

Florian Hüter

Titel: FE-Modellbildung und Simulation hyperelastischen Materialverhaltens

Abstract:

Technische Elastomerbauteile haben sowohl im Maschinen- und Anlagenbau als auch in der Fahrzeugtechnik und der Konsumgüterindustrie eine große Bedeutung. Die Anforderungen an die Auslegung von Elastomerbauteilen steigen zunehmend, um Optimierungspotenziale konsequent ausschöpfen zu können. Eine zentrale Herausforderung liegt dabei in der Berücksichtigung des komplexen, nichtlinear-elastischen Materialverhaltens von Elastomeren, für dessen Beschreibung sich insbesondere hyperelastische Materialmodelle eignen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungsstrategien können das Bauteilverhalten detailliert untersucht und Ansatzpunkte zur Erschließung von Optimierungspotenzialen identifiziert werden. Für den erfolgreichen Einsatz hyperelastischer Materialmodelle in der FEM sind fundierte Kenntnisse über die Modellvorhersagbarkeit und Kalibrierbarkeit der verschiedenen Materialmodelle, der FEM und deren Interaktion mit den Materialmodellen unerlässlich.

Die meisten in kommerziellen FE-Programmen verfügbaren Materialmodelle wie MOONEY-RIVLIN, YEOH, OGDEN und ARRUDA-BOYCE sind nicht in der Lage, die zur Kalibrierung verwendeten Messdaten exakt zu reproduzieren, sondern approximieren diese aufgrund ihrer mäßigen Modellflexibilität mehr oder weniger genau. Der Wunsch, die daraus resultierenden Modellierungsfehler zu eliminieren, führte Anfang der 2000er Jahre zur Entwicklung neuartiger Materialmodelle wie dem MARLOW- oder dem SUSSMAN-BATHE-Modell. Diese basieren im Gegensatz zu den klassischen Materialmodellen nicht auf einem Approximationsansatz, sondern auf einem Interpolationsansatz zur Beschreibung der vorgegebenen Spannungs-Dehnungs-Kurven des Elastomers. Durch ihren speziellen Ansatz sind sie in der Lage, die vorgegebenen Messdatensätze exakt zu reproduzieren und gleichzeitig physikalisch sinnvolle Vorhersagen für beliebige andere Verformungen zu treffen.

Aufbauend auf dem aktuellen Stand der Forschung wird ein interpolationsansatzbasiertes hyperelastisches Materialmodell vorgestellt, das die Kompressibilität von Elastomeren sowie den Einfluss der Mehrachsigkeit auf das elastische Verhalten berücksichtigt.

Darüber hinaus werden die Herausforderungen bei der FEA von Elastomerbauteilen, die im Zusammenhang mit dem meist quasi-inkompressiblen Materialverhalten von Elastomeren auftreten, adressiert und geeignete Modifikationen der klassischen Elementformulierung aufgezeigt. Dazu gehören die reduzierte Integration mit Hourglass-Stabilisierung, die J-Bar-Methode sowie die Hybridelementformulierung.

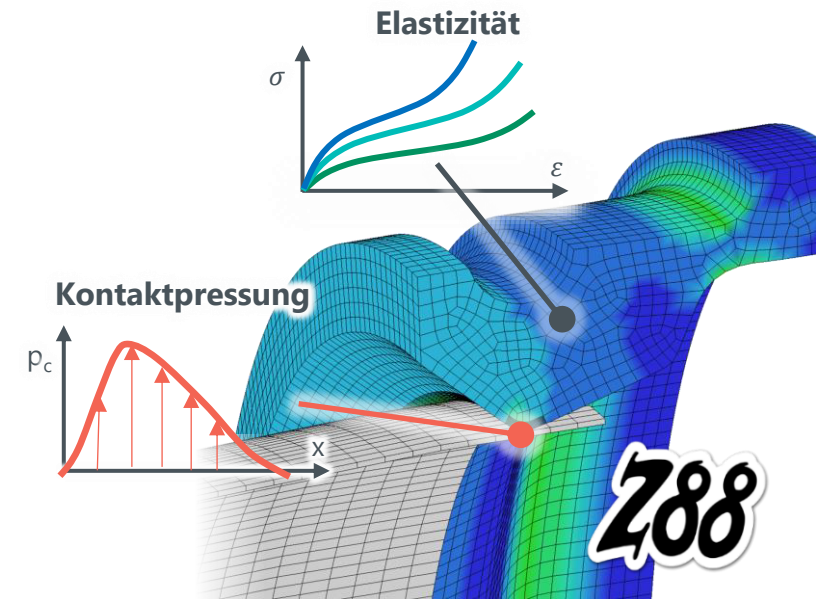
Ein Anwendungsbeispiel demonstriert die Eignung des neuen Materialmodells für den praktischen Einsatz in der FEA von Elastomerbauteilen.

FE-Modellbildung und Simulation hyperelastischen Materialverhaltens

Florian Hüter

25. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

Bayreuth, 11. September 2024



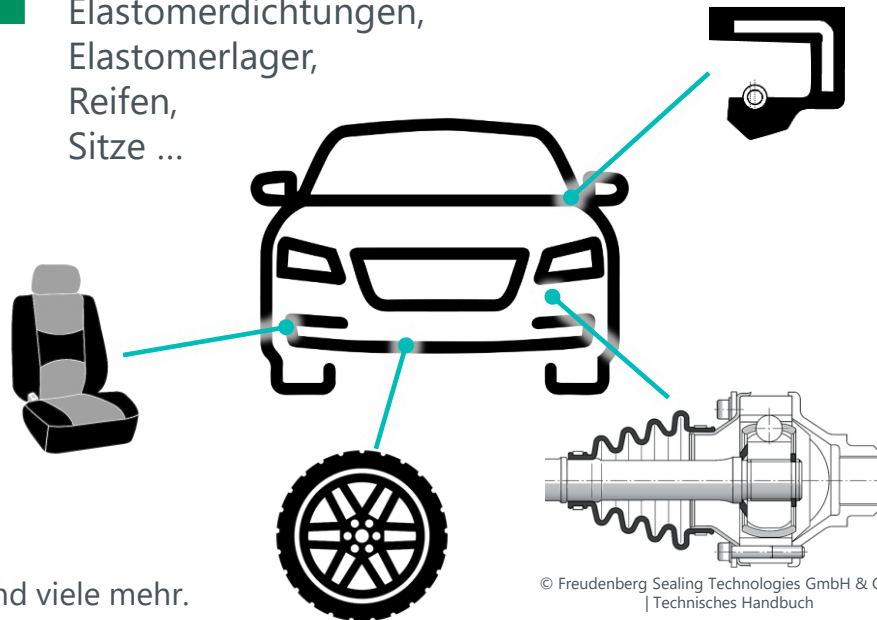
200



Finite-Elemente-Analyse zur Ausschöpfung der Optimierungspotentiale von Elastomerbauteilen

