Die schwache Lösung des dritten Randwertproblems der statischen Elastizitätstheorie in L^q für das Differentialgleichungssystem $\Delta \underline{u} + \lambda \nabla div \underline{u} = div \underline{\underline{f}}$ im beschränkten Gebiet und Außengebiet

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

Alexander Gerlach,
geboren am 23.11.1978 in Hamburg

1. Gutachter: Prof. Dr. C.G. Simader
2. Gutachter: Prof. Dr. H. Sohr

Tag der Einreichung: 18.5.2006
Tag des Kolloquiums: 31.7.2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit wird die Existenz einer schwachen Lösung des dritten Randwertproblems der statischen Elastizitätstheorie in L^q $(1 < q < \infty)$ für die Lamégleichung gezeigt. Diese Gleichung beschreibt die Auslenkung eines linearen, isotropen, homogenen elastischen Mediums unter Einwirkung einer äußeren Kraft im statischen Fall. Für die Randbedingung, auch harter Kontakt genannt, sind die Normalkomponente der Auslenkung und die Tangentialkomponente des Druckvektors am Rand gegeben.

Der Nachweis einer Lösung wurde bereits von Kozhevnikov [Ko2] 1993 mittels der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren für beschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^3$ mit $q = 2$ behandelt. Vorliegende Arbeit zeigt die Existenz einer schwachen Lösung in $\mathbb{R}^n$ sowohl für beschränkte Gebiete als auch für Außengebiete ohne auf die Theorie der Pseudodifferentialoperatoren zurückzugreifen.

Zunächst wird die schwache Lösbarkeit der Lamégleichung für den Fall des oberen Halbraumes und des gesamten $\mathbb{R}^n$ gezeigt. Durch die so erlangten a-priori-Abschätzungen und zugehörigen Regularitätsaussagen können mittels der Piolatransformation die Resultate des gekrümmten Halbraumes auf die des Halbraumes zurückgeführt werden. Die Piolatransformation wird in diesem Falle für den Erhalt der Randbedingung benötigt.

Wegen der Invarianz der schwachen Form der Lamégleichung bezüglich Translation und orthogonaler Transformation ist eine Rückführung der Problemstellung von beschränkten Gebieten und Außengebieten mittels Zerlegung der Eins-Methoden auf Resultate für den gestörten Halbraum und den gesamten $\mathbb{R}^n$ möglich.

Ein Teil der Randbedingungen wird im gewählten Lösungs- bzw. Testraum versteckt (hier: am Rande verschwindende Normalkomponente des Feldes). Der noch fehlende Teil ergibt sich aus der Wahl der zugehörigen Sesquilinearform.

Wenn die gleiche Differentialgleichung mit verschiedenen zusätzlichen Randbedingungen (vgl. I) und II) unten) im Sinne der schwachen Lösungen behandelt werden soll, so sind den Randbedingungen angepasste, unterschiedliche Sequilinearformen zu wählen (vgl. dazu auch Bemerkung 5.3 und 5.4).

Betrachte von nun an die Lamégleichung

$$\Delta \underline{u} + \lambda \nabla div \underline{u} = div \underline{\underline{f}}$$

mit den Randbedingungen

$$\text{I)} \quad \sum_{i,k=1}^{n} \partial_i u_k T_k^{(j)} N_i \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} T_k^{(j)} N_i \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{und} \quad < \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\text{II)} \quad \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i u_k T_k^{(j)} N_i + \partial_k u_i T_k^{(j)} N_i \right] \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik} T_k^{(j)} N_i \Big|_{\partial\Omega} \quad \text{und} \quad < \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0.$$

Hierbei sei $\underline{T}^{(j)}(x) = (T_1^{(j)}(x), ..., T_n^{(j)}(x)),\ j = 1, ..., n-1$ eine Basis im Tangentialraum von $\partial\Omega$ im Punkte x und $\underline{N}(x) = (N_1(x), ..., N_n(x))$ der äußere Normalenvektor in $x \in \partial\Omega$.

Eine schwache Form der Randbedingung

$$< \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0$$

ist

$$\int_\Omega \underline{u} \nabla \Psi dx = -\int_\Omega div \underline{u} \Psi dx \ \forall\ \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Die schwachen Formulierungen obiger Probleme lauten (vgl. Bemerkung 5.3 und 5.4):

Für Randbedingung I: Gesucht ist

$$\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) := \left\{ \underline{v} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega) : \int_\Omega \underline{v} \nabla \Psi dx = -\int_\Omega div \underline{v} \Psi dx \ \forall\ \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

mit ($f_{ik} \in L^q(\Omega),\ i, k = 1, ..., n$ gegeben)

$$\begin{aligned} B_1(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_1, \Omega) : &=< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_\Omega + \lambda_1 < div \underline{u}, div \underline{\Phi} >_\Omega \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega f_{ik} \partial_i \Phi_k dx \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega). \end{aligned} \tag{1}$$

Für Randbedingung II: Gesucht ist

$$\underline{u} \in \underline{Z}^q(\Omega) := \begin{cases} \underline{R}^q \text{ (vgl. Def. 4.18)} & \text{im Falle des beschränkten Gebietes} \\ \\ \underline{Y}^{1,q}(\Omega) & \text{im Falle des Außengebietes} \end{cases}$$

mit (für $\epsilon(\underline{u})$ vgl. Def. 2.2)

$$\begin{aligned} B_2(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \Omega) :&= \frac{1}{2} < \epsilon(\underline{u}), \epsilon(\underline{\Phi}) >_\Omega + (\lambda_2 - 1) < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_\Omega \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega f_{ik} \partial_i \Phi_k dx \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega). \end{aligned} \tag{2}$$

Die schwache Form der Randbedingung ($< \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0$) ist dabei in der Definition des Raumes $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ bzw. $\underline{Z}^q(\Omega)$ enthalten, die andere ergibt sich durch die Wahl der Sesquilinearform (vgl. Bemerkung 5.3 und 5.4).

Ausgangspunkt für diese Fragestellung war die Arbeit [Si2], in der

$$-\Delta\underline{u} + \nabla p = div\underline{\underline{f}} \text{ und } div\underline{u} = 0$$

im oberen Halbraum $H := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x_n > 0,\ n \geq 2\}$ mit der Randbedingung II behandelt wurde.

Zunächst wird eine Lösung von (1) in H gesucht. Dafür sei mit $1 < q < \infty$

$$\underline{X}_G^{1,q}(H) := \left\{ L_G^{1,q}(H), ..., L_G^{1,q}(H), \hat{H}_0^{1,q}(H) \right\}$$

(für die Räume $\underline{L}_G^{1,q}(H)$ bzw. $\hat{H}_0^{1,q}(H)$ vergleiche Definition 1.2).

Ausgestattet mit der Norm $\|\nabla.\|_{q,H}$ ist $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ ein reflexiver Banachraum.
Weiter sei $q' := \frac{q}{q-1}$ der zu q duale Exponent.

Als Erstes wird für alle $1 < q < \infty$ die Variationsungleichung

$$\|\nabla\underline{u}\|_{q,H} \leq C \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H}} \text{ für alle } \underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$$

mittels der jeweiligen Resultate bezüglich $L_G^{1,q}(H)$ bzw. $\hat{H}_0^{1,q}(H)$ ([Si2] Corollary 3.15 und Corollary 3.6) gezeigt. Diese Variationsungleichung ist äquivalent (Satz 2.1) zur Lösbarkeit der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}&< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >= F^*(\underline{\Phi}) \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)\\ &\text{mit } \underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H) \text{ und } F^* \in \underline{X}_G^{1,q}(H)^*.\end{aligned} \tag{3}$$

Im nächsten Schritt (Satz 2.6) wird gezeigt, dass eine Lösung von

$$\begin{aligned}&< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >=< p, div\underline{\Phi} > \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)\\ &\text{mit } \underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H) \text{ und } p \in L^q(H)\end{aligned} \tag{4}$$

existiert, für die gilt:

$$div\underline{u}|_H = p \text{ und } \|\nabla \underline{u}\|_{q,H} \leq n2^{\frac{1}{q'}} C \|p\|_{q,\mathbb{R}^n}$$

Wegen (3) und (4) ist es nun möglich für $\lambda_1 \neq -1$ eine Lösung der Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}&B_1(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_1, H) = F^*(\underline{\Phi}) \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)\\ &\text{mit } \underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H) \text{ und } F^* \in \underline{X}_G^{1,q}(H)^*\end{aligned} \tag{5}$$

zu konstruieren.
Auf ähnliche Weise kann die folgende Regularitätsaussage gezeigt werden.

Aus $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$ mit $1 < r < \infty$ und

$$\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} < \infty$$

folgt $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.

Für alle $1 < s < \infty$ ist hierbei $\underline{D}_G(H)$ ein dichtliegender Raum von $\underline{X}_G^{1,s}(H)$.

Das analoge Regularitätsargument in $\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ kann ebenso wie die Existenz einer Lösung der Funktionalgleichung

$$B_1(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_1, \mathbb{R}^n) = F^*(\underline{\Phi}) \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{mit } \underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n) \text{ und } F^* \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)^*$$

bewiesen werden.

Wegen (Lemma 2.17)

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_i u_k \partial_k \Phi_i dx =< div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$$

und

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i v_k \partial_k \Psi_i dx =< div\underline{v}, div\underline{\Psi} >_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } \underline{\Psi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$$

gilt das Regularitätsargument sowie die Funktionaldarstellung ebenfalls für $B_2(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_2, H)$ beziehungsweise $B_2(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \mathbb{R}^n)$.

Um nun die Funktionalgleichung für $\tau = 1, 2$

$$B_\tau(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H_\omega) = F^*(\underline{\Phi}) \tag{6}$$

im gestörten Halbraum H_ω zu lösen, war der erste Gedanke, durch normales Glattziehen mittels des Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} &y : H_\omega \to H \text{ mit} \\ &\quad y_i(x) := x_i \quad \text{für alle } x \in H_\omega \text{ und } i = 1, ..., n-1 \\ &\quad y_n(x) := x_n - \omega(x')\rho_\xi(x_n) \text{ für alle } x \in H_\omega \end{aligned}$$

und der Umkehrabbildung $x : H \to H_\omega$ die Lösbarkeit von (5) zu nutzen.

Doch bei der zugehörigen Transformation $\tilde{T}(\underline{v}) := \underline{v}(x(y))$, $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(H_\omega)$, geht i.A. die schwache Form der Randbedingung

$$\int\limits_{H_\omega} \underline{v} \nabla \Phi dx = - \int\limits_{H_\omega} div \underline{v} \Phi dx \text{ für alle } \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

in H verloren.

Die Piolatransformation

$$T(\underline{v})(y) := (detDx)(y) D\underline{v}(x(y))$$

hilft in dieser Situation weiter, da hier die Bedingung (7) durch die Transformation nicht verändert wird (siehe dazu Lemma 3.15).

Durch diese Transformation treten nun neben (in Abbhängigkeit von $\|\omega\|_\infty$ und $\|\nabla\omega\|_\infty$) „kleinwerdenden“ zusätzlich kompakte Störungen der Sesquilinearform auf. Die zu (6) zugehörige Variationsungleichung kann aber durch Nutzung der Kompaktheit dieser zusätzlichen Störungen gezeigt werden (Satz 3.31).

Eine wichtige Voraussetzung des Satzes 3.31 ist die Eindeutigkeit der Lösung von (6) (Lemma 3.30). Im Beweis dieses Lemmas wird auch die Einschränkung von $\lambda_1 > -\frac{1}{n}$ beziehungsweise $\lambda_2 \geq 1$ erkennbar.

Ist $\underline{p} \in T(\underline{X}_G^{1,2}(H))$ und für $\tau = 1, 2$

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H_\omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi} \in T(\underline{X}_G^{1,2}(H)),$$

so erhält man im Fall $\tau = 1$:

$$\left\|\nabla T(\underline{p})\right\|_{2,H_\omega}^2 + \lambda_1 \left\|divT(\underline{p})\right\|_{2,H_\omega}^2 = 0$$

Für $\lambda_1 > -\frac{1}{n}$ folgt daraus $\underline{p} = 0$.

Im Fall $\tau = 2$ folgt $\underline{p} = 0$, falls $\lambda_2 \geq 1$ ist.

Ist $\underline{p} \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit $q > 2$ und für $\tau = 1,2$ gilt $B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H_\omega) = 0$ für alle $\underline{\Phi} \in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))$, so erhält man $\underline{p} \in T(\underline{X}_G^{1,2}(H))$ durch Zurückführung des Problems auf H und die Benutzung der Regularitätsaussage in H.

Im Falle $q < 2$ folgt durch sukzessives Anwenden der Sobolevungleichungen $\underline{p} \in T(\underline{X}_G^{1,2}(H))$.

Für die Lösung von

$$B_\tau(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = F^*(\underline{\Phi})$$

für ein beschränktes Gebiet oder Außengebiet Ω kann der Rand des Gebietes lokal durch eine Translation und eine orthogonale Transformation auf den Fall des gestörten Halbraumes zurückgeführt werden.
Mittels Zerlegung der Eins-Methoden folgen dann schließlich die gewünschten a-priori-Abschätzungen.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Professor Simader für die intensive Zusammenarbeit, die vielen Anregungen und die zahlreichen Hilfestellungen während der gesamten Entstehungszeit dieser Dissertation bedanken.

Mein großer Dank gilt meiner Verlobten, die mich während dieser Zeit immer unterstützt und gerade in schwierigen Zeiten fest an meiner Seite gestanden hat.

Bayreuth, im Mai 2006

Alexander Gerlach

1 Notationen und Vorbereitungen

Notationen 1.1.

Wir betrachten im folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ *mit* $n \geq 2$.
Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset\subset B$ *ist definiert als* $A \subset B$ *offen,* $\overline{A} \subset B$ *und* $\overline{A}$ *kompakt.*

Wir schreiben Ω *(BG), falls* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes Gebiet (d.h. offen und bogenweise zusammenhängend) ist.*

Wir schreiben Ω *(AG), falls* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Außengebiet ist, d.h.* Ω *ist offen, zusammenhängend und es existiert ein* $K \subset \mathbb{R}^n$ *mit folgenden Eigenschaften:*

$$K \subset\subset \mathbb{R}^n,\ 0 \in K \text{ und } \Omega = \mathbb{R}^n \backslash \overline{K} \tag{1.1.1}$$

Für ein Außengebiet sei

$$R_0(\Omega) := \inf\{R > 0 : \overline{K} \subset B_R\}. \tag{1.1.2}$$

Seien $v_k, g_{ik} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Funktionen für alle* $i, k = 1, ..., n$.
So sei $\underline{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *der Vektor* $\underline{v} = (v_1, ..., v_n)$ *mit den Komponenten* v_k
und $\underline{\underline{g}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *die Matrix* $\underline{\underline{g}} = (g_{ik})$ *mit den Elementen* g_{ik}.

Ist $1 < q < \infty$, *so sei* $q' := \dfrac{q}{q-1}$ *der zu* q *duale Exponent.*

Im folgenden sei für $R > 0$, *und* $x \in \mathbb{R}^n$
$B_R(x) := \{z \in \mathbb{R}^n : |z - x| < R\}$,
$B_R := B_R(0)$ *und sei*
$B_R^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R,\ x_n > 0\}$.

Für $x \in \mathbb{R}^n$ *sei* $x' := (x_1, ..., x_{n-1})$, *also*$x = (x', x_n)$.

Definition 1.2.

Sei $1 < q < \infty$ *und sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet mit* $\partial M \in C^0$. *Für* $m \in \mathbb{N}$ *setzen wir:*

$$
\begin{aligned}
&H^{m,q}(M) := \{u \in L^q(M) : \exists\, D^\alpha u \in L^q(M)\ \forall\, |\alpha| \leq m\} \\
&L^{m,q}(M) := \left\{v \in L^1_{loc}(M) : \exists\, D^\alpha v \in L^q(M)\ \forall\, |\alpha| = m\right\} \\
&L^{m,q}_G(M) := \left\{ v \in L^{m,q}(M) : \int_G D^\alpha v dx = 0\ \forall\ |\alpha| \leq m-1 \right\} \text{ mit } 0 \neq G \subset\subset M \\
&\underline{L}^{1,q}_G(\mathbb{R}^n) := \left\{\underline{v} : v_i \in L^{1,q}_G(\mathbb{R}^n)\ \forall\, i = 1, ..., n\right\} \text{ mit } 0 \neq G \subset\subset \mathbb{R}^n \\
&\underline{Y}^{1,q}(M) := \left\{ \underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(M) : \int_M \underline{u} \nabla \Psi dx = - \int_M div \underline{u} \Psi dx\ \forall\ \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}
\end{aligned}
$$

Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^n$ *mit* $x_n > 0,\ n \geq 2\}$ *der obere Halbraum und*
$H_- := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n < 0,\ n \geq 2\}$ *der untere Halbraum.*

Weiter seien:

$$
\begin{aligned}
\hat{H}^{1,q}_0(M) := \{ & v : M \to \mathbb{R} \text{ messbar, } v \in L^q(M \cap B_r) \text{ für alle } r > 0, \\
& \nabla u \in L^q(M)^n \text{ und es existiert eine Folge } (v_k) \subset C_0^\infty(M), \text{ so dass} \\
& \left\|v - v_k\right\|_{q, M \cap B_r} + \left\|\nabla(v - v_k)\right\|_{q,M} \to 0 \text{ für jedes } r > 0 \text{ und } k \to \infty \Big\} \\
\underline{X}^{1,q}_G(H) := \Big\{ & \underline{v} : v_i \in L^{1,q}_G(H)\ \forall\, i = 1, ..., n-1,\ v_n \in \hat{H}^{1,q}_0(H) \Big\} \text{ mit } 0 \neq G \subset\subset H
\end{aligned}
$$

Bemerkung 1.3.

a) *Für* $v \in L^{m,q}(M)$ *zeigt man, dass für* $|\beta| \leq m-1$ *die schwachen Ableitungen* $D^\beta v \in L^q_{loc}(M)$ *existieren (Beweis siehe [Si1] Theorem 3.1).*

b) *Für* $v \in L^{1,q}(H)$ *gilt sogar*
$v \in \left\{u : H \to \mathbb{R}\ \text{messbar und}\ u|_{A \cap H} \in L^q(A \cap H) \text{ für jedes kompakte } A \subset \bar{H}\right\}$
(Beweis siehe [Si2] Lemma 3.9).

c) $\underline{Y}^{1,q}(M)$ *ist wohldefiniert, da aus [Si1] Theorem 4.3 folgt für* $\underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(M)$ *ist* $\underline{u} \in \underline{L}^q(M \cap B_R)$ *für alle* $R > 0$.

d) *Es gilt:* $C_0^\infty(M) \subset H^{1,q}(M)$

Lemma 1.4.

Sei Ω (AG)/(BG), $K_i \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$.

Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) erklärt und weiter seien:

$$M := \overline{\Omega} \backslash \bigcup_{i=1}^{m} K_i \text{ falls } \Omega \text{ (BG)}$$

und

$$\tilde{M} := \left(\overline{\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)}}\right) \backslash \bigcup_{i=1}^{m} K_i \text{ falls } \Omega \text{ (AG)}$$

Dann gilt $M, \tilde{M} \subset \Omega$ und $M, \tilde{M}$ sind kompakt.

Beweis.

Es ist $M = \overline{\Omega} \cap \bigcap\limits_{i=1}^{m} \underbrace{\complement K_i}_{abgeschlossen}$ abgeschlossen und $M \subset \overline{\Omega}$ beschränkt.

Daher gilt: M ist kompakt.

Wegen $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i$ ist $\complement\partial\Omega \supset \complement\left(\bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} \complement K_i$.

Also ist $M \cap \partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \partial\Omega \cap \bigcap\limits_{i=1}^{m} \complement K_i \subset \overline{\Omega} \cap \underbrace{\partial\Omega \cap \complement\partial\Omega}_{=\emptyset}$.

Wegen $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$ und $M \subset \overline{\Omega}$ ist nun $M = M \cap \overline{\Omega} = M \cap \Omega \cup \underbrace{M \cap \partial\Omega}_{=\emptyset} \subset \Omega$.

□

Lemma 1.5.

Sei $1 < q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, und Ω (AG)/(BG) mit $\partial\Omega \in C^0$. Weiter sei $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und $\underline{u} \equiv \underline{c} \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist $\underline{u} = \underline{0}$.

Beweis.

Für alle $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$0 = -\int\limits_{\Omega} div\underline{u}\Psi dx = \int\limits_{\Omega} \underline{c}\nabla\Psi = \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \Psi dx$$

Sei nun $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, dann gilt $\phi(Sx) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und damit $\Psi(x) := \phi(Sx) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Es ist $\partial_i \Psi(x) = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(Sx) s_{ki}$ und

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \partial_i \Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(Sx) s_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(Sx) \sum_{i=1}^{n} c_i s_{ki}.$$

Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(Sx) \sum_{i=1}^{n} c_i s_{ki} dx \\
&\underset{Trafo}{=} \int_{S(\Omega)} \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(y) \sum_{i=1}^{n} c_i s_{ki} \underbrace{|\det(DS^t(y))|}_{=1} dy \\
&= \int_{S(\Omega)} \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \phi)(y) (S\underline{c})_k dy
\end{aligned}$$

Zu jedem $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ existiert ein $S \in O(n, \mathbb{R})$ mit $S\underline{c} = |c|\underline{e}_n$, wobei $\underline{e}_n$ der n-te Einheitsvektor ist.

Sei Ω (BG) :
Sei ohne Einschränkung $0 \in \Omega$ und sei $B'_\epsilon := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x' - 0'| < \epsilon \right\}$.
Da Ω offen ist, existiert ein $1 > \epsilon > 0$ mit $B'_\epsilon \times\,]-\epsilon, \epsilon[\, \subset S(\Omega)$.
Sei nun $\varphi_r \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi_r(t) \le 1,\ r > 4$ und

$$\varphi_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \le -1 \quad \text{und} \quad t \ge r+1 \\ 1 & \text{für} \quad t \ge 1 \quad \text{und} \quad t \le r-1 \end{cases}.$$

Ω ist ein beschränktes Gebiet. Daraus folgt: $S(\Omega)$ ist beschränkt.
Deshalb existiert ein $r' > 0$ mit $S(\Omega) \subset B_{r'}$.
Sei $\phi(y) := j_\epsilon(y') \varphi_{r''}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $r'' := \frac{r'}{\epsilon} + 4$
wobei $j_\epsilon \in C_0^\infty(B_\epsilon(0))$ den Glättungskern der Friedrichsschen Glättung bezeichnet.

Wegen $supp(\partial_n \phi) \subset B'_\epsilon(0') \times \,]-\epsilon, \epsilon\,[$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S(\Omega)} \partial_n \phi(y) dy &= \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{B'_\epsilon(0') \times]-\epsilon,\epsilon[} j_\epsilon(y') \varphi'_{r''}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) dy \\
&\underset{Fubini}{=} \underbrace{\int\limits_{B'_\epsilon(0')} j_\epsilon(y') dy'}_{=1} \; \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi'_{r''}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) dy_n \\
&= \int_{-1}^{1} \varphi'_{r''}(t) dt = \varphi_{r''}(1) - \varphi_{r''}(-1) = 1
\end{aligned}$$

Da aber $|c| \int\limits_{S(\Omega)} \partial_n \phi(y) dy = 0$ ist, folgt: $|c| = 0$

Daraus folgt $\underline{u} = \underline{c} = \underline{0}$.

Sei Ω (AG) :

Sei ohne Einschränkung $0 \in K$ mit K aus (1.1.1).

Dann existiert ein $1 > \epsilon > 0$ mit $B'_\epsilon(0') \times \,]-\epsilon, \epsilon\,[\subset K$. Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) definiert. Für $R' := R_0(\Omega) + 4$ gilt $B'_\epsilon(0') \times \,]-\epsilon + R', \epsilon + R'\,[\subset \Omega$.

Weiter sei

$$\tilde{\Phi}(y) := j_\epsilon(y') \varphi_{\frac{R'}{\epsilon}}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.5.1}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S(\Omega)} \partial_n \tilde{\phi}(y) dy &= \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{B'_\epsilon(0') \times]-\epsilon+R',\epsilon+R'[} j_\epsilon(y') \varphi'_{\frac{R'}{\epsilon}}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) dy \\
&\underset{Fubini}{=} \underbrace{\int\limits_{B'_\epsilon(0')} j_\epsilon(y') dy'}_{=1} \; \frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon+R'}^{\epsilon+R'} \varphi'_{\frac{R'}{\epsilon}}\left(\frac{y_n}{\epsilon}\right) dy_n \\
&= \int_{-1+\frac{R'}{\epsilon}}^{1+\frac{R'}{\epsilon}} \varphi'_{\frac{R'}{\epsilon}}(t) dt = \varphi_{\frac{R'}{\epsilon}}\left(1 + \frac{R'}{\epsilon}\right) - \varphi_{\frac{R'}{\epsilon}}\left(-1 + \frac{R'}{\epsilon}\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Da aber $|c| \int\limits_{S(\Omega)} \partial_n \tilde{\phi}(y)dy = 0$ ist, folgt: $|c| = 0$

Daraus folgt $\underline{u} = \underline{c} = \underline{0}$.

$\square$

Korollar 1.6.

Sei $1 < q < \infty, \Omega$ sei (AG) mit $\partial\Omega \in C^0$.
Weiter sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) erklärt und $R \geq R_0(\Omega) + 2$.
Sei $\underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega \cap B_R)$ und $\int\limits_{\Omega\cap B_R} \underline{u}\nabla\Psi dx = - \int\limits_{\Omega\cap B_R} div\underline{u}\Psi dx$ für alle $\Psi \in C_0^\infty(B_R)$.

Dann folgt ebenfalls aus $\underline{u} \equiv \underline{c} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} = \underline{0}$.

Beweis.

$\tilde{\phi}(y)$ aus (1.5.1) ist ebenfalls aus $C_0^\infty(B_R)$. Deshalb folgt die Aussage des Korollars analog.

$\square$

Definition 1.7.

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $1 < q < \infty$ setzen wir:

$$\|\nabla v\|_{q,H} := \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{H} |\partial_i v|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{für } v \in L^{1,q}(H) \textit{ oder } v \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$$

$$\|\underline{z}\|_{q,G} := \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{G} |z_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{für } \underline{z} \in \underline{L}^q(G)$$

$$\left\|\underline{\underline{g}}\right\|_{q,G} := \left(\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{G} |g_{ik}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{für } \underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{L}}^q(G)$$

$$\|\nabla\underline{u}\|_{q,G} := \left(\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{G} |\partial_i u_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{für } \underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(G)$$

$$\|p\|_{1,q,G} := \left(\|p\|_{q,G}^q + \|\nabla p\|_{q,G}^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{für } p \in H^{1,q}(G)$$

Für beschränktes $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$ sei $\|\phi\|_\infty := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi(x)|$.

Lemma 1.8.

Sei $1 < q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *und* Ω*(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^0$.

Dann ist a) $\|\nabla.\|_{q,\Omega}$ *Norm auf* $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$
und b) $\|\nabla.\|_{q,H}$ *Norm auf* $L_G^{1,q}(H)$ *und* $\hat{H}_0^{1,q}(H)$.

Beweis.

a) Aus $\underline{0} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ folgt $\|\nabla\underline{u}\|_{q,\Omega} = \underline{0}$.
Aus $\|\nabla\underline{u}\|_{q,\Omega} = \underline{0}$ folgt $\underline{u} = \underline{c}$, da Ω zusammenhängend ist. Weiter gilt wegen Lemma 1.5 $\underline{u} = \underline{0}$. Die restlichen Eigenschaften folgen trivial.

b) Mit [Na/Si] Lemma 4.1 und [Si2] Theorem 3.2 folgt die Behauptung.

□

Lemma 1.9.

Die Räume $(\underline{X}_G^{1,q}(H), \|\nabla.\|_{q,H})$, $(\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n), \|\nabla.\|_{q,\mathbb{R}^n})$
sind reflexive Banachräume.

Beweis.

Sei $f : \underline{X}_G^{1,q}(H) \rightarrow \underline{\underline{L}}^q(H)$ mit $f(\underline{\Phi}) \rightarrow \nabla\underline{\Phi}$. Es ist $\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H} = \|f(\underline{\Phi})\|_{q,H}$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$. Daher ist $(\underline{X}_G^{1,q}(H), \|\nabla.\|_{q,H})$ isometrisch isomorph zu $(f(\underline{X}_G^{1,q}(H)), \|.\|_{q,H})$. $f(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ ist abgeschlossener Unterraum von $\underline{\underline{L}}^q(H)$, da $L_G^{1,q}(H)$ und $\hat{H}_0^{1,q}(H)$ vollständig sind.

Durch die Reflexivität von $\underline{\underline{L}}^q$ erhält man nun mit [Al] Lemma 5.8, die Reflexivität von $f(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ und weiter mit [Al] Lemma 5.9 folgt, dass $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ reflexiv ist.

Analog erhält man die Reflexivität von $\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.
Mit [Si1] Theorem 3.4 folgt dann die Behauptung.

□

Lemma 1.10.

Sei $1 < q < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *und sei* Ω*(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^0$.
Sei $R_0(\Omega)$ *wie in (1.1.2) erklärt,* $R > R_0(\Omega) + 2$ *und seien weiter:*
$\tilde{\Omega} := \Omega$ *falls* Ω *(BG) und* $\tilde{\Omega} := \Omega \cap B_R$ *falls* Ω *(AG)*

Dann existiert ein $C = C(\tilde{\Omega}, q) > 0$ *mit* $\|\underline{u}\|_{q,\tilde{\Omega}} \leq C\, \|\nabla \underline{u}\|_{q,\tilde{\Omega}}$ *für alle* $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Beweis.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann existiert eine Folge $(\underline{u}_\nu) \subset \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ mit $\|\underline{u}_\nu\|_{q,\tilde{\Omega}} = 1$ und $\|\nabla \underline{u}_\nu\|_{q,\tilde{\Omega}} \to 0$.

Für alle $k = 1, ..., n$ sei $u_\nu^{(k)}$ die k-te Komponente von $\underline{u}_\nu$.
Weiter sei $c_\nu^{(k)} := \dfrac{1}{|\tilde{\Omega}|} \displaystyle\int_{\tilde{\Omega}} u_\nu^{(k)}$. Mit der Hölderungleichung folgt dann:

$$\left|c_\nu^{(k)}\right| \leq \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} \underbrace{\left\|u_\nu^{(k)}\right\|_{q,\tilde{\Omega}}}_{\leq 1} \left|\tilde{\Omega}\right|^{\frac{1}{q'}} \leq \left|\tilde{\Omega}\right|^{-\frac{1}{q}}$$

Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $c_{\nu_j}^{(k)}$ mit $c_{\nu_j}^{(k)} \to c^{(k)}$.
Sei nun $v_j^{(k)} := u_{\nu_j}^{(k)} - c_{\nu_j}^{(k)}$.

Dann gilt:

$$\int_{\tilde{\Omega}} v_j^{(k)} = 0 \tag{1.10.1}$$

Mittels der Poincaréungleichung folgt dann :

$$\left\|v_j^{(k)} - v_l^{(k)}\right\|_{q,\tilde{\Omega}} \leq C_p \left\|\nabla\left(v_j^{(k)} - v_l^{(k)}\right)\right\|_{q,\tilde{\Omega}} = C_p \left\|\nabla\left(u_j^{(k)} - u_l^{(k)}\right)\right\|_{q,\tilde{\Omega}} \to 0$$

Daraus folgt die Existenz von $v^{(k)} \in L^q(\tilde{\Omega})$ mit $\left\|v^{(k)} - v_j^{(k)}\right\|_{q,\tilde{\Omega}} \to 0$.

Für alle $\Phi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ und $i, k = 1, ..., n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\tilde{\Omega}} v^{(k)} \partial_i \Phi dx &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} v_j^{(k)} \partial_i \Phi dx \\
&= -\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \partial_i v_j^{(k)} \Phi dx \\
&= -\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \partial_i u_{\nu_j}^{(k)} \Phi dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\partial_i v^{(k)} = 0$ und damit $d_k := v^{(k)} = const$ für alle $k = 1, ..., n$. Wegen (1.10.1) ist $\int\limits_{\tilde{\Omega}} v_j^{(k)} = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Mittels der Hölderungleichung folgt dann

$$|d_k| \left|\tilde{\Omega}\right| \le \left| \int\limits_{\tilde{\Omega}} v^{(k)} dx \right| = \left| \int\limits_{\tilde{\Omega}} v^{(k)} - v_j^{(k)} dx \right| \le \underbrace{\left|\tilde{\Omega}\right|^{\frac{1}{q'}}}_{<\infty} \left\| v^{(k)} - v_j^{(k)} \right\|_{q,\tilde{\Omega}} \to 0$$

und weiter $\underline{v} := \sum_{k=1}^{n} v^{(k)} e_k = 0$.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left\| u_{\nu_j}^{(k)} - u_{\nu_l}^{(k)} \right\|_{q,\tilde{\Omega}} &= \left\| v_j^{(k)} + c_{\nu_j}^{(k)} - v_l^{(k)} - c_{\nu_l}^{(k)} \right\|_{q,\tilde{\Omega}} \\
&\le \left\| v_j^{(k)} - v_l^{(k)} \right\|_{q,\tilde{\Omega}} + \left| c_{\nu_j}^{(k)} - c_{\nu_l}^{(k)} \right| \left|\tilde{\Omega}\right|^{\frac{1}{q}} \to 0
\end{aligned}$$

Daher existiert ein $u^{(k)} \in L^q(\tilde{\Omega})$ mit $u^{(k)} = \lim_{j\to\infty} u_{\nu_j}^{(k)}$ und $\left\| u^{(k)} \right\|_{q,\tilde{\Omega}} = 1$. Es gilt $u^{(k)} = \lim_{j\to\infty} v_j^{(k)} - c_{\nu_j}^{(k)} = v^{(k)} - c^{(k)}$. Daraus folgt $u^{(k)} = const$ und damit $\underline{u} := \sum_{k=1}^{n} u^{(k)} e_k = const$ für alle $k = 1, ..., n$.

Für alle $\Phi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ und $i, k = 1, ..., n$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\tilde{\Omega}} u^{(k)} \partial_i \Phi dx &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} u_j^{(k)} \partial_i \Phi dx \\
&= -\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \partial_i u_j^{(k)} \Phi dx \\
&= -\int\limits_{\tilde{\Omega}} \underline{0} \Phi dx
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\partial_i u^{(k)} = 0 \text{ und } \underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(\tilde{\Omega}) \tag{1.10.2}$$

Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) erklärt und sei $R > R_0(\Omega) + 2$.
Sei $M := \mathbb{R}^n$ falls Ω (BG) und $M := B_R$ falls Ω (AG).

Mittels der Hölderungleichung gilt für alle $\Psi \in C_0^\infty(M)$:

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} (\underline{u} - \underline{u}_j) \nabla \Psi dx \leq \underbrace{\left\| \underline{u} - \underline{u}_j \right\|_{q,\tilde{\Omega}}}_{\to 0} \underbrace{\left\| \nabla \Psi \right\|_{q',\tilde{\Omega}}}_{\leq C}$$

und

$$\int\limits_{\tilde{\Omega}} div(\underline{u} - \underline{u}_j) \Psi dx \leq \underbrace{\left\| \nabla(\underline{u} - \underline{u}_j) \right\|_{q,\tilde{\Omega}}}_{\to 0} \underbrace{\left\| \Psi \right\|_{q',\tilde{\Omega}}}_{\leq C}$$

Für alle $\Psi \in C_0^\infty(M)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\tilde{\Omega}} \underline{u} \nabla \Psi dx &= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} \underline{u}_j \nabla \Psi dx \\
&= -\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{\Omega}} div \underline{u}_j \Psi dx \\
&= -\int\limits_{\tilde{\Omega}} div \underline{u} \Psi dx
\end{aligned}$$

Aus (1.10.2) folgt $\underline{u} = const.$
Mit Lemma 1.5 für Ω (BG) und Korollar 1.6 für Ω (AG) folgt dann $\underline{u} = 0$.
Dieses steht aber im Widerspruch zu $\|\underline{u}\|_{q,\tilde{\Omega}} = 1$.

$\square$

Definition 1.11.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.
Für ein meßbares $v : M \to \mathbb{R}$ erklären wir den Träger durch
$supp(v) := M \setminus \left\{ x \in M : \exists\, \epsilon > 0,\ \text{so dass } B_\epsilon(x) \subset M \text{ und } v|_{B_\epsilon(x)} = 0 \text{ f.ü.} \right\}.$

Lemma 1.12.

Sei $1 < q < \infty$ und sei Ω (AG)/(BG) mit $\partial\Omega \in C^0$.
Dann ist $(\underline{Y}^{1,q}(\Omega), \|\nabla .\|_{q,\Omega})$ ein reflexiver Banachraum.

Beweis.

Nach [Si1] Theorem 3.5 folgt, dass $\underline{L}^{1,q}(\Omega)$ ein linearer Vektorraum ist.
Sei $\underline{u}, \underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega),\ \mu \in \mathbb{R}$. Es ist:

$$\int_\Omega (\mu\underline{u} + \underline{v})\nabla\Psi dx = \mu\int_\Omega \underline{u}\nabla\Psi dx + \int_\Omega \underline{v}\nabla\Psi dx = -\mu\int_\Omega div\underline{u}\Psi dx - \int_\Omega div\underline{v}\Psi dx$$
$$= -\int_\Omega div(\mu\underline{u} + \underline{v}))\Psi dx \text{ für alle } \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Daraus folgt die Linearität von $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Zeige nun die Vollständigkeit von $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ bezüglich $\|\nabla .\|_{q,\Omega}$.

Sei $\underline{u}_\nu \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ mit $\|\nabla(\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu)\|_{q,\Omega} \to 0$.

Sei Ω (BG) :
Mit Lemma 1.10 und $C > 0$ gilt:

$$\left\|\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu\right\|_{q,\Omega} \leq C \left\|\nabla(\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

Somit folgt die Existenz eines $\underline{u} \in L^q(\Omega)$ mit:

$$\|\underline{u} - \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega} \to 0 \tag{1.12.1}$$

Aus $\left\|\partial_i \underline{u}_\nu - \partial_i \underline{u}_\mu\right\|_{q,\Omega} \to 0$, folgt die Existenz eines $\underline{f}_i \in \underline{L}^q(\Omega)$ mit:

$$\left\|\underline{f}_i - \partial_i \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega} \to 0 \text{ für alle } i = 1, ...n$$

Für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \underline{u} \partial_i \phi dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \underline{u}_\nu \partial_i \phi dx = -\lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega \partial_i \underline{u}_\nu \phi dx = -\int_\Omega \underline{f}_i \phi dx$$

Daher gilt:

$$\partial_i \underline{u} = \underline{f}_i \text{ und } \|\partial_i \underline{u} - \partial_i \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega} \to 0 \text{ für alle } i = 1, ...n \tag{1.12.2}$$

Es gilt wegen (1.12.1) und (1.12.2):

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \underline{u} \nabla \Psi dx + \int_\Omega div \underline{u} \Psi dx\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega (\underline{u} - \underline{u}_\nu) \nabla \Psi dx + \underbrace{\int_\Omega \underline{u}_\nu \nabla \Psi dx + \int_\Omega div \underline{u}_\nu \Psi dx}_{=0} + \int_\Omega div(\underline{u} - \underline{u}_\nu) \Psi dx\right| \\
&\leq \underbrace{\|\underline{u} - \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega}}_{\to 0} \underbrace{\|\nabla \Psi\|_\infty}_{\leq C_1} + \underbrace{\|div(\underline{u} - \underline{u}_\nu)\|_{q,\Omega}}_{\to 0} \underbrace{\|\Psi\|_\infty}_{\leq C_2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$

Sei nun Ω (AG) :
Weiter sei $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_0 > R_0(\Omega)$ ($R_0(\Omega)$ aus (1.1.2)) und sei
$\Omega_m := \Omega \cap B_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq m_0$.

Mit Lemma 1.10 und $C_m > 0$ gilt:

$$\left\|\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu\right\|_{q,\Omega_m} \leq C_m \left\|\nabla(\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu)\right\|_{q,\Omega_m} \to 0$$

Daraus folgt die Existenz eines $\underline{u}^{(m)} \in L^q(\Omega_m)$ mit $\left\|\underline{u}^{(m)} - \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega_m} \to 0$
für alle $m \geq m_0$.
Des Weiteren gilt:

$$\left\|\underline{u}^{(m+1)} - \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega_m} \leq \left\|\underline{u}^{(m+1)} - \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega_{m+1}} \to 0$$

Somit ist $\left.\underline{u}^{(m+1)}\right|_{\Omega_m} = \underline{u}_m$ fast überall. Durch eine Änderung auf einer Nullmenge aus Ω_m, ist $\left.\underline{u}^{(m+1)}\right|_{\Omega_m} = \underline{u}_m$ sogar ohne Einschränkung überall.

