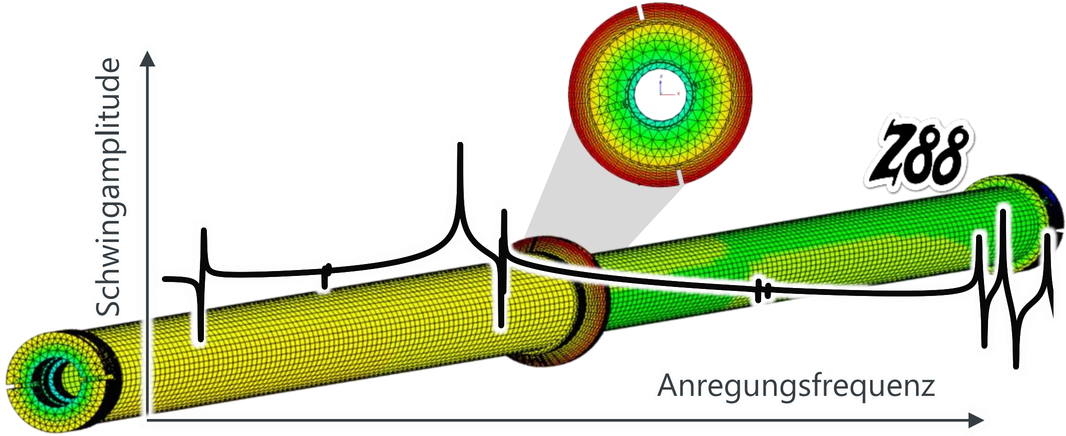
Modal- und Frequenzganganalyse interagierender Bauteilkomponenten am Beispiel einer Elastomer-Gelenkwelle und eines Industriegetriebes

Johannes Wittmann, Florian Hüter

25. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

Bayreuth, 11.09.2024

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel



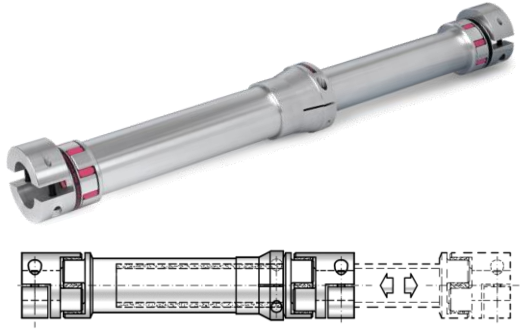
Motivation

Auslegung von Antriebstechnik-Komponenten

Maschinendynamik

- Vibroakustik
- Ressourceneffizienz
- Versagenssicherheit

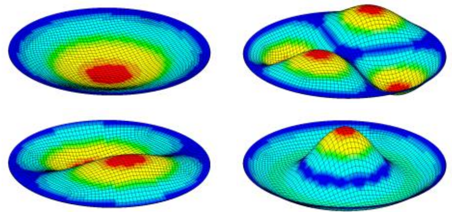
© SEW - Eurodrive GmbH & CoKG



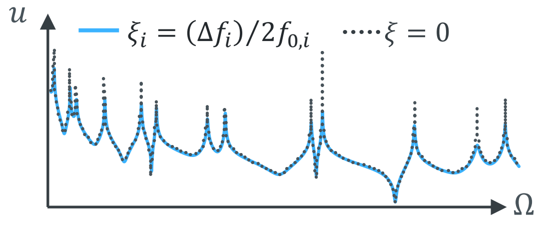
© R+W Kupplungen

Numerische Schwingungsanalyse

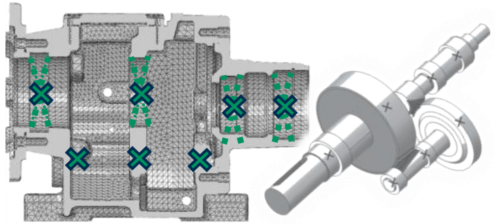
Eigenschwingungen



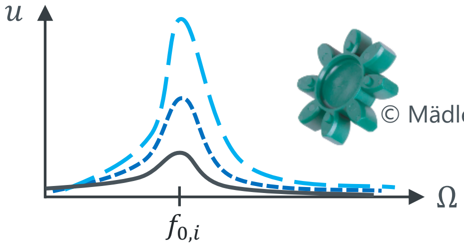
Amplitudengang



Umfeldeinfluss



Dämpfung



© Mädler

→ Strukturdynamische FE-Strategien zur Effizienzsteigerung in der antriebstechnischen Auslegung

https://doi.org/10.1007/978-3-662-52713-9 , https://www.rw-kupplungen.de/ ,
Billenstein Dissertation (2019), ISBN:978-3-8440-6818-4 , https://www.sew-eurodrive.de/,
https://www.maedler.de/Article/60516455

