden Korrekturen und ihren physikalischen Ursprung diskutieren:

1. Einfluss der natürlichen Lebensdauer

Die in den Energienennern auftretenden Energiedifferenzen $\hbar\Delta\omega$ führen bei Resonanz zu Korrekturen der Ordnung $\Delta\omega/\Gamma$ (allgemein für nicht-verschwindende Verstimmung δ : $\Delta\omega/|\gamma|$). Die Verweildauer $\tau_1 \approx 1/\Gamma$ ist die mittlere Zeit, welche das Atom im angeregten Zustand ist. Der relevante Parameter ist also $\Delta\omega\tau_1$. Typischerweise ist Γ von der Größenordnung $\Gamma \approx 10^8\text{s}^{-1}$ bzw. $\tau_1 \approx 10^{-8}\text{s}$.

2. Laufzeiteffekte

Die in den Phasenfaktoren vorkommenden Größen sind $e^{-i\Delta\omega_{f1}R_0/c}$ für Weg A und $e^{-i\Delta\omega_{f2}R_0/c}$ für Weg B . Unter Verwendung von $\tau_{\text{prop}} = R_0/c$, d.h. der Laufzeit der Photonen zwischen den beiden Atomen im Abstand R_0 können wir den Parameter als $\Delta\omega\tau_{\text{prop}}$ schreiben. Nimmt man einen Abstand von $R_0 \approx 300\mu\text{m}$ an, so ergibt sich eine typische Laufzeit von $\tau_{\text{prop}} \approx 10^{-12}\text{s}$.

Der durch den hier betrachteten Faktor gegebene Phasenunterschied zwischen den beiden Streuamplituden T_A und T_B ist

$$e^{i(\omega_{f1}-\omega_{f2})R_0/c} .$$

Dieser entspricht genau der auf einer Strecke R_0 entstehenden Phasendifferenz zweier entgegengesetzt im Vakuum propagierenden Photonen mit Frequenzunterschied $\omega_{f1} - \omega_{f2}$, welcher natürlich von der inelastischen Streuung herrührt.

In diesem Zusammenhang sollten wir uns daran erinnern, dass eigentlich $|\mathbf{k}_{\text{out}}| \neq |\mathbf{k}_{\text{in}}|$ ist, falls das Photon inelastisch gestreut wurde, was bei Vorhandensein externer Freiheitsgrade nicht ungewöhnlich ist. Wie zuvor ist dies aber nur relevant für etwaige Phasenfaktoren, da die relativen Änderungen in der Amplitude für optische Frequenzen extrem klein sind. Um diese Korrektur durch den in T_A, T_B einzigen relevanten und von \mathbf{k}_{out} abhängigen Phasenfaktor abzuschätzen, schreiben wir

$$e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{R}_j^{(0)}} = \exp \left\{ -ik_{\text{in}}\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}\mathbf{R}_j^{(0)} + i(\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}\mathbf{R}_j^{(0)})(\Delta\omega_{f1} + \Delta\omega_{f2})/c \right\} , \quad (4.39)$$

wobei wir von der Energieerhaltung (4.13) Gebrauch gemacht haben. Dabei ist $j = 2$ für T_A (4.19) und $j = 1$ für T_B (4.20).

Wenn wir noch ausnutzen, dass letztlich nur die Phasendifferenz zwischen den beiden Streuamplituden für Weg A und B eine Rolle spielt, so lautet der relevante Phasenfaktor

$$e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}}\mathbf{R}_0} = \exp \left\{ -ik_{\text{in}}\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}\mathbf{R}_0 + i(\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}\widehat{\mathbf{R}}_0)(\Delta\omega_{f1} + \Delta\omega_{f2})R_0/c \right\} , \quad (4.40)$$

was sofort zeigt, dass diese Korrektur ebenfalls von der Ordnung $\Delta\omega\tau_{\text{prop}}$ ist.

Die Analogie zu den semi-klassischen Betrachtungen aus Kapitel 2 ist offensichtlich.

Wegen $\tau_1 \gg \tau_{\text{prop}}$ ist klar ersichtlich, dass Effekte der endlichen Lebensdauer dominieren, falls man hinreichend nahe an der Resonanz ist, damit die Lebensdauer τ_1 von der Größenordnung $1/\Gamma$ ist. Genau das ist aber unser untersuchtes Regime, weshalb wir hier die Laufzeiteffekte vernachlässigen können, d.h. wir nehmen nur die in den Energienennern auftretenden $\Delta\omega$ mit.

Bevor wir dies aber tun, werden wir die beiden Übergangsoperatoren T_A und T_B in einer für uns zweckmäßigeren Form angeben. Es stellt sich nämlich heraus, dass für die folgenden

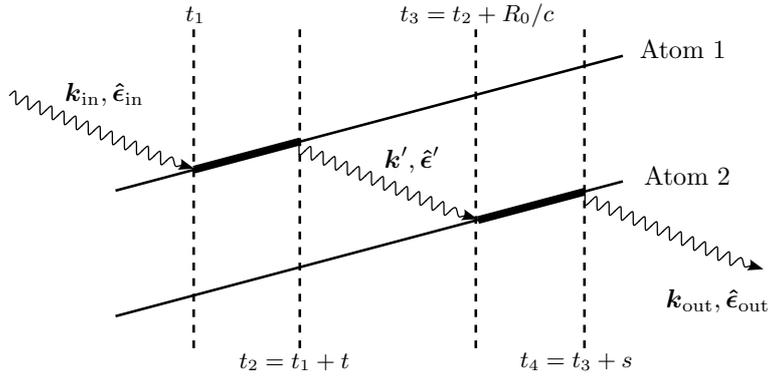


Abbildung 4.6.: Zeitlicher Verlauf der Doppelstreuung für Weg A. Der Zeitnullpunkt liegt bei $t_1 = \tau_A - s - t - R_0/c$.

Berechnungen die Darstellung dieser Operatoren im Zeitbild wesentlich besser geeignet ist, insbesondere in Bezug auf die thermische Mittelung.

Dazu benutzen wir die Laplace-Transformation, um die Energienenner in Exponentialfaktoren umzuschreiben:

$$\frac{1}{\gamma - \Delta\omega} = -i \int_0^\infty dt e^{i\gamma t} e^{-i\Delta\omega t} = -i \int_0^\infty dt e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{i\delta t} e^{-i\Delta\omega t}. \quad (4.41)$$

Letztlich ist das nichts anderes als ein Wechsel in die Zeitdarstellung, was gleich noch klarer werden wird.

Wir schreiben Terme der Form $\Delta\omega_{f1} = \omega_h(N_{f1} - N_{i1})$ mit Besetzungszahloperatoren \hat{N}_i , welche dann auf den entsprechenden Zustand wirken. Dadurch hat man erreicht, dass sämtliche explizite i, j, l, f -Abhängigkeiten auf die der Zustände reduziert werden. Die verbleibenden Summen über den vollständigen Satz von harmonischen Oszillatorzuständen lassen sich unter Ausnutzung der Vollständigkeitsrelation ebenfalls eliminieren.

Für eine intuitive und kompakte Schreibweise bietet sich schließlich noch die Wechselwirkungsdarstellung $\mathbf{R}_j(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \mathbf{R}_j e^{-iH_0 t/\hbar}$ an. Man erhält modulo Vor- und Phasenfaktoren, welche bei den im Folgenden daraus abgeleiteten Größen keine Rolle spielen,

$$T_A = (\hat{\epsilon}_{\text{out}}^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\epsilon}_{\text{in}}) \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{R}_2(\tau_A)} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{R}_2(\tau_A - s)} e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{R}_1(\tau_A - s - R_0/c)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{R}_1(\tau_A - s - t - R_0/c)}. \quad (4.42)$$

Dieser Operator gibt, von rechts nach links gelesen, die einzelnen Absorptions- und Emissionsvorgänge in zeitgeordneter Form wieder, was in Abbildung 4.6 noch einmal verdeutlicht wird. Das zwischen den beiden Atomen ausgetauschte Photon wird mit $\mathbf{k}' \equiv k_{\text{in}} \hat{\mathbf{R}}_0$ bezeichnet und $\tau_A \equiv \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}} \mathbf{R}_2/c$ ist eine Retardierungszeit, genau wie R_0/c . Außerdem ist hier $\mathbf{k}_{\text{out}} \equiv k_{\text{in}} \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$, da wir der Tatsache, dass inelastische Streuung auftritt, bereits durch Verwendung von (4.39) Rechnung tragen. Genau dieses ist auch der Ursprung der Zeitargumente τ_A . Im Operator T_B erscheint entsprechend $\tau_B \equiv \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}} \mathbf{R}_1/c$. Die Bedeutung dieser beiden Zeiten τ_A und τ_B erschließt sich aus der Tatsache, dass jeweils nur Zeitdifferenzen physikalisch relevant sind.

$\tau_A - \tau_B = \mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{R}_0 / c$ ist aber genau die Zeit, welche eine von einem Atom in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$ ausgehende ebene Welle gegenüber derselben des anderen Atoms an zeitlichem Vorsprung hat.

Die Herkunft der restlichen Zeitargumente R_0/c bzw. s und t sollte anhand vorangehender Diskussion offensichtlich sein. In der Tat finden wir die beiden unterschiedlichen Zeitskalen natürliche Lebensdauer τ_1 und Propagationszeit τ_{prop} in manifester Weise wieder. Die Lebensdauer geht über den exponentiell abfallenden Faktor

$$e^{i\gamma t} = e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{i\delta t}$$

ein, welcher dazu führt, dass nur $t \lesssim \tau_1$ relevante Beiträge zum Wert des Integrals liefern.

Abschließend geben wir die beiden Übergangsoperatoren in der für uns endgültigen Form an, d.h. unter Vernachlässigung der Laufzeiteffekte:

$$T_A = (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta}_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}) \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{R}_2(0)} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{R}_2(-s)} e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{R}_1(-s)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{R}_1(-s-t)}, \quad (4.43)$$

$$T_B = (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta}_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}) \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{R}_1(0)} e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{R}_1(-s)} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{R}_2(-s)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{R}_2(-s-t)}. \quad (4.44)$$

T_A und T_B gehen wieder durch $\mathbf{R}_1 \leftrightarrow \mathbf{R}_2$ und $\mathbf{k}' \leftrightarrow -\mathbf{k}'$ ineinander über. In den folgenden Kapiteln werden wir uns ausschließlich der Übergangsoperatoren in dieser Form bedienen.

5. Dynamischer Zusammenbruch der kohärenten Rückstreuung

Wir haben im vorherigen Kapitel 4 alle notwendigen Ingredienzen abgeleitet, um nun den Interferenzkontrast der kohärenten Rückstreuung quantitativ anzugeben. Wir beschränken uns dabei nur auf den Überhöhungsfaktor α^1 , welcher als Verhältnis von kohärenter Intensität zu Gesamtintensität definiert ist, und zwar bei exakter Rückstreurichtung $\theta = 0$. Diese Größe reicht bereits aus, um den Einfluss der Schwerpunktsfreiheitsgrade und thermischer Bewegung der streuenden Atome zu ergründen.

5.1. Analytischer Ausdruck für den Interferenzkontrast

Der Überhöhungsfaktor $\alpha = 1 + C/L$ ergibt sich aus der Gleichung (4.24) für den Streuquerschnitt zu

$$\alpha = 1 + \frac{2\text{Re Tr} \left\{ T_B \rho^{(i)} T_A^\dagger \right\}}{\text{Tr} \left\{ T_A \rho^{(i)} T_A^\dagger + T_B \rho^{(i)} T_B^\dagger \right\}}. \quad (5.1)$$

Das schöne ist, dass wir die Spurbildung, d.h. die thermische Mittelung nun exakt durchführen können. Das gelingt deshalb, weil in den Operatoren (4.43) und (4.44) nur Exponentialfaktoren in Form von Verschiebungsoperatoren auftreten, d.h. deren Exponenten sind linear in Erzeugern und Vernichtern. Die Mittelung mit dem statistischen Gewichtungsfaktor $\rho^{(i)} = e^{-\beta H_{\text{ext}}} / Z$ entspricht dann einer Gauß'schen Integration.

Die in (5.1) durchzuführenden Mittelungen sind

$$\begin{aligned} I_A &= \text{Tr} \left\{ T_A \rho^{(i)} T_A^\dagger \right\} = \left\langle T_A^\dagger T_A \right\rangle_{1,2} \\ &= |\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta}_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}}|^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\ &\quad \left\langle e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_1(s+t-s'-t')} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{u}_1(s+t-s')} e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{u}_1(t)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_1(0)} \right\rangle_1 \\ &\quad \left\langle e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{u}_2(s+t-s')} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{u}_2(t)} \right\rangle_2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹Obwohl der Überhöhungsfaktor α eigentlich für den Konus der kohärenten Rückstreuung definiert ist, werden wir diese Größe dennoch bei fester Konfiguration der Streuer verwenden, auch wenn in dieser Situation noch gar kein Konus vorliegt. Diesen erhält man erst nach der Mittelung über alle Konfigurationen der Streuer (siehe Unterkapitel 4.4.2). Dann beschreibt diese Größe eben lediglich die normierte Intensität, was ja bei konstruktiver Interferenz auch eine Überhöhung ist.

$$\begin{aligned}
I_C &= \text{Tr} \left\{ T_B \rho^{(i)} T_A^\dagger \right\} = \left\langle T_A^\dagger T_B \right\rangle_{1,2} \\
&= |\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta}_{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}}|^2 e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \mathbf{R}_0} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\
&\quad \left\langle e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_1(s+t-s'-t')} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{u}_1(s+t-s')} e^{-i\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{u}_1(s+t)} e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{u}_1(t)} \right\rangle_1 \\
&\quad \left\langle e^{-i\mathbf{k}' \mathbf{u}_2(s+t-s')} e^{i\mathbf{k}_{\text{out}} \mathbf{u}_2(s+t)} e^{i\mathbf{k}' \mathbf{u}_2(t)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_2(0)} \right\rangle_2, \tag{5.3}
\end{aligned}$$

wobei, wegen der Linearität der Spur, die in den Operatoren auftretende Integration mit der Mittelwertbildung vertauscht werden kann. Die an den Klammern $\langle \dots \rangle_j$ angegebenen Indizes j deuten an, bezüglich welcher Atome die Mittelung erfolgt.

5.1.1. Thermische Mittelung

Es sind nun Ausdrücke der Form

$$\left\langle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2)} \right\rangle \tag{5.4}$$

auszuwerten, wobei die Auslenkungsoperatoren $\mathbf{u}(t_j)$ zu verschiedenen Zeiten t_j gehören und damit nicht länger miteinander kommutieren. Stattdessen hat man

$$\frac{1}{\lambda_h^2} [u(t_1), u(t_2)] = e^{i\omega_h(t_2-t_1)} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] + e^{-i\omega_h(t_2-t_1)} [\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = 2i \sin[\omega_h(t_2 - t_1)], \tag{5.5}$$

wegen der für die Erzeuger und Vernichter bekannten Zeitentwicklung

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega_h t} \hat{a}, \quad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_h t} \hat{a}^\dagger \tag{5.6}$$

im harmonischen Oszillator. Da der Kommutator eine c-Zahl ergibt, kann man die Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) Relation in ihrer einfachsten Variante

$$e^A e^B = e^{A+B+[A,B]/2}$$

benutzen, um $\langle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2)} \rangle$ in die Form

$$\begin{aligned}
& e^{-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) \lambda_h^2 \sin[\omega_h(t_2-t_1)]} \left\langle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1) + i\mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2)} \right\rangle \\
&= e^{-i(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) \lambda_h^2 \sin[\omega_h(t_2-t_1)]} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left\langle (\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1) + \mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2))^2 \right\rangle \right\} \\
&= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \lambda_h^2 \left\{ (\mathbf{k}_1^2 + \mathbf{k}_2^2) (2 \langle n \rangle + 1) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2(\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) [i \sin \omega_h(t_2 - t_1) + (2 \langle n \rangle + 1) \cos \omega_h(t_2 - t_1)] \right\} \right\} \tag{5.7}
\end{aligned}$$

zu bringen. Bei uns ist $|\mathbf{k}_1| = k_{\text{in}} = |\mathbf{k}_2|$, so dass wir zusammen mit $\lambda_h^2 k_{\text{in}}^2 = \frac{\omega_r}{\omega_h}$ schreiben können

$$\left\langle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2)} \right\rangle = \exp \{ -q - (\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2) (\kappa(t_2 - t_1) + q) \}, \tag{5.8}$$

mit den Definitionen

$$p \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h}, \quad q \equiv p(2 \langle n \rangle + 1) = \frac{\omega_r}{\omega_h} (2 \langle n \rangle + 1) \tag{5.9}$$

und der Funktion

$$\kappa(t) = ip \sin(\omega_h t) + q (\cos(\omega_h t) - 1) . \quad (5.10)$$

Für diese gilt $\kappa(0) = 0$ und $\kappa^*(t) = \kappa(-t)$.

Die Verallgemeinerung auf beliebig viele Exponentialfaktoren bedarf nun keiner wesentlich neuen Schritte mehr und ergibt:

$$\left\langle e^{i\mathbf{k}_1 \mathbf{u}(t_1)} e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{u}(t_2)} \dots e^{i\mathbf{k}_n \mathbf{u}(t_n)} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{q}{2} \sum_{i=1}^n \underbrace{(\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_i)}_1 - \sum_{i < j} (\hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j) (\kappa(t_j - t_i) + q) \right\} . \quad (5.11)$$

Damit ist die Durchführung der Mittelung in (5.2) und (5.3) ohne Probleme möglich. Trotzdem wollen wir zunächst noch eine einfache Transformation vornehmen, welche uns Aussagen über den Einfluss bestimmter *kollektiver* Schwingungsmoden der Atome liefert.

5.1.2. Einfluss symmetrischer und antisymmetrischer Moden

Obwohl die Herleitung der Übergangsoperatoren T_A und T_B unter der Annahme unabhängiger Atome erfolgte, sind die Ausdrücke (5.2) und (5.3) dennoch geeignet, um kollektive Schwingungsmoden einzuführen. Dies ist beispielsweise notwendig, wenn es sich um nicht-neutrale Atome handelt und man nach Entwicklung der Coulombkraft um die Gleichgewichtslage bis zur zweiten Ordnung renormierte, aber im Allgemeinen beide Atome involvierende Schwingungsmoden erhält.

Aber auch in unserem Fall erscheint es sinnvoll, zumindest formal die Relativ- und Schwerpunktsoszillationen der beiden Atome zu betrachten, anstatt der Mittelung über die unabhängigen Atome 1 und 2, so wie es in (5.2) und (5.3) angedeutet wurde.

Dazu transformieren wir die Heisenbergoperatoren gemäß

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_r(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_2(t) - \mathbf{u}_1(t)) \\ \mathbf{u}_s(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_2(t) + \mathbf{u}_1(t)) \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \mathbf{u}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_s(t) - \mathbf{u}_r(t)) \\ \mathbf{u}_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{u}_s(t) + \mathbf{u}_r(t)) \end{aligned} . \quad (5.12)$$

Unter dieser Transformation ist der Hamiltonian H_{ext} natürlich forminvariant, da $\hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{N}_{\text{rel}} + \hat{N}_{\text{sp}}$. In diesem einfachen Fall sind damit auch die Frequenzen aller Moden wieder gleich, d.h. $\omega_{\text{rel}} = \omega_{\text{sp}} = \omega_h$.

(5.2) und (5.3) gehen damit über in

$$I_A = |\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}|^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\ \left\langle e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(s+t-s'-t')/\sqrt{2}} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(0)/\sqrt{2}} \right\rangle_{\text{sp}} \\ \left\langle e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_r(s+t-s'-t')/\sqrt{2}} e^{-i\mathbf{k}' \sqrt{2} \mathbf{u}_r(s+t-s')} e^{i\mathbf{k}' \sqrt{2} \mathbf{u}_r(t)} e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_r(0)/\sqrt{2}} \right\rangle_{\text{rel}} , \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
I_C = & |\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{out}}^* \boldsymbol{\Delta} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{in}}|^2 e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \mathbf{R}_0} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\
& \left\langle e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(s+t-s'-t')/\sqrt{2}} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(0)/\sqrt{2}} \right\rangle_{\text{sp}} \\
& \left\langle e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_r(s+t-s'-t')/\sqrt{2}} e^{-i\mathbf{k}' \sqrt{2} \mathbf{u}_r(s+t-s')} e^{i\mathbf{k}_{\text{out}} \sqrt{2} \mathbf{u}_r(s+t)} e^{i\mathbf{k}' \sqrt{2} \mathbf{u}_r(t)} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_r(0)/\sqrt{2}} \right\rangle_{\text{rel}} ,
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Man erkennt nun zweierlei: zum einen sind die Ausdrücke bezüglich der Schwerpunktsmoden exakt gleich. Schalten wir daher die Kopplung an das System der Relativmoden aus (formal durch Betrachtung des Grenzfalles $\omega_{\text{rel}} \rightarrow \infty$), so wird $I_A = I_C$ und es gibt keinen Kontrastverlust. Eigentlich ist das nicht überraschend, da man symmetrische Bewegung der Atome durch Betrachtung im mitbewegten System, in welchem beide Streuer ruhen, eliminieren kann. Zum anderen tritt in $\langle \dots \rangle_{\text{sp}}$ nur der anfängliche Absorptionsprozess (jeweils ein Faktor von der Amplitude und der konjugierten Amplitude) auf. Nach dem oben Gesagten ist das auch nicht weiter verwunderlich, da durch eine Transformation in das mitbewegte System die Frequenz des einlaufenden Photons durch Dopplerverschiebung renormiert wird. Genau das ist offensichtlich der Effekt von

$$\left\langle e^{-i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(s+t-s'-t')/\sqrt{2}} e^{i\mathbf{k}_{\text{in}} \mathbf{u}_s(0)/\sqrt{2}} \right\rangle_{\text{sp}} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \kappa(s' + t' - s - t) \right\} . \tag{5.15}$$

Die gemittelten Ausdrücke für die Relativmoden ($\langle \dots \rangle_{\text{rel}}$) lauten:

$$I_A : \quad \left\{ \begin{array}{l} \exp \left\{ 2\kappa(s' - s) + \frac{1}{2}\kappa(s' + t' - s - t) \right. \\ \left. + a [\kappa(t') + \kappa(-t) - \kappa(s' - s + t') - \kappa(s' - s - t)] \right\} \end{array} \right. \tag{5.16}$$

$$I_C : \quad \left\{ \begin{array}{l} \exp \left\{ -2q(1 + c) + 2\kappa(s' - s) - \frac{1}{2}\kappa(s' + t' - s - t) \right. \\ \left. - c [\kappa(s' + t') + \kappa(-s - t)] + 2b [\kappa(s') - \kappa(-s)] \right. \\ \left. + a [\kappa(t') - \kappa(-t) + \kappa(s' - s - t) - \kappa(s' - s + t')] \right\} \end{array} \right. \tag{5.17}$$

mit den Richtungskosinus $a \equiv \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$, $b \equiv \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$ und $c \equiv \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$.