Sei nun $x \in \Omega$. Wegen $\Omega = \bigcup\limits_{m=m_0}^{\infty} \Omega_m$ existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $x \in \Omega_m$
für alle $m \geq m_1$ und es gilt $\underline{u}^{(m_1+k)}(x) = \underline{u}^{(m_1)}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\underline{u}(x) := \lim\limits_{m\to\infty} \underline{u}^{(m)}(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\underline{u} \in L^q(\Omega_m) \text{ und } \|\underline{u} - \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega_m} \leq \left\|\underline{u}^{(m)} - \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega_m} \to 0 \tag{1.12.3}$$

Aus $\left\|\partial_i \underline{u}_\nu - \partial_i \underline{u}_\mu\right\|_{q,\Omega} \to 0$ folgt die Existenz eines $\underline{f}_i \in \underline{L}^q(\Omega)$ mit
$\left\|\underline{f}_i - \partial_i \underline{u}_\nu\right\|_{q,\Omega} \to 0$ für alle $i = 1, ...n$.

Sei nun $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ beliebig, dann existiert ein $m_2 \in \mathbb{N}$ mit $supp(\phi) \subset B_{m_2}$.
Es ist:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \underline{u}\partial_i\phi dx &= \int\limits_{\Omega_{m_2}} \underline{u}^{(m_2)}\partial_i\phi dx \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\Omega_{m_2}} \underline{u}_\nu \partial_i\phi dx \\
&= -\lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\Omega_{m_2}} \partial_i \underline{u}_\nu \phi dx \\
&= -\int\limits_{\Omega} \underline{f}_i \phi dx
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\partial_i \underline{u} = \underline{f}_i \text{ und } \|\partial_i \underline{u} - \partial_i \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega} \to 0 \text{ für alle } i = 1, ...n. \tag{1.12.4}$$

Sei nun $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ beliebig, dann existiert ein $m_3 \in \mathbb{N}$ mit $supp(\Psi) \subset B_{m_3}$.
Wegen (1.12.3) und (1.12.4) gilt:

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\Omega} \underline{u}\nabla\Psi dx + \int\limits_{\Omega} div\underline{u}\Psi dx \right| \\
&\le \left| \int\limits_{\Omega_{m_3}} (\underline{u} - \underline{u}_\nu)\nabla\Psi dx + \underbrace{\int\limits_{\Omega} \underline{u}_\nu \nabla\Psi dx + \int\limits_{\Omega} div\underline{u}_\nu \Psi dx}_{=0} + \int\limits_{\Omega} div(\underline{u} - \underline{u}_\nu)\Psi dx \right| \\
&\le \underbrace{\|\underline{u} - \underline{u}_\nu\|_{q,\Omega}}_{\to 0} \underbrace{\|\nabla\Psi\|_\infty}_{\le C_1} + \underbrace{\|\nabla(\underline{u} - \underline{u}_\nu)\|_{q,\Omega_{m_3}}}_{\to 0} \underbrace{\|\Psi\|_\infty}_{\le C_2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Die Reflexivität folgt analog zum Beweis des Lemmas 1.9.

$\square$

2 Funktionaldarstellung in H

Satz und Definition 2.1.

Seien $(X, \|.\|_X)$ *und* $(Y, \|.\|_Y)$ *je reflexive reelle Banachräume.*
Weiter sei $B : X \times Y \to \mathbb{R}$ *eine beschränkte Bilinearform, d.h. es gibt ein* $C > 0$*, so dass für alle* $(x, y) \in X \times Y$ *gilt:*

$$|B(x,y)| \leq C \, \|x\|_X \, \|y\|_Y \tag{2.1.1}$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Es existieren Konstanten $C_X > 0,\ C_Y > 0$ *mit*

i) $\|x\|_X \leq C_X \sup\limits_{0 \neq y \in Y} \dfrac{B(x,y)}{\|y\|_Y}$ *für alle* $x \in X$

ii) $\|y\|_Y \leq C_Y \sup\limits_{0 \neq x \in X} \dfrac{B(x,y)}{\|x\|_X}$ *für alle* $y \in Y$

2) Zu $F^* \in X^*$ *(bzw.* $G^* \in Y^*$*) existiert genau ein* $y_{F^*} \in Y$ *(bzw.* $x_{G^*} \in X$*) mit*
$F^*(x) = B(x, y_{F^*})$ *für alle* $x \in X$
$G^*(y) = B(x_{G^*}, y)$ *für alle* $y \in Y$.

Es gibt weiter Konstanten $D_X > 0,\ D_Y > 0$ *mit:*
i) $D_Y \|y_{F^*}\|_Y \leq \|F^*\|_{X^*} \leq C \|y_{F^*}\|_Y$ *für alle* $F^* \in X^*$
ii) $D_X \|x_{G^*}\|_X \leq \|G^*\|_{Y^*} \leq C \|x_{G^*}\|_X$ *für alle* $G^* \in Y^*$

Siehe hierzu auch [Ha] Theorem 2. und [Sa].

Wir nennen im Folgenden:
Die Eigenschaft 1)
Ein Paar dualer Variationsungleichungen bezüglich der Bilinearform $B(.,.)$ *auf* $X \times Y$.

Die Eigenschaft 2)
Ein Paar dualer Funktionaldarstellungen bezüglich der Bilinearform $B(.,.)$ *auf* $X \times Y$.

Beweis.

A) Es gelte 1)
Für $y_{F^*} \in Y$ sei $F^*(x) := B(x, y_{F^*})$ für alle $x \in X$. Wegen (2.1.1) gilt $F^* \in Y^*$.
Sei $\sigma : Y \to X^*,\ \sigma(y) = B(.,y)$ für $y \in Y$.
σ ist linear und stetig und es gilt $\sigma(y) \in X^*$.
Wegen 1) ii) folgt für alle $y \in Y$

$$\|y\|_Y \leq C_Y \sup_{0 \neq x \in X} \frac{B(x,y)}{\|x\|_X} = C_Y \sup_{0 \neq x \in X} \frac{(\sigma(y))(x)}{\|x\|_X} = C_Y \|\sigma(y)\|_{X^*}\,. \tag{2.1.2}$$

Sei für $k \in \mathbb{N}$ $L_k^* \subset \sigma(Y),\ L^* \in X^*$ und $\|L_k^* - L^*\|_{X^*} \to 0$ für $k \to \infty$.
Zu L_k^* gibt es wegen (2.1.2) genau ein $y_k \in Y$ mit $\sigma(y_k) = L_k^*$.
Weiter folgt aus (2.1.2)

$$\|y_k - y_l\|_Y \leq C_Y \|\sigma(y_k - y_l)\|_{X^*} = C_Y \|\sigma(y_k) - \sigma(y_l)\|_{X^*} \to 0 \quad (l,k \to \infty)$$

und damit die Existenz von $y \in Y$ mit $\|y_k - y\|_{X^*} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Dann ist aber auch $\|\sigma(y_k) - \sigma(y)\|_{X^*} \to 0 \quad (k \to \infty)$ und daher
$L_k^* = \sigma(y_k) \to \sigma(y),$ andererseits ist $L_k^* \to L^*,$ also $L^* = \sigma(y)$.
Daher ist $\sigma(Y)$ abgeschlossener Unterraum von X^*.

Angenommen $\sigma(Y) \subsetneq X^*$.
Dann gibt es nach Hahn-Banach ein $L^{**} \in X^{**}$ mit $L^{**} \neq 0$ und $L^{**}|_{\sigma(Y)} = 0$.
Wegen der Reflexivität von X gibt es zu L^{**} genau ein $x \in X$ derart, dass gilt:
$L^{**}(x^*) = x^*(x)$ für alle $x^* \in X^*$

Wegen $L^{**} \neq 0$ ist $x \neq 0$.

Andererseits ist für $y \in Y$ durch $x^*(x) := B(x,y) = \sigma(y)(x)$
für alle $x \in X$ ein $x^* \in X^*$ definiert.
Wegen $0 = L^{**}(\sigma(y)) = \sigma(y)(x) = B(x,y)$ für alle $y \in Y$ folgt nach 1) i)
$\|x\|_X \leq C_X \sup_{0 \neq y \in Y} \dfrac{B(x,y)}{\|y\|_Y} = 0$ im Widerspruch zu $x \neq 0$.

Also ist $\sigma(Y) = X^*$ und für jedes $F^* \in X^*$ gibt es ein $y \in Y$ mit
$F^*(x) = B(x, y)$ für alle $x \in X$. Wegen 1) ii) folgt:

$$\begin{aligned}
\|F^*\|_{X^*} &= \sup_{0 \neq x \in X} \frac{F^*(x)}{\|x\|_X} \\
&= \sup_{0 \neq x \in X} \frac{B(x, y)}{\|x\|_X} \\
&\geq C_Y^{-1} \|y\|_Y
\end{aligned}$$

und

$$\|F^*\|_{X^*} \leq C \|y\|_Y$$

Also gilt 2) i) mit $D_Y = C_Y^{-1}$, woraus auch die Eindeutigkeit des erzeugenden Elements $y \in Y$ folgt. Völlig analog folgt die Darstellung der Funktionale $G^* \in Y^*$ vermöge 1) i) und 1) ii) sowie die Abschätzung 2) ii) mit $D_X = C_X^{-1}$.

B) Es sei 2) erfüllt.
Ist $y \in Y$, so ist durch $F^*(x) := B(x, y)$ für alle $x \in X$ ein $F^* \in X^*$ definiert.
Wegen 2) gibt es genau ein $y_{F^*} \in Y$ mit $F^*x = B(x, y_{F^*})$ für alle $x \in X$.
Daher ist $B(x, y) = B(x, y_{F^*})$ für alle $x \in X$ und wegen der Eindeutigkeit
des erzeugenden Elements $y_{F^*} \in Y$ folgt $y = y_{F^*}$. Daher ist nach 2) i)

$$\begin{aligned}
D_Y \|y_{F^*}\|_Y \leq \|F^*\|_{X^*} &= \sup_{0 \neq x \in X} \frac{F^*(x)}{\|x\|_X} \\
&= \sup_{0 \neq x \in X} \frac{B(x, y_{F^*})}{\|x\|_X} \\
&\underset{(2.1.1)}{\leq} C \|y_{F^*}\|_Y ,
\end{aligned}$$

woraus 1) ii) mit $C_Y = D_y^{-1}$ folgt. Analog folgt 1) i) aus 2) ii).

$\square$

Definition 2.2.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es sei $\underline{X} \subset \underline{L}^{1,q}(M)$ und $\underline{Y} \subset \underline{L}^{1,q'}(M)$ derart, dass $\|\nabla .\|_{q,M}$ Norm auf $\underline{X}$ bzw. $\|\nabla .\|_{q',M}$ Norm auf $\underline{Y}$ ist. Weiter seien $(\underline{X}, \|\nabla .\|_{q,M})$ und $(\underline{Y}, \|\nabla .\|_{q',M})$ je reflexive reelle Banachräume.
Mit $\underline{u} \in \underline{X}$ und $\underline{\Phi} \in \underline{Y}$ sei

$$< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_M := \sum_{i,k=1}^{n} \int_M \partial_i u_k \partial_i \Phi_k dx.$$

Mit $\epsilon_{ik}(\underline{u}) := \partial_i u_k + \partial_k u_i$ für $i, k = 1, ..., n$ sei

$$< \epsilon(\underline{u}), \epsilon(\underline{\Phi}) >_M := \sum_{i,k=1}^{n} \int_M \epsilon_{ik}(\underline{u}) \epsilon_{ik}(\underline{\Phi}) dx.$$

Weiter sei

$$B_1(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda, M) :=< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_M + \lambda < div \underline{u}, div \underline{\Phi} >_M$$

und

$$\begin{aligned} B_2(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda, M) &:=< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_M + \sum_{i,k=1}^{n} \int_M \partial_i u_k \partial_k \Phi_i dx + (\lambda - 1) < div \underline{u}, div \underline{\Phi} >_M \\ &= \frac{1}{2} < \epsilon(\underline{u}), \epsilon(\underline{\Phi}) >_M + (\lambda - 1) < div \underline{u}, div \underline{\Phi} >_M . \end{aligned}$$

Lemma 2.3.

Sei $1 < q < \infty$. Dann gilt:

$$\underline{Y}^{1,q}(H) = \left\{ \underline{v} : v_i \in L^{1,q}(H) \; \forall \, i = 1, ..., n-1, \; v_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H) \right\}$$

Beweis.

Sei $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(H)$.
Zeige $\underline{u} \in \left\{ \underline{v} : v_i \in L^{1,q}(H) \; \forall \, i = 1, ..., n-1, \; v_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H) \right\}$:

Sei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}), \; 0 \le \eta \le 1$ mit $\eta(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 1 \\ 1 & \text{für } t \ge 2 \end{cases}$
und sei $\eta_k := \eta(kt) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le \frac{1}{k} \\ 1 & \text{für } t \ge \frac{2}{k} \end{cases}$.

Sei nun $\Phi_k(x) := \Phi(x)\eta_k(x_n)$. Daraus folgt $\Phi_k|_H \in C_0^\infty(H)$.
Für $i = 1, ..., n-1$ ist $\partial_i \Phi_k(x) = (\partial_i \Phi(x))\, \eta_k(x_n)$.

Sei $R > 0$ derart gewählt, dass gilt: $supp(\Phi) \subset B_R$
Wegen $u_i \in L^q(B_R \cap H)$ gilt dann :

$$\begin{aligned}
\int\limits_H u_i(x)\partial_i\Phi(x)dx &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_H u_i(x)\left(\partial_i\Phi(x)\right)\eta_k(x_n)dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int\limits_H u_i(x)\partial_i\Phi_k(x)dx \\
&= -\lim_{k\to\infty} \int\limits_H \partial_i u_i(x)\Phi_k(x)dx \\
&= -\int\limits_H \partial_i u_i(x)\Phi(x)dx
\end{aligned}$$

Es ist also für $i = 1, ..., n-1$ und für alle $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$u_i \in L^{1,q}(H) \Leftrightarrow u_i \in L^{1,q}(H) \text{ mit } \int\limits_H u_i(x)\partial_i\Phi(x)dx = -\int\limits_H \partial_i u_i(x)\Phi(x)dx \tag{2.3.1}$$

Aus $\int\limits_H \underline{u}\nabla\Phi dx = -\int\limits_H div\underline{u}\Phi dx$ folgt dann:

$$\int\limits_H u_n(x)\partial_n\Phi(x)dx = -\int\limits_H \partial_n u_n(x)\Phi(x)dx \tag{2.3.2}$$

Sei $v(x) := \begin{cases} u_n(x) & \text{für } x_n > 0 \\ 0 & \text{für } x_n \leq 0 \end{cases}$ und $(Dv)(x) := \begin{cases} \partial_n u_n(x) & \text{für } x_n > 0 \\ 0 & \text{für } x_n \leq 0 \end{cases}$.

Für alle $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} v\partial_n\Phi dx &= \int\limits_H u_n\partial_n\Phi dx \\
&\underset{2.3.2}{=} -\int\limits_H \partial_n u_n\Phi dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} Dv\Phi dx
\end{aligned}$$

Also existiert $\partial_n v = Dv.$ (2.3.3)

Aus $u_n \in L^{1,q}(H)$ folgt wieder für $i = 1, ..., n-1$ und für alle $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x)\partial_i\Phi(x)dx &= \int\limits_H u_n(x)\partial_i\Phi(x)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int\limits_H u_n(x)\left(\partial_i\Phi(x)\right)\eta_k(x_n)dx \\
&= \lim_{k\to\infty}\int\limits_H u_n(x)\partial_i\Phi(x)_k dx \\
&= -\lim_{k\to\infty}\int\limits_H \partial_i u_n(x)\Phi(x)_k dx \\
&= -\int\limits_H \partial_i u_n(x)\Phi(x)dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i v(x)\Phi(x)dx
\end{aligned}$$

Also existiert $\partial_i v(x) := \begin{cases} \partial_i u_n(x) & \text{für } x_n > 0 \\ 0 & \text{für } x_n \leq 0 \end{cases}$ und $\partial_i v \in L^q(\mathbb{R}^n)$. (2.3.4)

Somit ist also $v \in L^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.

Sei $\delta > 0,\ v_\delta(x) := v(x - \delta e_n)$, wobei e_n der n-te Einheitsvektor ist.
Dann gilt für alle $i = 1, ..., n-1$ und $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\delta(x)\partial_i\Phi(x)dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(x-\delta e_n)\partial_i\Phi(x)dx \\
&\underset{(x_n=y_n+\delta)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(y)\left(\partial_i\Phi\right)(y+\delta e_n)dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(y)\partial_i\left[\Phi(y+\delta e_n)\right]dy \\
&\underset{(2.3.4)}{=} -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i v(y)\Phi(y+\delta e_n)dy \\
&\underset{(y_n=x_n-\delta)}{=} -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_i v\right)(x-\delta e_n)\Phi(x)dx
\end{aligned}$$

Also ist $\partial_i v_\delta(x) = (\partial_i v)(x - \delta e_n)$.
Weiter ist $v_\delta(x) = 0,\ (\partial_i v)(x - \delta e_n) = 0$ für $x_n - \delta \leq 0 \Leftrightarrow x_n \leq \delta$.

Es ist für $R > 0$ wegen der Stetigkeit im Mittel :

$$\|v_\delta - v\|_{q,B_R} \to 0 \text{ und } \|\nabla(v_\delta - v)\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0 \text{ für } \delta \to 0$$

Sei $0 < \epsilon < \delta$ und $v_{\delta\epsilon}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(x-y) v_\delta(y) dy$ die Friedrichssche Glättung von v_δ.
Somit ist $v_{\delta\epsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $v_{\delta\epsilon}(x', 0) = 0$ für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.
Wegen $\nabla v_{\delta\epsilon} = (\nabla v_\delta)_\epsilon$ in $\mathbb{R}^n$ ist $\nabla v_{\delta\epsilon} \in L^q(\mathbb{R}^n)$.

Daraus folgt mit [Si2] Theorem 3.4:

$$v_{\delta\epsilon}|_H \in \hat{H}_0^{1,q}(H) \text{ für alle } 0 < \epsilon < \delta \text{ und } \delta > 0$$

Aus [Si2] Theorem 3.2 folgt die Vollständigkeit von $\hat{H}_0^{1,q}(H)$.
Es ist:

$$\|\nabla(v_{\delta\epsilon} - v_\delta)\|_{q,H} \to 0 \text{ für } \epsilon \to 0 \text{ und } \|\nabla(v_\delta - v)\|_{q,H} \to 0 \text{ für } \delta \to 0$$

Daraus folgt $v_\delta \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ und weiter $v \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$.
Somit ist $u_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$.

Sei $\underline{u} \in \left\{\underline{v} : v_i \in L^{1,q}(H)\ \forall\, i = 1, ..., n-1,\ v_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)\right\}$.
Zeige $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(H)$:

Wegen $u_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$, existiert eine Folge $\left(u_n^{(k)}\right) \subset C_0^\infty(H)$ mit
$\left\|u_n - u_n^{(k)}\right\|_{q,B_R \cap H} \to 0$ für alle $R > 0$ und $\left\|\nabla\left(u_n - u_n^{(k)}\right)\right\|_{q,H} \to 0 (k \to \infty)$.

Sei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $supp(\Phi) \subset B_R$.

Dann ist:

$$\int\limits_H u_n(x)\partial_n\Phi(x)dx = \underset{k\to\infty}{lim} \int\limits_{H\cap B_R} u_n^{(k)}(x)\partial_n\Phi(x)dx$$
$$= -\underset{k\to\infty}{lim} \int\limits_{H\cap B_R} \partial_n u_n^{(k)}(x)\Phi(x)dx$$
$$= -\int\limits_H \partial_n u_n(x)\Phi(x)dx \text{ mit } u_n^{(k)} \subset C_0^\infty(H)$$

Daraus und aus (2.3.1) folgt $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(H)$.

□

Lemma 2.4.

Sei $1 < q < \infty$.
Die dualen Variationsungleichungen gelten bezüglich der Bilinearform $< \nabla., \nabla. >_H$ *auf* $\underline{X}_G^{1,q}(H) \times \underline{X}_G^{1,q'}(H)$.

Beweis.

Für $i = 1, ...n-1$ sei $\Phi_i \in L_G^{1,q'}(H)$.
Sei e_i der i-te Einheitsvektor und sei $\underline{\Phi}^{(i)} := \Phi_i e_i$.
Für $i = n$ sei $\underline{\Phi}^{(n)} := \Phi_n e_n$ mit $\Phi_n \in \hat{H}_0^{1,q'}(H)$.
Somit ist $\underline{\Phi} := \sum\limits_{i=1}^{n} \underline{\Phi}^{(i)} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$. Weiter gilt:

$$\left\|\nabla\underline{\Phi}^{(i)}\right\|_{q',H} = \left(\sum_{k=1}^{n}\left\|\nabla\underline{\Phi}_k^{(i)}\right\|_{q',H}^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \|\nabla\Phi_i\|_{q',H} \text{ für alle } i = 1, ..., n$$

Sei nun $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $i = 1, ..., n,$ dann gilt mit [Si2] Corollary 3.15 für $L_G^{1,q'}(H)$ und [Si2] Corollary 3.6 für $\hat{H}_0^{1,q'}(H)$:

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\left\| \nabla \underline{\Phi} \right\|_{q',H}} &\geq \sup_{0 \neq \underline{\Phi}^{(i)} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi}^{(i)} >_H}{\left\| \nabla \underline{\Phi}^{(i)} \right\|_{q',H}} \\
&= \begin{cases} \sup\limits_{0 \neq \Phi_i \in L_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla v_i, \nabla \Phi_i >_H}{\left\| \nabla \Phi_i \right\|_{q',H}} & \text{für} \quad i = 1, ..., n-1 \\ \sup\limits_{0 \neq \Phi_i \in \hat{H}_0^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla v_i, \nabla \Phi_i >_H}{\left\| \nabla \Phi_i \right\|_{q',H}} & \text{für} \quad i = n \end{cases} \\
&\geq C_i \left\| \nabla v_i \right\|_{q,H} \ \text{für alle } i = 1, ..., n \text{ ist } C_i > 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q,H} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \nabla v_i \right\|_{q,H}^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{C_i} \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\left\| \nabla \underline{\Phi} \right\|_{q',H}} \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\left\| \nabla \underline{\Phi} \right\|_{q',H}} \ \text{mit } C := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i^q} \right)^{\frac{1}{q}} > 0
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.5.

Sei $1 < q < \infty,\ f \in L^{1,q}_G(H)$ *und* $x \in \mathbb{R}^n$.

Sei $\tilde{f}(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x_n = 0 \\ f(x) & \text{für } x_n > 0 \\ f(x', -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$.

Es gilt: $\tilde{f} \in L^{1,q}_G(\mathbb{R}^n)$

Für $i = 1, .., n-1$

ist $\partial_i \tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_n = 0 \\ \partial_i f(x) & \text{für } x_n > 0 \\ (\partial_i f)(x', -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$

und $\partial_n \tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_n = 0 \\ \partial_n f(x) & \text{für } x_n > 0 \\ -(\partial_n f)(x', -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$.

Beweis.

siehe [Si2] Lemma 3.10

□

Satz 2.6.

Sei $1 < q < \infty$ *und* $p \in L^q(H)$. *Dann gilt:*
Es existiert genau ein $\underline{u} \in \underline{X}^{1,q}_G(H)$ *mit* $< \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H = < p, div\underline{\Phi} >_H$
für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}^{1,q'}_G(H)$.
Es ist $div\underline{u}|_H = p$ *und* $\|\nabla\underline{u}\|_{q,H} \leq n2^{\frac{1}{q'}} C \|p\|_{q,\mathbb{R}^n}$.

Beweis.

Sei $p \in L^q(H)$. Man setze p durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort.
Sei jetzt wie in [Si2] Theorem 2.4. $w \in L^{2,q}_B(\mathbb{R}^n)$ mit $B := B_1(0)$ und $\Delta w = p$.
Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\hat{w}(x) := w(x', -x_n)$ und $\tilde{u}_i := \partial_i(w + \hat{w})|_H$.

Für alle $i = 1, .., n$ folgt unter Benutzung der Transformationsformel:

$$\begin{aligned}
\|\nabla \tilde{u}_i\|_{q,H} &\leq \|\nabla \partial_i w\|_{q,H} + \|\nabla \partial_i \hat{w}\|_{q,H} \\
&= \|\nabla \partial_i w\|_{q,H} + \|\nabla \partial_i w\|_{q,H_-} \\
&\leq 2^{\frac{1}{q'}} \left(\|\nabla \partial_i w\|_{q,H}^q + \|\nabla \partial_i w\|_{q,H_-}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\partial_i \partial_k w|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{und mit [Si2] Theorem 2.4.} \\
&\leq 2^{\frac{1}{q'}} C \|\Delta w\|_{q,\mathbb{R}^n} \quad \text{mit } C > 0 \\
&= 2^{\frac{1}{q'}} C \|p\|_{q,\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Daher gilt: $\|\nabla \underline{\tilde{u}}\|_{q,H} \leq n 2^{\frac{1}{q'}} C \|p\|_{q,\mathbb{R}^n}$

Wegen $\partial_i w,\ \partial_i \hat{w} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ folgt $\tilde{u}_i \in L^1_{loc}(H)$.
Für $i = 1, ..., n-1$ sei mit $G \subset\subset H$ $u_i(x) := \tilde{u}_i(x) - \frac{1}{|G|} \int\limits_G \tilde{u}_i(y) dy$.

Dann ist $u_i \in L^{1,q}_G(H)$ mit $i = 1, ..., n-1$.
Nach [Si2] Theorem 3.5 gilt $\tilde{u}_n \in \hat{H}^{1,q}_0(H)$. Setze $u_n := \tilde{u}_n$.
Dann ist $\underline{u} = (u_1, ..., u_n) \in \underline{X}^{1,q}_G(H)$.

Sei $\Psi_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x_n = 0 \\ \Phi(x) & \text{für } x_n > 0 \\ \Phi(x', -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$.

Es ist für $i = 1, ..., n-1$ und $\Phi_i \in L_G^{1,q'}(H)$:

$$\begin{aligned}
< \nabla u_i, \nabla \Phi_i >_H &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_H \partial_k \partial_i w(x) \partial_k \Phi_i(x) dx + \int\limits_H \partial_k \left[\partial_i w(x', -x_n) \right] \partial_k \Phi_i(x) dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_H \left(\partial_k \partial_i w \right)(x) \partial_k \Phi_i(x) dx \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_H \left(\partial_k \partial_i w \right)(x', -x_n) \left(\partial_k \Phi_i \right)(x) dx \\
&- \int\limits_H \left(\partial_n \partial_i w \right)(x', -x_n) \left(\partial_n \Phi_i \right)(x) dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_H \left(\partial_k \partial_i w \right)(x) \partial_k \Phi_i(x) dx \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{H_-} \left(\partial_k \partial_i w \right)(y) \partial_k \left[\Phi_i(y, -y_n) \right] dy \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_k \partial_i w \right)(y) \partial_k \Psi_i(y) dy
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.5 folgt dann $\Psi_i(x) \in L_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ für alle $i = 1, ..., n-1$.
Aus [Si2] Theorem 3.11 folgt die Existenz einer Folge $(\Psi_\nu^{(i)}) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\left\| \nabla \Psi^{(i)} - \nabla \Psi_\nu^{(i)} \right\|_{q', \mathbb{R}^n} \to 0$.

Hieraus folgt für $i = 1, ..., n-1$:

$$\begin{aligned}
<\nabla u_i, \nabla \Phi_i>_H &= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_k \partial_i w)(x) \partial_k \Psi_i(x) dx \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} (\partial_k \partial_i w)(x) \partial_k \Psi_\nu^{(i)}(x) dx \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} \Delta w(x) \partial_i \Psi_\nu^{(i)}(x) dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{n} \Delta w(x) \partial_i \Psi_i(x) dx \\
&=< p, \partial_i \Phi_i(x) >_H \quad \text{da} \quad p|_{H_-} = 0
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

Sei $\hat{p} := \Delta \hat{w}$. Dann ist $\hat{p}|_H = 0$. Zu $\Phi_n \in \hat{H}_0^{1,q'}(H)$ existiert eine Folge $\left(\Phi_n^{(k)}\right) \subset C_0^\infty(H)$ mit $\left\|\nabla\left(\Phi_n - \Phi_n^{(k)}\right)\right\|_{q',H} \to 0$.
Daher ist:

$$\begin{aligned}
<\nabla u_n, \nabla \Phi_n>_H &= \lim_{k\to\infty} < \nabla \partial_n (w + \hat{w}), \nabla \Phi_n^{(k)} >_H \\
&= \lim_{k\to\infty} < \Delta w + \Delta \hat{w}, \partial_n \Phi_n^{(k)} >_H \\
&=< p, \partial_n \Phi_n >_H
\end{aligned}$$

Zusammen mit (2.6.1) gilt also:

$$< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_H =< p, div \underline{\Phi} >_H \quad \text{für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$$

Weiter ist für $x \in H$:

$$\begin{aligned}
div \underline{u}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \partial_k \partial_k w(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (\partial_k \partial_k w)(x', -x_n) + (\partial_n \partial_n w)(x', -x_n) \\
&= \Delta w(x) + \Delta \hat{w}(x) \\
&= p(x) + \underbrace{\hat{p}(x)}_{=0} \\
&= p(x)
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit:
Für $i = 1, 2$ sei $\underline{u}^{(i)} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit

$$< \nabla \underline{u}^{(i)}, \nabla \underline{\Phi} >_H = < p, div \underline{\Phi} >_H \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H).$$

Dann folgt

$$< \nabla \left(\underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(2)} \right), \nabla \underline{\Phi} >_H = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H).$$

Aus Lemma 2.4 folgt dann $\underline{u}^{(1)} = \underline{u}^{(2)}$.

□

Satz 2.7.

Sei $1 < q < \infty$ *und* $\lambda_1 \neq -1$.
Es gelten die dualen Funktionaldarstellungen bezüglich der Bilinearform
$< \nabla ., \nabla . >_H + \lambda_1 < div ., div . >_H$ *auf* $\underline{X}_G^{1,q}(H) \times \underline{X}_G^{1,q'}(H)$.

Beweis.

Für $\lambda_1 = 0$ folgt die Behauptung mit Lemma 2.4 und Satz 2.1.
Betrachte nun $\lambda_1 \neq 0$.
Sei $F^* \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)^*$. Da wegen Satz 2.1 und Lemma 2.4 die dualen Funktionaldarstellungen für $< \nabla ., \nabla . >_H$ gelten, existiert ein $\underline{z} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit $< \nabla \underline{z}, \nabla \underline{\Phi} >_H = F^*(\underline{\Phi})$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ und
$C' \left\| \nabla \underline{z} \right\|_{q,H} \leq \left\| F^* \right\|_{\underline{X}_G^{1,q'}(H)^*} \leq C'' \left\| \nabla \underline{z} \right\|_{q,H}$.

Sei $p := div \underline{z} \in L^q(H)$. Aus Satz 2.6 folgt die Existenz von $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit:

$$\left\| \nabla \underline{u} \right\|_{q,H} \leq n 2^{\frac{1}{q'}} C \left\| p \right\|_{q,\mathbb{R}^n} \tag{2.7.1}$$

$$div \underline{u}|_H = p \tag{2.7.2}$$

$$< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_H = < p, div \underline{\Phi} >_H \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H) \tag{2.7.3}$$

Für $\lambda_1 \neq -1$ sei nun $\underline{v}(x) := \underline{z}(x) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}\underline{u}(x)$.

Dann ist $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $div\underline{v} = \frac{1}{\lambda_1+1} div\underline{z}$.

Für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ ist:

$$
\begin{aligned}
&< \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_H \\
&\quad \underset{(2.7.2)}{=} < \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < \underbrace{div\underline{z}}_{=p}, div\underline{\Phi} >_H - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1} < \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H \\
&\qquad - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1+1} < p, div\underline{\Phi} >_H \\
&\quad \underset{(2.7.3)}{=} < \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_H \\
&\quad = F^*(\underline{\Phi})
\end{aligned}
$$

Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\underline{v}\|_{q,H} &\leq \|\nabla\underline{z}\|_{q,H} + \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}\right| \|\nabla\underline{u}\|_{q,H} \\
&\underset{(2.7.1)}{\leq} \frac{1}{C'} \|F^*\|_{\underline{X}_G^{1,q'}(H)^*} + C_{\lambda_1} \|p\|_{q,H} \\
&= \frac{1}{C'} \|F^*\|_{\underline{X}_G^{1,q'}(H)^*} + C_{\lambda_1} \|div\underline{z}\|_{q,H} \\
&\leq C_1 \|F^*\|_{\underline{X}_G^{1,q'}(H)^*} \ \text{ mit } C_1 > 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
|F^*(\underline{\Phi})| &= |< \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_H| \\
&\leq \|\nabla\underline{v}\|_{q,H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H} + |\lambda_1| \|div\underline{v}\|_{q,H} \|div\underline{\Phi}\|_{q',H} \\
&\leq C_2 \|\nabla\underline{v}\|_{q,H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H} .
\end{aligned}
$$

Daraus folgt $\|F^*\|_{\underline{X}_G^{1,q'}(H)^*} \leq C_2 \|\nabla \underline{v}\|_{q,H}$ mit $C_2 > 0$.

Zeige nun die Eindeutigkeit:

Sei $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit

$$< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div \underline{v}, div \underline{\Phi} >_H = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H).$$

Zu $p := -\lambda_1 div \underline{v} \in L^q(H)$ existiert nach Satz 2.6 ein $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit

$$div \underline{u} = p$$

und

$$< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Phi} >_H = < -\lambda_1 div \underline{v}, div \underline{\Phi} >_H \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$$

Daraus folgt für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$:

$$\begin{aligned} < \nabla (\underline{v} - \underline{u}), \nabla \underline{\Phi} >_H &= < \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div \underline{v}, div \underline{\Phi} >_H \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wegen Lemma 2.4 gilt dann $\underline{v} = \underline{u}$.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} div \underline{v} &= div \underline{u} \\ &= p \\ &= -\lambda_1 div \underline{v} \end{aligned}$$

Wegen $(1 + \lambda_1) \neq 0$ folgt $div \underline{v} = 0$.

Daraus folgt für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$:

$$< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H = 0$$

Wegen Lemma 2.4 gilt dann $\underline{v} = 0$.

$\square$

Satz 2.8.

Sei $1 < q < \infty$ *und* $\lambda_1 \neq -1$.
Es gelten die dualen Funktionaldarstellungen bezüglich der Bilinearform $< \nabla., \nabla. >_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 < div., div. >_{\mathbb{R}^n}$ *auf* $\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n) \times \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis.

Sei $v \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.
Nach Bemerkung 1.3 folgt, dass $v \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ ist.
Mit [Si2] Theorem 3.11 folgt, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ liegt.
Nach [Si/So] Lemma II.2.1 gelten daher die dualen Variationsungleichungen bezüglich der Bilinearform $< \nabla., \nabla. >_{\mathbb{R}^n}$ auf $L_G^{1,q}(\mathbb{R}^n) \times L_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ für skalare Funktionen.

Damit ist die Behauptung für $\lambda_1 = 0$ gezeigt.

Sei nun $\lambda_1 \neq 0$.
Für $i = 1, ...n$ sei $\Phi_i \in L_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ und $\underline{\Phi}^{(i)} := \Phi_i e_i$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist. Es ist $\underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ und $\left\|\nabla \underline{\Phi}^{(i)}\right\|_{q',\mathbb{R}^n} = \|\nabla \underline{\Phi}_i\|_{q',\mathbb{R}^n}$ für alle $i = 1, ..., n$.

Sei nun $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ und $i = 1, ..., n$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} &\geq \sup_{0 \neq \underline{\Phi}^{(i)} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi}^{(i)} >_{\mathbb{R}^n}}{\left\|\nabla \underline{\Phi}^{(i)}\right\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&= \sup_{0 \neq \Phi_i \in L_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla v_i, \nabla \Phi_i >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla \Phi_i\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&\geq C_i \|\nabla v_i\|_{q,\mathbb{R}^n} \text{ mit } C_i > 0
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|\nabla \underline{v}\|_{q,\mathbb{R}^n} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \|\nabla v_i\|_{q,\mathbb{R}^n}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{C_i} \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \text{ mit } C := \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i^q} \right)^{\frac{1}{q}} > 0\end{aligned}$$

Daher gelten mit Satz 2.1 die dualen Funktionaldarstellungen
bezüglich der Bilinearform $< \nabla ., \nabla . >_{\mathbb{R}^n}$ auf $\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n) \times \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$.

Sei nun $F^* \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*$.
Dann existiert genau ein $\underline{z} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ mit
$< \nabla \underline{z}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} = F^*(\underline{\Phi})$ und $\|\nabla \underline{z}\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq C_1 \|F^*\|_{\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*}$.

Zu $div\underline{z} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ existiert mit [Si2] Theorem 2.4 genau ein $m \in L_G^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ mit:

$$\Delta m = div\underline{z} \text{ und } \left(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha m\|_{q,\mathbb{R}^n} \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_2 \|div\underline{z}\|_{q,\mathbb{R}^n} \tag{2.8.1}$$

Sei $\underline{u} := \nabla m$. Daraus folgt $\underline{u} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ und

$$div\underline{u} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \partial_i m = \Delta m = div\underline{z}. \tag{2.8.2}$$

Aus [Si2] Theorem 3.11 folgt, dass zu $\underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $\underline{\Phi}^{(\nu)} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert, mit $\left\|\nabla\underline{\Phi} - \nabla\underline{\Phi}^{(\nu)}\right\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0$ und es ist:

$$\begin{aligned}
< \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} &= \lim_{\nu\to\infty} < \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} = -\lim_{\nu\to\infty} < \underline{u}, \Delta\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} \\
&= -\lim_{\nu\to\infty} < \nabla m, \Delta\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} = \lim_{\nu\to\infty} < m, \Delta div\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} \\
&= \lim_{\nu\to\infty} < \Delta m, div\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} \underset{(2.8.2)}{=} \lim_{\nu\to\infty} < div\underline{u}, div\underline{\Phi}^{(\nu)} >_{\mathbb{R}^n} \\
&= < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned} \tag{2.8.3}$$

Sei nun $\underline{v}(x) := \underline{z}(x) - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+1}\underline{u}(x)$. Dann ist $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.
Für alle $\underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ ist mit (2.8.2) und (2.8.3):

$$\begin{aligned}
&< \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad = < \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 < div\underline{z}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} \\
&\qquad - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+1} < \underbrace{div\underline{u}}_{=div\underline{z}}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1+1} < \underbrace{div\underline{u}}_{=div\underline{z}}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad = < \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad = F^*(\underline{\Phi})
\end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
\|\nabla\underline{v}\|_{q,\mathbb{R}^n} &\leq \|\nabla\underline{z}\|_{q,\mathbb{R}^n} + \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}\right| \|\nabla\underline{u}\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&\leq C_1 \|F^*\|_{\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*} + C_{\lambda_1} \|\nabla\underline{u}\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&\underset{(2.8.1)}{\leq} C_1 \|F^*\|_{\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*} + C_{\lambda_1} C_2 \|div\underline{z}\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&\leq C' \|F^*\|_{\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*} \text{ mit } C' := C_1 + C_{\lambda_1} C_2 C_1 > 0
\end{aligned}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}|F^*(\underline{\Phi})| &= |< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}| \\ &\leq \|\nabla \underline{v}\|_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \underline{\Phi}\|_{\mathbb{R}^n} + |\lambda_1| \|div\underline{v}\|_{\mathbb{R}^n} \|div\underline{\Phi}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq C'' \|\nabla \underline{v}\|_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \underline{\Phi}\|_{\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\|F^*\|_{\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)^*} \leq C'' \|\nabla \underline{v}\|_{q,\mathbb{R}^n} \text{ mit } C'' > 0$$

Die Eindeutigkeit folgt analog zum Beweis des Satzes 2.7.

$\square$

Definition 2.9.

