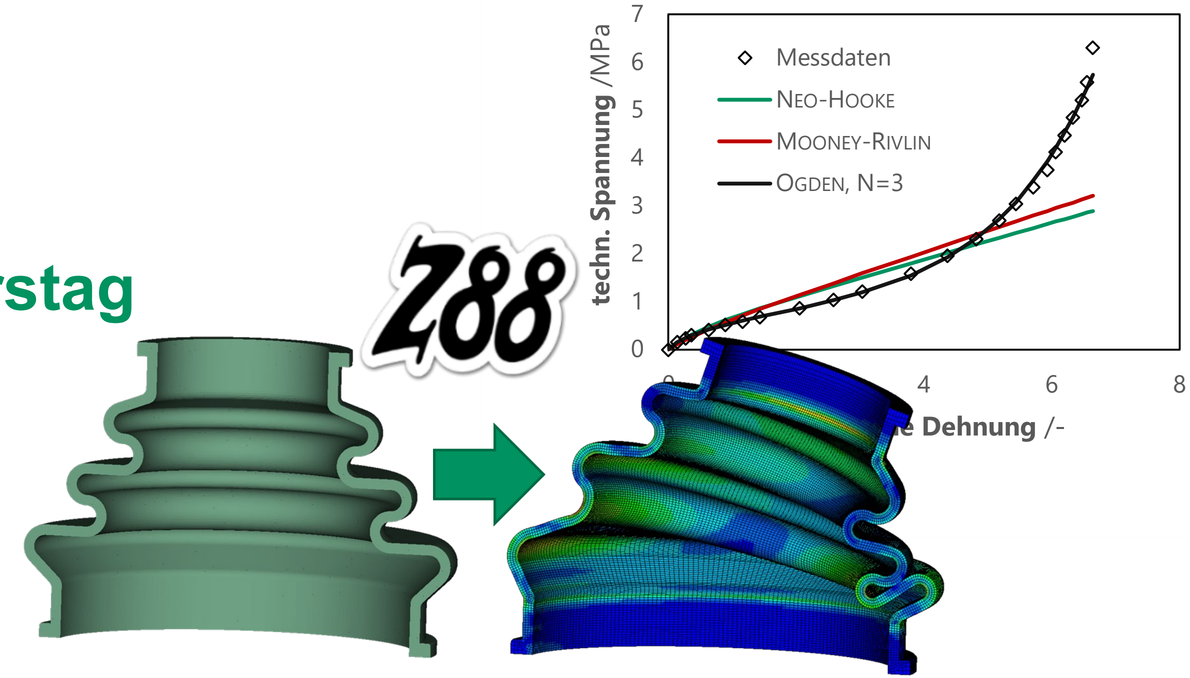
Hyperelastizität in der FEM:

Bewertung der Vorhersagegüte unterschiedlicher Materialmodelle

Florian Hüter, M.Sc.

24. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

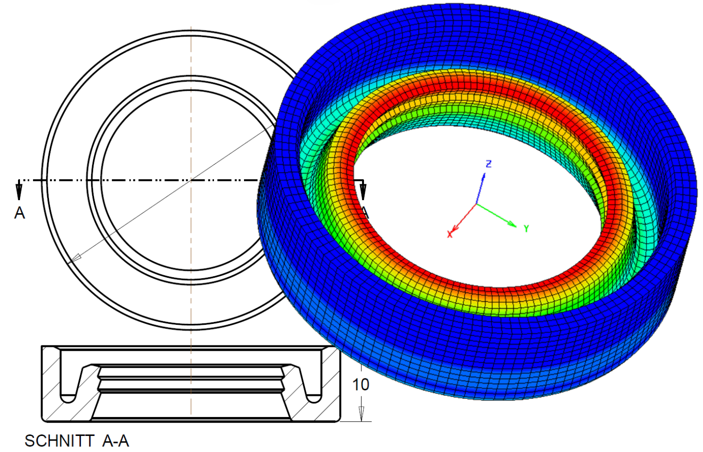
Bayreuth,13.09.2023



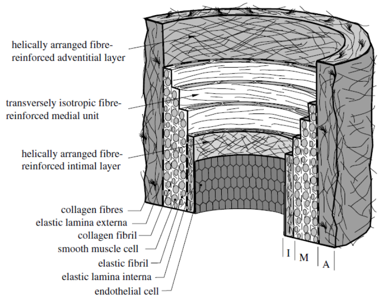
Hyperelastizität in der FEM

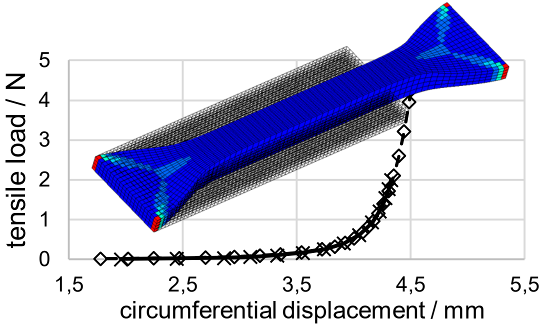
Anwendungsbeispiele hyperelastischer Materialien

Wellendichtring

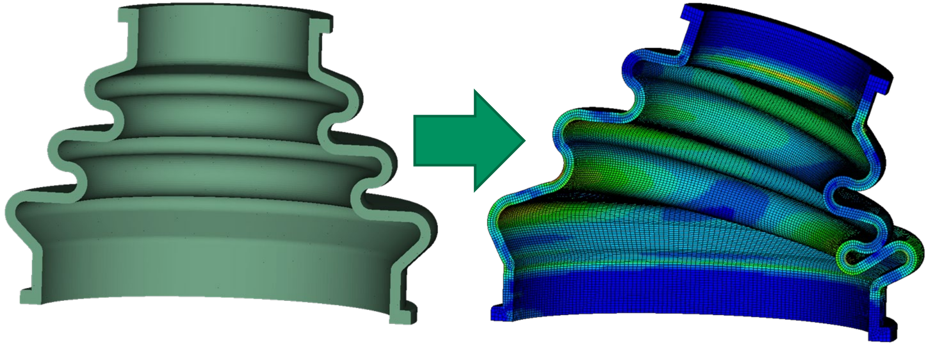


Soft Tissues

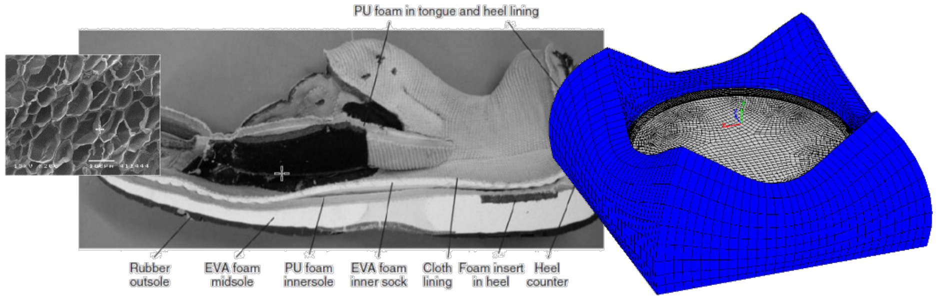




Faltenbalg



Schaummaterialien



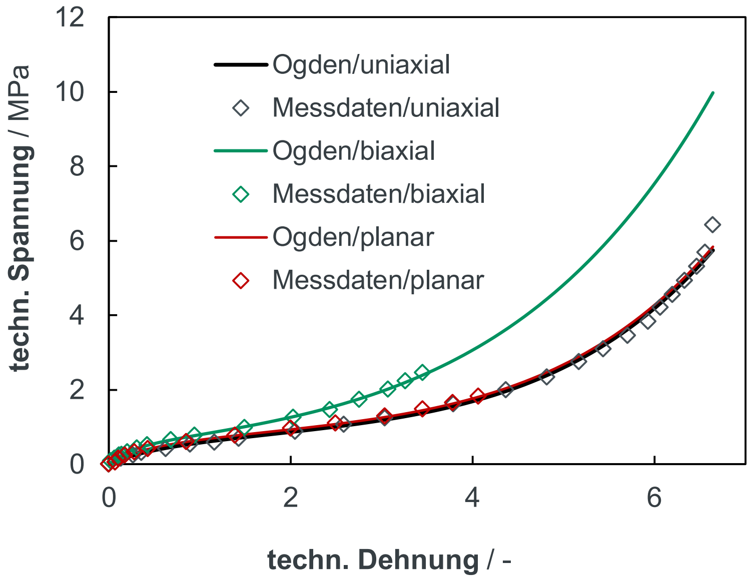
MILLS, N. Polymer foams handbook: engineering and biomechanics applications and design guide. Elsevier, 2007.
GASSER, T. C.; OGDEN, R. W.; HOLZAPFEL, G. A. Hyperelastic Modelling of Arterial Layers With Distributed Collagen Fibre Orientations.. Journal of the Royal Society Interface, vol. 3, pp. 15–35, 2006.

Hyperelastizität in der FEM

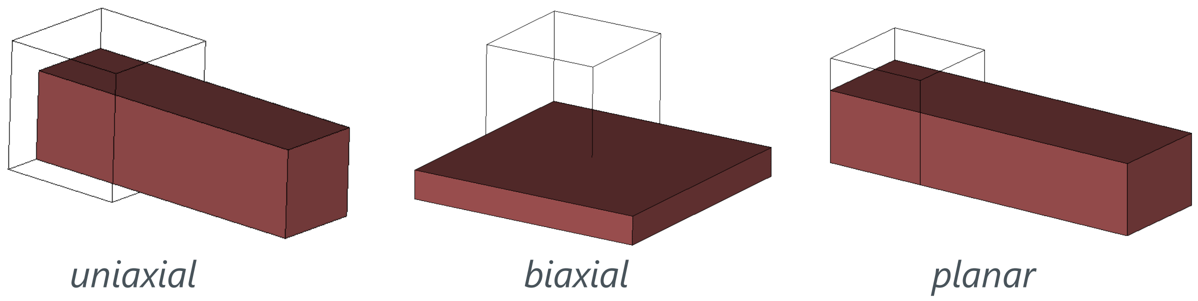
Charakterisierung hyperelastischen Materialverhaltens

Hyperelastisches Materialverhalten

- **vulkanisierter Kautschuk (TRELOAR)**



- **Elastisches Materialverhalten (Green-elastisch)**
  - eindeutige Spannungs-Dehnungs-Relation
    $$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$$
  - im Allgemeinen nichtlinear
  - isotrop oder anisotrop (faserverstärkt)
  - (quasi-)inkompressibel bis stark kompressibel
  - reversible Verformung (**energieerhaltend**/konservativ)
  - Materialverhalten ist von der **Belastungsmode** abhängig



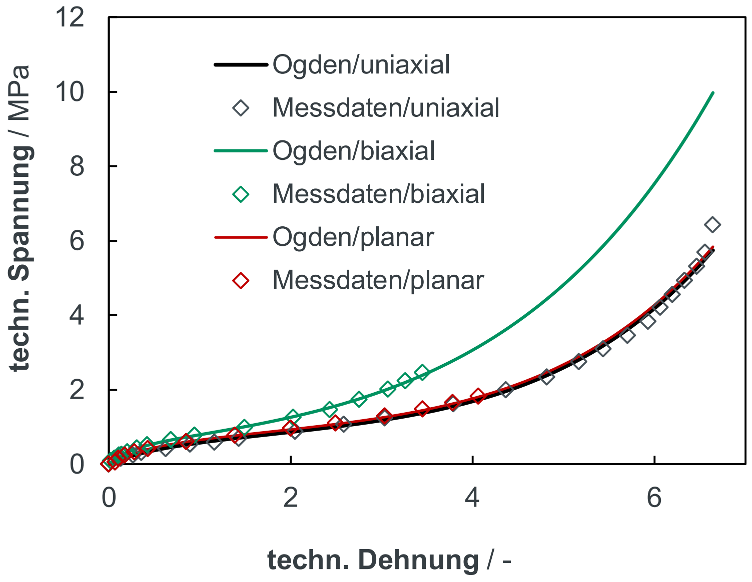
TRELOAR, L. R. G. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. Transactions of the Faraday Society, 1944, 40. Jg., S. 59-70.
REDDY, Junuthula Narasimha. An introduction to continuum mechanics. Cambridge university press, 2013.

Hyperelastizität in der FEM

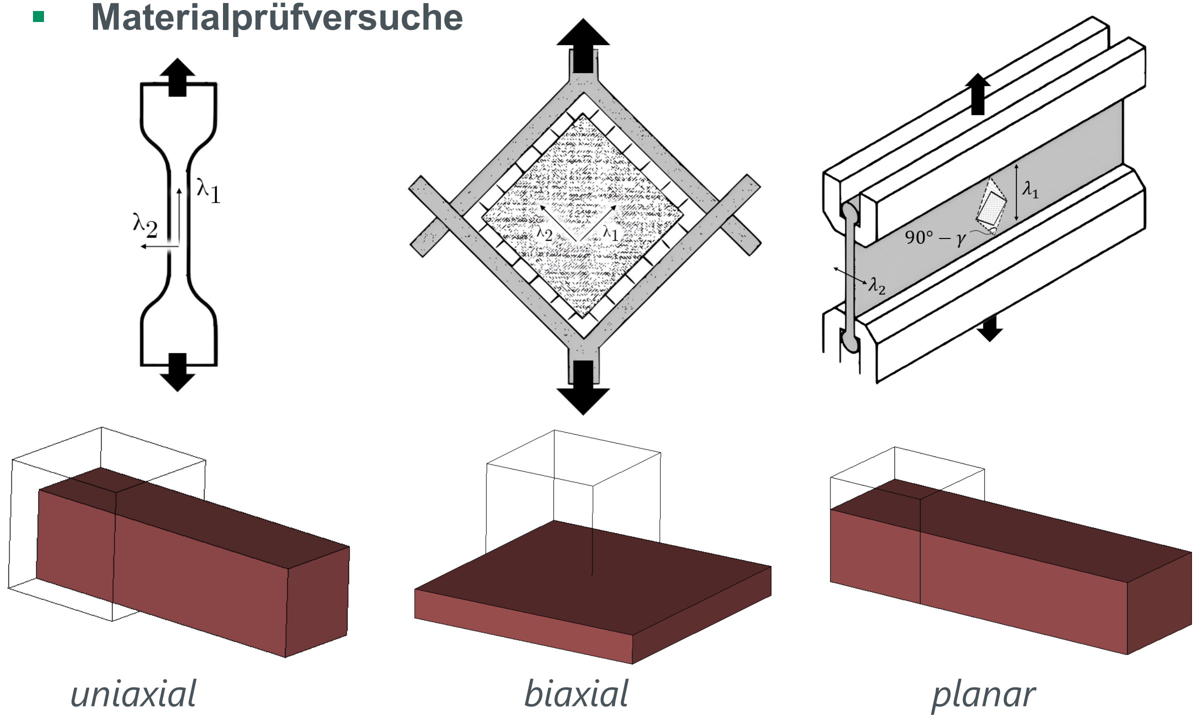
Experimentelle Messung des Materialverhaltens

Typische Prüfversuche zur Materialcharakterisierung

- vulkanisierter Kautschuk (TRELOAR)



- Materialprüfversuche



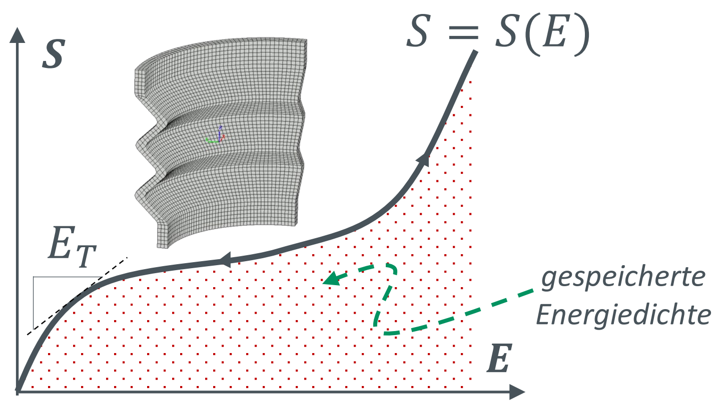
BERGSTROM, Jorgen S. Mechanics of solid polymers: theory and computational modeling. William Andrew, 2015.
BAUMAN, Judson T. Fatigue, stress, and strain of rubber components: guide for design engineers. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2012.
FEIERABEND, Martin; GRIEBEL, Stefan; ZENTNER, Lena. Konzeptionierung und Konstruktion einer äquibiaxialen Zugvorrichtung. Universitätsverlag Ilmenau, 2012.
KIM, Nam-Ho. Introduction to nonlinear finite element analysis. Springer Science & Business Media, 2014.