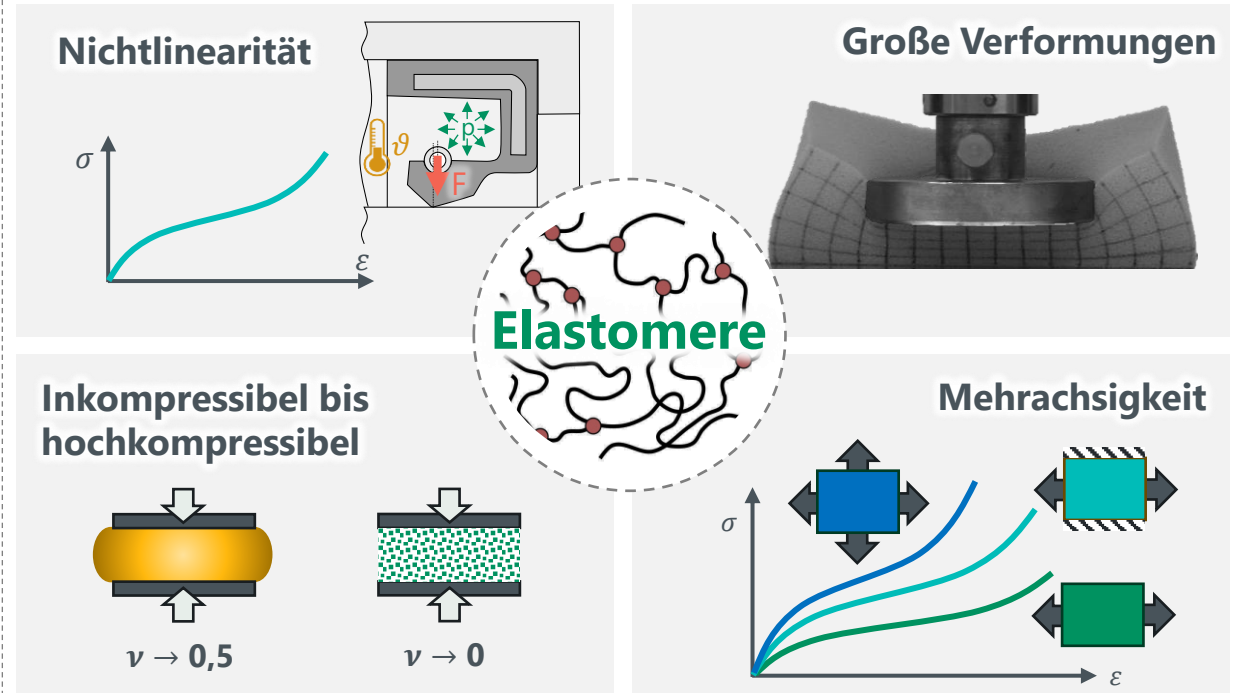
Elastomere im Fahrzeugbau

- Elastomerdichtungen, Elastomerlager, Reifen, Sitze ...



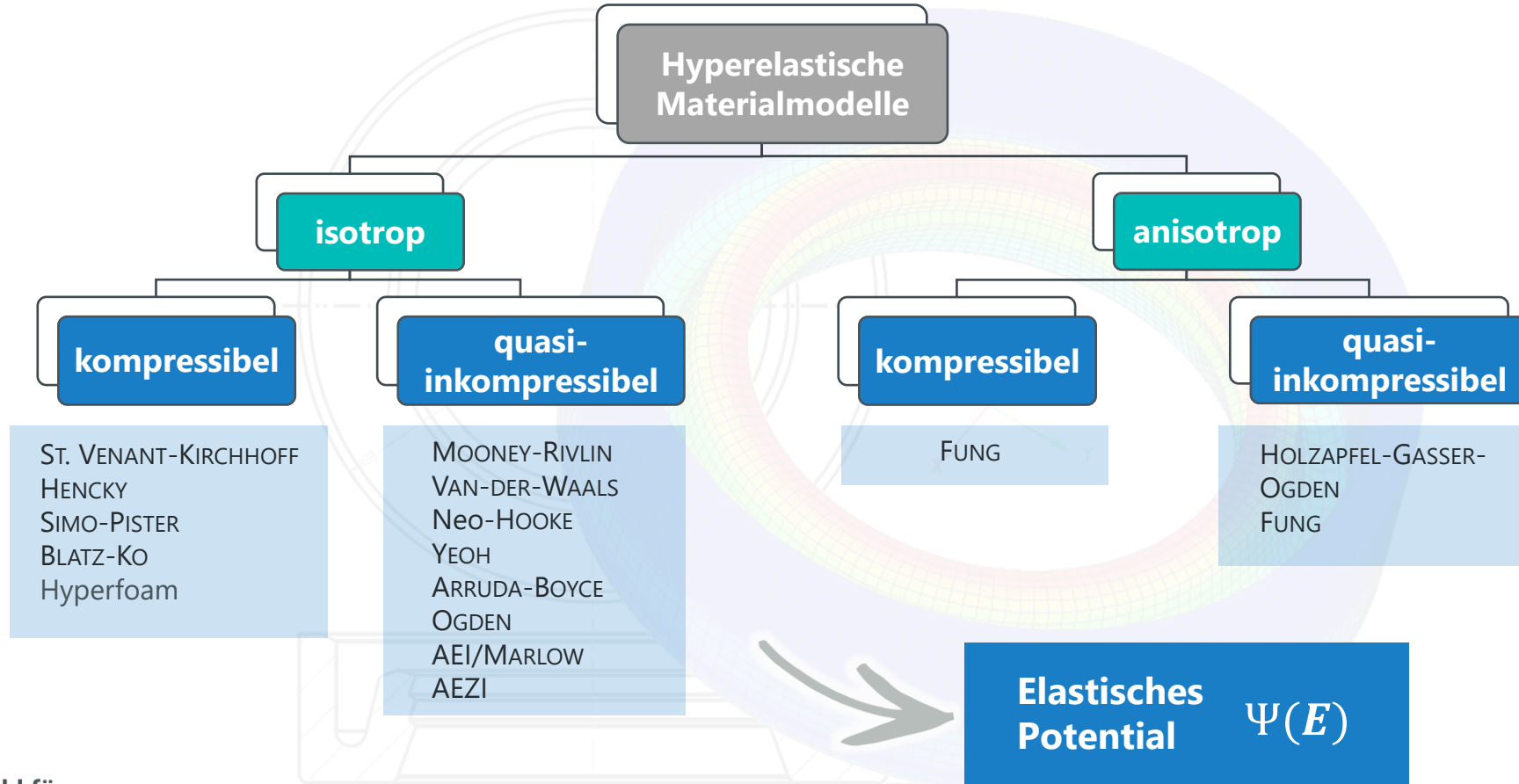
... und viele mehr.