Sei $1 < q < \infty,\ G \subset\subset H,\ G' \subset\subset \mathbb{R}^n$ *und sei:*

$$C_0^\infty(\bar{H}) := \left\{\Phi \in C^\infty(\bar{H}) : \exists R_\Phi > 0, \textit{ so dass } \Phi(x) = 0 \textit{ für } x \in \bar{H} \textit{ mit } |x| > R_\Phi\right\}$$

$$\tilde{D}_G(H) := \left\{\tilde{\Phi}(x) : \tilde{\Phi}(x) = \Phi(x) - \frac{1}{|G|}\int_G \Phi(t)dt, \textit{ wobei } \Phi(x) \in C_0^\infty(\bar{H})\right\}$$

$$\hat{D}_{G'}(\mathbb{R}^n) := \left\{\hat{\Phi}(x) : \hat{\Phi}(x) = \Phi(x) - \frac{1}{|G'|}\int_{G'} \Phi(t)dt, \textit{ wobei } \Phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right\}$$

$$\underline{D}_G(H) := \left\{\underline{\Phi} : \Phi_i \in \tilde{D}_G(H)\ \forall\ i = 1, ..., n-1,\ \Phi_n \in C_0^\infty(H)\right\}$$

Bemerkung 2.10.

Mit [Si2] Corollary 3.12 folgt: $\tilde{D}_G(H)$ *ist dicht in* $L_G^{1,q}(H)$.
Somit ist $\underline{D}_G(H)$ *dicht in* $\underline{X}_G^{1,q}(H)$.
Weiter folgt mit [Si2] Corollary 3.11: $\hat{D}_{G'}(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $L_{G'}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.11.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ v \in L^{1,r}_G(\mathbb{R}^n)$ *und sei*

$$\sup_{0 \neq \hat{\Phi} \in \hat{D}_G(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla v, \nabla \hat{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\left\| \nabla \hat{\Phi} \right\|_{q',\mathbb{R}^n}} < \infty.$$

Dann gilt: $v \in L^{1,q}_G(\mathbb{R}^n)$

Beweis.

Wegen Bemerkung 1.3 folgt: $v_i \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für alle $i = 1, ..., n$

Zu $\hat{\Phi} \in \hat{D}_G(\mathbb{R}^n)$ existiert ein $\Phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\hat{\Phi}(x) = \Phi(x) - \frac{1}{|G|} \int\limits_G \Phi(t) dt \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Es gilt $< \nabla v, \nabla \Phi >_{\mathbb{R}^n} = < \nabla v, \nabla \hat{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}$ und $\|\nabla \Phi\|_{q',\mathbb{R}^n} = \left\| \nabla \hat{\Phi} \right\|_{q',\mathbb{R}^n}$.

Daraus folgt mit [Si/So] Lemma 2.1 die Behauptung.

□

Lemma 2.12.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ f \in L^{1,r}_G(H)$ *und sei*

$$\sup_{0 \neq \Phi \in \tilde{D}_G(H)} \frac{< \nabla f, \nabla \Phi >_H}{\|\nabla \Phi\|_{q',H}} < \infty.$$

Dann gilt: $f \in L^{1,q}_G(H)$

Beweis.

Sei $f \in L^{1,r}_G(H)$ und sei $\tilde{f}(x)$ wie in Lemma 2.5 definiert. Dann gilt:

$$\|\nabla f\|_{q,H} \leq \left\| \nabla \tilde{f} \right\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq 2^{\frac{1}{q}} \|\nabla f\|_{q,H} \tag{2.12.1}$$

Sei für $\Psi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ und $G \subset\subset H$:

$$(Z\Psi)(x) := \Psi(x) + \Psi(x', -x_n) - \frac{1}{|G|} \int\limits_G [\Psi(t) + \Psi(t', -t_n)]\, dt \text{ für } x \in H$$

Dann ist $(Z\Psi) \in \tilde{D}_G(H)$ und es gilt:

$$\|\nabla (Z\Psi)\|_{q,H} \leq 2 \|\nabla \Psi\|_{q,\mathbb{R}^n} \tag{2.12.2}$$

Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
< \nabla \tilde{f}, \nabla \Psi >_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{H} (\partial_i f)(x) (\partial_i \Psi)(x) dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{H_-} (\partial_i f)(x', -x_n) (\partial_i \Psi)(x) dx \\
&- \int\limits_{H_-} (\partial_n f)(x', -x_n) (\partial_n \Psi)(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{H} (\partial_i f)(x) \partial_i [\Psi(x)] \, dx + \sum_{i=1}^{n-1} \int\limits_{H} (\partial_i f)(y) \partial_i [\Psi(y', -y_n)] \, dy \\
&+ \int\limits_{H} (\partial_n f)(y) \partial_n [\Psi(y', -y_n)] \, dy \\
&=< \nabla f, \nabla (Z\Psi) >_H
\end{aligned}
$$

Somit ist für alle $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$
\begin{aligned}
\infty > & \sup_{0 \neq \Phi \in \tilde{D}_G(H)} \frac{< \nabla f, \nabla \Phi >_H}{\|\nabla \Phi\|_{q',H}} \\
\geq & \sup_{0 \neq \Psi \in C_0^\infty(H)} \frac{|< \nabla f, \nabla (Z\Psi) >_H|}{\|\nabla (Z\Psi)\|_{q',H}} \\
\underset{(2.12.2)}{\geq} & \sup_{0 \neq \Psi \in C_0^\infty(H)} \frac{\left|< \nabla \tilde{f}, \nabla \Psi >_{\mathbb{R}^n}\right|}{2 \|\nabla \Psi\|_{q',\mathbb{R}^n}}
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 2.11 folgt $\tilde{f} \in L_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ und wegen $\tilde{f}\Big|_H = f$ folgt die Behauptung.

□

Lemma 2.13.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ \underline{v} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$
und sei $\sup\limits_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \dfrac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} < \infty.$

Dann gilt: $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$

Beweis.

Aus Bemerkung 2.10 folgt, dass $\underline{D}_G(H)$ dicht in $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ ist.

Sei nun $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$ und für $i = 1, ...n-1$ sei $\underline{e}_i$der i-te Einheitsvektor.
Weiter sei $\Phi_i \in \tilde{D}_G(H)$, $\underline{\Phi}^{(i)} := \Phi_i \underline{e}_i$ und mit $\Phi_n \in C_0^\infty(H)$ sei $\underline{\Phi}^{(n)} := \Phi_n \underline{e}_n$.
Somit ist $\underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)$ und es gilt weiter für $i = 1, ..., n-1$:

$$
\begin{aligned}
\infty > & \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} \\
\geq & \sup_{0 \neq \underline{\Phi}^{(i)} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi}^{(i)} >_H}{\left\|\nabla \underline{\Phi}^{(i)}\right\|_{q',H}} \\
= & \sup_{0 \neq \Phi_i \in \tilde{D}_G(H)} \frac{< \nabla v_i, \nabla \Phi_i >_H}{\|\nabla \Phi_i\|_{q',H}}
\end{aligned}
$$

Mittels des Lemmas 2.12 folgt dann $v_i \in L_G^{1,q}(H)$.

Für $i = n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\infty > & \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} \\
\geq & \sup_{0 \neq \underline{\Phi}^{(n)} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi}^{(n)} >_H}{\left\|\nabla \underline{\Phi}^{(n)}\right\|_{q',H}} \\
= & \sup_{0 \neq \Phi_n \in C_0^\infty(H)} \frac{< \nabla v_n, \nabla \Phi_n >_H}{\|\nabla \Phi_n\|_{q',H}}
\end{aligned}
$$

Mittels [Si/So] Lemma 2.4 folgt dann $v_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$.

Somit folgt insgesamt $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.

□

Korollar 2.14.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ \underline{v} \in L_G^{1,r}(\mathbb{R}^n)$ *und sei*
$\underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n) := \left\{ \underline{\Phi} : \Phi_i \in \hat{D}_G(\mathbb{R}^n)\ \forall\, i = 1, ..., n \right\}.$

Sei weiter $\displaystyle\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} < \infty.$

Dann gilt: $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$

Beweis.

Der Beweis ist analog dem von Lemma 2.13, nur wird Lemma 2.11 anstelle von Lemma 2.12 angewendet.

$\square$

Lemma 2.15.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ \underline{v} \in \underline{X}_G^{1,r}(H),\ \lambda_1 \neq -1$
und sei weiter $\displaystyle\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div \underline{v}, div \underline{\Phi} >_H}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} < \infty.$

Dann gilt: $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$

Beweis.

Wegen $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$ gilt für alle $\underline{\Psi} \in \underline{X}_G^{1,r'}(H)$:
$$|< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Psi} >_H + \lambda_1 < div \underline{v}, div \underline{\Psi} >_H| \leq C \|\nabla \underline{v}\|_{r,H} \|\nabla \underline{\Psi}\|_{r',H} \text{ mit } C > 0$$

Also ist $< \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Psi} >_H + \lambda_1 < div \underline{v}, div \underline{\Psi} >_H =: F^*(\underline{\Phi}) \in \underline{X}_G^{1,r'}(H)^*$.

Nach Lemma 2.4 existiert genau ein $\underline{z} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$ mit $< \nabla \underline{z}, \nabla \underline{\Psi} >_H = F^*(\underline{\Psi})$ für alle $\underline{\Psi} \in \underline{X}_G^{1,r'}(H)$.

Ist $p = div \underline{z} \in L^r(H)$, so gibt es nach Satz 2.6 genau ein $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$ mit
$$< \nabla \underline{u}, \nabla \underline{\Psi} >_H = < p, div \underline{\Psi} >_H \text{ für alle } \underline{\Psi} \in \underline{X}_G^{1,r'}(H).$$

Sei $\underline{\tilde{v}} = \underline{z} - \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,r}(H)$. Dann gilt:

$$< \nabla\underline{\tilde{v}}, \nabla\underline{\Psi} >_H + \lambda_1 < div\underline{\tilde{v}}, div\underline{\Psi} >_H =: F^*(\underline{\Psi}) \text{ für alle } \underline{\Psi} \in \underline{X}_G^{1,r'}(H)$$

Wegen der Eindeutigkeit (Satz 2.7) ist $\underline{v} = \underline{\tilde{v}}$.

Da $\underline{D}_G(H) \subset \underline{X}_G^{1,r'}(H)$ ist, gilt für alle $\underline{\Phi} \subset \underline{D}_G(H)$:

$$< \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_H = < \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_H$$

Somit gilt nach Voraussetzung:

$$\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla\underline{z}, \nabla\underline{\Phi} >_H}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H}} < \infty$$

Daher folgt mit Lemma 2.13 $\underline{z} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und deshalb ist $div\underline{z} = p \in L^q$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H}} &= \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)} \frac{< p, div\Phi >_H}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H}} \\ &\leq C_2 \|p\|_{q,H} \\ &< \infty \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.13 folgt nun $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und schließlich

$$\underline{v} = \underline{\tilde{v}} = \underline{z} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1}\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H).$$

□

Korollar 2.16.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < r < \infty,\ \underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ *und* $\lambda_1 \neq -1$.
Weiter sei $\underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n) := \left\{ \underline{\Phi} : \Phi_i \in \hat{D}_G(\mathbb{R}^n)\ \forall\ i = 1, ..., n \right\}$
und $\displaystyle \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n)} \frac{< \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n} + \lambda_1 < div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_{\mathbb{R}^n}}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} < \infty.$

Dann gilt: $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$

Beweis.

Der Beweis ist analog dem von Lemma 2.15, nur wird Satz 2.8 und Lemma 2.14 anstelle der Lemmata 2.4, 2.13 und der Sätze 2.6, 2.7 angewendet.

$\square$

Lemma 2.17.

Sei $1 < q < \infty,\ \underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ *und* $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.
Dann gilt

$$a)\ \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_H \partial_i u_k \partial_k \Phi_i dx =< div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \ \ \textit{für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$$

und

$$b)\ \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i v_k \partial_k \Psi_i dx =< div\underline{v}, div\underline{\Psi} >_{\mathbb{R}^n} \ \ \textit{für alle } \underline{\Psi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis.

a) Wegen Bemerkung 2.10 existiert eine Folge $\underline{u}^{(\nu)} \subset \underline{D}_G(H)$ mit
$\left\|\nabla\left(\underline{u}^{(\nu)} - \underline{u}\right)\right\|_{q,H} \to 0.$

und analog zu $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ eine Folge $\underline{\Phi}^{(\nu)} \subset \underline{D}_G(H)$ mit
$\left\|\nabla\left(\underline{\Phi}^{(\nu)} - \underline{\Phi}\right)\right\|_{q',H} \to 0.$

Sei $\underline{N} = -\underline{e}_n$ die äußere Normale von H. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_i u_k \partial_k \Phi_i dx &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_i u_k^{(\nu)} \partial_k \Phi_i^{(\nu)} dx \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \left[\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial H} \partial_i u_k^{(\nu)} N_k \Phi_i^{(\nu)} d\omega_x - \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_i \partial_k u_k^{(\nu)} \Phi_i^{(\nu)} dx \right] \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \left[- \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial H} \partial_i \underbrace{u_n^{(\nu)}}_{\in C_0^\infty(H)} \Phi_i^{(\nu)} d\omega_x - \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial H} \partial_k u_k^{(\nu)} N_i \Phi_i^{(\nu)} d\omega_x \right. \\
&\left. + \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_k u_k^{(\nu)} \partial_i \Phi_i^{(\nu)} dx \right] \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial H} \partial_k u_k^{(\nu)} \underbrace{\Phi_n^{(\nu)}}_{\in C_0^\infty(H)} d\omega_x + \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_k u_k^{(\nu)} \partial_i \Phi_i^{(\nu)} dx \right] \\
&=< div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H
\end{aligned}$$

b) Sei $\underline{\Psi} \in \underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_k \partial_k \Psi_i dx &= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i u_k^{(\nu)} \partial_k \Psi_i dx \\
&= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_k u_k^{(\nu)} \partial_i \Psi_i dx \\
&=< div\underline{u}, div\underline{\Psi} >_{\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

□

Satz 2.18.

Sei $1 < q < \infty$ *und* $-1 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.
Es gelten die dualen Funktionaldarstellungen bezüglich der Bilinearformen

$B_2(.,.,\lambda,H)$ *auf* $\underline{X}_G^{1,q}(H) \times \underline{X}_G^{1,q'}(H)$

und

$B_2(.,.,\lambda,\mathbb{R}^n)$ *auf* $\underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n) \times \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$.

Die Regularitätsaussagen von Lemma 2.15 und Korollar 2.16 gelten ebenfalls für die Bilinearformen $B_2(.,.,\lambda,H)$ *und* $B_2(.,.,\lambda,\mathbb{R}^n)$.

Beweis.

Wegen Lemma 2.17 gilt für $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$:

$$\begin{aligned} B_1(\underline{u},\underline{\Phi},\lambda,H) &= < \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \lambda < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \\ &= < \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H + < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \\ &+ (\lambda-1) < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \\ &= < \nabla\underline{u}, \nabla\underline{\Phi} >_H + \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \partial_i u_k \partial_k \Phi_i dx \\ &+ (\lambda-1) < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_H \\ &= B_2(\underline{u},\underline{\Phi},\lambda,H) \end{aligned}$$

Ebenso gilt für $\underline{v} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ und $\underline{\Psi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$:

$$B_1(\underline{v},\underline{\Psi},\lambda,\mathbb{R}^n) = B_2(\underline{v},\underline{\Psi},\lambda,\mathbb{R}^n)$$

□

3 Funktionaldarstellung in H_ω

Definition 3.1.

Sei mit $0 < R < 1$ *und* $1 < \xi < \infty$:
$M_{R,\xi} := \left\{\omega \in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1}) : \|\nabla\omega\|_\infty \leq R,\ \omega(0) = 0,\ \nabla\omega(0) = 0,\ supp(\omega) \subset B'_\xi(0)\right\}$
Für $\omega \in M_{R,\xi}$ *sei:*
$H_\omega := \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_n > \omega(x')\}$

Lemma 3.2.

Sei $1 < \xi < \infty$.
Es existiert $\rho_\xi \in C^\infty(\mathbb{R})$ *mit folgenden Eigenschaften:*
a) $0 \leq \rho_\xi \leq 1,\ \left|\rho'_\xi(t)\right| < \dfrac{2}{3\xi},\ \left|\rho''_\xi(t)\right| < \dfrac{C_1}{\xi^2}$
b) $\rho_\xi(t) = 0$ *für* $t \geq 4\xi$ *und* $\rho_\xi(t) = 1$ *für* $t \leq 2\xi$

Beweis.

Siehe [Mü] Bemerkung nach Lemma III.15.

□

Definition und Lemma 3.3.

Sei $0 < R < 1,\ 1 < \xi < \infty,\ \omega \in M_{R,\xi},\ \rho_\xi$ *wie in Lemma 3.2. Dann sei* $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definiert durch* $y'(x) := x'$ *und* $y_n(x) := x_n - \omega(x')\rho_\xi(x_n)$.
Dann gelten folgende Eigenschaften der Abbildung y :

1) $y|_{H_\omega} : H_\omega \to H$ *ist bijektiv.*
2) Die Jacobi-Determinante von $y(x)$ *ist* $J[y(x)] = 1 - \omega(x')\rho'_\xi(x_n)$ *und erfüllt* $J[y(x)] > \dfrac{1}{3}$ *für alle* $x \in H_\omega$.
3) Es existiert eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung x(.).
4) Die Jacobi-Determinante von $x(y)$ *ist* $J[x(y)] = \dfrac{1}{1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}$ *und erfüllt* $J[x(y)] > \dfrac{3}{5}$ *für alle* $y \in H$.
5) Es gilt:
$H \cap (\mathbb{R}^n \backslash B_{\sqrt{n}\xi}) = H_\omega \cap (\mathbb{R}^n \backslash B_{\sqrt{n}\xi})$ *und* $y(x) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n \backslash B_{4\sqrt{n}\xi}$

Beweis.

Zu 1)
Sei $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ und $y(x) = y(\hat{x})$. Dann folgt $x' = \hat{x}'$ und
$x_n - \omega(x')\rho_\xi(x_n) = \hat{x}_n - \omega(x')\rho_\xi(\hat{x}_n)$. Weiter mit Hilfe des Mittelwertsatzes ist
$x_n - \hat{x}_n = \omega(x')\left(\rho_\xi(x_n) - \rho_\xi(\hat{x}_n)\right) = \omega(x')\rho_\xi'(\eta)(x_n - \hat{x}_n)$.
Angenommen $x_n \neq \hat{x}_n,$ dann würde folgen $\omega(x')\rho_\xi'(\eta) = 1$. Mittels des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt wegen $\omega(0) = 0:$

$$|\omega(x')| = \left| \int_0^1 \nabla\omega(s \cdot x')x' ds \right| \leq \|\nabla\omega\|_\infty |x'| < R\xi \tag{3.3.1}$$

Somit ist dann $\left|\omega(x')\,||\,\rho_\xi'(\eta)\right| < \dfrac{2R\xi}{3\xi} < 1$, ein Widerspruch.

Sei x' fest gewählt und für $\omega(x') \leq z$ sei $f(z) := y_n(x', z)$.
Für $x_n > 4\xi$ ist $f(x_n) = x_n$ und für $\omega(x') \leq x_n \leq 4\xi$ ist
$f(\omega(x')) = \omega(x') - \omega(x') \cdot 1 = 0$. Weiter gilt $f(4\xi) = \omega(x') - \omega(x') \cdot 0 = 4\xi$.
Durch die Anwendung des Zwischenwertsatzes auf f im Intervall $[\omega(x'), 4\xi]$ folgt somit die Surjektivität.

Zu 2)
Wegen Lemma 3.2 und (3.3.1) folgt:

$$J[y(x)] = 1 - \omega(x')\rho_\xi'(x_n) \geq 1 - |\omega(x')| \left|\rho_\xi'(x_n)\right| > 1 - \frac{2}{3\xi}R\xi > \frac{1}{3}$$

Zu 4)
Wieder mittels Lemma 3.2 und (3.3.1) gilt:

$$1 - \omega(x')\rho_\xi'(x_n) \leq 1 + |\omega(x')| \left|\rho_\xi'(x_n)\right| \leq 1 + \frac{2}{3\xi}R\xi < \frac{5}{3}$$

Die restlichen Eigenschaften sind trivial oder folgen aus [Mü] Bemerkung nach Lemma III.15.

□

Hilfsrechnung 3.4.

Für x, y aus Definition 3.3 gilt weiter:

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x) = \delta_{ij} \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } i = 1, ..., n$$
$$\frac{\partial y_n}{\partial x_i}(x) = -\partial_i \omega(x')\rho'_\xi(x_n) \text{ für } i = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial y_n}{\partial x_n}(x) = 1 - \omega(x')\rho'_\xi(x_n) > \frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_k}(x) = 0 \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } i, k = 1, ..., n$$
$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_k}(x) = -\partial_i \partial_k \omega(x')\rho_\xi(x_n) \text{ für } i, k = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_n}(x) = -\partial_i \omega(x')\rho'_\xi(x_n) \text{ für } i = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_n}(x) = -\omega(x')\rho''_\xi(x_n)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y) = \delta_{ij} \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } i = 1, ..., n$$
$$\frac{\partial x_n}{\partial y_i}(y) = \frac{-\partial_i \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \text{ für } i = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial x_n}{\partial y_n}(y) = \frac{1}{1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} > \frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial y_k}(y) = 0 \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } i, k = 1, ..., n$$
$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial y_i \partial y_k}(y) = \frac{\partial_i \partial_k \omega(y')\rho_\xi(x_n(y)) + \partial_i \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\frac{\partial x_n}{\partial y_k}(y)}{1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}$$
$$+ \partial_i \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))\frac{\partial^2 x_n}{\partial y_k \partial y_n}(y) \text{ für } i, k = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial y_i \partial y_n}(y) = \frac{\partial_i \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y)) + \omega(y')\rho''_\xi(x_n(y))\frac{\partial x_n}{\partial y_i}(y)}{\big(1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\big)^2} \text{ für } i = 1, ..., n-1$$
$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial y_n \partial y_n}(y) = \frac{\omega(y')\rho''_\xi(x_n(y))}{\big(1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\big)^3}$$

Daraus folgt, dass x und y C^2-Diffeomorphismen sind.

Definition und Hilfssatz 3.5.

Sei $1 < q < \infty$. Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete. Weiter sei
$\underline{v} \in L^{1,q}(M), x : M \to M',\ y : M' \to M$ wobei $x \in C^2(M),\ y \in C^2(M')$
bijektiv seien mit $y = x^{-1}$ und $det(Dx) \neq 0,\ det(Dy) \neq 0$.
Für $x \in\ M'$ sei die Piola-Transformierte von $\underline{v}$:

$$\underline{\tilde{v}}(x) := (\det Dy)(x)(Dx)(y(x))\underline{v}(y(x))$$

Dann gilt:

$$div\underline{\tilde{v}}(x) = (\det Dy)(x)div\underline{v}(y(x)) \text{ für alle } x \in M'$$

Das übliche „Glattziehen“ des Randes (wähle den Diffeomorphismus $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $y(H_\omega) = H$ gemäß Definition 3.3) führt hier nicht zum Ziel, da die Randbedingung

$$\int\limits_{H_\omega} \underline{u}\nabla\Phi dx = -\int\limits_{H_\omega} div\underline{u}\Phi dx \text{ für alle } \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

(schwache Form von $\underline{u} \cdot \underline{N}|_{\partial H_\omega} = 0$)

i.A. nicht erhalten bleibt. Betrachtet man hingegen die mit diesem Diffeomorphismus gebildete Piola-Transformation eines Vektorfeldes auf H_ω, dessen Normalkomponente am Rande im schwachen Sinn verschwindet, so hat die Piola-Transformierte in H die gleiche Eigenschaft.

Definition und Bemerkung 3.6.

Sei $0 < R < 1$, $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q}(H)$ *und seien die Abbildungen* x, y *wie in Definition 3.3 erklärt.*
Sei $T(\underline{\Phi})(x) := (\det Dy)(x)(Dx)(y(x))\underline{\Phi}(y(x))$.
Weiter sei $T(\underline{X}_G^{1;q}(H)) := \left\{T(\underline{\Phi}) : \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q}(H)\right\}$.

Da x, y *(aus Definition 3.3) von* $\omega \in M_{R,\xi}$ *und somit von* R, ξ *abhängen, ist* $T(.)$ *ebenfalls von* R, ξ *abhängig.*

Hierbei sei stets $G \subset\subset H \backslash B_{4\sqrt{n}\xi}$ *gewählt. Dann ist* $y(G) = G$ *und* $x(G) = G$.

Es soll nun der Gradient von $\underline{\Phi}$ in Abhängigkeit von $T(\underline{\Phi})$ (bzw. umgekehrt) ausgedrückt werden. Die Anwendung von Produkt- bzw. Kettenregel führt zum Auftreten einer Reihe von Störtermen, die alle noch von der Funktion $\omega \in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$ und der Abschneidefunktion ρ_ξ abhängen.

Diese Störterme teilen wir in zwei Gruppen ein, die wir mit S bzw. K zusammenfassen:
Die mit S beziehungsweise S_T bezeichneten Terme können durch die Wahl von ω bzw. ρ_ξ in geeigneter Norm „klein“ gemacht werden.
Die mit K beziehungsweise K_T bezeichneten Terme erweisen sich in geeigneter Topologie als kompakt.

Bemerkung 3.7.

Da x, y C^2*-Diffeomorphismen sind, folgt:*

$$T(\Phi) \in \underline{L}_{loc}^1(H_\omega) \tag{3.7.1}$$

Mit $(Dx)(y(x)) = (Dy)^{-1}(x)$ *folgt*
$T(\underline{\Phi})(x) = (\det Dy)(x)(Dy)^{-1}(x)\underline{\Phi}(y(x))$ *und weiter*
$\underline{\Phi}(y(x)) = ((\det Dy)(x))^{-1}(Dy)(x)T(\underline{\Phi})(x)$ *und schließlich*

$$\underline{\Phi}(y) = ((\det Dy)(x(y)))^{-1}(Dy)(x(y))T(\underline{\Phi})(x(y)). \tag{3.7.2}$$

Betrachte nun:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}(y) &= \frac{\partial}{\partial y_k}\left[\left[1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\right]^{-1}(Dy)(x(y))T(\underline{\Phi})(x(y))\right]_j \\
&= \left[1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\right]^{-1}\underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x(y))T(\underline{\Phi})_i(x(y))\right]}_{=:A_{jk}} \\
&+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_k}\left[1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\right]^{-1}}_{B_k:=}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x(y))T(\underline{\Phi})_i(x(y))\right] \\
&\textit{für } j,k=1,...,n
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
A_{jk} = &\sum_{i,l=1}^{n}\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_i \partial x_l}(x(y))\frac{\partial x_l}{\partial y_k}(y)T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
&+\sum_{i,\nu=1}^{n}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x(y))\frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_\nu}(x(y))\frac{\partial x_\nu}{\partial y_k}(y) \textit{ für } j,k=1,...,n.
\end{aligned}
$$

$$
A_{jk} = \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_k}(x(y)) + \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_k}(x(y))\frac{\partial_k \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} \textit{ für } j,k=1,...,n-1.
$$

$$
A_{jn} = \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_n}(x(y))\frac{1}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} \textit{ für } j=1,...,n-1.
$$

$$
\begin{aligned}
A_{nk} = &- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y)) T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y') \rho'_\xi(x_n(y)) \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
&- \partial_k \omega(y') \rho'_\xi(x_n(y)) T(\underline{\Phi})_n(x(y)) \\
&- \omega(y') \rho''_\xi(x_n(y)) \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} T(\underline{\Phi})_n(x(y)) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y') \rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_k}(x(y)) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y') \rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_n}(x(y)) \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \\
&+ \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_k}(x(y)) \\
&+ \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_n}(x(y)) \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \ \textit{für } k = 1, ..., n-1.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{nn} = &- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y') \rho'_\xi(x_n(y)) \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
&- \omega(y') \rho''_\xi(x_n(y)) \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} T(\underline{\Phi})_n(x(y)) \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y') \rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_n}(x(y)) \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \\
&+ \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_n}(x(y))
\end{aligned}
$$

Weiter ist:

$$
\begin{aligned}
B_k &= \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y)) + \omega(y') \rho''_\xi(x_n(y)) \frac{\partial_k \omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}}{\left[1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\right]^2} \ \textit{für } k = 1, ..., n-1. \\
B_n &= \frac{\omega(y') \rho_\xi(x_n(y))}{\left[1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\right]^3}
\end{aligned}
$$

Definition 3.8.

Sei $0 < R < 1,\ x, y$ *wie in Definition 3.3,* $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ *und sei:*

$$S_{jk}^T(T(\underline{\Phi})) := \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_k}(x(y)) \left[\frac{1}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} - 1 \right.$$
$$\left. + \frac{\partial_k \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{\big(1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\big)^2} \right] \text{ für } j,k = 1,...,n-1.$$

$$S_{jn}^T(T(\underline{\Phi})) := \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_n}(x(y)) \left(\frac{1}{\big(1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\big)^2} - 1 \right)$$
$$\text{für } j = 1,...,n-1.$$

$$S_{nk}^T(T(\underline{\Phi})) := \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_k}(x(y)) \left(\frac{1}{\big(1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\big)^2} - 1 \right)$$
$$+ \frac{1}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} \left[-\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y')\rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_k}(x(y)) \right.$$
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y')\rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_n}(x(y)) \frac{\partial_k \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))}$$
$$\left. + \frac{1}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_n}(x(y)) \frac{\partial_k \omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} \right]$$
$$\text{für } k = 1,...,n-1.$$

$$S_{nn}^T(T(\underline{\Phi})) := \frac{\partial T(\underline{\Phi})_n}{\partial x_n}(x(y)) \left(\frac{1}{1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))} - 1 \right)$$
$$- \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i \omega(y')\rho_\xi(x_n(y)) \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_n}(x(y)) \frac{1}{\big(1-\omega(y')\rho_\xi'(x_n(y))\big)^2}$$

$$K^{T1}_{jk}(T(\underline{\Phi})) := 0 \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } k = 1, ..., n.$$

$$\begin{aligned}
K^{T1}_{nk}(T(\underline{\Phi})) := & \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}\Bigg[-\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\partial_k\omega(y')\rho_\xi(x_n(y))T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
& - \sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\frac{\partial_k\omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
& - \partial_k\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))T(\underline{\Phi})_n(x(y)) \\
& -\omega(y')\rho''_\xi(x_n(y))\frac{\partial_k\omega(y')\rho_\xi(x_n(y))}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))}T(\underline{\Phi})_n(x(y))\Bigg] \\
& \text{für } k = 1, ..., n-1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^{T1}_{nn}(T(\underline{\Phi})) := & \frac{1}{\left(1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\right)^2} \\
& \left[-\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))T(\underline{\Phi})_i(x(y)) - \omega(y')\rho''_\xi(x_n(y))T(\underline{\Phi})_n(x(y))\right]
\end{aligned}$$

$$K^{T2}_{jk}(T(\underline{\Phi})) := B_k T(\underline{\Phi})_j(x(y)) \text{ für } j = 1, ..., n-1 \text{ und } k = 1, ..., n.$$

$$\begin{aligned}
K^{T2}_{nk}(T(\underline{\Phi})) := & -\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))T(\underline{\Phi})_i(x(y)) \\
& + B_k\left(1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\right)T(\underline{\Phi})_n(x(y)) \text{ für } k = 1, ..., n.
\end{aligned}$$

Sei nun $K^T_{jk}(\underline{\Phi}) := K^{T1}_{jk}(\underline{\Phi}) + K^{T2}_{jk}(\underline{\Phi})$ *für* $j, k := 1, .., n$.

Es sind also alle Terme, in denen Ableitungen von $T(\underline{\Phi})(x(y))$ *auftreten in* S^T_{jk} *und die Terme, welche die nicht differenzierte Funktion* $T(\underline{\Phi})(x(y))$ *enthalten, in* K^T_{jk} *zusammengefasst.*

Seien S_{jk} *und* K_{jk} *die auf analoge Weise definierten Störterme der inversen Piolatransformation aus (3.7.2).*

Bemerkung 3.9.

Insgesamt gilt also für $j,k = 1,...,n$ *und* $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_k}(x(y)) + S_{jk}^T(T(\underline{\Phi}))(x(y)) + K_{jk}^T(T(\underline{\Phi}))(x(y))$$

Auf analoge Weise mit analogen Definitionen ist:

$$\frac{\partial T(\underline{\Phi})_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k}(y(x)) + S_{jk}(\underline{\Phi})(y(x)) + K_{jk}(\underline{\Phi})(y(x))$$

Lemma 3.10.

Sei $1 < q < \infty,\ 0 < R < \infty$.
Dann existiert ein $C = C(R) > 0$ *mit* $\|\Phi\|_{q,H\cap B_R} \leq C\,\|\nabla\Phi\|_{q,H}$
für alle $\Phi \in L_G^{1,q}(H)$.

Beweis.

Sei $\Phi \in L_G^{1,q}(H)$.
Setze Φ wie in Lemma 2.5 als in x_n gerade Funktion auf $\mathbb{R}^n$ fort und sei mit $\tilde{\Phi}$ diese Fortsetzung bezeichnet.
Sei nun $R' \geq R > 0$ so gewählt, dass $\emptyset \neq G \subset\subset B_{R'}$.
Mit $c_\Phi := \dfrac{1}{|B_{R'}|}\displaystyle\int_{B_{R'}} \tilde{\Phi}(z)dz$ und $C_p = C_p(R') > 0$ gilt nach der Poincaréungleichung:

$$\left\|\tilde{\Phi} - c_\Phi\right\|_{q,B_{R'}} \leq C_p \left\|\nabla\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}}$$

Weiter gilt:

$$\left\|\tilde{\Phi} - c_\Phi\right\|_{q,B_{R'}} \geq \left\|\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}} - |c_\Phi|\,|B_{R'}|^{\frac{1}{q}}$$

Es ist $G \subset H$ und $\tilde{\Phi}\Big|_G = \Phi|_G$. Daher gilt:

$$|B_{R'}|\,|c_\Phi| = \left|\underbrace{\int_G \tilde{\Phi}(z)dz}_{=0} + \int_{B_{R'}\setminus G} \tilde{\Phi}(z)dz\right| = \left|\int_{B_{R'}\setminus G} \tilde{\Phi}(z)dz\right| \leq \left\|\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}} |B_{R'}\setminus G|^{\frac{1}{q'}}$$

Somit gilt weiter:

$$
\begin{aligned}
\left\|\tilde{\Phi}-c_\Phi\right\|_{q,B_{R'}} &\geq \left\|\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}}\left(1-\frac{|B_{R'}\backslash G|^{\frac{1}{q'}}}{|B_{R'}|}\,|B_{R'}|^{\frac{1}{q}}\right)\\
&= \left\|\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}}\underbrace{\left(1-\frac{|B_{R'}\backslash G|^{\frac{1}{q'}}}{|B_{R'}|^{\frac{1}{q'}}}\right)}_{=:C_{R',G}>0}
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
\left\|\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}}^q &= \int\limits_{B_{R'}\cap H}|\Phi(x)|^q\,dx+\int\limits_{B_{R'}\cap H_-}|\Phi(x',-x_n)|^q\,dx\\
&= \int\limits_{B_{R'}\cap H}|\Phi(x)|^q\,dx+\int\limits_{B_{R'}\cap H}|\Phi(x',x_n)|^q\,dx\\
&= 2\,\|\Phi\|_{q,B_{R'}\cap H}^q
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla\tilde{\Phi}\right\|_{q,B_{R'}}^q &= \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B_{R'}\cap H}|\partial_j\Phi(x)|^q\,dx+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{B_{R'}\cap H_-}|(\partial_j\Phi)\,(x',-x_n)|^q\,dx\\
&\quad+\int\limits_{B_{R'}\cap H_-}|-(\partial_n\Phi)\,(x',-x_n)|^q\,dx\\
&\quad= \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B_{R'}\cap H}|\partial_j\Phi(x)|^q\,dx+\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{B_{R'}\cap H}|\partial_j\Phi(x',x_n)|^q\,dx\\
&\quad= 2\,\|\nabla\Phi\|_{q,B_{R'}\cap H}^q\,.
\end{aligned}
$$

Also folgt insgesamt:

$$\|\Phi\|_{q,B_R\cap H}\leq\|\Phi\|_{q,B_{R'}\cap H}\leq C_{R,G}^{-1}C_p\,\|\nabla\Phi\|_{q,H}$$

□

Lemma 3.11.

Sei $1 < q < \infty,\ 0 < R < \infty$.
Dann existiert ein $C = C(R) > 0$ *mit* $\|\Phi\|_{q,H\cap B_R} \leq C\,\|\nabla\Phi\|_{q,H}$ *für alle* $\Phi \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$.

Beweis.

Für $\Phi \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ liefert [Si2] Theorem 3.1:
Mit $a > 0$ und $H_a := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < a\}$ gilt $\|\Phi\|_{q,H_a} \leq a\,\|\nabla\Phi\|_{q,H_a}$.

Sei nun $a := 2R$ so ist:

$$\|\Phi_n\|_{q,H\cap B_R} \leq \|\Phi_n\|_{q,H_{2R}} \leq 2R\,\|\nabla\Phi_n\|_{q,H_{2R}} \leq 2R\,\|\nabla\Phi_n\|_{q,H}$$

□

Lemma 3.12.

Sei $1 < q < \infty,\ 0 < R < \infty$.
Dann existiert ein $C = C(R) > 0$ *mit* $\|\underline{\Phi}\|_{q,H\cap B_R} \leq C\,\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H}$ *für alle* $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.

Beweis.

Sei $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.
Es ist $\Phi_i \in L_G^{1,q}(H)$ für $i = 1, ..., n-1$. Mit Lemma 3.10 folgt :

$$\|\Phi_i\|_{q,H\cap B_R} \leq C_i\,\|\nabla\Phi_i\|_{q,H}$$

Für $\Phi_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ liefert Lemma 3.11:

$$\|\Phi_i\|_{q,H\cap B_R} \leq C_n\,\|\nabla\Phi_i\|_{q,H}$$

Somit folgt die Behauptung mit $C = \left(\sum_{i=1}^{n} C_i^q\right)^{\frac{1}{q}} > 0$.

□

Lemma 3.13.

Sei $1 < q < \infty$. Für $j,k = 1,...,n$ ist $K_{j,k} : \underline{X}_G^{1,q}(H) \to L^q(H)$ ein kompakter Operator.

Beweis.

a) Sei $v \in L_G^{1,q}(H),\ G \subset\subset H,\ G^- := \{x \in \mathbb{R}^n : (x', -x_n) \in G\}$ und sei $\tilde{G} := G \cup G^-$. Daraus folgt $\tilde{G} \subset\subset \mathbb{R}^n$.

Sei $\tilde{v}$ wie in Lemma 2.5 definiert. Dann ist $\tilde{v} \in L_{\tilde{G}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.
Für $0 < R < \infty$ ist $\tilde{v}|_{B_R} \in W^{1,q}(B_R)$ und es existiert ein $C > 0$ mit $\|\tilde{v}\|_{q,B_R} \leq C \|\nabla \tilde{v}\|_{q,\mathbb{R}^n}$ für alle $\tilde{v} \in L_{\tilde{G}}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Beweis von Lemma 3.10).

Weiter gilt:

$$\|\nabla \tilde{v}\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq 2 \|\nabla v\|_{q,H}.$$

Sei nun $v_\nu \subset L_G^{1,q}(H)$ eine Folge mit $\|\nabla v_\nu\|_{q,H} \leq M$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
Dann gilt für die Folge der Fortsetzungen $\tilde{v}_\nu|_{B_R} \subset W^{1,q}(B_R)$ und

$$\|\tilde{v}_\nu\|_{q,B_R} \leq C \|\nabla \tilde{v}_\nu\|_{q,\mathbb{R}^n} \leq 2C \|\nabla v_\nu\|_{q,H} \leq 2CM.$$

Somit ist $(\tilde{v}_\nu)$ eine in $W^{1,q}(B_R)$ beschränkte Folge. Also existiert eine Teilfolge $\tilde{v}_{\nu_k} \subset W^{1,q}(B_R)$ und ein $\tilde{v}_0 \in W^{1,q}(B_R)$ mit $\tilde{v}_{\nu_k}|_{B_R} \xrightarrow{w} \tilde{v}_0$.