Hyperelastizität in der FEM

Grundlagen: Spannungs-Dehnungs-Relation

Verzerrungsenergiedichtefunktion Ψ

Konservatives Verhalten
- keine Dissipation von Formänderungsarbeit
- Be- & Entlastungspfad identisch



- **Verzerrungsenergiedichte (elastisches Potential)**

$$\Psi(\mathbf{E}) = \int_0^{\mathbf{E}} \mathbf{S}(\mathbf{E})\, d\mathbf{E}$$

- **Ableitung der Spannung**

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}$$

- **Ableitung der Materialmatrix**

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}$$

➡ Das elastische Verhalten lässt sich allein durch die Angabe des skalaren Potentials eindeutig definieren.

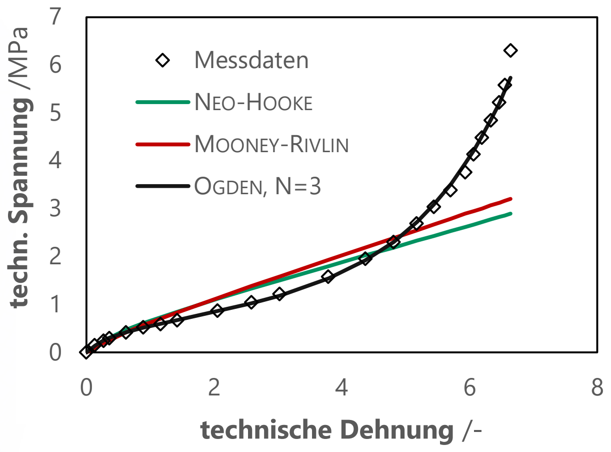
HOLZAPFEL, G. A. Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering science. 2002

Hyperelastizität in der FEM

Überblick über typischer hyperelastische Materialmodelle

Hyperelastizität

- isotrop
  - kompressibel
    - HENCKY
    - BLATZ-KO
    - STORAKERS-HYPERFOAM
  - (quasi-) inkompressibel
    - NEO-HOOKE
    - MOONEY-RIVLIN
    - YEOH
    - ARRUDA-BOYCE
    - OGDEN
    - MARLOW
- anisotrop
  - FUNG
  - HOLZAPFEL-GASSER-OGDEN



BERGSTROM, J. S. Mechanics of solid polymers: theory and computational modeling. William Andrew, 2015.
MILLS, N. Polymer foams handbook: engineering and biomechanics applications and design guide. Elsevier, 2007.
DASSAULT SYSTÈMES. Abaqus 6.14 Documentation. Providence, RI: Dassault Systèmes, 2014.
HÜTER, F.; RIEG, F.. Extending Marlow's general first-invariant constitutive model to compressible, isotropic hyperelastic materials. Engineering Computations, 2021, 38. Jg., Nr. 6, S. 2631-2647.

Hyperelastizität in der FEM

Klassifizierung nach Materialeigenschaften

- **Hyperelastizität**
  - isotrop
    - kompressibel
    - (quasi-) inkompressibel
  - anisotrop

Gekoppelte Formulierung

- **Hauptstreckungsbasiert**

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, J)$$

z. B. Storakers-Hyperfoam, Hencky

- **Invariantenbasiert**

$$\Psi(I_1, I_2, J)$$

z. B. Blatz-Ko

Entkoppelte Formulierung

- **Hauptstreckungsbasiert**

$$\Psi^{iso}\left(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\right) + \Psi^{vol}(J)$$

z. B. Ogden

- **Invariantenbasiert**

$$\Psi^{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + \Psi^{vol}(J)$$

z. B. Mooney-Rivlin

$$\Psi^{iso}(\bar{I}_1, \cancel{\bar{I}_2}) + \Psi^{vol}(J)$$

z. B. Neo-Hooke, Yeoh, Arruda-Boyce, Marlow

anisotrop

- **Verzerrungstensorbasiert**

$$\Psi(\boldsymbol{E})$$

z. B. Fung

- **Invariantenbasiert**

$$\Psi(I_1, \dots, I_8)$$

z. B. Holzapfel-Gasser-Ogden

Hyperelastizität in der FEM

Klassifizierung nach Funktionsansätzen

Approximationsansätze

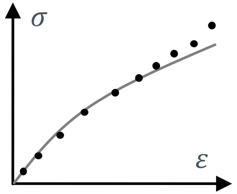
Wahl eines Funktionsansatzes für elastisches Potential

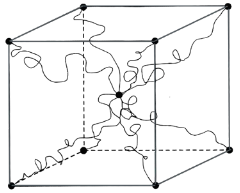
$$\Psi = C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3) + \frac{K}{2} \cdot (J - 1)^2$$

Ableiten der Spannungs-Dehnungs-Relation

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}$$

Approximation der Messdaten via Curve Fitting

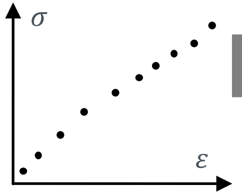




- **mikromechanisch**
  Neo-Hooke, Arruda-Boyce …
  → **Physikalische Plausibilität garantiert (Materialstabilität)**
- **phänomenologisch**
  Mooney-Rivlin, Yeoh, Ogden …

Interpolationsansätze

Messdaten



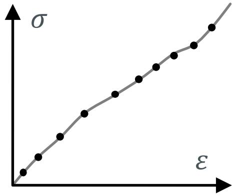
Kalibrierung der Interpolationsfunktion für elast. Potential

$$\Psi = \mathrm{spline}\left(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J; \left(\varepsilon^{(i)} | \sigma^{(i)}\right)\right)$$

Ableiten der Spannungs-Dehnungs-Relation

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}$$

Reproduktion Messdaten



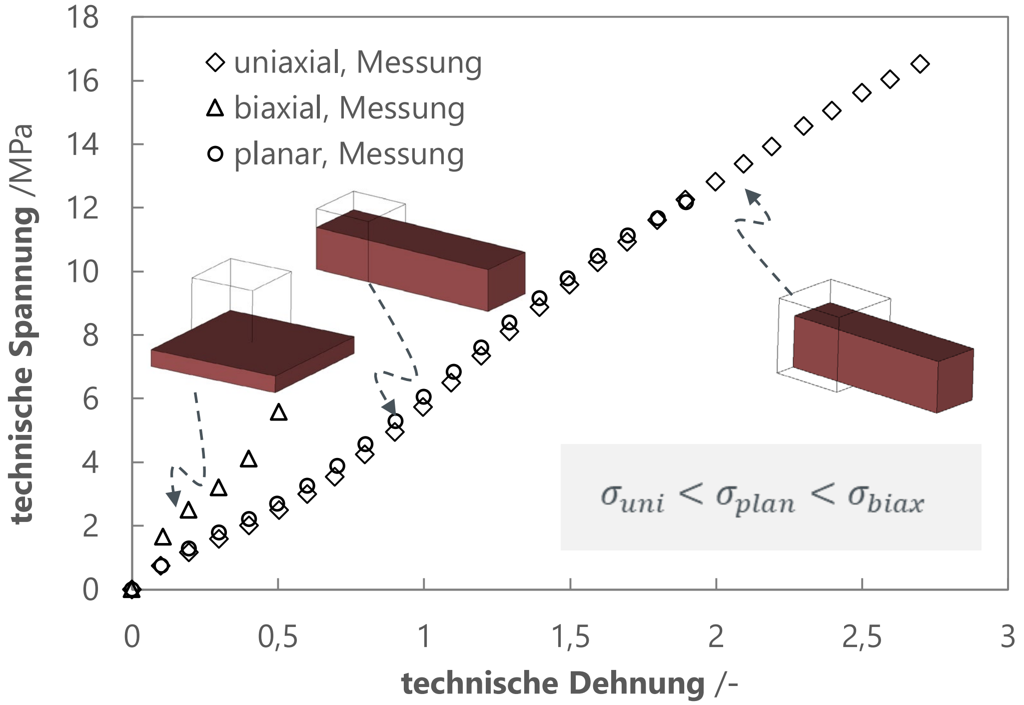
- **phänomenologisch, Spline-basiert**
  Bathe, Marlow …
  → **geringerer Modellbildungsfehler**
  → **Materialstabilität garantiert**

Im Folgenden: **Untersuchung & Bewertung der Modellvorhersagegenauigkeit anhand zweier Fallstudien**

Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

Elastomerwerkstoff NBR 70 Shore A



Approximationsansatzbasierte Materialmodelle

- **Mooeny-Rivlin (N=1)**

$$\Psi = \frac{K}{2} \cdot (J-1)^2 + \sum_{j=1}^{N} C_{j0} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^j + \sum_{j=1}^{N} C_{0j} \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j$$

- **Ogden (N=3)**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \sum_{j=1}^{N} \frac{2\mu_j}{\alpha_j^2} \cdot \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_j} - 3\right)$$

- **Arruda-Boyce**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \mu \cdot \left(\frac{\bar{I}_1 - 3}{2} + \frac{\bar{I}_1^2 - 9}{20\lambda_m^2} + \frac{11 \cdot (\bar{I}_1^3 - 27)}{1050\lambda_m^4} + \frac{19 \cdot (\bar{I}_1^4 - 81)}{7000\lambda_m^6} + \cdots\right)$$

- **Neo-Hooke (N=1), Yeoh (N=3)**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \sum_{j=1}^{N} C_{j0} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^j$$

Kalibrierung der Materialmodelle mittels Z88-Kalibrierungstool

https://doi.org/10.3311/PPme.11595
https://doi.org/10.1016/C2013-0-15493-1
https://doi.org/10.15495/EPub_UBT_00006648

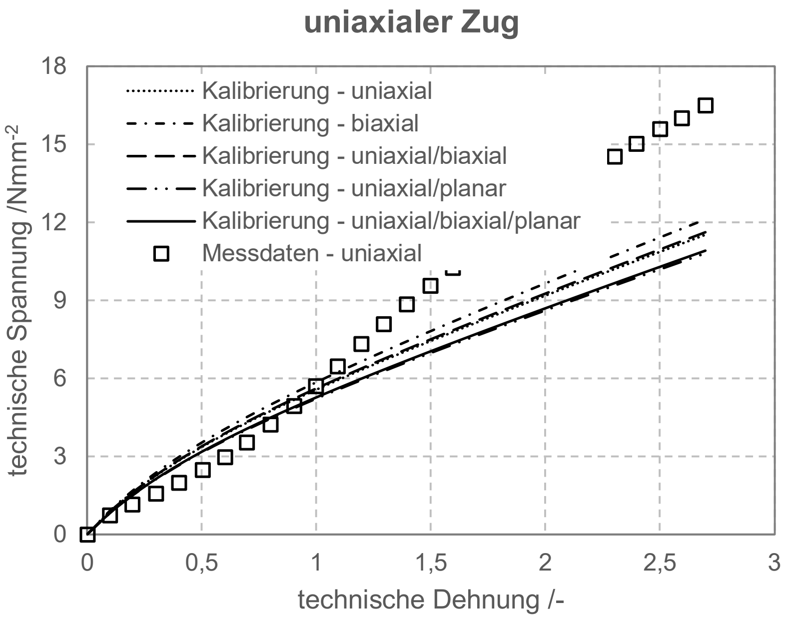
Hyperelastizität in der FEM

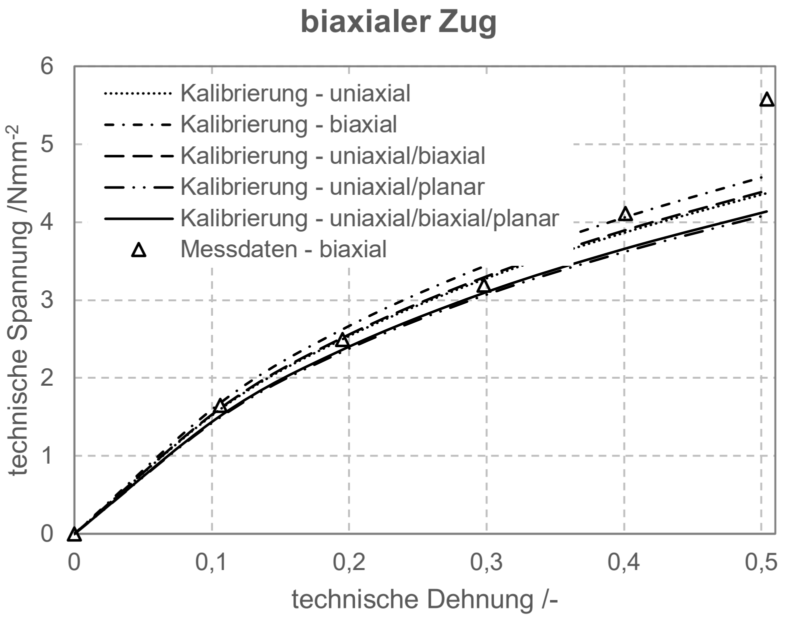
Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

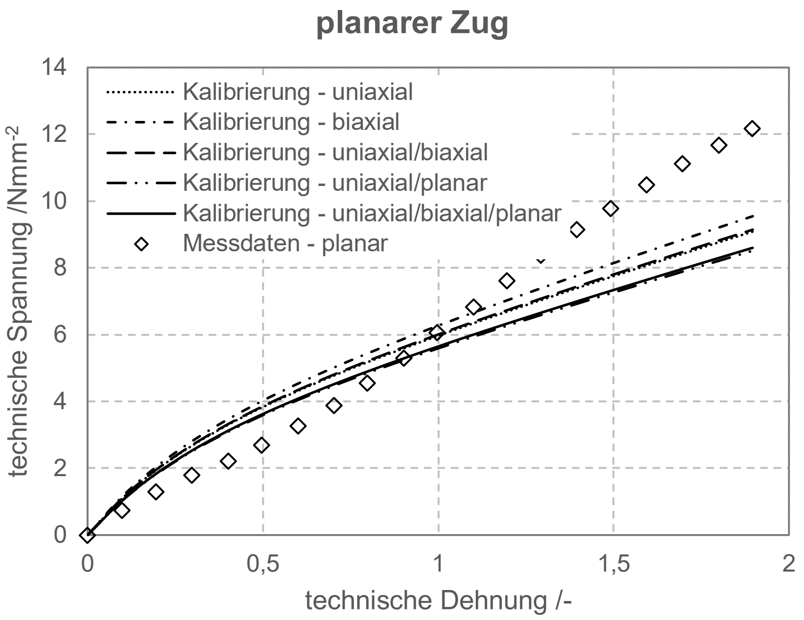
UNIVERSITÄT BAYREUTH

NEO-HOOKE (N=1), mikromechanisch

$$\Psi = \frac{K}{2} \cdot (J-1)^2 + C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3)$$