Hyperelastisches Materialverhalten



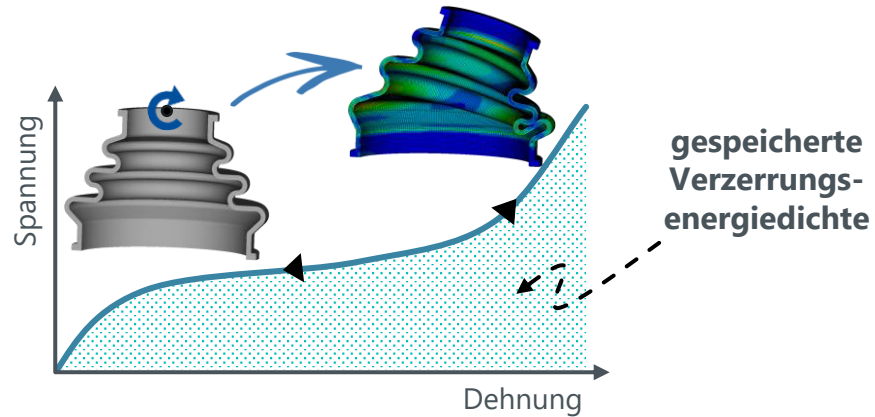
Hyperelastische Materialmodelle

Überblick hyperelastische Materialmodelle



Einführungen des Elastischen Potentials Ψ

Perfekt elastisches Verhalten



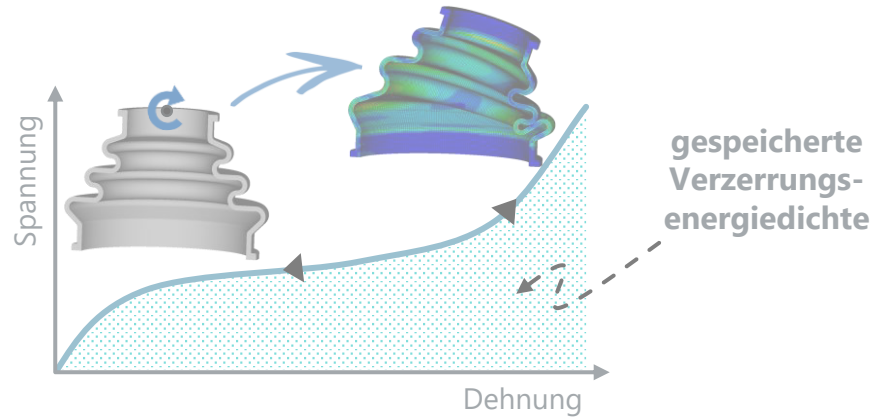
■ Elastisches Potential

$$\Psi(E) = \int_0^E S(E) dE \quad \rightarrow \quad S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \quad \rightarrow \quad \mathbb{C} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E}$$



Konstruktion des Elastischen Potentials Ψ

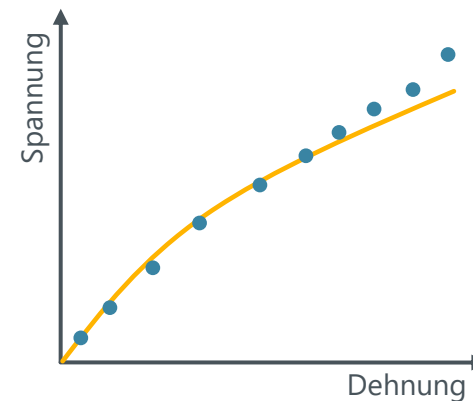
Perfekt elastisches Verhalten



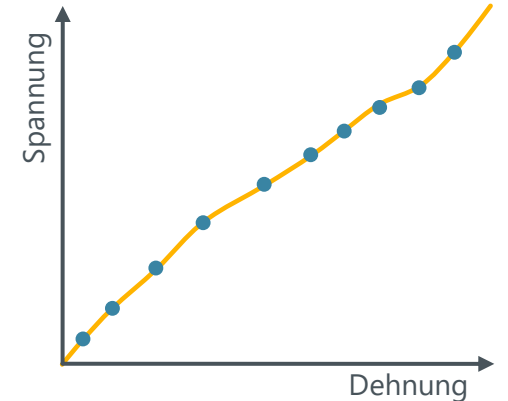
■ Elastisches Potential

$$\Psi(E) = \int_0^E S(E) dE \quad S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \quad C = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E}$$

Konstruktionsansätze für Ψ



Approximationsansätze



Interpolationsansätze

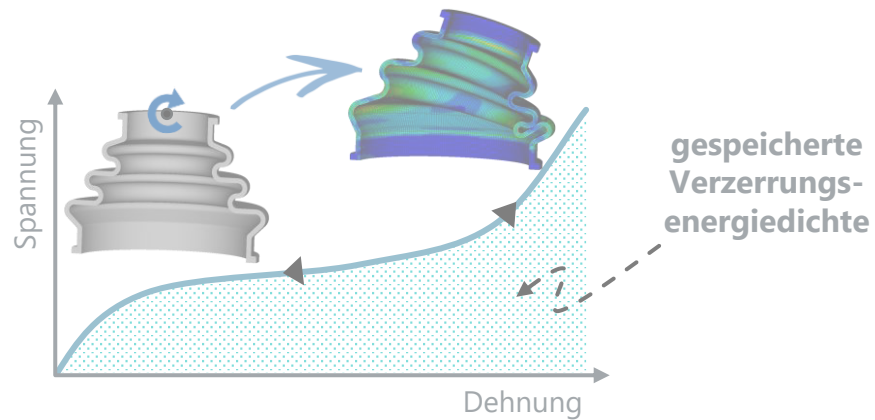


Verschiedene Kriterien zur Konstruktion



Konstruktion des Elastischen Potentials Ψ

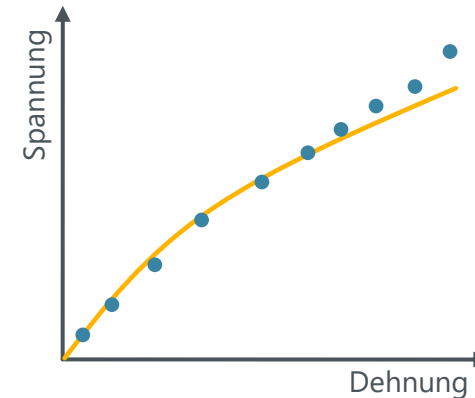
Perfekt elastisches Verhalten



Elastisches Potential

$$\Psi(E) = \int_0^E S(E) dE \quad S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \quad C = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E}$$