Wegen der Kompaktheit der Einbettung $J : W^{1,q}(B_R) \to L^q(B_R)$ (Satz von Rellich) ist $\|\tilde{v}_{\nu_k} - \tilde{v}_0\|_{q,B_R} \to 0$ und daher auch

$$\|v_{\nu_k} - v_0\|_{q,B_R \cap H} \to 0 \text{ mit } v_0 := \tilde{v}_0|_{B_R \cap H}. \tag{3.13.1}$$

b) Für $v \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ folgt mit Lemma 3.12:

$$\|v\|_{q,B_R \cap H} \leq \|\nabla v\|_{q,H}$$

Setze $\tilde{v}(y) := \begin{cases} v(y) & \text{für } y_n > 0 \\ -v(y', -y_n) & \text{für } y_n \leq 0 \end{cases}.$

Mit [Si/So] Lemma 2.3 folgt dann $\tilde{v}|_{B_R} \in W^{1,q}(B_R)$ und

$$\|\tilde{v}\|_{q,B_R} \leq 2^{\frac{1}{q}} \|v\|_{q,H \cap B_R} \leq 2^{\frac{1}{q}} C \|\nabla v\|_{q,H} \leq C' \|\nabla \tilde{v}\|_{q,\mathbb{R}^n} \text{ mit } C' > 0.$$

Analog zu den vorherigen Ausführungen folgt für eine beschränkte Folge $(v_\nu) \subset \hat{H}_0^{1,q}(H)$ die Existenz einer Teilfolge (v_{ν_k}) und eines $v_0 \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ mit

$$v_{\nu_k} \xrightarrow{w} v_0 \text{ in } \hat{H}_0^{1,q}(H) \text{ und } \|v_{\nu_k} - v_0\|_{q,B_R \cap H} \to 0. \tag{3.13.2}$$

Sei nun $\underline{v}_\nu \subset \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit $\|\nabla \underline{v}_\nu\|_{q,H} \leq M$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
Mit (3.13.1) und (3.13.2) folgt, dass eine Teilfolge $\underline{v}_{\nu_k} \subset \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und ein $\underline{v}_0 \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ existiert mit $\underline{v}_{\nu_k} \xrightarrow{w} \underline{v}_0$ in $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $\left\|\underline{v}_{\nu_k} - \underline{v}_0\right\|_{q,B_R \cap H} \to 0$ für $R > 0$.

c) Alle Terme K_{jk} sind von der Struktur $K_{jk}(\underline{\Phi}) = \gamma_{jk}(\omega, \rho)(y(x))\underline{\Phi}(y(x))$ für alle $j, k = 1, ..., n$ wobei $\gamma \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Es existiert ein $R > 0$ mit $supp(\gamma) \subset B_R$.
Somit folgt mittels Beweisteil a):

$$\begin{aligned}\left\|K_{jk}(\underline{v}_{\nu_k}) - K_{jk}(\underline{v}_0)\right\|_{q,H} &= \left\|K_{jk}(\underline{v}_{\nu_k}) - K_{jk}(\underline{v}_0)\right\|_{q,H \cap B_R} \\ &\leq \underbrace{\|\gamma\|_\infty}_{\leq C} \left\|\underline{v}_{\nu_k} - \underline{v}_0\right\|_{q,B_R \cap H} \to 0\end{aligned}$$

□

Lemma 3.14.

Sei $1 < q < \infty$, $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.
Dann gilt $T(\underline{\Phi}) \in L^{1,q}(H_\omega)$ und es existiert ein $C > 0$ mit
$\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega} \leq C \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H}$ *für alle $\Phi \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.*

Beweis.

Wegen (3.7.1) ist $T(\underline{\Phi}) \in L^1_{loc}(H_\omega)$.

Weiter gilt mit $C' > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega}^q \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \|\partial_k T(\Phi)_i\|_{q,H_\omega}^q \, dx \\
&\underset{\text{Bemerkung 3.9}}{=} \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \left| \frac{\partial \underline{\Phi}_i}{\partial y_k}(y(x)) + S_{ik}(\underline{\Phi}))(y(x)) + K_{ik}(\underline{\Phi})(y(x)) \right|^q dx \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \left| \frac{1}{1-\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} \right| \left| \frac{\partial \underline{\Phi}_i}{\partial y_k}(y) + S_{ik}(\underline{\Phi})(y) + K_{ik}(\underline{\Phi})(y) \right|^q dy \\
&\underset{\text{(Hölder Summe)}}{\leq} C' \sum_{i,k=1}^{n} \int_H \left[\left| \frac{\partial \underline{\Phi}_i}{\partial y_k}(y) \right|^q + |S_{ik}(\underline{\Phi})(y)|^q + |K_{ik}(\underline{\Phi})(y)|^q \right] dy
\end{aligned}
$$

Für alle $k, i = 1, ..., n$ existieren $C'' > 0,\ C_{ik} > 0,\ R > 0$, so dass gilt

$$\int_H |K_{ik}(\underline{\Phi})|^q \, dx \leq C'' C_{ik} \, \|\underline{\Phi}\|_{q,H\cap B_R}^q$$

und

$$\int_H |S_{ik}(\underline{\Phi})|^q \, dx \leq C'' C_{ik} \, \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H}^q \, .$$

Wobei die C_{ik} von Produkten der Größen $\|\nabla\omega\|_\infty^q$, $\left\|\nabla^2\omega\right\|_\infty^q$, $\|\rho_\xi\|_\infty^q$, $\left\|\rho'_\xi\right\|_\infty^q$, $\left\|\rho''_\xi\right\|_\infty^q$ abhängen. Mit Lemma 3.12 folgt somit:

$$\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega} \leq C \, \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H} \ \text{ mit } C > 0$$

$\square$

Lemma 3.15.

Sei $1 < q < \infty$. Seien $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete mit $\partial M,\ \partial M' \in C^0$. Weiter sei $\underline{v} \in \underline{L}^{1,q}(M), x : M \to M',\ y : M' \to M$ wobei $x \in C^2(M),\ y \in C^2(M')$ bijektiv seien mit $y = x^{-1}$ und $det(Dx) \neq 0,\ det(Dy) \neq 0$.

Weiter gelte:

i) Es existieren $C_1, C_2 > 0$ mit $C_1 \leq |\det Dy(x)| \leq C_2$ für alle $x \in M$.

ii) $\left|\dfrac{\partial x_k}{\partial y_i}(y)\right| \leq C$ und $\left|\dfrac{\partial y_k}{\partial x_i}(x)\right| \leq C$ für alle $k, i = 1, ..., n$

Sei

$$\underline{\tilde{v}}(x) := (\det Dy)(x)(Dx)(y(x))\underline{v}(y(x)) \in \underline{L}^{1,q}(M')$$

und

$$\int\limits_M \underline{v}(y)\nabla f(y)dy = -\int\limits_M div\underline{v}(y)f(y)dy \text{ für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Dann gilt für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int\limits_{M'} \underline{\tilde{v}}(x)\nabla f(x)dx = -\int\limits_{M'} div\underline{\tilde{v}}(x)f(x)dx$$

Beweis.

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Mit $g(y) := f(x(y))$ für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann: $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
Es ist weiter

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)$$

und aus $(Dx)(y(x)) = (Dy)^{-1}(x)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y(x)) = \delta_{ki}.$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{M'} \underline{\tilde{v}}(x)\nabla f(x)dx &= \int\limits_{M'} (\det Dy)(x)(Dx)(y(x))\underline{v}(y(x))\nabla f(x)dx \\
&= \int\limits_{M'} (\det Dy)(x) \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial y_i}(y(x))\underline{v}_i(y(x))\frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))\frac{\partial y_k}{\partial x_j}(x)dx \\
&= \int\limits_{M'} (\det Dy)(x) \sum_{k=1}^{n} \underline{v}_k(y(x))\frac{\partial g}{\partial y_k}(y(x))dx \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} \int\limits_{M} sgn\left[(\det Dy)(x(y))\right]\underline{v}(y)\nabla g(y)dy
\end{aligned}$$

Da $x, y \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und M ein Gebiet ist, folgt:

$sgn\left[(\det Dy)(x(y))\right] = const$ für alle $y \in M$

Also gilt weiter:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{M'} \underline{\tilde{v}}(x)\nabla f(x)dx \\
&= sgn\left[(\det Dy)\right] \int\limits_{M} \underline{v}(y)\nabla g(y)dy \underset{\text{(Vor)}}{=} -sgn\left[(\det Dy)\right] \int\limits_{M} div\underline{v}(y)g(y)dy \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} -sgn\left[(\det Dy)\right] \int\limits_{M'} \left|(\det Dy)(x)\right| (div\underline{v})(y(x))g(y(x))dx \\
&\underset{\text{(Piola)}}{=} -\int\limits_{M'} div\underline{\tilde{v}}(x)f(x)dx
\end{aligned}$$

$\square$

Satz und Definition 3.16.

Sei $1 < q < \infty$.
Es gilt:

$$T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) = \underline{Y}_G^{1,q}(H_\omega) := \left\{ \underline{\Psi} \in \underline{Y}^{1,q}(H_\omega) : \int\limits_G \underline{\Psi}_i dy = 0 \textit{ für i=1,...,n-1} \right\}$$

Beweis.

a) Wegen Lemma 2.3 ist:

$$\underline{X}_G^{1,q}(H) = \left\{ \underline{\Psi} \in \underline{Y}^{1,q}(H) : \int\limits_G \underline{\Psi}_i dy = 0 \text{ für i=1,...,n-1} \right\}$$

Also folgt mit den Lemmata 3.14 und 3.15:

$$T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) \subset \left\{ \underline{\Psi} \in \underline{Y}^{1,q}(H_\omega) : \int\limits_G \underline{\Psi}_i dy = 0 \text{ für i=1,...,n-1} \right\}$$

b) Sei $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(H_\omega)$.
Wegen (3.7.2) ist für $y \in H$:

$$T^{-1}(\underline{v})(y) = ((\det Dy)(x(y)))^{-1}(Dy)(x(y))\underline{v}(x(y))$$

Da x, y C^2-Diffeomorphismen sind, folgt

$$T^{-1}(\underline{v}) \in L^1_{loc}(H).$$

Wieder gilt für $i, j, k, l = 1, ..., n$

$$\frac{\partial T^{-1}(\underline{v})_j}{\partial y_k}(y) = \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x(y)) + \tilde{S}_{jk}(\underline{v})(x(y)) + \tilde{K}_{jk}(\underline{v})(x(y))$$

wobei gilt

$$\tilde{S}_{jk}(\underline{v})(x(y)) = \sum_{i,l=1}^{n} \gamma_{ijkl} \frac{\partial v_i}{\partial x_l}(x(y)) \text{ mit } \gamma_{ijkl} \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\tilde{K}_{jk}(\underline{v})(x(y)) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ijk} v_i(x(y)) \text{ mit } \delta_{ijk} \in C_0^0(\mathbb{R}^n).$$

Aus Bemerkung 1.3 c) folgt $v_i \in L^q(H_\omega \cap B_R)$ für alle $R > 0$.
Daraus folgt:

$$\int\limits_H \left| \frac{\partial T^{-1}(\underline{v})_j}{\partial y_k}(y) \right|^q dy < \infty$$

Somit ist $T^{-1}(\underline{v}) \in L^{1,q}(H)$ und mit Lemma 3.15 folgt $T^{-1}(\underline{v}) \in \underline{Y}^{1,q}(H)$.
Wegen Lemma 2.3 ist dann $T^{-1}(\underline{v}) \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und somit $\underline{v} \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.

□

Wir benötigen noch eine Poincaré-Ungleichung für die nachfolgend definierte Menge M (=Bild der Halbkugel B_R^+ unter der Abbildung $x : H \to H_\omega$).
Da diese Menge weder einen glatten Rand hat noch konvex zu sein braucht, folgt die Behauptung nicht aus den „üblichen“ Voraussetzungen über die Gültigkeit der Poincaré-Abschätzung.

Lemma 3.17.

Sei $1 < q < \infty$, $0 < R < \infty$ und seien die Abbildungen $y : H_\omega \to H$ bzw. $x : H \to H_\omega$ wie in Definition 3.3 erklärt. Sei $M := \left\{x(y) : y \in B_R^+\right\} \subset H_\omega$.

Dann gibt es ein $C > 0$ derart, dass $\|u\|_{q,M} \leq C \|\nabla u\|_{q,M}$ für alle $u \in W^{1,q}(M)$ mit $\int\limits_M u(x)dx = 0$ gilt.

Beweis.

Angenommen, die Behauptung sei falsch, dann existiert eine Folge $(u_\nu) \subset W^{1,q}(M)$ mit:

$$\int\limits_M u_\nu(x)dx = 0,\ \|u_\nu\|_{q,M} = 1 \text{ und } \|\nabla u_\nu\|_{q,M} \to 0$$

Sei $\tilde{u}_\nu(y) := u_\nu(x(y))$ für $y \in B_r^+$. Dann folgt $\tilde{u}_\nu \in W^{1,q}(B_R^+)$.

Es ist:

$$\int\limits_{B_r^+} |\tilde{u}_\nu(y)|^q \, dy = \int\limits_M |u_\nu(x)|^q \, |J\,[y(x)]| \, dx$$

Daher folgt mittels Lemma 3.3:

$$C_1 \|u_\nu\|_{q,M} \leq \|\tilde{u}_\nu\|_{q,B_R^+} \leq C_2 \|u_\nu\|_{q,M} \text{ mit } C_i > 0,\ i = 1,2 \tag{3.17.1}$$

Weiter gilt für alle $y \in B_r^+$:

$$\partial_i \tilde{u}_\nu(y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k u_\nu\right)(x(y)) \frac{\partial x_k}{\partial y_i}(y)$$

Wegen $\left|\frac{\partial x_k}{\partial y_i}(y)\right| \leq C$ folgt die Existenz eines $C' > 0$ mit:

$$|\nabla \tilde{u}_\nu(y)| \leq C' \left|\left(\nabla u_\nu\right)(x(y))\right| \text{ für alle } y \in B_r^+$$

Also ist:

$$\begin{aligned}\|\nabla \tilde{u}_\nu\|_{q,B_R^+} &\leq C' \left(\int_{B_R^+} |\nabla u_\nu(x(y))|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} = C' \left(\int_M |\nabla u_\nu(x)|^q \, |J\left[y(x)\right]| \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C'' \|\nabla u_\nu\|_{q,M} \to 0 \text{ für } \nu \to \infty\end{aligned}$$

Sei $c_\nu := \frac{1}{|B_R^+|} \int_{B_R^+} \tilde{u}_\nu(z) dz$.

Mit der Hölderungleichung folgt $|c_\nu| \leq C_3$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge c_{ν_j} mit $c_{\nu_j} \to c$.

Sei im Weiteren diese Teilfolge wieder mit c_ν bezeichnet.

Mit der Poincaréungleichung folgt dann:

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\mu\|_{q,B_R^+} - \left|B_R^+\right|^{\frac{1}{q}} |c_\nu - c_\mu| &\leq \|(\tilde{u}_\nu - c_\nu) - (\tilde{u}_\mu - c_\mu)\|_{q,B_R^+} \\ &\leq C \left\|\nabla\left(\tilde{u}_\nu - \tilde{u}_\mu\right)\right\|_{q,B_R^+} \to 0\end{aligned}$$

Also existiert ein $\tilde{u} \in L^q(B_R^+)$ mit $\|\tilde{u} - \tilde{u}_\nu\|_{q,B_R^+} \to 0$.

Sei $u(x) := \tilde{u}(x(y))$.

Dann ist $u \in L^q(M)$ und wegen (3.17.1) gilt:

$$\|u - u_\nu\|_{q,M} \leq C_1^{-1} \|\tilde{u} - \tilde{u}_\nu\|_{q,B_R^+} \to 0$$

Für alle $\Phi \in C_0^\infty(M)$ ist:

$$\int\limits_M u(y)\partial_i\Phi(y)dy = \lim_{\nu\to\infty}\int\limits_M u_\nu(y)\partial_i\Phi(y)dy = -\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_M \partial_i u_\nu(y)\Phi(y)dy = 0$$

Daraus folgt $\nabla u = 0$ und somit $\hat{c} := u = const.$
Aber wegen

$$\hat{c}\,|M| = \int\limits_M u(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\int\limits_M u_\nu(x)dx = 0$$

folgt $u = 0$.

Dieses steht im Widerspruch zu $\|u\|_{q,M} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\|u_\nu\|_{q,M} = 1.$

$\square$

In unserer Anwendung verfügen wir nicht über die Information $\int\limits_M udx = 0,$

sondern nur über $\int\limits_G udx = 0,$ wobei $G \subset\subset M.$

Dieser Fall wird nun betrachtet.

Lemma 3.18.

Sei $1 < q < \infty$ *und* $1 < \xi < \infty$.
Weiter sei $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ *in Abhängigkeit (siehe Bemerkung 3.6) von* ξ *mit* $G \subset\subset H \backslash B_{4\sqrt{n}\xi}$ *gewählt.*
Sei $r := 4\sqrt{n}\xi$ *und* $r < r' < \infty$ *mit* $G \subset\subset B_{r'}$. *Sei weiter* $M' := H_\omega \cap B_{r'}$.

Dann existiert ein $C > 0$ *mit* $\|u\|_{q,M'} \le C \|\nabla u\|_{q,M'}$ *für alle* $u \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.

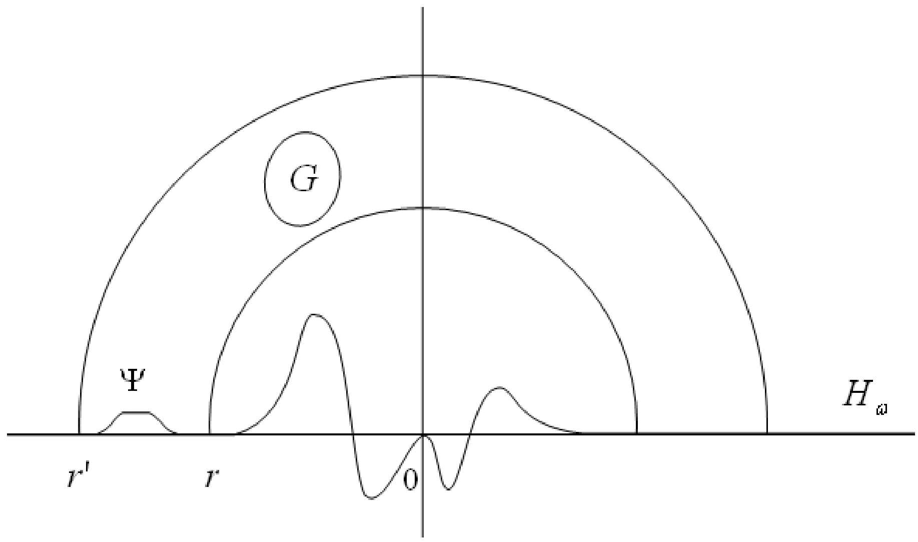

Abbildung 1

Beweis.

Angenommen, die Behauptung sei falsch, dann existiert eine Folge $(\underline{u}_\nu) \subset T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit $\|\underline{u}_\nu\|_{q,M'} = 1$ und $\|\nabla \underline{u}_\nu\|_{q,M'} \to 0$.
Sei $\underline{c}_\nu := \frac{1}{|M'|} \int\limits_{M'} \underline{u}_\nu(z)dz$. Dann folgt mit Lemma 3.17:

$$\|\underline{u}_\nu - \underline{c}_\nu\|_{q,M'} \le C_1 \|\nabla \underline{u}_\nu\|_{q,M'} \text{ mit } C_1 > 0 \tag{3.18.1}$$

Mit der Hölderungleichung folgt $|\underline{c}_\nu| \le C_2$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
Daraus folgt die Existenz einer Teilfolge $\underline{c}_{\nu_j}$ mit $\underline{c}_{\nu_j} \to \underline{c}$.
Sei im Weiteren diese Teilfolge wieder mit c_ν bezeichnet.
Mit (3.18.1) folgt dann:

$$\left\|\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu\right\|_{q,M'} - |M'|^{\frac{1}{q}} \left|\underline{c}_\nu - \underline{c}_\mu\right| \le C_1 \left\|\nabla \left(\underline{u}_\nu - \underline{u}_\mu\right)\right\|_{q,M'} \to 0$$

Also existiert ein $\underline{u} \in L^q(M')$ mit $\|\underline{u} - \underline{u}_\nu\|_{q,M'} \to 0$.

Für alle $\Phi \in C_0^\infty(M')$ gilt:

$$\int\limits_{M'} \underline{u}(y)\partial_i\Phi(y)dy = \lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{M'} \underline{u}_\nu(y)\partial_i\Phi(y)dy = -\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_{M'} \partial_i\underline{u}_\nu(y)\Phi(y)dy = 0$$

Daraus folgt die Existenz der schwachen Ableitung $\partial_i\underline{u} \in \underline{L}^q(M')$ und $\nabla\underline{u} = \underline{0}$.

Mit der Hölderungleichung folgt $\underline{c}_\nu \to \dfrac{1}{|M'|}\displaystyle\int\limits_{M'} \underline{u}(z)dz = \underline{c}$.

Also ist mit (3.18.1) $\|\underline{u} - \underline{c}\|_{q,M'} \leq C_3 \|\nabla\underline{u}\|_{q,M'} = 0$ mit $C_3 > 0$
und daher ist $\underline{u} = \underline{c}$.

Wegen Satz 3.16 gilt für alle $\Psi \in C_0^\infty(B_{r'})$:

$$\int\limits_{M'} \underline{u}_\nu \nabla\Psi dx = -\int\limits_{M'} div\underline{u}_\nu \Psi dx$$

Also folgt wieder mit der Hölderungleichung $\displaystyle\int\limits_{M'} \underline{u}\nabla\Psi dx = 0$ für alle $\Psi \in C_0^\infty(B_{r'})$.

Mittels des Satzes von Gauß ist:

$$0 = \int\limits_{M'} \sum_{i=1}^n \underline{c}_i\partial_i\Psi(x)dx = \int\limits_{\partial H_\omega\cap B_{r'}} \sum_{i=1}^n \underline{c}_i N_i(x)\Psi(x)dx \text{ für alle } \Psi \in C_0^\infty(B_{r'})$$

Andererseits gilt (vgl. Satz 3.16)

$$c_i\,|G| = \int\limits_G \underline{u}_i dx = \lim_{\nu\to\infty}\int\limits_G \underline{u}_{i\nu} dx = 0$$

und somit $\underline{c}_i = 0$ für alle $i = 1, ..., n-1$.

Also ist $0 = \displaystyle\int\limits_{\partial H_\omega\cap B_{r'}} \underline{c}_n N_n(x)\Psi(x)dx$ für alle $\Psi \in C_0^\infty(B_{r'})$.

Sei nun $\Psi \in C_0^\infty(B_{r'} \backslash B_r)$ mit $0 \leq \Psi \leq 1$, $\Psi(x) = 1$ für alle $\frac{1}{4}(r'-r) + r < |x| < \frac{3}{4}(r'-r) + r$. (Siehe dazu ebenfalls Abbildung 1.)

Dann ist $0 = -\int\limits_{\partial H_\omega \cap B_{r'}} \underline{c}_n \Psi(x) dx$ und wegen $\int\limits_{\partial H_\omega \cap B_{r'}} \Psi(x) dx > 0$, ist $\underline{c}_n = 0$.

Also folgt $\underline{u} = \underline{0}$ im Widerspruch zu $\|\underline{u}\|_{q,M'} = 1$.

$\square$

In Lemma 3.14 wurde die Abschätzung $\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega} \leq C \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H}$ gezeigt. Nun soll umgekehrt $\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H}$ durch $\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega}$ abgeschätzt werden.

Lemma 3.19.

Sei $1 < q < \infty$ und sei $T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.
Dann gilt $\underline{\Phi} \in L^{1,q}(H)$ und es existiert ein $C > 0$ mit
$\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H} \leq C \|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega}$ *für alle $\Phi \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.*

Beweis.

Wegen (3.7.2) ist $\underline{\Phi} \in L^1_{loc}(H)$.

Weiter gilt mit $C' > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H}^q \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \|\partial_k \Phi_i\|_{q,H}^q \, dy \\
&\underset{\text{Bemerkung 3.9}}{=} \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_H \left| \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_k}(x(y)) + S_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x(y)) + K_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x(y)) \right|^q dy \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{H_\omega} \left| 1 - \omega(x')\rho'_\xi(x_n) \right| \left| \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_k}(x) + S_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x) + K_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x) \right|^q dx \\
&\underset{\text{(Hölder Summe)}}{\leq} C' \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{H_\omega} \left[\left| \frac{\partial T(\underline{\Phi})_i}{\partial x_k}(x) \right|^q + \left| S_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x) \right|^q + \left| K_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))(x) \right|^q \right] dx
\end{aligned}
$$

Für alle $k, i = 1, ..., n$ existieren $C'' > 0,\ C_{jk} > 0,\ R > 0$, so dass gilt

$$\int\limits_{H_\omega} \left|K_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))\right|^q dx \leq C'' C_{ik} \left\|T(\underline{\Phi})\right\|_{q,H_\omega \cap B_R}^q$$

und

$$\int\limits_{H_\omega} \left|S_{ik}^T(T(\underline{\Phi}))\right|^q dx \leq C'' C_{ik} \left\|\nabla T(\underline{\Phi})\right\|_{q,H_\omega}^q .$$

Wobei die C_{jk} von Produkten der Größen $\|\nabla\omega\|_\infty^q$, $\left\|\nabla^2\omega\right\|_\infty^q$, $\|\rho_\xi\|_\infty^q$, $\left\|\rho_\xi'\right\|_\infty^q$, $\left\|\rho_\xi''\right\|_\infty^q$ abhängen. Mit Lemma 3.18 folgt somit:

$$\left\|\nabla\underline{\Phi}\right\|_{q,H} \leq C \left\|\nabla T(\underline{\Phi})\right\|_{q,H_\omega} \text{ mit } C > 0$$

□

Lemma 3.20.

Sei $1 < q < \infty$.
Für $j, k = 1, ..., n$ *ist* $K_{j,k}^T : T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) \to L^q(H_\omega)$ *ein kompakter Operator.*

Beweis.

Sei nun $T(\underline{v}_\nu) \subset T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit $\left\|\nabla T(\underline{v}_\nu)\right\|_{q,H_\omega} \leq M$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
Dann folgt mit Lemma 3.19:

$$\left\|\nabla\underline{v}_\nu\right\|_{q,H} \leq C \left\|\nabla T(\underline{v}_\nu)\right\|_{q,H_\omega} \leq CM$$

Gemäß Beweisteil a) von Lemma 3.13 folgt die Existenz einer Teilfolge $\underline{v}_{\nu_k}$ und $\underline{v}_0 \in L^q(H \cap B_R)$ mit

$$\left\|\underline{v}_{\nu_k} - \underline{v}_0\right\|_{q,B_R \cap H} \to 0 \text{ für alle } R > 0. \tag{3.20.1}$$

Alle Terme K_{jk}^T sind ebenfalls von der Struktur
$K_{jk}^T(\underline{\Phi})(y) = \gamma_{jk}(\omega, \rho)(x(y))T(\underline{\Phi}(x(y)))$ für alle $j, k = 1, ..., n$ mit $\gamma_{jk} \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Es existiert ein $R' > 0$ mit $supp(\gamma) \subset B_{R'}$.

Somit ist :

$$
\begin{aligned}
&\left\|K_{jk}^T(T(\underline{v}_{\nu_k})) - K_{jk}^T(T(\underline{v}_0))\right\|_{q,H_\omega} \\
&= \left\|K_{jk}^T(T(\underline{v}_{\nu_k})) - K_{jk}^T(T(\underline{v}_0))\right\|_{q,H_\omega \cap B_{R'}} \\
&\leq \underbrace{\|\gamma\|_\infty}_{\leq C} \left\|T(\underline{v}_{\nu_k}) - T(\underline{v}_0)\right\|_{q,B_{R'}\cap H_\omega} \\
&\leq C \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_{B_{R'}\cap H_\omega} \left| (\det Dy)(x) \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y(x)) \left(v_{\nu_k}(y(x)) - v_0(y(x))\right)_j \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{\leq} C' \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_{B_{R'}\cap H} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) \left(v_{\nu_k}(y) - v_0(y)\right)_j \right|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\underset{\text{(Hölder Summe)}}{\leq} C'' \left\|\underline{v}_{\nu_k} - \underline{v}_0\right\|_{q,B_{R'}\cap H} \to 0 \text{ mit } (3.20.1)
\end{aligned}
$$

□

Lemma 3.21.

Sei $1 < q < \infty$. Dann gilt:

Aus $\underline{\Phi}_\nu \xrightarrow{w} \underline{\Phi}$ in $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ folgt $T(\underline{\Phi}_\nu) \xrightarrow{w} T(\underline{\Phi})$ in $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.

Beweis.

Sei $T(\underline{v}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.
Es ist $\nabla : T(\underline{X}_G^{1,q}) \to \underline{\underline{L}}^q(H_\omega)$ mit $T(\underline{v}) \to \nabla T(\underline{v})$
und es ist $T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) \to \left\{\nabla T(\underline{v}) : T(\underline{v}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))\right\} := M$
isometrisch isomorph.

Sei nun $F^* \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))^*$ und sei $\tilde{F}^*(\nabla T(\underline{\Phi})) := F^*(T(\underline{\Phi}))$.
Somit folgt: $\tilde{F}^*$ ist stetig und linear auf M.
Da M ein linearer Teilraum von $\underline{\underline{L}}^q(H_\omega)$ ist, folgt
mit Hahn-Banach die Existenz der Fortsetzung $\hat{F}^*$ auf $\underline{\underline{L}}^q(H_\omega)$.

Im Falle $1 < q < \infty$ ist die Hahn-Bannach-Fortsetzung $\hat{F}^*$ eines auf einem Unterraum von $L^q(G)$ ($G \subset \mathbb{R}^n$ messbar) definierten und dort stetigen linearen Funktionals F auf ganz $L^q(G)$ eindeutig bestimmt.

Zu $\hat{F}^*$ existiert daher genau ein $\underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{L}}^{q'}(H_\omega)$ mit

$$\left\|\underline{\underline{g}}\right\|_{q',H_\omega} = \left\|\hat{F}^*\right\|_{\underline{\underline{L}}^q(H_\omega)^*} = \|F^*\|_{(T(\underline{X}_G^{1,q}(H)))^*}$$

und

$$< \underline{\underline{g}}, \nabla T(\underline{v}) >_{H_\omega} = \hat{F}^*(\nabla T(\underline{v})) = \tilde{F}^*(\nabla T(\underline{v})) = F^*(T(\underline{v})).$$

Somit folgt:
Zu $F^* \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))^*$ und $T(\underline{v}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$
existiert ein $\underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{L}}^{q'}(H_\omega)$ mit $< \underline{\underline{g}}, \nabla T(\underline{v}) >_{H_\omega} = F^*(\nabla T(\underline{v}))$.

Sei nun $\underline{\Phi}$, $\underline{\Phi}_\nu \subset \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit $|F^*(\underline{\Phi}_\nu) - F^*(\underline{\Phi})| \to 0$
für alle $F^* \in \underline{X}_G^{1,q}(H)^*$. Dann ist mit $\underline{\underline{\tilde{g}}}(y) := \underline{\underline{g}}(x(y))$:

$$\begin{aligned} |F^*(T(\underline{\Phi}_\nu)) - F^*(T(\underline{\Phi}))| &= \left|< \underline{\underline{g}}, \nabla(T(\underline{\Phi}_\nu) - T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega}\right| \\ \underset{\text{(Trafo)}}{\leq} C' &\left|< \underline{\underline{\tilde{g}}}, \nabla(\underline{\Phi}_\nu - \underline{\Phi}) + \underline{\underline{S}}(\underline{\Phi}_\nu - \underline{\Phi}) + \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}_\nu - \underline{\Phi}) >_H\right| \end{aligned}$$

Sei weiter:

$$F_1^*(\underline{\Phi}) := < \underline{\underline{\tilde{g}}}, \nabla\underline{\Phi} >,$$
$$F_2^*(\underline{\Phi}) := < \underline{\underline{\tilde{g}}}, \underline{\underline{S}}(\underline{\Phi}) >$$
und
$$F_3^*(\underline{\Phi}) := < \underline{\underline{\tilde{g}}}, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >$$

Analog zum Beweis des Lemmas 3.14 gilt dann

$$|F_1^*(\underline{\Phi})| \leq \left\|\underline{\underline{\tilde{g}}}\right\|_{q',H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H},$$
$$|F_2^*(\underline{\Phi})| \leq C' \left\|\underline{\underline{\tilde{g}}}\right\|_{q',H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H}$$

und

$$|F_3^*(\underline{\Phi})| \leq C'' \left\|\underline{\underline{\tilde{g}}}\right\|_{q',H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H}.$$

Somit sind $F_i^* \in \underline{X}_G^{1,q}(H)^*$ für alle $i = 1, 2, 3$ und es gilt:

$$|F^*(T(\underline{\Phi}_\nu)) - F^*(T(\underline{\Phi}))| \leq \sum_{i=1}^{3} |F_i^*(T(\underline{\Phi}_\nu)) - F_i^*(T(\underline{\Phi}))| \to 0$$

□

Lemma 3.22.

Sei $1 < q < \infty$.
Für $j, k = 1, ..., n$ *seien*

$$S_{kj}^T : \left(T(\underline{X}_G^{1,q}(H)), \|\nabla \cdot\|_{q,H_\omega}\right) \to \left(L^q(H_\omega), \|\cdot\|_{q,H_\omega}\right),$$
$$K_{kj}^T : \left(T(\underline{X}_G^{1,q}(H)), \|\nabla \cdot\|_{q,H_\omega}\right) \to \left(L^q(H_\omega), \|\cdot\|_{q,H_\omega}\right),$$
$$S_{kj} : \left(\underline{X}_G^{1,q}(H), \|\nabla \cdot\|_{q,H}\right) \to \left(L^q(H), \|\cdot\|_{q,H}\right),$$
$$K_{kj} : \left(\underline{X}_G^{1,q}(H), \|\nabla \cdot\|_{q,H}\right) \to \left(L^q(H), \|\cdot\|_{q,H}\right)$$

wie in Definition 3.8 erklärt.

Dann sind dies lineare beschränkte Operatoren.

Beweis.

Linearität folgt trivial nach Definition. Der Rest folgt wie im Beweis der Lemmata 3.14 und 3.19.

□

Lemma 3.23.

Sei $1 < q < \infty$. *Dann gilt:*
Aus $T(\underline{\Phi}_\nu) \overset{w}{\to} T(\underline{\Phi})$ *in* $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ *folgt* $\underline{\Phi}_\nu \overset{w}{\to} \underline{\Phi}$ *in* $\underline{X}_G^{1,q}(H)$.

Beweis.

Analog zu Lemma 3.21 unter Verwendung des Lemmas 3.22.

□

Lemma 3.24.

Seien $1 < \xi < \infty$ und $0 < R < 1$. Für $\omega \in M_{R,\xi}$ (vgl. Def 3.1) sei die von ω abhängige Piolatransformation T gemäß Def 3.6 sowie die Umkehrformel aus Bemerkung 3.9 betrachtet. Für die dort auftretenden Störterme S_{jk} bzw. S^T_{jk}, die von ω abhängen, gilt dann:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < R_0 = R_0(\epsilon, q, n) < 1$derart, dass für alle $\omega \in M_{R,\xi}$ mit $0 < R \leq R_0$ gilt

$$\|S_{kj}(\underline{\Phi})\|_{q,H} \leq \epsilon \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q,H} \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{X}^{1,q}_G(H)$$

und

$$\left\|S^T_{kj}(T(\underline{\Phi}))\right\|_{q,H_\omega} \leq \epsilon \|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega} \text{ für alle } T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{X}^{1,q}_G(H)).$$

Beweis.

Sei ρ_ξ wie in Lemma 3.2 definiert.
Wegen (3.3.1) ist $|\omega| < R\xi$ und nach Definition der Klasse $M_{R,\xi}$ (vgl. Def. 3.1) ist $\|\nabla\omega\|_\infty \leq R$.
Aus Lemma 3.2 folgt $0 \leq \rho_\xi \leq 1$ und $\left|\rho'_\xi(t)\right| < \dfrac{2}{3\xi}$.
Somit ist:

$$\left|\frac{1}{1 - \omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))} - 1\right| \leq \frac{\left|\omega(y')\rho'_\xi(x_n(y))\right|}{\frac{1}{3}} \leq 2R \to 0 \text{ für } R \to 0$$

Ebenso ist:

$$|\partial_k\omega(y')\rho_\xi(x_n(y))| \leq \|\nabla\omega\|_\infty |1| \leq R \to 0 \text{ für } R \to 0$$

□

Definition und Bemerkung 3.25.

Sei $1 < q < \infty$, $\underline{v} \in T(\underline{X}^{1,q}_G(H))$ und $\underline{\Phi} \in T(\underline{X}^{1,q'}_G(H))$.
Die Haupteigenschaft der Piola-Transformation ist folgende Reproduktion der Divergenz:

$$divT(\underline{\Phi})(x) = ((\det Dx)(y(x)))^{-1} div\underline{\Phi}(y(x))$$

Somit ist:

$$< divT(\underline{v}), divT(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} = \int_H ((\det Dx)(y))^{-1} div\underline{v}(y) div\underline{\Phi}(y) dy$$

$$=< div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_H + \underbrace{\int_H \left(((\det Dx)(y))^{-1} - 1\right) div\underline{v}(y) div\underline{\Phi}(y) dy}_{:=\hat{S}(\underline{v},\underline{\Phi})}$$

Ebenso gilt:

$$< div\underline{v}, div\underline{\Phi} >_H = \int_{H_\omega} ((\det Dy)(x))^{-1} divT(\underline{v})(x) divT(\underline{\Phi}(x)) dx$$

$$=< divT(\underline{v}), divT(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} + \underbrace{\int_{H_\omega} \left(((\det Dy)(x))^{-1} - 1\right) divT(\underline{v})(x) divT(\underline{\Phi})(x) dx}_{:=\hat{S}_T(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi}))}$$

Analog zum Beweis des Lemmas 3.24 gilt:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < R_0 = R_0(\epsilon, q, n) < 1$derart, dass für alle $\omega \in M_{R,\xi}$ mit $0 < R \leq R_0$ gilt

$$\left|\hat{S}(\underline{v}, \underline{\Phi})\right| \leq \epsilon \left\|\nabla \underline{v}\right\|_{q,H} \left\|\nabla \underline{\Phi}\right\|_{q',H}$$

und

$$\left|\hat{S}_T(T(\underline{v}), T(\underline{\Phi}))\right| \leq \epsilon \left\|\nabla T(\underline{v})\right\|_{q,H} \left\|\nabla T(\underline{\Phi})\right\|_{q',H}$$

für alle $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ und $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.