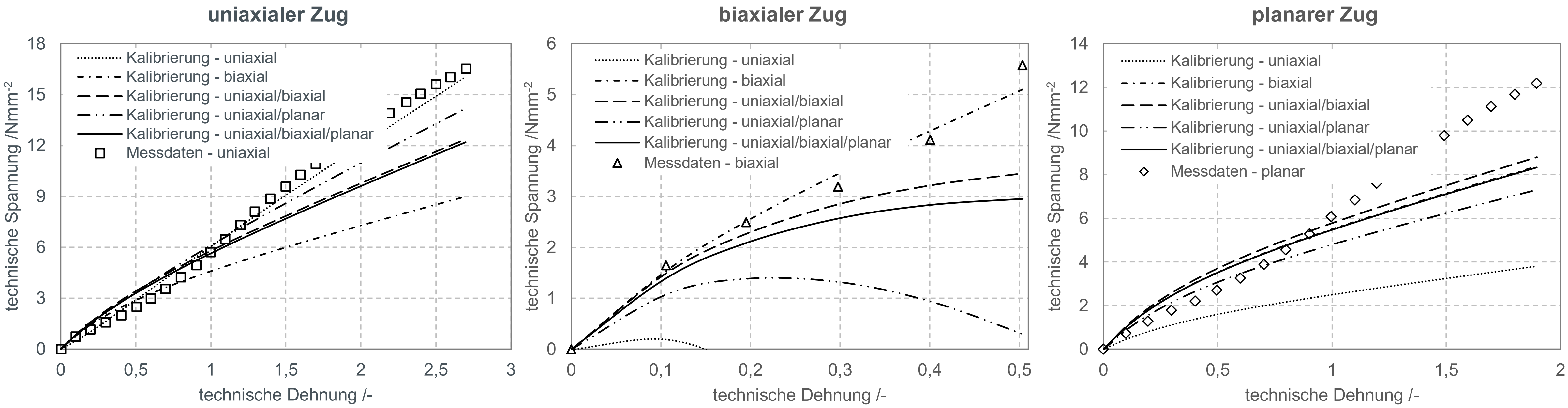


- intrinsisch degressiver Verlauf
- physikalisch plausibles & materialstabiles Modellverhalten
- NEO-HOOKE kann Kurvenverlauf für große Dehnungen nicht nachbilden, nur für kleine bis moderate Deformationen geeignet

Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

MOONEY-RIVLIN (N=1), phänomenologisch $\Psi = \frac{K}{2}\cdot(J-1)^2 + C_{10}\cdot(\bar{I}_1-3) + C_{01}\cdot(\bar{I}_2-3)$



- intrinsisch degressiver Verlauf ähnlich zu NEO-HOOKE
- MOONEY-RIVLIN kann Kurvenverlauf für große Dehnungen nicht nachbilden, für kleine bis moderate Deformationen geeignet
- instabiles Modellverhalten bei Kalibrierung mit nur uniaxialen oder nur biaxialen Messdaten oder mit uniaxialen & planaren Messdaten

Hyperelastizität in der FEM

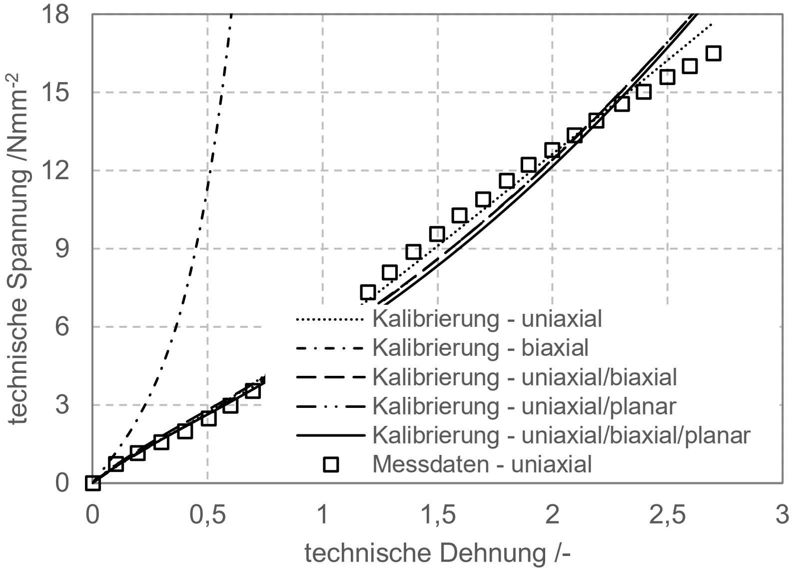
Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

UNIVERSITÄT BAYREUTH

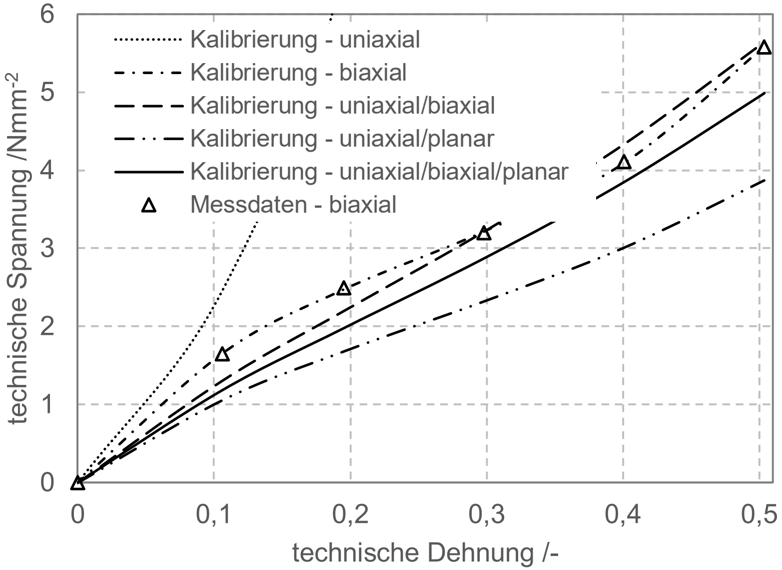
OGDEN (N=3), phänomenologisch

$$\Psi = \frac{K}{4}\cdot\left(J^2 - \ln J\right) + \sum_{j=1}^{N}\frac{2\mu_j}{\alpha_j^2}\cdot\left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_j} - 3\right)$$

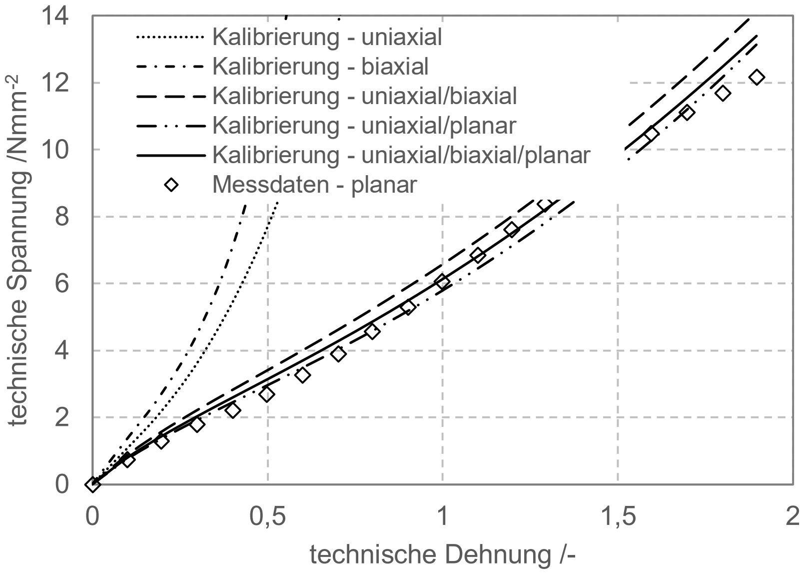
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug



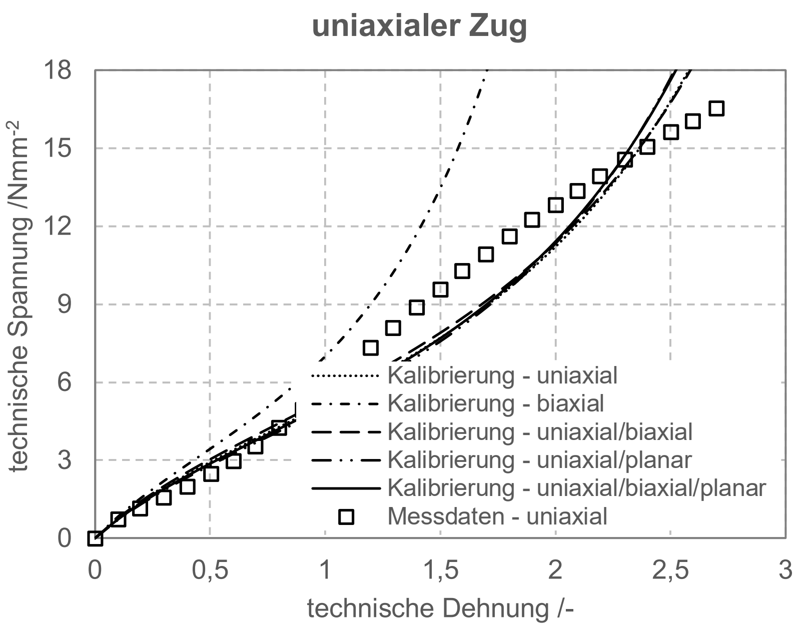
- physikalisch unplausible Modellverhalten bei Kalibrierung mit nur uniaxialen oder nur biaxialen Messdaten oder mit uniaxialen & planaren Messdaten
- sehr gute Modellvorhersagegenauigkeit bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdaten

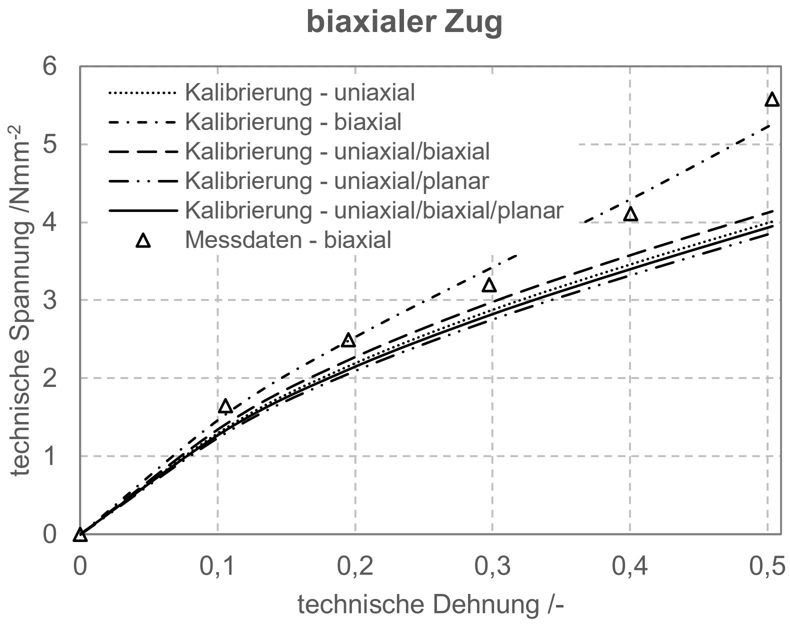
Hyperelastizität in der FEM

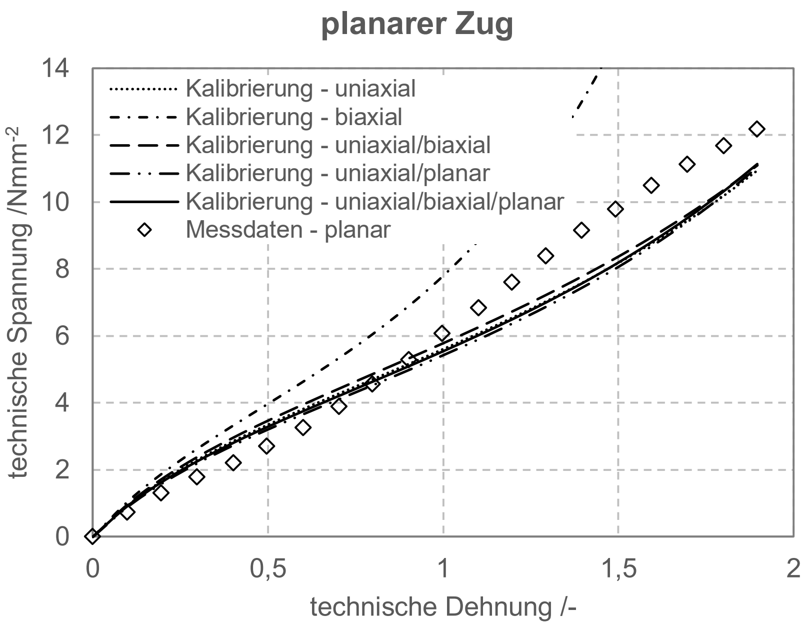
Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

Arruda-Boyce (N=5), mikromechanisch

$$\Psi = \frac{K}{4}\cdot(J^2 - \ln J) + \mu \cdot \left(\frac{\bar{I}_1 - 3}{2} + \frac{\bar{I}_1^2 - 9}{20\lambda_m^2} + \frac{11\cdot(\bar{I}_1^3 - 27)}{1050\lambda_m^4} + \frac{19\cdot(\bar{I}_1^4 - 81)}{7000\lambda_m^6} + \cdots\right)$$







- intrinsischer „Upturn“ in Modellkurve, merkliche Abweichung von Messdaten
- physikalisch plausible Modellvorhersage auch bei nur einem Messdatensatz
- keine Verbesserung bei uniaxialer und biaxialer Kalibrierung gegenüber nur uniaxialer Kalibrierung

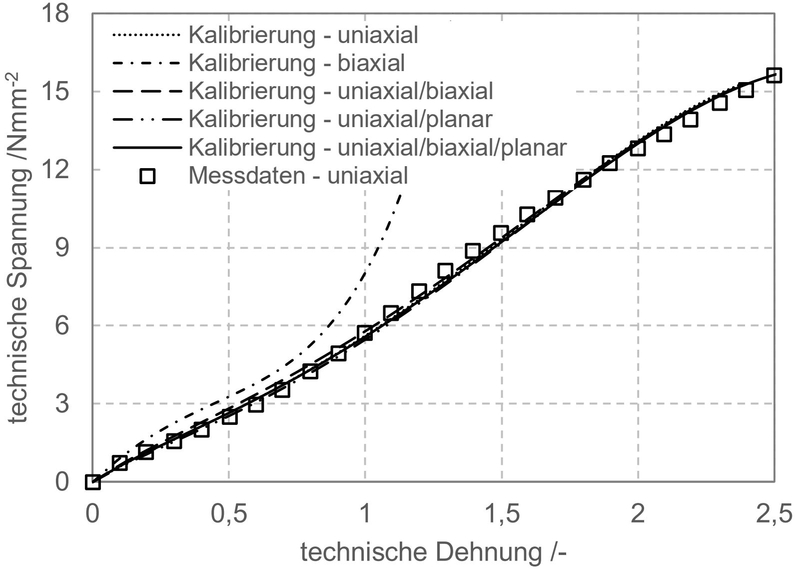
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