Um I_B zu erhalten, müssen beide Atome vertauscht werden, d.h. $\hat{\mathbf{R}}_0 \leftrightarrow -\hat{\mathbf{R}}_0$, was $a \leftrightarrow -a$ und $b \leftrightarrow -b$ impliziert.²

Weiterhin sieht man, dass I_C unter der Transformation komplexe Konjugation verbunden mit $\hat{\mathbf{R}}_0 \leftrightarrow -\hat{\mathbf{R}}_0$ invariant bleibt, d.h. $I_C^*|_{\hat{\mathbf{R}}_0 \leftrightarrow -\hat{\mathbf{R}}_0} = I_C$. Mit der Eigenschaft $\kappa^*(t) = \kappa(-t)$ ist das leicht einzusehen.

²Der Wechsel des Vorzeichens in $\mathbf{u}_r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$ spielt keine Rolle, da dieses nach Mittelung $\langle (\mathbf{k} \mathbf{u}_r)^2 \rangle$ nur quadratisch eingeht.

5.1.3. Allgemeines Resultat

Das allgemeine Resultat ist damit

$$I_A = \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \exp \{ 2\kappa(s' - s) + \kappa(s' + t' - s - t) + a [\kappa(t') + \kappa(-t) - \kappa(s' - s + t') - \kappa(s' - s - t)] \} , \quad (5.18)$$

$$I_C = \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \mathbf{R}_0} e^{-2q(1+c)} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \exp \{ 2\kappa(s' - s) - c [\kappa(s' + t') + \kappa(-s - t)] + 2b [\kappa(s') - \kappa(-s)] + a [\kappa(t') - \kappa(-t) + \kappa(s' - s - t) - \kappa(s' - s + t')] \} . \quad (5.19)$$

Bezüglich der Struktur dieses Ergebnisses sind noch einige Bemerkungen angebracht. Lassen wir die $\kappa(t)$ gegen Null gehen, so finden wir das Ergebnis nullter Näherung (4.30) wieder: $e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \mathbf{R}_0} e^{-2q(1+c)}$. Im Grenzfall einer schwachen Falle ($\omega_h \rightarrow 0$) hat uns dieser Faktor Probleme bereitet, weshalb wir den Grenzfall freier Atome nicht finden konnten. Glücklicherweise tritt dieses Problem bei den Funktionen $\kappa(t)$ nicht mehr auf, wie wir gleich sehen werden. Obwohl die Rechnung für allgemeine Richtungen $\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}$ erfolgte, beschränken wir uns von nun an auf den Fall kohärenter Rückstreuung mit $b = -a$ und $c = -1$, was besagten Faktor aus nullter Näherung zum Verschwinden bringt.

Der für uns interessante Ausdruck lautet daher

$$I_A = \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \exp \{ 2\kappa(s' - s) + \kappa(s' + t' - s - t) + a [\kappa(t') + \kappa(-t) - \kappa(s' - s + t') - \kappa(s' - s - t)] \} \quad (5.20)$$

$$I_C = \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \exp \{ 2\kappa(s' - s) + \kappa(s' + t') + \kappa(-s - t) - 2a [\kappa(s') - \kappa(-s)] + a [\kappa(t') - \kappa(-t) + \kappa(s' - s - t) - \kappa(s' - s + t')] \} \quad (5.21)$$

und

$$\alpha = 1 + \frac{2\text{Re } I_C}{I_A + I_B} = 1 + \frac{I_C + I_C|_{a \leftrightarrow -a}}{I_A + I_A|_{a \leftrightarrow -a}} . \quad (5.22)$$

In der zweiten Form für α ist die Symmetrie bezüglich der Vertauschung beider Atome evident. Zunächst ist das nur der Wert, den man für zwei Streuer fester Konfiguration in Rückrichtung erhält.

Hat man es mit zufällig verteilten Streuern zu tun, wie beispielsweise in atomaren Wolken, so muss man in einem weiteren Schritt noch die in Abschnitt 4.4.2 explizit aufgezeigte Konfigurationsmittelung durchführen, zu berechnen ist also

$$1 + \frac{\langle C \rangle_{\mathbf{R}_0}}{\langle L \rangle_{\mathbf{R}_0}} .$$

Dabei kann die Mittelung über Orientierungen $\hat{\mathbf{R}}_0$ und Abstände R_0 getrennt voneinander durchgeführt werden. Die einzige Abstandsabhängigkeit tritt in dem Faktor $e^{i(\mathbf{k}_{\text{in}} + \mathbf{k}_{\text{out}}) \mathbf{R}_0}$ auf,

abgesehen von dem in C und L identischen Vorfaktor $\propto 1/R_0^2$. Ist man nur am eigentlichen Überhöhungsfaktor $\bar{\alpha}$ und nicht an der Form des Konus selbst interessiert, so wird auch dieser Exponentialfaktor wegen $\mathbf{k}_{\text{out}} = -\mathbf{k}_{\text{in}}$ zu 1. Die Mittelung über den Abstand führt dann zu keinem Effekt und es bleibt die Mittelung über alle Orientierungen, welche für C und L verschieden ist. Diese reduziert sich dann auf

$$\langle L \rangle_{\hat{\mathbf{R}}_0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} L(a) da \quad (a \equiv \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}})$$

und analog für C , so dass

$$\bar{\alpha} = 1 + \frac{\langle C \rangle_{\hat{\mathbf{R}}_0}}{\langle L \rangle_{\hat{\mathbf{R}}_0}}. \quad (5.23)$$

Es ist nicht möglich, das gesamte in I_A (5.20) und I_C (5.21) auftretende 4-dimensionale Integral in geschlossener Form auszuwerten. Daher müssen wir uns mit der Beschränkung auf bestimmte, aber nicht weniger interessante Grenzfälle zufriedengeben. Zwischenbereiche sind jedoch durch numerische Berechnungen dieser Integrale zugänglich.

Analysieren wir daher die Struktur des Resultats etwas genauer. Man erkennt, dass die $2\pi/\omega_h$ -Periodizität der Funktion $\kappa(t)$ auf den großen Exponentialfaktor im Integranden übertragen wird, und zwar bezüglich aller 4 Integrationsvariablen s, t, s', t' . Wir wollen letztendlich asymptotische Entwicklungen dieses komplizierten Integrals berechnen, welche typischerweise Taylorentwicklungen des Arguments dieser Exponentialfunktion um dessen Maxima involvieren. Das Integral wird dann durch die Summe aller dieser Beiträge genähert. Die Maxima liegen auf einem regulären Gitter mit Abstand $2\pi/\omega_h$ und wegen der Periodizität sind alle Maxima identisch.

Der andere im Integranden auftretende Faktor $e^{i\gamma t} = e^{-\frac{1}{2}\Gamma t + i\omega_h t}$ ist natürlich unentbehrlich für die Konvergenz dieses Integrals. Dieser exponentiell abfallende Term führt dazu, dass nur eine endliche Anzahl dieser Maxima wesentlich zum Wert des Integrals beitragen, welche ungefähr durch das Verhältnis ω_h/Γ gegeben ist (bezogen auf eine Integrationsvariable).

Da sich jedoch der Integrationsbereich nur über den positiven Teilraum erstreckt, muss man die Extremstellen, bei welcher eine der Integrationsvariablen Null ist, verschieden von den restlichen behandeln. Daher muss insbesondere das Maximum bei $s, t, s', t' = 0$ gesondert behandelt werden, weshalb es sich anbietet, mit dem Fall $\omega_h \ll \Gamma$ zu beginnen.

5.2. Quasi-freie Atome ($\omega_h \ll \Gamma$)

Die Bedingung $\omega_h \ll \Gamma$ ist in vielen realistischen Situationen gut erfüllt, insbesondere beinhaltet sie den Grenzfall freier Atome (in welchem $\omega_h \rightarrow 0$). Anhand der Ausdrücke (5.20) und (5.21) sieht man, dass zum Integral praktisch nur die Werte des Integranden im Bereich $0 \leq s, t, s', t' \lesssim \frac{1}{\Gamma}$ beitragen, woraus sofort die Relationen $\omega_h s \ll 1$, $\omega_h t \ll 1$, etc. folgen. Das ermöglicht uns, die Funktion $\kappa(t)$ zu entwickeln, so dass

$$\kappa(t) \approx i p \omega_h t - \frac{q}{2} \omega_h^2 t^2 + O(\omega_h t)^3, \quad (5.24)$$

wobei alle Terme dritter und höherer Ordnung in $\omega_h t$ vernachlässigt werden können. In (5.20) und (5.21) eingesetzt liefert das nach der Transformation $t \rightarrow 2t/|\gamma|$ der Integrationsvariablen

$$I_A = \frac{4}{|\gamma|^4} (1-a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{2i\hat{\gamma}(s+t)} e^{-2i\hat{\gamma}^*(s'+t')} \exp \left\{ 2i\chi \left[(3-2a)(s'-s) + (t'-t) \right] - \frac{1}{2}\xi^2 \left[(3-2a)(s'-s)^2 + (t'-t)^2 + 2(1-a)(s'-s)(t'-t) \right] \right\}, \quad (5.25)$$

$$I_C = \frac{4}{|\gamma|^4} (1-a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{2i\hat{\gamma}(s+t)} e^{-2i\hat{\gamma}^*(s'+t')} \exp \left\{ 2i\chi \left[3(s'-s) - 2a(s'+s) + (t'-t) \right] - \frac{1}{2}\xi^2 \left[2(s'-s)^2 - 2a(s'-s)(s'+t'+s+t) + (s'+t')^2 + (s+t)^2 \right] \right\}. \quad (5.26)$$

$\hat{\gamma} \equiv \gamma/|\gamma|$ ist der Phasenfaktor des komplexen Parameters $\gamma = \delta + i\Gamma/2$ (Gl. (4.10)).

In diesen Ausdrücken treten die beiden relevanten Parameter

$$\chi \equiv \frac{\omega_r}{|\gamma|}, \quad (5.27)$$

$$\xi^2 \equiv \frac{4q\omega_h^2}{|\gamma|^2} = (2\langle n \rangle + 1) \frac{4\omega_r\omega_h}{|\gamma|^2} \quad (5.28)$$

auf.

I_A und I_C stellen weiterhin relativ komplizierte Ausdrücke dar, welche einer analytischen Lösung immer noch nicht leicht zugänglich sind. Deshalb betrachten wir die beiden Grenzfälle tiefer und hoher Temperaturen.

5.2.1. Grenzfall tiefer Temperaturen

Dies ist der Fall, in dem das Integral durch den Exponentialfaktor $e^{i\hat{\gamma}(s+t)-i\hat{\gamma}^*(s'+t')}$ im Integranden dominiert wird. Taylorentwicklung des zweiten Faktors für kleine χ und ξ^2 in beliebiger Ordnung erlaubt die systematische Bestimmung der vollständigen Reihenentwicklung dieser Integrale.

Die ersten Terme dieser Entwicklung lauten

$$I_A = I_0 \left\{ 1 + 4(2-a) \frac{\delta}{|\gamma|} \chi + \chi^2 \left[4(4-4a+a^2) - 2\Upsilon(13-14a+4a^2) \right] + \frac{1}{2}\xi^2 \left[(3-5\Upsilon) - a(2-3\Upsilon) \right] \right\}, \quad (5.29)$$

$$I_C = I_0 \left\{ 1 + 8 \frac{\delta}{|\gamma|} \chi - 4ia \frac{\Gamma}{|\gamma|} \chi + \chi^2 \left[4(4-a^2) - 2\Upsilon(13+4a^2) - 28ia \frac{\delta\Gamma}{|\gamma|^2} \right] + \frac{1}{2}\xi^2 \left[(1-5\Upsilon) - 3ia \frac{\delta\Gamma}{|\gamma|^2} \right] \right\}, \quad (5.30)$$

$$\Upsilon \equiv \frac{1 - \left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right)^2}{1 + \left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right)^2} \quad (5.31)$$

wobei Terme der Ordnung $O(\xi^4, \chi^3, \chi\xi^2)$ vernachlässigt wurden und $I_0 = \frac{1}{4|\gamma|^4}(1-a^2)^2$. In Anbetracht von (5.22) ist klar, dass die in a antisymmetrischen Terme bei der Bildung von $I_A + I_B$ beziehungsweise $\text{Re } I_C$ herausfallen.

α gemäß Gl. (5.22) ergibt schließlich in führender Ordnung χ und ξ^2 :

$$\alpha = 1 + \frac{C}{L} \approx 2 - 8a^2\chi^2 - \xi^2, \quad (5.32)$$

gültig bis auf Terme der Ordnung $O(\xi^4, \chi^3, \chi^2\xi^2)$. Wie nicht anders zu erwarten war, ergeben die führenden Korrekturen eine Verringerung des maximalen Überhöhungsfaktors 2. Ein kurzer Blick auf (5.27) und (5.28) lässt vermuten, dass es sich um den Grenzfall kleiner Temperaturen und kleiner Rückstoßenergien $\omega_r \ll |\gamma|$ handelt.

Um diese beiden Korrekturen besser zu verstehen, betrachten wir zunächst den Fall verschwindender Temperatur, und daran anschließend, den endlicher Temperaturen.

T = 0: Inelastische Streuung

Wir betrachten den Fall verschwindender Temperatur, d.h. beide Atome befinden sich anfänglich im Grundzustand der Falle, denn wir interessieren uns hauptsächlich für Effekte, welche allein aufgrund der Präsenz externer Freiheitsgrade entstehen. Je nach Situation ist das ein mehr oder weniger hypothetischer Fall, da sich die Atome nach erfolgter Streuung und Aufnahme von Rückstoßenergie in einem angeregten Fallenzustand befinden. In der Situation zweier Streuer fester Konfiguration in einer Falle kann genau ein Photon gestreut werden (Einfachstreuung hat hier ebenfalls unerwünschten Einfluss auf den Anfangszustand). Anschließend müssten die Atome wieder im Grundzustand der Falle präpariert werden. Andererseits existieren in atomaren Wolken sehr viele Atome, so dass nur die Mess- und Kühlzyklen geeignet gewählt werden müssen (siehe auch Diskussion in Kapitel 3).

In diesem Fall ist die Besetzungszahl $\langle n \rangle = 0$ und mit

$$\alpha \approx 2 - 8a^2 \frac{\omega_r^2}{|\gamma|^2} - \zeta^2, \quad (5.33)$$

erhält man die Aussage, dass es in der Tat Korrekturen gibt, welche zum Kontrastverlust führen.

$$\zeta^2 \equiv \frac{4\omega_r\omega_h}{|\gamma|^2} \quad (5.34)$$

geht dabei für $T \rightarrow 0$ aus ξ^2 hervor und wurde zusätzlich definiert, weil diesem Parameter eine spezielle Bedeutung zukommt, was aber erst in Kapitel 6 über die Quantendualität richtig klar wird.

Der erste Korrekturterm in (5.33) ist offensichtlich eine Folge inelastischer Streuung: die aufgenommene Rückstoßenergie bei unbewegten Streuern ist genau $\hbar\omega_r$. Eine veränderte Energie der Photonen impliziert natürlich einen anderen Streuquerschnitt, da man sich bei quasi-resonanter Streuung auf der sich auf einer Skala Γ ändernden Lorentzkurve bewegt. In der Tat sieht man in den Ausdrücken (5.25) und (5.26), dass sich dort der χ -abhängige Teil auf einen reinen Phasenfaktor beschränkt, welcher zusammengenommen mit dem Faktor $e^{i\gamma(s+t)} = e^{i\delta(s+t)} e^{-\frac{1}{2}\Gamma(s+t)}$ zu einer effektiven Verstimmung $\tilde{\delta}$ von der Resonanz führt.

Allerdings findet man in der symmetrischen Situation $a = 0$ keinen Effekt, während er für $a = \pm 1$ maximal ist. Das ist klar, denn im Fall $a = 0$ ist der Energieübertrag auf die Bewegungsfreiheitsgrade für beide Wege exakt gleich, wogegen im Fall $a \neq 0$ diese Symmetrie nicht mehr gegeben ist. Geht man sogar noch einen Schritt weiter und betrachtet die exakten

Ausdrücke für I_A (5.25) und I_C (5.26), so stellt man fest, dass diese im Fall $\xi^2 \rightarrow 0$ (dessen Bedeutung wird im nächsten Abschnitt untersucht) und für eine symmetrische Streusituation $a = 0$ exakt gleich sind, was sofort auf $\alpha = 2$ führt.

In Verbindung mit einer welchen-Weg Interpretation werden wir im nächsten Kapitel darauf noch genauer eingehen.

Wir halten fest: der Parameter $\chi = \omega_r/|\gamma|$ beschreibt allein Effekte durch Energieüberträge, d.h. er trägt der Tatsache Rechnung, dass Streuung in Anwesenheit externer Freiheitsgrade inelastisch ist, selbst bei $T = 0$.

T = 0: Nullpunktsfluktuationen

Es gibt aber noch den zweiten Korrekturterm $\zeta^2 = 4\omega_r\omega_h/|\gamma|^2$, ein Residuum, welches von der zusätzlichen 1 des Faktors $(2\langle n \rangle + 1)$ aus (5.28), d.h. den Nullpunktsfluktuationen des harmonischen Oszillators (aber auch jedes anderen Quantensystems) im Grundzustand, herrührt. Dieser Term verschwindet für $\omega_h \rightarrow 0$, was zusammen mit dem physikalischen Ursprung ebenso erst im nächsten Kapitel durchleuchtet wird.

Endliche Temperaturen

Nun betrachten wir den Fall, in welchem die Temperaturen hoch genug sind, so dass $\beta\hbar\omega_h \ll 1$ und damit $\langle n \rangle \approx 1/(\beta\hbar\omega_h)$. In dem hier untersuchten Grenzfall $\omega_h \rightarrow 0$ freier Atome stellt diese Bedingung natürlich kein Problem dar. ξ^2 lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned} \xi^2 &= (2\langle n \rangle + 1) \frac{4\omega_r\omega_h}{|\gamma|^2} \\ &\stackrel{\langle n \rangle \gg 1}{\approx} \frac{8\omega_r}{\beta\hbar|\gamma|^2} \end{aligned} \quad (5.35)$$

und man erkennt sofort, dass ω_h als einziges Charakteristikum der Falle herausfällt. Damit ist aber auch jede ω_h -Abhängigkeit aus den exakten Ausdrücken (5.25) und (5.26) verschwunden. Daher ist es gar nicht mehr notwendig, den Grenzfall $\omega_h \rightarrow 0$ im streng mathematischen Sinn zu betrachten, sondern es genügt bereits die Bedingung $\omega_h \ll \Gamma$. Diese Grenzwertbildung führte ja zuvor zu Problemen (vgl. Unterkapitel 4.4).

Andererseits können wir mit Hilfe von (4.31) auch

$$\xi^2 = \frac{4k_{\text{in}}^2 v_{\text{rms}}^2}{|\gamma|^2} \equiv \xi_{\text{cl}}^2 \quad (5.36)$$

schreiben, was den Übergang zu freien Streuern im klassischen Limes verdeutlichen soll.

Wenn wir noch annehmen, dass wir Rückstoß- (χ^2) gegenüber thermischen Effekten (ξ^2) vernachlässigen können, so ergibt sich

$$\alpha \approx 2 - \xi^2 = 2 - \left(4 \frac{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{\Gamma}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right)^2}. \quad (5.37)$$

Die letzte Form erlaubt einen direkten Vergleich dieses Resultats mit dem in semi-klassischer Weise hergeleiteten. Dieses Ergebnis ist identisch mit dem aus Gleichung (2.17), was ein weiterer deutlicher Hinweis darauf ist, dass wir es in diesem Fall in der Tat mit quasi-freien

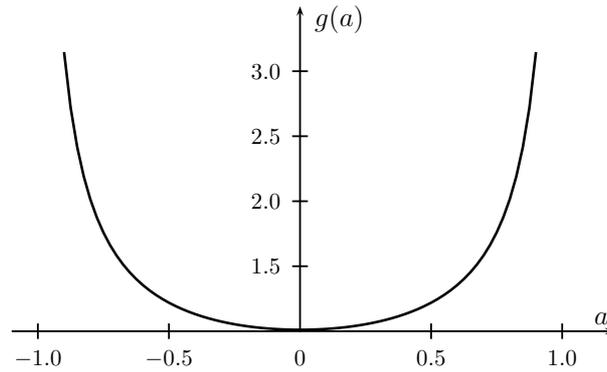


Abbildung 5.1.: Graph der Funktion $g(a)$ (siehe Anhang B). Diese Funktion divergiert für $a \rightarrow \pm 1$ wegen anderen asymptotischen Verhaltens bei $a = \pm 1$ (5.39). Werte in einem Bereich nahe dieser singulären Punkte sind daher bedeutungslos.