Weiter seien mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S^{(1)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) := {} & \lambda \hat{S}(\underline{v}, \underline{\Phi}) + < \underline{\underline{S}}(\underline{v}), \nabla \underline{\Phi} >_H \\ & + < \nabla \underline{v}, \underline{\underline{S}}(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{S}}(\underline{v}), \underline{\underline{S}}(\underline{\Phi}) >_H \\ & + < \underline{\underline{S}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{S}}(\underline{\Phi}) >_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) := {} & < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \nabla \underline{\Phi} >_H + < \nabla \underline{v}, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H \\ & + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
S_T^{(1)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) := {} & \lambda \hat{S}_T(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) + < \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{v})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} \\
& + < \nabla T(\underline{v}), \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} + < \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{v})), \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} \\
& + < \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{v})), \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} + < \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{v})), \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_T^{(1)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) := {} & < \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{v})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} + < \nabla T(\underline{v}), \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} \\
& + < \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{v})), \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{(2)}(\underline{v},\underline{\Phi}) := {} & S^{(1)}(\underline{v},\underline{\Phi}) - \hat{S}(\underline{v},\underline{\Phi}) + < \underline{\underline{S}}^t(\underline{v}), \nabla \underline{\Phi} >_H \\
& + < \nabla \underline{v}, \underline{\underline{S}}^t(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{S}}(\underline{v}), \underline{\underline{S}}^t(\underline{\Phi}) >_H \\
& + < \underline{\underline{S}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{S}}^t(\underline{\Phi}) >_H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K^{(2)}(\underline{v},\underline{\Phi}) := {} & K^{(1)}(\underline{v},\underline{\Phi}) + < \underline{\underline{K}}^t(\underline{v}), \nabla \underline{\Phi} >_H + < \nabla \underline{v}, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H \\
& + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_T^{(2)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) := {} & S_T^{(1)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) - \hat{S}_T(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) \\
& + < \left(\underline{\underline{S}}^T\right)^t (T(\underline{v})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} + < \nabla T(\underline{v}), \left(\underline{\underline{S}}^T\right)^t (T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} \\
& + < \underline{\underline{S}}^T(T(\underline{v})), \left(\underline{\underline{S}}^T\right)^t (T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} \\
& + < \left(\underline{\underline{S}}^T\right)^t (T(\underline{v})), \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} + < \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{v})), \left(\underline{\underline{S}}^T\right)^t >_{H_\omega}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_T^{(2)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) := {} & K_T^{(1)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) + < \left(\underline{\underline{K}}^T\right)^t T(\underline{v})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} \\
& + < \nabla T(\underline{v}), \left(\underline{\underline{K}}^T\right)^t >_{H_\omega} + < \underline{\underline{K}}^T(T(\underline{v})), \left(\underline{\underline{K}}^T\right)^t >_{H_\omega}
\end{aligned}
$$

Dann ist für $\tau = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
& B_\tau(\underline{v},\underline{\Phi},\lambda,H) \\
& = B_\tau(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi}),\lambda,H_\omega) + S_T^{(\tau)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi})) + K_T^{(\tau)}(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi}))
\end{aligned}
\tag{3.25.1}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& B_\tau(T(\underline{v}),T(\underline{\Phi}),\lambda,H_\omega) \\
& = B_\tau(\underline{v},\underline{\Phi},\lambda,H) + S^{(\tau)}(\underline{v},\underline{\Phi}) + K^{(\tau)}(\underline{v},\underline{\Phi}).
\end{aligned}
\tag{3.25.2}
$$

Weiter gilt mit Lemma 3.24 für $\tau = 1, 2$:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $0 < R_0 = R_0(\epsilon, q, n) < 1$derart, dass für alle $\omega \in M_{R,\xi}$ mit $0 < R \leq R_0$ gilt

$$\left| S^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) \right| \leq \epsilon \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q,H} \left\| \nabla \underline{\Phi} \right\|_{q',H}$$

und

$$\left| S_T^{(\tau)}(T(\underline{v}), T(\underline{\Phi})) \right| \leq \epsilon \left\| \nabla T(\underline{v}) \right\|_{q,H_\omega} \left\| \nabla T(\underline{\Phi}) \right\|_{q',H_\omega}$$

für alle $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$.

Lemma 3.26.

Sei $1 < q < \infty$.
$T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ ist ein reflexiver Banachraum.

Beweis.

Sei $T(\underline{\Phi}_\nu) \subset T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit $\left\| \nabla \left(T(\underline{\Phi}_\nu) - T(\underline{\Phi}_\mu) \right) \right\|_{q,H_\omega} \to 0$.
Mit Lemma 3.19 folgt:

$$\left\| \nabla \left(\underline{\Phi}_\nu - \underline{\Phi}_\mu \right) \right\|_{q,H_\omega} \to 0$$

Wegen der Vollständigkeit von $\underline{X}_G^{1,q}(H)$ (Lemma 1.9) existiert ein $\underline{\Phi}_0 \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ mit $\underline{\Phi}_\nu \to \underline{\Phi}_0$.
Wegen Lemma 3.14 gilt:

$$\left\| \nabla \left(T(\underline{\Phi}_\nu) - T(\underline{\Phi}_0) \right) \right\|_{q,H_\omega} \leq C' \left\| \nabla \left(\underline{\Phi}_\nu - \underline{\Phi}_0 \right) \right\|_{q,H} \to 0$$

Damit folgt die Vollständigkeit von $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.
Da $T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) \subset \underline{L}^{1,q}(H_\omega)$ linearer abgeschlossener Teilraum ist, folgt die Reflexivität von $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ aus der von $\underline{L}^{1,q}(H_\omega)$.

□

Lemma 3.27.

Sei $1 < q < \infty$.
Dann gilt: $T(\underline{D}_G(H))$ ist dicht in $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.

Beweis.

Sei $T(\underline{u}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.
Somit ist $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und gemäß Bemerkung 2.10 existiert eine Folge $(\underline{u}_\nu) \subset \underline{D}_G(H)$ mit $\|\nabla(\underline{u}_\nu - \underline{u})\|_{q,H} \to 0$.
Mit Lemma 3.14 gilt:

$$\|\nabla(T(\underline{u}_\nu) - T(\underline{u}))\|_{q,H_\omega} \leq C\,\|\nabla(\underline{u}_\nu - \underline{u})\|_{q,H} \to 0$$

Wegen $T(\underline{u}_\nu) \subset T(\underline{D}_G(H))$ folgt dann die Behauptung.

□

Lemma 3.28.

Sei $1 < q < n$. Dann gilt für alle $0 < R < \infty$:
a) Aus $u \in L_G^{1,q}(H)$ folgt $u \in L^{q^*}(H \cap B_R)$ mit $q^* := \dfrac{nq}{n-q}$.
b) Es existiert ein $C = C(q,R,G) > 0$, so dass für alle $u \in L_G^{1,q}(H)$ gilt:

$$\|u\|_{q^*,H\cap B_R} \leq C\,\|\nabla u\|_{q,H}$$

Beweis.

a) Sei $u \in L_G^{1,q}(H)$. Setze u wie in Lemma 2.5 fort.
Sei mit $\tilde{u} \in L_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ diese Fortsetzung bezeichnet.
Wegen [Si2] Theorem 3.11 folgt die Existenz der Folgen $(c_k) \subset \mathbb{R}$ und $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit:

$$\|\nabla(u_k - \tilde{u})\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0 \text{ und } u_k - c_k \in L_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$$

Wegen der Sobolevungleichung ist:

$$\|u_k - u_j\|_{q^*,\mathbb{R}^n} \leq C_{SOB}\,\|\nabla(u_k - u_j)\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0$$

Daher existiert ein $u^* \in L^{q^*}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u^* - u_k\|_{q^*,\mathbb{R}^n} \to 0$.
Sei nun $v := u^*|_H \in L^{q^*}(H)$ und sei $\varphi \in C_0^\infty(H)$.

Es ist:

$$\int_H v\partial_j\varphi dx = \lim_{k\to\infty}\int_H u_k\partial_j\varphi dx = -\lim_{k\to\infty}\int_H \partial_j u_k\varphi dx = \int_H \partial_j u\varphi dx$$

Also folgt die Existenz der schwachen Ableitung $\partial_j v$ in H und $\partial_j u = \partial_j v$.
Es ist $u - v \in L^1(H \cap B_R)$ für alle $R > 0$ und $\nabla(u-v) = 0$.
Daher ist $u - v = c = const$.
Da nun $c \in L^{q^*}(H \cap B_R)$ und $v \in L^{q^*}(H)$ ist, folgt $u \in L^{q^*}(H \cap B_R)$.

b) Wegen

$$c\,|G| = \int_G c dx = \underbrace{\int_G u dx}_{=0} - \int_G v dx$$

folgt

$$c = -\frac{1}{|G|}\int_G v dx.$$

Sei nun $R' \geq R$ mit $G \subset\subset B_{R'}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{q^*,H\cap B_{R'}} &= \|v + c\|_{q^*,H\cap B_{R'}} \\
&\leq \|v\|_{q^*,H\cap B_{R'}} + \left\| \frac{1}{|G|}\int_G v dx \right\|_{q^*,H\cap B_{R'}} \\
&\leq \|v\|_{q^*,H\cap B_{R'}} + |B_{R'} \cap H|^{\frac{1}{q^*}}\, |G|^{\frac{1}{q^{*\prime}}-1}\, \|v\|_{q^*,G} \\
&\leq C\,\|v\|_{q^*,H\cap B_{R'}} \\
&= \lim_{k\to\infty} C\,\|u_k\|_{q^*,H\cap B_{R'}} \quad \text{mit } C > 0
\end{aligned}$$

Wegen der Sobolevungleichung ist $\|u_k\|_{q^*,H\cap B_{R'}} \leq C'\,\|\nabla u_k\|_{q,\mathbb{R}^n}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Daher gilt mit $C'' > 0$:

$$\begin{aligned}
\|u\|_{q^*,H\cap B_{R'}} &\leq \lim_{k\to\infty} C''\,\|\nabla u_k\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&= C''\,\|\nabla \tilde{u}\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&= 2^{\frac{1}{q}} C''\,\|\nabla u\|_{q,H}
\end{aligned}$$

Da $R' \geq R$ ist, folgt nun $\|u\|_{q^*,H\cap B_R} \leq 2^{\frac{1}{q}} C''\,\|\nabla u\|_{q,H}$ mit $C'' > 0$.

$\square$

Lemma 3.29.

Sei $1 < q < n$ und seien ξ, G wie in Definition 3.6 erklärt.
Dann gilt für alle $0 < r < \infty$:
a) Aus $T(\underline{u}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ folgt $T(\underline{u}) \in L^{q^*}(H_\omega \cap B_r)$ mit $q^* := \dfrac{nq}{n-q}$.
b) Es existiert ein $C = C(q,r,G) > 0$, so dass für alle $T(\underline{u}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ gilt:
$\|T(\underline{u})\|_{q^*,H_\omega \cap B_r} \leq C \, \|\nabla T(\underline{u})\|_{q,H_\omega}$

Beweis.

Die Sobolevungleichungen in $\hat{H}_0^{1,q}(H)$ liefern zusammen mit
Lemma 3.28 für $r' := \max\left\{4\sqrt{n}\xi, r\right\}$:
1) Aus $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ folgt $\underline{v} \in \underline{L}^{q^*}(H \cap B_{r'})$.
2) Es existiert ein $\tilde{C} = \tilde{C}(q, r', G, n) > 0$, so dass für alle $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ gilt:

$$\|\underline{v}\|_{q^*,H \cap B_{r'}} \leq \tilde{C} \, \|\nabla \underline{v}\|_{q,H} \tag{3.29.1}$$

Für $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $x \in H_\omega$ ist nach Definition 3.6 :
$T(\underline{v})(x) = (\det Dy)(x)(Dx)(y(x))\underline{v}(y(x))$

Somit gilt für alle $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H) \cap \underline{L}^{q^*}(H \cap B_{r'})$:

$$\begin{aligned}
\|T(\underline{v})\|_{q^*,H_\omega \cap B_{r'}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{B_{r'} \cap H_\omega} \left| (\det Dy)(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y(x)) v_j(y(x)) \right|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{\leq} C' \left(\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{B_{r'} \cap H} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y) v_j(y) \right|^{q^*} dy \right)^{\frac{1}{q^*}} \\
&\underset{\text{(Hölder Summe)}}{\leq} C'' \, \|\underline{v}\|_{q^*,B_{r'} \cap H} \quad \text{mit } C', C'' > 0
\end{aligned} \tag{3.29.2}$$

a) Sei nun $T(\underline{u}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$. Dann ist $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.
Aus 1) folgt $\underline{u} \in \underline{L}^{q^*}(H \cap B_{r'})$. Weiter mit (3.29.2) folgt $T(\underline{u}) \in \underline{L}^{q^*}(H_\omega \cap B_{r'})$.
Wegen $r' \geq r$ folgt nun $T(\underline{u}) \in \underline{L}^{q^*}(H_\omega \cap B_r)$.

b) Wegen Lemma 3.19 gilt für alle $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$:

$$\left\|\nabla \underline{u}\right\|_{q,H} \leq C''' \left\|\nabla T(\underline{u})\right\|_{q,H_\omega}$$

Zusammen mit 3.29.1 und 3.29.2 folgt dann für alle $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ die Existenz eines $C = C'''C''\tilde{C} > 0$ mit:

$$\begin{aligned}
\left\|T(\underline{u})\right\|_{q^*,H_\omega \cap B_r} &\leq \left\|T(\underline{u})\right\|_{q^*,H_\omega \cap B_{r'}} \\
&\leq C'' \left\|\underline{u}\right\|_{q^*,B_{r'} \cap H} \\
&\leq C''\tilde{C} \left\|\nabla \underline{u}\right\|_{q,H} \\
&\leq C \left\|\nabla T(\underline{u})\right\|_{q,H_\omega}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.30.

Sei $1 < q < \infty$ und seien ξ, G wie in Definition 3.6 erklärt.
Sei $\lambda_1 > -\dfrac{1}{n}$ und $\lambda_2 \geq 1$. Weiter sei $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$, $\tau = 1, 2$ und für alle $T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))$ gelte

$$B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega) = 0. \tag{3.30.1}$$

Dann folgt $T(\underline{p}) = \underline{0}$.

Beweis.

Beweisstrategie:
Im Fall $q = 2$ kann $T(\underline{\Phi}) = T(\underline{p})$ gewählt werden und die Behauptung folgt mit Teil e) dieses Beweises. Für die Fälle $q \neq 2$ wird in Teil c) und d) gezeigt, dass aus $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ unter der Voraussetzung (3.30.1) $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,2}(H))$ folgt.

a) Sei $r := \sqrt{n}4\xi$ und sei $r' := \dfrac{1}{2}dist(G, B_r) + r > r$.

Weiter sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq r \\ 1 & \text{für } t \geq r' \end{cases}$.

Sei $\eta(x) := \varphi(|x|)$. Dann ist $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq r \\ 1 & \text{für } |x| \geq r' \end{cases}$.

Zeige nun: Für $\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ ist $\eta\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$.
Für $i = 1, ..., n-1$ ist $p_i \in L_G^{1,q}(H)$.
Daraus folgt $\eta p_i \in L^1_{loc}(H)$ und mit Bemerkung 1.3 b) $p_i \in L^q(H \cap B_r')$.
Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\eta p_i)\|_{q,H} &\leq \|\nabla\eta p_i\|_{q,H} + \|\nabla p_i \eta\|_{q,H} \\
&\leq \|\nabla\eta\|_\infty \|p_i\|_{q,H\cap B_{r'}} + \|\eta\|_\infty \|\nabla p_i\|_{q,H} \\
&\underset{\text{Lemma 3.10}}{\leq} C' \|\nabla p_i\|_{q,H} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Wegen $\eta\big|_G \equiv 1$ ist $\displaystyle\int_G \eta p_i = \int_G p_i = 0$, und somit ist $\eta p_i \in L_G^{1,q}(H)$.

Zu $p_n \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ existiert eine Folge $(p^{(\nu)}) \subset C_0^\infty(H)$ mit

$$\left\|p^{(\nu)} - p_n\right\|_{q,H\cap B_{r''}} \to 0 \text{ für alle } r'' > 0 \text{ und } \quad \left\|\nabla\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right\|_{q,H} \to 0.$$

Daraus folgt $\eta p^{(\nu)} \subset C_0^\infty(H)$ und

$$\left\|\eta\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right\|_{q,H\cap B_{r''}} \leq \|\eta\|_\infty \left\|p^{(\nu)} - p_n\right\|_{q,H\cap B_{r''}} \to 0 \text{ für alle } r'' > 0.$$

Wegen $supp(\nabla\eta) \subset B_{r'}$ ist:

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\left[\eta\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right]\right\|_{q,H} &\leq \left\|\nabla\eta\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right\|_{q,H} + \left\|\nabla\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\eta\right\|_{q,H} \\
&\leq \|\nabla\eta\|_\infty \left\|p^{(\nu)} - p_n\right\|_{q,H\cap B_{r'}} + \|\eta\|_\infty \left\|\nabla\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right\|_{q,H} \\
&\underset{\text{Lemma 3.11}}{\leq} C' \left\|\nabla\left(p^{(\nu)} - p_n\right)\right\|_{q,H} \to 0
\end{aligned}$$

Also ist $\eta\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$. (3.30.2)

b) Für alle $T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))$ ist:

$B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega) = 0$

Sei $\tau = 1$.
Dann folgt mit (3.30.2) :

$$0 =< \nabla T(\underline{p}), \nabla(\eta T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega} + \lambda_1 < divT(\underline{p}), div(\eta T(\underline{\Phi})) >_{H_\omega}$$
$$= \int_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_i + \partial_k T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i \eta\right] dx$$
$$+ \int_{H_\omega} \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_k + \partial_i T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k \eta\right] dx \tag{3.30.3}$$

Es ist:

$$< \nabla(\eta T(\underline{p})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} + \lambda_1 < div(\eta T(\underline{p})), divT(\underline{\Phi}) >_{H_\omega}$$
$$= \int_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i + \partial_k T(\underline{p})_i \eta \partial_k T(\underline{\Phi})_i\right] dx$$
$$+ \int_{H_\omega} \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k + \partial_i T(\underline{p})_i \eta \partial_k T(\underline{\Phi})_k \eta\right] dx$$
$$\underset{(3.30.3)}{=} \int_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i - \partial_k T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_i\right] dx$$
$$+ \int_{H_\omega} \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k - \partial_i T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_k\right] dx$$

Weiter ist mit Lemma 3.3 5):

$$< \nabla(\eta \underline{p}), \nabla \underline{\Phi} >_H + \lambda_1 < div(\eta \underline{p}), div \underline{\Phi} >_H$$
$$=< \nabla(\eta T(\underline{p})), \nabla T(\underline{\Phi}) >_{H_\omega} + \lambda_1 < div(\eta T(\underline{p})), divT(\underline{\Phi}) >_{H_\omega}$$
$$= \int_{H} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_i\right]$$
$$+ \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_k\right] dx \tag{3.30.4}$$

Sei $\tau = 2$.
Dann folgt mit (3.30.2) :

$$\begin{aligned}
0 &= B_2(T(\underline{p}), \eta T(\underline{\Phi}), \lambda_2, H_\omega) \\
&= \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_i + \partial_k T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i \eta\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k T(\underline{p})_i \partial_i \eta T(\underline{\Phi})_k + \partial_k T(\underline{p})_i \partial_i T(\underline{\Phi})_k \eta\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_k + \partial_i T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k \eta\right] dx
\end{aligned} \tag{3.30.5}$$

Es ist:

$$\begin{aligned}
&B_2(\eta T(\underline{p}), (T(\underline{\Phi})), \lambda_2, H_\omega) \\
&= \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i + \partial_k T(\underline{p})_i \eta \partial_k T(\underline{\Phi})_i\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_i T(\underline{\Phi})_k + \partial_k T(\underline{p})_i \eta \partial_i T(\underline{\Phi})_k\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k + \partial_i T(\underline{p})_i \eta \partial_k T(\underline{\Phi})_k \eta\right] dx \\
&\underset{(3.30.5)}{=} \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_i - \partial_k T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_i\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta T(\underline{p})_i \partial_i T(\underline{\Phi})_k - \partial_k T(\underline{p})_i \partial_i \eta T(\underline{\Phi})_k\right] dx \\
&+ \int\limits_{H_\omega} (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta T(\underline{p})_i \partial_k T(\underline{\Phi})_k - \partial_i T(\underline{p})_i \partial_k \eta T(\underline{\Phi})_k\right] dx
\end{aligned}$$

Weiter ist mit Lemma 3.3 5):

$$\begin{aligned}
&B_2(\eta \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_2, H) \\
&= B_2(\eta T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_2, H_\omega) \\
&= \int_H \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_i \right] + \int_H \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_i \underline{\Phi}_k - \partial_k \underline{p}_i \partial_i \eta \underline{\Phi}_k \right] \\
&+ (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_k \right] dx
\end{aligned} \tag{3.30.6}$$

c) Sei nun $q > s > 1$ und $\tau = 1, 2$.
Sei weiter $A := (B_{r'} \backslash B_r) \cap H$.
Aus $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H)) \subset \underline{L}^{1,q}(H_\omega)$ folgt mit Bemerkung 1.3 $T(\underline{p}) \in \underline{L}^q(A)|_A$.
Wegen $|A| < \infty$ folgt mittels der Hölderungleichung $T(\underline{p}) \in \underline{L}^s(A)|_A$ und analog $\nabla T(\underline{p}) \in \underline{\underline{L}}^s(A)$.

Wegen (3.30.4), (3.30.6) und der Hölderungleichung ist also mit $\underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)$:

$$\begin{aligned}
\left| B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) \right| &\leq \|\nabla \eta\|_\infty C_{\lambda_\tau} \left[\left\|\underline{p}\right\|_{s,A} \|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',A} + \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{s,A} \|\underline{\Phi}\|_{s',A} \right] \\
&\underset{\text{Lemma 3.12}}{\leq} C' \|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',H} \text{ mit } C' > 0
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$\underset{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)}{sup} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',H}} \leq C' < \infty$$

Also folgt mit Lemma 2.15 beziehungsweise Satz 2.18 $\eta \underline{p} \in X_G^{1,s}(H)$.

Daher ist $\underline{p}\big|_{H \backslash B_{r'}} \in \underline{X}_G^{1,s}(H \backslash B_{r'})$.
Daraus folgt $p|_{B_\delta^+ \backslash B_{r'}} \in L^s(B_\delta^+ \backslash B_{r'})$ für alle $\delta > r'$ und $\nabla \underline{p}\big|_{H \backslash B_{r'}} \in \underline{L}^s(H \backslash B_{r'})$.
Wegen der Hölderungleichung ist $p|_{B_{r'}^+} \in L^s(B_{r'}^+)$ und $\nabla p|_{B_{r'}^+} \in L^s(B_{r'}^+)$.
Daraus folgt $p|_{B_\delta \cap H} \in L^s(B_\delta \cap H)$ für alle $\delta > 0$ und $\nabla \underline{p} \in \underline{L}^s(H)$.
Daher ist $\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,s}(H)$.

Ist $s = 2$, folgt für $q > 2$:

$\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,2}(H)$

d) Sei $q < 2$.
Wir gehen analog zum Beweis von Lemma 7.12 aus [St] vor:
Es gibt genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \frac{n}{q} \leq k+1$.
Es sei $q_j := \frac{nq}{n - jq}$ für $j = 0, ..., k$.
Dann gilt $q_k \geq n \geq 2$ und für $j = 0, ..., k-1$ ist $q_j < n$.

Weiter gilt für die Sobolev-Exponenten $q_j^* = \frac{nq_j}{n - q_j}$ die Beziehung

$$q_j^* = q_{j+1} \text{ für } j = 0, ..., k-1.$$

Für den dualen Exponenten gilt:

$$q_0' = q',\ q_j' < n \text{ für alle } j = 1, ..., k \text{ und } (q_j')^* = q_{j-1}' \text{ für } j = 1, ..., k$$

Mit Bemerkung 3.25 folgt:

i) $$0 = B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega) = B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(\underline{p}, \underline{\Phi}) + K^{(\tau)}(\underline{p}, \underline{\Phi}) \tag{3.30.7}$$
für alle $T(\underline{\Phi}) \in T(D_G(H))$

ii) Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren $0 < R < 1$ und $1 < \xi < \infty$,
so dass für die von $\omega \in M_{R,\xi}$ abhängige Störung $S^{(\tau)}$ gilt:

$$\left|S^{(\tau)}(\underline{p}, \underline{\Phi})\right| \leq \epsilon \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{q,H} \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H} \text{ für alle } \underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H) \text{ und } \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H) \tag{3.30.8}$$

In Satz 2.7 und Satz 2.18 unter Verwendung von Satz 2.1 wurde gezeigt:

Sei $1 < s < \infty$. Für alle $\underline{p} \in X_G^{1,s}(H)$ existiert ein $C(s) > 0$ mit:

$$\underset{0 \neq \underline{\Phi} \in X_G^{1;s'}(H)}{sup} \frac{B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',H}} \geq C(s) \left\|\nabla \underline{p}\right\|_s$$

für $s = q_j, q_{j'}, 2$ und $j = 0, ..., k$

Wegen (3.30.8) existiert also zu $\dfrac{C(s)}{2} > 0$ ein $R > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,s'}(H)} \frac{\left|B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(\underline{p}, \underline{\Phi})\right|}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',H}} \\
&\geq \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,s'}(H)} \frac{\left|B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)\right|}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{s',H}} - \frac{C(s)}{2} \left\|\nabla \underline{p}\right\|_s \\
&\geq \frac{C(s)}{2} \left\|\nabla \underline{p}\right\|_s .
\end{aligned}$$

Also gelten für $\lambda_\tau \neq -1$ die dualen Variationsungleichungen
bezüglich der Bilinearform $B_\tau(.,.,\lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(.,.)$
auf $\underline{X}_G^{1,s}(H) \times \underline{X}_G^{1,s'}(H)$. (3.30.9)

Sei nun $\underline{p} \in X_G^{1,q_{j-1}}(H)$ mit $j = 1, ..., k$.
Sei weiter $F^*(\underline{\Phi}) := -K^{(\tau)}(\underline{p}, \underline{\Phi})$ mit $\underline{\Phi} \in X_G^{1,q'_j}(H)$.
Nach Definition 3.25 ist

$$K^{(1)}(\underline{p}, \underline{\Phi}) =< \underline{\underline{K}}(\underline{p}), \nabla \underline{\Phi} >_H + < \nabla \underline{p}, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{K}}(\underline{p}), \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H$$

und

$$\begin{aligned}
&K^{(2)}(\underline{p}, \underline{\Phi}) = K^{(1)}(\underline{p}, \underline{\Phi}) + < \underline{\underline{K}}^t(\underline{p}), \nabla \underline{\Phi} >_H + < \nabla \underline{p}, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H \\
&+ < \underline{\underline{K}}(\underline{p}), \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H,
\end{aligned}$$

wobei $K_{jk}(\underline{p})$ und $K_{jk}(\underline{\Phi})$ für $j, k = 1, ..., n$ die Struktur
$\gamma \underline{p}_i$ beziehungsweise $\gamma \underline{\Phi}_i$ mit $i = 1, ..., n$ und $\gamma \subset C_0^0(\mathbb{R}^n)$ haben.

Die Sobolevungleichungen in $\hat{H}_0^{1,q}(H)$ liefern zusammen mit
Lemma 3.28 für $0 < \tilde{r} < \infty$

$$\underline{p} \in L^{q_j}(H \cap B_{\tilde{r}}) \text{ und } \left\|\underline{p}\right\|_{q_j, H \cap B_{\tilde{r}}} \leq C \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{q_{j-1}, H}$$

und ebenfalls

$$\underline{\Phi} \in L^{q'_{j-1}}(H \cap B_{\tilde{r}}) \text{ und } \|\underline{\Phi}\|_{q'_{j-1}, H \cap B_{\tilde{r}}} \leq C \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q'_j, H} .$$

Daher ist $|F^*(\underline{\Phi})| \leq C' \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{q_{j-1},H} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q_j',H}$ mit $C' > 0$.

Somit folgt wegen (3.30.9) die Existenz von $\underline{v} \in X_G^{1,q_j}(H)$ mit:

$$B_\tau(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) = F^*(\underline{\Phi}) \text{ für alle } \underline{\Phi} \in X_G^{1,q_j'}(H)$$

Da $q_j > q_{j-1}$ ist, folgt mit Teil c) $\underline{v} \in X_G^{1,q_{j-1}}(H)$.
Ebenso gilt auch:

$$B_\tau(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) = F^*(\underline{\Phi}) \text{ für alle } \underline{\Phi} \in D_G(H)$$

Mit (3.30.7) folgt nun für alle $\underline{\Phi} \in X_G^{1,q_{j-1}'}(H)$:

$$B_\tau(\underline{v} - \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H) + S^{(\tau)}(\underline{v} - \underline{p}, \underline{\Phi}) = 0$$

Also folgt mit (3.30.9) $\underline{p} = \underline{v} \in X_G^{1,q_j}(H)$.
Durch Iteration folgt nun $\underline{p} \in X_G^{1,q_k}(H)$ und mit Teil c) für $s = 2$ gilt

$$\underline{p} \in X_G^{1,2}(H).$$

Für alle $1 < q < \infty$ folgt also $\underline{p} \in X_G^{1,2}(H)$. (3.30.10)

e) Sei nun $T(\underline{\Phi}_\nu) \subset T(\underline{D}_G(H))$ mit $\left\|\nabla\left(T(\underline{\Phi}_\nu) - T(\underline{p})\right)\right\|_{2,H_\omega} \to 0$.
So gilt:

$$0 = B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}_\nu), \lambda_\tau, H_\omega) \to B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{p}), \lambda_\tau, H_\omega)$$

Sei nun $\tau = 1$.
Dann folgt mit (3.30.10):

$$\left\|\nabla T(\underline{p})\right\|_{2,H_\omega}^2 + \lambda_1 \left\|divT(\underline{p})\right\|_{2,H_\omega}^2 = 0$$

Ist $\lambda_1 \geq 0$ so ist $T(\underline{p}) = 0$.

Sei nun $-\dfrac{1}{n} < \lambda_1 < 0$.
Angenommen: $T(\underline{p}) \neq 0$

Es ist $\left\| divT(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2 \le n \left\| \nabla T(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \left\| \nabla T(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2 + \lambda_1 \left\| divT(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2 \\ &\ge \left\| \nabla T(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2 + \lambda_1 n \left\| \nabla T(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2 . \end{aligned}$$

Wäre $\left\| \nabla T(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega} \neq 0,$ so würde $0 \ge \lambda_1 n + 1$ folgen,
d.h. $-\dfrac{1}{n} \ge \lambda_1,$ was ein Widerspruch ist.

Sei nun $\tau = 2$.
Aus

$$0 = B_2(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}_\nu), \lambda_2, H_\omega) \to B_2(T(\underline{p}), T(\underline{p}), \lambda_2, H_\omega)$$

zusammen mit (3.30.10) folgt:

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \left\| \partial_i T(\underline{p})_k + \partial_k T(\underline{p})_i \right\|_{2,H_\omega}^2 + (\lambda_2 - 1) \left\| divT(\underline{p}) \right\|_{2,H_\omega}^2$$

Für $\lambda_2 \ge 1$ folgt:

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} \left\| \partial_i T(\underline{p})_k + \partial_k T(\underline{p})_i \right\|_{2,H_\omega}^2$$

Nach [Gr] Satz III.1.6 in Verbindung mit [Gr] Bemerkung III.1.7 folgt

$$0 = T(\underline{p})$$

und daraus folgt

$$0 = \underline{p}.$$

$\square$

Satz 3.31.

Sei $1 < q < \infty,\ \lambda_1 > -\dfrac{1}{n},\ \lambda_2 \geq 1$ *und* $1 < \xi < \infty$.
Es existiert ein $0 < R = R(q,n) < 1$ *derart, dass für alle* $\omega \in M_{R,\xi}$ *mit den zugehörigen Transformationen* $T(\underline{X}_G^{1;q}(H)) = T_\omega(\underline{X}_G^{1;q}(H))$ *(siehe Bemerkung 3.6) die dualen Variationsungleichungen bezüglich der Bilinearform* $B_\tau(.,.,\lambda_\tau, H_\omega)$ *auf* $T(\underline{X}_G^{1;q}(H)) \times T(\underline{X}_G^{1;q'}(H))$ *mit* $\tau = 1,2$ *gelten.*

Beweis.

a) Mit Satz 2.7 und Satz 2.18 folgt die Existenz eines $C > 0$ mit

$$\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)} \frac{B_\tau(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} \geq C \, \|\nabla \underline{u}\|_{q,H}$$

für alle $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1;q}(H)$ und $\tau = 1,2$.

Zu $\dfrac{C}{2} > 0$ folgt gemäß Bemerkung 3.25 die Existenz eines $R > 0$ mit

$$\left| S^{(\tau)}(\underline{u}, \underline{\Phi}) \right| \leq \frac{C}{2} \, \|\nabla \underline{u}\|_{q,H} \, \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}$$

für alle $\underline{u} \in \underline{X}_G^{1;q}(H)$ und $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)$.

Wegen Lemma 3.14 existiert ein $C' > 0$, so dass für alle $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)$ gilt :

$$\|\nabla T(\underline{v})\|_{q,H_\omega} \leq C' \, \|\nabla \underline{v}\|_{q,H}$$

Nach (3.25.2) gilt daher

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \neq T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{X}_G^{1;q'}(H))} \frac{|B_\tau(T(\underline{u}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega)|}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q',H_\omega}} \\ &\geq \frac{1}{C'} \left[\sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)} \frac{|B_\tau(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)|}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} \right. \\ &\left. - \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)} \frac{\left| S^{(\tau)}(\underline{u}, \underline{\Phi}) \right|}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} - \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1;q'}(H)} \frac{\left| K^{(\tau)}(\underline{u}, \underline{\Phi}) \right|}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} \right] \quad \text{für alle } \underline{u} \in \underline{X}_G^{1;q}(H). \end{aligned}$$

Somit gilt weiter:

$$\begin{aligned}&\sup_{0\neq T(\underline{\Phi})\in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))} \frac{B_\tau(T(\underline{u}),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q',H_\omega}}\\ &\geq \underbrace{\frac{1}{C'^2}\frac{C}{2}}_{:=C''}\|\nabla T(\underline{u})\|_{q,H_\omega}-\frac{1}{C'}\sup_{0\neq\underline{\Phi}\in\underline{X}_G^{1,q'}(H)}\frac{\left|K^{(\tau)}(\underline{u},\underline{\Phi})\right|}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,H}}\end{aligned} \tag{3.31.1}$$

Angenommen die Behauptung des Satzes sei falsch, dann existiert eine Folge $T(\underline{u}_\nu)\subset T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit $\|\nabla T(\underline{u}_\nu)\|_{q,H_\omega}=1$ und

$$\epsilon_\nu := \sup_{0\neq T(\underline{\Phi})\in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))}\frac{B_\tau(T(\underline{u}_\nu),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q,H_\omega}}\to 0. \tag{3.31.2}$$

Da gemäß Lemma 3.26 $T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ ein reflexiver Banachraum ist, folgt die Existenz eines $T(\underline{u})\in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ und einer Teilfolge $T(\underline{u}_{\nu_k})$ mit $T(\underline{u}_{\nu_k})\xrightarrow{w}T(\underline{u})$.

Nach Lemma 3.23 folgt dann:

$$\underline{u}_{\nu_k}\xrightarrow{w}\underline{u} \tag{3.31.3}$$

Für $T(\underline{\Phi})\in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))$ gilt einerseits

$$B_\tau(T(\underline{u}_{\nu_k}),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)\to B_\tau(T(\underline{u}),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)$$

und andererseits

$$\left|B_\tau(T(\underline{u}_{\nu_k}),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)\right|\leq\epsilon_{\nu_k}\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q',H_\omega}\to 0.$$

Daher ist für alle $T(\underline{\Phi})\in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))$

$$B_\tau(T(\underline{u}),T(\underline{\Phi}),\lambda_\tau,H_\omega)=0.$$

Gemäß Lemma 3.30 folgt $T(\underline{u})=0$ und somit

$$\underline{u}=0. \tag{3.31.4}$$

b) Sei $\underline{v} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$. Es existiert ein $\underline{\Phi}_0 \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ mit $\|\nabla\underline{\Phi}_0\|_{q',H} = 1$ und

$$K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi}_0) = \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi})}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',H}} =: s.$$

Nach Bemerkung 3.25 gilt für alle $\underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$:

$$K^{(1)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) =< \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \nabla\underline{\Phi} >_H + < \nabla\underline{v}, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}) >_H$$

$$\begin{aligned} K^{(2)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) &= K^{(1)}(\underline{v}, \underline{\Phi}) + < \underline{\underline{K}}^t(\underline{v}), \nabla\underline{\Phi} >_H + < \nabla\underline{v}, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H \\ &\quad + < \underline{\underline{K}}(\underline{v}), \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}) >_H \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.13 folgt:
$K_{i,j}$ sind kompakte Operatoren.

Für $1 < t < \infty$ und $\underline{\Psi} \in \underline{X}_G^{1,t}(H)$ ist $K_{i,j}(\underline{\Psi}) = \alpha\underline{\Psi}$ mit $\alpha \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Es existiert eine Folge $\underline{\Phi}_\nu \subset \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ mit:

$$\frac{K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\Phi}_\nu)}{\|\nabla\underline{\Phi}_\nu\|_{q',H}} \to s \text{ für } \nu \to \infty$$

Sei $\underline{\tilde{\Phi}}_\nu := \dfrac{\underline{\Phi}_\nu}{\|\nabla\underline{\Phi}_\nu\|_{q',H}}$. Dann ist $K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\tilde{\Phi}}_\nu) \to s$ und $\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_\nu\right\|_{q',H} = 1$.
Daraus folgt die Existenz eine Teilfolge $\underline{\tilde{\Phi}}_{\nu_j}$ mit $\underline{\tilde{\Phi}}_{\nu_j} \xrightarrow{w} \underline{\tilde{\Phi}}_0$, $\underline{\tilde{\Phi}}_0 \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ und

$$\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_0\right\|_{q',H} \leq \liminf \left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_{\nu_j}\right\|_{q',H} = 1.$$

Annahme:

$$\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_0\right\|_{q',H} < 1$$

Wegen $K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\tilde{\Phi}}_{\nu_j}) \to K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\tilde{\Phi}}_0) = s$ ist

$$\frac{K^{(\tau)}(\underline{v}, \underline{\tilde{\Phi}}_0)}{\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_0\right\|_{q',H}} = \frac{s}{\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_0\right\|_{q',H}} > s,$$

ein Widerspruch, also ist $\left\|\nabla\underline{\tilde{\Phi}}_0\right\|_{q',H} = 1$.

c) Wende jetzt Beweisteil b) auf die Folge $\underline{u}_{\nu_k}$ an.
Es existiert also eine Folge $\underline{\Phi}_k \subset \underline{X}_G^{1,q'}(H)$ mit $\|\nabla \underline{\Phi}_k\|_{q',H} = 1$ und

$$s_k := \sup_{0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)} \frac{K^{(\tau)}(\underline{u}_{\nu_k}, \underline{\Phi})}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',H}} = K^{(\tau)}(\underline{u}_{\nu_k}, \underline{\Phi}_k).$$

Daraus folgt die Existenz eine Teilfolge $\underline{\Phi}_{k_j}$ mit $\underline{\Phi}_{k_j} \stackrel{w}{\to} \underline{\Phi}_0$ und $\underline{\Phi}_0 \in \underline{X}_G^{1,q'}(H)$.
Sei im Weiteren diese Teilfolge wieder mit $\underline{\Phi}_k$ bezeichnet.
Aus (3.31.3) und (3.31.4) folgt: $\underline{u}_{\nu_k} \stackrel{w}{\to} 0$

Wegen der Kompaktheit der $\underline{\underline{K}} -$ Operatoren folgt für $\tau = 1$:

$$\begin{aligned}
s_k &= K^{(1)}(\underline{u}_{\nu_k}, \underline{\Phi}_k) \\
&=< \underline{\underline{K}}(\underline{u}_{\nu_k}), \nabla \underline{\Phi}_k >_H + < \nabla \underline{u}_{\nu_k}, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}_k) >_H + < \underline{\underline{K}}(\underline{u}_{\nu_k}), \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}_k) >_H \\
&\to < 0, \nabla \underline{\Phi}_0 >_H + < \nabla 0, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}_0) >_H + < 0, \underline{\underline{K}}(\underline{\Phi}_0) >_H = 0
\end{aligned}$$

Für $\tau = 2$ ist:

$$\begin{aligned}
s_k &= K^{(2)}(\underline{u}_{\nu_k}, \underline{\Phi}_k) \\
&= K^{(1)}(\underline{u}_{\nu_k}, \underline{\Phi}_k) + < \underline{\underline{K}}^t(\underline{u}_{\nu_k}), \nabla \underline{\Phi}_k >_H + < \nabla \underline{u}_{\nu_k}, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}_k) >_H \\
&+ < \underline{\underline{K}}(\underline{u}_{\nu_k}), \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}_k) >_H \\
&\to 0 + < 0, \nabla \underline{\Phi}_0 >_H + < \nabla 0, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}_0) >_H + < 0, \underline{\underline{K}}^t(\underline{\Phi}_0) >_H = 0
\end{aligned}$$

Somit folgt wegen (3.31.1), (3.31.2) und $\|\nabla T(\underline{u}_\nu)\|_{q,H_\omega} = 1$:

$$0 \leftarrow \epsilon_{\nu_k} \geq C'' - \frac{1}{C'} s_k \to C''$$

Dieses ist ein Widerspruch zu $C'' > 0$.

$\square$

Lemma 3.32.

Sei $1 < q < \infty,\ 1 < \tilde{r} < \infty$ *und* $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,\tilde{r}}(H))$.
Sei weiter $\lambda_1 > -\frac{1}{n},\ \lambda_2 \geq 1$ *und*

$$\sup_{0 \neq T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))} \frac{B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{q',H_\omega}} < \infty.$$

Dann gilt: $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$

Beweis.