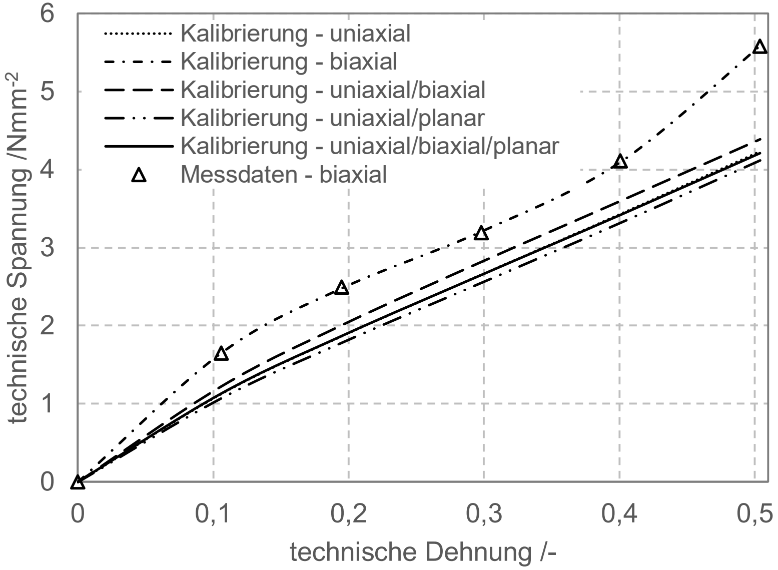
Yeoh (N=3), phänomenologisch

$$\Psi = \frac{K}{4}\cdot\left(J^2-\ln J\right)+\sum_{j=1}^{N} C_{j0}\cdot\left(\bar{I}_1-3\right)^j$$

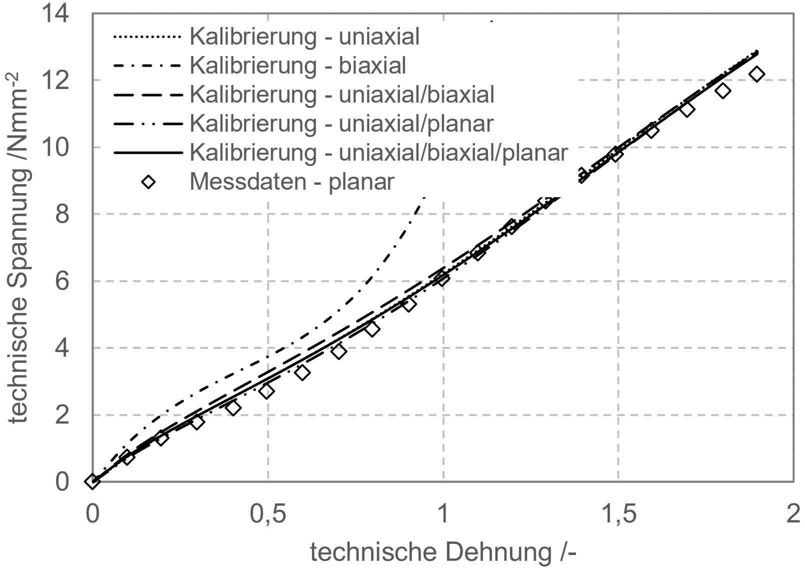
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



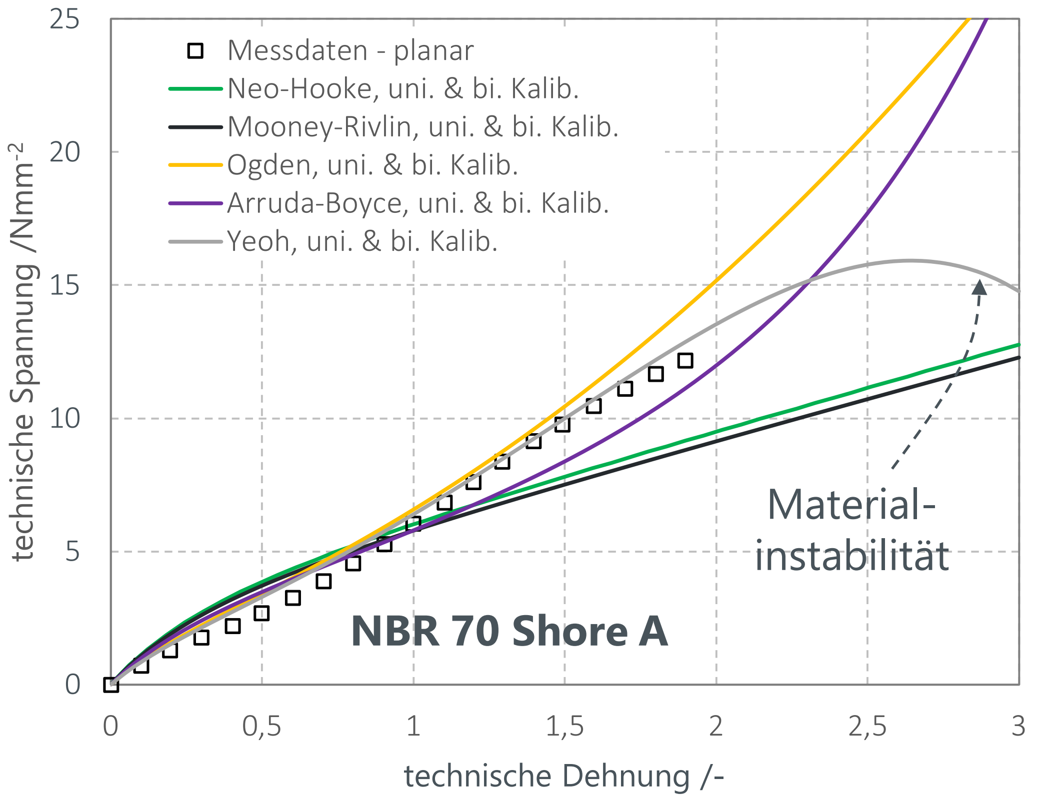
planarer Zug



- physikalisch plausible Modellvorhersage auch bei nur einem Messdatensatz
- keine merkliche Verbesserung bei uniaxialer &biaxialer Kalibrierung gegenüber nur uniaxialer Kalibrierung
- bessere Abbildungsgenauigkeit als Arruda-Boyce (mikromechanisch)

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

Modellvorhersage planarer Zug mit Extrapolation

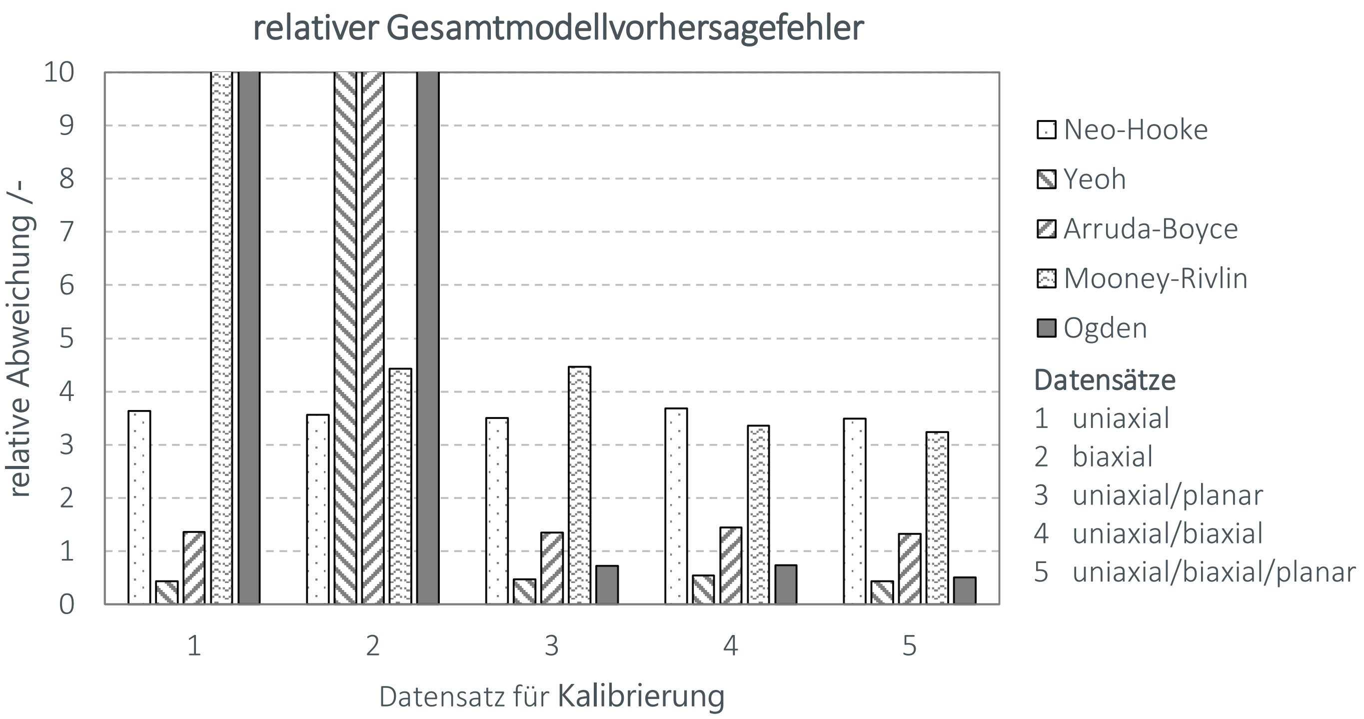


- Beste Modellvorhersagegenauigkeit für planaren Zug bei YEOH und OGDEN
- **Aber**: Materialstabilität bei phänomenologischem YEOH-Modell nicht garantiert bei Extrapolation über kalibrierten Bereich hinaus
- Materialstabilität bei mikromechanischem ARRUDA-BOYCE-Material-Modell stets garantiert, aber deutlich niedrigere Modellvorhersagegenauigkeit

Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

Vergleich der Modellvorhersagegüte unterschiedlicher Materialmodelle



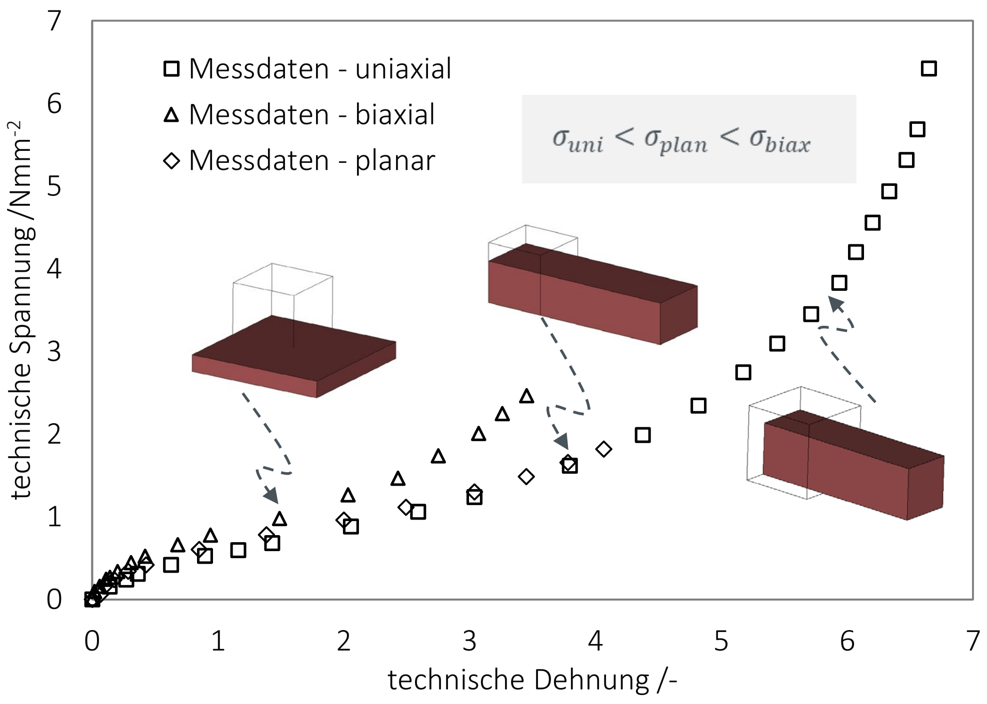
Fazit aus Modellvergleich

- Kalibrierung von Erste-Invariante-Modelle mit nur einem Messdatensatz liefert materialstabile und physikalisch plausibel Modellvorhersage
- Kalibrierung von Erste-Zweite-Invarianten-Modelle mit nur uniaxialem oder nur biaxialem Messdatensatz oder mit uniaxialen & planaren Messdatensätzen ergibt i. d. R. instabile oder physikalisch unplausibel Modellvorhersage für nicht-kalibrierte Deformationsmoden
- Kalibrierung von Erste-Zweite-Invarianten-Modelle mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdatensätzen liefert eine materialstabile und verlässliche Modellvorhersage
- Kalibrierung von Erste-Invariante-Modelle mit mehr als einem Messdatensatz verbessert die Modellvorhersagegenauigkeit meist unwesentlich
- Mit Erste-Zweite-Invarianten-Modelle ist eine höhere Modellvorhersagegenauigkeit erzielbar als mit vergleichbar komplexen Erste-Invariante-Modellen bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdatensätzen
- Erste-Invariante-Modelle, die mit uniaxialen Messdaten kalibriert wurden, unterschätzen i. d. R. die biaxialen Spannungen

Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

Elastomerwerkstoff NR (TRELOAR)



Approximationsansatzbasierte Materialmodelle

- **MOOENY-RIVLIN (N=1)**

$$\Psi = \frac{K}{2} \cdot (J-1)^2 + \sum_{j=1}^{N} C_{j0} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^j + \sum_{j=1}^{N} C_{0j} \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j$$

- **OGDEN (N=3)**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \sum_{j=1}^{N} \frac{2\mu_j}{\alpha_j^2} \cdot \left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_j} - 3\right)$$

- **ARRUDA-BOYCE**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \mu \cdot \left(\frac{\bar{I}_1 - 3}{2} + \frac{\bar{I}_1^2 - 9}{20\lambda_m^2} + \frac{11 \cdot (\bar{I}_1^3 - 27)}{1050\lambda_m^4} + \frac{19 \cdot (\bar{I}_1^4 - 81)}{7000\lambda_m^6} + \cdots\right)$$

- **NEO-HOOKE (N=1), YEOH (N=3)**

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \sum_{j=1}^{N} C_{j0} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^j$$

Kalibrierung der Materialmodelle mittels Z88-Kalibrierungstool

https://doi.org/10.1039/TF9444000059
https://doi.org/10.1098/rspa.1972.0026
https://doi.org/10.15495/EPub_UBT_00006648