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Überblick der untersuchten Methoden

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Weitere Lösungsverfahren möglich, z. B. transiente Analyse

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

Verschiedene Reduktionsansätze

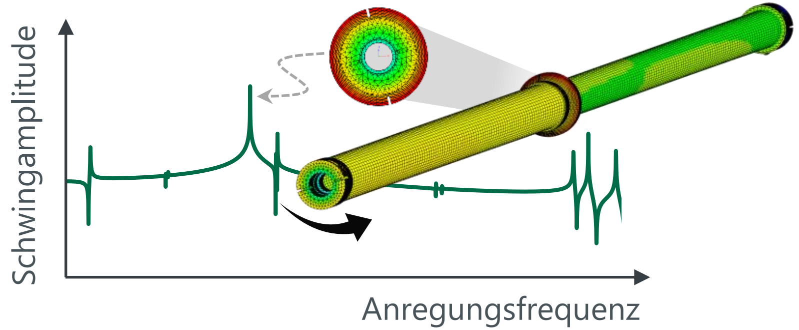
- Guyan/Irons
- Hurty/Craig-Bampton
- Modale Reduktion
- und viele weitere…

1

2

3

Frequenzganganalyse



Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.2514/3.2874 , https://doi.org/10.1007/978-3-658-25052-2 , https://doi.org/10.2514/3.4741 , https://doi.org/10.1007/978-3-658-06630-7

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Frequenzganganalyse: direkter FE-Ansatz

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

$\boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{u}} e^{i\Omega t}$

$\tilde{\boldsymbol{u}}(\Omega)$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

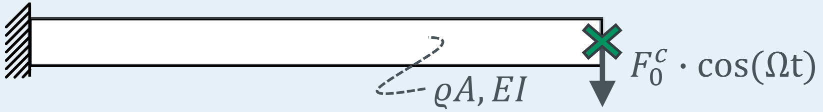
Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

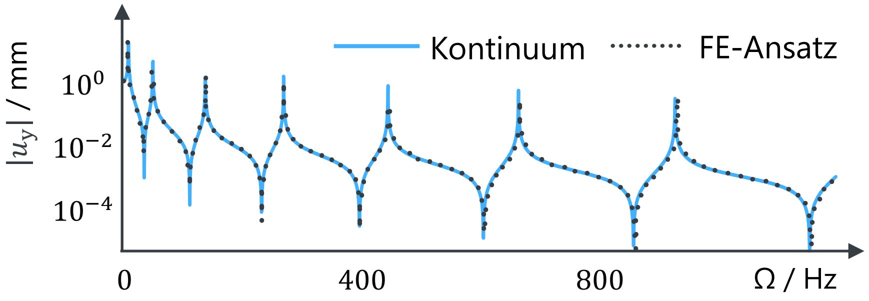
Frequenzganganalyse

direkter, gekoppelter FE-Ansatz: $\tilde{\boldsymbol{u}}(\Omega) = \underbrace{[-\Omega^2 \boldsymbol{M} + i\Omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{K}]^{-1}}_{= \boldsymbol{H}(\Omega)} \tilde{\boldsymbol{F}}$

Harmonische Anregung



$$\tilde{u}(\Omega) = \frac{4F_0L^3}{EI_y} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa_\nu L)^4} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_\nu}\right)^2}$$



→ **Übereinstimmung FEA vs. Analytik**

unpraktikable Speicher- / Rechenanforderungen

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-3-662-61768-7 ,
https://wandinger.userweb.mwn.de/LA_Elastodynamik_2/kap_3_balken.pdf

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse des Kontinuums

Bewegungsgleichung

$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$

↓

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

↓

Modale Superposition | **Gemischt statisch-modale Reduktion**

↓

Frequenzganganalyse

Eigenwertproblem

$(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0$ symmetrisch, ungedämpft

Eigenwerte, Eigenfrequenzen und Eigenmoden

$\Lambda_j = \omega_j^2, \qquad f_j = \omega_j/2\pi, \qquad \boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n)$