Sei $\tilde{r} > q$.
Seien $\eta,\ r,\ r'$ wie in Teil a) des Beweises von Lemma 3.30 erklärt.
Weiter sei $A := (B_{r'} \backslash B_r) \cap H$.

Mit $\underline{\Phi} \in \underline{D}_G(H)$ gilt

$$B_1(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_1, H) = B_1(\underline{p}, \eta\underline{\Phi}, \lambda_1, H) + \int\limits_H \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_i\right] dx$$
$$+ \int\limits_H \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_k\right] dx$$

und

$$B_2(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_2, H) = B_2(\underline{p}, \eta\underline{\Phi}, \lambda_2, H) + \int\limits_H \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_i\right] dx$$
$$+ \int\limits_H \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \eta \underline{p}_i \partial_i \underline{\Phi}_k - \partial_k \underline{p}_i \partial_i \eta \underline{\Phi}_k\right] dx$$
$$+ \int\limits_H (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \eta \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \eta \underline{\Phi}_k\right] dx.$$

Mittels der Hölderungleichung gilt für alle $i, k = 1, ..., n :$

$$\int\limits_A |\partial_i p_k(x)|^q \, dx \leq \left(\int\limits_A |\partial_i p_k(x)|^{q\frac{\tilde{r}}{q}} \, dx\right)^{\frac{q}{\tilde{r}}} |A|^{\frac{\tilde{r}-q}{\tilde{r}}}$$
$$= \left(\int\limits_A |\partial_i p_k(x)|^{\tilde{r}} \, dx\right)^{\frac{q}{\tilde{r}}} |A|^{\frac{\tilde{r}-q}{\tilde{r}}}$$

Daraus folgt $\left\|\nabla\underline{p}\right\|_{q,A} \leq |A|^{\frac{\tilde{r}-q}{qr}} \left\|\nabla\underline{p}\right\|_{\tilde{r},A}$ und daher folgt mit $C', C'' > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)\right| \\
&\leq \left|B_\tau(\underline{p}, \eta\underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)\right| + C' \left\|\nabla\underline{p}\right\|_{q,A} \left\|\nabla\underline{\Phi}\right\|_{q',A} \\
&\leq \left|B_\tau(\underline{p}, \eta\underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)\right| + C'' \left\|\nabla\underline{p}\right\|_{\tilde{r},A} \left\|\nabla\underline{\Phi}\right\|_{q',A}
\end{aligned}
$$

Es gilt $H \cap A = H_\omega \cap A$ und $supp(\nabla\eta) \subset A$.
Daher ist $\eta\underline{\Phi} \in T(\underline{D}_G(H)) \cap \underline{D}_G(H)$ und somit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\underset{0\neq\underline{\Phi}\in\underline{D}_G(H)}{sup} \frac{B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, H)}{\left\|\nabla\underline{\Phi}\right\|_{q',H}} \\
&\leq C''' \underset{0\neq T(\underline{\Psi})\in T(\underline{D}_G(H))}{sup} \frac{B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Psi}), \lambda_\tau, H_\omega)}{\left\|\nabla T(\underline{\Psi})\right\|_{q',H_\omega}} \\
&+ C'''C'' \left\|\nabla T(\underline{p})\right\|_{\tilde{r},A} < \infty \text{ mit } C''' > 0
\end{aligned}
$$

Daraus folgt zusammen mit Lemma 2.15 beziehungsweise Satz 2.18

$$\eta\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H).$$

Wegen $\eta|_{H\backslash B_{r'}} = 1$ folgt

$$p|_{B_\delta^+\backslash B_{r'}} \in L^q(B_\delta^+\backslash B_{r'}) \text{ für alle } \delta > r'$$

und

$$\nabla\underline{p}\big|_{H\backslash B_{r'}} \in \underline{L}^q(H\backslash B_{r'}).$$

Wegen $p, \nabla p \in L^{\tilde{r}}(B_{r'}^+)$ mit $\tilde{r} > q$ und $\left|B_{r'}^+\right| < \infty$ ist

$$p|_{B_{r'}^+} \in L^q(B_{r'}^+)$$

und

$$\nabla p|_{B_{r'}^+} \in L^q(B_{r'}^+).$$

Daraus folgt $p|_{B_\delta\cap H} \in L^q(B_\delta \cap H)$ für alle $\delta > 0$ und $\nabla\underline{p} \in \underline{L}^q(H)$.

Somit ist $\underline{p} \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$. (3.32.1)

Sei $\tilde{r} < q$.
Für $T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))$ sei

$$F^*(T(\underline{\Phi})) := B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega) \text{ für alle } T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H)).$$

Wegen der Setigkeit dieses Funktionals folgt:

$$F^*(T(\underline{\Phi}')) := B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}'), \lambda_\tau, H_\omega) \text{ für alle } T(\underline{\Phi}') \in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))$$

Nach Satz 3.31 und Satz 2.1 existiert genau ein $T(\underline{v}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$ mit

$$B_\tau(T(\underline{v}), T(\underline{\Phi}'), \lambda_\tau, H_\omega) = B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}'), \lambda_\tau, H_\omega)$$

für alle $T(\underline{\Phi}') \in T(\underline{X}_G^{1,q'}(H))$.

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \neq T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))} \frac{B_\tau(T(\underline{v}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{\tilde{r}', H_\omega}} \\
&= \sup_{0 \neq T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))} \frac{B_\tau(T(\underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{\tilde{r}', H_\omega}} \\
&\leq \left\|\nabla T(\underline{p})\right\|_{\tilde{r}, H_\omega} < \infty
\end{aligned}$$

Da jetzt $q > \tilde{r}$ ist, folgt nach dem ersten Teil des Beweises (3.32.1)
$T(\underline{v}) \in T(\underline{X}_G^{1,r}(H))$ und weiter

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\left(T(\underline{v}) - T(\underline{p})\right)\right\|_{\tilde{r}, H_\omega} &\leq \sup_{0 \neq T(\underline{\Phi}) \in T(\underline{D}_G(H))} \frac{B_\tau(T(\underline{v} - \underline{p}), T(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, H_\omega)}{\|\nabla T(\underline{\Phi})\|_{\tilde{r}', H_\omega}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

und somit $T(\underline{v}) = T(\underline{p})$. Also ist $T(\underline{p}) \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H))$.

$\square$

4 Funktionaldarstellung in Ω

Bemerkung 4.1.

1) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so sei $\Omega_{x_0} := \{x - x_0 : x \in \Omega\}$.
Ist $\underline{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, so sei $\tilde{\underline{f}} : \Omega_{x_0} \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\underline{f}}(x) := \underline{f}(x + x_0)$.

Man sieht sofort für $1 < q < \infty$:
i) $\underline{f} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) \Leftrightarrow \tilde{\underline{f}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_{x_0})$
ii) Ist $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$, $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$ so gilt:

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega) = B_\tau(\tilde{\underline{p}}, \tilde{\underline{v}}, \lambda_\tau, \Omega_{x_0})$$

iii) $\left\|\nabla \underline{p}\right\|_{q,\Omega} = \left\|\nabla \tilde{\underline{p}}\right\|_{q,\Omega_{x_0}}$

Somit ist das Verhalten der Sesquilinearform und der Gradientennorm gegenüber Translationen des Gebiets Ω invariant.

2) $\partial\Omega \in C^2$ bedeutet, dass es zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$ und ein $\sigma \in C^2(B_r(x_0))$ mit $(\nabla\sigma)(x_0) \neq 0$, $\Omega \cap B_r(x_0) = \{x : \sigma(x) < 0\}$ und $\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{x : \sigma(x) = 0\}$ gibt.

O.E. sei $x_0 = 0$ (sonst: Translation $x_0 \to 0$) und $(\partial_n\sigma)(0) \neq 0$ (sonst nummeriere Koordinaten um). Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es ein $0 < \rho \leq t$, ein $h > 0$ und ein $\Psi \in C^2(B'_\rho)$, wobei $B'_\rho = \left\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < \rho\right\}$ ist, mit folgenden Eigenschaften:

i) Für den geraden Kreiszylinder

$$Z := Z_{\rho,h} = \{x = (x', x_n) : \ |x| < \rho,\ |x_n| < h\}$$

gilt

$$Z \subset B_r(0).$$

ii) Für $x' \in B'_\rho$ gilt:

$$(x', \Psi(x')) \in Z \text{ und } \sigma(x', \Psi(x')) = 0$$

Umgekehrt folgt aus $(x', x_n) \in Z$ mit $\sigma(x', x_n) = 0$:

$$x' \in B'_\rho \text{ und } x_n = \Psi(x')$$

Wegen $\sigma(0) = 0$ *folgt* $\Psi(0) = 0$. *Falls man nun den* C^2*-Diffeomorphismus*

$y : Z \to \mathbb{R}^n$ *mit* $y_i(x', x_n) = x_i$ *für* $i = 1, ..., n-1$

und

$y_n(x', x_n) := x_n - \Psi(x')$

betrachtet, $K := y(Z)$, *so ist für* $v \in C^1(Z)$ $v(y) := u(y', y_n + \Psi(y'))$, $y \in K$, *ein* $v \in C^1(K)$ *definiert. Insbesondere gilt für* $i = 1, ..., n-1$:

$$\frac{\partial v}{\partial y_i}(y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(y', y_n + \Psi(y')) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)(y', y_n + \Psi(y'))\frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y') \qquad (4.1.1)$$

In den neuen Koordinaten tritt neben dem Term

$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)(y', y_n + \Psi(y'))$

noch der Term

$\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)(y', y_n + \Psi(y'))\frac{\partial \Psi}{\partial y_i}(y')$

auf. Da i.A. über die Größe von $\frac{\partial \Psi}{\partial y_i}$ *nichts bekannt ist, kann diese „Störung“ groß werden, was für spätere Zwecke technisch unbrauchbar wäre.*

Falls jedoch $\nabla'\Psi(0) = 0$, *so folgt nach Taylor*

$|\Psi(y')| \leq C\,|y'|^2$ *für* $|y'| \leq \rho' < \rho$

und der zweite Term in (4.1.1) würde eine „kleine“ Störung darstellen, falls nur $\rho' > 0$ *genügend klein ist.*

Die Bedingung $\nabla'\Psi(0) = 0$ *bedeutet jedoch, dass die Ebene* $\{x_n = 0\}$ *Tangentialhyperebene an den Graphen* $\left\{(x', \Psi(x')) : x' \in B'_\rho\right\}$ *von* Ψ *im Punkte* $0 \in \mathbb{R}^n$ *ist. Dies legt nahe, statt einer Teilmenge der euklidischen Koordinatenhyperebene* $\{x_n = 0\}$ *eine Teilmenge der Tangentialhyperebene in* $x = 0$ *als Parametergebiet einzuführen. Dies ist durch Anwendung einer orthogonalen Transformation* W *des* $\mathbb{R}^n$ *zu erreichen:*

Es gibt ein $W \in O(n, \mathbb{R})$ *mit* $W\,[\nabla\sigma(0)] = |\nabla\sigma(0)|\,e_n$ *(*$e_n = n$*-ter Einheitsvektor).*

Um dieses Programm bei unseren Abschätzungen verfolgen zu können, ist das Verhalten der Sesquilinearform und der Gradientennorm gegenüber orthogonalen Transformationen zu studieren. (vgl. Lemma 4.2)

Definition und Lemma 4.2.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG) und sei* $\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Mit der orthogonalen Matrix $W \in O(n, \mathbb{R})$ *sei für alle* $x \in W(\Omega)$

$$O(\underline{u})(x) := W\underline{u}(W^{-1}(x))$$

die zugehörige Piolatransformation.

Dann ist $O(\underline{u}) \in \underline{Y}^{1,q}(W(\Omega))$ *und für alle* $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ *und* $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$ *gilt*

$$B_\tau(O(\underline{v}), O(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, W(\Omega)) = B_\tau(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega)$$

sowie

$$\|\nabla O(\underline{v})\|_{q,W(\Omega)} \leq n^{\frac{2q}{q'}} \|\nabla \underline{v}\|_{q,\Omega}$$

und

$$\|\nabla \underline{v}\|_{q,\Omega} \leq n^{\frac{2q}{q'}} \|\nabla O(\underline{v})\|_{q,W(\Omega)} .$$

Beweis.

Sei $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Für $x \in W(\Omega)$ und $i, k = 1, ..., n$ ist

$$O(\underline{v})_i(x) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \underline{v}_j(W^{-1}(x))$$

und

$$\partial_k O(\underline{v})_i(x) = \sum_{\nu,j=1}^{n} w_{ij} w^t_{\nu k} \partial_\nu \underline{v}_j(W^{-1}(x)).$$

Somit ist:

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_k O(\underline{v})_i\|^q_{q,W(\Omega)}\\
&= \int\limits_{W(\Omega)} |\partial_k O(\underline{v})_i(x)|^q \, dx\\
&= \int\limits_{W(\Omega)} \left| \sum_{\nu,j=1}^{n} w_{ij} w^t_{\nu k} \partial_\nu \underline{v}_j(W^{-1}(x)) \right|^q dx\\
&\leq \max_{i,j\in 1,\dots,n} \{|w_{ij}|\}^{2q} \int\limits_{W(\Omega)} \left(\sum_{\nu,j=1}^{n} \left|\partial_\nu \underline{v}_j(W^{-1}(x))\right| \right)^q dx\\
&\underset{\text{(Hölder)}}{\leq} \max_{i,j\in 1,\dots,n} \{\underbrace{|w_{ij}|}_{\leq 1}\}^{2q} n^{\frac{2q}{q'}} \sum_{\nu,j=1}^{n} \int\limits_{W(\Omega)} \left|\partial_\nu \underline{v}_j(W^{-1}(x))\right|^q dx\\
&\underset{\text{(Trafo)}}{\leq} n^{\frac{2q}{q'}} \|\nabla \underline{v}\|^q_{q,\Omega}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$\|\nabla O(\underline{v})\|_{q,W(\Omega)} \leq n^{\frac{2q}{q'}} \|\nabla \underline{v}\|_{q,\Omega}$$

und analog

$$\|\nabla \underline{v}\|_{q,} \leq n^{\frac{2q}{q'}} \|\nabla O(\underline{v})\|_{q,W(\Omega)} .$$

Wegen Lemma 3.15 gilt dann $O(\underline{v}) \in \underline{Y}^{1,q}(W(\Omega))$.

Weiter gilt für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
&< \nabla O(\underline{v}), \nabla O(\underline{\Phi}) >_{W(\Omega)} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{W(\Omega)} \sum_{\nu,j,\mu,l=1}^{n} \underbrace{w_{ij}}_{=w_{ji}^t} w_{\nu k}^t w_{il} \underbrace{w_{\mu k}^t}_{=w_{k\mu}} \partial_\nu v_j(W^{-1}(x)) \partial_\mu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&= \int_{W(\Omega)} \sum_{\nu,j,\mu,l=1}^{n} \delta_{jl} \delta_{\mu\nu} \partial_\nu v_j(W^{-1}(x)) \partial_\mu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&= \sum_{\nu,l=1}^{n} \int_{W(\Omega)} \partial_\nu v_l(W^{-1}(x)) \partial_\nu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} < \nabla \underline{v}, \nabla \underline{\Phi} >_\Omega
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&< div(O(\underline{v})), div(O(\underline{\Phi})) >_{W(\Omega)} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{W(\Omega)} \sum_{\nu,j,\mu,l=1}^{n} w_{ij} w_{\nu i}^t \partial_\nu v_j(W^{-1}(x)) w_{kl} w_{\mu k}^t \partial_\mu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} < div \underline{v}, div(\underline{\Phi}) >_\Omega
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^{n} \int_{W(\Omega)} \partial_i O(\underline{v})_k \partial_k O(\underline{\Phi})_i dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{W(\Omega)} \sum_{\nu,j,\mu,l=1}^{n} w_{kj} w_{\nu i}^t \partial_\nu v_j(W^{-1}(x)) w_{il} w_{\mu k}^t \partial_\mu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&= \int_{W(\Omega)} \sum_{\nu,j,\mu,l=1}^{n} \delta_{\nu l} \delta_{\mu j} \partial_\nu v_j(W^{-1}(x)) \partial_\mu \Phi_l(W^{-1}(x)) dx \\
&\underset{\text{(Trafo)}}{=} \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i v_k \partial_k \Phi_i dy.
\end{aligned}$$

Also ist

$$B_\tau(O(\underline{v}), O(\underline{\Phi}), \lambda_\tau, W(\Omega)) = B_\tau(\underline{v}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega).$$

□

Lemma 4.3.

Sei $1 < q < \infty,\ M \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet mit* $\partial M \in C^2,\ \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(M),\ \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dann gilt: $\eta\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(M)$

Beweis.

Es ist $\eta\underline{p} \in \underline{L}^q_{loc}(M)$. Somit ist $\partial_k(\eta p_i) = p_i\partial_k\eta + \eta\partial_k p_i \in L^q(M)$ für alle $i = 1, ..., n$. Daraus folgt $\eta\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(M)$.

Für $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_M \eta\underline{p}\nabla\Phi dx &= \int\limits_M \underline{p}\nabla \underbrace{(\eta\Phi)}_{\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} dx - \int\limits_M \underline{p}\nabla\eta\Phi dx \\
&= -\int\limits_M div\underline{p}\,(\eta\Phi)\,dx - \int\limits_M \underline{p}\nabla\eta\Phi dx \\
&= -\int\limits_M div\,\left(\underline{p}\eta\right)\Phi dx + \underbrace{\int\limits_M \nabla\eta\underline{p}\Phi dx - \int\limits_M \underline{p}\nabla\eta\Phi dx}_{=0}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.4.

Sei $1 < q < \infty,\ \Omega$ *(AG) und sei* $\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$.
Weiter sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *mit* $0 \le \eta \le 1,\ \eta(x) = 0$ *für* $|x| \le R_0(\Omega)$ *(siehe 1.1.2) und für ein* $r > R_0(\Omega)$ *sei* $\eta(x) = 1$ *für* $|x| \ge r$.
Dann gilt: $\eta\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$

Beweis.

Es ist $\eta\underline{p} \in \underline{L}^q_{loc}(\Omega)$. Somit ist $\partial_k(\eta p_i) = p_i\partial_k\eta + \eta\partial_k p_i \in L^q(\Omega)$ für alle $i = 1, ..., n$. Daraus folgt $\eta\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$.

Für $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \eta \underline{p} \nabla \Phi dx &= \int\limits_\Omega \underline{p} \nabla \underbrace{(\eta\Phi)}_{\in C_0^\infty(\Omega)} dx - \int\limits_\Omega \underline{p} \nabla \eta \Phi dx \\
&= -\int\limits_\Omega div \underline{p} \, (\eta\Phi) \, dx - \int\limits_\Omega \underline{p} \nabla \eta \Phi dx \\
&= -\int\limits_\Omega div \left(\underline{p}\eta\right) \Phi dx + \underbrace{\int\limits_\Omega \nabla \eta \underline{p} \Phi dx - \int\limits_\Omega \underline{p} \nabla \eta \Phi dx}_{=0} .
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.5.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(BG)\(AG),* $\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$ *und sei* $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.
Dann gilt: $\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$

Beweis.

Mit gleicher Rechnung wie im Beweis von Lemma 4.4 folgt $\eta \underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$ und

$$\int\limits_\Omega \eta \underline{p} \nabla \Phi dx = -\int\limits_\Omega div \left(\eta \underline{p}\right) \Phi dx.$$

□

Definition 4.6.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet. Im Weiteren sei:

$H_0^{1,q}(M) := \overline{C_0^\infty(M)}^{\|\cdot\|_{1,q,M}}$

$$\hat{H}_\bullet^{1,q}(M) := \{v : M \to \mathbb{R} \text{ messbar, } v \in L^q(M \cap B_r) \text{ für alle } r > 0,$$
$$\nabla u \in L^q(M)^n \text{ und für jedes } \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ist } \eta v \in H_0^{1,q}(M)\}$$

Sei mit $r' > 0$

$$C_c^\infty(\overline{H \cap B_{r'}}) := \left\{ \Phi \in C^\infty(\overline{H \cap B_{r'}}) : \exists\, \tilde{\Phi} \in C_0^\infty(B_{r'}) \text{ mit } \tilde{\Phi}\Big|_{H \cap B_{r'}} = \Phi \right\}.$$

Weiter sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ 0 \le \varphi \le 1,\ \varphi(x) = 0$ für $|x| \le 1$,
$\varphi(x) = 1$ für $|x| \ge 2$ und sei $\varphi_r(x) := \varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ mit $0 < r < \infty$.

Für Ω (BG) sei

$$\underline{D}(\Omega) := \left\{ \underline{\Phi} \in \underline{C}^1(\overline{\Omega}) : \int_\Omega \underline{\Phi} \nabla \Psi dx = -\int_\Omega div \underline{\Phi} \Psi dx \;\forall\; \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Für Ω (AG) sei

$$\underline{D}(\Omega) := \Big\{ \underline{\Phi} + \underline{\alpha}\varphi_{2R_0} : \underline{\Phi} \in \underline{C}^1(\overline{\Omega}),\ \underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n, \text{ es existiert } r = r(\underline{\Phi}) > 0 \text{ mit } \underline{\Phi}(x) = 0$$
$$\text{für alle } |x| > r \text{ und } \int_\Omega \underline{\Phi} \nabla \Psi dx = -\int_\Omega div \underline{\Phi} \Psi dx \;\forall\; \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Big\}.$$

Ziel ist nun zu zeigen, dass $\underline{D}(\Omega)$ dicht liegt in $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ für alle $1 < q < \infty$.

Lemma 4.7.

Sei Ω (AG)/(BG) und sei $\underline{\Phi} \in \underline{D}(\Omega)$.
Mit der orthogonalen Matrix $W \in O(n, \mathbb{R})$ sei für alle $x \in W(\Omega)$

$$O(\underline{\Phi})(x) := W\underline{\Phi}(W^{-1}(x))$$

die zugehörige Piolatransformation.

Dann gilt $O(\underline{\Phi}) \in \underline{D}(W(\Omega))$.

Beweis.

Nach Lemma 4.2 ist $O(\underline{\Phi}) \in \underline{Y}^{1,q}(W(\Omega))$.

Zusammen mit $O(\underline{\Phi}) \in \underline{C}^1(W(\Omega))$ folgt $O(\underline{\Phi}) \in \underline{D}(W(\Omega))$.

$\square$

Lemma 4.8.

Sei $1 < q < \infty,\ 0 < r < r' < \infty$ *und* $u \in L_G^{1,q}(H)$ *mit* $supp(u) \subset B_r \cap H$.

Dann existiert eine Folge $u_k \subset C_c^\infty(\overline{H \cap B_{r'}})$ *mit* $\|\nabla (u_k - u)\|_{q,H} \to 0$.

Beweis.

Sei $\tilde{u}$ die gerade Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^n$. Wegen Lemma 2.5 gilt dann $\tilde{u} \in L_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$. Weiter gilt $supp(\tilde{u}) \subset B_r$ und mit $0 < \epsilon < \epsilon_0 = r' - r$ gilt für die Friedrichssche Glättung $supp(\tilde{u}_\epsilon) \subset B_{r'}$.

Sei nun $k_0 := \dfrac{1}{\epsilon_0}$ und sei mit $k \in \mathbb{N},\ k \geq k_0,\ \hat{u}_k := \tilde{u}_{\frac{1}{k}}$.

Dann ist

$$\hat{u}_k \subset C_0^\infty(B_{r'}) \text{ für alle } k \geq k_0 \text{ und } \|\nabla (\hat{u}_k - \tilde{u})\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

Sei $u_k := \hat{u}_k|_H$. Dann ist

$$\|\nabla (u_k - u)\|_{q,H} \leq \|\nabla (\hat{u}_k - \tilde{u})\|_{q,\mathbb{R}^n} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

$\square$

Lemma 4.9.

Sei $1 < q < \infty,\ 0 < r < r' < \infty$ *und* $u \in \hat{H}_0^{1,q}(H)$ *mit* $supp(u) \subset B_r \cap H$.

Dann existiert eine Folge $u_k \subset C_0^\infty(H \cap B_{r'})$ *mit* $\|\nabla (u_k - u)\|_{q,H} \to 0$.

Beweis.

Nach Lemma 2.1.1 aus [St] folgt $\hat{H}_\bullet^{1,q}(H) = \hat{H}_0^{1,q}(H)$.

Somit gilt weiter gemäß [St] Lemma 7.1.1:

$$\text{Aus } \eta \in C_0^\infty(B_{r'}) \text{ und } \eta u \in \hat{H}_0^{1,q}(H) \text{ folgt } \eta u \in \hat{H}_0^{1,q}(H \cap B_{r'}).$$

Sei $\eta \in C_0^\infty(B_{r'})$ mit $\eta|_{B_r} = 1$.

Wegen $supp(u) \subset B_r \cap H$ ist dann $\eta u = u$ und daher $u \in \hat{H}_0^{1,q}(H \cap B_{r'})$.

Somit existiert nach Definition eine Folge

$$u_k \subset C_0^\infty(H \cap B_{r'}) \text{ mit } \|\nabla (u_k - u)\|_{q,H} \to 0 \text{ für } k \to \infty.$$

$\square$

Satz 4.10.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 < q < \infty$ *und sei* Ω *(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^2$.
Dann liegt $\underline{D}(\Omega)$ *dicht in* $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Beweis.

1) Sei $1 > R > 0$ so klein gewählt, dass die dualen Variationsgleichungen von Satz 3.31 gelten und sei $x_* \in \partial\Omega$.

Nach Bemerkung 4.1, Lemma 4.2 und Lemma 4.7 sind sowohl die Sesquilinearformen, als auch die Funktionenräume invariant unter Translationen und orthogonalen Transformationen. Deshalb kann gemäß [St] Lemma 6.3.1 folgendes angenommen werden:

Es existiert ein $\omega_R \in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\|\nabla\omega_R\|_\infty \leq R$, $\omega_R(0) = 0$ und $\nabla\omega_R(0) = 0$.
Weiter existiert ein $R_* > 0$ mit

$$B_{R_*} \cap H_{\omega_R} = B_{R_*} \cap \Omega.$$

Ohne Einschränkung sei $0 < R_* < 1$. Da ein $1 < \xi < \infty$ existiert mit $supp(\omega_R) \subset B_\xi$, ist nach Definition 3.1 $\omega_R \in M_{R,\xi}$.

Seien die Funktionen x, y wie in Definition 3.3 erklärt und sei T die zugehörige Piolatransformation.

Es ist $y(B_{R_*})$ Gebiet und es existieren $0 < R'_* < R''_* < \infty$ mit:

$$B_{R'_*} \subset B_{R''_*} \subset y(B_{R_*})$$

Dann gilt:

$$x(B_{R'_*}) \subset B_{R_*} \text{ und } x(B_{R''_*}) \subset B_{R_*}.$$

Sei nun $R'''_*(x_*) > 0$ mit $B_{R'''_*} \subset x(B_{R'_*})$.

Sei $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und sei $\Psi_* \subset C_0^\infty(B_{R_*'''})$.
Gemäß Lemma 4.3 ist $\Psi_* \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(H_{\omega_R})$.

Sei G wie in Definition 3.6 erklärt. Dann folgt mittels des Satzes 3.16

$$\Psi_* \underline{\Phi} \in T(\underline{X}_G^{1,q}(H)).$$

Weiter folgt $T^{-1}(\Psi_* \underline{\Phi}) \in \underline{X}_G^{1,q}(H)$ und $supp(T^{-1}(\Psi_* \underline{\Phi})) \subset B_{R_*'}$.

Aus den Lemmata 4.8 und 4.9 folgt die Existenz einer Folge
$\left(\Phi_*^{(\nu)}\right)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \left\{ \underline{v} : \ \underline{v}_i \in C_c^\infty(\overline{H \cap B_{R_*''}}) \text{ für } i = 1, ..., n-1 \text{ und } \underline{v}_n \in C_0^\infty(H \cap B_{R_*''}) \right\}$

mit

$$\left\| \nabla \left(\underline{\Phi}_*^{(\nu)} - T^{-1}(\Psi_* \Phi) \right) \right\|_{q,H} \to 0.$$

Aus Lemma 2.3 folgt dann für alle $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\int_H \underline{\Phi}_*^{(\nu)} \nabla f dx = -\int_H div \underline{\Phi}_*^{(\nu)} f dx \text{ für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Sei $\Omega_* := \Omega \cap B_{R_*}$.
Sei nun $T(\underline{\Phi}_*^{(\nu)})$ durch 0 auf $\overline{\Omega_*}$ fortgesetzt.
Dann gilt $T(\underline{\Phi}_*^{(\nu)})_i \subset C^1(\overline{\Omega_*})$ für alle $i = 1, ..., n$.

Gemäß Lemma 3.14 ist mit $C > 0$ und $\nu \to \infty$:

$$\begin{aligned} &\left\| \nabla \left(T(\underline{\Phi}_*^{(\nu)}) - \Psi_* \Phi \right) \right\|_{q,\Omega_*} \\ &\leq C \left\| \nabla \left(\underline{\Phi}_*^{(\nu)} - T^{-1}(\Psi_* \Phi) \right) \right\|_{q,H} \to 0 \end{aligned}$$

Sei $\underline{d}_*^{(\nu)} := T(\underline{\Phi}_*^{(\nu)}) \subset \underline{C}^1(\overline{\Omega_*})$.
Wegen $x(B_{R_*''}) \subset B_{R_*}$ gilt nun nach Lemma 3.15:

$$\int_{\Omega_*} \underline{d}_*^{(\nu)} \nabla f dx = -\int_{\Omega_*} div(\underline{d}_*^{(\nu)}) f dx \text{ für alle } f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Setze $\underline{d}_*^{(\nu)}$ durch 0 auf $\overline{\Omega}$ fort.

Dann ist

$$\left\| \nabla \left(\underline{d}_*^{(\nu)} - \Psi_* \Phi \right) \right\|_{q,\Omega} \to 0$$

und

$$\int_\Omega \underline{d}_*^{(\nu)} \nabla f dx = - \int_\Omega div(\underline{d}_*^{(\nu)}) f dx$$

für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2) Sei Ω(BG).

$x_* \in \partial\Omega$ war beliebig. Dann bildet $\left\{ B_{R(x_*)}(x_*) : x_* \in \partial\Omega \right\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\partial\Omega$.

Also existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_{R_k'''(x_k)}(x_k)$.

Sei $B_k''' := B_{R_k'''(x_k)}(x_k)$.

Weiter sei $\tilde{B} := \Omega \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_k'''$. Wegen Lemma 1.4 folgt $\tilde{B}$ kompakt und $\tilde{B} \subset \Omega$.

Also kann $\tilde{B}$ durch endlich viele Kugeln vom Radius $< \frac{1}{2} dist(\tilde{B}, \partial\Omega)$ überdeckt werden.

Also existiert ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ und für $j = 1, ..., \tilde{m}$ existieren $\tilde{B}_j \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, so dass gilt:

$$\tilde{B} \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j \text{ und } \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j \subset\subset \Omega$$

Sei $B_0''' := \bigcup\limits_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j$. Dann ist $\overline{\Omega} \subset \bigcup\limits_{k=0}^{m} B_k'''$.

Sei $1 = \sum\limits_{k=0}^{m} \Psi_k(x)$ mit $\Psi_k \subset C_0^\infty(B_k''')$.

Für $k = 1, ..., n$ existieren wegen Teil 1) dieses Beweises $\underline{d}_k^{(\nu)} \subset \underline{C}^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\left\| \nabla \left(\underline{d}_k^{(\nu)} - \Psi_k \Phi \right) \right\|_{q,\Omega} \to 0$$

und

$$\int\limits_\Omega \underline{d}_k^{(\nu)} \nabla f dx = - \int\limits_\Omega div(\underline{d}_k^{(\nu)}) f dx$$

für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $k = 1, ..., m$.

Wegen $B_0''' \subset\subset \Omega$, ist $\delta := dist(B_0''', \partial\Omega) > 0$.
Durch Anwendung der Friedrichsschen Glättung erklärt man die Folge
$(\Psi_0 \underline{\Phi})_{\nu \in \mathbb{N}} := \int\limits_\Omega j_\epsilon(x-y) \underline{\Phi}(y) dy$ für $\nu \geq \frac{2}{\delta}$, wobei $j_\epsilon \in C_0^\infty(B_\epsilon(0))$ den radialsymmetrischen Kern der Glättung bezeichne.

Somit ist $\left\| \nabla \left((\Psi_0 \underline{\Phi})_\nu - \Psi_0 \underline{\Phi} \right) \right\|_{q,\Omega} \to 0$ für $\nu \to \infty$ und für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int\limits_\Omega (\Psi_0 \underline{\Phi})_\nu \nabla f dx = - \int\limits_\Omega div(\Psi_0 \underline{\Phi})_\nu f dx$$

Sei nun $d_0^{(\nu)} := (\Psi_0 \underline{\Phi})_\nu$ und $\underline{d}^{(\nu)} := \sum_{k=0}^m \underline{d}_k^{(\nu)}$.
Dann ist $\underline{d}_\nu \subset \underline{C}^1(\overline{\Omega})$ und es gilt für alle $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Omega \underline{d}^{(\nu)} \nabla f dx &= \sum_{k=0}^m \int\limits_\Omega \underline{d}_k^{(\nu)} \nabla f dx \\
&= - \sum_{k=0}^m \int\limits_\Omega div \underline{d}_k^{(\nu)} f dx \\
&= - \int\limits_\Omega div \underline{d}^{(\nu)} f dx
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\underline{d}_\nu \subset \underline{D}(\Omega)$ und es ist

$$\left\| \nabla \left(\underline{d}^{(\nu)} - \Phi \right) \right\|_{q,\Omega} \leq \sum_{k=0}^m \left\| \nabla \left(\underline{d}_k^{(\nu)} - \Psi_k \Phi \right) \right\|_{q,\Omega} \to 0.$$

3) Sei Ω (AG).

a) Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) definiert und $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$. Weiter sei $\varphi_r(x)$ wie in Definition 4.6 erklärt. Mittels des Lemmas 4.4 folgt $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Für $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $supp(\eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}) \subset \mathbb{R}^n \backslash B_{2R_0}$ und es existiert ein $\epsilon_0 > 0,$ so dass mit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ für die Friedrichssche Glättung gilt:

$$\left(\eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)_\epsilon \subset C_0^\infty(\Omega)$$

und

$$\left\|\left(\left(\eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)_\epsilon - \eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)\right\|_{q,\Omega} + \left\|\nabla\left(\left(\eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)_\epsilon - \eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

für $\epsilon \to 0$

Daraus folgt $\eta\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} \in H_0^{1,q}(\Omega)$ und daraus $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} \in \hat{H}_\bullet^{1,q}(\Omega)$.

Sei $q \geq n:$

Nach [Si/So] Theorem I.2.7 gilt: $\hat{H}_\bullet^{1,q}(\Omega) = \hat{H}_0^{1,q}(\Omega)$

Also existiert nach Definition von $\hat{H}_0^{1,q}(\Omega)$ eine Folge $\underline{v}'_\nu \subset \underline{C}_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\left\|\nabla\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \underline{v}'_\nu\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

und

$$\int_\Omega \underline{v}'_\nu \nabla\Psi dx = -\int_\Omega div\underline{v}'_\nu \Psi dx \;\forall\; \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

b) Sei $1 < q < n:$

Nach [Si/So] Theorem I.2.16 gilt:

$$\hat{H}_\bullet^{1,q}(\Omega) = \hat{H}_0^{1,q}(\Omega) \oplus \{\alpha\varphi_{2R_0} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Also existiert ein $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, so dass mit

$$\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} = \left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right) + \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}$$

gilt:

$$\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)} \in \hat{H}_0^{1,q}(\Omega)$$

Somit folgt die Existenz einer Folge $\underline{v}'_\nu \subset \underline{C}_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\left\|\nabla\left(\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right) - \underline{v}'_\nu\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

und

$$\int_\Omega \underline{v}'_\nu \nabla\Psi dx = -\int_\Omega div\underline{v}'_\nu \Psi dx \;\forall\; \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt:

$$\left\|\nabla\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \left(\underline{v}'_\nu + \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\right)\right\|_{q,\Omega}$$
$$= \left\|\nabla\left(\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right) - \underline{v}'_\nu\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

Wegen $\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)})$ folgt mittels Teil 2) dieses Beweises, die Existenz einer Folge $\underline{v}''_\nu \in \underline{D}(\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)})$ mit

$$\left\|\nabla\left(\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\underline{\Phi} - \underline{v}''_\nu\right)\right\|_{q,\Omega\cap B_{4R_0(\Omega)}} \to 0.$$

Setze nun $\underline{v}''_\nu$ durch 0 auf Ω fort, so ist $\underline{v}''_\nu \in \underline{D}(\Omega)$ und es gilt:

$$\left\|\nabla\left(\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\underline{\Phi} - \underline{v}''_\nu\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

Sei nun $\underline{\Phi}_\nu := \underline{v}'_\nu + \underline{v}''_\nu$. Dann gilt $\underline{\Phi}_\nu \in \underline{C}^1(\bar{\Omega})$ und es folgt die Existenz von $r_\nu = r(\underline{\Phi}_\nu) > 0$ mit $\underline{\Phi}_\nu(x) = 0$ für $|x| > r_\nu$.

Weiter gilt

$$\left\|\nabla\left(\underline{\Phi} - \left(\underline{\Phi}_\nu + \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\right)\right\|_{q,\Omega}$$
$$\leq \left\|\nabla\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\Phi} - \left(\underline{v}'_\nu + \alpha\varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\right)\right\|_{q,\Omega} + \left\|\nabla\left(\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\underline{\Phi} - \underline{v}''_\nu\right)\right\|_{q,\Omega} \to 0$$

sowie

$$\int_\Omega \underline{\Phi}_\nu \nabla\Psi dx = -\int_\Omega div\underline{\Phi}_\nu \Psi dx \;\forall\; \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$\square$

Lemma 4.11.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG), mit* $\partial\Omega \in C^2$ *und* $\lambda_1 > -\dfrac{1}{n}, \lambda_2 \geq 1$.

Zu jedem $x_0 \in \partial\Omega$ *existiert ein* $0 < R' = R'(x_0, \partial\Omega, q) < 1$ *und ein* $C = C(R') > 0$ *mit*

$$\left\|\nabla\left(\eta \underline{p}\right)\right\|_{q,\Omega_{R'}(x_0)} \leq C \sup_{0 \neq \underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_{R'}(x_0))} \frac{B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega_{R'}(x_0))}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',\Omega_{R'}(x_0)}}$$

für alle $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ *mit* $\Omega_{R'}(x_0) := \Omega \cap B_{R'}(x_0)$, $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{R'}{2}}(x_0))$.

Beweis.

1) Sei $1 > R > 0$ so klein gewählt, dass die dualen Variationsgleichungen von Satz 3.31 gelten und sei $x_0 \in \partial\Omega$.

Wie im Beweisteil 1 von Lemma 4.10 kann o.E. (nach geeigneter Drehung und Translation) angenommen werden:

Es existiert ein $\omega_R \in C_0^2(\mathbb{R}^{n-1})$ mit $\|\nabla\omega_R\|_\infty \leq R$, $\omega_R(0) = 0$ und $\nabla\omega_R(0) = 0$. Weiter existiert ein $R' > 0$ mit

$$B_{R'} \cap H_{\omega_R} = B_{R'} \cap \Omega.$$

Ohne Einschränkung sei $0 < R' < 1$. Da ein $1 < \xi < \infty$ existiert mit $supp(\omega_R) \subset B_\xi$ ist nach Definition 3.1 $\omega_R \in M_{R,\xi}$.

2) Sei nun $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Mit $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{R'}{2}})$ gilt wegen des Lemmas 4.3 $\eta\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Also ist $\eta\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(H_{\omega_R} \cap B_{R'})$.
Setze nun $\eta\underline{p}$ durch 0 auf H_{ω_R} fort. Mit G wie in Definition 3.6 ist daher $\eta\underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q}(H_{\omega_R})$ und $supp(\eta\underline{p}) \subset B_{R'}$.

Sei $\rho \in C_0^\infty(B_{\frac{2R'}{3}})$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und $\rho(x) = 1$ für $x \in B_{\frac{R'}{2}}$.
Weiter sei $0 \neq \underline{v} \in \underline{Y}_G^{1,q'}(H_{\omega_R})$.