Streuern zu tun haben. Natürlich sind diese Resultate nur gültig, falls $k_{\text{in}} v_{\text{rms}}/\Gamma$ wesentlich kleiner als 1 ist.

Wir sehen also, dass der Parameter ξ^2 im Prinzip genau den Einfluss der thermischen Bewegung beschreibt. Unter Zuhilfenahme der exakten Ausdrücke (5.25) und (5.26) erkennt man, dass der ξ^2 -abhängige Teil im Integranden rein reell ist und damit als abschwächender Faktor $e^{-\frac{1}{2}\xi^2(\dots)}$ auftritt.

Weiterhin ist unsere obige Annahme $\chi^2 \ll \xi^2$ nur dann gerechtfertigt, falls $2 \langle n \rangle \omega_{\text{h}} \gg \omega_{\text{r}} \Rightarrow kT \gg \hbar \omega_{\text{r}}$, was jedoch nicht immer der Fall sein muss, aber es stellt kein Problem dar, den zusätzlichen χ^2 -Term noch mitzunehmen. Wir wollten uns an dieser Stelle nur auf den Einfluss thermischer Bewegung konzentrieren und insbesondere das aus Kapitel 2 bekannte Ergebnis wiederfinden.

5.2.2. Grenzfall hoher Temperaturen

Wagen wir uns nun an den entgegengesetzten Grenzfall hoher Temperaturen, welcher technisch etwas anspruchsvoller ist als der vorherige.

Wie eben vernachlässigen wir wieder χ gegenüber ξ^2 , was möglich ist, falls $kT \gg \hbar|\gamma|$. Diese Annahme ist kompatibel mit dem Grenzfall hoher Temperaturen, welcher ohnehin Situationen weit oberhalb der Doppler-Kühlgrenze (welche bei etwa $k_{\text{B}}T \approx \hbar\Gamma$ liegt) beinhaltet. Dieses führt zu einfacheren Ausdrücken für (5.29) und (5.30), welche die Bestimmung der Asymptotik für große ξ^2 erlauben (die Details der Rechnung findet man in Anhang B).

Für α ergibt sich

$$\alpha(|a| < 1) = 1 + g(a) \frac{8}{\pi} \frac{1}{\xi^2}, \quad (5.38)$$

$$\alpha(|a| = 1) = 1 + \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\xi}, \quad (5.39)$$

wobei $g(a)$ ein relativ kompliziertes, jedoch nur von $a = \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ abhängiges, Integral dar-

stellt, welches numerisch berechnet werden kann (siehe Abbildung 5.1). Es ergeben sich zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem welche Streugeometrie vorliegt. Beide Fälle zeigen offensichtlich unterschiedliches asymptotisches Verhalten, wobei die Abnahme für großes ξ im Fall $|a| < 1$ stärker ist, als für $|a| = 1$, der Situation, in der die Richtungen der Photonenausbreitung, sowohl für ein- und auslaufendes ($\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$) als auch für das ausgetauschte Photon ($\hat{\mathbf{R}}_0$), zusammenfallen.

Der Übergang zwischen diesen beiden asymptotischen Verhaltensweisen ist scharf und vollzieht sich nur in einem engen Winkelbereich in der Nähe von $a = \pm 1$. Das Intervall wird umso kleiner, je größer ξ ist. Im Limes $\xi \rightarrow \infty$ wird $|a| = 1$ zum singulären Punkt, allerdings ist das kein physikalisch sinnvolles Ergebnis, denn für zu große Temperatur ξ bricht die Näherung $\langle u^2 \rangle \ll R_0^2$ ohnehin zusammen. Da allgemein

$$\alpha(|a| = 1) > \alpha(|a| < 1)$$

für hinreichend großes ξ , divergiert $g(a)$ für $a \rightarrow \pm 1$. Deshalb liefert $g(a)$ (Abbildung 5.1) und damit auch (5.38) nur sinnvolle Aussagen, falls a nicht zu nahe an diesen singulären Punkten ist.

Bedenken wir allerdings, dass bei polarisationssensitiver Messung der zusätzliche Vorfaktor

$$\frac{1}{4} (1 - a^2)^2$$

in der Streuintensität erscheint, so erkennen wir, dass (5.39) nur mit verschwindender Intensität auftritt. Bei Mittelung über alle Orientierungen trägt dann im Wesentlichen (5.38) bei. Selbst bei fester Streukonfiguration spielt der Fall $a \approx \pm 1$ keine Rolle, auch wenn dann der gemeinsame Vorfaktor $\frac{1}{4} (1 - a^2)^2$ in α herausfällt. Wegen der viel zu geringen Intensität sieht man diese Situation nicht und deswegen ist es bei zwei Atomen in einer Falle aus messtechnischen Gründen ohnehin zweckmäßig, die symmetrische Situation $a = 0$ zu bevorzugen.

Eine mögliche Erklärung für das unterschiedliche asymptotische Verhalten ist, dass im Fall $a = \pm 1$ nur ein Oszillatorfreiheitsgrad pro Atom involviert ist, da die transversalen Oszilatormoden nicht durch Wechselwirkung an die Photonen gekoppelt sind.³ Im anderen Fall $|a| < 1$ sind es doppelt so viele, nämlich die beiden Moden in der Ebene, welche durch die Richtungen $\hat{\mathbf{R}}_0$ und $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ aufgespannt wird, weshalb hier auch die Abnahme stärker ist.

5.2.3. Schlussfolgerungen

Nach der Untersuchung der beiden Grenzfälle hoher und niedriger Temperaturen zeigt Abbildung 5.2 den Verlauf des Überhöhungsfaktors α (5.22) im quasi-freien Fall über den gesamten Temperaturbereich. Reine Rückstoßeffekte (χ) wurden komplett vernachlässigt, ebenso ist exakte Resonanz ($\delta = 0$) und die symmetrische Streusituation $a = 0$ angenommen worden. Es sollte jedoch beachtet werden, dass bei hinreichend hohen Temperaturen der Gültigkeitsbereich der Annahme $\langle u^2 \rangle \ll R_0^2$ verlassen wird. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass dann Korrekturen der Ordnung

$$O\left(\frac{\xi^2}{k_{\text{in}} R_0}\right)$$

zu erwarten sind.

³Das ist eigentlich nur korrekt in der betrachteten Näherung $\langle u^2 \rangle \ll R_0^2$.

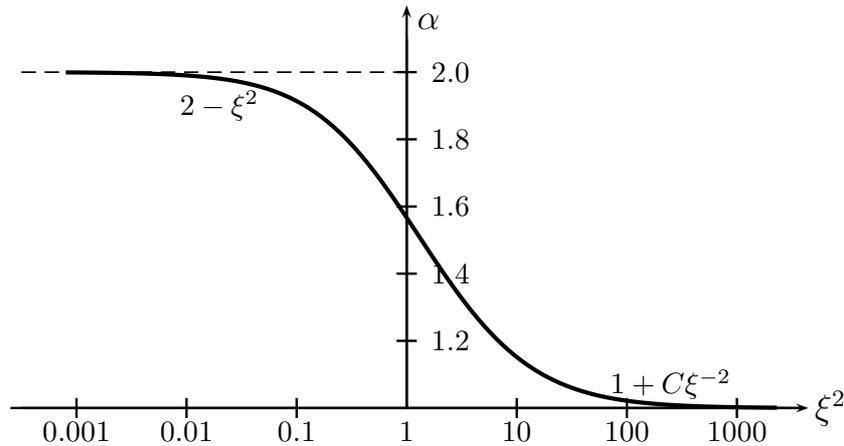


Abbildung 5.2.: Überhöhungsfaktor α der kohärenten Rückstreuung im gesamten Temperaturbereich, dargestellt auf einer semi-logarithmischen Skala als Funktion des thermischen Parameters ξ^2 . Betrachtet wurde exakte Resonanz ($\delta = 0$) und die symmetrische Streusituation $a = 0$.

Zum Abschluss des Falls $\omega_h \ll \Gamma$ soll noch ein intuitiveres Bild über die eigentlichen physikalischen Vorgänge gegeben werden. Wir können uns die in $\kappa(t)$ auftretenden Oszillationen, als die entsprechende Bewegung, die das Atom tatsächlich vollzieht, vorstellen. Natürlich handelt es sich hier um ein quantenmechanisches Modell, aber bei hinreichend hoch angeregten Zuständen kann man sich eine semi-klassische Bewegung von Wellenpaketen vorstellen, welche in der Falle oszillieren. Es wurde ja auch $\langle n \rangle$ im Fall hoher Besetzungszahlen betrachtet, so dass man $\langle n \rangle \approx 1/\beta\hbar\omega_h$ schreiben konnte, was schließlich zum Herausfallen der Falleneigenschaft ω_h führte.

Wir können die Bedingung $\omega_h \ll \Gamma$ nun in $\tau_1 \ll \tau_h$ umschreiben, wobei τ_1 die Lebensdauer im angeregten Zustand ist, welche im Wesentlichen die typische Streuzeit bestimmt und bei resonanter Streuung in der Größenordnung $1/\Gamma$ liegt, während $\tau_h = 2\pi/\omega_h$ die Periodendauer einer Schwingung des Atoms in der Falle ist. Das heißt aber nun, dass das Photon während des gesamten Streuprozesses nur einen kleinen Bruchteil einer vollständigen Oszillation sieht, was dann in der Tat so aussieht, wie eine lineare Bewegung der Streuer, analog der freier Teilchen. Die Oszillationen selbst treten auf einer sehr viel größeren Zeitskala auf.

Daher ist es nicht weiter verwunderlich, dass die einzige Charakteristik der Falle ω_h nur noch auftritt, falls die Temperatur hinreichend klein ist, so dass $\langle n \rangle$ nicht mehr entwickelt werden kann. In diesem Fall wäre die diskrete Struktur der Energieniveaus der harmonischen Falle sichtbar. Das tritt auf, falls die thermische Energie in der Größenordnung des Fallenabstands liegt ($kT \approx \hbar\omega_h$). Andererseits ist dann aber $\langle n \rangle \approx 1$, was sofort auf $\chi = \omega_r/|\gamma| \gg \omega_r\omega_h/|\gamma^2| = \xi^2$ führt, weshalb wir die Situation niedriger Besetzungszahlen $\langle n \rangle$ hier praktisch nicht beobachten können, da der thermische Effekt demzufolge viel zu klein wäre. Man kann daher im Fall $\omega_h \ll \Gamma$ immer die Näherung $\langle n \rangle \approx \frac{1}{\beta\hbar\omega_h}$ machen, d.h. die diskrete Struktur der Falle wird unbedeutend und entspricht somit einem quasi-Kontinuum von Zuständen, analog der Situation eines freien Teilchens.

Der Fall quasi-freier Atome ($\omega_h \ll \Gamma$) beschreibt also in der Tat ein Verhalten ähnlich dem

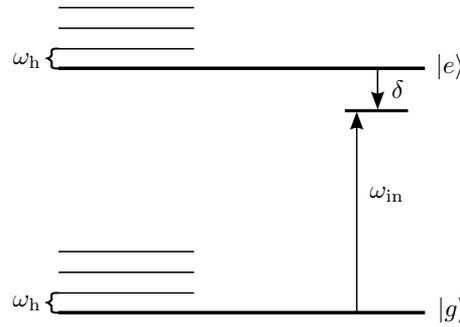


Abbildung 5.3.: Vereinfachtes Energieniveauschema, in welchem die Entartung des angeregten Zustands nicht dargestellt wurde. Die Zustände der Falle sind durch die äquidistanten Niveaus angedeutet und können direkt durch geeignete Verstimmung des Photons angesteuert werden, da $\omega_h \gg \Gamma$.

freier Streuer. Letztere sind wiederum als Wellenpakete zu beschreiben, um der Quantennatur der Streuer gerecht zu werden. Das wird uns später bei einer alternativen Interpretation noch dienlich sein.

5.3. Enge Falle ($\omega_h \gg \Gamma$)

Im Fall $\omega_h \gg \Gamma$ erwartet man nun Effekte aufgrund der Tatsache, dass die Atome eigentlich gebunden sind und sich nicht wirklich frei bewegen können, insbesondere geht hier im Gegensatz zu quasi-freien Streuern die Fallencharakteristik ω_h ein. In der Tat bedeutet die Bedingung

$$\omega_h \gg \Gamma ,$$

dass die einzelnen Fallenniveaus direkt aufgelöst werden können, was in der zuvor betrachteten Situation $\omega_h \ll \Gamma$ nicht möglich war, da aufgrund der Breite Γ des Übergangs immer sehr viele Oszillatorniveaus involviert waren. Hier treten daher Resonanzen auf und die diskrete Struktur der Falle ist sichtbar (Abbildung 5.3).

5.3.1. Ergebnis erster Ordnung

Wir gehen von den Ausdrücken für I_A (5.20) und I_C (5.21) aus. Die darin auftretenden Funktionen κ lassen sich in der Form

$$\kappa(t) \equiv x e^{-i\omega_h t} + y e^{i\omega_h t} - x - y \quad (5.40)$$

schreiben, wobei

$$x \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h} \langle n \rangle , \quad y \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h} (\langle n \rangle + 1) . \quad (5.41)$$

Nehmen wir nun an, dass $\omega_r \ll \omega_h$ und die Temperaturen hinreichend niedrig sind, damit $\langle n \rangle$ nicht zu groß ist, so können wir den die Funktionen κ enthaltenden Exponentialfaktor entwickeln und die verbleibenden Integrale auswerten. Man erhält auf diese Weise wieder eine

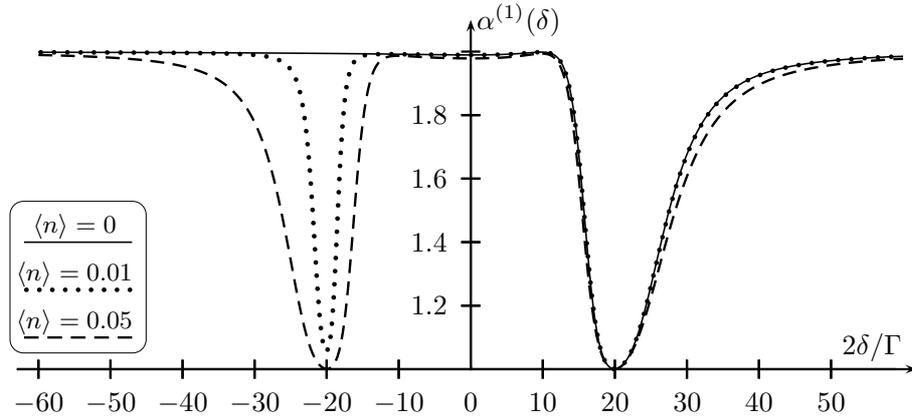


Abbildung 5.4.: Plot des Überhöhungsfaktors $\alpha^{(1)}$ erster Ordnung als Funktion der Verstimmung δ bei verschiedenen Temperaturen. Die Temperatur wird durch die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ ausgedrückt. Sie gibt hier also direkt an, wie stark der erste angeregte Zustand besetzt ist. Außerdem wurde $2\omega_h/\Gamma = 20$ und $\eta^2 = 0.01$ gewählt.

systematische Reihenentwicklung in beliebiger Ordnung.

Um den wesentlichen Mechanismus zu verstehen, reicht es aus, die Korrektur erster Ordnung zu untersuchen. In α (5.22) fallen die ungeraden Potenzen von a heraus, so dass das Ergebnis erster Ordnung isotrop ist.

Bei dieser Entwicklung treten nach Integration Faktoren der Form

$$\nu_{\pm n} \equiv \frac{\gamma}{\gamma \mp n\omega_h} = \frac{\delta + i\Gamma/2}{(\delta \mp n\omega_h) + i\Gamma/2}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.42)$$

auf, welche für $\omega_h \gg \Gamma$ Resonanzen bei $\delta = \pm n\omega_h$ liefern. Diese Resonanzen werden umso schärfer, je größer das Verhältnis ω_h/Γ ist. Im Folgenden wird die Abkürzung $\nu_{\pm} \equiv \nu_{\pm 1}$ verwendet, da in erster Ordnung nur diese auftreten. Es ergibt sich dann

$$L^{(1)} = \frac{1}{|\gamma|^4} \left[1 + 2x(|\nu_-|^2 - 1) + 2y(|\nu_+|^2 - 1) + x(|\nu_-|^4 - 1) + y(|\nu_+|^4 - 1) \right] \quad (5.43)$$

$$C^{(1)} = \frac{1}{|\gamma|^4} \left[1 + 2x(|\nu_-|^2 - 1) + 2y(|\nu_+|^2 - 1) + 2\text{Re} \{ x(\nu_-^2 - 1) + y(\nu_+^2 - 1) \} \right], \quad (5.44)$$

bis auf Korrekturen der Ordnung $O(x^2, y^2, xy)$ und dem an dieser Stelle nicht interessierenden Polarisationsfaktor.

Ein Plot des Überhöhungsfaktors

$$\alpha^{(1)}(\delta) = 1 + \frac{C^{(1)}}{L^{(1)}}$$

für verschiedene Temperaturen und damit Besetzungszahlen $\langle n \rangle$ ist in Abbildung 5.4 als Funktion der Verstimmung δ dargestellt. Wie man sieht, erscheint bei $T = 0$ an der Stelle $\delta = \omega_h$ eine „Absorptionslinie“, während bei steigender Temperatur sich eine zweite Linie bei

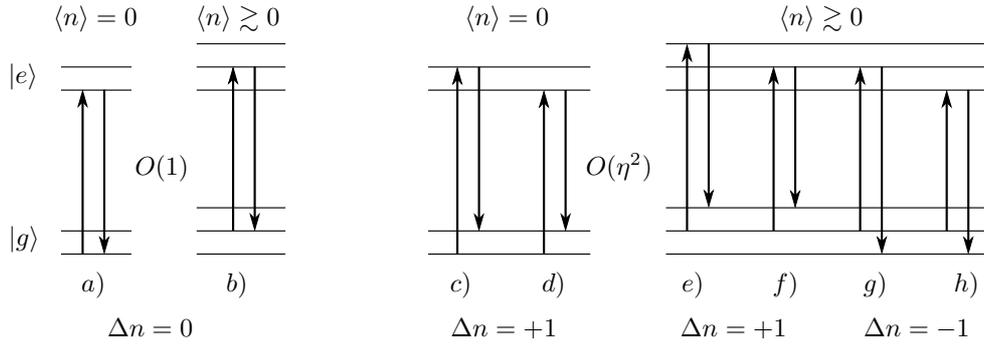


Abbildung 5.5.: Mögliche Übergänge nullter $O(1)$ und erster Ordnung $O(\eta^2)$, sowohl bei $T = 0$ ($\langle n \rangle = 0$) als auch bei (schwach) angeregtem ersten Niveau ($\langle n \rangle \gtrsim 0$).

$\delta = -\omega_h$ herausbildet. Bei weiter zunehmender Temperatur gleichen sich diese beiden Linien immer weiter an.

Mathematisch ist dieses Verhalten bereits in (5.43) bzw. (5.44) ersichtlich. ν_- tritt nur in Verbindung mit x auf und ν_+ entsprechend nur mit y . Für $T = 0$ ist $x = 0$ und es verbleibt lediglich ν_+ , d.h. die Resonanz bei $\delta = +\omega_h$. Mit steigender Temperatur wird der ν_- -Anteil beigemischt. Die Paare x, ν_- und y, ν_+ treten in den Ausdrücken in symmetrischer Weise auf, so dass sich diese Linien bei hinreichend hoher Temperatur immer mehr angleichen.

5.3.2. Interpretation

Zum Verständnis dieses Verhaltens betrachten wir zunächst den Entwicklungsparameter

$$\eta^2 \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h} = (k_{\text{in}} \lambda_h)^2,$$

auch bekannt unter dem Namen Lamb-Dicke Parameter. Die Bedingung $\eta^2 \ll 1$ sagt nun aus, dass die Schwerpunktsbewegung der Atome auf einen Bereich beschränkt ist, welcher wesentlich kleiner als die Lichtwellenlänge ist. Das bedeutet aber, dass die Entwicklung nach diesem Parameter tatsächlich einer Multipolentwicklung entspricht. Die hier betrachtete erste Ordnung wäre also ein Dipolübergang, wobei das im harmonischen Oszillator den erlaubten Übergängen $\Delta n = \pm 1$ entspricht.

Verallgemeinert auf beliebige Ordnungen liefert ein Übergang $\Delta n = \pm N$ im harmonischen Oszillator einen Faktor η^{2N} . Die allgemeine Ordnung σ setzt sich damit aus allen Kombinationen möglicher Übergänge zusammen, welche die vier Absorptions- und Emissionsprozesse begleiten, unter der Nebenbedingung, dass sich in der Gesamtbilanz aller Freiheitsgrade und beider Atome der Faktor $\eta^{2\sigma}$ ergibt. Der Term nullter Ordnung $O(1)$ entspricht der Situation von lediglich $\Delta n = 0$ Übergängen. Entsprechend treten dann in n -ter Ordnung Faktoren $\nu_{\pm k}, k \leq n$ auf, in erster Ordnung gibt es also derer genau die beiden $\nu_{\pm 1}$.

Abbildung 5.5 zeigt alle möglichen $\Delta n = 0, \pm 1$ Übergänge eines Atoms für $T = 0$ (a, c und d) und schwacher thermischer Anregung $\langle n \rangle \gtrsim 0$. Die beiden an der Doppelstreuung beteiligten Atome können nun beliebige Kombinationen dieser Möglichkeiten annehmen.