Konstruktionsansätze für Ψ



Approximationsansätze

Funktionsansatz

$$\Psi = \sum_{i=1}^N \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3)$$

Ableitung

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E}$$

Approximation der Messdaten mittels Curve Fitting

$$\sum_{i=1}^M \{ \sigma_{\text{Mess}}^{(i)} - \sigma_{\text{Modell}}(\varepsilon_{\text{Mess}}^{(i)}) \}^2 \rightarrow \min$$

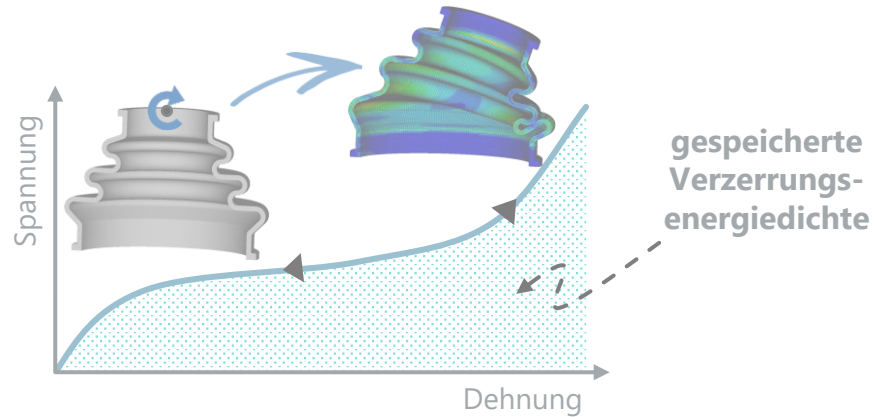


Verschiedene Kriterien zur Konstruktion



Konstruktion des Elastischen Potentials Ψ

Perfekt elastisches Verhalten



Elastisches Potential

$$\Psi(E) = \int_0^E S(E) dE \quad \rightarrow \quad S = \frac{\partial \Psi}{\partial E} \quad \rightarrow \quad \mathbb{C} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \partial E}$$

Konstruktionsansätze für Ψ

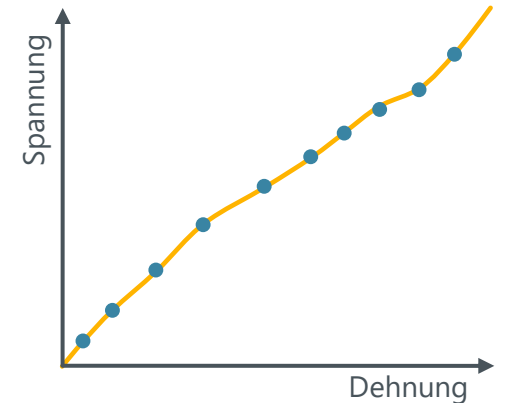
Interpolationsansatz

$$\Psi(E) = \int \text{spline}(\sigma_{\text{Mess}}^{(i)}, \varepsilon_{\text{Mess}}^{(i)}) dE$$

Ableitung

$$S = \frac{\partial \Psi}{\partial E}$$

Reproduktion der Messdaten



Interpolationsansätze



Zusätzliche Annahmen erforderlich zur Modellvorhersage für andere Belastungsmoden



Allgemeines Erste-Invariante-Modell (AEI)

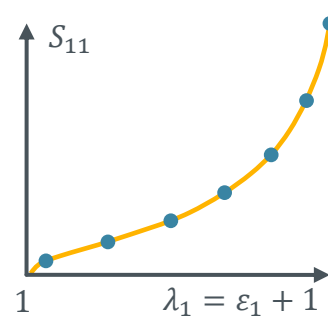
Originalansatz: inkompressibel

■ Erste-Invariante-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi(I_1) \quad \text{mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

■ MARLOW-Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi(I_1) = \int_3^{I_1(\lambda_1)} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} dI_1$$



isotrop & inkompressibel



Allgemeines Erste-Invariante-Modell (AEI)

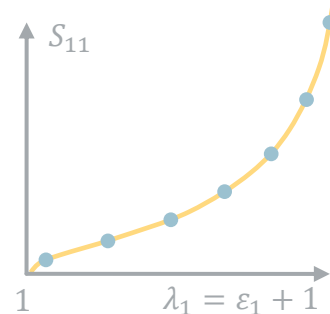
Originalansatz: inkompressibel

Erste-Invariante-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi(I_1) \quad \text{mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

MARLOW-Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi(I_1) = \int_3^{I_1(\lambda_1)} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} dI_1$$



isotrop & inkompressibel

Erweiterung: kompressibel

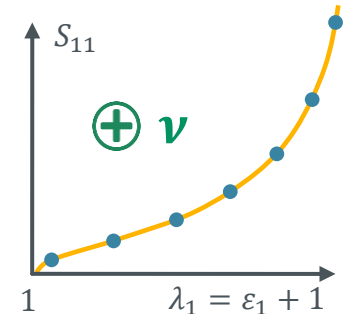
Erweiterung: FLORY-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi^{\text{vol}}(J) \quad \text{mit } J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \\ \bar{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$$

Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1) = \int_3^{\bar{I}_1} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} d\bar{I}_1$$

$$\Psi^{\text{vol}}(J) = \int_1^J \frac{S_{11} \lambda_1^2}{3 \lambda_1^{1-2\nu}} dJ$$



Allgemeines Erste-Invariante-Modell (AEI)

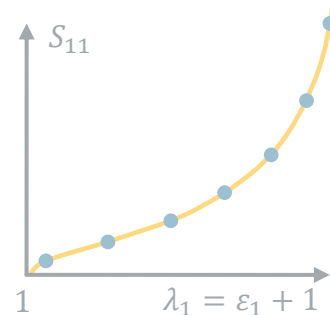
Originalansatz: inkompressibel

Erste-Invariante-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi(I_1) \quad \text{mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

MARLOW-Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi(I_1) = \int_3^{I_1(\lambda_1)} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} dI_1$$