Lösungsalgorithmen in der FEA

- LANCZOS und STURM
- LEHOUCQ ET AL.: *Implicitly Restarted ARNOLDI Method*

$(\boldsymbol{K} - \sigma_S\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Phi} = \nu_S\boldsymbol{\Phi}$ mit $\nu_S = \frac{1}{\lambda - \sigma_S}$

https://z88.de/ , https://doi.org/10.1137/1.9780898719628.ch4 , https://doi.org/10.1007/978-3-662-61768-7

Bewegungsgleichung

$$M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

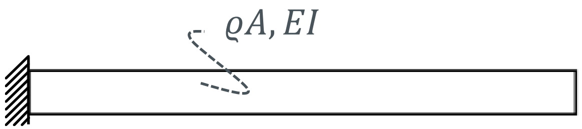
Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

Frequenzganganalyse

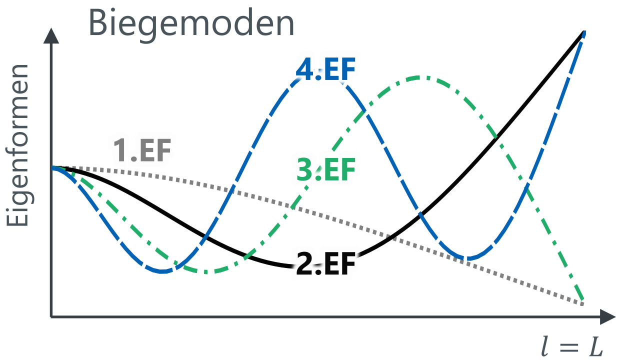
Validierungsbeispiel: Biegeschwingung

Analytische Lösung: Euler-Bernoulli-Balken



$$1 + \cos(\kappa L)\cosh(\kappa L) = 0$$

$$\omega_\nu = \kappa_\nu^2 \sqrt{\frac{EI}{\varrho A}}$$



$f_1 = 7{,}8$ Hz

$f_2 = 49{,}1$ Hz

$f_3 = 137{,}5$ Hz

$f_4 = 269{,}4$ Hz

$f_\nu = \cdots$

https://doi.org/10.1007/978-3-662-54805-9 , https://doi.org/10.1007/978-3-662-61768-7 , https://wandinger.userweb.mwn.de/LA_Elastodynamik_2/kap_3_balken.pdf

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse - Experimentell

Bewegungsgleichung

$$M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

Modale Superposition

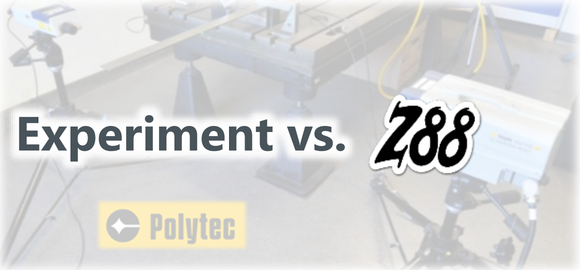
Gemischt statisch-modale Reduktion

Frequenzganganalyse

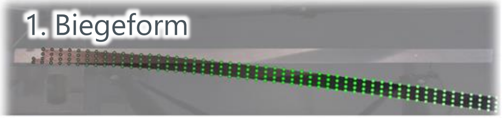
Validierungsbeispiel: Biegeschwingung

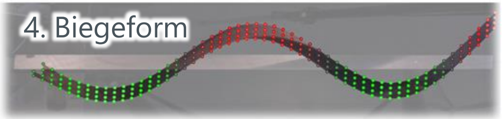
Amplitudengang Flachstahl

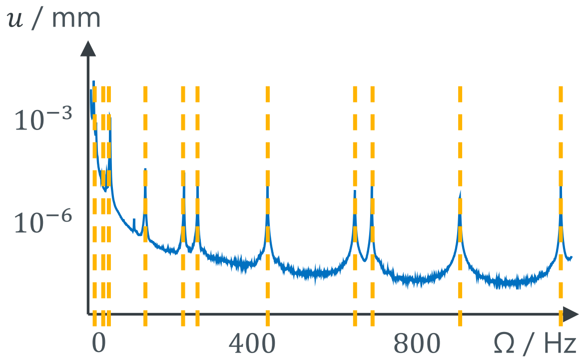
- 90MnCrV8
- 800 × 50 × 6 mm



Impulshammer







→ **Gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen aus FEA und experimenteller Messung**

