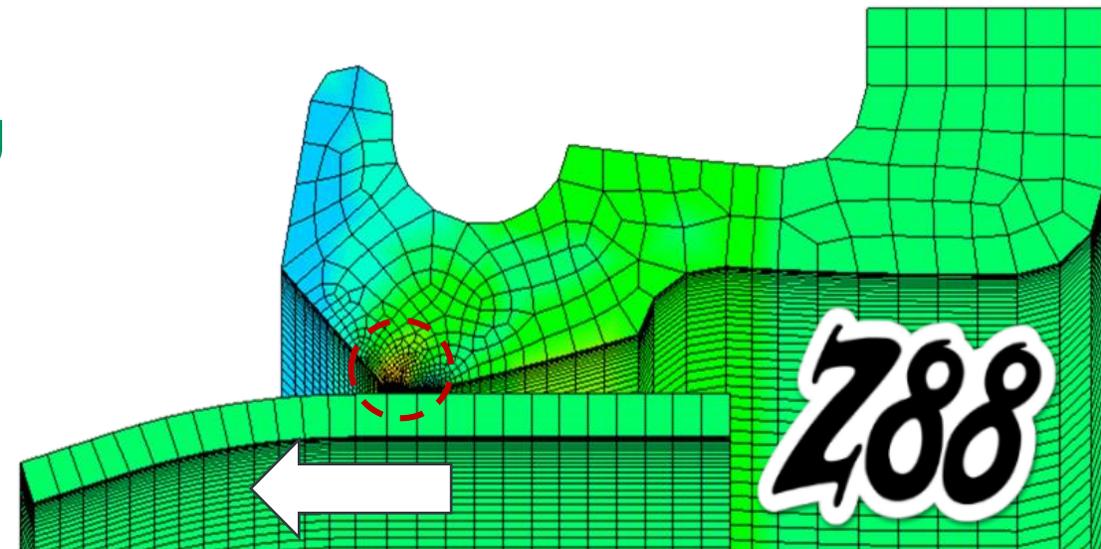


# Simulation hyperelastischer Materialien mit Z88 – Kalibrierung hyperelastischer Materialmodelle

Florian Hüter, Daniel Singer

**23. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag**

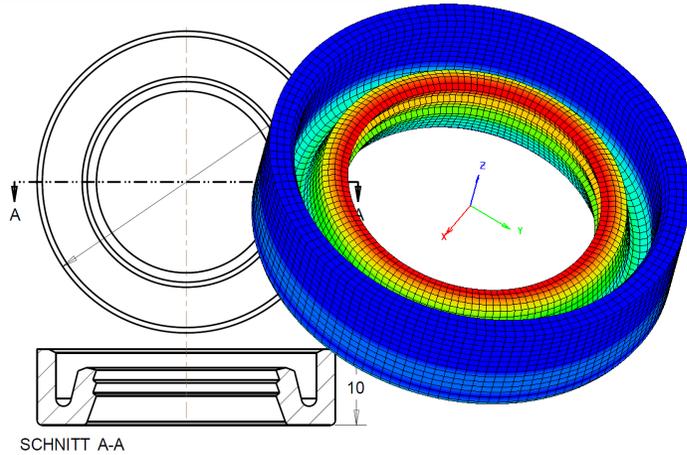
Bayreuth, 14.09.2022



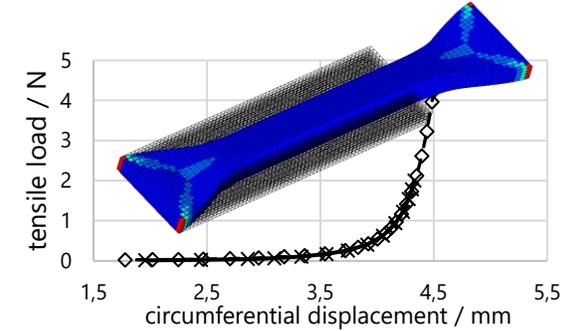
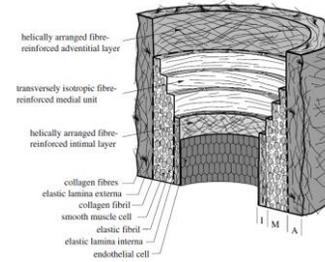
# Simulation hyperelastischer Materialien