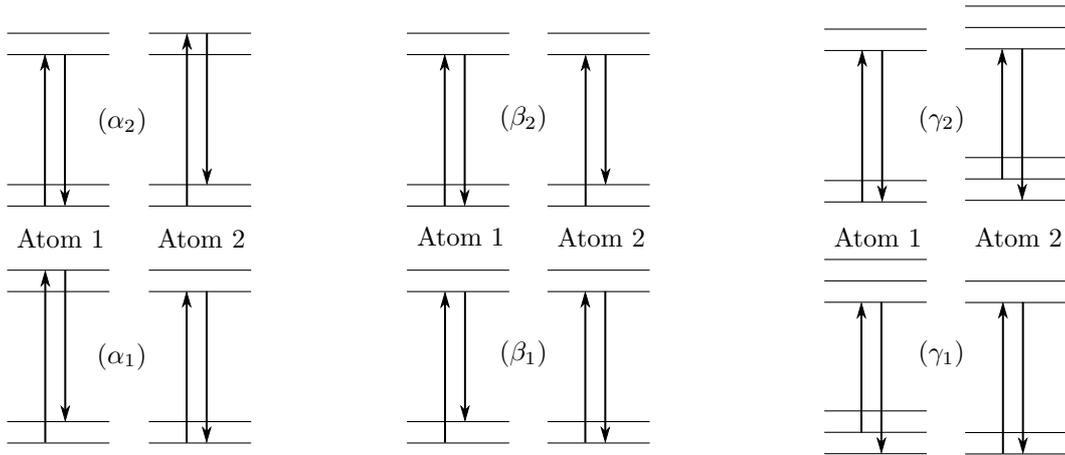


Abbildung 5.6.: Mögliche Prozesse erster Ordnung bei der Doppelstreuung, wobei jeweils zwei nebeneinander liegende Diagramme zusammengehören. Der Index gibt an, welches Atom seinen Fallenzustand ändert.

Die führende Ordnung $O(1)$ ergibt sich durch die beiden Prozesse a und b , welche den Fallenzustand unverändert lassen und damit maximalen Kontrast ($\alpha = 2$) zeigen.

In der nächsten Ordnung $O(\eta^2)$ kann *genau ein* Übergang $O(\eta^2)$ aus Abb. 5.5 auftreten, so dass sich, zunächst für den einfacheren Fall $T = 0$, die ersten vier in Abbildung 5.6 dargestellten Kombinationen ergeben.

Betrachten wir zunächst Weg A , bei welchem zuerst an Atom 1 gestreut wird. In der Situation α_1 erhält man für einlaufende Photonen der Frequenz $\delta = +\omega_h$ resonante Streuung, und zwar bezüglich beider Atome, ganz im Gegensatz zu Fall α_2 , in welchem an Atom 1 nicht-resonant gestreut wird. Für Weg B kehren sich die Verhältnisse genau um. Mit anderen Worten heißt das, je nach Streupfad A bzw. B ist die Situation (α_1) bzw. (α_2) wahrscheinlicher. Da aber nur genau einer der beiden Streuer seinen Fallenzustand ändert, enthalten die externen Freiheitsgrade Information darüber, welche der beiden Situationen $(\alpha_1), (\alpha_2)$ vorlag. Und damit besitzt man auch Kenntnis über den mit größerer Wahrscheinlichkeit gewählten Weg A oder B , was zwangsläufig zu Interferenzverlust führen muss (siehe dazu ausführliche Diskussion in Kapitel 6).

Ein völlig analoges Verhalten ergibt sich bei $\delta = 0$ für $(\beta_1), (\beta_2)$. In der Tat erkennt man in Abb. 5.4 bei genauerem Hinsehen eine leichte Einbuchtung bei $\delta = 0$. Dass der Effekt hier viel geringer ist, verglichen mit $\delta = +\omega_h$, liegt daran, dass die $O(1)$ Übergänge dominieren.

Nimmt die mittlere Besetzung des ersten angeregten Fallenzustandes endliche Werte an, so kommt eine ganze Reihe weiterer möglicher Kombinationen hinzu. Damit sind die Unterschiede zu $T = 0$ aber auch schon erschöpft. Insbesondere liefert eine nahezu identische Argumentation, dass das Paar $(\gamma_1), (\gamma_2)$ für die Linie bei $\delta = -\omega_h$ verantwortlich ist.

Abschließend ist die Bemerkung angebracht, dass die hier gemachte Entwicklung nicht an die Bedingung $\omega_h \gg \Gamma$ geknüpft ist, sondern für beliebige ω_h/Γ gültig ist. Insbesondere liefert die Entwicklung der in L und C enthaltenen Faktoren $\nu_{\pm n}$ (5.42) für kleine ω_h/Γ wieder die in Unterkapitel 5.2 gewonnenen Ergebnisse.

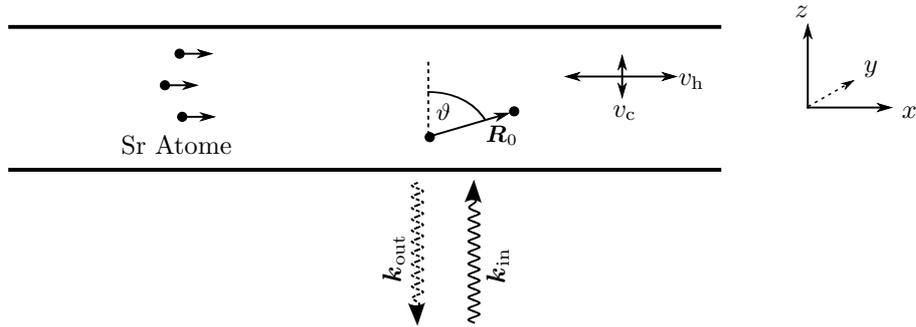


Abbildung 5.7.: An einem Strahl aus heißen Strontiumatomen wird die kohärente Rückstreuintensität gemessen. In diesem Strahl herrscht eine anisotrope Temperaturverteilung vor.

Als Ergänzung sei noch zu erwähnen, dass sich bei hinreichend großem $\eta^2 = \omega_r/\omega_h$ die Sattelpunktmethode anwenden lässt. Im Gegensatz zum vorherigen Fall ist dies möglich, da hier sehr viele Maxima des Arguments beitragen, so dass diejenigen mit einem der $s, t, s', t' = 0$ nur einige wenige unter sehr vielen sind und damit kaum ins Gewicht fallen. Daher können wir die Integrationskontur deformieren, ohne dass der dabei gemachte Fehler an den Integrationsgrenzen für die Asymptotik von Bedeutung wäre.

In diesem Fall treten auch Resonanzen auf, wieder genau an den Stellen $\delta = n\omega_h, n \in \mathbb{Z}$. Diesmal ändert sich das Aussehen von benachbarten Linien nur sehr wenig und es gibt sehr viele davon (n kann groß werden). Die Breite dieser Resonanzen ist durch die natürliche Linienbreite Γ gegeben. Mathematisch zeigen sich diese in einem Faktor der Form

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i \gamma}{\omega_h}}}.$$

Der allgemeine Fall, in dem Ränder und Inneres des Integrationsgebietes gleichermaßen zum Wert des Integrals beitragen (d.h. im Übergangsbereich $\omega_h \approx \Gamma$), ist extrem schwierig und es sind viele unterschiedliche Fälle zu behandeln. Ausgenommen ist natürlich die Situation $x, y \ll 1$, in welcher man systematisch entwickeln kann.

5.4. Einfluss anisotroper Temperaturverteilung

Nach dem ausführlichen Studium des Verhaltens bei Streuern mit isotroper thermischer Bewegung untersuchen wir schließlich noch die allgemeinere Situation anisotrop angeregter Schwerpunktsfreiheitsgrade. Betrachten wir aber zunächst ein in diesem Zusammenhang relevantes Experiment.

5.4.1. Experimentelle Motivation

Ein wesentlicher Bestandteil des Experiments ist zunächst der Ofen, aus welchem Strontiumatome durch eine kleine Öffnung entweichen können [23]. Der austretende Effusionsstrahl hat

eine gerichtete mittlere Geschwindigkeit in x -Richtung (siehe Abbildung 5.7) und um diese eine Geschwindigkeitsverteilung der charakteristischen Breite v_h . Die zur Strahlrichtung transversalen Bewegungsfreiheitsgrade besitzen ebenfalls eine Geschwindigkeitsverteilung, jedoch mit kleinerer Breite v_c . Diese Verteilungen kann man in guter Näherung als Gauß'sch annehmen.

Weiterhin wird der Strontiumstrahl von der Seite mit einem Laser untersucht und die kohärente Rückstreuintensität gemessen. Dazu wird zirkular polarisiertes Licht verwendet, um die unerwünschte Einfachstreuintensität herauszufiltern. Darauf wurde in den vorangehenden Diskussionen bereits eingegangen und die Funktionsweise polarisationssensitiver Messung wird in Anhang A genauer beleuchtet.

Aus Gründen der Einfachheit wird angenommen, dass die beiden Strahlrichtungen von Laser und Strontiumatomen genau senkrecht aufeinander stehen. Die gerichtete Bewegung der Atome lässt sich nun eliminieren, indem man in das mitbewegte Bezugssystem transformiert. Das führt auf einen transversalen Dopplereffekt, welcher jedoch von der Ordnung $(v/c)^2$ ist und damit im vorliegenden Fall keine Rolle spielt. Für eine von der senkrechten Konfiguration abweichenden Situation liefert die Transformation aber auch einen longitudinalen Dopplereffekt, welcher genau die gleiche Größenordnung besitzt, wie die hier zu erwartenden Korrekturen durch die thermische Bewegung. Allerdings lassen sich durch Renormierung der Laserfrequenz $\delta = \omega_{\text{in}} - \omega_0$ auch solche Situationen berücksichtigen (vergleiche dazu auch Diskussion in 5.1.2).

Das transversale Dichteprofil des Atomstrahls ist inhomogen und besitzt in der Mitte seine größte Dichte. Betrachten wir aber einen Fall, in dem ein Photon an genau zwei Atomen gestreut wird (d.h. Doppelstreuung), dann führt das dazu, dass beide beteiligten Streuer in etwa gleich weit entfernt vom "Rand" des Strahls liegen [8]. Das bedeutet aber, dass hier im Wesentlichen $\vartheta \approx \pi/2$ vorherrscht. Situationen, in denen ein Streuer am Rand liegt und der andere weit im Inneren des Strahls ($\vartheta \approx 0$) sind dagegen sehr unwahrscheinlich, zumal diese aufgrund des zusätzlichen Faktors (A.7) durch polarisationssensitive Messung ohnehin kaum beitragen.

Abschließend steht noch die Frage aus, welchen Einfluss Streuprozesse höherer Ordnung haben. Ein beträchtlicher Teil solcher Prozesse kann durch Einführung eines effektiven Mediums, anstatt der unserem Modell zugrundeliegenden freien Propagation im Vakuum, berücksichtigt werden. Beispielsweise können während der Propagation des Photons im Strahl weitere Streuprozesse auftreten, insbesondere auch zwischen den beiden ausgezeichneten Streuern, deren Doppelstreubeitrag wir untersuchen. Genau solche Situationen berücksichtigt das effektive Medium. Dessen Einfluss beruht im Prinzip darauf, dass sich durch inelastische Prozesse der Streuquerschnitt in der Nähe der Resonanz merklich ändert (siehe auch Unterkapitel 2.4). Klar ist, dass die zum Streuquerschnitt proportionale optische Dichte von der Temperatur abhängig ist. Je höher die Temperatur, desto mehr Atome sind wegen der Dopplerverschiebung nicht länger resonant mit den Photonen, weshalb die optische Dichte abnimmt. Daher ist die optische Dichte in Strahlrichtung kleiner als in den dazu transversalen Richtungen. Andererseits ist der Strahl "unendlich" lang verglichen mit dem Durchmesser und eine beliebige Anzahl von Streuprozessen könnte auftreten.

Die Frage, ob die Beschränkung auf Doppelstreuung alleine schon ausreicht oder ob Streuprozesse höherer Ordnung relevant sind, ist noch nicht ausreichend geklärt. Trotzdem soll unser

Modell darauf angewandt werden, da es einen interessanten Effekt gibt. Dieser tritt eigentlich gerade deshalb auf, weil unser Modell nur reine Doppelstreuung im Vakuum beschreibt, insbesondere ohne effektives Medium.

5.4.2. Ergebnis

Die Verallgemeinerung auf den anisotropen Fall erfolgt in Formel (5.11) für die thermische Mittelung und ergibt sich direkt zu

$$\left\langle e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{u}(t_1)} e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{u}(t_2)} \dots e^{i\mathbf{k}_n\mathbf{u}(t_n)} \right\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{k}}_i \underline{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{k}}_i - \sum_{i<j} \left\{ \hat{\mathbf{k}}_i (\underline{\kappa}(t_j - t_i) + \underline{\mathbf{q}}) \hat{\mathbf{k}}_j \right\} \right\}. \quad (5.45)$$

Definiert man den Besetzungszahlentensor \underline{n} , so lauten die daraus abgeleiteten Tensoren⁴

$$\underline{\mathbf{p}} \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h} \underline{\mathbf{1}}, \quad \underline{\mathbf{q}} \equiv \frac{\omega_r}{\omega_h} (2\underline{n} + \underline{\mathbf{1}}), \quad (5.46)$$

$$\underline{\kappa}(t) = i\underline{\mathbf{p}} \sin(\omega_h t) + \underline{\mathbf{q}} (\cos(\omega_h t) - 1), \quad (5.47)$$

völlig analog zu (5.9) und (5.10). Die Eigenwerte des Besetzungszahlentensors sind einfach die Besetzungszahlen $\langle n \rangle$ in Richtung der Hauptachsen der anisotropen Temperaturverteilung.

An die Stelle der Integrale (5.20) und (5.21) treten nun die Ausdrücke

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\ &\quad \exp \left\{ 2\hat{\mathbf{R}}_0 \underline{\kappa}(s' - s) \hat{\mathbf{R}}_0 + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \underline{\kappa}(s' + t' - s - t) \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} [\underline{\kappa}(t') + \underline{\kappa}(-t) - \underline{\kappa}(s' - s + t') - \underline{\kappa}(s' - s - t)] \hat{\mathbf{R}}_0 \right\}, \quad (5.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{i\gamma(s+t)} e^{-i\gamma^*(s'+t')} \\ &\quad \exp \left\{ 2\hat{\mathbf{R}}_0 \underline{\kappa}(s' - s) \hat{\mathbf{R}}_0 + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} [\underline{\kappa}(s' + t') + \underline{\kappa}(-s - t)] \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} - 2\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} [\underline{\kappa}(s') - \underline{\kappa}(-s)] \hat{\mathbf{R}}_0 \right. \\ &\quad \left. + \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} [\underline{\kappa}(t') - \underline{\kappa}(-t) + \underline{\kappa}(s' - s - t) - \underline{\kappa}(s' - s + t')] \hat{\mathbf{R}}_0 \right\}, \quad (5.49) \end{aligned}$$

welche im isotropen Fall wieder direkt in die alten übergehen. Man bemerke, dass hier

$$a = \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \hat{\mathbf{R}}_0 = \cos(\vartheta).$$

Da es sich um freie Atome handelt, betrachten wir natürlich den Fall quasi-freier Streuer und in Analogie zu Unterkapitel 5.2 erhält man die beiden relevanten Parameter aus

$$\underline{\kappa}(2t/|\gamma|) = i2\chi \underline{\mathbf{1}} t - \frac{1}{2} \underline{\xi}^2 t^2, \quad (5.50)$$

wobei die Anisotropie der Temperatur auf den Tensor $\underline{\xi}^2$ übertragen wurde (siehe (5.28) und (5.36)). Dessen Eigenwerte sind gegeben durch

$$\left(2 \frac{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{|\gamma|} \right)^2,$$

⁴Tensoren werden hier immer durch doppelte Unterstriche gekennzeichnet.

wobei v_{rms} durch die effektive Temperatur in der entsprechenden Richtung gegeben ist. In unserem Fall sind das also v_h und v_c . Explizit lautet dieser Tensor daher:

$$\underline{\xi}^2 = \begin{pmatrix} \xi_h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_c^2 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

wobei $\xi_h \approx 52$ für die heiße Strahlrichtung und $\xi_c \approx 4/3$ für die kalten transversalen Richtungen. Weiterhin ergibt sich bei unserer Geometrie

$$\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} = \hat{e}_z \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{R}}_0 = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Der erste Term in (5.50) ist wieder für reine Rückstoßeffekte verantwortlich, spielt aber hier keine Rolle, da für Strontium $\chi = \frac{\omega_r}{|\gamma|} \approx 3.3 \cdot 10^{-4}$ [14].

Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{4}(1-a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{2i\hat{\gamma}(s+t)} e^{-2i\hat{\gamma}^*(s'+t')} \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(s'-s)^2 [\xi_h^2 - a^2 (\xi_h^2 - \xi_c^2)] - \frac{1}{2}\xi_c^2 (s'+t'-s-t)^2\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\xi_c^2 a [t'^2 + t^2 - (s'-s+t')^2 - (s'-s-t)^2]\right\}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} I_C &= \frac{1}{4}(1-a^2)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{2i\hat{\gamma}(s+t)} e^{-2i\hat{\gamma}^*(s'+t')} \\ &\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}(s'-s)^2 [\xi_h^2 - a^2 (\xi_h^2 - \xi_c^2)] - \frac{1}{2}\xi_c^2 [(s'+t')^2 + (s+t)^2]\right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\xi_c^2 a [t'^2 - t^2 - (s'-s+t')^2 + (s'-s-t)^2 - 2s'^2 + 2s^2]\right\}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Man erkennt direkt, dass für $\xi_c^2 \rightarrow 0$ die beiden Ausdrücke für I_A und I_C dieselbe Form annehmen, weshalb es damit keinen Kontrastverlust in Rückrichtung gibt. Selbst bei nicht-verschwindendem ξ_c^2 , aber immer noch klein gegenüber ξ_h^2 , wird das Verhalten durch ξ_c^2 bestimmt, also des Freiheitsgrades der Schwerpunktsbewegung in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$. Das heißt aber offensichtlich, dass der Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ in diesem Zusammenhang nur eine untergeordnete Rolle beikommt.

Im vorliegenden Fall lautet dann die Vorhersage für die dominierende Situation $a = 0$ (d.h. $\vartheta = \pi/2$) und verschwindender Verstimmung $\delta = 0$:

$$\alpha(\vartheta = \frac{\pi}{2}) \approx 1.59.$$

Ein kurzer Blick auf Abbildung 5.2 zeigt in der Tat, dass dieser Wert eher der kalten Richtung ($\xi_c \approx 4/3$) zugeordnet werden kann, als der heißen.

Die zentrale Aussage an dieser Stelle ist, dass die Relativmode in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ der einlaufenden Photonen den Effekt des dynamischen Zusammenbruchs der kohärenten Rückstreuung dominiert. Insbesondere ist der Einfluss der Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ der zwischen den beiden Atomen ausgetauschten Photonen kleiner, als man zunächst aus dem isotropen Verhalten schließen

würde.

Diese Aussage findet sich auch direkt im Term niedrigster Ordnung (2.9) wieder, in welchem die Relativbewegung auf \mathbf{k}_{in} projiziert wird. Im nächsten Kapitel werden wir das im Zuge einer Interpretation auch auf anschaulichere Weise verstehen.

6. Quantitative Quantendualität

In diesem Kapitel werden wir die kohärente Rückstreuung durch zwei atomare Streuer unter einem anderen Blickwinkel betrachten, nämlich unter Gesichtspunkten der Quanteninformation, im Speziellen dem Vorhandensein von welcher-Weg Information und dessen Wechselspiel mit dem Interferenzkontrast.

Seit dem historischen Doppelspaltexperiment von Young [24] und Bohrs Komplementaritätsprinzip gilt die Erkenntnis, dass ein Interferenzmuster auf dem Schirm genau dann sichtbar ist, falls man sich mit der Unkenntnis über die Wahl des Spalts zufrieden gibt. Wenn man andererseits den Weg, den das Photon genommen hat, eindeutig identifizieren kann, so verschwindet die Interferenz. Man spricht in diesem Zusammenhang von Welle-Teilchen-Dualität. Das Licht zeigt je nach Situation Welle- oder Teilcheneigenschaften. Beide Beschreibungen sind in der Quantentheorie enthalten.

Es gibt aber nicht nur diese beiden Extremsituationen, sondern sicherlich auch interessante Zwischensituationen, in denen beide Eigenschaften gleichzeitig vorliegen. In diesem Zusammenhang hat Englert [25] eine Ungleichung abgeleitet, welche imstande ist, genau solche Situationen quantitativ zu beschreiben. Sie baut auf zwei verschiedene Größen: Der Interferenzkontrast als Welleneigenschaft und ein Maß für das Wissen über den gewählten Weg (bezeichnet mit welcher-Weg Information) als Teilchencharakteristikum. Es gilt nun allgemein für alle erdenklichen Quantensysteme, dass Wellen- und Teilcheneigenschaften zueinander komplementär sind. Konkret heißt das, je mehr welcher-Weg Information vorhanden ist, desto geringer ist die Interferenz zwischen den verschiedenen Wegen. Experimentelle Untersuchungen diesbezüglich findet man beispielsweise in [26, 27], welche dieses Verhalten auch quantitativ bestätigen.

Wir wenden in diesem Kapitel unser Modell auf diesen Formalismus an, um genau dieses Verhalten in Bezug auf den dynamischen Zusammenbruch der kohärenten Rückstreuung durch bewegte Atome zu studieren. Insbesondere wird auf die Fragestellung eingegangen, in welcher Weise welcher-Weg Information vorhanden ist, oder wie diese durch den Streuprozess im System der Streuer hinterlassen wird. Um eine Analogie zu Youngs Interferenzexperiment herzustellen, identifizieren wir die beiden Streupfade Weg A und B mit den beiden Spalten, an welchen jeweils ein Detektor angebracht ist, der dann Auskunft über den gewählten Weg des Photons geben soll. Unsere Freiheitsgrade der Schwerpunktsbewegung nehmen daher die Funktion eines welchen-Weg Detektors an.