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://www.polytec.com/de

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse - Experimentell

Bewegungsgleichung

$$M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

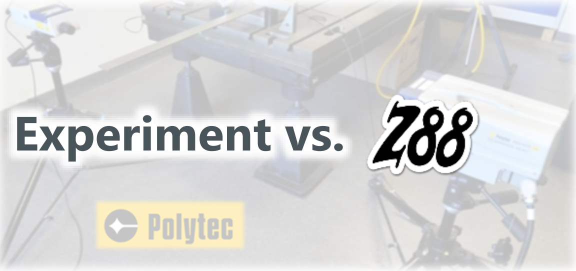
Modale Superposition | **Gemischt statisch-modale Reduktion**

Frequenzganganalyse

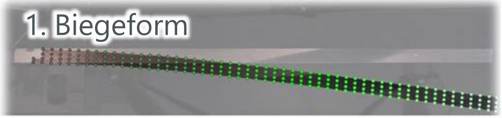
Validierungsbeispiel: Biegeschwingung

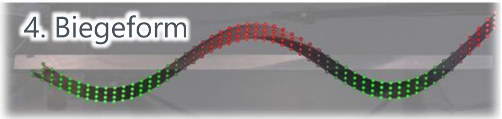
Amplitudengang Flachstahl

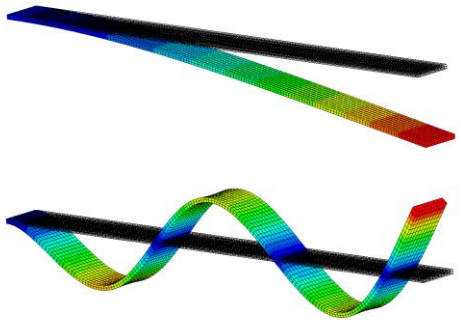
- 90MnCrV8
- 800 × 50 × 6 mm



Impulshammer







→ **Gute Übereinstimmung der Eigenschwingformen aus FEA und experimenteller Messung**

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse - Netzeinfluss

Bewegungsgleichung

$$M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$$

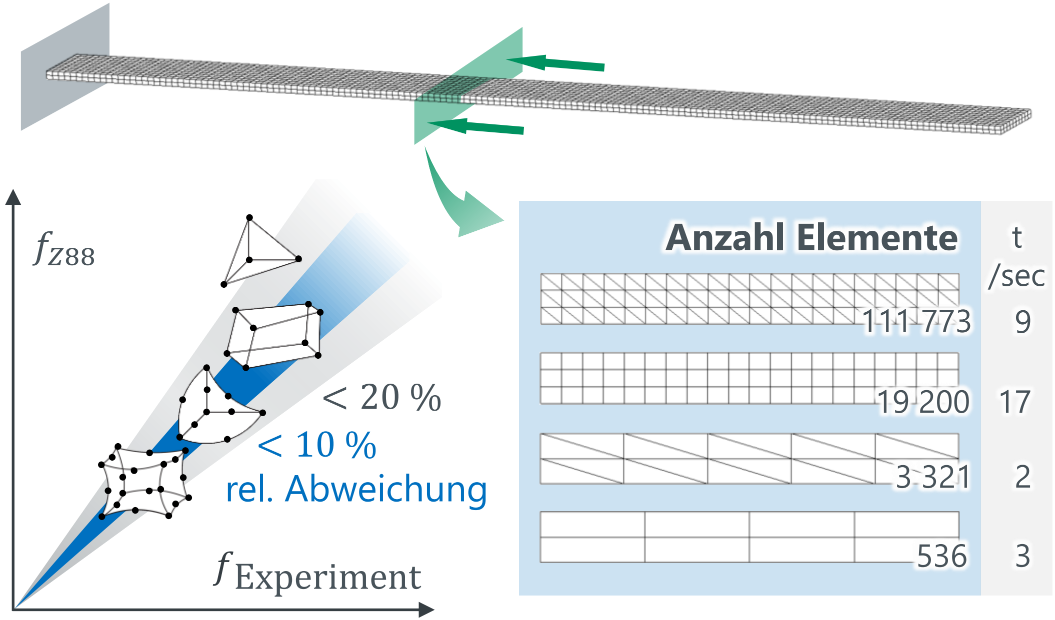
Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

Frequenzganganalyse

Netzkonvergenzstudien



→ **Empfehlung: quadratischer Elementansatz führt zu kleinen Abweichungen bei kleiner Anzahl an finiten Elementen**