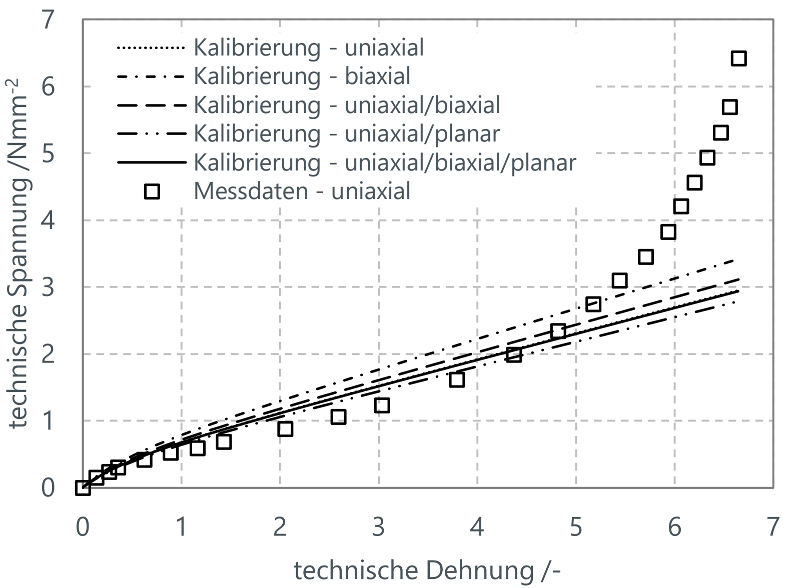
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

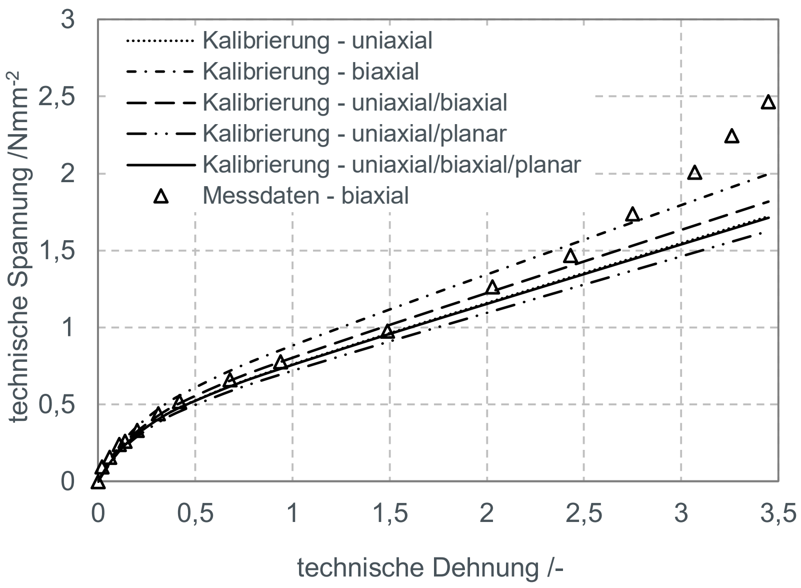
NEO-HOOKE (N=1), mikromechanisch

$$\Psi = \frac{K}{2} \cdot (J-1)^2 + C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3)$$

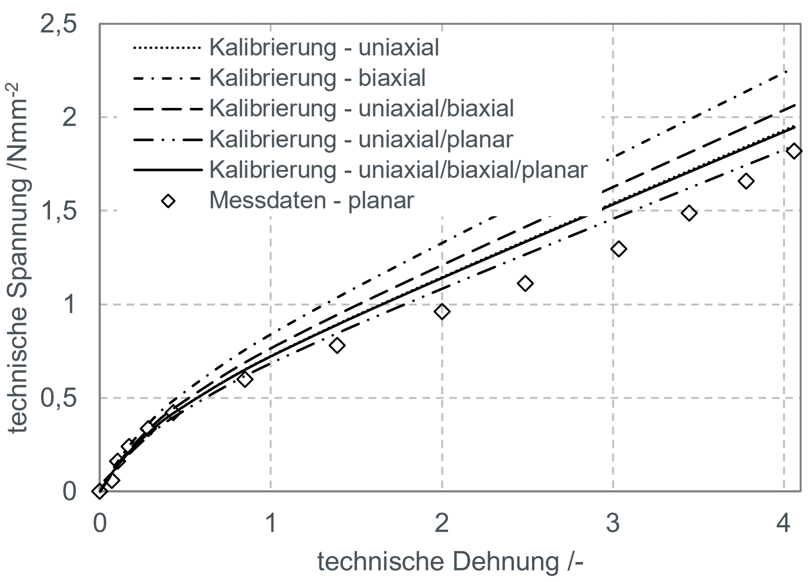
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug



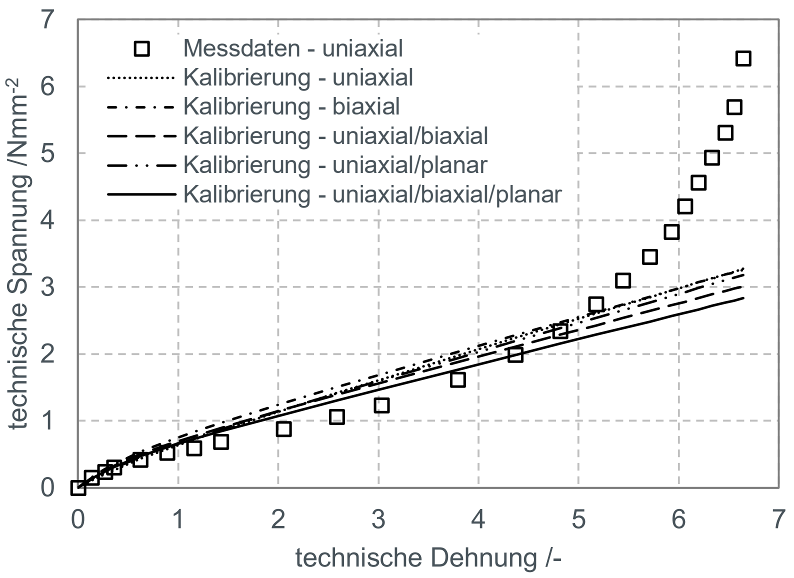
- intrinsisch degressiver Verlauf
- physikalisch plausibles & materialstabiles Modellverhalten
- NEO-HOOKE kann Kurvenverlauf für große Dehnungen nicht nachbilden, nur für kleine bis moderate Deformationen geeignet

Hyperelastizität in der FEM

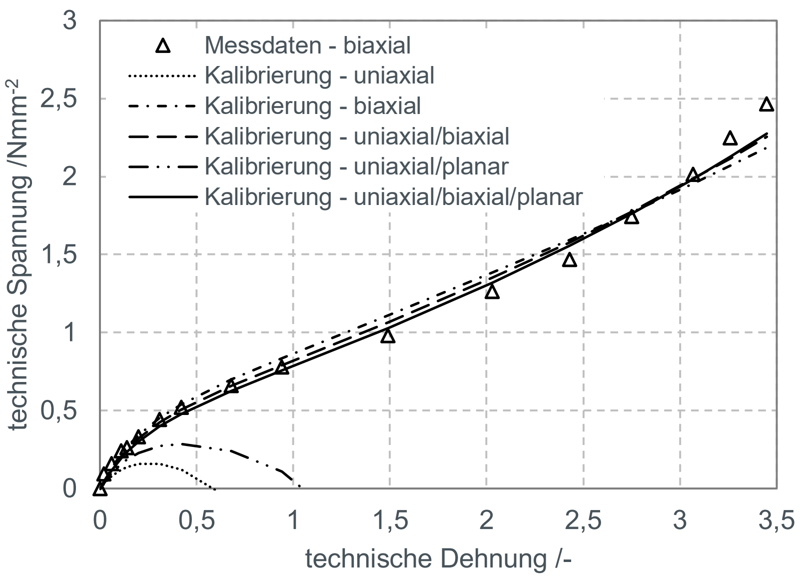
Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

MOONEY-RIVLIN (N=1), phänomenologisch $\Psi = \frac{K}{2} \cdot (J-1)^2 + C_{10} \cdot (\bar{I}_1 - 3) + C_{01} \cdot (\bar{I}_2 - 3)$

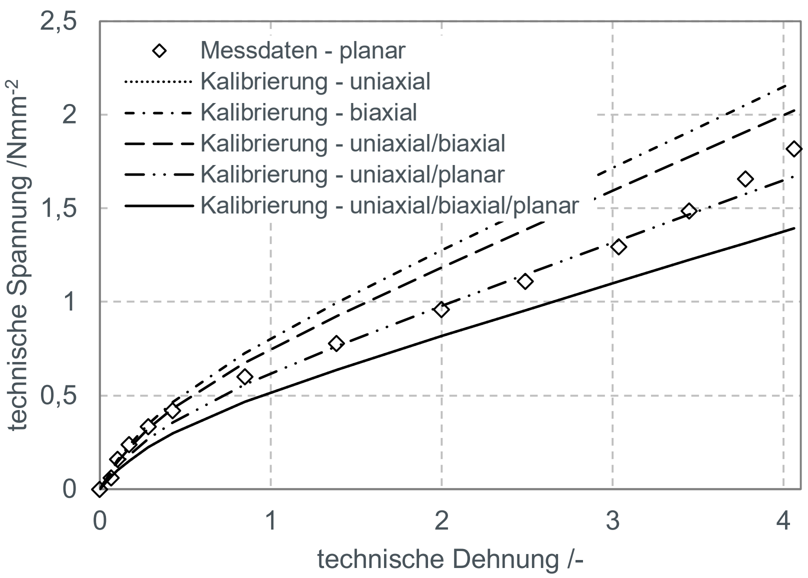
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug



- intrinsisch degressiver Verlauf ähnlich zu NEO-HOOKE
- MOONEY-RIVLIN kann Kurvenverlauf für große Dehnungen nicht nachbilden, für kleine bis moderate Deformationen geeignet
- instabiles Modellverhalten bei Kalibrierung mit nur uniaxialen oder nur biaxialen Messdaten oder mit uniaxialen & planaren Messdaten

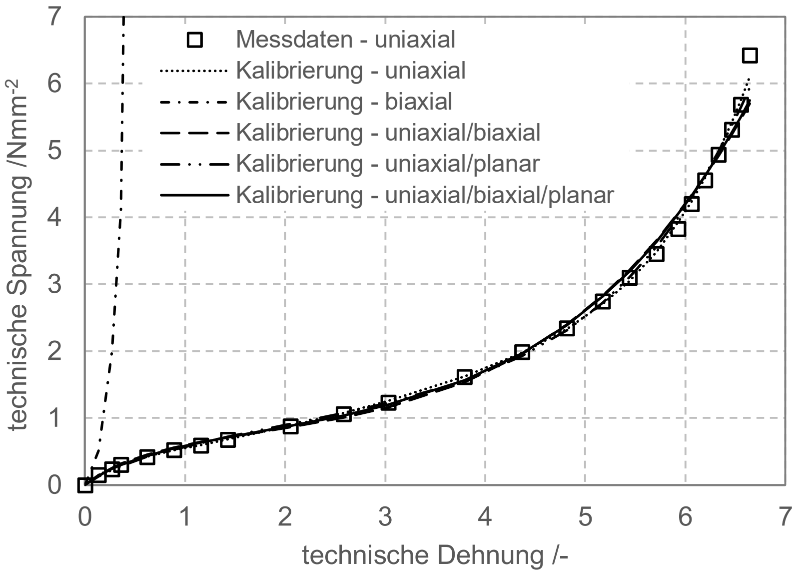
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

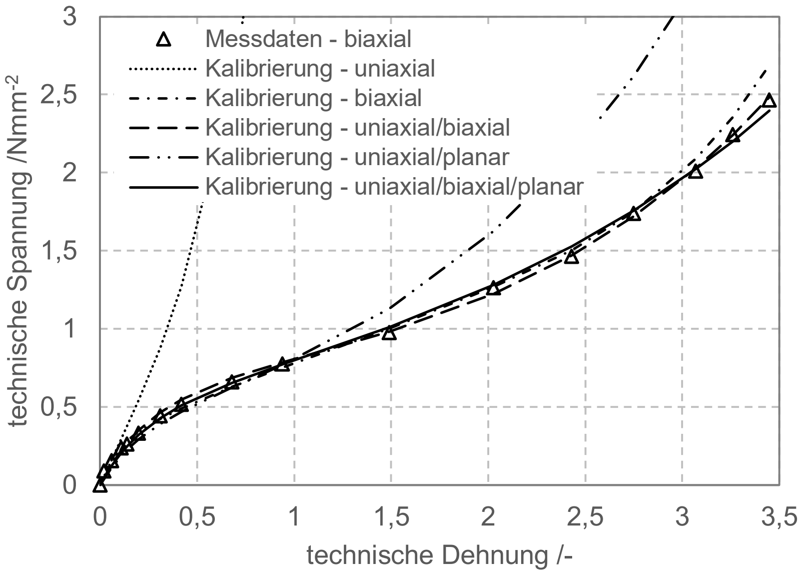
OGDEN (N=3), phänomenologisch

$$\Psi = \frac{K}{4}\cdot\left(J^2 - \ln J\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{2\mu_j}{\alpha_j^2}\cdot\left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_j} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_j} - 3\right)$$

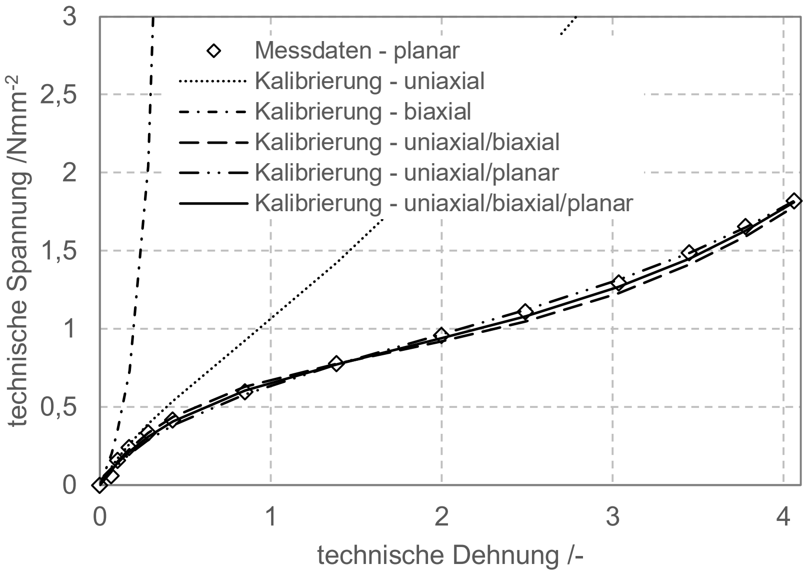
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug



- physikalisch unplausible Modellverhalten bei Kalibrierung mit nur uniaxialen oder nur biaxialen Messdaten oder mit uniaxialen & planaren Messdaten
- sehr gute Modellvorhersagegenauigkeit bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdaten

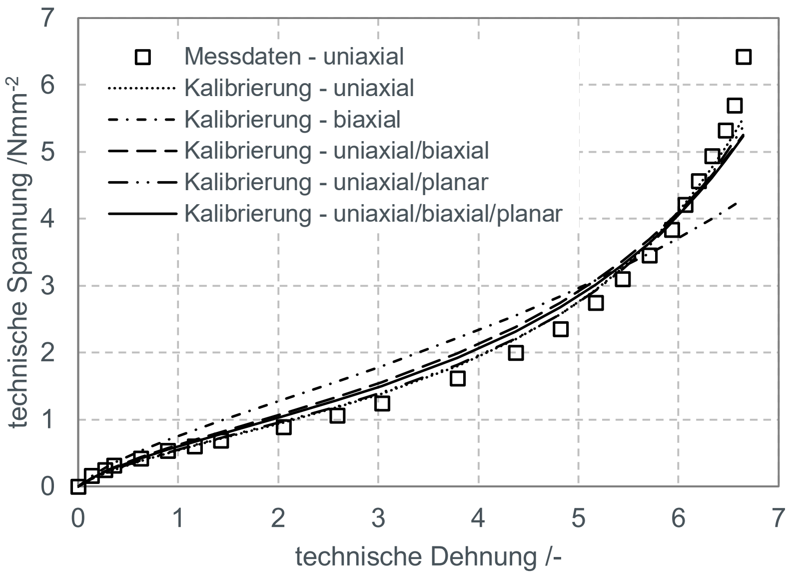
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

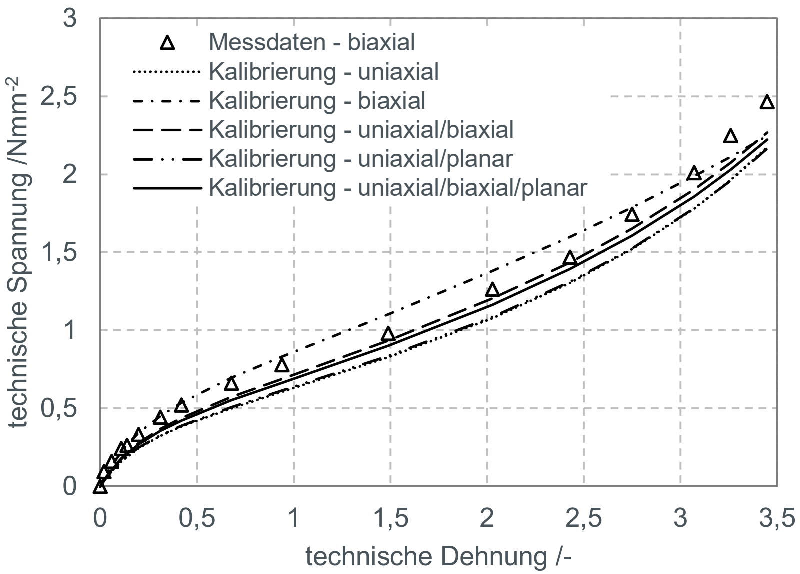
ARRUDA-BOYCE (N=5), mikromechanisch

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \mu \cdot \left(\frac{\bar{I}_1 - 3}{2} + \frac{\bar{I}_1^2 - 9}{20\lambda_m^2} + \frac{11 \cdot (\bar{I}_1^3 - 27)}{1050\lambda_m^4} + \frac{19 \cdot (\bar{I}_1^4 - 81)}{7000\lambda_m^6} + \cdots \right)$$

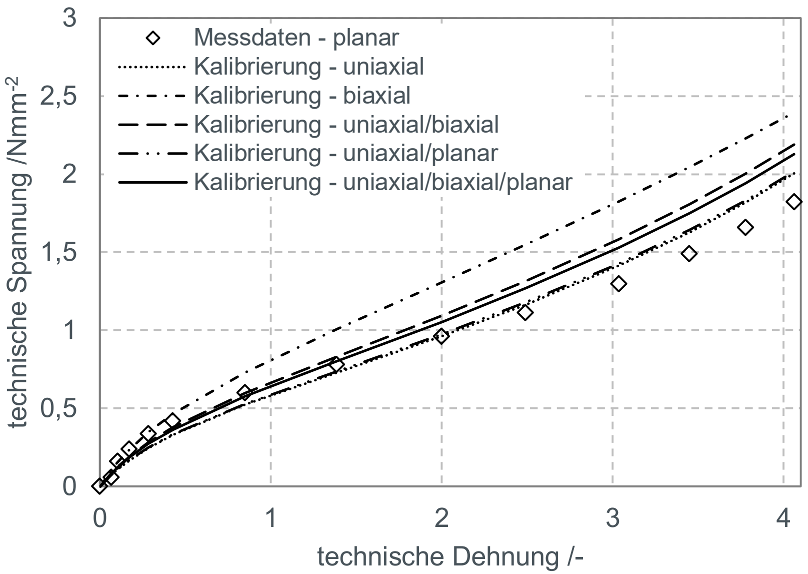
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug



- intrinsischer „Upturn" in Modellkurve, gute Übereinstimmung mit Messdaten
- physikalisch plausible Modellvorhersage auch bei nur einem Messdatensatz
- keine Verbesserung bei uniaxialer und biaxialer Kalibrierung gegenüber nur uniaxialer Kalibrierung

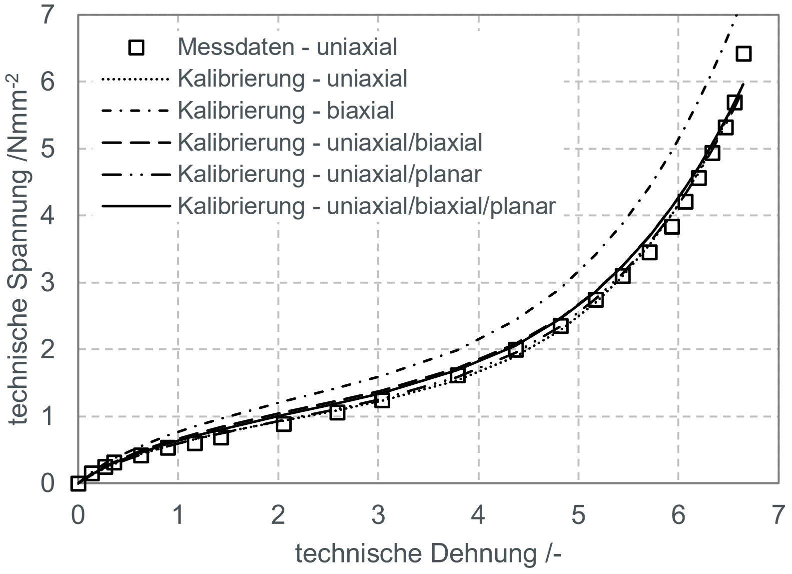
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

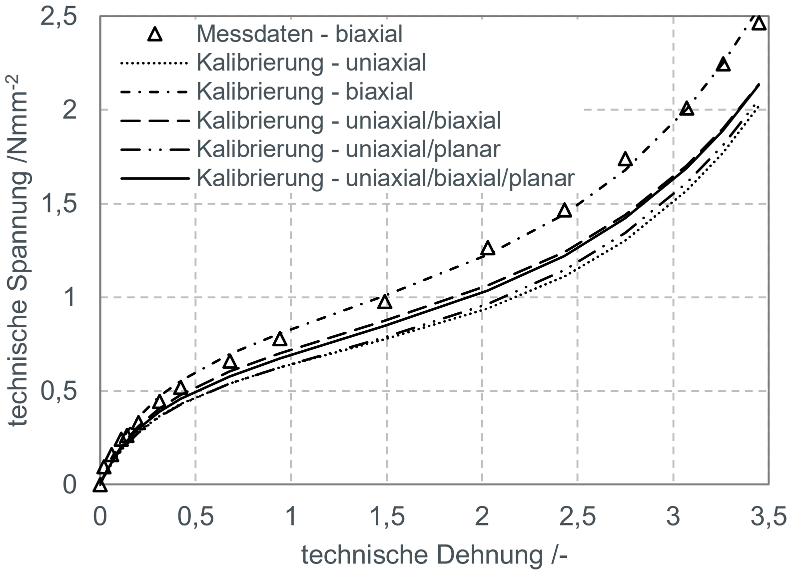
YEOH (N=3), phänomenologisch

$$\Psi = \frac{K}{4} \cdot (J^2 - \ln J) + \sum_{j=1}^{N} C_{j0} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^j$$

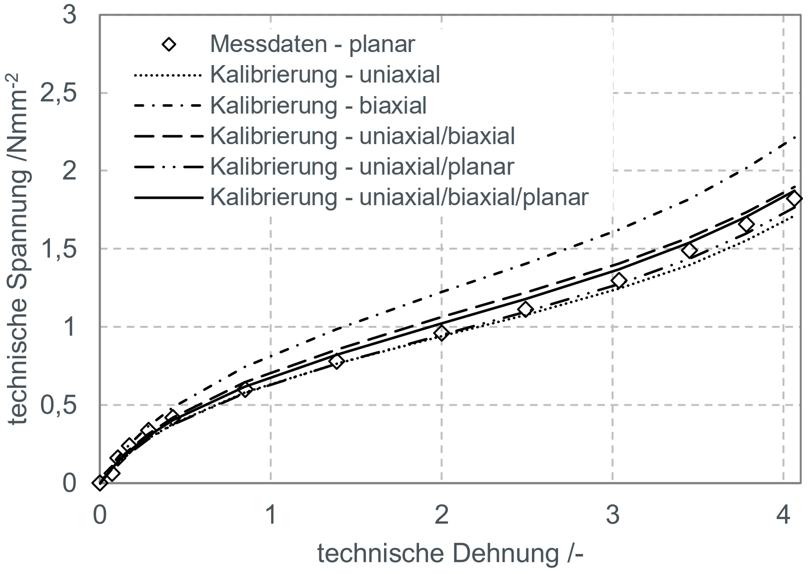
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug

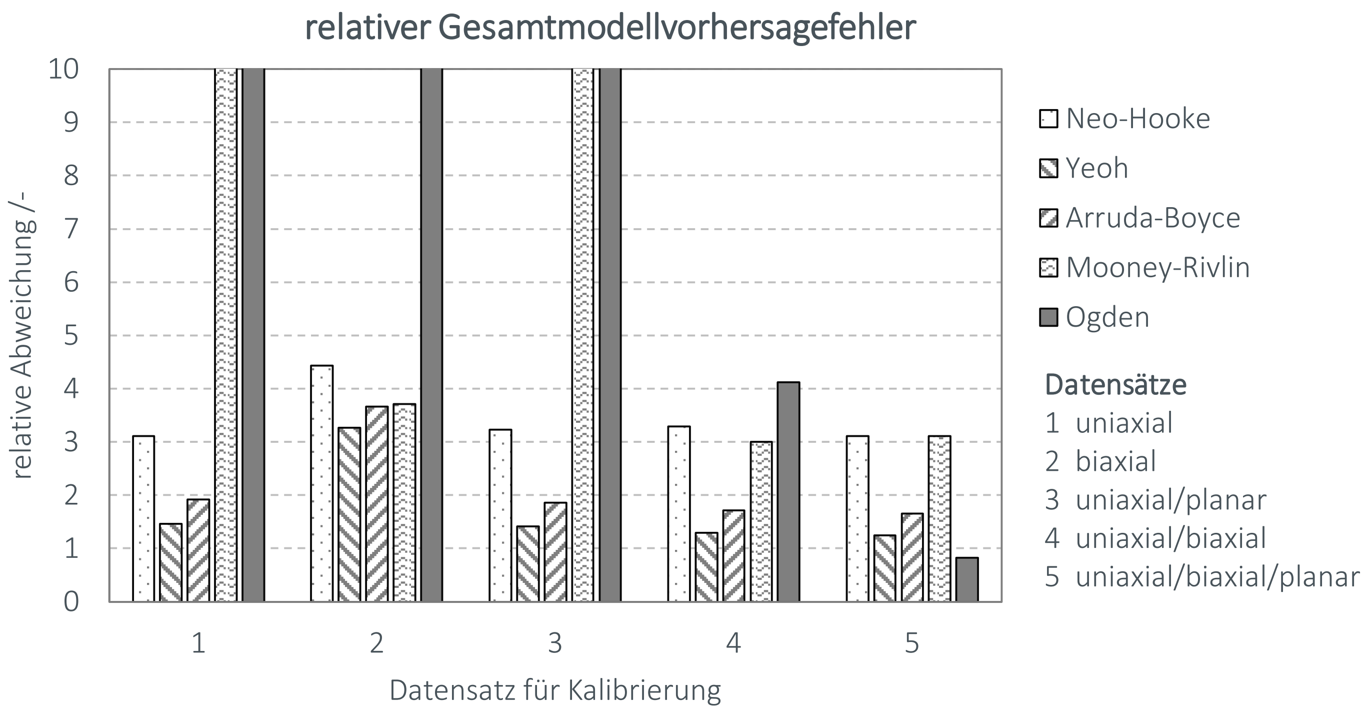


- physikalisch plausible Modellvorhersage auch bei nur einem Messdatensatz
- keine merkliche Verbesserung bei uniaxialer & biaxialer Kalibrierung gegenüber nur uniaxialer Kalibrierung
- bessere Abbildungsgenauigkeit als ARRUDA-BOYCE (mikromechanisch)

Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

Vergleich der Modellvorhersagegüte unterschiedlicher Materialmodelle



Bestätigung der Untersuchungsergebnisse aus Fallstudie I

Fazit aus Modellvergleich

- Kalibrierung von Erste-Invariante-Modelle mit nur einem Messdatensatz liefert materialstabile und physikalisch plausibel Modellvorhersage
- Kalibrierung von Erste-Zweite-Invarianten-Modelle mit nur uniaxialem oder nur biaxialem Messdatensatz oder mit uniaxialen & planaren Messdatensätzen ergibt i. d. R. instabile oder physikalisch unplausibel Modellvorhersage für nicht-kalibrierte Deformationsmoden
- Kalibrierung von Erste-Zweite-Invarianten-Modelle mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdatensätzen liefert eine materialstabile und verlässliche Modellvorhersage
- Kalibrierung von Erste-Invariante-Modelle mit mehr als einem Messdatensatz verbessert die Modellvorhersagegenauigkeit meist unwesentlich
- Mit Erste-Zweite-Invarianten-Modelle ist eine höhere Modellvorhersagegenauigkeit erzielbar als mit vergleichbar komplexen Erste-Invariante-Modellen bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen (& planaren) Messdatensätzen
- Erste-Invariante-Modelle, die mit uniaxialen Messdaten kalibriert wurden, unterschätzen i. d. R. die biaxialen Spannungen

Hyperelastizität in der FEM

Interpolationsansatzbasiertes MARLOW-Modell

Allgemeines Erste-Invariante-Modell

- Für isotrope Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \mathrel{\hat{=}} \Psi(J, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

- FLORY-Ansatz für isotrope, quasi-inkompressible Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \mathrel{\hat{=}} \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}\,(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