Wegen Lemma 4.3 gilt daher:

$$\rho\underline{v} \in \underline{Y}_G^{1,q'}(H_{\omega_R}) \tag{4.11.1}$$

Weiter ist

$$< \nabla(\eta\underline{p}), \nabla\underline{v} >_{H_{\omega_R}} = < \nabla(\eta\underline{p}), \nabla\left(\rho\underline{v}\right) >_{H_{\omega_R}}$$

und

$$< div(\eta\underline{p}), div\underline{v} >_{H_{\omega_R}} = < div(\eta\underline{p}), div\left(\rho\underline{v}\right) >_{H_{\omega_R}}$$

sowie

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{H_{\omega_R}} \partial_i(\eta\underline{p})_k \partial_k \underline{v}_i dx = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{H_{\omega_R}} \partial_i(\eta\underline{p})_k \partial_k \left(\rho\underline{v}\right)_i dx.$$

Mittels Satz 3.16 gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla\left(\rho\underline{v}\right)\right\|_{q',H_{\omega_R}} &\leq \left\|\nabla\rho\underline{v}\right\|_{q',H_{\omega}} + \left\|\nabla\underline{v}\rho\right\|_{q',H_{\omega_R}} \\
&\underset{\text{Lemma 3.18}}{\leq} \left\|\nabla\rho\right\|_{\infty} C \left\|\nabla\underline{v}\right\|_{q',H_{\omega_R}} + \left\|\rho\right\|_{\infty} \left\|\nabla\underline{v}\right\|_{q',H_{\omega_R}} \\
&\leq \underbrace{\left(1 + C\left\|\nabla\rho\right\|_{\infty}\right)}_{:=C'} \left\|\nabla\underline{v}\right\|_{q',H_{\omega_R}} \text{ mit } C' > 0
\end{aligned}$$

Aus (4.11.1) folgt $\rho\underline{v} \in \underline{Y}_G^{1,q'}(H_{\omega_R})$ und es ist $supp(\rho\underline{v}) \subset\subset B_{R'}$.
Somit ist $\rho\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(H_{\omega_R} \cap B_{R'}) = \underline{Y}^{1,q'}(\Omega \cap B_{R'}) = \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_{R'})$.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, H_{\omega_R})\right|}{\left\|\nabla\underline{v}\right\|_{q',H_{\omega_R}}} \\
&\leq C' \frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \rho\underline{v}, \lambda_\tau, \Omega_{R'})\right|}{\left\|\nabla(\rho\underline{v})\right\|_{q',\Omega_{R'}}}
\end{aligned}$$

Somit ist:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla\left(\eta \underline{p}\right)\right\|_{q',\Omega_{R'}} \\
&= \left\|\nabla(\eta \underline{p})\right\|_{q',H_{\omega_R}} \\
&\underset{\text{Satz 3.31}}{\leq} C_1 \sup_{0\neq \underline{v}\in \underline{Y}_G^{1,q'}(H_{\omega_R})} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, H_{\omega_R})}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',H_{\omega_R}}} \\
&\leq C_2 \sup_{0\neq \underline{\Phi}\in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_{R'})} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega_{R'})}{\|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\Omega_{R'}}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Lemma 4.12.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG) und* $x_0 \in \Omega$.
Weiter sei $0 < r < \infty$ *mit* $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega$.

Dann existiert ein $C = C(q, r) > 0$ *mit*

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla\left(\eta \underline{p}\right)\right\|_{q,B_{2r}(x_0)} \\
&\leq C \sup_{0\neq \underline{v}\in \underline{Y}^{1,q'}(B_{2r}(x_0))} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, B_{2r}(x_0))}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',B_{2r}(x_0)}}
\end{aligned}
$$

für alle $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ *und* $\eta \in C_0^\infty(B_r(x_0))$.

Beweis.

Sei $\rho \in C_0^\infty(B_{2r}(x_0))$ mit $0 \leq \rho \leq 1$ und $\rho(x) = 1$ für alle $x \in B_r(x_0)$.
Sei $\underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ mit $G \subset\subset \mathbb{R}^n \backslash B_{2r}(x_0)$ und sei $\underline{v} := \rho \underline{\Phi}$.
Dann gilt mittels des Lemmas 4.5:

$$\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(B_{2r}(x_0))$$

Weiter gilt mittels [Si1] Theorem 3.6:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla \underline{v}\|_{q',B_{2r}(x_0)} &= \left\|\nabla\left(\rho \underline{\Phi}\right)\right\|_{q',B_{2r}(x_0)} \\
&\leq \|\nabla \rho \underline{\Phi}\|_{q',B_{2r}(x_0)} + \|\rho \nabla \underline{\Phi}\|_{q',B_{2r}(x_0)} \\
&\leq \|\nabla \rho\|_\infty \|\underline{\Phi}\|_{q',B_{2r}(x_0)} + \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',B_{2r}(x_0)} \\
&\leq \|\nabla \rho\|_\infty C \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n} + \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',B_{2r}(x_0)} \\
&\leq \underbrace{\left(1 + C\|\nabla \rho\|_\infty\right)}_{:=C'>0} \|\nabla \underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}
\end{aligned}
$$

Wegen $\|\nabla\rho\|_\infty|_{B_r(x_0)} = 0$ und $\rho|_{B_r(x_0)} = 1$ ist $\nabla\underline{v}|_{B_r(x_0)} = \nabla\underline{\Phi}|_{B_r(x_0)}$.

Somit gilt nun für $0 \neq \underline{\Phi} \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $\nabla(\rho\underline{\Phi}) \neq 0$
wegen $\rho\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(B_{2r}(x_0))$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \mathbb{R}^n)\right|}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&\leq C' \frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, (\rho\underline{\Phi}), \lambda_\tau, B_{2r}(x_0))\right|}{\|\nabla(\rho\underline{\Phi})\|_{q',B_{2r}(x_0)}} \\
&\leq C' \sup_{0\neq\underline{v}\in\underline{Y}^{1,q'}(B_{2r}(x_0))} \frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, B_{2r}(x_0))\right|}{\|\nabla\underline{v}\|_{q',B_{2r}(x_0)}}
\end{aligned}$$

Sei nun $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$. Dann ist mit Lemma 4.3 $\eta\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Setze nun $\eta\underline{p}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Wegen $G \subset\subset \mathbb{R}^n \backslash B_{2r}(x_0)$ ist $\eta\underline{p} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.

Also folgt aus letzter Abschätzung mit Satz 2.8 beziehungsweise Satz 2.18:

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\left(\eta\underline{p}\right)\right\|_{q,B_{2r}(x_0)} \\
&= \left\|\nabla\left(\eta\underline{p}\right)\right\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&\leq C'' \sup_{0\neq\underline{\Phi}\in\underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n)} \frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \mathbb{R}^n)\right|}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&\leq C''C' \sup_{0\neq\underline{v}\in\underline{Y}^{1,q'}(B_{2r}(x_0))} \frac{\left|B_\tau(\eta\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, B_{2r}(x_0))\right|}{\|\nabla\underline{v}\|_{q',B_{2r}(x_0)}}
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.13.

Sei $1 < q < \infty$, Ω (AG) und $\partial\Omega \in C^2$. Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) definiert.
Weiter sei $\varphi_{2R_0(\Omega)}$ wie in Definition 4.6 erklärt.
Dann existiert ein $C = C(q, R_0, \Omega) > 0$ mit

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right)\right\|_{q,\Omega} \\
&\leq C \sup_{0\neq\underline{v}\in\underline{Y}^{1,q'}(\Omega)} \frac{B_\tau(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega)}{\|\nabla\underline{v}\|_{q',\Omega}}
\end{aligned}$$

für alle $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Beweis.

Sei $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und sei weiter $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}$ auf $\mathbb{R}^n$ durch 0 fortgesetzt.
Dann ist $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p} \in \underline{L}^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$.
Somit ist $\partial_k \left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right) = p_i \partial_k \varphi_{2R_0(\Omega)} + \varphi_{2R_0(\Omega)} \partial_k \underline{p}_i \in L^q(\mathbb{R}^n)$.
Daraus folgt $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}_G(\mathbb{R}^n)$ mit $G \subset\subset K$ wobei K wie in (1.1.1) definiert ist.

Sei nun $\underline{\Phi} \in \underline{L}^{1,q'}_G(\mathbb{R}^n)$ mit $G \subset\subset K$ und sei $\underline{v} := \varphi_{R_0(\Omega)}\underline{\Phi}$.
Dann folgt mittels des Lemmas 4.4 $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.
Es ist $\varphi_{R_0(\Omega)}(x) = 1$ für alle $|x| \geq 2R_0(\Omega)$ und daher ist:

$$\nabla \underline{v}|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R_0(\Omega)}} = \nabla \underline{\Phi}|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R_0(\Omega)}}$$

Sei $\underline{v}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Dann ist $\underline{v} \in \underline{L}^{1,q'}_G(\mathbb{R}^n)$.
Weiter gilt mittels [Si1] Theorem 3.6:

$$\begin{aligned}
\|\nabla \underline{v}\|_{q',\Omega} &= \left\|\nabla \left(\varphi_{R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right)\right\|_{q',\Omega} \\
&\leq \left\|\nabla \varphi_{R_0(\Omega)}\underline{\Phi}\right\|_{q',\Omega} + \left\|\varphi_{R_0(\Omega)}\nabla\underline{\Phi}\right\|_{q',\Omega} \\
&\leq \left\|\nabla \varphi_{R_0(\Omega)}\right\|_{\infty} \|\underline{\Phi}\|_{q',B_r\cap B_{2r}} + \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n} \\
&\leq \left\|\nabla \varphi_{R_0(\Omega)}\right\|_{\infty} C \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n} + \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n} \\
&\leq \underbrace{\left(1 + C\left\|\nabla \varphi_{R_0(\Omega)}\right\|_{\infty}\right)}_{:=C'>0} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Somit gilt nun für $\underline{v} \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|B_\tau(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \mathbb{R}^n)\right|}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&\leq C' \frac{\left|B_\tau(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega)\right|}{\|\nabla\underline{v}\|_{q',\Omega}}
\end{aligned}$$

Also folgt mit Satz 2.8 beziehungsweise Satz 2.18:

$$\begin{aligned}
&\left\|\nabla \left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right)\right\|_{q,\Omega} \\
&= \left\|\nabla \left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right)\right\|_{q,\mathbb{R}^n} \\
&\leq C'' \sup_{0\neq\underline{\Phi}\in\underline{L}^{1,q'}_G(\mathbb{R}^n)} \frac{B_\tau(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \mathbb{R}^n)}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\mathbb{R}^n}} \\
&\leq C''C' \sup_{0\neq\underline{v}\in\underline{Y}^{1,q}(\Omega)} \frac{B_\tau(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega)}{\|\nabla\underline{v}\|_{q',\Omega}}
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 4.14.

Sei Ω(BG)\(AG) mit $\partial\Omega \in C^0$, $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda_\tau \neq -1$ und sei
$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.
Dann existiert ein $\underline{\tilde{p}} \in C^\infty(\Omega)$ mit $\underline{p} = \underline{\tilde{p}}$ f.ü. in Ω.

Beweis.

Trivialerweise gilt:

$$\underline{C}_0^\infty(\Omega) \subset \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$$

Somit gilt:

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$$

Sei $\Psi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\underline{\Phi}' := \nabla\Psi$. Dann ist $\Phi' \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$.
Also gilt für $\tau = 1$

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_k \partial_i \partial_k \Psi dx + \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_i \partial_k \partial_k \Psi dx$$

und für $\tau = 2$

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_k \partial_i \partial_k \Psi dx + \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_k \partial_k \partial_i \Psi dx + (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_i \partial_k \partial_k \Psi dx$$

Mit partieller Integration folgt dann für $\tau = 1, 2$:

$$0 = (1 + \lambda_\tau) \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega \partial_i p_i \partial_k \partial_k \Psi dx$$

Aus dem Weylschen Lemma (siehe auch [Si4] Lemma 2.7) folgt die Existenz eines $h \in C^\infty(\Omega)$ mit $div\underline{p} = h$ f.ü. und

$$\Delta h = 0. \tag{4.14.1}$$

Sei jetzt $\Phi_i'' := \sum_{j=1}^{n} \partial_j \partial_j \Psi_i$ mit $\Psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $i = 1, .., n$.

Es gilt $\underline{\Phi}'' \in \underline{C}_0^\infty(\Omega)$ und es gilt mittels partieller Integration für $\tau = 1, 2$:

$$0 = - \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_\Omega p_i \partial_k \partial_k \partial_j \partial_j \Psi_i dx + \lambda_\tau \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j \partial_j \partial_i p_i}_{\underset{(4.14.1)}{=} 0} \partial_k \Psi_k dx$$

Also ist $\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega p_i \Delta^2 \Psi_i = 0$ mit $\Psi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ für alle $i = 1, ..., n$.

Sei $j_0 \in \{1, ..., n\}$. Für alle $j = 1, ..., n,\ j \neq j_0$ setze $\Psi_j = 0 \in C_0^\infty(\Omega)$.

Dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega p_{i_0} \Delta^2 \Psi_{j_0} = 0 \text{ für alle } \Psi_{i_0} \in C_0^\infty(\Omega)$$

Also folgt nach dem Weylschen Lemma für Δ^2 ([Si4] Theorem 3.4) die Existenz eines $\tilde{p}_{j_0} \in C^\infty(\Omega)$ mit $\tilde{p}_{j_0} = p_{j_0}$ f.ü. in Ω. Also existiert ein $\underline{\tilde{p}} \in \underline{C}^\infty(\Omega)$ mit $\underline{\tilde{p}} = \underline{p}$ f.ü. in Ω.

□

Lemma 4.15.

Sei $\Omega(AG)$, $\partial\Omega \in C^2$, $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) erklärt und $r > R_0(\Omega)$.
Sei $\lambda_\tau \neq -1$, $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und $B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.

Dann gilt: $\nabla \underline{p}\big|_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2r}} \in \underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^n \setminus B_{2r})$

Beweis.

Durch Änderung auf einer Nullmenge ist wegen Lemma 4.14 $\underline{p} \in \underline{C}^\infty(\Omega)$.

Sei $A_r := \{x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } r < |x| < 2r\} \subset\subset \Omega$.

Dann gilt $\underline{p} \in \underline{L}^\infty(\overline{A_r})$ und $\nabla \underline{p} \in \underline{\underline{L}}^\infty(\overline{A_r})$ für alle $r > R_0(\Omega)$.

Sei $\varphi_r(x)$ wie in Definition 4.6 und K wie in (1.1.1) erklärt.

Weiter sei $G \subset\subset K$ und $\underline{\Phi} \in \underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $\Phi \in \underline{L}_G^{1,q'}(\mathbb{R}^n) \subset \underline{L}^{1,q'}(\mathbb{R}^n)$.

Somit folgt wegen Lemma 4.4 $\varphi_r \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.

Es ist $\underline{p} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$. Also folgt wieder mittels des Lemmas 4.4 $\varphi_r \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$. Setze $\varphi_r \underline{p}$ durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Wegen $G \subset\subset K$ folgt $\varphi_r \underline{p} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$.

Also gilt:

$$B_\tau(\underline{p}, (\varphi_r \underline{\Phi}), \lambda_\tau, \Omega) = 0$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} B_1(\varphi_r \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_1, \Omega) = & \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_i \right] dx \\ & + \lambda_1 \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_i \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_k \right] dx \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B_2(\varphi_r \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \Omega) = & \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_i \right] dx \\ & + \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_i \underline{\Phi}_k - \partial_k \underline{p}_i \partial_i \varphi_r \underline{\Phi}_k \right] dx \\ & + \int\limits_\Omega (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_i \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_k \right] dx. \end{aligned}$$

Wegen $supp(\nabla \varphi_r) \subset\subset \Omega$ ist

$$\begin{aligned} B_1(\varphi_r \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_1, \mathbb{R}^n) = & \int\limits_{A_r} \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_i \right] dx \\ & + \lambda_1 \int\limits_{A_r} \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_i \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_k \right] dx \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
B_2(\varphi_r \underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \mathbb{R}^n) = &\int\limits_{A_r} \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_i\Big]\, dx \\
&+ \int\limits_{A_r} \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_k \varphi_r \underline{p}_i \partial_i \underline{\Phi}_k - \partial_k \underline{p}_i \partial_i \varphi_r \underline{\Phi}_k\Big]\, dx \\
&+ \int\limits_{A_r} (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_i \varphi_r \underline{p}_i \partial_k \underline{\Phi}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_r \underline{\Phi}_k\Big]\, dx.
\end{aligned}
$$

Da $\underline{\hat{D}}_G(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\underline{L}_G^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ liegt und $\underline{p}, \nabla \underline{p} \in \underline{L}^2(\overline{A_r})$ folgt mittels der Poincaréungleichung:

$$\left|B_\tau(\left(\varphi_r \underline{p}\right), \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \mathbb{R}^n)\right| \leq C \left\|\nabla \underline{\Phi}\right\|_{2,\mathbb{R}^n}$$

Wegen $\varphi_r \underline{p} \in \underline{L}_G^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ folgt mittels Korollar 2.16 beziehungsweise Satz 2.18

$$\nabla(\varphi_r \underline{p}) \in \underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^n).$$

Somit ist $\nabla \underline{p}\big|_{\mathbb{R}^n \backslash B_{2r}} \in \underline{\underline{L}}^2(\mathbb{R}^n \backslash B_{2R})$.

□

Lemma 4.16.

Sei $1 < q < \infty$, Ω (BG) mit $\partial\Omega \in C^2$, $x_0 \in \partial\Omega$, $\lambda_1 > -\frac{1}{n}$ und $\lambda_2 \geq 1$.
Weiter sei $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega).$$

Dann existiert ein $R_0 > 0$ mit:

$$\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega) \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(B_{R_0}(x_0))$$

Beweis.

Wegen Bemerkung 4.1 1) sei nun ohne Einschränkung $x_0 = 0$.

1) Sei $q > 2$.
Für jedes $R_0 > 0$ folgt aus Lemma 4.3:

$$\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) \text{ für alle } \eta \in C_0^\infty(B_{R_0}(x_0))$$

Wegen der Hölderungleichung ist $\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$.

2) Sei $q < 2$.
Wie in Teil d) des Beweises von Lemma 3.30 gibt es genau ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k < \dfrac{n}{q} \leq k+1$. Es sei $q_j := \dfrac{nq}{n - jq}$ für $j = 0, ..., k$.
Dann gilt $q_k \geq n \geq 2$ und für $j = 0, ..., k-1$ ist $q_j < n$.

Weiter gilt für die Sobolev-Exponenten $q_j^* = \dfrac{nq_j}{n - q_j}$ die Beziehung

$$q_j^* = q_{j+1} \text{ für } j = 0, ..., k-1.$$

Für den dualen Exponenten gilt:

$$q'_0 = q',\ q'_j < n \text{ für alle } j = 1, ..., k \text{ und } (q'_j)^* = q'_{j-1} \text{ für } j = 1, ..., k$$

Für $1 < \tilde{q} < \infty$ sei $R(\tilde{q}, n)$ wie in Satz 3.31 definiert.
Sei $R := \min \{R(q_j, n) : j = 0, ..., k\}$.

Wie im Beweisteil 1) des Lemmas 4.11 existiert zu diesem R ein $\omega_R \in M_{R,\xi}$ und ein $1 > R_1 > 0$ mit

$$B_{R_1} \cap H_{\omega_R} = B_{R_1} \cap \Omega.$$

Wegen Lemma 4.2 sei ohne Einschränkung $B_{R_1} \cap H_{\omega_R} = B_{R_1} \cap \Omega$.
Für $j = 0, ..., k+1$ sei $r_j := R_1 \cdot 2^{-(j+1)}$ und $\Omega_j := B_{r_j} \cap \Omega$.

Seien T und G in Abhängigkeit von ω wie in Definition 3.6 gewählt.
Sei $\underline{v} \in T(\underline{D}_G(H)) \subset \underline{Y}_G^{1,q'}(H_{\omega_R})$ und für $j = 0, ..., k+1$ sei $\varphi_j \in C_0^\infty(B_{r_j})$ mit $0 \leq \varphi \leq 1$ und $\varphi_j = 1|_{B_{r_{j+1}}}$.

Aus Lemma 4.3 folgt $\varphi_j \underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$ und $\varphi_j \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Wegen $B_\tau(\underline{p}, \varphi_j \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} B_1(\varphi_j \underline{p}, \underline{v}, \lambda_1, \Omega) = &\int_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_i \right] dx \\ &+ \lambda_1 \int_\Omega \sum_{i,k=1}^n \left[\partial_i \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_k \right] dx \end{aligned} \tag{4.16.1}$$

und

$$B_2(\varphi_j \underline{p}, \underline{v}, \lambda_2, \Omega) = \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_i - \partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_i\Big]\, dx$$
$$+ \int\limits_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_i \underline{v}_k - \partial_k \underline{p}_i \partial_i \varphi_j \underline{v}_k\Big]\, dx$$
$$+ \int\limits_\Omega (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_i \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_k - \partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_k\Big]\, dx. \tag{4.16.2}$$

Zeige nun mittels Induktion für alle $j = 1, ..., k+1$:

$\varphi_j \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q_j}(H_{\omega_R})$

Aus Lemma 4.3 und $\varphi_0 \in C_0^\infty(B_{r_0})$ folgt $\varphi_0 \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q}(\Omega \cap B_{r_0})$.
Sei $\varphi_0 \underline{p}$ durch 0 auf H_{ω_R} fortgesetzt. Dann gilt:

$\varphi_0 \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q_0}(H_{\omega_R})$

Für $j = 1, ..., k$ sei nun $\varphi_{j-1} \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q_{j-1}}(H_{\omega_R})$.
Aus Lemma 3.29 folgt für alle $\tilde{r} > 0$:

$\varphi_{j-1} \underline{p} \in \underline{L}^{q_j}(H_{\omega_R} \cap B_{\tilde{r}})$

Wegen $\varphi_{j-1} \in C_0^\infty(B_{r_{j-1}})$ folgt $\varphi_{j-1} \underline{p} \in \underline{L}^{q_j}(H_{\omega_R})$ und es ist $\varphi_{j-1} = 1\big|_{B_{r_j}}$.
Daraus folgt:

$\left\|\underline{p}\right\|_{q_j, \Omega_j} \leq \left\|\varphi_{j-1} \underline{p}\right\|_{q_j, H_{\omega_R}} < \infty$

Zusammen mit $M_j := \|\nabla \varphi_j\|_\infty$ und $\underline{v} \in T(\underline{D}_G(H))$ folgt dann

$$\left| \int\limits_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_i\Big] + \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \Big[\partial_i \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_k\Big] \right) dx \right|$$
$$\leq M_j (1 + \lambda_1) \left\|\underline{p}\right\|_{q_j, \Omega_j} \|\nabla \underline{v}\|_{q_j', H_{\omega_R}}$$

und

$$\left| \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_i + \partial_k \varphi_j \underline{p}_i \partial_i \underline{v}_k \right] + (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \varphi_j \underline{p}_i \partial_k \underline{v}_k \right] \right) dx \right|$$
$$\leq M_j (1 + \lambda_2) \left\| \underline{p} \right\|_{q_j, \Omega_j} \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q_j', H_{\omega_R}} .$$

Aus Lemma 3.29 folgt für alle $\tilde{r} > 0$:

$$\left\| \underline{v} \right\|_{q_{j-1}', H_{\omega_R} \cap B_{\tilde{r}}} \leq C \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q_j', H_{\omega_R}}$$

Wegen $supp\,(\varphi_j) \subset B_{r_j}$ folgt

$$\left| \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_i \right] + \lambda_1 \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_k \right] dx \right|$$
$$\leq C_{\lambda_1} M_j \left\| \nabla \underline{p} \right\|_{q_{j-1}, \Omega_j} \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q_j', H_{\omega_R}}$$

und

$$\left| \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_k \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_i + \partial_k \underline{p}_i \partial_i \varphi_j \underline{v}_k \right] + (\lambda_2 - 1) \sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i \underline{p}_i \partial_k \varphi_j \underline{v}_k \right] \right) dx \right|$$
$$\leq C_{\lambda_2} M_j \left\| \nabla \underline{p} \right\|_{q_{j-1}, \Omega_j} \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q_j', H_{\omega_R}} .$$

Zusammen mit (4.16.1), (4.16.2) und $C' = C'(\underline{p}, R, j, \lambda_\tau)$ gilt also für $\underline{v} \in T(\underline{D}_G(H))$

$$\left| B_\tau(\varphi_j \underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega) \right| \leq C' \left\| \nabla \underline{v} \right\|_{q_j', H_{\omega_R}} .$$

Aus Lemma 4.3 folgt $\varphi_j \varphi_{j-1} \underline{p} = \varphi_j \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q_{j-1}}(H_{\omega_R})$.
Zusammen mit Lemma 3.32 folgt $\varphi_j \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,q_j}(H_{\omega_R})$.

Für $j = k$ ist $q_k \geq 2$. Mittels Teil 1) dieses Beweises folgt $\varphi_k \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,2}(H_{\omega_R})$.
Sei nun $R_0 := r_{k+1}$. Für $\eta \in C_0^\infty(B_{R_0})$ gilt wegen Lemma 4.3

$$\eta \underline{p} = \eta \varphi_k \underline{p} \in \underline{Y}_G^{1,2}(H_{\omega_R}).$$

Es ist $B_{R_0} \cap H_{\omega_R} = B_{R_0} \cap \Omega \subset \Omega$. Daraus folgt $\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$.

$\square$

Lemma 4.17.

Sei Ω *(BG),* $\underline{u} \in \underline{L}^{1,q}(\Omega)$ *und* $\epsilon(\underline{u}) = 0$.
Dann gilt $\underline{u}(x) = A(x) + a$ *mit* $a \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $A^t = -A$.

Beweis.

Wegen $\epsilon(\underline{u}) = 0$ gilt für alle $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i,k,j = 1,...,n$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \epsilon_{ik}(\underline{u})\partial_j\Phi dx - \int_\Omega \epsilon_{ji}(\underline{u})\partial_k\Phi dx + \int_\Omega \epsilon_{kj}(\underline{u})\partial_i\Phi dx\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_\Omega (\partial_i u_k + \partial_k u_i)\partial_j\Phi dx - \int_\Omega (\partial_j u_i + \partial_i u_j)\partial_k\Phi dx\right.\\
&\qquad \left. + \int_\Omega (\partial_k u_j + \partial_j u_k)\partial_i\Phi dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_\Omega u_k\partial_i\partial_j\Phi dx + \int_\Omega u_i\partial_k\partial_j\Phi dx - \int_\Omega u_i\partial_j\partial_k\Phi dx\right.\\
&\qquad \left. - \int_\Omega u_j\partial_i\partial_k\Phi dx + \int_\Omega u_j\partial_k\partial_i\Phi dx + \int_\Omega u_k\partial_j\partial_i\Phi dx\right)\\
&= -\int_\Omega u_k\partial_i\partial_j\Phi dx\\
&= \int_\Omega \partial_i u_k\partial_j\Phi dx
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\partial_i\partial_j u_k = 0$ für alle $i,j,k = 1,...,n$.

Daher ist $\underline{u}(x) = Ax + a$ mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Für alle $i,k = 1,...,n$ ist
$0 = \epsilon_{ik}(\underline{u}) = \partial_i u_k + \partial_k u_i = a_{ik} + a_{ki}$.

Daraus folgt $A^t = -A$.

□

Definition und Bemerkung 4.18.

Sei $1 < q < \infty$ *und* Ω *(AG)/(BG).*
Weiter seien:

$$S(n,\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^t = -A\right\}$$

$$\underline{S}^q(\Omega) := \left\{\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) : \underline{\Phi}(x) = Ax + a \text{ mit } A \in S(n,\mathbb{R}) \text{ und } a \in \mathbb{R}^n\right\}$$

Für $A, B \in S(n,\mathbb{R})$ *sei*

$$< A, B > := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ik}.$$

Ist Ω*(BG), so gilt gemäß Lemma 4.17* $\underline{S}^q(\Omega) = \left\{\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) : \epsilon(\underline{\Phi}) = 0\right\}$.
Weiter gilt $\underline{S}^q(\Omega) = \underline{S}^r(\Omega)$ *für alle* $1 < r < \infty$.

Ist Ω*(AG) und* $1 < r < \infty$, *so gilt für alle* $0 \neq A \in S(n,\mathbb{R})$

$$\nabla(A \cdot + a) = A \notin \underline{L}^r(\Omega).$$

Für $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,r}(\Omega)$ *mit* $\underline{\Phi} \equiv a \in \mathbb{R}^n$ *folgt gemäß Lemma 1.5* $a = 0$.
Daraus folgt

$$\underline{S}^r(\Omega) = \{\underline{0}\}.$$

Für Ω*(AG)/(BG) sei daher* $\underline{S}(\Omega) := \underline{S}^q(\Omega)$.

$\underline{S}(\Omega)$ *ist endlichdimensionaler linearer Teilraum von* $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Weiter sei

$$\underline{R}^q(\Omega) := \left\{\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) : < \nabla\underline{v}, \nabla\underline{\Psi} >_\Omega = 0 \ \forall \underline{\Psi} \in \underline{S}(\Omega)\right\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Sesquilinearform $< \nabla., \nabla. >_\Omega : \underline{Y}^{1,q}(\Omega) \times \underline{Y}^{1,q'}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *ist* $\underline{R}^q(\Omega)$ *abgeschlossener Unterraum von* $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Somit ist $\underline{R}^q(\Omega)$ *ein Banachraum.*
Aus [Al] Lemma 5.8 folgt dann die Reflexivität von $\underline{R}^q(\Omega)$.

Falls $\underline{u} \in \underline{S}(\Omega)$, *so ist natürlich wegen* $\epsilon(\underline{u}) = 0$

$B_2(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \Omega) = 0$ *für alle* $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.

Die folgende Zerlegung von $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ *erlaubt es, diesen endlichdimensionalen Nullraum* $\underline{S}(\Omega)$ *auszuschließen.*

Lemma 4.19.

Sei $1 < q < \infty$ *und* Ω *(BG).*
Dann gilt: $\underline{Y}^{1,q}(\Omega) = \underline{R}^q(\Omega) \oplus \underline{S}(\Omega)$

Beweis.

Sei

$$\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$$

und

$$M(\Omega) := \left\{A \in S(n, \mathbb{R}) : \text{ Zu } A \text{ existiert ein } a \in \mathbb{R}^n \text{ mit } A \cdot + a \in \underline{S}(\Omega)\right\}.$$

Wegen der Linearität von $\underline{S}(\Omega)$ folgt die Linearität von $M(\Omega)$.

Sei $A \in M(\Omega)$ und $\underline{u} := \frac{1}{|\Omega|}(A \cdot + a) \in \underline{S}(\Omega)$.

Daraus folgt:

$$\underline{u} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega) \text{ und } \frac{1}{2}\left(\int_\Omega (\partial_i u_k - \partial_k u_i)dx\right)_{k,i=1,\ldots,n} = A$$

Mit

$$K(\Omega) := \left\{\frac{1}{2}\left(\int_\Omega (\partial_i \Phi_k - \partial_k \Phi_i)dx\right)_{k,i=1,\ldots,n} : \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)\right\}$$

gilt daher

$$M(\Omega) \subset K(\Omega) \subset S(n, \mathbb{R}).$$

Weiter gilt $\dim(M(\Omega)) < \infty$.
Somit ist $M(\Omega)$ abgeschlossener linearer Teilraum von $K(\Omega)$.

Daher folgt die Existenz der orthogonalen Projektion $P : K(\Omega) \to M(\Omega)$ mit

$$P\left(\left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\partial_i \underline{v}_k - \partial_k \underline{v}_i)dx\right)_{k,i=1,\dots,n}\right) =: |\Omega|\, B$$

und für alle $A \in M(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 =&< \left(\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}(\partial_i \underline{v}_k - \partial_k \underline{v}_i)dx\right)_{k,i=1,\dots,n} - |\Omega|\, B, A > \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2}(\partial_i v_k - \partial_k v_i) + b_{ik}\right) a_{ki}\right] dx. \end{aligned} \tag{4.19.1}$$

Wegen $B \in M(\Omega)$ existiert ein $b \in \mathbb{R}^n$ mit $B \cdot + b \in \underline{S}(\Omega)$.
Sei $\underline{v}^{(1)}(x) := \underline{v}(x) - Bx - b$ und $\underline{v}^{(2)}(x) := Bx + b$ für alle $x \in \Omega$.

Zeige nun: $\underline{v}^{(1)} \in \underline{R}^q(\Omega)$

Sei $\underline{\Psi} := A \cdot + a \in \underline{S}(\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} < \nabla \underline{v}^{(1)}, \nabla \underline{\Psi} >_\Omega &= \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} \partial_i \Psi_k dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} dx + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} dx - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int\limits_{\Omega} \partial_i v_k^{(1)} dx - \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int\limits_{\Omega} \partial_k v_i^{(1)} dx \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
< \nabla \underline{v}^{(1)}, \nabla \underline{\Psi} >_\Omega &= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \int_\Omega \left(\partial_i v_k^{(1)} - \partial_k v_i^{(1)} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \left[\int_\Omega \left((\partial_i v_k - \partial_k v_i) - (b_{ki} - b_{ik}) \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ki} \left[\int_\Omega \left((\partial_i v_k - \partial_k v_i) + 2 b_{ik} \right) dx \right] \\
&\underset{4.19.1}{=} 0
\end{aligned}
$$

Wegen $\underline{v}^{(2)} \in \underline{S}(\Omega) \subset \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ folgt $\underline{v}^{(1)} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Daraus folgt $\underline{v}^{(1)} \in \underline{R}^q(\Omega)$.

□

Definition 4.20.

Für $1 < t < \infty$ sei

$$
\underline{Z}^t(\Omega) := \begin{cases} \underline{Y}^{1,t}(\Omega) & \textit{für} \quad \tau = 1 \quad \textit{im Falle} \quad \Omega(BG) \\ \underline{R}^t(\Omega) & \textit{für} \quad \tau = 2 \quad \textit{im Falle} \quad \Omega(BG) \\ \underline{Y}^{1,t}(\Omega) & \textit{für} \quad \tau = 1,2 \quad \textit{im Falle} \quad \Omega(AG) \end{cases} .
$$

Lemma 4.21.

Sei $\Omega(AG)/(BG)$, $\partial\Omega \in C^2$, $\lambda_1 > -\dfrac{1}{n}$ und $\lambda_2 \geq 1$, $\underline{p} \in \underline{Z}^q(\Omega)$ und mit $\tau = 1,2$ sei $B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.

Dann gilt: $\underline{p} = \underline{0}$ f.ü. in Ω

Beweis.

1) Sei Ω (BG).
Es ist $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$. Aus Lemma 4.16 folgt:
Für alle $x_0 \in \partial\Omega$ existiert ein $R_0 > 0$, so dass für alle $\eta \in C_0^\infty(B_{R_0}(x_0))$ gilt
$\eta \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$.

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_k \in \partial\Omega$ mit $k = 1, ..., m$ und

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{R_k}(x_k).$$

Für $k = 1, ..., m$ sei $B_k := B_{R_k}(x_k)$.

Sei $\tilde{B} := \Omega \backslash \bigcup_{k=1}^{m} B_k$. Wegen Lemma 1.4 folgt $\tilde{B}$ kompakt und $\tilde{B} \subset \Omega$.

Also kann $\tilde{B}$ durch endlich viele Kugeln vom Radius $< \frac{1}{2} dist(\tilde{B}, \partial\Omega)$ überdeckt werden.

Also existiert ein $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ und für $j = 1, ..., \tilde{m}$ existieren $\tilde{B}_j \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, so dass gilt:

$$\tilde{B} \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j \text{ und } \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j \subset\subset \Omega$$

Sei nun $B_0 := \bigcup_{j=1}^{\tilde{m}} \tilde{B}_j$. Dann ist $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^{m} B_k$.

Sei $1 = \sum_{k=0}^{m} \Psi_k(x)$ mit $\Psi_k \in C_0^\infty(B_k)$.

Dann folgt aus Lemma 4.16 $\Psi_k \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$ für alle $k = 1, ..., m$.

Wegen Lemma 4.14 existiert ein $\underline{\tilde{p}} \in \underline{C}^\infty(\Omega)$ mit $\underline{\tilde{p}} = \underline{p}$ f.ü. in Ω.

Weiter gilt $\Psi_0 \underline{\tilde{p}} \in C_0^\infty(\Omega) \subset \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$ und $\Psi_0 \underline{\tilde{p}} = \Psi_0 \underline{p}$ f.ü. in Ω.

Somit folgt $\Psi_0 \underline{p} \subset \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$.

Also ist

$$p = \sum_{k=0}^{m} \Psi_k \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega).$$

Aus Satz 4.10 folgt, dass für alle $1 < q' < \infty$ $\underline{D}(\Omega)$ dicht in $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ liegt.

Somit gilt:

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}', \lambda_\tau, \Omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi}' \in \underline{D}(\Omega)$$

Wegen der Setigkeit des Funktionals

$$F^*(\underline{\Phi}') := B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}', \lambda_\tau, \Omega)$$

folgt:

$$B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}'', \lambda_\tau, \Omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\Phi}'' \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$$

Also ist $B_\tau(\underline{p}, \underline{p}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$.

Sei nun $\tau = 1$.
Dann folgt:

$$\left\|\nabla \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_1 \left\|div \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 = 0$$

Ist $\lambda_1 \geq 0$ so ist $\underline{p} = 0$.

Sei nun $-\dfrac{1}{n} < \lambda_1 < 0$.
Angenommen: $\underline{p} \neq 0$

Es ist $\left\|div \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 \leq n \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_1 \left\|div \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 \\ &\geq \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 + \lambda_1 n \left\|\nabla \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2 . \end{aligned}$$

Also wäre $0 \geq \lambda_1 n + 1$, d.h. $-\dfrac{1}{n} \geq \lambda_1,$ ein Widerspruch.

Sei nun $\tau = 2$.
Aus $B_2(\underline{p}, \underline{p}, \lambda_2, \Omega) = 0$ folgt dann:

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \left\|\partial_i p_k + \partial_k p_i\right\|_{2,\Omega}^2 + (\lambda_2 - 1) \left\|div \underline{p}\right\|_{2,\Omega}^2$$

Für $\lambda_2 \geq 1$ folgt:

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} \|\partial_i p_k + \partial_k p_i\|_{2,\Omega}^2$$

Nach Lemma 4.17 folgt die Existenz von $A \cdot +a \in \underline{S}(\Omega)$
mit $\underline{p}(x) = Ax + a$ für alle $x \in \Omega$.

Wegen $\underline{p} \in \underline{R}^q(\Omega)$ folgt für alle $\underline{\Psi} = B \cdot +b \in \underline{S}(\Omega)$

$$0 =< \nabla \underline{p}, \nabla \underline{\Psi} >_\Omega = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} b_{ik} \, |\Omega| \, .$$

Mit $\underline{\Psi} := A \cdot +a$ folgt $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^2 = 0$ und weiter $A = 0$.
Wegen Lemma 1.5 gilt $a = 0$.
Daraus folgt insgesamt

$$\underline{p} = 0.$$

2) Sei Ω (AG).
Sei $\varphi_r(x)$ wie in Definition 4.6 erklärt. Für $R_0(\Omega)$ aus (1.1.2) folgt mittels des Lemmas 4.4:

$$\varphi_{2R_0}(x)\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$$

Wegen $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ folgt daher:

$$\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right) \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$$

Wegen $supp(\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right) \underline{p}) \subset B_{4R_0}$ verschwindet $\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right) \underline{p}$
in einer Umgebung von ∂B_{4R_0}.

Also folgt:

$$\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right) \underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)})$$

Da $\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)}$ (BG) ist, folgt mittels des ersten Teils dieses Beweises :

$$\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right) \underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)})$$

Wegen des Lemmas 4.14 folgt die Existenz eines $\underline{\tilde{p}} \in \underline{C}^\infty(\Omega)$ mit $\underline{\tilde{p}} = \underline{p}$ f.ü. in Ω.

Somit ist $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\tilde{p}} \in \underline{C}^\infty(\Omega)$ und $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{\tilde{p}} = \varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}$ f.ü. in Ω.
Daraus folgt:

$$\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p} \in \underline{L}^1_{loc}(\Omega) \text{ und } \varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p} \in \underline{L}^2_{loc}(\Omega)$$

Es ist

$$\left\|\nabla\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right\|^2_{2,\Omega} = \int\limits_{supp(\nabla\varphi_{2R_0(\Omega)})} \left\|\nabla\varphi_{2R_0(\Omega)}\right\|_\infty \left|\underline{p}\right|^2 < \infty$$

und mit Lemma 4.15 folgt:

$$\left\|\nabla\underline{p}\varphi_{2R_0(\Omega)}\right\|^2_{2,\Omega} = \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{4R_0(\Omega)}} \left|\nabla\underline{p}\right|^2 < \infty$$

Somit ist $\nabla\left(\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p}\right) \in \underline{\underline{L}}^2(\Omega)$.
Also gilt mittels des Lemmas 4.4 $\varphi_{2R_0(\Omega)}\underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$ und zusammen mit $\left(1 - \varphi_{2R_0(\Omega)}\right)\underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$ folgt $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,2}(\Omega)$.