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse mit Kontakt

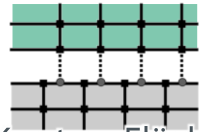
UNIVERSITÄT BAYREUTH

Verklebter Kontakt

$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0$ symmetrisch, ungedämpft

- LAGRANGE-Ansatz mit Störparameter

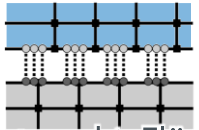
$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G}^T \\ \boldsymbol{G} & -{}^{1}/_{\beta}\,\boldsymbol{I} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$



Knoten-Fläche

- Penalty-Methode

$$\left((\boldsymbol{K} + \beta \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G}) - \omega^2 \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$

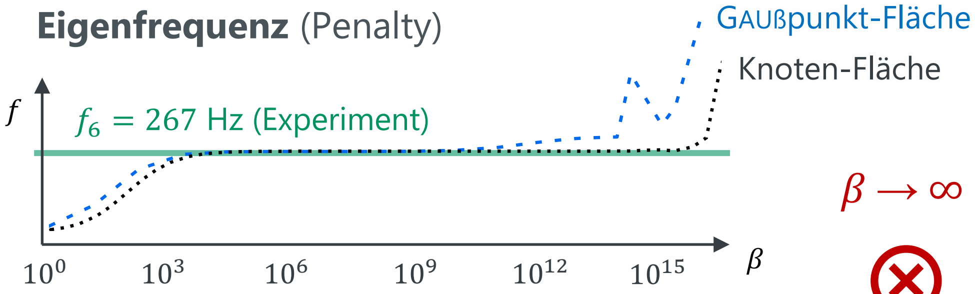


GAUßpunkt-Fläche

Betriebspunkt-Linearisierung: Kontaktzustand ändert sich in der Eigenschwingungsanalyse nicht

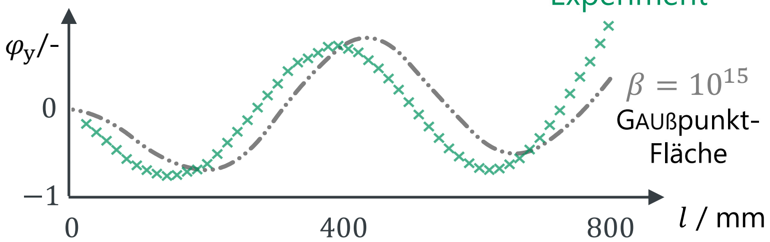
Einfluss Kontaktsteifigkeit

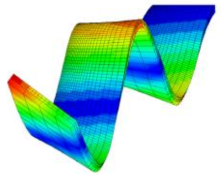
Eigenfrequenz (Penalty)



$\beta \rightarrow \infty$

Biegeschwingung
(4. Ordnung, Penalty)





Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.2507/IJSIMM21-4-616 , Forschungsvorhaben FVA 979 I Abschlussbericht 2024 ,
BILLENSTEIN Dissertation (2019) ISBN:978-3-8440-6818-4

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Eigenschwingungsanalyse mit Kontakt

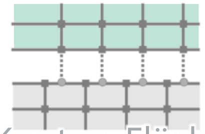
UNIVERSITÄT BAYREUTH

Verklebter Kontakt

$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0$ symmetrisch, ungedämpft

- LAGRANGE-Ansatz mit Störparameter

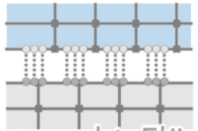
$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{G}^T \\ \boldsymbol{G} & {}^{-1}/_{\beta}\,\boldsymbol{I} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$



Knoten-Fläche

- Penalty-Methode

$$\left((\boldsymbol{K} + \beta \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{G}) - \omega^2 \boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{\Phi} = 0$$

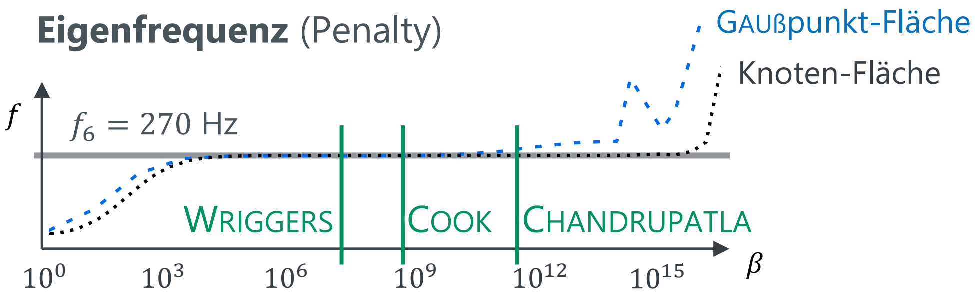


GAUßpunkt-Fläche

Betriebspunkt-Linearisierung: Kontaktzustand ändert sich in der Eigenschwingungsanalyse nicht