Weiterhin widmen wir uns dem Einfluss der Kopplung an ein thermisches Bad, d.h. der thermischen Dekohärenz. In diesem Zusammenhang ist der Detektor wiederum an eine Umgebung gekoppelt: das thermische Bad, welches in unserem Fall den Kühl-Lasern entspricht.

6.1. Quantitative Quantendualität bei Streuprozessen

Wir werden zunächst die relevanten Größen in einer für uns nützlichen Form herleiten. Gehen wir von [25] aus, so stoßen wir auf das Problem, dass der Streuprozess nicht durch eine unitäre Zeitentwicklung beschrieben wird. Mit einem genaueren Blick auf die Operatoren (4.43) und (4.44) überzeugt man sich in der Tat davon, dass T_A und T_B nicht unitär sind.

Glücklicherweise gibt es eine neuere Betrachtung von Englert und Bergou [28], welche nicht auf einer unitären Zeitentwicklung basiert. Stattdessen ist die einzige Voraussetzung an das betrachtete System, dass man eine Dichtematrix, welche die Verschränkung der miteinander interferierenden Alternativen mit dem Detektorsystem enthält, angeben kann, was ja bei gegebenem System im Prinzip immer möglich ist.

Angewandt auf unseren Fall ergibt das folgende Zusammenhänge. Das einlaufende Photon kann zwischen zwei zunächst völlig gleichberechtigten Alternativen (Weg A bzw. Weg B) wählen. Entsprechend der Terminologie von Englert und Bergou nennen wir diesen binären Freiheitsgrad ein *Qubit*. Mit $|A\rangle$ und $|B\rangle$ bezeichnen wir diese beiden möglichen Alternativen. Die Freiheitsgrade der atomaren Schwerpunktsbewegung entsprechen dem welchen-Weg Detektor, in [28] bezeichnet als Umgebung (*environment*).

Der Streuprozess verschränkt nun Qubit und Detektor in einer komplizierten Art und Weise. Diese Verschränkung kann durch eine Dichtematrix für das Gesamtsystem, bestehend aus Qubit und Detektor, beschrieben werden, welche nun bestimmt werden soll. Diese Dichtematrix enthält alle notwendigen Informationen, insbesondere über den Interferenzkontrast und die Unterscheidbarkeit der beiden Wege.

Dazu gehen wir von der anfänglichen Dichtematrix des Gesamtsystems aus. Der Detektor, respektive das System der Schwerpunktsbewegung befindet sich vor der Streuung im thermischen Gleichgewicht bei inverser Temperatur $\beta = 1/k_B T$, die Dichtematrix lautet also

$$\rho^{(i)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta H_{\text{ext}}} \quad (6.1)$$

mit der Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H_{\text{ext}}} . \quad (6.2)$$

Da anfänglich keine der beiden Alternativen ausgezeichnet ist, befindet sich das Qubit im reinen Zustand der symmetrischen Superposition:

$$\rho_{AB}^{(i)} = \frac{1}{2}(|A\rangle + |B\rangle)(\langle A| + \langle B|) .^1 \quad (6.3)$$

Der Anfangszustand des Gesamtsystems ist dann einfach das direkte Produkt

$$\rho_{\text{tot}}^{(i)} = \rho_{AB}^{(i)} \otimes \rho^{(i)} . \quad (6.4)$$

Den Endzustand erhält man dann vermöge der Transformation

$$\rho_{\text{tot}}^{(f)} = \frac{T \rho_{\text{tot}}^{(i)} T^\dagger}{\text{Tr} \{T \rho_{\text{tot}}^{(i)} T^\dagger\}} , \quad (6.5)$$

¹Man kann auch einen beliebigen Phasenfaktor in der Form $|A\rangle + e^{i\varphi}|B\rangle$ einführen, aber an den hier relevanten Größen würde das nichts ändern, sondern lediglich das Interferenzmuster verschieben.

mit dem Übergangoperator des Gesamtsystems aus Qubit und externen Freiheitsgraden

$$T = |A\rangle\langle A| \otimes T_A + |B\rangle\langle B| \otimes T_B . \quad (6.6)$$

Explizit schreibt sich

$$T\rho_{\text{tot}}^{(i)}T^\dagger = \begin{pmatrix} T_A\rho^{(i)}T_A^\dagger & T_A\rho^{(i)}T_B^\dagger \\ T_B\rho^{(i)}T_A^\dagger & T_B\rho^{(i)}T_B^\dagger \end{pmatrix} . \quad (6.7)$$

Da es sich um eine nicht-unitäre Transformation handelt, müssen wir noch dafür sorgen, dass $\rho_{\text{tot}}^{(f)}$ normiert ist, was zu dem zusätzlichen Normierungsfaktor

$$\text{Tr} \left\{ T\rho_{\text{tot}}^{(i)}T^\dagger \right\} = \text{Tr} \left\{ T_A\rho^{(i)}T_A^\dagger \right\} + \text{Tr} \left\{ T_B\rho^{(i)}T_B^\dagger \right\} \equiv I_A + I_B \quad (6.8)$$

führt.

Wir können nun direkt die von Englert und Bergou gegebenen Definitionen aus [28] auf unseren Zustand $\rho_{\text{tot}}^{(f)}$ anwenden.

Für den Interferenzkontrast \mathcal{V} (*visibility*) und die Unterscheidbarkeit \mathcal{D} (*distinguishability*) ergibt das

$$\mathcal{V} = 2 \frac{\left| \text{Tr} \left\{ T_B\rho^{(i)}T_A^\dagger \right\} \right|}{I_A + I_B} , \quad (6.9)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\text{Tr} \left\{ \left| T_A\rho^{(i)}T_A^\dagger - T_B\rho^{(i)}T_B^\dagger \right| \right\}}{I_A + I_B} , \quad (6.10)$$

wobei $\text{Tr} \{|X|\} = \text{Tr} \{\sqrt{X^\dagger X}\} = \sum_i |\lambda_i|$ die Spurklasse-Norm (*trace-class norm*) des Operators X darstellt.² Diese Norm ist durch die Summe der Beträge aller Eigenwerte λ_i des Operators X gegeben, weshalb sie mathematisch wesentlich komplizierter ist, als dies beispielsweise bei der Berechnung der quadratischen Norm $\text{Tr}\{X^\dagger X\} = \sum_i |\lambda_i|^2$ der Fall ist.

Der Interferenzkontrast entspricht der üblichen Definition

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}}$$

und gibt den Kontrast des eigentlich beobachteten Interferenzsignals an (in unserem Fall ist das die Interferenz der Photonen, prinzipiell beobachtbar mit Hilfe eines Photodetektors). In der Tat ähnelt \mathcal{V} bereits sehr stark dem Überhöhungsfaktor (5.1), wenn man bedenkt, dass der Kontrast im Wesentlichen durch C/L gegeben ist, bis auf den feinen Unterschied, dass bei letzterem nur der Realteil anstatt des Betrags genommen wird. Dieser Unterschied rührt daher, dass wir den Überhöhungsfaktor α bei genau einem bestimmten Winkel $\theta = 0$ betrachten. Dort muss aber nicht notwendigerweise ein Interferenzmaximum liegen, was dazu führt, dass $C/L \leq \mathcal{V}$. Um tatsächlich auf den Wert \mathcal{V} zu kommen, muss man immer einen ganzen Bereich von der Größenordnung der Variationen des Interferenzmusters (in unserem Fall ist das beispielsweise $\Delta\theta \approx 1/k_{\text{in}}R_0$) mit einbeziehen. Bei symmetrischen Streusituationen, zum Beispiel bei $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}\hat{\mathbf{R}}_0 = 0$ oder nach der Mittelung über alle Orientierungen $\hat{\mathbf{R}}_0$, liegt das Interferenzmaximum genau bei $\theta = 0$, weshalb hier kein Unterschied zwischen beiden Größen besteht.

²Ein Operator X wird als *trace-class* Operator bezeichnet, falls $\text{Tr} \{|X|\} < \infty$.

Die Unterscheidbarkeit \mathcal{D} liefert die Kenntnis über den Weg, welche man durch eine optimale Messung am welchen-Weg Detektor erhält. Mit anderen Worten entspricht das der nach der Streuung im System vorhandenen welchen-Weg Information, welche prinzipiell, durch eine geeignete Messung, aus dem Detektorsystem extrahiert werden kann. Für $\mathcal{D} = 1$ kann man eine Vorhersage über den Weg mit Sicherheit treffen, für $\mathcal{D} = 1/2$ ist die Vorhersage nur in 75% der Fälle korrekt. \mathcal{V} und \mathcal{D} genügen beide der fundamentalen Dualitätsrelation

$$\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 \leq 1 . \quad (6.11)$$

Sie liefert genau die Aussage, dass Interferenz und welcher-Weg Information zueinander komplementär sind. Insbesondere enthält sie die beiden Spezialfälle $\mathcal{V} = 1 \Rightarrow \mathcal{D} = 0$ (maximaler Kontrast impliziert die Absenz von welcher-Weg Information) und $\mathcal{D} = 1 \Rightarrow \mathcal{V} = 0$: aus der genauen Kenntnis des Weges folgt ein vollständiges Auslöschen der Interferenz.

Es gibt noch zwei weitere interessante Größen, welche lauten: Vorhersagbarkeit \mathcal{P} (*predictability*) und die Kohärenz \mathcal{C} (*coherence*).

$$\mathcal{P} = \frac{\left| \text{Tr} \left\{ T_A \rho^{(i)} T_A^\dagger - T_B \rho^{(i)} T_B^\dagger \right\} \right|}{I_A + I_B} = \frac{|I_A - I_B|}{I_A + I_B} \quad (6.12)$$

und

$$\mathcal{C} = 2 \frac{\left| \text{Tr} \left\{ T_B \rho^{(i)} T_A^\dagger \right\} \right|}{I_A + I_B} \quad (6.13)$$

sind ebenfalls durch eine Relation miteinander verknüpft, ähnlich wie zuvor gilt die Ungleichung

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{C}^2 \leq 1 , \quad (6.14)$$

welche auf den Namen *erasure relation* hört.

Die Vorhersagbarkeit \mathcal{P} liefert, im Gegensatz zur Unterscheidbarkeit \mathcal{D} , wieviel welcher-Weg Information bereits vor der Streuung, d.h. *a priori* vorhanden ist. Ein Beispiel ist das Doppelspalt Experiment von Young mit verschiedenen großen Spalten, so dass einer davon bevorzugt durchlaufen wird. Ein weiteres Beispiel werden wir später in unserem Modell finden. Für ein symmetrisches Interferometer mit $I_A = I_B$ erhält man sofort $\mathcal{P} = 0$. Wir haben zuvor erwähnt, dass \mathcal{D} die welcher-Weg Information bei einer optimalen Messung angibt. Quantifizieren wir mit \mathcal{K} die welcher-Weg Information bei einer beliebigen Messung, so gilt für diese

$$\mathcal{P} \leq \mathcal{K} \leq \mathcal{D} , \quad (6.15)$$

insbesondere geht bei einer Nicht-Messung \mathcal{K} in \mathcal{P} über. Diese Ungleichung impliziert auch $\mathcal{P} \leq \mathcal{D}$: die a-priori bekannte Information muss natürlich immer kleiner sein, als die insgesamt, inklusive einer nachfolgenden Messung, verfügbare.

Die Kohärenz \mathcal{C} haben wir nur der Vollständigkeit halber angegeben und werden diese in Bezug auf unser Modell nicht weiter betrachten. Im Prinzip sagt diese Größe aus, wieviel Interferenzkontrast man maximal durch eine geeignete Messung am Gesamtsystem wiederherstellen kann. Dieses wird als *Quantum Erasure* bezeichnet (siehe z.B. [27]), wobei der

Name seinen Ursprung in der Dualität (6.11) hat, nämlich dass das Wiederherstellen von Interferenzkontrast typischerweise auf Kosten der welchen-Weg Information erfolgt.³

Wir haben bei der Herleitung keinerlei Gebrauch von spezifischen Eigenschaften des betrachteten Systems gemacht. Die einzige Annahme ist, dass es sich um Zwei-Wege-Interferenz handelt. Die Ergebnisse bleiben natürlich gültig für beliebige andere Streuprozesse, nur eben mit anderen T_A , T_B und $\rho^{(i)}$.

6.2. Interferenz, Unterscheidbarkeit und Vorhersagbarkeit bei Doppelstreuung

Wenden wir nun Definitionen (6.9), (6.10) und (6.12) auf unser konkretes Modell an, d.h. wir setzen T_A bzw. T_B aus (4.43) bzw. (4.44) ein.

Allerdings ist der Ausdruck für \mathcal{D} (und auch der für \mathcal{C}) in unserem Fall schwierig auszuwerten, da dieser nach einer Berechnung der Spurklasse-Norm auf dem unendlichdimensionalen Hilbertraum der harmonischen Oszillatoren verlangt, was im Prinzip einer Diagonalisierung unseres komplizierten Operators $T_A\rho^{(i)}T_A^\dagger - T_B\rho^{(i)}T_B^\dagger$ gleichkommt. Für ein analytisches Ergebnis müssen wir uns daher mit einer Entwicklung dieses Operators und der Beschränkung auf die führende Ordnung begnügen. Diese Entwicklung erfolgt formal nach dem Lamb-Dicke Parameter $\eta \equiv k_{\text{in}}\lambda_h = \sqrt{\omega_r/\omega_h}$, wie er auch in den Exponentialfaktoren der Übergangsoperatoren T_A und T_B aus (4.43) und (4.44) auftritt. Entwickelt man diese Faktoren, so lassen sich die Integrale ausführen und man erhält bis zu Termen linear in η :

$$T_A\rho^{(i)}T_A^\dagger - T_B\rho^{(i)}T_B^\dagger = \frac{\sqrt{2}}{|\gamma|^4}i\eta \left[-\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}}(\hat{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{a}}^\dagger) - \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}(\nu_-^2\hat{\mathbf{a}} + \nu_+^2\hat{\mathbf{a}}^\dagger) \right] \rho^{(i)} + h.c. \quad , \quad (6.16)$$

wobei $h.c.$ für das hermitesch Konjugierte steht. Die Konstanten ν_\pm sind definiert als

$$\nu_\pm = \frac{\gamma}{\gamma \mp \omega_h} \quad (6.17)$$

und entsprechen den Resonanztermen (5.42) aus Unterkapitel 5.3. Die hier auftretende Oszillatormode

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}} \quad (6.18)$$

ist die auf die Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ projizierte antisymmetrische Mode der Schwerpunktsoszillationen. Warum eine relative Mode die entscheidende Rolle spielt, wurde zuvor schon durch die Tatsache erklärt, dass symmetrische Bewegung durch Transformation in das mitbewegte System eliminiert werden kann. Symmetrische Bewegung ist daher nicht geeignet, um welchen-Weg Information (d.h. Unterschiede in den beiden Streupfaden) im System zu hinterlassen. Die Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ fällt heraus, da in unserer Näherung der Photonen austausch zwischen den beiden Atomen instantan erfolgt (Vernachlässigung der Propagationszeiten).

Der Ausdruck für \mathcal{D} in führender Ordnung η schreibt sich zusammen mit dem auf die Mode $\hat{\mathbf{a}}$ reduzierten statistischen Operator

$$\rho^{(i)} = (1 - e^{-\bar{\beta}})e^{-\bar{\beta}\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}} \quad , \quad \bar{\beta} \equiv \beta\hbar\omega_h$$

³Genau genommen ist die Bezeichnung *erasure* irreführend, da es Fälle von *Quantum Erasure* gibt, in denen jedoch zuvor überhaupt keine welchen-Weg Information vorhanden war [27].

als

$$\mathcal{D} = \sqrt{\frac{\omega_r}{2\omega_h}} \left(1 - e^{-\bar{\beta}}\right) \text{Tr} \left\{ \left| e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a}\nu + \nu^* \hat{a}^\dagger e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}} \right| \right\}, \quad (6.19)$$

wobei der Parameter ν definiert ist als

$$\begin{aligned} i\nu &= (\nu_+^{*2} - 1) - e^{-\bar{\beta}}(\nu_-^2 - 1) \\ &= \left[\left(\frac{\gamma^*}{\gamma^* - \omega_h} \right)^2 - 1 \right] - e^{-\bar{\beta}} \left[\left(\frac{\gamma}{\gamma + \omega_h} \right)^2 - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Andererseits können wir die Spurbildung, sprich die thermische Mittelung in den Ausdrücken für den Interferenzkontrast \mathcal{V} und der Vorhersagbarkeit \mathcal{P} exakt auswerten (vergleiche Unterkapitel 5.1).

An dieser Stelle brauchen wir aber nicht den vollständigen Ausdruck, sondern wir können uns mit einer Entwicklung zufrieden geben, da wir \mathcal{D} ohnehin nur in führender Ordnung verwenden und wir diesen Ausdruck dann mit dem von \mathcal{V} bzw. \mathcal{P} vergleichen wollen. Letztere können aber im Wesentlichen direkt aus Kapitel 5 übernommen werden.

Allerdings beschränken wir von nun an unsere Betrachtungen auf das Regime der quasi-freien Atome $\omega_h \ll \Gamma$. Die entgegengesetzte Situation der engen Falle $\omega_h \gg \Gamma$ ist in diesem Zusammenhang weniger interessant und das Wesentliche wurde bereits in Abschnitt 5.3 herausgearbeitet, auch wenn das, die Aspekte der Quanteninformation betreffend, nur in qualitativer Weise zutrifft. Das einzige Erwähnenswerte ist die Struktur der Konstante ν aus (6.20). Hier treten die beiden für Resonanzen verantwortlichen Terme ν_\pm auf. Für $T \rightarrow 0$ bzw. $\beta \rightarrow \infty$ bleibt nur der Anteil ν_+ . Bei steigender Temperatur mischt sich ein Anteil (ν_-) dazu. Im Grenzfall $\bar{\beta} \rightarrow 0$ gehen beide Anteile schließlich gleichberechtigt ein. Dieses Verhalten erinnert in der Tat sehr an das in Abschnitt 5.3 kennengelernte.

6.3. Quasi-freie Atome

Wir werden nun die in 5.2 gewonnenen Ergebnisse genauer unter dem Gesichtspunkt der Quanteninformation beleuchten.

\mathcal{V} und \mathcal{P} erhält man direkt unter Zuhilfenahme der Ausdrücke (5.29) und (5.30).

\mathcal{V} lautet im quasi-freien Fall

$$\mathcal{V} = \frac{2|I_C|}{I_A + I_B} = 1 - 8a^2 \frac{\delta^2}{|\gamma|^2} \chi^2 - \xi^2 + O(\xi^4, \chi^3, \chi\xi^2). \quad (6.21)$$

Man erkennt, dass es sich hierbei nicht exakt um den gleichen Ausdruck handelt, wie für den Interferenzkontrast $C/L = \alpha - 1$ in (5.32). Der Unterschied liegt in dem bereits zuvor erwähnten Auftreten zum einen des Betrags in \mathcal{V} und zum anderen des Realteils in α begründet. Offensichtlich macht sich dieser Unterschied im Gegensatz zum ξ^2 -Term im χ^2 -Term bereits bemerkbar.⁴ Dies führt dazu, dass α stärker abnimmt, als dies für den Interferenzkontrast \mathcal{V} der Fall ist. Der physikalische Grund ist eine Verschiebung des Maximums weg von der

⁴Das sieht man leicht ein, denn wegen $|1 + x + iy| = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \approx 1 + x + \frac{1}{2}y^2$ geht der Imaginärteil nur quadratisch ein.

exakten Rückrichtung $\theta = 0$. Das kann offenbar nur bei asymmetrischen Streusituationen $a \neq 0$ auftreten, da es bei $a = 0$ keine Vorzugsrichtung gibt. In der Tat tritt in I_C (5.30) immer nur die Kombination ia auf, was auch sofort aus der Symmetrie $I_C^*|_{a \leftrightarrow -a} = I_C$ folgt. Bei einer Konfigurationsmittelung führt das verschobene Maximum dann lediglich zu einer Deformation des Rückstreukonus.

\mathcal{P} ist der Betrag von

$$\frac{I_A - I_B}{I_A + I_B} = a \left\{ -4 \frac{\delta}{|\gamma|} \chi + \frac{1}{2} \xi^2 (3\Upsilon - 2) + O(\xi^4, \chi^2, \chi \xi^2) \right\} . \quad (6.22)$$

Der Vorfaktor a kann aus jedem Term herausgezogen werden, da a in jeder Ordnung nur als ungerade Potenz vorkommt. Das folgt aus

$$I_B = I_A|_{a \leftrightarrow -a}$$

in Verbindung mit der Tatsache, dass a im exakten Ausdruck (5.25) nur in der Form $a\chi$ bzw. $a\xi^2$, also zusammen mit unseren Entwicklungsparametern auftritt. Daher ist

$$\mathcal{P} = |a| f(a^2, \chi, \xi^2) ,$$

weshalb es sich in der Streusituation $a = 0$ offensichtlich um ein symmetrisches Interferometer handelt. Andererseits folgt $\mathcal{P}(a = 0) = 0$ sogar schon direkt aus $I_B = I_A|_{a \leftrightarrow -a}$.

Da \mathcal{D} wegen der Spurklasse-Norm etwas komplizierter zu bestimmen ist, werden wir es später an entsprechender Stelle tun.

6.3.1. Verschwindende Temperatur

Beginnen wir zunächst mit dem rechnerisch einfacheren Fall $T = 0$ bzw. $\bar{\beta} \rightarrow \infty$, in welchem sich beide Atome in den entsprechenden Grundzuständen der harmonischen Falle befinden, sprich der welcher-Weg Detektor befindet sich in einem reinen Zustand. Daraus folgt allgemein, dass die Dualitätsrelation (6.11) gesättigt ist (siehe Anhang C), d.h. für ein $\rho^{(i)} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ gilt

$$\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 = 1 .$$

Daher genügt in diesem Fall die Bestimmung einer der beiden Größen, da die zweite dann durch die Dualitätsrelation bereits eindeutig festgelegt ist. Wir brauchen also nur das uns bereits bekannte \mathcal{V} zu verwenden, um \mathcal{D} zu bestimmen. Andererseits kommt die Berechnung des Ausdrucks für \mathcal{D} in der Form (6.19) bei $\bar{\beta} \rightarrow \infty$ der Diagonalisierung einer 2×2 -Matrix gleich. Das dann zu erhaltende Ergebnis bestätigt diesen Sachverhalt noch einmal.