Für den Fall $\tau = 1$ folgt analog zu Teil 1) dieses Beweises $\underline{p} = \underline{0}$.
Im Fall $\tau = 2$ folgt wieder

$$0 = \sum_{i,k=1}^{n} \|\partial_i p_k + \partial_k p_i\|^2_{2,\Omega}.$$

Nach [Gr] Satz III.1.6 folgt dann

$\underline{p} = \underline{0}$.

□

Satz 4.22.

*Sei $1 < q < \infty$, Ω (AG)/(BG) mit $\partial\Omega \in C^2$, $\lambda_1 > -\dfrac{1}{n}$ und $\lambda_2 \geq 1$.
Dann gelten die dualen Variationsungleichungen bezüglich der Bilinearform $B_\tau(.,.,\lambda_\tau,\Omega)$ auf $\underline{Z}^q(\Omega) \times \underline{Z}^{q'}(\Omega)$ mit $\tau = 1, 2$.*

Beweis.

1) Angenommen die Behauptung sei falsch. Dann existiert eine Folge $\underline{p}_k \subset \underline{Z}^q(\Omega)$ mit $\left\|\nabla\underline{p}_k\right\|_{q,\Omega} = 1$ und es gilt:

$$\epsilon_k^{(\tau)} := \sup_{0\neq\underline{\Phi}\in\underline{Z}^{q'}(\Omega)} \frac{B_\tau(\underline{p}_k, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega)}{\|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\Omega}} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

Da $\underline{Z}^q(\Omega)$ ein reflexiver Banachraum ist (Bemerkung 4.18 bzw Lemma 1.12), folgt die Existenz einer Teilfolge $\underline{p}_{k_\nu} \subset \underline{Z}^q(\Omega)$ mit $\underline{p}_{k_\nu} \overset{w}{\to} \underline{p}$, wobei $\underline{p} \in \underline{Z}^q(\Omega)$ ist.

Sei im Weiteren diese Teilfolge mit $\underline{p}_k$ bezeichnet.

Für $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega)$ gilt einerseits

$$B_\tau(\underline{p}_k, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) \to B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega)$$

und andererseits

$$\left| B_\tau(\underline{p}_k, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) \right| \le \epsilon_k^{(\tau)} \left\| \nabla \underline{\Phi} \right\|_{q',\Omega}.$$

Also ist $B_\tau(\underline{p}, \underline{\Phi}, \lambda_\tau, \Omega) = 0$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega)$. (4.22.1)

Für $\tau = 1$ folgt gemäß Lemma 4.21 $\underline{p} = \underline{0}$.
Für $\tau = 2$ und Ω (AG) folgt ebenfalls gemäß Lemma 4.21 $\underline{p} = \underline{0}$.

Sei nun $\tau = 2$, Ω (BG) und $\underline{\Psi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.
Aus Lemma 4.19 folgt die Existenz von $\underline{\Psi}^{(1)} \in \underline{R}^{q'}(\Omega)$ und $\underline{\Psi}^{(2)} \in S(\Omega)$ mit:

$$\underline{\Psi} = \underline{\Psi}^{(1)} + \underline{\Psi}^{(2)}$$

Wegen $\underline{p} \in \underline{R}^q(\Omega)$ folgt

$$B_2(\underline{p}, \underline{\Psi}^{(2)}, \lambda_2, \Omega) = 0$$

und mit (4.22.1) folgt

$$B_2(\underline{p}, \underline{\Psi}^{(1)}, \lambda_2, \Omega) = 0.$$

Daraus folgt

$$B_2(\underline{p}, \underline{\tilde{\Phi}}, \lambda_2, \Omega) = 0 \text{ für alle } \underline{\tilde{\Phi}} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega).$$

Wegen Lemma 4.21 ist daher $\underline{p} = \underline{0}$.

2) Sei Ω (BG) und $\tau = 1, 2$:
Es gilt $\underline{p}_k \subset \underline{L}^{1,q}(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^2$. Nach [Si1] Theorem 4.3 gilt $\underline{p}_k \subset \underline{W}^{1,q}(\Omega)$.
Wegen der Kompaktheit der Einbettung $J : W^{1,q}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ (Satz von Rellich) gilt:

$$\underline{p}_k \xrightarrow{s} 0 \text{ in } L^q(\Omega) \tag{4.22.2}$$

3) Sei jetzt Ω (AG) und $\tau = 1, 2$:
Sei $r > 2R_0(\Omega)$ mit $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) definiert, $\eta \in C_0^\infty(B_r)$ mit $\eta|_{B_{\frac{r}{2}}} = 1$.
Sei $\underline{\tilde{p}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und sei $\Omega_r := \Omega \cap B_r$.
Wegen $r > 2R_0(\Omega)$ folgt $\partial\Omega_r \in C^2$ und Ω_r ist (BG).

Wegen Lemma 4.3 folgt $\eta\underline{\tilde{p}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ und weiter wegen $supp(\eta\underline{\tilde{p}}) \subset B_r$ ist $\eta\underline{\tilde{p}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)$.

Zeige nun $\left\|\underline{p}_k\right\|_{q,\Omega_{\frac{r}{2}}} \to 0$ für alle $r > 2R_0(\Omega)$.
Sei $F^* \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)^*$ mit $|F^*(\underline{v})| \leq \|F^*\|_{\underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)^*} \|\nabla\underline{v}\|_{q,\Omega_r}$ für $\underline{v} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)$.
Aus $\underline{\tilde{p}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ folgt $\eta\underline{\tilde{p}} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)$. Somit ist $L^*(\underline{\tilde{p}}) := F^*(\eta\underline{\tilde{p}})$ wohldefiniert.

Aus Lemma 1.10 folgt die Existenz eines $C > 0$ mit:

$$\left\|\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega_r} \leq C \left\|\nabla\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega_r}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\eta\underline{\tilde{p}}\right)\right\|_{q,\Omega_r} &\leq \|\nabla\eta\|_\infty \left\|\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega_r} + \left\|\nabla\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega_r}\\ &\leq \underbrace{\left(\|\nabla\eta\|_\infty C + 1\right)}_{=:C'} \left\|\nabla\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega} \text{ mit } C' > 0\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\left|L^*(\underline{\tilde{p}})\right| \leq \|F^*\|_{\underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)^*} C' \left\|\nabla\underline{\tilde{p}}\right\|_{q,\Omega}$$

Daraus folgt $L^* \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)^*$ und $L^*(\underline{p}_k) \to 0$ und damit $F^*(\eta \underline{p}_k) \to 0$ mit beliebigem $F^* \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)^*$.

Somit gilt:

$$\eta \underline{p}_k \xrightarrow{w} 0 \text{ in } \underline{Y}^{1,q}(\Omega_r)$$

Mittels des Satzes von Rellich gilt:

$$\eta \underline{p}_k \xrightarrow{s} 0 \in L^q(\Omega_r)$$

Da $\eta|_{\Omega_{\frac{r}{2}}} = 1$ ist, folgt nun:

$$\left\|\underline{p}_k\right\|_{q,\Omega_{\frac{r}{2}}} \to 0 \text{ für alle } r > 2R_0(\Omega) \tag{4.22.3}$$

4) Sei Ω (AG)/(BG) und $\tau = 1, 2$:
Aus Lemma 4.11 folgt für $x \in \partial\Omega$ die Existenz eines
$0 < R' = R'(x) < \begin{cases} dist(B_{2R_0(\Omega)}, x) & \text{falls } \Omega \text{ (AG)} \\ 1 & \text{falls } \Omega \text{ (BG)} \end{cases}$
und eines $C'' > 0,$ so dass mit $\Omega_{R'}(x) := \Omega \cap B_{R'}(x)$ gilt

$$\begin{aligned} &\left\|\nabla\left(\eta \underline{p}\right)\right\|_{q,\Omega_{R'}(x)} \\ &\leq C'' \sup_{0 \neq \underline{v} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_{R'}(x))} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega_{R'}(x))}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',\Omega_{R'}(x)}} \end{aligned}$$

für alle $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ mit $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{R'}{2}}(x))$.

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_1, ..., x_m \in \partial\Omega$ mit $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^m B_{\frac{R'(x_k)}{4}}(x_k)$. Für $k = 1, ..., m$ sei $B_k := B_{\frac{R'(x_k)}{4}}(x_k)$.

Wegen Lemma 4.12 folgt für alle $\tilde{x} \in \Omega$ die Existenz von $0 < \tilde{R} = \tilde{R}(\tilde{x}) < \infty$ und $C''' > 0$ mit $B_{\tilde{R}}(\tilde{x}) \subset\subset \Omega,$ so dass für $\eta \in C_0^\infty(B_{\frac{\tilde{R}}{2}}(\tilde{x}))$ gilt

$$\left\|\nabla\left(\eta \underline{p}\right)\right\|_{q,B_{\tilde{R}}(\tilde{x})}$$
$$\leq C''' \sup_{0\neq \underline{v}\in \underline{Y}^{1,q'}(B_{\tilde{R}}(\tilde{x}))} \frac{B_\tau(\eta \underline{p}, \underline{v}, \lambda_\tau, B_{\tilde{R}}(\tilde{x}))}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',B_{\tilde{R}}(\tilde{x})}}$$

für alle $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.

Sei Ω (BG) :

Aus Lemma 1.4 folgt $\Omega' := \overline{\Omega}\backslash \bigcup_{k=1}^{m} B_k \subset \Omega$ und Ω' ist kompakt.

Daher existiert ein $s \in \mathbb{N}$ und $\tilde{x}_{m+1}, ..., \tilde{x}_s \in \Omega$ mit $\Omega' \subset \bigcup_{j=m+1}^{s} B_{\frac{\tilde{R}(\tilde{x}_j)}{4}}(\tilde{x}_j)$.

Für $j = m+1, ..., s$ sei $B_j := B_{\frac{\tilde{R}(\tilde{x}_j)}{4}}(\tilde{x}_j)$.

Sei Ω (AG) :

Sei $R_0(\Omega)$ wie in (1.1.2) erklärt und sei $\Omega'' := \overline{\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)}}\backslash \bigcup_{k=1}^{m} B_k$.

So folgt aus Lemma 1.4 $\Omega'' \subset \Omega$ und Ω'' ist kompakt.

Daher existiert ein $s \in \mathbb{N}$ und $\tilde{x}_{m+1}, ..., \tilde{x}_s \in \Omega$ mit $\Omega'' \subset \bigcup_{j=m+1}^{s} B_{\frac{\tilde{R}(\tilde{x}_j)}{4}}(\tilde{x}_j)$.

Für $j = m+1, ..., s$ sei $B_j := B_{\frac{\tilde{R}(\tilde{x}_j)}{4}}(\tilde{x}_j)$.

Sei $\varphi_R(x)$ wie in Definition 4.6 erklärt.
Weiter seien $B_0 := \mathbb{R}^n\backslash B_{4R_0(\Omega)},\ \Psi_0 := \varphi_{2R_0(\Omega)}$ und $\Omega_0 := \Omega$.

5) Sei Ω (AG)/(BG) und $\tau = 1, 2$:
Für $i = 1, ..., m$ sei $\Psi_i \in C_0^\infty(B_{\frac{R_i'(x_i)}{2}}(x_i))$ mit $0 \leq \Psi_i \leq 1$ und $\Psi_i\big|_{B_i} = 1$ und sei $\Omega_i := \Omega \cap B_{R_i'(x_i)}(x_i)$.
Für $i = m+1, ..., s$ sei $\Psi_i \in C_0^\infty(B_{\frac{\tilde{R}_i(\tilde{x}_i)}{2}}(\tilde{x}_i))$ mit $0 \leq \Psi_i \leq 1$ und $\Psi_i\big|_{B_i} = 1$ und sei $\Omega_i := \Omega \cap B_{\tilde{R}_i(\tilde{x}_i)}(\tilde{x}_i)$.

Wegen der Lemmata 4.11, 4.12 und 4.13 gilt mit $C_i > 0$:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla \underline{p}_k\right\|_{q,B_i} &\leq \left\|\nabla\left(\Psi_i \underline{p}_k\right)\right\|_{q,\Omega_i} \\ &\leq C_i \sup_{0\neq \underline{v}\in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)} \frac{B_\tau(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega_i)}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',\Omega_i}}\end{aligned}$$

Sei $d_k^{(i)} := \sup\limits_{0\neq \underline{v}\in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)} \dfrac{B_\tau(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}, \lambda_\tau, \Omega_i)}{\|\nabla \underline{v}\|_{q',\Omega_i}}$.

Sei $i = 0, ..., s$ fest gewählt. Dann existiert eine Folge $\underline{v}_\nu \subset \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$ mit

$$\|\nabla \underline{v}_\nu\|_{q',\Omega_i} = 1$$

und

$$B_\tau(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}_\nu, \lambda_\tau, \Omega_i) \to d_k^{(i)}.$$

Also existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $\underline{v}_k \subset \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$ mit

$$\|\nabla \underline{v}_k\|_{q',\Omega_i} = 1$$

und

$$0 \leq d_k^{(i)} - B_\tau(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}_k, \lambda_\tau, \Omega_i) \leq \frac{1}{k}.$$

Weiter ist für $\tau = 1$:

$$\begin{aligned}d_k^{(i)} &\leq \frac{1}{k} + B_1(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}_k, \lambda_1, \Omega_i) \\ &= \frac{1}{k} + \int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \left[\partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_j v_{k_l} + \partial_j p_{k_l} \Psi_i \partial_j v_{k_l} + \lambda_1 \left(\partial_j \Psi_i p_{k_j} \partial_l v_{k_l} + \partial_j p_{k_j} \Psi_i \partial_l v_{k_l}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{k} + \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_j v_{k_l} dx}_{=:I_1} - \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i v_{k_l} dx}_{=:I_2} + \lambda_1 \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j \Psi_i p_{k_j} \partial_l v_{k_l} dx}_{=:I_3} \\ &\quad - \lambda_1 \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_j} \partial_l \Psi_i v_{k_l} dx}_{=:I_4} + B_1(\underline{p}_k, \Psi_i \underline{v}_k, \lambda_1, \Omega_i) \\ &\leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{2} |I_\mu| + |\lambda_1| \sum_{\mu=3}^{4} |I_\mu| + \left|B_1(\underline{p}_k, \Psi_i \underline{v}_k, \lambda_1, \Omega)\right|\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$d_k^{(i)} \leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{2} |I_\mu| + |\lambda_1| \sum_{\mu=3}^{4} |I_\mu| + \epsilon_k^{(1)} \left\| \nabla \left(\Psi_i \underline{v}_k \right) \right\|_{q,\Omega}$$

Für $\tau = 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
d_k^{(i)} &\leq \frac{1}{k} + B_2(\Psi_i \underline{p}_k, \underline{v}_k, \lambda_2, \Omega_i) \\
&= \frac{1}{k} + \int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \left[\partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_j v_{k_l} + \partial_j p_{k_l} \Psi_i \partial_j v_{k_l} + \partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_l v_{k_j} + \partial_j p_{k_l} \Psi_i \partial_l v_{k_j} \right] dx \\
&\quad + (\lambda_2 - 1) \int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \left(\partial_j \Psi_i p_{k_j} \partial_l v_{k_l} + \partial_j p_{k_j} \Psi_i \partial_l v_{k_l} \right) dx \\
&= \frac{1}{k} + \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_j v_{k_l} dx}_{=:I_1} - \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i v_{k_l} dx}_{=:I_2} + \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j \Psi_i p_{k_l} \partial_j v_{k_l} dx}_{=:I_3} \\
&\quad \underbrace{- \int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i v_{k_l} dx}_{=:I_4} + (\lambda_2 - 1) \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j \Psi_i p_{k_j} \partial_l v_{k_l} dx}_{=:I_5} \\
&\quad - (\lambda_2 - 1) \underbrace{\int\limits_{\Omega_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_j} \partial_l \Psi_i v_{k_l} dx}_{=:I_6} + B_2(\underline{p}_k, \Psi_i \underline{v}_k, \lambda_2, \Omega_i) \\
&\leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{4} |I_\mu| + |\lambda_2 - 1| \sum_{\mu=5}^{6} |I_\mu| + \left| B_2(\underline{p}_k, \Psi_i \underline{v}_k, \lambda_2, \Omega) \right|
\end{aligned}$$

Daraus folgt im Falle Ω (AG) :

$$d_k^{(i)} \leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{4} |I_\mu| + |\lambda_2 - 1| \sum_{\mu=5}^{6} |I_\mu| + \epsilon_k^{(2)} \left\| \nabla \left(\Psi_i \underline{v}_k \right) \right\|_{q,\Omega}$$

Sei Ω (BG)
Aus Lemma 4.19 folgt die Existenz von $(\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)} \in \underline{R}^{q'}(\Omega)$
und $(\Psi_i \underline{v}_k)^{(2)} \in S(\Omega)$ mit:

$$(\Psi_i \underline{v}_k) = (\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)} + (\Psi_i \underline{v}_k)^{(2)}$$

Wegen $\underline{p}_k \in \underline{R}^q(\Omega)$ folgt

$$B_1(\underline{p}_k, (\Psi_i \underline{v}_k)^{(2)}, \lambda_1, \Omega) = 0.$$

Wegen $dim(S(\Omega)) < \infty$, $\underline{R}^q(\Omega)$ abgeschlossen und $S(\Omega) \cap \underline{R}^q(\Omega) = \{0\}$ existiert ein $C > 0$ mit:

$$\begin{aligned}\left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)}\right\|_{q,\Omega} &\leq \left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)}\right\|_{q,\Omega} + \left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)^{(2)}\right\|_{q,\Omega} \\ &\leq C \left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)\right\|_{q,\Omega}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}d_k^{(i)} &\leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{4} |I_\mu| + |\lambda_2 - 1| \sum_{\mu=5}^{6} |I_\mu| + \left|B_2(\underline{p}_k, (\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)}, \lambda_2, \Omega)\right| \\ &\leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{4} |I_\mu| + |\lambda_2 - 1| \sum_{\mu=5}^{6} |I_\mu| + \epsilon_k^{(2)} \left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)^{(1)}\right\|_{q,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{k} + \sum_{\mu=1}^{4} |I_\mu| + |\lambda_2 - 1| \sum_{\mu=5}^{6} |I_\mu| + \epsilon_k^{(2)} \left\|\nabla (\Psi_i \underline{v}_k)\right\|_{q,\Omega}\end{aligned}$$

Sei $\tau = 1, 2$.
Es ist $\|\nabla \underline{v}_k\|_{q',\Omega_i} = 1$ für alle $i = 0, ..., s$. Daher existiert eine Teilfolge $\underline{v}_{k_\nu} \subset \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$ mit $\underline{v}_{k_\nu} \xrightarrow{w} \underline{v}$ in $\underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$.
Sei diese Teilfolge im Weiteren mit $\underline{v}_k$ bezeichnet.

Für alle $i = 1, ..., s$ gilt:

$$K_0 := supp(\nabla \Psi_0) \subset (\Omega \cap B_{4R_0(\Omega)}) \text{ und } K_i := supp(\nabla \Psi_i) \subset \Omega_i$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left| \int\limits_{K_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i \left(v_k - v\right)_l dx \right| + \left| \int\limits_{K_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i v_l dx \right| \\
&\leq \left\| \nabla \underline{p}_k \right\|_{q,\Omega} \left(\sum_{j,l=1}^{n} \left\| \partial_j \Psi_i \left(v_k - v\right)_l \right\|_{q',K_i}^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} + \left| \int\limits_{K_i} \sum_{j,l=1}^{n} \partial_j p_{k_l} \partial_j \Psi_i v_l dx \right|
\end{aligned}
$$

Wegen $\underline{v}_{k_\nu} \xrightarrow{w} \underline{v}$ in $\underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$ folgt mittels des Satzes von Rellich für alle $i = 1, ..., s$:

$$\left\|\underline{v}_k - \underline{v}\right\|_{q',K_i} \to 0$$

Wie in Teil 3) dieses Beweises folgt für $i = 0$:

$$\left\|\underline{v}_k - \underline{v}\right\|_{q',K_0} \to 0$$

Für $i = 0, .., s$ folgt daher:

$$\left\|\partial_j \Psi_i \left(v_k - v\right)_l\right\|_{q',K_i} \to 0$$

Für $\underline{p} \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ sei

$$F^*(\underline{p}) := < \nabla \underline{p}, \nabla \Psi_i \underline{v} >_{K_i} .$$

F^* ist ein stetiges lineares Funktional in $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$.
Aus $\underline{p}_k \xrightarrow{w} 0$ in $\underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ folgt somit $F^*(\underline{p}_k) \to 0$.
Zusammen mit $\left\|\nabla \underline{p}_k\right\|_{q',\Omega} = 1$ folgt daher $|I_2| \to 0$ für $k \to \infty$.

Mittels (4.22.3) und (4.22.2) gilt für alle $i = 0, ..., s$:

$$|I_1| \leq \left\|\underline{p}_k \nabla \Psi_i\right\|_{q,K_i} \leq \left\|\nabla \Psi_i\right\|_\infty \left\|\underline{p}_k\right\|_{q,K_i} \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

Ebenso folgt:

$$|I_3| \to 0,\ |I_4| \to 0,\ |I_5| \to 0,\ |I_6| \to 0 \text{ für } k \to \infty$$

Zeige nun die Existenz eines $M_i > 0$ mit $\|\nabla(\Psi_i \underline{v}_k)\|_{q',\Omega_i} \leq M_i$ für $i = 0, ..., s$:

Für $i = 0, ..., s$ folgt aus Lemma 1.10 die Existenz eines $\tilde{C}_i > 0$ mit:

$$\|\underline{\Phi}\|_{q',K_i} \leq \tilde{C}_i \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q',\Omega_i} \text{ für alle } \underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i)$$

Wegen der Lemmata 4.3 und 4.4 gilt:

$$\Psi_i \underline{v}_k \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega_i) \text{ für alle } i = 0, .., s$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\Psi_i \underline{v}_k)\|_{q',\Omega_i} &\leq \|\nabla\Psi_i \underline{v}_k\|_{q',K_i} + \|\Psi_i \nabla\underline{v}_k\|_{q',\Omega_i} \\
&\leq \tilde{C}_i \|\nabla\underline{v}_k\|_{q',\Omega_i} \|\nabla\Psi_i\|_\infty + \|\nabla\underline{v}_k\|_{q',\Omega_i} \\
&= \tilde{C}_i \|\nabla\Psi_i\|_\infty + 1 =: M_i < \infty
\end{aligned}$$

Somit gilt $d_k^{(i)} \to 0$ für $k \to \infty$ und $i = 0, ..., s$.

Daher gilt $\left\|\nabla\underline{p}_k\right\|_{q,\Omega} \leq \sum_{i=0}^{s} \left\|\nabla\underline{p}_k\right\|_{q,B_i} \leq \sum_{i=0}^{s} C_i d_k^{(i)} \to 0$ für $k \to \infty$.

Dieses ist ein Widerspruch zu $\left\|\nabla\underline{p}_k\right\|_{q,\Omega} = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

$\square$

Satz 4.23.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^2$, $\lambda_1 > -\frac{1}{n}$ *und* $\lambda_2 \geq 1$.
Weiter sei $\underline{\underline{f}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$, *und* $\underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$.

Dann gilt:

1) Es existiert genau ein $\underline{p} = \underline{p}(\underline{\underline{f}}) \in \underline{Y}^{1,q}(\Omega)$ *mit*

$$< \nabla\underline{p}, \nabla\underline{\Phi} >_\Omega + \lambda_1 < div\underline{p}, div\underline{\Phi} >_\Omega = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega f_{ik}\partial_i\Phi_k dx$$

für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$.

2) Es existiert genau ein $\underline{u} = \underline{u}(\underline{\underline{g}}) \in \underline{Z}^q(\Omega)$ *mit*

$$\frac{1}{2} < \epsilon(\underline{u}), \epsilon(\underline{\Phi}) >_\Omega + (\lambda_2 - 1) < div\underline{u}, div\underline{\Phi} >_\Omega = \sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega g_{ik}\partial_i\Psi_k dx$$

für alle $\underline{\Psi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega)$.

Für $k = 1, 2$ *gibt es* $D_k > 0$ *und* $C_k > 0$ *mit:*

i) $D_1 \left\|\underline{p}(\tilde{\underline{\underline{f}}})\right\|_{q,\Omega} \leq \left\|\tilde{\underline{\underline{f}}}\right\|_{q,\Omega} \leq C_1 \left\|\underline{p}(\tilde{\underline{\underline{f}}})\right\|_{q,\Omega}$ *für alle* $\tilde{\underline{\underline{f}}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$

ii) $D_2 \left\|\underline{u}(\tilde{\underline{\underline{g}}})\right\|_{q,\Omega} \leq \left\|\tilde{\underline{\underline{g}}}\right\|_{q,\Omega} \leq C_2 \left\|\underline{u}(\tilde{\underline{\underline{g}}})\right\|_{q,\Omega}$ *für alle* $\tilde{\underline{\underline{g}}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$

Beweis.

Mit $k = 1, 2$ und $C_k > 0$ ist:

i) $\left|\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega f_{ik}\partial_i\Phi_k dx\right| \leq C_1 \left\|\underline{\underline{f}}\right\|_{q,\Omega} \|\nabla\underline{\Phi}\|_{q,\Omega}$ für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Y}^{1,q'}(\Omega)$

ii) $\left|\sum_{i,k=1}^{n} \int_\Omega g_{ik}\partial_i\Psi_k dx\right| \leq C_2 \left\|\underline{\underline{g}}\right\|_{q,\Omega} \|\nabla\underline{\Psi}\|_{q,\Omega}$ für alle $\underline{\Psi} \in \underline{R}^{q'}(\Omega)$

Daraus folgt gemäß Satz 4.22 in Verbindung mit Satz 2.1 die Behauptung.

□

Bemerkung 4.24.

Ist $\underline{\underline{g}} = (g_{ik})_{i,k=1,...,n} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$*, so ist durch*

$$F^*(\underline{\Phi}) := \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}\epsilon_{ik}(\underline{\Phi})dx \text{ für } \underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega) \tag{4.24.1}$$

natürlich ein stetiges lineares Funktional auf $\underline{Z}^{q'}(\Omega)$ *definiert.*

Wegen

$$\begin{aligned}
F^*(\underline{\Phi}) &= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}\epsilon_{ik}(\underline{\Phi})dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}(\partial_i\underline{\Phi}_k + \partial_k\underline{\Phi}_i)dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}\partial_i\underline{\Phi}_k dx + \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}\partial_k\underline{\Phi}_i dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ik}\partial_i\underline{\Phi}_k dx + \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g_{ki}\partial_i\underline{\Phi}_k dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} \underbrace{(g_{ik} + g_{ki})}_{=:2g^*_{ik}} \partial_i\underline{\Phi}_k dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g^*_{ik}(\partial_i\underline{\Phi}_k + \partial_k\underline{\Phi}_i)dx \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} g^*_{ik}\epsilon_{ik}(\underline{\Phi})dx
\end{aligned}$$

und $g^*_{ik} = g^*_{ki}$ *für alle* $i, k = 1, ..., n$

kann für Funktionale der Form (4.24.1) o.E. die Matrix $\underline{\underline{g}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$ *als symmetrisch angenommen werden.*

5 Die Randwerte

Definition 5.1.

Sei Ω *(AG)/(BG) und* $k \in \mathbb{N}_0$*. Weiter sei*
$\overline{C}^k(\Omega) := \left\{ f \in C^k(\Omega) : \; \forall\, |\alpha| \leq k \; \exists\, f_k \in C^0(\overline{\Omega}) \text{ mit } D^\alpha f(x) = f_k(x) \; \forall\, x \in \Omega \right\}.$

Lemma 5.2.

Sei Ω *(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^2$*.*
Sei $\underline{\underline{v}} \in \underline{\underline{\overline{C}}}^0(\Omega)$ *und für alle* $x \in \partial\Omega$ *sei* $\underline{N}(x)$ *die äußere Normale von* Ω*.*
Für $x_0 \in \partial\Omega$ *und* $j = 1, ..., n-1$ *sei* $\underline{T}^{(j)}$ *ein Tangentialvektor im Punkt* x_0*.*
Weiter sei für alle $\underline{\Phi} \in \underline{\overline{C}}^1$ *mit* $< \underline{\Phi}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0$:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} v_{ik}(x) N_i(x) \Phi_k(x) d\omega_x = 0$$

Dann gilt für alle $j = 1, .., n-1$:

$$\sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}(x_0) N_i(x_0) T_k^{(j)} d\omega_x = 0$$

Beweis.

Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und $\varphi_\nu \in C_0^\infty(B_{\frac{1}{\nu}}(x_0))$ mit $0 \leq \varphi_\nu \leq 1$ und $\varphi_\nu(x_0) = 1$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$.
Sei $\rho \in \overline{C}^2(\Omega)$ mit $\rho|_{\partial\Omega} = 0$ und $(\nabla\rho)(x) = \underline{N}(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$.
Siehe hierzu auch [We] Theorem 6.1. Sei weiter:

$$\underline{\Phi}^\nu(x) := \varphi_\nu(x)\underline{T}^{(j)} - \varphi_\nu(x) < \underline{T}^{(j)}, (\nabla\rho)(x) > (\nabla\rho)(x)$$

Für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} < \underline{\Phi}^\nu(x), \underline{N}(x) > &= \varphi_\nu(x) < \underline{T}^{(j)}, \underline{N}(x) > \\ &\quad - \varphi_\nu(x) < \underline{T}^{(j)}, (\nabla\rho)(x) > \underbrace{< (\nabla\rho)(x), \underline{N}(x) >}_{=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\underline{\Phi}^\nu \in \underline{\overline{C}}^1$ mit $<\underline{\Phi}^\nu, \underline{N}>|_{\partial\Omega} = 0$.
Daher gilt:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) T_k^{(j)} d\omega_x \\
&- \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) N_k(x) \sum_{l=1}^{n} T_l^{(j)} N_l(x) d\omega_x \\
&= \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} v_{ik}(x_0) N_i(x_0) \underbrace{\varphi_\nu(x_0)}_{=1} T_k^{(j)} d\omega_x \\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} \left(v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) - v_{ik}(x_0) N_i(x_0) \varphi_\nu(x_0)\right) T_k^{(j)} d\omega_x \\
&- \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) N_k(x) \sum_{l=1}^{n} T_l^{(j)} N_l(x) d\omega_x
\end{aligned}
$$

Dieses durch $\int\limits_{\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} d\omega_x > 0$ dividiert, ergibt:

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{i,k=1}^{n} v_{ik}(x_0) N_i(x_0) T_k^{(j)} \right| \\
&\leq \sum_{i,k=1}^{n} \max_{x\in\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} \underbrace{\left| v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) - v_{ik}(x_0) N_i(x_0) \varphi_\nu(x_0) \right|}_{\to 0} T_k^{(j)} \\
&+ \sum_{i,k=1}^{n} \max_{x\in\partial\Omega\cap B_{\frac{1}{\nu}}(x_0)} \left| v_{ik}(x) N_i(x) \varphi_\nu(x) N_k(x) \right| \underbrace{\left| \sum_{l=1}^{n} T_l^{(j)} N_l(x) \right|}_{\to 0} \\
&\to 0 \text{ für } \nu \to \infty
\end{aligned}
$$

Daraus folgt: $\sum\limits_{i,k=1}^{n} v_{ik}(x_0) N_i(x_0) T_k^{(j)} = 0$

□

Bemerkung 5.3.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^2$ *und sei* $\lambda_1 > -\dfrac{1}{n}$.
Wegen Satz 4.22 gilt dann für $\tau = 1$:

Für alle $\underline{\underline{f}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$ *existiert ein* $\underline{u} \in \underline{Z}^q(\Omega)$ *mit*

$$B_1(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_1, \Omega) = F^*(\underline{\Phi}) := \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} f_{ik}\partial_i\Phi_k dx \tag{5.3.1}$$

für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega)$.

Gilt zusätzlich $\underline{u} \in \underline{Z}^q(\Omega) \cap \underline{\overline{C}}^2(\Omega)$ *und* $f_{ik} \in L^q(\Omega) \cap \overline{C}^1(\Omega)$,
so gilt wegen $\underline{C}_0^\infty(\Omega) \subset \underline{Z}^{q'}(\Omega)$

$$\Delta\underline{u} + \lambda_1 \nabla div\underline{u} = div\underline{\underline{f}} \tag{5.3.2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} u_k N_k \Psi d\omega_x = \int_{\Omega} \underline{u}\nabla\Psi dx + \int_{\Omega} div\underline{u}\Psi dx = 0 \text{ für alle } \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt:

$$< \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.3.3}$$

Für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega) \cap \underline{\overline{C}}^2(\Omega)$ *gilt weiter:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \partial_i u_k N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} \left[\partial_i u_k \partial_i \Phi_k + \partial_i\partial_i u_k \Phi_k\right] dx$$
$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \partial_i u_i N_k \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} \left[\partial_i u_i \partial_k \Phi_k + \partial_k\partial_i u_i \Phi_k\right] dx$$
$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} \left[f_{ik} \partial_i \Phi_k + \partial_i f_{ik} \Phi_k\right] dx$$

Zusammen mit (5.3.1) und (5.3.2) folgt:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \left[\partial_i u_k N_i \Phi_k + \lambda_1 \partial_i u_i N_k \Phi_k\right] d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x$$

Wegen (5.3.3) gilt:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \partial_i u_k N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x$$

Sei $x_0 \in \partial\Omega$.
Für $j = 1, ..., n-1$ *seien* $\underline{T}^{(j)}$ *Tangentialvektoren in* x_0, *die zusammen den Tangentialraum in* x_0 *aufspannen. Dann folgt wegen Lemma 5.2:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i u_k(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0) = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0)$$

Bemerkung 5.4.

Sei $1 < q < \infty$, Ω *(AG)/(BG) mit* $\partial\Omega \in C^2$ *und sei* $\lambda_2 \geq 1$.
Wegen Satz 4.22 gilt dann für $\tau = 2$:

Für alle $\underline{\underline{f}} \in \underline{\underline{L}}^q(\Omega)$ *existiert ein* $\underline{u} \in \underline{Z}^q(\Omega)$ *mit*

$$B_2(\underline{u}, \underline{\Phi}, \lambda_2, \Omega) = F^*(\underline{\Phi}) := \sum_{i,k=1}^{n} \int_{\Omega} f_{ik} \partial_i \Phi_k dx \tag{5.4.1}$$

für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega)$.

Gilt zusätzlich $\underline{u} \in \underline{Z}^q(\Omega) \cap \overline{\underline{C}}^2(\Omega)$ *und* $f_{ik} \in L^q(\Omega) \cap \overline{C}^1(\Omega)$,
so gilt wegen $\underline{C}_0^\infty(\Omega) \subset \underline{Z}^{q'}(\Omega)$

$$\Delta\underline{u} + \nabla div\underline{u} + (\lambda_2 - 1)\nabla div\underline{u} = \Delta\underline{u} + \lambda_2\nabla div\underline{u} = div\underline{\underline{f}} \tag{5.4.2}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} u_k N_k \Psi d\omega_x = \int\limits_{\Omega} \underline{u}\nabla\Psi dx + \int\limits_{\Omega} div\underline{u}\Psi dx = 0 \text{ für alle } \Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Daraus folgt:

$$< \underline{u}, \underline{N} >|_{\partial\Omega} = 0 \tag{5.4.3}$$

Für alle $\underline{\Phi} \in \underline{Z}^{q'}(\Omega) \cap \overline{\underline{C}}^2(\Omega)$ *gilt weiter:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_i u_k N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[\partial_i u_k \partial_i \Phi_k + \partial_i \partial_i u_k \Phi_k\right] dx$$
$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_k u_i N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[\partial_k u_i \partial_i \Phi_k + \partial_k \partial_i u_i \Phi_k\right] dx$$
$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \partial_i u_i N_k \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \left[\partial_i u_i \partial_k \Phi_k + \partial_k \partial_i u_i \Phi_k\right] dx$$
$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_{ik} \left[\partial_i \Phi_k + \partial_i f_{ik} \Phi_k\right] dx$$

Zusammen mit (5.4.1) und (5.4.2) folgt:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\partial_i u_k N_i \Phi_k + \partial_k u_i N_i \Phi_k + (\lambda_2 - 1)\partial_i u_i N_k \Phi_k\right] d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x$$

Wegen (5.4.3) gilt:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\partial_i u_k N_i \Phi_k + \partial_k u_i N_i \Phi_k\right] d\omega_x = \sum_{i,k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega} f_{ik} N_i \Phi_k d\omega_x$$

Sei $x_0 \in \partial\Omega$.
Für $j = 1, ..., n-1$ *seien* $\underline{T}^{(j)}$ *Tangentialvektoren in* x_0, *die zusammen den Tangentialraum in* x_0 *aufspannen. Dann folgt wegen Lemma 5.2:*

$$\sum_{i,k=1}^{n} \left[\partial_i u_k(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0) + \partial_k u_i(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0)\right] = \sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0)$$

Ist also für alle $x_0 \in \partial\Omega$

$$\sum_{i,k=1}^{n} f_{ik}(x_0) T_k^{(j)} N_i(x_0) = 0,$$

so erfüllt $\underline{u}$ *die Randbedingung des dritten Randwertproblems der statischen Elastizitätstheorie. Siehe hierzu auch [Ko1] (3.4) und [Ko2] (0.7).*

Index

Literatur

[Al] Alt, H.W.: *Lineare Funktionlalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[Gr] Grenz, S.: *Kornsche Ungleichungen und schwache Lösungen Navier'scher Randwertprobleme im Banachraumfall für beschränkte Gebiete und Außengebiete*. Bayreuth. Math. Schr. **37** (1991), 1-114.

[Ha] Hayden, T.L.: *Representation theorems in reflexive Banach spaces*. Math. Z. **104** (1968), 405-406.

[Ko1] Kozhevnikov, Alexander: *A history of the Cosserat spectrum*. Operator Theory: Advances and Applications, **109** (1999), 223-234.

[Ko2] Kozhevnikov, Alexander: *The basic boundary value problems of static elasticity theory and their Cosserat spectrum*. Math. Z. **213** (1993), 241-274.

[Mü] Müller, R.: *Das schwache Dirichletproblem in L^p für den Bipotentialoperator in beschränkten Gebieten und in Außengebieten*. Bayreuth. Math. Schr. **49** (1995), 115-211.

[Na/Si] Naumann, J. und Simader, Christian G.: *A second look on definition and equivalent norms of Sobolev spaces*. Math. Bohem. **124** (1999), no. 2-3, 315-328.

[Sa] Sauer, N.: *Representation theorems in a reflexive B-space*. Math. Z. **93** (1966), 202-205.

[Si1] Simader, Christian G.: *Sobolev's original definition of his spaces revisited and a comparison with nowadays definition*, Le Matematiche, Volume LIV (1999).

[Si2] Simader, Christian G.: *Another look on weak L^p-solutions to Stokes' system in a half-space*, Preprint, Universität Bayreuth, 2000.

[Si3] Simader, Christian G.: *Remark on the Piola-transform of vector fields*, to appear.

[Si4] Simader, Christian G.: *Mean value formulas,Weyl's lemma and Liouville theorems for Δ^2 and Stokes' system*. Results Math. **22** (1992), no. 3-4, 761-780.

[Si/So] Simader, Christian G. und Sohr, H.: *The Dirichlet Problem for the Laplacian in bounded and unbounded domains*. Pitman Research Notes in Mathematics, Vol 360. Longman, Harlow, 1996, ii+294 pp.

[St] Stark, M.: *Das schwache Dirichletproblem in L^q für das Differentialgleichungssystem $\Delta \underline{v} = \nabla p$ und die Lösung der Divergenzgleichung*. Bayreuth. Math. Schr. **70** (2004), xii+352 pp.

[We] Weyers, S.: *Eine L^q-Theorie des Cosseratspektrums in beschränkten Gebieten und Außengebieten*, http://opus.ub.uni-bayreuth.de/volltexte/2006/221/, Opusserver, Bayreuth 2006.