Einfluss Kontaktsteifigkeit

Eigenfrequenz (Penalty)



Kriterien numerischer Kontaktsteifigkeit

- CHANDRUPATLA: $\beta = 10^{2..4} \cdot \max K_{ii}$
- COOK ET AL., WISSMANN: $\beta \leq 10^{\frac{\mathrm{dw}}{2}} \approx 10^{7\ldots8}$
- WRIGGERS, NOUR-OMID: $\beta = \frac{k_{\min}}{\sqrt{n_{FG} \cdot t^z}}$

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.2507/IJSIMM21-4-616 , Forschungsvorhaben FVA 979 I Abschlussbericht 2024 ,
COOK ET AL. ISBN-13: 978-0471356059 , https://doi.org/10.1002/cnm.1630030620 , https://doi.org/10.1017/9781108882293

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Reduktionsmethoden: Modale Reduktion

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Bewegungsgleichung

$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

Modale Superposition | **Gemischt statisch-modale Reduktion**

Frequenzganganalyse

Modale Reduktion

- **Eigenschwingungsanalyse** (ungedämpft, sym.)

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi} = 0$$

- **Modale Superposition relevanter Eigenformen**

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi} \cdot \boldsymbol{q} \rightarrow \sum_{j=1}^{k \ll n} \boldsymbol{\varphi}_j \cdot q_j$$

- **Bewegungsgleichung entkoppelt**

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j$$

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-3-658-25052-2

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Harmonische Analyse mit Modaler Reduktion

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

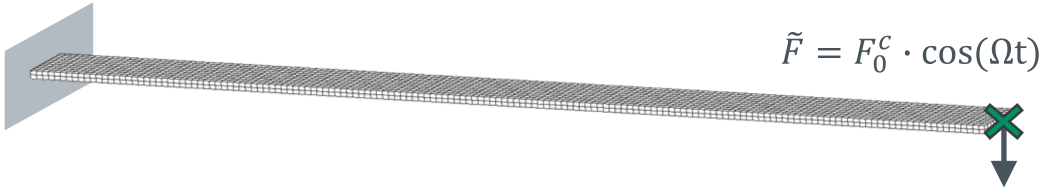
Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

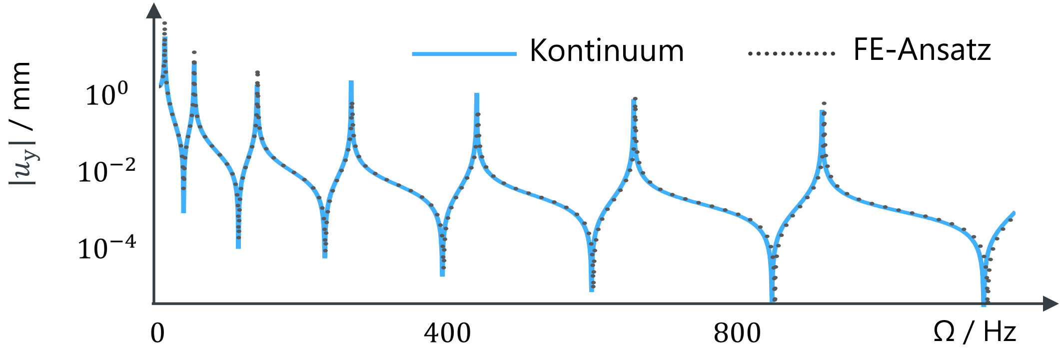
Frequenzganganalyse

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\Omega) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}}{-\Omega^2 + 2i\Omega\omega_j d_j + \omega_j^2}\tilde{\boldsymbol{F}}$$

Harmonische Anregung



Amplitudengang: FEA vs. Analytik



- **Modale Superposition beschleunigt Frequenzganganalyse**

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-3-662-61768-7 , https://doi.org/10.1007/978-3-658-25052-2 ,
https://wandinger.userweb.mwn.de/LA_Elastodynamik_2/kap_3_balken.pdf

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Harmonische Analyse der schwingungsdämpfenden Gelenkwelle