## Anwendungsbeispiele

### Wellendichtung



### Soft Tissues

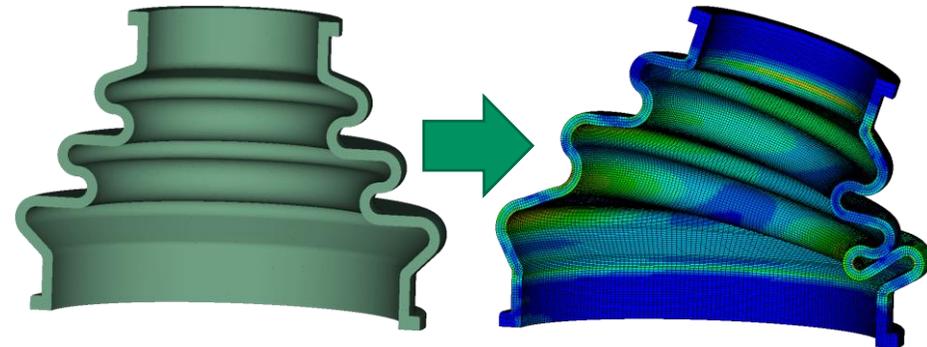


### Schaummaterialien



**Z88**

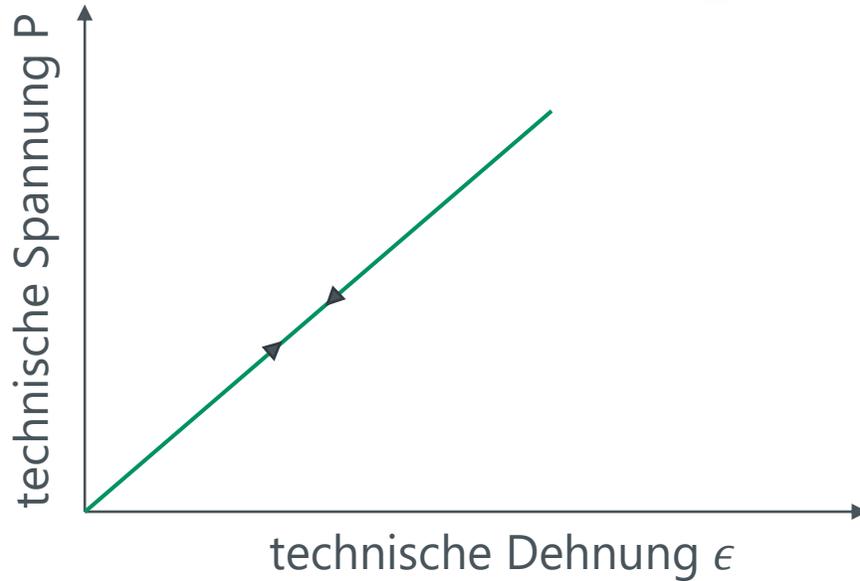
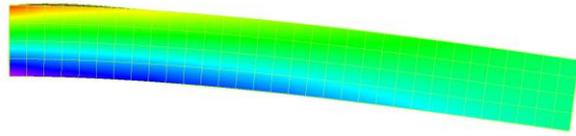
### Faltenbalg-Dichtung