Die für uns in diesem Zusammenhang relevanten Maße lauten daher

$$\mathcal{V}^2 = 1 - \varrho^2(\delta) - 2\zeta^2 , \quad (6.23)$$

$$\mathcal{D}^2 = \varrho^2(\delta) + 2\zeta^2 = 1 - \mathcal{V}^2 , \quad (6.24)$$

$$\mathcal{P}^2 = \varrho^2(\delta) , \quad (6.25)$$

wobei wieder Terme der Ordnung $O(\zeta^4, \chi^3, \zeta^2\chi)$ vernachlässigt wurden. ζ^2 geht für $T = 0$ aus ξ^2 hervor (siehe Formeln (5.34) und (5.28)).

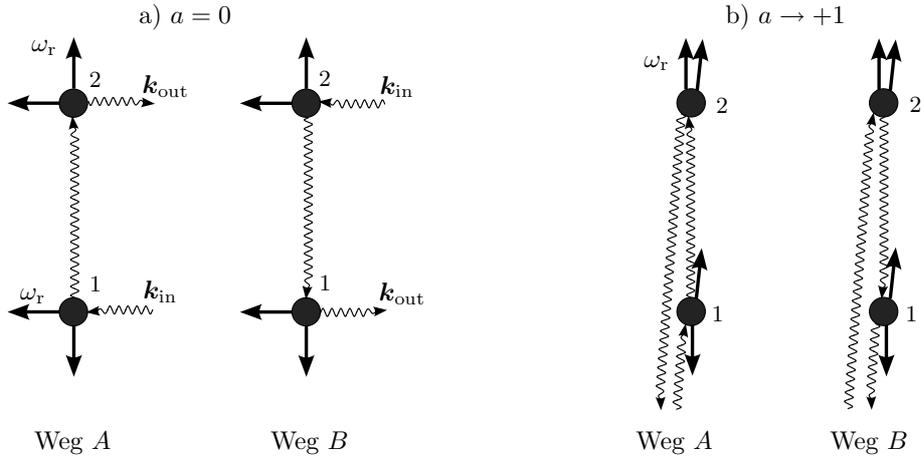


Abbildung 6.1.: Asymmetrische inelastische Streuung durch Rückstoßüberträge führt zu einer Differenz in den Streuwahrscheinlichkeiten für Weg A und B, welche maximal ist für $a \rightarrow \pm 1$ und bei $a = 0$ verschwindet.

Die in allen drei Ausdrücken auftretende Größe

$$\varrho(\delta) = 4a \frac{\delta}{|\gamma|} \chi \quad (6.26)$$

beschreibt den Einfluss des Rückstoßübertrags ω_r (bei $T = 0$) in Verbindung mit der Streugeometrie $a = \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{in}$. Spezifische Eigenschaften der harmonischen Falle gehen in ϱ nicht ein.

Inelastische Streuung

Um nun die Herkunft der Terme $\varrho(\delta)$ zu verstehen, betrachten wir eine Situation, in welcher Rückstoßeffekte verglichen mit dem Einfluss der Nullpunktsfluktuationen ζ^2 der Schwerpunktsbewegung dominieren. Man denke beispielsweise an eine sehr schwache Falle $\omega_h \ll \omega_r$. Zumindest in der betrachteten Näherung gilt dann also bereits $\mathcal{V}^2 + \mathcal{P}^2 = 1$, was zusammen mit $\mathcal{P} \leq \mathcal{D}$ (6.15) erfordert, dass $\mathcal{P} = \mathcal{D}$. Bezogen auf obige Ausdrücke (6.23)-(6.25) ist das in der Tat der Fall. Das heißt aber, dass sämtliche Information über den Weg bereits vor einer Messung bekannt ist, man nennt diese daher *a priori* welcher-Weg Information.

In diesem Fall sind das ungleiche Streuamplituden, welche zu verschiedenen Streuwahrscheinlichkeiten der beiden Wege führen. Die allgemeine Formel für \mathcal{P} (6.12), welche der relativen Differenz der beiden Streuintensitäten entspricht, gibt genau diese Aussage in mathematischer Weise wieder.

Ein erster Hinweis auf den Ursprung dieser Asymmetrie ist die Proportionalität derselben zu $a = \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{in}$. Betrachten wir dazu die beiden Extremsituationen der Streugeometrie, wie in Abbildung 6.1 dargestellt. Sowohl im Fall $a = 0$ als auch für $a = 1$ sind die Überträge ω_r auf die Atome für beide Wege vollkommen identisch. Energieüberträge führen aber zu inelastischer Streuung. Im Fall $a = 0$ ist der Gesamtenergieübertrag auf beide Atome jeweils gleich $2\omega_r$ und keiner der beiden Wege ist ausgezeichnet. Liegt die Verbindungsachse der Atome parallel zur Einstrahlrichtung $\hat{\mathbf{k}}_{in}$ ($a = +1$), so ist jedoch der Nettoimpulsübertrag auf den vorderen Streuer (Atom 1) gleich 0, für den hinteren (Atom 2) dagegen $2\omega_r$. Das führt dazu, dass am

hinteren Atom immer Photonen mit der Laserfrequenz $\delta = \omega_{\text{in}} - \omega_0$ gestreut werden. An Atom 1 haben die gestreuten Photonen eine Frequenz abhängig von der Wahl des Weges. Für Weg A ist diese δ , für Weg B aber $\delta - 2\omega_r$. Bei quasi-resonanter Streuung hat eine Frequenz- bzw. Energieänderung des Photons eine Verschiebung auf der Lorentzkurve

$$\sigma(\delta) = \frac{\sigma_0}{|\gamma|^2}$$

zur Folge. Korrekturen sind dann auf der Skala $\omega_r/|\gamma|$, d.h. unserem vertrauten Parameter χ , zu erwarten. Im Lichte dieser Betrachtungen wird jetzt auch der zusätzliche Faktor $\delta/|\gamma|$ verständlich: auf dem flachen Maximum $\delta = 0$ der Lorentzkurve ändert sich die Intensität in erster Ordnung nicht, während bei $\delta = \Gamma/2$ diese Änderung maximal ist.

Man kann das Ganze sogar noch viel konkreter werden lassen, indem man die relative Änderung des Streuquerschnitts unter einer kleinen Frequenzänderung $\Delta\omega = 2\omega_r \ll |\gamma|$ betrachtet. Aus

$$\begin{aligned} \sigma(\delta - \Delta\omega) &= \frac{\sigma_0}{(\delta - \Delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2} \\ &\approx \frac{\sigma_0}{\delta^2 + (\Gamma/2)^2 - 2\delta\Delta\omega} = \frac{\sigma_0}{|\gamma|^2} \frac{1}{1 - \frac{2\delta\Delta\omega}{|\gamma|^2}} \approx \sigma(\delta) \left(1 + \frac{2\delta\Delta\omega}{|\gamma|^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma} &= \frac{2\delta}{|\gamma|} \frac{\Delta\omega}{|\gamma|} \end{aligned} \quad (6.27)$$

folgt zusammen mit $\Delta\omega = 2\omega_r a$, dem von der Geometrie abhängigen effektiven Frequenzunterschied, dass $\Delta\sigma/\sigma = \varrho(\delta)$, also genau die in (6.23)-(6.25) auftretenden Korrekturen.

In dem eben betrachteten Fall $T = 0$ und vernachlässigbaren Nullpunktsfluktuationen ζ^2 kann man sogar noch einen Schritt weitergehen und die exakten Ausdrücke für \mathcal{P} und \mathcal{V} betrachten. Dazu bemerken wir zunächst, dass $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = 1$, falls gilt

$$I_A I_B = I_A I_A|_{a \rightarrow -a} \stackrel{!}{=} I_C I_C|_{a \rightarrow -a} . \quad (6.28)$$

Dieses folgt direkt aus

$$\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = \frac{(I_A - I_B)^2}{(I_A + I_B)^2} + 4 \frac{I_C I_C^*}{(I_A + I_B)^2} = 1 - 4 \frac{I_A I_B - I_C I_C^*}{(I_A + I_B)^2} \stackrel{!}{=} 1 . \quad (6.29)$$

Aus den exakten Ausdrücken für I_A (5.25) und I_C (5.26) erkennen wir für $\xi^2 \rightarrow 0$ und $a = 0$, dass (6.28) tatsächlich erfüllt ist und damit $\mathcal{P}^2 + \mathcal{V}^2 = 1$ exakt gilt, woraus in Verbindung mit (6.15) zusätzlich $\mathcal{D} = \mathcal{P}$ folgt, d.h. alle welcher-Weg Information ist bereits a priori verfügbar! Letztere Aussage ist dem mathematisch komplizierteren Ausdruck (6.10) für \mathcal{D} nicht ohne weiteres zu entnehmen. Natürlich gilt das nicht mehr, falls die Fluktuationen (sowohl thermischer als auch quantenmechanischer Natur) relevant werden.

Eine Mittelung über alle Orientierungen a führt offensichtlich zum Verschwinden von \mathcal{P} . Mathematisch folgt $\bar{\mathcal{P}} = 0$ aus dem Vorzeichenwechsel von $I_A - I_A|_{a \rightarrow -a}$ unter der Transformation $a \rightarrow -a$. Zufällig orientierte Streuer besitzen keine Vorzugsrichtung mehr und wie erwartet ergibt sich wieder ein symmetrisches Interferometer. Die Unkenntnis über die Anordnung der Streuer ermöglicht uns eben auch keine a priori Aussagen mehr. Natürlich folgt daraus nicht notwendigerweise das Verschwinden von \mathcal{D} . Eine nachfolgende Messung am Detektor kann (zumindest) implizit Informationen über die Streukonfiguration liefern, z.B. via Bestimmung der Rückstoßüberträge.

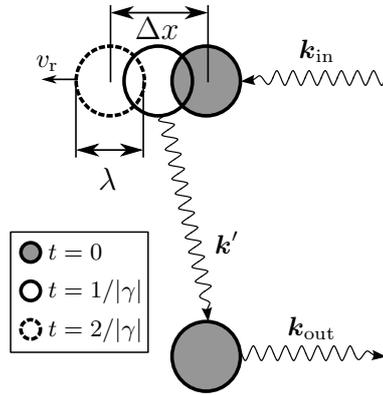


Abbildung 6.2.: Der Überlapp atomarer Wellenpakete bestimmt über die Verfügbarkeit von welcher-Weg Information. Die genaue Beschreibung des Vorgangs erfolgt im Text.

Nullpunktsfluktuationen

Kommen wir nun zur Diskussion über den Ursprung der Korrekturen $\zeta^2 = 4\omega_r\omega_h/|\gamma|^2$, welche, zumindest bis zu der betrachteten Ordnung, nur in \mathcal{V} und \mathcal{D} vorkommen. Andererseits ist $\mathcal{P} \equiv 0$ für $a = 0$, was für \mathcal{V} und \mathcal{D} nicht zutrifft, denn es bleiben ζ^2 -Korrekturen, selbst bei einer symmetrischen Streukonfiguration. Das besagt aber, dass welcher-Weg Information dieser Art erst nach einer geeigneten *a posteriori* Messung am Detektor zur Verfügung steht.

Allerdings haben wir zuvor bereits festgestellt (siehe Unterkapitel 4.4), dass bei $\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}} = -\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ die Impulsüberträge auf die Atome für beide Wege identisch sind und somit nicht zur Bestimmung des Weges geeignet sind. Wir müssen also einen anderen Mechanismus finden. Dazu bietet es sich an, die Vorgänge in einem zeitlichen Bild zu betrachten.

In diesem Bild besitzen wir Kenntnis über den Streupfad, falls wir wissen, welches Atom zuerst gestreut hat. Wir machen noch davon Gebrauch, dass es sich an dieser Stelle um eine Situation quasi-freier Atome handelt. Mit anderen Worten, wir beschreiben die Schwerpunktsbewegung durch atomare Wellenpakete, welche sich frei bewegen können. Natürlich ist das Attribut *frei* für den Anfangszustand (bei $T = 0$ ist das der Grundzustand in der harmonischen Falle) sicher nicht korrekt. Allerdings benötigen wir nur die Annahme, dass nach Aufnahme der Rückstoßenergie das Atom in der Falle so hoch angeregt wird ($\langle n \rangle \gg 1$), dass anschließend die Zeitentwicklung der Schwerpunktsbewegung durch ein atomares Wellenpaket beschrieben werden kann. Auf den hier relevanten Zeitskalen $\tau_1 \approx 1/\Gamma \ll \tau_h = 2\pi/\omega_h$ sieht das dann tatsächlich wie eine freie Bewegung aus. Die einzige Eigenschaft der harmonischen Falle, die wir benötigen, ist die räumliche Delokalisierung $\lambda_h = \sqrt{\hbar/2m\omega_h}$ der Grundzustandswellenfunktion, denn diese bestimmt die anfängliche Ausdehnung λ des atomaren Wellenpakets und damit die Unsicherheit in der Positionsbestimmung. λ gibt an, auf welcher kleinsten Skala wir Bewegungen des Atoms noch auflösen können. Konkreter heißt das, wir können eine von dem Wellenpaket zurückgelegte Strecke Δx noch auflösen, falls

$$\Delta x \gtrsim \lambda .$$

Betrachten wir nun den Streuvorgang in diesem Zusammenhang anhand Abbildung 6.2. Der

erste Streuer nimmt einen Rückstoßimpuls in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ auf, aufgrund dessen er sich mit der Geschwindigkeit

$$v_r = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_r}{m}}$$

in diese Richtung bewegt. Nach der charakteristischen Zeit τ für resonante Photonenstreuung geht das Photon instantan auf das zweite Atom über (wir haben Propagationszeiten im Vakuum vernachlässigt) und führt zu einem quasi gleichzeitigen Übertrag von Rückstoßenergie in Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ auf die beiden Atome.

Diese Streuzzeit τ entspricht allerdings nicht genau der Wignerzeit

$$\tau_w = \frac{d}{d\omega}\phi = \frac{d}{d\delta}\arctan\left(\frac{2\delta}{\Gamma}\right) = \frac{2}{\Gamma}\frac{1}{|\gamma|^2}$$

für resonante Photonenstreuung. Denn zusätzlich zu dieser realen Zeitverzögerung τ_w tritt bei $\delta \neq 0$ auch noch eine asymmetrische Deformation des gestreuten photonischen Wellenpakets auf, als Folge der resonanten Streuamplitude

$$t(\delta) = \frac{1}{\delta + i\Gamma/2}.$$

Das führt dazu, dass eine effektive Zeit $\tau = 1/|\gamma| \geq \tau_w$ die relevante Zeitskala ist, was sich mit einem Argument der stationären Phase zeigen lässt. Bei exakter Resonanz $\delta = 0$ gibt es aus Symmetriegründen keine solche Deformation und $\tau = 1/|\gamma|$ geht über in τ_w .

Nach einer weiteren Zeitverzögerung τ wird das auslaufende Photon $\hat{\mathbf{k}}_{\text{out}} = -\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ emittiert und hinterlässt wiederum einen Rückstoßübertrag bei Atom 2, jedoch von Betrag und Richtung gleich zum allerersten Übertrag in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ und damit ungeeignet für eine Unterscheidung der beiden Wege. Allerdings gibt es eine merkliche Zeitverzögerung

$$\Delta t = 2\tau = \frac{2}{|\gamma|}$$

zwischen diesen beiden Überträgen in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$, so dass der erste Streuer aufgrund der Geschwindigkeit v_r einen räumlichen Vorsprung

$$\Delta x = v_r \Delta t$$

gegenüber dem zweiten Streuer besitzt.

Wir erwarten also das Auftreten von welcher-Weg Information auf der Skala

$$\frac{\Delta x}{\lambda_h} = v_r \frac{2}{|\gamma|} \frac{1}{\lambda_h} = \frac{4\sqrt{\omega_r\omega_h}}{|\gamma|} = 2\zeta, \quad (6.30)$$

was damit in der Tat den korrekten Parameter liefert.

Es soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass die Falleneigenschaft ω_h einzig durch die anfängliche Unsicherheit λ_h der Schwerpunktspositionen eingeht.

6.3.2. Endliche Temperatur

Wir betrachten hier analog zur Vorgehensweise in Unterkapitel 5.2 den Grenzfall

$$\bar{\beta} \equiv \beta \hbar \omega_h \ll 1$$

bzw. hoher Besetzungszahlen $\langle n \rangle \gg 1$, so dass der relevante thermische Parameter

$$\xi^2 = \coth\left(\frac{1}{2}\bar{\beta}\right)\zeta^2 \quad (6.31)$$

in den von der Falle unabhängigen klassischen Parameter

$$\xi_{\text{cl}} = 2k_{\text{in}}v_{\text{rms}}/|\gamma|$$

übergeht (vergleiche dazu auch (5.36)). In der Tat ist das genau der semi-klassische Grenzfall, in welchem die Schwerpunktsbewegung vollständig durch quasi-freie atomare Wellenpakete beschrieben werden kann.

Neu ist hier, verglichen mit $T = 0$, die Kopplung des Detektors an ein thermisches Bad, d.h. der Anfangszustand des Detektors ist kein reiner Zustand mehr, weshalb nun im Gegensatz zu vorher \mathcal{D} und \mathcal{V} unabhängig voneinander berechnet werden müssen.

Da \mathcal{V} bereits bekannt ist, gehen wir gleich zur Bestimmung von \mathcal{D} über. Wir wollen aber nicht versuchen, die in \mathcal{D} auftretende Norm exakt auszuwerten, stattdessen werden wir uns ganz auf den Fall $\bar{\beta} \ll 1$ beschränken und einen in diesem Limes gültigen Ausdruck für \mathcal{D} herleiten.

Im Fall $\omega_h \ll |\gamma|$ und $\bar{\beta} \ll 1$ geht ν aus (6.20) über in

$$i\nu = 4\frac{\omega_h \text{Re } \gamma}{|\gamma|^2} = 4\frac{\omega_h \delta}{|\gamma|^2} \quad (6.32)$$

und damit ergibt sich aus (6.19) in führender Ordnung in $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= 2\sqrt{2}\frac{\sqrt{\omega_r\omega_h}|\delta|}{|\gamma|^2}\bar{\beta}\text{Tr}\left|-ie^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{a} + i\hat{a}^\dagger e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}\right| \\ &= \sqrt{2}\frac{|\delta|}{|\gamma|}\frac{2v_r}{|\gamma|}\frac{\bar{\beta}}{\hbar}\text{Tr}\left|e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{p}\right|, \end{aligned} \quad (6.33)$$

wobei, wie schon zuvor, v_r die Geschwindigkeitsänderung des Streuers der Masse m durch die Aufnahme des Rückstoßimpulses ist, d.h. aus der Impulserhaltung folgt

$$v_r = \Delta v = \frac{\hbar k_{\text{in}}}{m} = \sqrt{\frac{2\hbar\omega_r}{m}}. \quad (6.34)$$

Im letzten Schritt von (6.33) haben wir noch ausgenutzt, dass \hat{a}^\dagger und $e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}$ in führender Ordnung $\bar{\beta}$ kommutieren, denn

$$\hat{a}^\dagger e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}} = e^{\bar{\beta}} e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a}^\dagger \approx e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a}^\dagger. \quad (6.35)$$

Anschließend wurde noch der Impulsoperator

$$\hat{p} = \frac{i\hbar}{2\lambda_h}(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (6.36)$$

eingeführt. Wegen (6.35) kommutieren auch $e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}$ und \hat{p} in führender Ordnung $\bar{\beta}$. Da $|UV| = |U||V|$ für zwei kommutierende Operatoren U und V , ist die Strategie, den positiven statistischen Operator $e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}$ aus dem Betrag zu ziehen, ohne dabei in führender Ordnung $\bar{\beta}$ einen Fehler zu machen. Die Rechtfertigung dafür erfolgt später. Ebenfalls in diesem Grenzfall $\bar{\beta} \ll 1$ bzw. dem dazu äquivalenten hoher Besetzungszahlen $\langle n \rangle \gg 1$ geht der statistische Operator in seine klassische Form

$$\begin{aligned} e^{-\bar{\beta}(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2})} &= \exp\left\{-\bar{\beta}\left[\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2\hat{x}^2 + \left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2\hat{p}^2\right]\right\} \\ &\approx e^{-\bar{\beta}\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2\hat{x}^2} e^{-\bar{\beta}\left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2\hat{p}^2} = e^{-\beta\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2} e^{-\beta\frac{\hat{p}^2}{2m}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

einer Maxwell-Boltzmann'schen Geschwindigkeitsverteilung über. Das ist nur eine weitere Manifestation dafür, dass wir hier tatsächlich den klassischen Grenzfall bezüglich der Schwerpunktsbewegung betrachten. Gleichung (6.37) besagt auch, dass Vertauschung von \hat{x} und \hat{p} auf die führende Ordnung von \mathcal{D} keinen Einfluss hat.