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

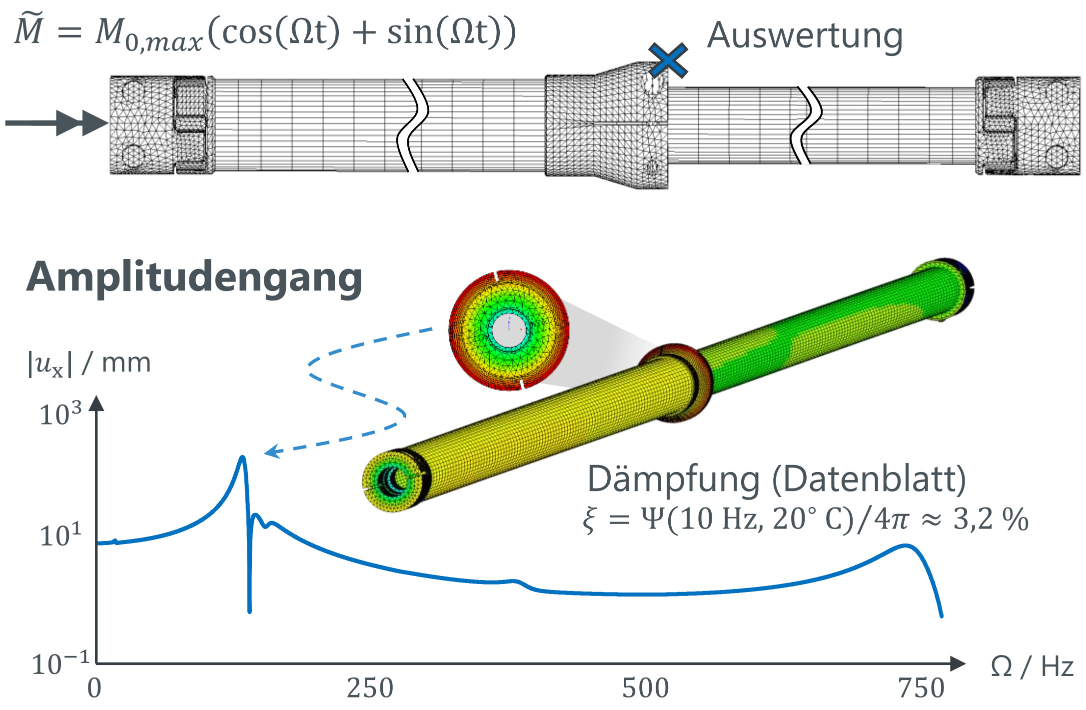
Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

Frequenzganganalyse

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\Omega) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}}{-\Omega^2 + 2i\Omega\omega_j d_j + \omega_j^2}\tilde{\boldsymbol{F}}$$

Anwendungsbeispiel: R+W-Gelenkwelle



Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-3-662-61768-7 , https://doi.org/10.1007/978-3-658-25052-2 , https://www.rw-kupplungen.de/

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Reduktionsmethoden: Gemischt statisch-modale Reduktion

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

Frequenzganganalyse

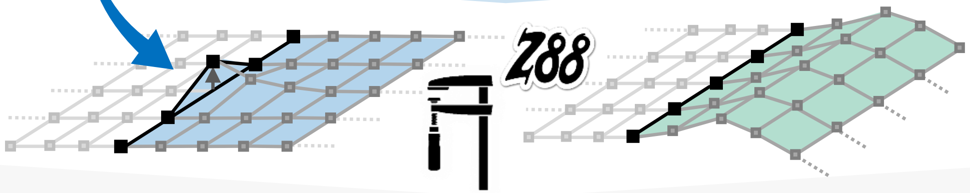
Reduktion nach Craig-Bampton

- **Eigenschwingungsanalyse** (interne FHG)

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Phi}_i = 0$$

- **Statische Kondensation nach Guyan**

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{red}} = \boldsymbol{K}_{ee} - \boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie}$$



- **Dynamische Reduktion**

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie} & \boldsymbol{\Phi}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_e \\ \boldsymbol{q}_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{HCB}}\boldsymbol{q}$$

Freiheitsgrade
i intern
e extern
k modal

Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-1-4471-3827-3 , https://doi.org/10.2514/3.2874 , https://doi.org/10.2514/3.4741

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Schwingeigenschaften Stirnradgetriebe

Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{u}}(t) + \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{F}(t)$$

Eigenschwingungsanalyse (ungedämpft, sym.)