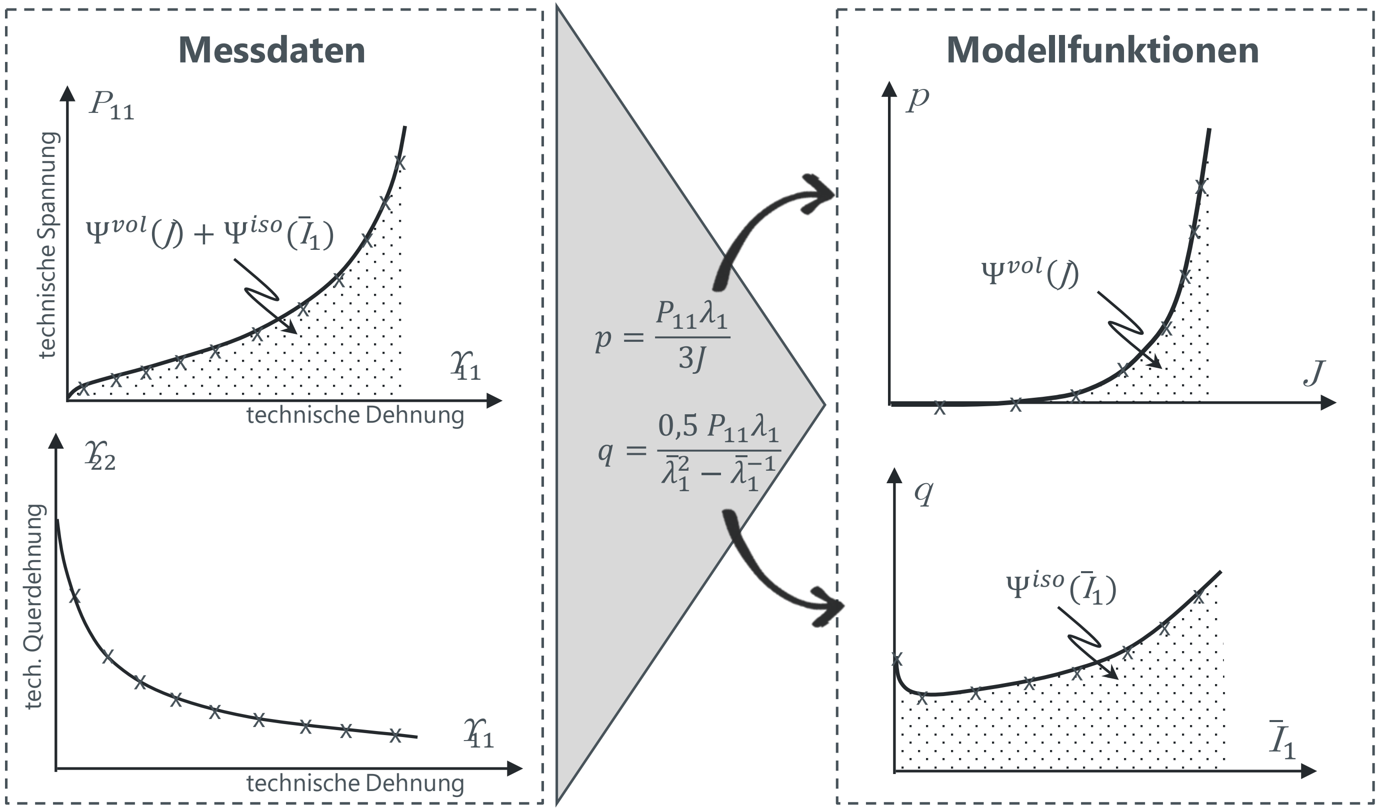
- GREGORY/YEOH-Annahme: Vernachlässigung von $\bar{I}_2$

$$\Psi(\mathbf{E}) \mathrel{\hat{=}} \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}(\bar{I}_1, \cancel{\bar{I}_2})$$

- **MARLOW-Integralansatz** (inkl. Kompressibilität nach HÜTER)

$$\Psi(\mathbf{E}) \mathrel{\hat{=}} \int_1^J p\, dJ + \int_3^{\bar{I}_1} q\, d\bar{I}_1$$

Bestimmung der Modellfunktionen aus uniaxialer Zugkurve (HÜTER2021)



FLORY, PJ128117. Thermodynamic relations for high elastic materials. Transactions of the Faraday Society, 1961, 57. Jg., S. 829-838.
GREGORY, M. J. The stress/strain behaviour of filled rubbers at moderate strains. 1979.
YEOH, Oon H. Some forms of the strain energy function for rubber. Rubber Chemistry and technology, 1993, 66. Jg., Nr. 5, S. 754-771.
MARLOW, Randall S. A general first-invariant hyperelastic constitutive model. Constitutive Models for Rubber, 2003, S. 157-160.
HÜTER, Florian; RIEG, Frank. Extending Marlow's general first-invariant constitutive model to compressible, isotropic hyperelastic materials. Engineering Computations, 2021, 38. Jg., Nr. 6, S. 2631-2647.

Hyperelastizität in der FEM

Interpolationsansatzbasiertes MARLOW-Modell (2)

Allgemeines Erste-Invariante-Modell

- Für isotrope Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi(J, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

- FLORY-Ansatz für isotrope, quasi-inkompressible Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

- GREGORY/YEOH-Annahme: Vernachlässigung von $\bar{I}_2$

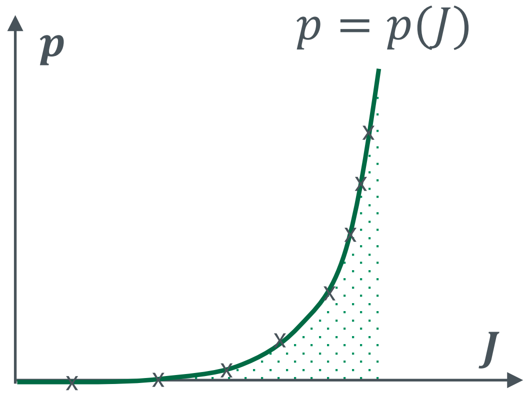
$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}(\bar{I}_1, \cancel{\bar{I}_2})$$

- **MARLOW-Integralansatz** (inkl. Kompressibilität nach HÜTER)

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \int_1^J p\, dJ + \int_3^{\bar{I}_1} q\, d\bar{I}_1$$

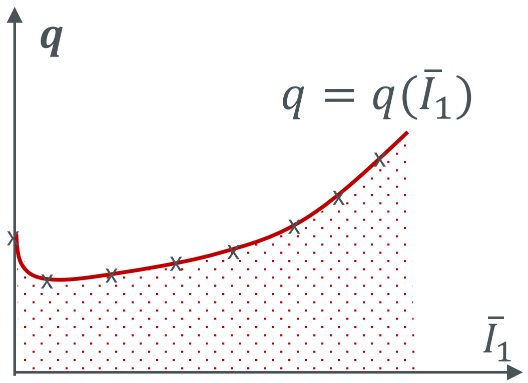
Interpolationsansatz für kontinuierlichen Verlauf zwischen Datenpunkten (HÜTER2021)

Hydrostatischer Druck



$$p = \mathrm{spline}(p^{(i)}, J^{(i)}; J)$$

Halbe Sekantenschubsteifigkeit



$$q = \mathrm{spline}(q^{(i)}, \bar{I}_1^{(i)}; \bar{I}_1)$$

- Kubischer Spline für stetig-differenzierbaren Funktionsverlauf
- Monotone Hermitescher Spline für monotonieerhaltende Interpolation, da natürlicher kubischer Spline zum Überschwingen neigt

HÜTER, Florian; RIEG, Frank. Extending Marlow's general first-invariant constitutive model to compressible, isotropic hyperelastic materials. Engineering Computations, 2021, 38. Jg., Nr. 6, S. 2631-2647.
KNOTT, Gary D. Interpolating cubic splines. Springer Science & Business Media, 1999.
FRITSCH, Frederick N.; CARLSON, Ralph E. Monotone piecewise cubic interpolation. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17. Jg., Nr. 2, S. 238-246.

Hyperelastizität in der FEM

Interpolationsansatzbasiertes MARLOW-HÜTER-Modell

Allgemeines Erste-Zweite-Invarianten-Modell

- Für isotrope Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi(J, \bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

- FLORY-Ansatz für isotrope, quasi-inkompressible Materialien

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}\,(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$$

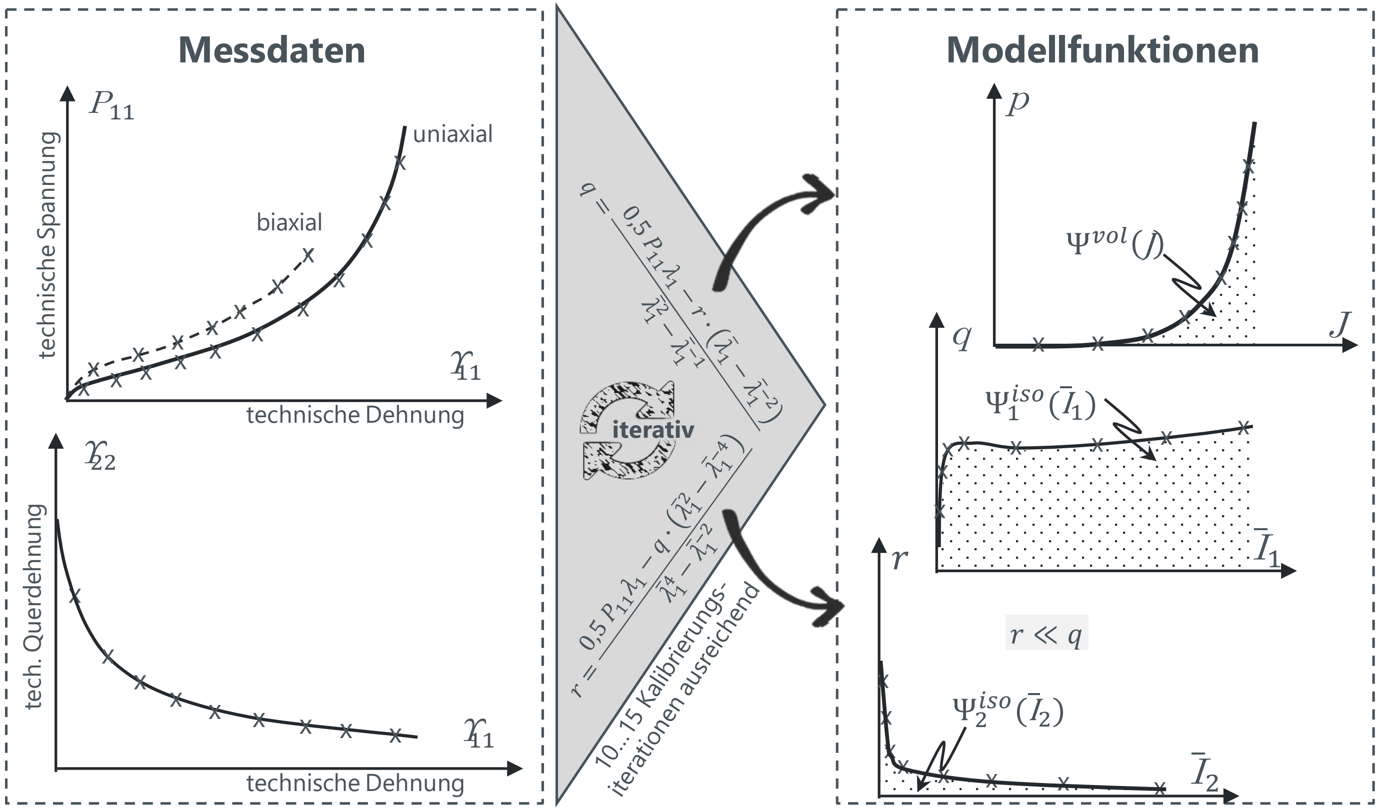
- RIVLIN-SAUNDERS-Ansatz

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \Psi^{vol}(J) + \Psi_1^{iso}(\bar{I}_1) + \Psi_2^{iso}(\bar{I}_2)$$

- **Erweiterter MARLOW-Ansatz nach Hüter**

$$\Psi(\mathbf{E}) \triangleq \int_1^J p\,dJ + \int_3^{\bar{I}_1} q\,d\bar{I}_1 + \int_3^{\bar{I}_2} r\,d\bar{I}_2$$

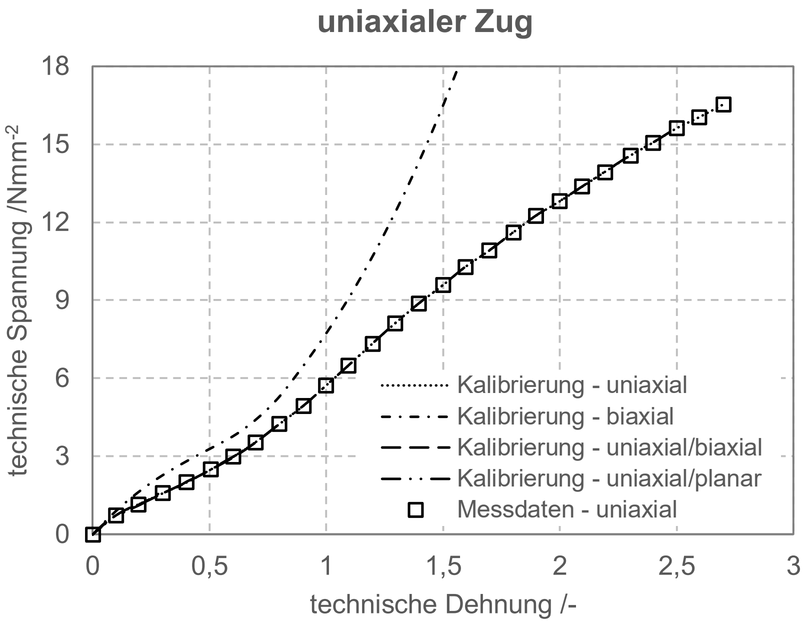
Bestimmung der Modellfunktionen aus uniaxialer & biaxialer Zugkurve

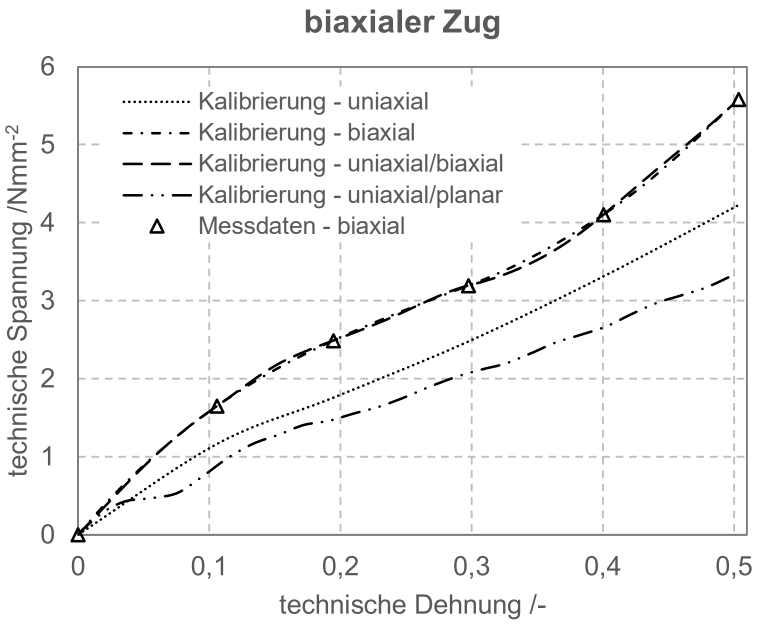


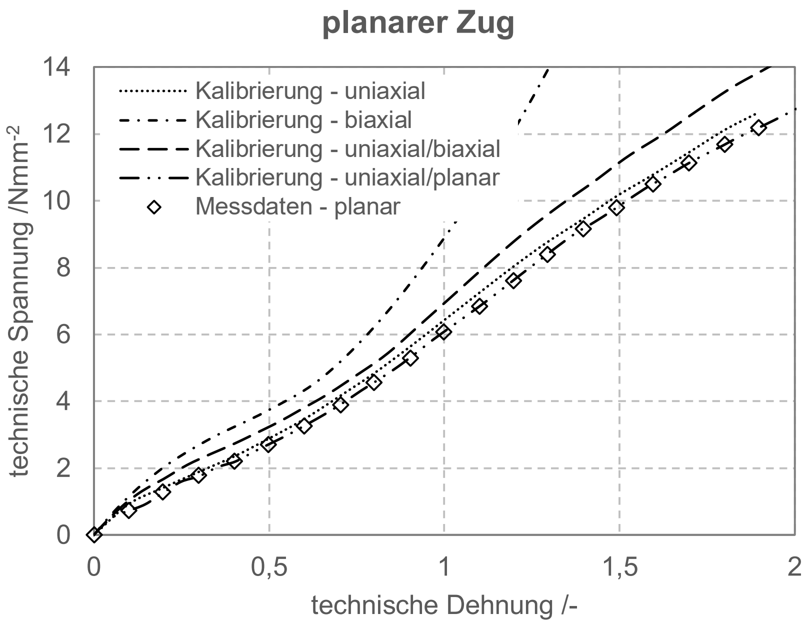
Hyperelastizität in der FEM

Fallstudie I: Bewertung der Modellvorhersage für NBR 70 Shore A

MARLOW (inkl. Erweiterung nach HÜTER), phänomenologisch $\Psi^{vol}(J) + \Psi_1^{iso}(\bar{I}_1) + \{\Psi_2^{iso}(\bar{I}_2)\}$