Damit erhält man

$$\bar{\beta}\text{Tr}\left[e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{p}\right] = \bar{\beta}\text{Tr}\left\{e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}|\hat{p}\rangle\right\} = \langle|\hat{p}\rangle\rangle \quad (6.38)$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \langle|\hat{p}\rangle\rangle &= \bar{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle\langle p| e^{-\bar{\beta}\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2x^2} e^{-\bar{\beta}\left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2p^2} |p\rangle \\ &= \bar{\beta}\int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx |p\rangle \underbrace{\langle p|x\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-ipx/\hbar}} \langle x| e^{-\bar{\beta}\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2x^2} e^{-\bar{\beta}\left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2p^2} |p\rangle \\ &= \frac{\bar{\beta}}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx |p\rangle e^{-\bar{\beta}\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2x^2} e^{-\bar{\beta}\left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2p^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\bar{\beta}}} \frac{\hbar}{\lambda_h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} m v_{\text{rms}} \end{aligned} \quad (6.39)$$

wieder nur bis auf Terme höherer Ordnung in $\bar{\beta}$. Daraus ergibt sich der in führender Ordnung $\bar{\beta}$ gültige Ausdruck

$$\mathcal{D} = \sqrt{2} \frac{|\delta|}{|\gamma|} \frac{2v_r}{|\gamma|} \frac{\langle|\hat{p}\rangle\rangle}{\hbar} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{|\delta|}{|\gamma|} \frac{2k_{\text{in}}v_{\text{rms}}}{|\gamma|} . \quad (6.40)$$

Physikalische Interpretation

Zeitbild

Die erste Form von (6.40) zeigt, dass \mathcal{D} proportional zum thermischen Erwartungswert des Betrags des Impulsoperators ist. Dieser unterscheidet sich jedoch nur durch einen numerischen Faktor von $p_{\text{rms}}^2 = \langle\hat{p}^2\rangle$ (vergleiche mit (6.39)). Zusammen mit der thermischen de-Broglie Wellenlänge

$$\lambda_{\text{th}} = h/p_{\text{rms}}$$

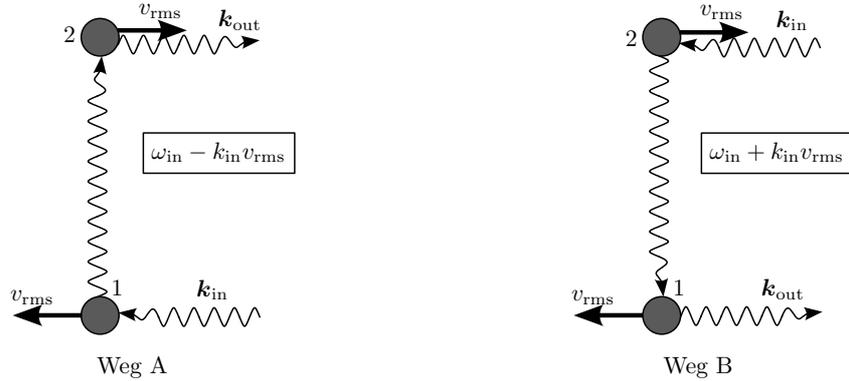


Abbildung 6.3.: Einfluss der antisymmetrischen Mode in Richtung \mathbf{k}_{in} auf die Dopplerverschiebung. Aufgrund dieser ist die Verschiebung ungleich für beide Wege.

stellt dieser Ausdruck eine direkte Manifestation der zuvor bei $T = 0$ gegebenen Interpretation der Skala ζ^2 dar. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Wellenpakete anstatt λ_h bei $T = 0$ hier eine charakteristische Ausdehnung λ_{th} haben. In der Tat ist

$$\frac{\Delta x}{\lambda_{\text{th}}} = \frac{1}{\pi} \xi_{\text{cl}}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{2k_{\text{in}} v_{\text{rms}}}{|\gamma|}$$

und liefert damit die korrekte Skala, auf der welcher-Weg Information zu erwarten ist. Insbesondere wird damit verständlich, warum bei einer Zunahme der Temperatur \mathcal{D} ebenfalls ansteigt, denn die atomaren Wellenpakete sind dann wegen $\lambda_{\text{th}} = h/p_{\text{rms}}$ stärker lokalisiert. Der Abstand Δx ist als Folge davon genauer bestimmbar und es können bereits kleinere Distanzen Δx aufgelöst werden.

Andererseits verstehen wir in diesem Bild nun auch, warum der Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ nur untergeordnete Bedeutung zukommt (siehe Ergebnis aus Abschnitt 5.4.2). Die entgegengerichteten Impulsüberträge sind in unserer Näherung instantan und entsprechende Freiheitsgrade in dieser Richtung können damit keine differentielle Information der beiden Wege A und B aufnehmen. Die Richtung $\hat{\mathbf{R}}_0$ tritt aber dennoch in unseren Ausdrücken auf, da sich aufgrund der Dopplerverschiebung die Frequenzen der Austauschphotonen ändern, und zwar abhängig von der jeweiligen Geschwindigkeit der Streuer.

Die $\hat{\mathbf{R}}_0$ betreffenden Aussagen stimmen aber nicht mehr, falls das Vakuum durch ein, die beiden Streuer umgebendes, effektives Medium ersetzt wird. Dann kann man nicht mehr davon ausgehen, dass die Propagationszeit zwischen den beiden Atomen vernachlässigbar ist, da diese dann auch in der Größenordnung $\frac{1}{\Gamma}$ liegt (siehe z.B. (2.13)).

Frequenzbild

Um die δ -Abhängigkeit von \mathcal{D} zu verstehen, betrachten wir die Situation in der Energiepräsentation. Die Äquivalenz dieser beiden Bilder ist einfach eine Folge des Übergangs zwischen diesen Darstellungen durch Fouriertransformation (vergleiche mit dem Schritt (4.41)). Zunächst bemerken wir, dass nur die Relativmode in Richtung $\hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$ relevant ist, aus Gründen der Einfachheit ignorieren wir daher alle anderen Moden. Aus Abbildung 6.3 entnimmt man, dass die Streuung abhängig von Weg A oder B bei den verschobenen Frequenzen $\omega_{\text{in}} \pm k_{\text{in}} v_{\text{rms}}$

erfolgt. Sind die Verschiebungen klein, so kann man wieder analog zum Fall $T = 0$ die relative Änderung $|\Delta\sigma/\sigma|$ des Streuquerschnitts betrachten. Durch Vergleich mit (6.40) ergibt sich in der Tat

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} |\Delta\sigma/\sigma| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{|\delta|}{|\gamma|} \frac{|\Delta\omega|}{|\gamma|}, \quad (6.41)$$

mit dem Frequenzunterschied $\Delta\omega = 2k_{\text{in}}v_{\text{rms}}$ zwischen den beiden Streualternativen. Insbesondere verschwindet \mathcal{D} für $\delta = 0$, da es auf dem flachen Maximum der Lorentzkurve $1/|\gamma|^2$ in erster Ordnung keine Änderung gibt.

Im Gegensatz zu $T = 0$ verschwindet jedoch \mathcal{P} in dieser Ordnung, da die Symmetrie der beiden Alternativen A und B durch die thermische Mittelwertbildung wiederhergestellt wird. Das bedeutet also, dass eventuell vorhandene Information über den Weg erst nach erfolgter Streuung durch Messung der atomaren Schwerpunktsbewegung zugänglich ist.

Führt man die obigen Gedankengänge entsprechend fort, so erwartet man, dass im Grenzfall hoher Temperaturen die Unterscheidbarkeit gegen Null geht. Die Energiedifferenzen werden dann so groß, dass der Einfluss der Lorentzförmigen Streuwahrscheinlichkeit vernachlässigbar wird, denn diese ist ja nur auf einen Bereich der Größenordnung Γ beschränkt. Diese Aussage steht im Widerspruch zum vorherigen Paragraph, gemäß welchem die Unterscheidbarkeit immer weiter steigen sollte. Man kann sich jedoch davon mathematisch überzeugen, dass \mathcal{D} für $T \rightarrow \infty$ in der Tat verschwindet. Die zuvor gegebene Interpretation im Zeitbild scheint also bei genauerer Betrachtung nicht ganz der physikalischen Wahrheit zu entsprechen.

Einfluss der thermischen Badfreiheitsgrade

Wir können schließlich das Endresultat angeben:

$$\mathcal{V}^2 = 1 - 2\xi_{\text{cl}}^2 + O(\xi_{\text{cl}}^4) \quad (6.42)$$

$$\mathcal{D}^2 = \frac{4}{\pi} \frac{\delta^2}{|\gamma|^2} \xi_{\text{cl}}^2 + O(\xi_{\text{cl}}^4) \quad (6.43)$$

$$\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 = 1 - 2 \left[1 - \frac{2}{\pi} \frac{\delta^2}{|\gamma|^2} \right] \left(\frac{2k_{\text{in}}v_{\text{rms}}}{|\gamma|} \right)^2 + O(\xi_{\text{cl}}^4), \quad (6.44)$$

wobei wir analog zu Formel (5.37) angenommen haben, dass Rückstoßeffekte (χ) gegenüber ξ_{cl}^2 vernachlässigbar sind. Obwohl die Abnahme von \mathcal{V}^2 und die Zunahme von \mathcal{D} auf derselben Skala ξ_{cl}^2 erfolgt, ist die Dualitätsrelation (6.11) wie erwartet nicht mehr gesättigt, d.h. $\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 < 1$. Das ist auch verständlich, wenn man bedenkt, dass der Detektor an eine Umgebung gekoppelt ist und damit nicht in einem reinen Zustand vorliegt. Es gibt also eine zusätzliche statistische Unsicherheit, welche einem verbietet, vollständige welcher-Weg Information zu erlangen.

Man kann auch anders argumentieren: Das Gesamtsystem, bestehend aus Detektor und Bad (isoliert vom Rest der Welt), befinde sich in einem reinen Zustand, weshalb für dieses Gesamtsystem dann natürlich $\mathcal{V}^2 + \mathcal{D}^2 = 1$ gilt (siehe Anhang C). Für vollständige Information über den Weg bedarf es dann allerdings einer optimalen Messung im Gesamtsystem. Da jedoch nur der Detektor einer Messung zugänglich ist, erreichen wir nur einen Teil der verfügbaren Information, denn aus der Sicht des Gesamtsystems entspricht dies einer nicht-optimalen Messung. Die Zunahme der Temperatur erfolgt durch stärkere Wechselwirkung mit dem Bad,

weshalb immer mehr welcher-Weg Information in für uns unzugängliche Freiheitsgrade gelangt. Im Gesamten nimmt zwar die welcher-Weg Information zu, denn wie wir zuvor gesehen haben nimmt auch \mathcal{D} zu, aber der relative Anteil der aus lediglich der Schwerpunktsbewegung extrahierten Information nimmt ab.

Rechentechische Ergänzungen

Abschließend steht noch die Klärung über einen zuvor gemachten Schritt aus, nämlich dass $|UV| \approx |U||V|$ für die beiden näherungsweise kommutierenden Operatoren $U = e^{-\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}}$ und $V = \hat{p}$. Dazu schreiben wir

$$\begin{aligned} |UV| &= \sqrt{(UV)^\dagger(UV)} \\ &\approx \sqrt{(U^\dagger U)(V^\dagger V)} = \sqrt{e^{\ln(U^\dagger U)}e^{\ln(V^\dagger V)}} \\ &= \sqrt{e^{\ln(U^\dagger U)+\ln(V^\dagger V)+\tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U),\ln(V^\dagger V)]}} , \end{aligned} \quad (6.45)$$

wobei im letzten Schritt die allgemeine Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) Formel verwendet wurde und $\tilde{\epsilon}(X, Y)$ für eine Linearkombination aller möglichen, beliebig geschachtelten Kommutatoren steht, d.h.

$$\tilde{\epsilon}[X, Y] = c_1[X, Y] + c_2[X, [X, Y]] + c_3[Y, [X, Y]] + c_4[[X, Y], X] + \dots ,$$

mit der Hoffnung, dass diese Korrekturen klein sind. Das Ziehen der Quadratwurzel dieses Operators ist nun einfach und eine weitere Anwendung der BCH-Formel ergibt

$$\begin{aligned} |UV| &\approx e^{\frac{1}{2}\ln(U^\dagger U)+\frac{1}{2}\ln(V^\dagger V)+\frac{1}{2}\tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U),\ln(V^\dagger V)]} \\ &= e^{\frac{1}{2}\ln(U^\dagger U)}e^{\frac{1}{2}\ln(V^\dagger V)}e^{\tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U),\ln(V^\dagger V)]} \\ &= |U||V|e^{\tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U),\ln(V^\dagger V)]} \\ &\approx |U||V|(1 + \tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U),\ln(V^\dagger V)] + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon}^2 \dots) . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Wenn es uns jetzt noch gelingt, zu zeigen, dass

$$\tilde{\epsilon}[\ln(U^\dagger U), \ln(V^\dagger V)] = \tilde{\epsilon}[-2\bar{\beta}\hat{a}^\dagger\hat{a}, \ln(\hat{p}^2)]$$

nur Beiträge zu höheren Ordnungen in $\bar{\beta}$ liefert, so sind wir fertig. Davon überzeugt man sich am einfachsten in der Impulsbasis:

$$H = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2\lambda_h}\right)^2 \frac{\partial}{\partial p^2} + \left(\frac{\lambda_h}{\hbar}\right)^2 p^2 ,$$

in welcher sich die Berechnung der Kommutatoren zwischen $-2\bar{\beta}H$ und $\ln p^2$ auf Ableiten reduziert. Anschließend ist

$$\text{Tr}|UV| \approx \text{Tr} \left\{ e^{-\bar{\beta}H} |p| (1 + \tilde{\epsilon}[-2\bar{\beta}H, \ln p^2]) \right\} = \langle |p| \rangle - 2\bar{\beta} \langle |p| \tilde{\epsilon}[H, \ln p^2] \rangle \quad (6.47)$$

zu betrachten, wobei sich die Korrekturen durch Mittelung mit einer Geschwindigkeitsverteilung gemäß Maxwell-Boltzmann abschätzen lassen. Die dabei auftretende Integration über p

bedarf allerdings der Einführung eines unteren *Cut-offs*, um Divergenzen in den dann auftretenden Termen wie $1/p^n$ zu vermeiden. Dieser *Cut-off* ist gerechtfertigt, da für kleine p die oben gemachte Näherung durch die klassische Verteilungsfunktion sicherlich nicht mehr korrekt ist. Andererseits gibt es keinen physikalischen Grund dafür, dass im Limes großer Besetzungszahlen $\langle n \rangle \gg 1$ das Verhalten durch niedrige Zustände wesentlich beeinflusst wird. Damit erhält man die Erkenntnis, dass der zweite in (6.47) auftretende Term bereits von höherer Ordnung in $\bar{\beta}$ ist.

Ohne weitere große Bemerkungen registrieren wir an dieser Stelle, dass in führender Ordnung $\bar{\beta}$ der Schritt

$$\mathrm{Tr} \left| e^{-\bar{\beta} \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{p} \right| = \mathrm{Tr} \left\{ e^{-\bar{\beta} \hat{a}^\dagger \hat{a}} \left| \hat{p} \right| \right\} \quad (6.48)$$

in der Tat gerechtfertigt ist.

In diesem Zusammenhang merken wir noch an, dass in dem hier betrachteten Grenzfall der Lamb-Dicke Parameter η nicht unser eigentlicher kleiner Parameter ist, obwohl die Entwicklung von \mathcal{D} ursprünglich (zumindest formal) nach diesem Parameter erfolgte (siehe (6.19)). Vielmehr sind diese χ und ζ^2 im Fall $T = 0$, was wegen $\mathcal{D}^2 = 1 - \mathcal{V}^2$ und dem exakten Ausdruck für \mathcal{V} ((6.9) in Verbindung mit (5.26)) evident ist. Andererseits lauten für große Besetzungszahlen $\langle n \rangle \gg 1$ die kleinen Parameter χ und ξ_{cl}^2 . Diese tatsächlich relevanten Parameter treten aber erst nach Auswerten der Spur auf. Potenzen von χ und ξ^2 werden dabei ausschließlich durch entsprechende Potenzen von η generiert, weshalb die Entwicklungen entweder nach η oder nach χ , ξ^2 formal identisch sind. Der einzige Unterschied liegt darin, dass die Reihenfolge von Entwicklung und thermischer Mittelung vertauscht ist.

Für die Größen \mathcal{V} und \mathcal{P} ist dies offensichtlich, denn bei diesen konnten wir die Spurbildung exakt durchführen, was genau auf die genannten Parameter führt (vergleiche (5.25) und (5.26)). Im Fall von \mathcal{D} ist dies etwas trickreicher, denn dort gilt das nur für $T = 0$ und bei hinreichend hohen Besetzungszahlen $\langle n \rangle \gg 1$, was zumindest in letzterem Fall nicht ganz so leicht einzusehen ist.

Eine Möglichkeit, sich letztere Aussage dennoch klarzumachen, könnte in Folgendem bestehen. Analog zu

$$e^{-\bar{\beta} \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{p} \approx \hat{p} e^{-\bar{\beta} \hat{a}^\dagger \hat{a}}$$

lässt sich zeigen, dass T_A und $\rho^{(i)}$ in führender Ordnung $\bar{\beta}$ miteinander vertauschen. Wenn es nun gelingt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\propto \mathrm{Tr} \left| T_A \rho^{(i)} T_A^\dagger - T_B \rho^{(i)} T_B^\dagger \right| \\ &\approx \mathrm{Tr} \left\{ \rho^{(i)} \left| T_A T_A^\dagger - T_B T_B^\dagger \right| \right\} = \left\langle \left| T_A T_A^\dagger - T_B T_B^\dagger \right| \right\rangle \end{aligned} \quad (6.49)$$

analog zu (6.38) in dieser Ordnung gültig ist, so kann man durch formale Entwicklung der Operatorwurzel $|X| = \sqrt{X^\dagger X}$ im Prinzip alle Mittelungen der auftretenden Operatorprodukte $(T_A^\dagger T_A)$, $(T_B^\dagger T_B)$ und beliebiger Kombinationen von Potenzen davon mit Hilfe von Formel (5.11) durchführen. Diese Prozedur führt dann in jeder Ordnung wieder nur auf die beiden Parameter χ und ξ_{cl} .

7. Zusammenfassung

Um den dynamischen Zusammenbruch der kohärenten Rückstreuung von Photonen zu studieren, haben wir uns die Doppelstreuung von Photonen an zwei Atomen einfacher interner Struktur im Vakuum zunutze gemacht. Dabei wurden die externen Freiheitsgrade der Schwerpunktsbewegung durch harmonische Oszillatorzustände realisiert, eine Situation, wie sie beispielsweise in Atomfallen auftritt. Die physikalische Observable ist der Überhöhungsfaktor, welcher als Verhältnis von Gesamtintensität zu inkohärentem Anteil definiert ist und damit Aussagen über den Interferenzkontrast liefert.

Im Laufe der Rechnung hat sich herauskristallisiert, dass die Zeitdarstellung eine Reihe von Vorteilen bietet, und zwar sowohl in technischer Hinsicht als auch das Verständnis betreffend. Die Übergangoperatoren für die Doppelstreuung nehmen in dieser Darstellung eine suggestive Form an, in welcher die einzelnen Absorptions- und Emissionsprozesse in zeitgeordneter Weise erscheinen. In diesen Operatoren treten zwei fundamental unterschiedliche Zeitskalen auf: die Verweildauer des Atoms in seinem angeregten Zustand und die freie Propagationszeit des Photons im Vakuum. In diesem Bild sind beide Zeiten letztendlich für den dynamischen Zusammenbruch verantwortlich. Dabei ist im Fall resonanter Streuung die Propagationszeit gegenüber der natürlichen Lebensdauer vernachlässigbar.

Ebenso gestaltet sich die thermische Mittelung als unproblematisch und es können sowohl kollektive Schwingungsmoden der Atome als auch eine anisotrope Temperaturverteilung berücksichtigt werden. Im Zuge dessen zeigt sich, dass die relative Schwingungsmode, projiziert auf die Richtung der einlaufenden Photonen, den dominanten Einfluss auf die kohärente Rückstreuung zeigt. Das stimmt jedoch nur, solange sich beide Streuer im Vakuum befinden.

Es wurden die beiden unterschiedlichen Regime der quasi-freien Atome und der engen Falle untersucht.

Im Fall $\omega_h \ll \Gamma$ zeigen die Atome ein Verhalten ähnlich dem freier Streuer und die Falleneigenschaft ω_h spielt keine Rolle mehr, falls zusätzlich die Besetzungszahlen hinreichend groß sind. Bei verschwindender Temperatur $T = 0$ geht ω_h wegen der charakteristischen Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion dennoch ein. Daneben gibt es noch den Einfluss der Rückstoßüberträge auf die Atome, welcher selbst bei $T = 0$ erhalten bleibt. Der eigentliche dynamische Zusammenbruch ergibt sich durch die Temperaturabhängigkeit des Überhöhungsfaktors und lässt sich wiederum in Grenzfällen analytisch bestimmen. Die Interferenz zeigt über den gesamten Temperaturbereich ein monoton abnehmendes Verhalten. Der relevante Parameter ist bei exakter Resonanz gegeben durch die mittlere thermische Dopplerverschiebung bezogen auf die natürliche Linienbreite.

In der Situation der engen Falle $\omega_h \gg \Gamma$ treten aufgrund der Möglichkeit des gezielten Ansteuerns einzelner Fallenzustände Resonanzen auf, die sich ebenfalls auf den Überhöhungsfaktor übertragen. Diese Linien im Überhöhungsfaktor können im Sinne einer welchen-Weg Interpretation verstanden werden.

In einem weiteren Abschnitt haben wir die zuvor gewonnenen Ergebnisse unter Aspekten der Quanteninformation genauer untersucht. Um die welcher-Weg Information zu quantifizieren, hat Englert die beiden Größen Vorhersagbarkeit und Unterscheidbarkeit für ein allgemeines System definiert. Vorhersagbarkeit ist die *a priori* verfügbare welcher-Weg Information, während die Unterscheidbarkeit die insgesamt verfügbare, und im Prinzip durch eine geeignete Messung zugängliche, Information im System darstellt. Unterscheidbarkeit und Interferenzkontrast gehorchen der fundamentalen Dualitätsrelation. Diese ist der mathematische Ausdruck dafür, dass Wellen- und Teilcheneigenschaften nicht gleichzeitig in beliebiger Weise vorliegen können. Bei $T = 0$ ist diese Dualität generell gesättigt.