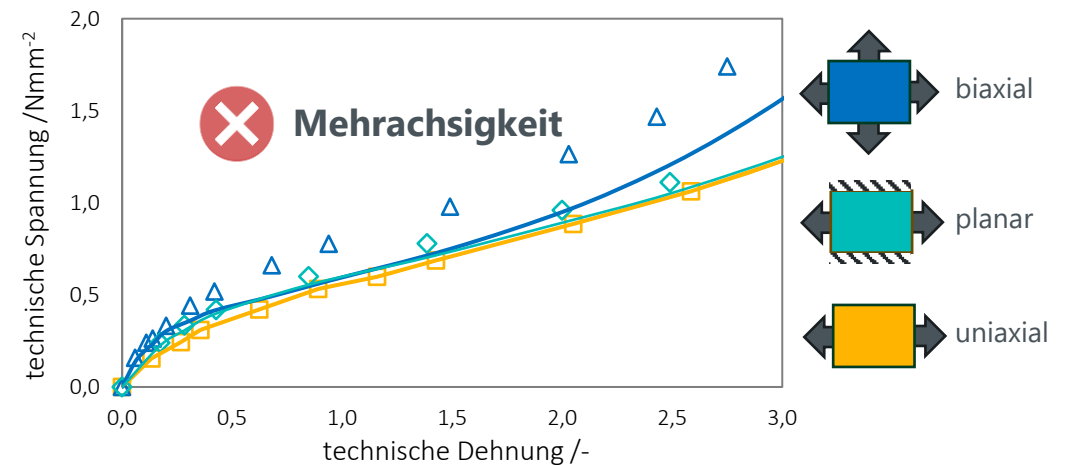
 isotrop & inkompressibel

Erweiterung: kompressibel

Erweiterung: FLORY-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi^{\text{vol}}(J) \quad \text{mit } J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$$



Allgemeines Erste-Zweite-Invariante-Modell (AEZI)

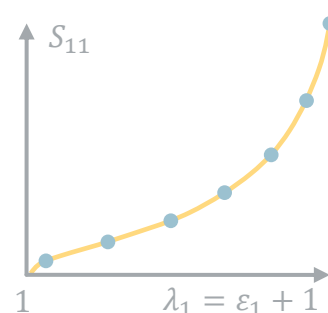
Originalansatz: inkompressibel

Erste-Invariante-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi(I_1) \quad \text{mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

MARLOW-Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi(I_1) = \int_3^{I_1(\lambda_1)} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} dI_1$$

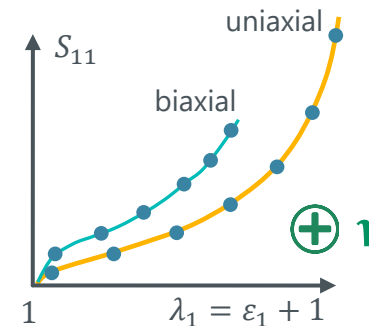


 isotrop & inkompressibel

Erweiterung: kompressibel + Mehrachsigkeit

Erweiterung: RIVLIN-SAUNDERS-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \underbrace{\Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1)}_{\text{MARLOW}} + \underbrace{\Psi^{\text{vol}}(J)}_{\text{kompressibel}} + \underbrace{\Psi^{\text{iso},2}(\bar{I}_2)}_{\text{Mehrachsigkeit}}$$



mit

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$$

$$\bar{I}_1 = I_1 J^{-2/3}$$

$$\bar{I}_2 = I_2 J^{-4/3}$$



Allgemeines Erste-Zweite-Invariante-Modell (AEZI)

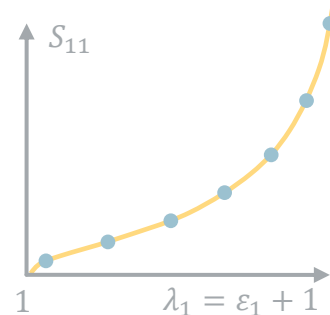
Originalansatz: inkompressibel

Erste-Invariante-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi(I_1) \quad \text{mit } I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

MARLOW-Kalibrierungsvorschrift

$$\Psi(I_1) = \int_3^{I_1(\lambda_1)} \frac{\frac{1}{2} S_{11} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}} dI_1$$

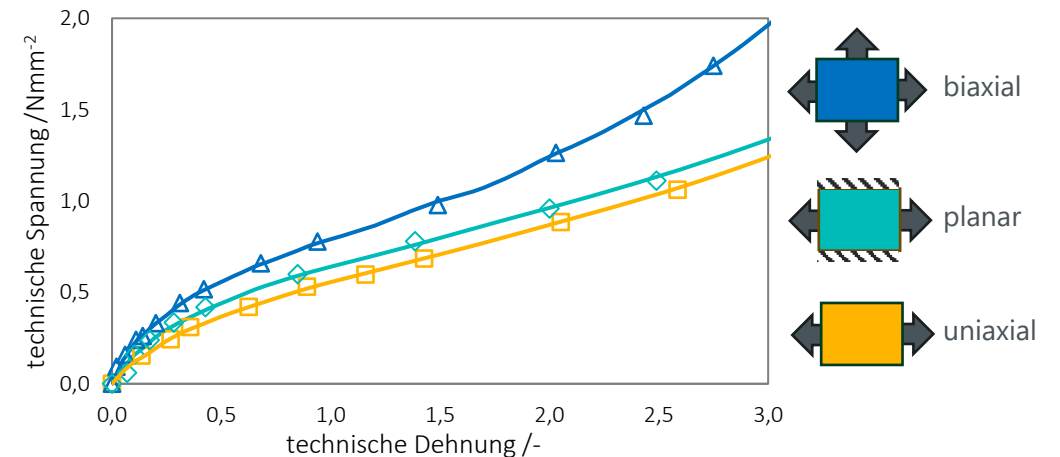


 isotrop & inkompressibel

Erweiterung: kompressibel + Mehrachsigkeit

Erweiterung: RIVLIN-SAUNDERS-Ansatz

$$\Psi(E) \longrightarrow \Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi^{\text{vol}}(J) + \Psi^{\text{iso},2}(\bar{I}_2)$$



Herausforderungen bei Quasi-Inkompressibilität

Finite-Elemente-Analyse

■ FE-Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T(u^{(i)}) \cdot \Delta u^{(i+1)} = \Delta F^{(i)} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