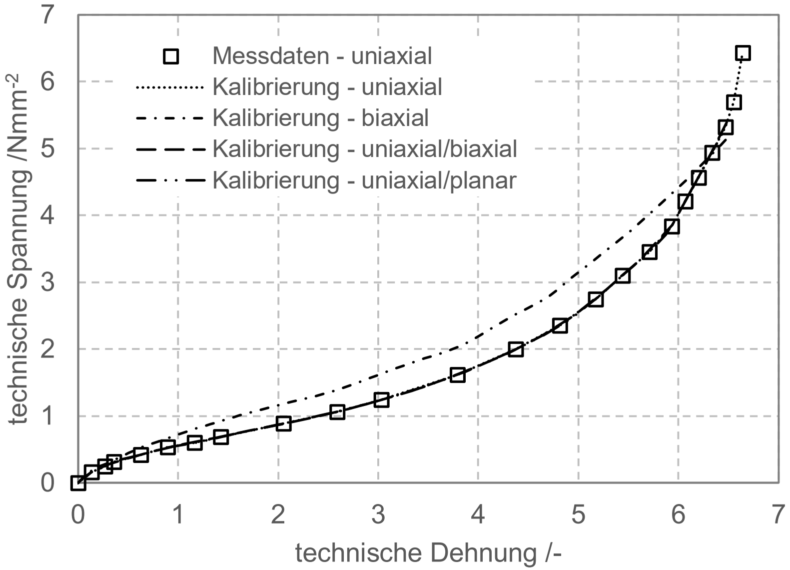
- exakte Reproduktion der zur Kalibrierung verwendeten Messdaten
- Modellvorhersagen für nicht kalibrierte Deformationsmoden vergleichbar zu YEOH bei Kalibrierung mit nur einem Messdatensatz und vergleichbar zu OGDEN bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen Messdaten
- geringster Gesamtmodellbildungsfehler bei uniaxialer & biaxialer Kalibrierung
- Kalibrierung mit uniaxialen (& planaren) Messdaten führt zur Unterschätzung der biaxialen Spannung, Kalibrierung mit biaxialen Messdaten führt zur Überschätzung der uniaxialen und planaren Spannung
- Modellvorhersage in allen Fällen stets materialstabil

Hyperelastizität in der FEM

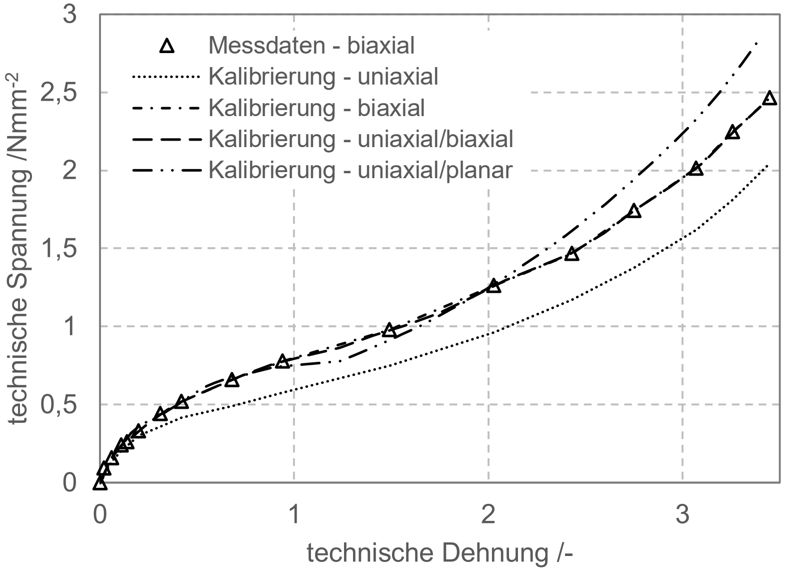
Fallstudie II: Bewertung der Modellvorhersage für TRELOAR-Daten

MARLOW (inkl. Erweiterung nach HÜTER), phänomenologisch $\Psi^{vol}(J) + \Psi_1^{iso}(\bar{I}_1) + \{\Psi_2^{iso}(\bar{I}_2)\}$

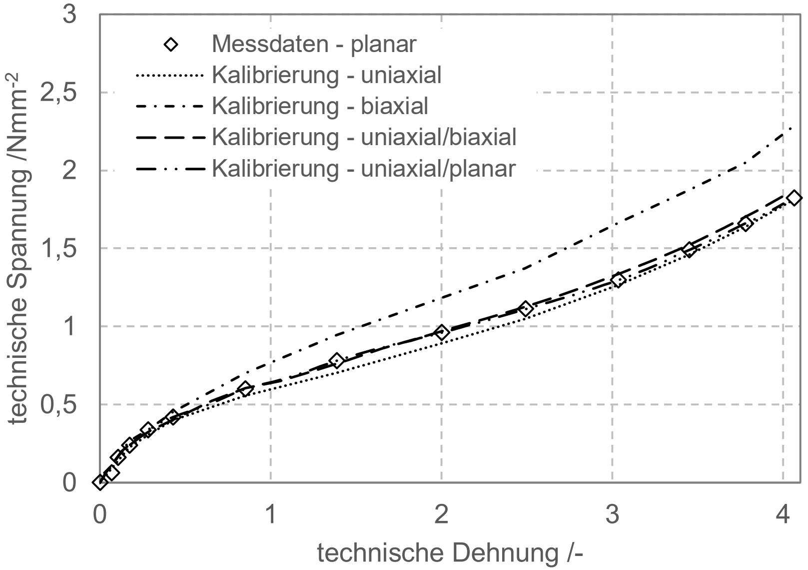
uniaxialer Zug



biaxialer Zug



planarer Zug

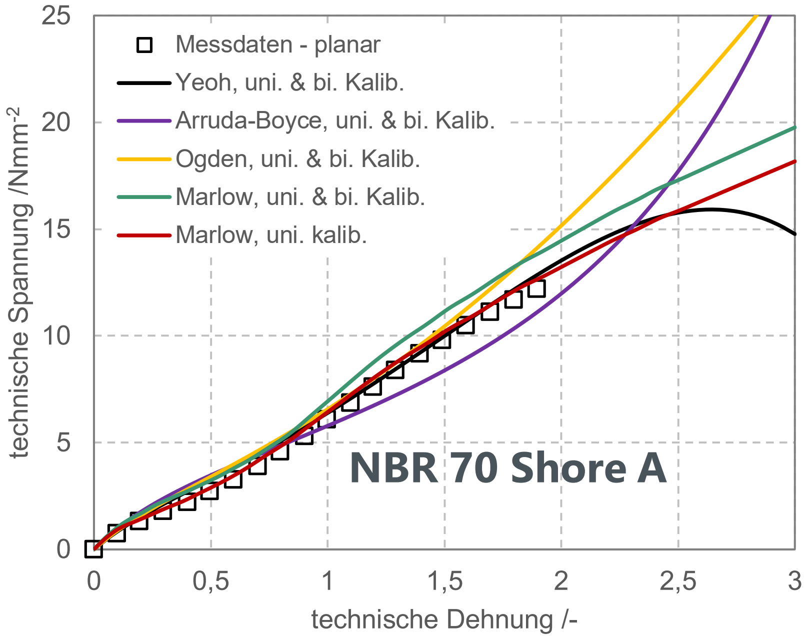


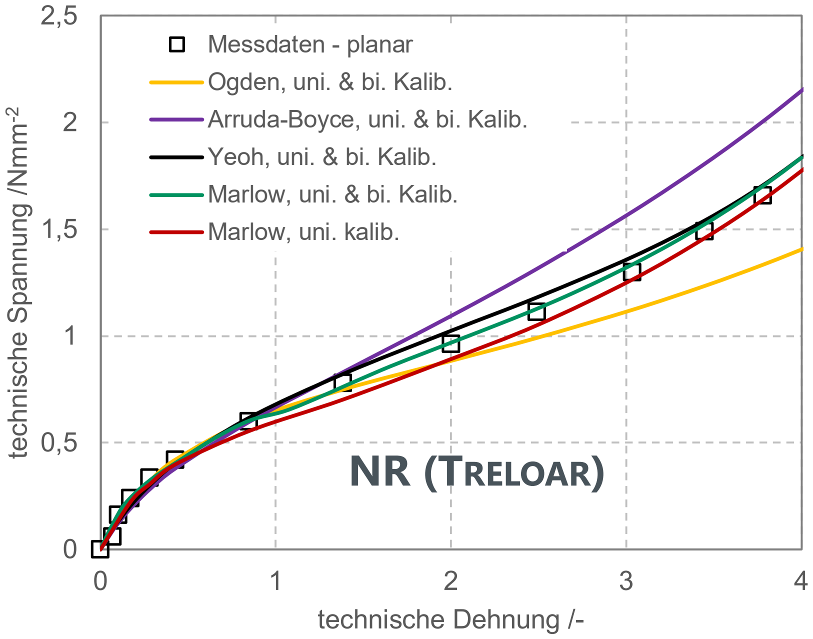
- exakte Reproduktion der zur Kalibrierung verwendeten Messdaten
- Modellvorhersagen für nicht kalibrierte Deformationsmoden vergleichbar zu YEOH bei Kalibrierung mit nur einem Messdatensatz und vergleichbar zu OGDEN bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen Messdaten
- geringster Gesamtmodellbildungsfehler bei uniaxialer & biaxialer Kalibrierung
- Kalibrierung mit uniaxialen (& planaren) Messdaten führt zur Unterschätzung der biaxialen Spannung, Kalibrierung mit biaxialen Messdaten führt zur Überschätzung der uniaxialen und planaren Spannung
- Modellvorhersage in allen Fällen stets materialstabil

Hyperelastizität in der FEM

Bewertung der Modellvorhersage

Modellvorhersage inkl. Extrapolation für planarer Zug bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen Messdaten





Fazit

- Materialstabilität der Extrapolation bei MARLOW garantiert durch speziellen Extrapolationsansatz
- **NBR**: Beste Modellvorhersagegenauigkeit für planaren Zug bei MARLOW mit uniaxialer Kalibrierung, obwohl MARLOW mit uniaxialer & biaxialer Kalibrierung die beste Gesamt-vorhersagegenauigkeit hat
- **NR**: Beste Modellvorhersagegenauigkeit von MARLOW für planaren Zug bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen Messdaten
  → keine Pauschalaussage über Modellvorhersagegenauigkeit für nicht kalibrierte Deformationsmoden möglich
  → MARLOW-Modell aber physikalisch plausibel und vergleichbar genau wie OGDEN

Hyperelastizität in der FEM

Zusammenfassung & Hinweise zur Materialmodellkalibrierung

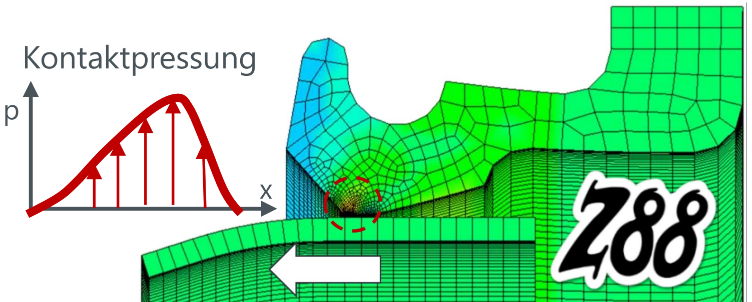
Kalibrierungshinweise

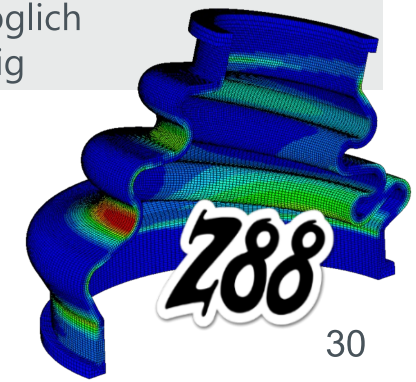
Wahl der Messdaten

- möglichst viele unterschiedliche Belastungsfälle
- am besten Messdaten zum dominierenden Spannungszustand, wenn Bauteilsteifigkeit möglichst gut getroffen werden soll
- am besten Messdaten zum kritischen Spannungszustand bei Lebensdauerbewertung
- Messbereich möglichst so groß wählen, sodass keine Extrapolation erforderlich ist
- Materialstabilität bei Kalibrierung mit uniaxialen und biaxialen Messdatensätzen stets gegeben; Kalibrierung mit uniaxialen und planaren Messdatensätzen teilweise instabil bei Erste-Zweite-Invarianten-Modelle
- Meist kein nennenswerter Unterschied in der Modellvorhersagegenauigkeit bei Kalibrierung mit uniaxialen & biaxialen Messdaten bzw. mit uniaxialen & biaxialen & planaren Messdaten

Wahl des Materialmodells

- wenn nur ein Messdatensatz vorhanden, dann Erste-Invarianten-Modelle verwenden
  → MARLOW am genauesten und stets stabil
- mikromechanische Modellansätze sind keine Garantie für gute Abbildungsgenauigkeit, aber zumindest stabil
  → Materialinstabilität bei phänomenologischen Modellen häufig
- Wenn uniaxiale, biaxiale (und ggf. planare) Messdatensätze vorhanden, dann Erste-Zweite-Invarianten-Modelle oder Hauptstreckungsmodelle verwenden
  → OGDEN (N=3) am besten mit 3 Datensätzen kalibrieren
  → MARLOW am genauesten und stets stabil
- keine Pausschalaussage über die Modellvorhersagegenauigkeit für nicht kalibrierte Belastungsmoden möglich
  → werkstoffabhängig und modellabhängig





Florian Hüter, 2023