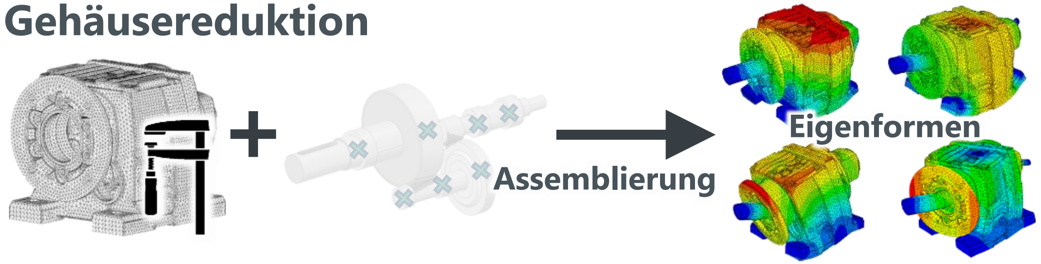
Modale Superposition

Gemischt statisch-modale Reduktion

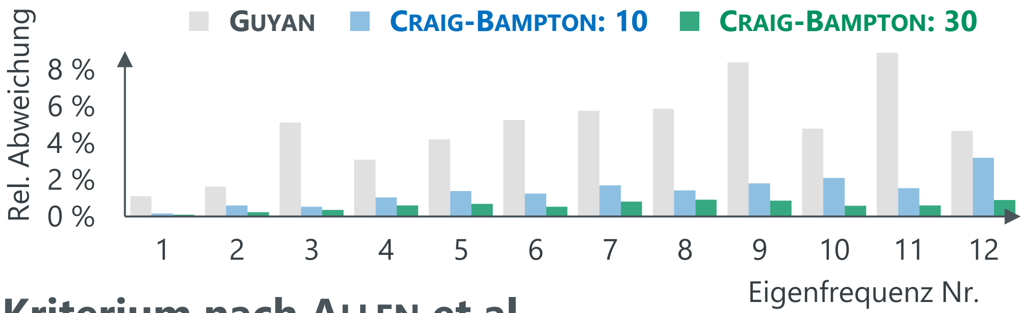
Frequenzganganalyse

Eigenschwingungen im Gesamtgetriebe

- **Gehäusereduktion**



- **Eigenfrequenzen im Gesamtmodell**



- **Kriterium nach ALLEN et al.**

$f_k \approx 2f_{12} \rightarrow f_k \geq 6{,}7$ kHz bzw. $k \approx 30$

Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

https://doi.org/10.1007/978-3-030-25532-9 , https://doi.org/10.2514/3.2874 , https://doi.org/10.2514/3.4741

Strukturdynamische Finite-Elemente-Analyse

Zusammenfassung und Ausblick

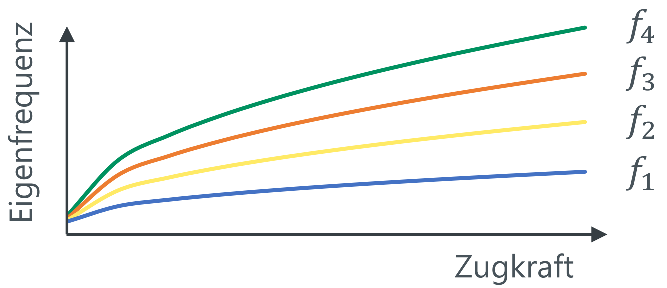
UNIVERSITÄT BAYREUTH

Zusammenfassung

- **Eigenschwingungsanalyse mit Kontakt**
  - Untersuchung d. Einflusses von FE-Netz & Kontakt
  - Validierung durch experimentelle Modalanalyse
- **FE-Frequenzganganalyse**
  - Absicherung des direkten FE-Ansatzes durch die analytische Beschreibung nach EULER-BERNOULLI
  - Beschleunigung durch dynamische Reduktion
- **Dynamische Reduktionsmethoden**
  - Modale Reduktion und Superposition
  - Reduktion nach CRAIG-BAMPTON
- **Übertragung auf Anwendungsbeispiele**
  - Elastomer-Gelenkwelle
  - Getriebegehäuse eines Stirnradgetriebes

Ausblick

- **Automatisierte Schrittweite in der Frequenzganganalyse**
- **Effizienzsteigerung transienter Strukturdynamik**
  - dynamische Reduktion
  - modale Superposition
- **Einfluss Nichtlinearität auf Eigenschwingungen**



Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD
Prof. Dr.-Ing. Stephan Tremmel

HÜTER Dissertation (2024) ISBN: 978-3-8440-9533-3 , GLENK Dissertation (2020) ISBN: 978-3-8440-7395-9

Erstellt von Johannes Wittmann und Florian Hüter, 2024