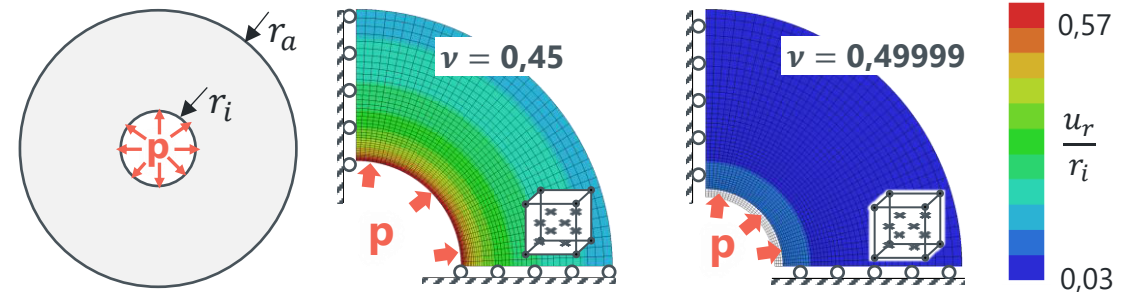
■ Isotropes Hooke'sches Gesetz (ebene Verzerrung)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{2G}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

→ ∞ für $\nu \rightarrow 0,5$

Volumetrische Elementversteifung

■ Dickwandiger Zylinder unter Innendruck



■ Erklärung



Mangelnde Approximation des Verschiebungsfeldes



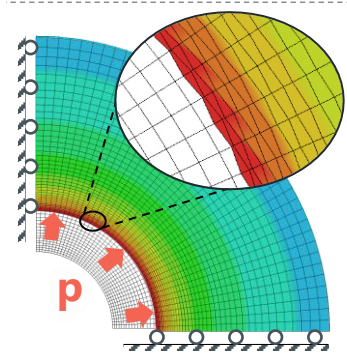
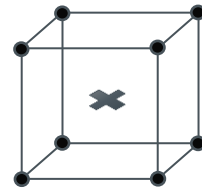
Exakt Lineares Hex. GAUßpunkt



Abhilfemaßnahmen für Volumetrische Elementversteifung

Reduzierte Integration

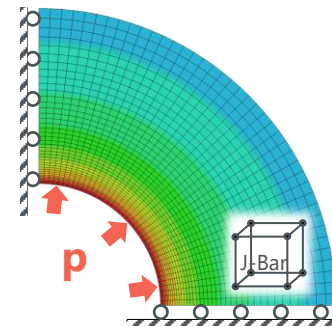
- Integrationsordnung um 1 weniger als voll
- Keine unechten Volumendehnungen
- Hourglass-Stabilisierung



J-Bar-Methode

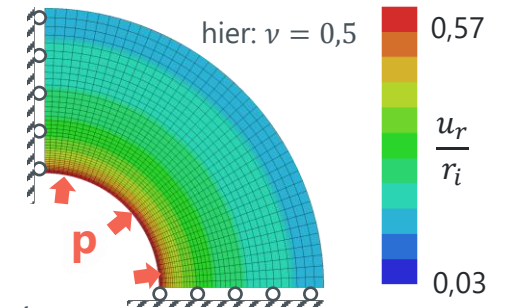
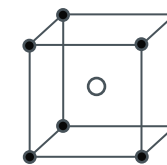
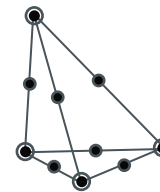
- Elementweise Mittelung der Volumendehnung

$$\tilde{J} := \frac{1}{V^e} \iiint_{V^e} J dV \quad \Psi^{\text{iso}}(\bar{I}_1) + \Psi^{\text{vol}}(\tilde{J})$$



Hybridelementformulierung

- Einführung zusätzlicher Druckfreiheitsgrade
→ Entkoppelung der Druckreaktion von den unechten Volumendehnungen



○ Druckknoten ● Verschiebungsknoten

- LAGRANGE-Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_T & \mathbf{G}_{pu} \\ \mathbf{G}_{up} & -\mathbf{M}_{pp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta F \\ -r_p \end{pmatrix}$$

 Analogie Kontakt

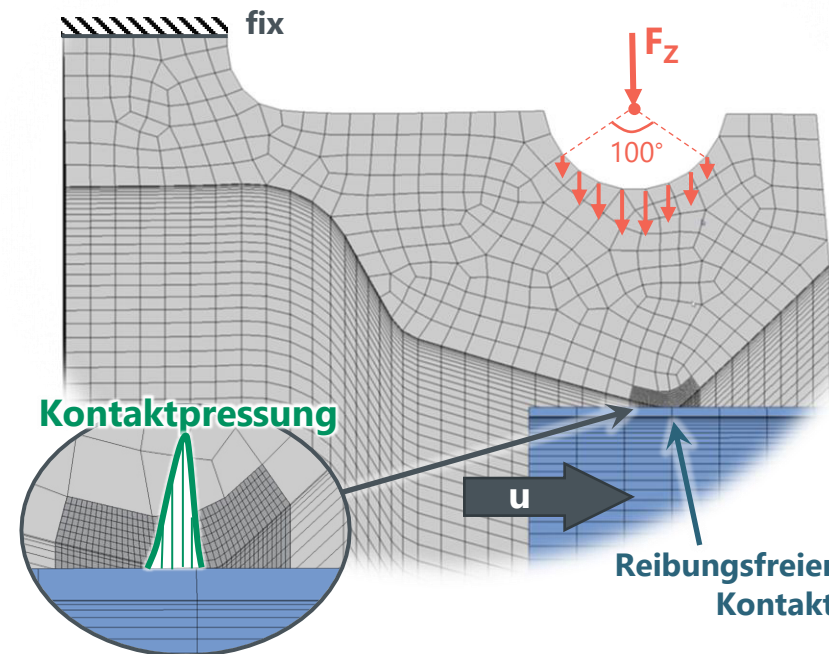


Anwendungsbeispiel

Montage eines Radial-Wellendichtrings

Simmerring® | BAUM | 80 × 100 × 10 mm | 75 FKM 585

FREUDENBERG
SEALING TECHNOLOGIES



- 16MnCr5, 56.5 HRC
- FKM 75 Shore A
- Vergleich verschiedener Materialmodelle



Welle

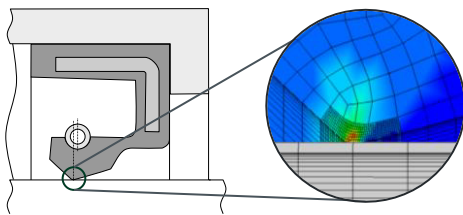


Dichtkante



Dichtlippe

Montage RWDR aus FKM



Lehrstuhl für
Konstruktionslehre und CAD

<https://products.fst.com/eu/de/kategorien/radial-wellendichtring-simmerring-baum/produkte/398029>
<https://www.tib.eu/de/suchen/id/TIBKAT:840937636/RWDR-Dynamik-II-Wechselwirkungsverhalten-der-Systemparameter?cHash=5a5bf6b2cee0875247861ec0482e2919>