Betrachtet man den bei $T = 0$ auftretenden Effekt der Nullpunktsfluktuationen, so stellt sich heraus, dass welcher-Weg Information erst nach erfolgter Streuung im System vorhanden ist und damit vom Typ der *a posteriori* vorhandenen welcher-Weg Information ist. Dieser Effekt lässt sich wiederum in einem Zeitbild durch Betrachten des Überlapps atomarer Wellenpakete verstehen. Ist die Unsicherheit in der Bestimmung der Schwerpunktspositionen hinreichend klein, so kann man das zuerst streuende Atom identifizieren und damit lassen sich die beiden Wege unterscheiden. Mit der charakteristischen Ausdehnung der Grundzustandswellenfunktion liefert dieses Argument genau die relevante Skala, auf der die welcher-Weg Information zunimmt.

Weiterhin können die Rückstoßeffekte allein als Folge des Vorhandenseins von *a priori* welcher-Weg Information interpretiert werden.

Bei endlichen Temperaturen ist im Limes hoher Besetzungszahlen (semi-klassischer Grenzfall) die Bestimmung eines analytischen Ausdrucks für die Unterscheidbarkeit möglich. Dabei ist zum einen die Zunahme der welchen-Weg Information und zum anderen die Abnahme des Interferenzkontrasts durch genau denselben relevanten Parameter (mittlere thermische Dopplerverschiebung bezogen auf die natürliche Linienbreite) gegeben. Die welcher-Weg Information nimmt zunächst in führender Ordnung mit steigender Temperatur zu, da der relative Streuquerschnitt zwischen den beiden Wegen in dieser Ordnung linear mit dem Frequenzunterschied steigt. Diese Differenz der Photonenfrequenzen zwischen den beiden Streupfaden rührt von der Doppler-Verschiebung aufgrund asymmetrische Bewegung der Atome her.

Dieser physikalische Mechanismus der welchen-Weg-Information unterscheidet sich fundamental von dem in nullter Ordnung auftretenden Effekt, bei welchem die welcher-Weg Information im Betrag des Rückstoßimpulses selbst steckt.

Schließlich ist die Dualitätsrelation in diesem Fall nicht mehr gesättigt, was als Verlust von welcher-Weg Information in die unzugänglichen Freiheitsgrade des thermischen Bades gedeutet werden kann.

A. Polarisation

Wir werden uns hier dem Einfluss der Polarisation in dem für uns interessanten Fall einfacher interner Struktur der Atome widmen, so wie in Abbildung A.1 skizziert.

A.1. Einfachstreuung

Nehmen wir an, ein einlaufendes Photon habe Polarisation $\hat{\epsilon}_i$ und das gestreute $\hat{\epsilon}_f$. Die Streuamplitude ist dann proportional zu

$$\Psi \propto \sum_{m_e=0,\pm 1} \langle J_g = 0, m_g = 0 | \mathbf{D}^\dagger \hat{\epsilon}_f^* | J_e = 1, m_e \rangle \langle J_e = 1, m_e | \mathbf{D} \hat{\epsilon}_i | J_g = 0, m_g = 0 \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Wir stellen $\hat{\epsilon}_i, \hat{\epsilon}_f$ in sphärischen Koordinaten mit der Basis

$$\hat{\epsilon}_0 = (0, 0, 1), \quad \hat{\epsilon}_{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp 1, -i, 0), \quad \hat{\epsilon}_q^* \hat{\epsilon}_{q'} = \delta_{q,q'} \quad (\text{A.2})$$

dar:

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_i &= \sum_{q=0,\pm 1} \alpha_q e_q \\ \hat{\epsilon}_f &= \sum_{q=0,\pm 1} \beta_q e_q. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

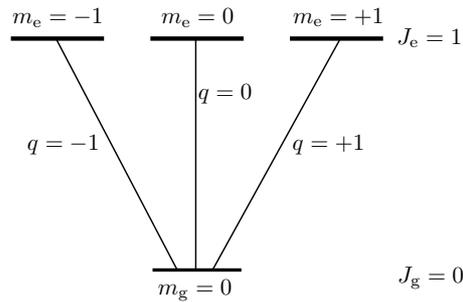


Abbildung A.1.: Übergänge zwischen dem nicht entarteten Grundzustand und einem Triplett-Anregungszustand. q beschreibt die Komponente des elektromagnetischen Feldes in sphärischen Koordinaten, welche den Übergang induziert.

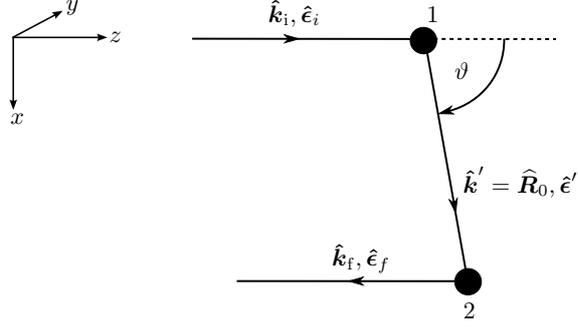


Abbildung A.2.: Zur Bestimmung der Abhängigkeit der Doppelstreuamplitude von der Streugeometrie bei polarisationssensitiver Messung.

Damit ergibt sich unter Ausnutzung des Wigner-Eckart Theorems [29]

$$\begin{aligned}
\Psi &\propto \sum_{q,q'=0,\pm 1} \alpha_q \beta_{q'}^* \sum_{m_e=0,\pm 1} \underbrace{\langle 0, 0 | \mathbf{D}^\dagger \hat{\epsilon}_f^* | J_e = 1, m_e \rangle}_{d^* \langle 1, m_e | 1, q', 0, 0 \rangle^*} \underbrace{\langle J_e = 1, m_e | \mathbf{D} \hat{\epsilon}_i | 0, 0 \rangle}_{d \langle 1, m_e | 1, q, 0, 0 \rangle} \\
&\propto |d|^2 \sum_{q=0,\pm 1} \alpha_q \beta_q^* = d^2 (\hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_f^*). \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde angenommen, dass d reell ist. Man erkennt sofort, dass bei Einfachstreuung keine Rückstreuintensität im helizitätserhaltenden Kanal auftritt.

A.2. Doppelstreuung

Lässt sich die Doppelstreuung in zwei unabhängige Einzelstreuungen zerlegen, so ergibt sich die Streuamplitude einfach multiplikativ aus den entsprechenden Einzelstreuamplituden (A.4), d.h.

$$\Psi \propto d^4 \sum_{\hat{\epsilon}' \perp \hat{k}'} (\hat{\epsilon}_f^* \hat{\epsilon}') (\hat{\epsilon}'^* \hat{\epsilon}_i) = d^4 \hat{\epsilon}_f^* (\mathbb{1} - \hat{k}' \circ \hat{k}') \hat{\epsilon}_i = d^4 (\hat{\epsilon}_f^* \Delta_{\hat{k}'} \hat{\epsilon}_i), \tag{A.5}$$

wobei $\Delta_{\hat{k}'} \equiv (\mathbb{1} - \hat{k}' \circ \hat{k}')$ einen Vektor auf die zu \hat{k}' senkrechte Ebene projiziert.

A.3. Detektion im helizitätserhaltenden Kanal

Die einlaufenden Photonen sind zirkular polarisiert, beispielsweise

$$\hat{\epsilon}_i = \hat{\epsilon}_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, -i, 0). \tag{A.6}$$

Detektiert werden nur diejenigen Photonen mit erhaltener Helizität, d.h. wegen der Betrachtung in Rückrichtung sind das Photonen mit Polarisation $\hat{\epsilon}_f = \hat{\epsilon}_{-1} = \hat{\epsilon}_i^*$. Abbildung A.2 entnimmt man $\hat{\mathbf{R}}_0 = (\sin \vartheta, 0, \cos \vartheta)$. Damit ergibt sich gemäß Formel (A.5)

$$\hat{\epsilon}_f^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\epsilon}_i = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta . \quad (\text{A.7})$$

Insbesondere verschwindet für $\vartheta = 0$ die Intensität, d.h. wenn Einfallsrichtung und Verbindungslinie der Atome parallel zueinander liegen.

In Kapitel 5 tritt genau dieser Faktor in der Form

$$\left| \hat{\epsilon}_f^* \Delta_{\hat{\mathbf{R}}_0} \hat{\epsilon}_i \right|^2 = \frac{1}{4} (1 - a^2)^2 \quad (\text{A.8})$$

auf, wobei $a \equiv \hat{\mathbf{R}}_0 \hat{\mathbf{k}}_{\text{in}}$.

B. Details zur Berechnung von α im Limes hoher Temperaturen

Ausgehend von der Diskussion in Unterkapitel 5.2.2 schreiben wir für die Größen I_A aus (5.29) und I_C aus (5.30) bei Vernachlässigung von reinen Rückstoßeffekten (χ -Beiträge)

$$I_A = \left(\frac{\beta \hbar}{\omega_r} \right)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{-\xi_R(s'+t'+s+t)} e^{-i\xi_I(s'+t'-s-t)} \exp \left\{ -2(s'-s)^2 - (s'+t'-s-t)^2 + 2a(s'-s)(s'+t'-s-t) \right\} \quad (\text{B.1})$$

$$I_C = \left(\frac{\beta \hbar}{\omega_r} \right)^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt' \int_0^\infty ds \int_0^\infty ds' e^{-\xi_R(s'+t'+s+t)} e^{-i\xi_I(s'+t'-s-t)} \exp \left\{ -2(s'-s)^2 - (s'+t')^2 - (s+t)^2 + 2a(s'-s)(s'+t'+s+t) \right\} \quad (\text{B.2})$$

wobei die beiden Größen

$$\xi_R = \sqrt{2} \left(\frac{\Gamma/2}{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\xi_I = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{k_{\text{in}} v_{\text{rms}}} \right) \quad (\text{B.4})$$

eingeführt wurden. Diese spielen in diesem Grenzfall die Rolle des kleinen Parameters. Mit dem vertrauten Parameter ξ^2 stehen diese im Zusammenhang

$$\xi^2 = \frac{8}{\xi_R^2 + \xi_I^2}, \quad (\text{B.5})$$

so dass

$$\xi_R^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \frac{8}{\xi^2}.$$

Die asymptotische Entwicklung ist nun nicht so einfach, wie dies für tiefe Temperaturen der Fall war, insbesondere erhält man keine systematische Entwicklung in beliebiger Ordnung, sondern wir müssen uns mit dem führenden Term der Entwicklung zufriedengeben.

Im Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ liefert der Exponentialfaktor mit der quadratischen Form im Exponenten den dominanten Beitrag zum Integral. Daher ist man geneigt eine Entwicklung in eine Potenzreihe für die kleinen Parameter $\xi_{R,I}$ zu machen. Allerdings schlägt der Versuch mittels $\xi_R, \xi_I = 0$ den führenden Term zu erhalten, zunächst fehl. Nach Diagonalisierung der quadratischen Form stellt sich heraus, dass es Eigenwerte gleich Null gibt, welche nach Vernachlässigung des konvergenzsichernden Exponentialfaktors $e^{-\xi_R(s'+t'+s+t)}$ zu Divergenzen

führen würden. Glücklicherweise sind alle anderen, von Null verschiedenen Eigenwerte negativ und sorgen damit für ein konvergentes Integral. Deshalb ist unsere Strategie, zunächst bezüglich der verschwindenden Eigenwerte zu integrieren, und zwar bei Vorhandensein des ξ_R -abhängigen Exponentialfaktors. Danach kann man im verbleibenden Ausdruck $\xi_R = \xi_I = 0$ setzen. Obwohl der Integrand nach Diagonalisierung eine relativ einfache Form annimmt, machen die endlichen Integralgrenzen bei der Variablentransformation noch einige Probleme und werden ziemlich unübersichtlich. Es ist jedoch nicht notwendig vollständig zu diagonalisieren, sondern nur bezüglich der verschwindenden Eigenwerte.

Im Fall der inkohärenten Intensität I_C (B.2) gibt es aber noch eine weitere kleine Komplikation. Im allgemeinen Fall gibt es nur einen verschwindenden Eigenwert, jedoch gibt es bei $a = \pm 1$ zwei davon. Das ist letztendlich die Ursache für das unterschiedliche asymptotische Verhalten dieser beiden Fälle und wir müssen diese getrennt voneinander betrachten.

Nach geeigneten Transformationen der Integrationsvariablen lauten die Ausdrücke für inkohärente und kohärente Intensität:

$$L = \left(\frac{\beta\hbar}{\omega_r}\right)^2 \frac{1}{\xi_R^2} \int_0^\infty d\sigma \int_0^\infty d\tau e^{-\xi_R(\sigma+\tau)} e^{-3\sigma^2-\tau^2} \left\{ e^{-2\sigma\tau} \cosh(2a(\sigma+\tau)\sigma) \cos \xi_I(\sigma+\tau) + e^{2\sigma\tau} \cosh(2a(\sigma-\tau)\sigma) \cos \xi_I(\sigma-\tau) \right\}, \quad (\text{B.6})$$

$$C(|a| < 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\hbar}{\omega_r}\right)^2 \int_0^\infty dy \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{|v|-y}^{|v|+y} dx (x+y-|v|) - \int_{-y}^y dv \int_{-(y-|v|)}^{y-|v|} dx (x+y-|v|) + \int_{-y}^y dv \int_0^{y-|v|} dx 2x + \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{|v|+y}^\infty dx 2y \right\} e^{-\xi_R(x+y)} \cos(\xi_I v) \exp\{-v^2 - (1-a)x^2 - (1+a)y^2 - (1-a)vx + (1+a)vy\}, \quad (\text{B.7})$$

$$C(|a| = 1) = \left(\frac{\beta\hbar}{\omega_r}\right)^2 \frac{1}{\xi_R^2} \int_0^\infty dy \left\{ \sinh(\xi_R y) \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-\xi_R|v|} + \int_{-y}^y dv (1 - \cosh(\xi_R(y-|v|))) \right\} e^{-\xi_R y} \cos(\xi_I v) \exp\{-v^2 - 2y^2 + 2vy\}, \quad (\text{B.8})$$

wobei teilweise schon ausintegriert wurde. Die in den Klammern stehenden Integrale sind als Integraloperatoren aufzufassen, welche auf alles wirken, was rechts davon steht.

Die führenden asymptotischen Terme sind damit

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\hbar}{\omega_r}\right)^2 \frac{1}{\xi_R^2} \frac{\pi}{\sqrt{2-a^2}}, \quad (\text{B.9})$$

$$C(|a| = 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta\hbar}{\omega_r}\right)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{\xi_R}, \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
C(|a| < 1) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \hbar}{\omega_r} \right)^2 f(a) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta \hbar}{\omega_r} \right)^2 \int_0^\infty dy \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{|v|-y}^{|v|+y} dx (x + y - |v|) \right. \\
&\quad \left. - \int_{-y}^y dv \int_{-(y-|v|)}^{y-|v|} dx (x + y - |v|) + \int_{-y}^y dv \int_0^{y-|v|} dx 2x + \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{|v|+y}^\infty dx 2y \right\} \\
&\quad \exp \left\{ -v^2 - (1-a)x^2 - (1+a)y^2 - (1-a)vx + (1+a)vy \right\} , \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

wobei $f(a)$ ein nur von a abhängiges kompliziertes Integral ist, welches numerisch ausgewertet werden kann (siehe Abbildung 5.1 für einen Plot von $g(a) = \sqrt{2-a^2}f(a)$).

C. Dualität bei Systemen in reinen Quantenzuständen

Wir wollen zeigen, dass die Dualitätsrelation (6.11) für den reinen Anfangszustand

$$\rho^{(i)} = |i\rangle\langle i| \quad (\text{C.1})$$

die gesättigte Form

$$\mathcal{D}^2 + \mathcal{V}^2 = 1 \quad (\text{C.2})$$

annimmt. Mit $|A; B\rangle \equiv T_{A;B}|i\rangle$ schreibt sich \mathcal{V} aus (6.9) und \mathcal{D} aus (6.10) in der Gestalt

$$\mathcal{V} = \frac{2|\text{Tr}\{|A\rangle\langle B|\}|}{I_A + I_B} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{D} = \frac{\text{Tr}\{|A\rangle\langle A| - |B\rangle\langle B|\}}{I_A + I_B}, \quad (\text{C.4})$$

wobei wie zuvor $I_{A;B} \equiv \text{Tr}\{|A; B\rangle\langle A; B|\}$.

Trivialerweise ist

$$\mathcal{V} = \frac{2|\langle A|B\rangle|}{I_A + I_B}. \quad (\text{C.5})$$

Zum Auswerten der Spurklasse-Norm bietet sich folgende Wahl der Orthonormalbasis an:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{I_A}}|A\rangle \quad (\text{C.6})$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\eta^2}(|B\rangle - |1\rangle\langle 1|B\rangle), \quad (\text{C.7})$$

mit den Definitionen $\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{I_A}}\langle A|B\rangle$ und $\eta^2 \equiv I_B - |\xi|^2$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \langle 1|A\rangle &= \sqrt{I_A}, & \langle 2|A\rangle &= 0, \\ \langle 1|B\rangle &= \xi, & \langle 2|B\rangle &= \eta, \end{aligned}$$

und der Operator $X \equiv |A\rangle\langle A| - |B\rangle\langle B|$ schreibt sich in dieser Basis als

$$X = \begin{pmatrix} I_A - I_B + \eta^2 & -\xi\eta \\ -\xi^*\eta & -\eta^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Bestimmen der Eigenwerte λ_1, λ_2 von X liefert schließlich

$$\mathcal{D} = \frac{|\lambda_1| + |\lambda_2|}{I_A + I_B} = \sqrt{1 - \frac{4|\langle A|B\rangle|^2}{(I_A + I_B)^2}} = \sqrt{1 - \mathcal{V}^2} \quad (\text{C.9})$$

womit (C.2) gezeigt ist.

Ebenso sieht man leicht, dass

$$\mathcal{C} = \frac{2\text{Tr}\{|\langle A|B\rangle|\}}{I_A + I_B} = \frac{2|\langle A|B\rangle|}{I_A + I_B} = \mathcal{V}. \quad (\text{C.10})$$

Das heißt aber, dass die ganze im System vorhandene Kohärenz sich vollständig im Interferenzkontrast manifestiert.

Literaturverzeichnis

- [1] P. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [2] M. P. Van Albada & A. Lagendjik, Phys. Rev. Lett. **55**, 2692 (1985).
- [3] P. E. Wolf & G. Maret, Phys. Rev. Lett. **55**, 2696 (1985).
- [4] S. Feng, C. Kane, P. A. Lee & A. D. Stone, Phys. Rev. Lett **61**, 834 (1988).
- [5] F. Scheffold & G. Maret, Phys. Rev. Lett **81**, 5800 (1998).
- [6] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. van Tiggelen & M. Fink, Phys. Rev. Lett. **79**, 3637 (1997).
- [7] G. Labeyrie, F. de Tomasi, J.-C. Bernard, C. A. Müller, C. Miniatura & R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **83**, 5266 (1999).
- [8] G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura & R. Kaiser, Phys. Rev. A **67**, 033814 (2003).
- [9] G. Labeyrie, D. Delande, C. A. Müller, C. Miniatura & R. Kaiser, Optics Communications **243**, 157 (2004).
- [10] C. A. Müller, T. Jonckheere, C. Miniatura & D. Delande, Phys. Rev. A **64**, 053804 (2001).
- [11] C. A. Müller & C. Miniatura, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 10163 (2002).
- [12] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc & G. Grynberg, *Atom-Photon Interactions* (John Wiley & Sons Inc., 1992).
- [13] M. C. W. van Rossum & T. M. Nieuwenhuizen, Rev. Mod. Phys. **71**, 313 (1999).
- [14] D. Wilkowski, Y. Bidet, T. Chanelière, R. Kaiser, B. Klappauf, G. Labeyrie, C. A. Müller & C. Miniatura, Physica B **328**, 157 (2003).
- [15] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin & A. Cable, Phys. Rev. Lett. **57**, 314 (1986).
- [16] J. D. Miller, R. A. Cline & D. J. Heinzen, Phys. Rev. A **47**, 4567 (1994).
- [17] K. L. Corwin, S. J. M. Kuppens, D. Cho & C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **83**, 1311 (1999).
- [18] V. Shatokhin, C. Müller & A. Buchleitner, Phys. Rev. Lett. **94**, 043603 (2005).
- [19] T. Wellens, B. Grémaud, D. Delande & C. Miniatura, Phys. Rev. A **70**, 023817 (2004).
- [20] W. M. Itano, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, D. J. Wineland, U. Eichmann & M. G. Raizen, Phys. Rev. A **57**, 4176 (1998).

- [21] N. W. Ashcroft & N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt Brace, Orlando, 1976).
- [22] U. Eichmann, J. C. Bergquist, J. J. Bollinger, J. M. Gilligan, W. M. Itano, D. J. Wineland & M. G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2359 (1993).
- [23] Y. Bidet, *Piégeage et refroidissement laser du strontium - Etude de l'effet des interférences en diffusion multiple*, PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, 2002, S. 92 ff.
- [24] z.B. Shamos & H. Morris, *Great Experiments in Physics* (Dover Publ., New York, 1987).
- [25] B. G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2154 (1996).
- [26] S. Dürr, T. Nonn & G. Rempe, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5705 (1998).
- [27] P. D. D. Schwindt, P. G. Kwiat & B. G. Englert, *Phys. Rev. A* **60**, 4285 (1999).
- [28] B. G. Englert & J. A. Bergou, *Opt. Commun.* **179**, 337 (2000).
- [29] A. Messiah, *Quantenmechanik Bd. 1,2* (de Gruyter Verlag, Berlin, 1990).