JENNEWAIN Dissertation (2016), ISBN:978-3-95974-015-9

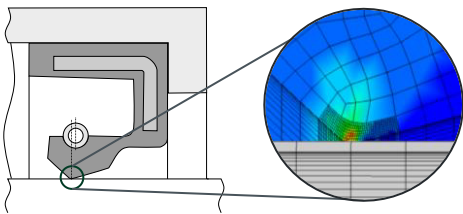
HÜTER Dissertation (2024), ISBN:9783844095333

Anwendungsbeispiel

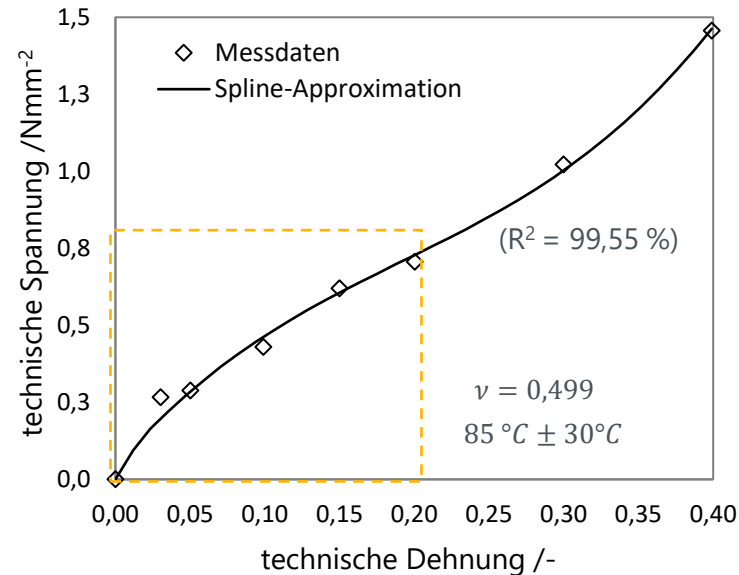
Montage eines Radial-Wellendichtrings

Simmerring® | BAUM | 80 × 100 × 10 mm | 75 FKM 585

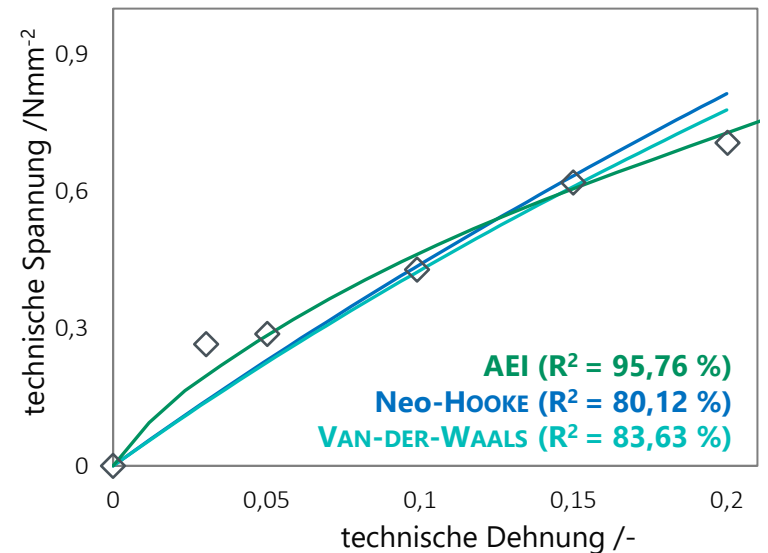
Montage RWDR aus FKM



FKM 75 Shore A



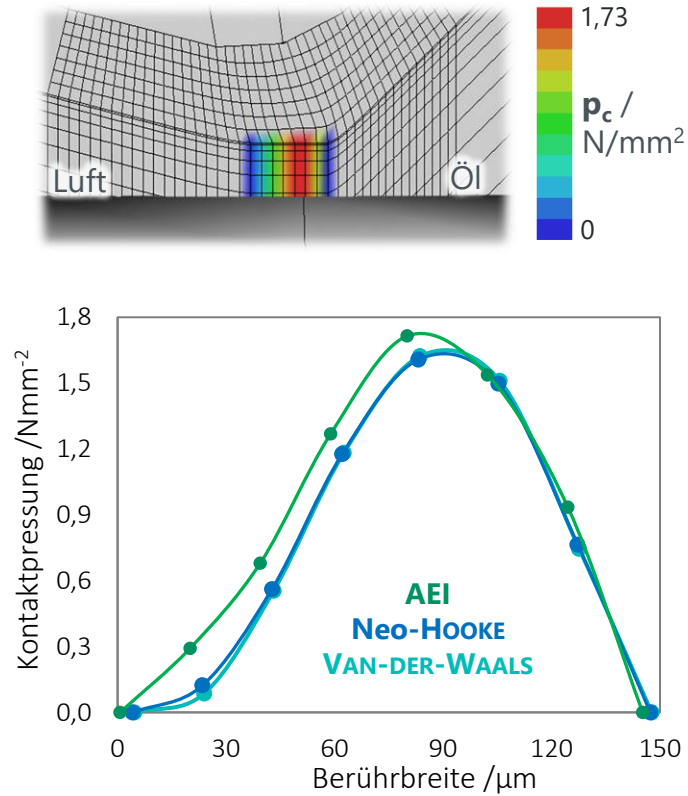
Modellvorhersage



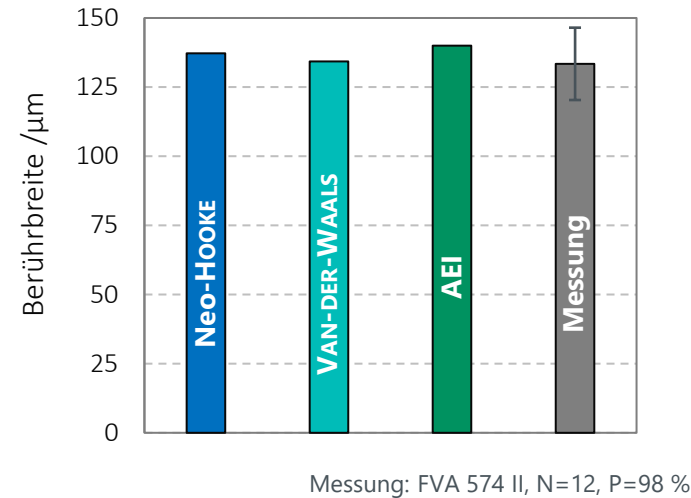
Anwendungsbeispiel

Montage eines Radial-Wellendichtrings

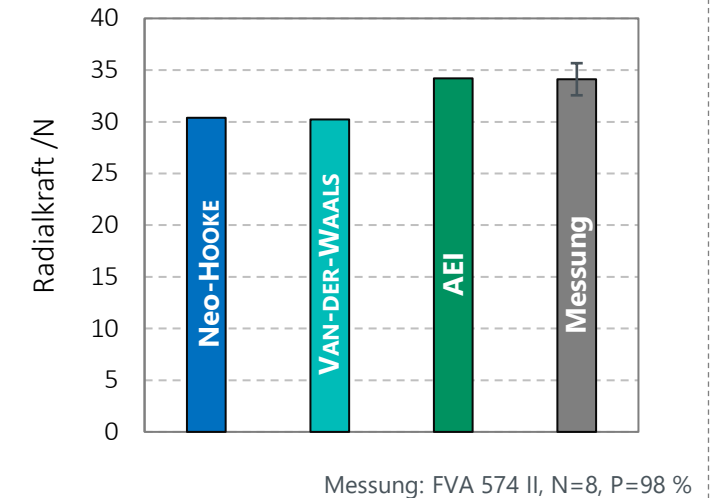
Kontaktpressungsverteilung



Berührbreite



Radialkraft



Abschätzung der Temperaturerhöhung

- Empirischer Ansatz nach ENGELKE:

$$M_R \approx f_{\text{Grenz}} F_R \frac{d_1}{2} + \frac{\pi^2 \eta_{\text{Öl}} n_W \Delta b_c d_1^3}{2 \cdot \sum R_p} \quad \Delta\theta \approx \gamma \cdot \frac{2n_W \cdot M_R}{d_1 \cdot \Delta b_c}$$

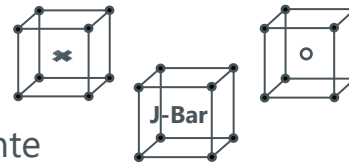
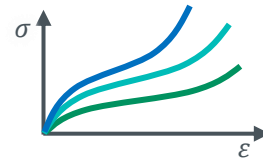
Bei 1.000 U/min:

+20 °C ✓



Zusammenfassung

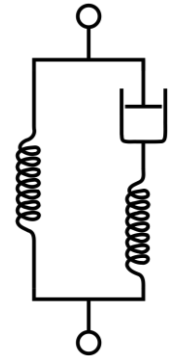
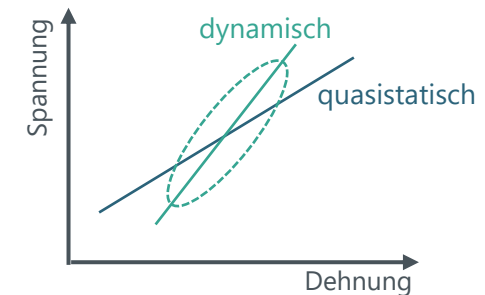
- **Modellierung hyperelastischen Materialverhaltens**
 - Untersuchung und Bewertung verschiedener Materialmodelle
 - Approximationsansätze vs. Interpolationsansätze
 - Entwicklung eines eigenen Materialmodells für Kompressibilität und Mehrachsigkeit
- **FEA von Elastomerbauteilen mit Kontakt**
 - Volumetrische Elementversteifung
 - Abhilfemaßnahmen: Reduzierte Integration, J-Bar, Hybridelemente
- **Validierung anhand eines Anwendungsbeispiels**
 - Montagevorgang eines Radial-Wellendichtrings



Ausblick

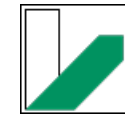
- **Viskoelastizität**
- **FE-Dynamik & Zeitintegration**
- **Temperatureinfluss**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}$$



- BOWER, A.F.: Applied Mechanics of Solids. CRC Press, Boca Raton, 2009.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W.K.; MORAN, B. et al.: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, Chichester, 2014.
- WRIGGERS, P.: Nichtlineare Finite-Element-Methoden. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- BATHE, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden – Aus dem Englischen übersetzt von Peter Zimmermann. Springer, Berlin, 2002.
- BORST, R. de; CRISFIELD, M.A.; REMMERS, J.J.C. et al.: Nichtlineare Finite-Elemente-Analyse von Festkörpern und Strukturen. WILEY-VCH, Weinheim, 2014.
- BERGSTRÖM, J.: Mechanics of Solid Polymers – Theory and Computational Modelling. William Andrew, San Diego, 2015.
- MARLOW, R.S.: A general first-invariant hyperelastic constitutive model. In: BUSFIELD, J.; MUHR, A. (Hrsg.): Constitutive Models for Rubber III – Proceedings of the Third European Conference on Constitutive Models for Rubber. A. A. Balkema Publishers, London, 2003, S. 157-160.
- HÜTER, F.; RIEG, F.: Extending Marlow's general first-invariant constitutive model to compressible, isotropic hyperelastic materials. In: Engineering Computations 38 (2021), Heft 6, S. 2631-2647.
- HOLZAPFEL, G.A.: Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach For Engineering. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2000.
- HÜTER, F.; SINGER, D.: Simulation hyperelastischer Materialien mit Z88 – Kalibrierung hyperelastischer Materialmodelle. In: TREMMEL, S.; ALBER-LAUKANT, B. (Hrsg.): Tagungsband 23. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag am 14. September 2022. Universität Bayreuth, Bayreuth, 2022.
- HÜTER, F.: Hyperelastizität in der FEM – Bewertung der Vorhersagegüte unterschiedlicher Materialmodelle. In: TREMMEL, S.; ALBER-LAUKANT, B.; ROSNITSCHKE, T. (Hrsg.): Tagungsband 24. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag am 19. September 2023. Universität Bayreuth, Bayreuth, 2023.
- HÜTER, F.: Modellbildung und Simulation hyperelastischen Materialverhaltens in der nichtlinearen Finite-Elemente-Analyse, Fortschritte in Konstruktion und Produktion Heft 62, Shaker Verlag, Düren, 2024.
- LAMBERT-DIANI, J.; REY, C.: New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers. In: European Journal of Mechanics - A/Solids 18 (1999), Heft 6, S. 1027-1043.
- RIVLIN, R.S.; SAUNDERS, D.W.: Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. In: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 243 (1951), Heft 865, S. 251-288.
- FLORY, P.J.: Thermodynamic relations for high elastic materials. In: Transactions of the Faraday Society 57 (1961).





UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Florian Hüter, 2024