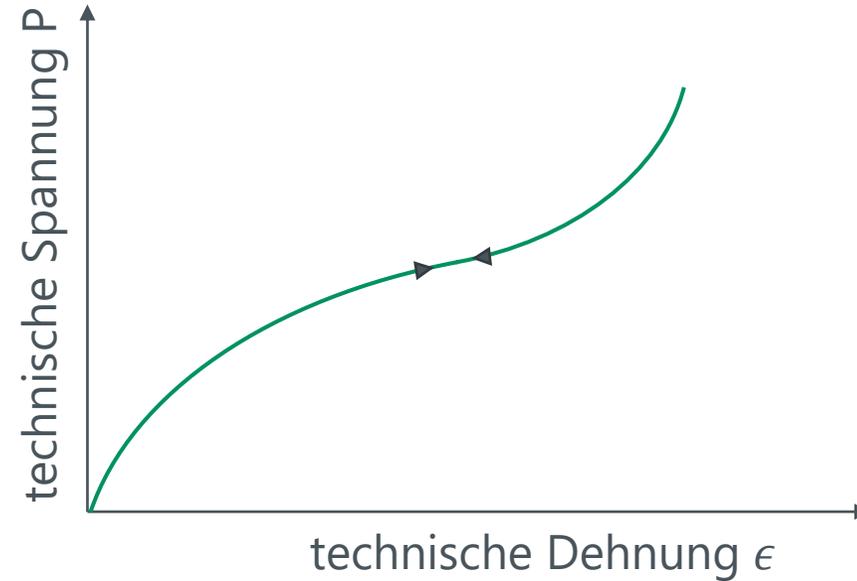
# Hyperelastisches Materialverhalten

## Elastisches Materialverhalten

### Linear-elastisches Materialverhalten



### Nichtlinear-elastisches Materialverhalten

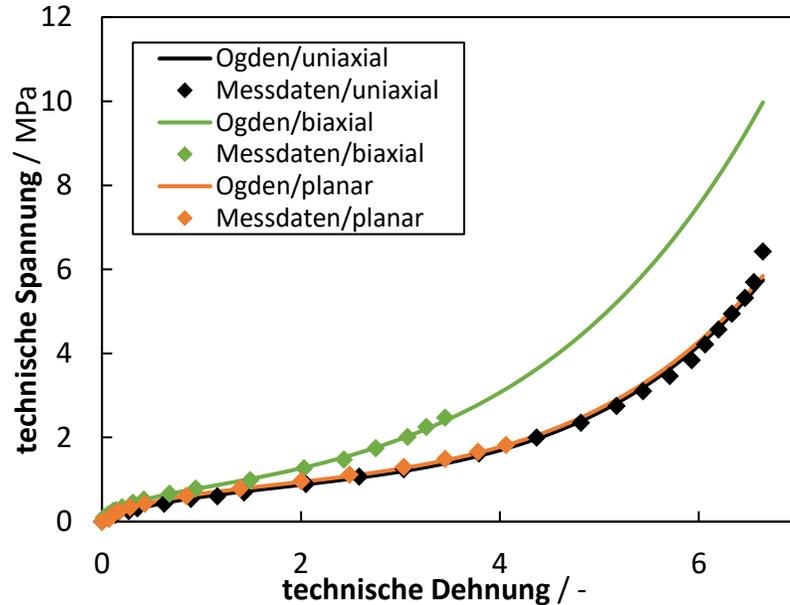


Reddy, J. N.: An introduction to continuum mechanics: With applications. Cambridge University Press. New York: 2008.



### Hyperelastisches Materialverhalten

#### ■ vulkanisierter Kautschuk (Treloar)



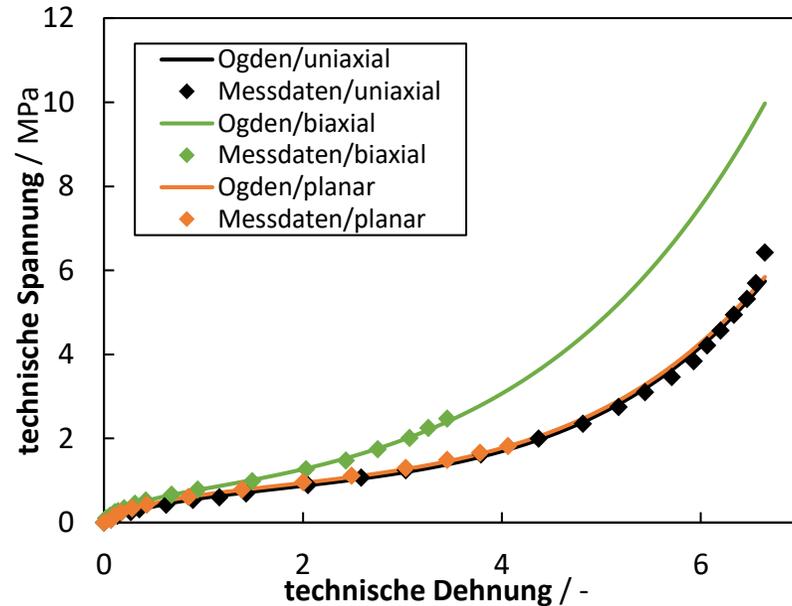
#### ■ Charakteristische Merkmale

- nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Kurve
- große Verformungen typisch
- rein-elastisches Materialverhalten
  - reversible Verformung
  - eindeutige Spannungs-Dehnungs-Relation  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$
- idealisiert: konservativ/energieerhaltend
- isotrop oder anisotrop (faserverstärkt)
- (quasi-)inkompressibel bis stark kompressibel

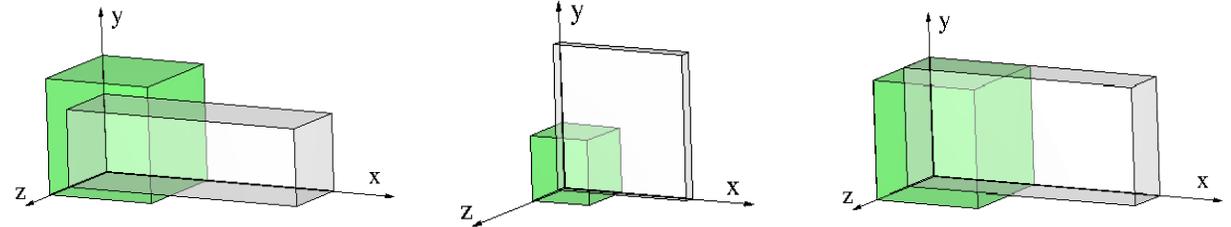


### Typische Materialprüfversuche

#### Spannungs-Dehnungs-Verhalten



- Das nichtlinear-elastische Materialverhalten ist von der Belastungsmode abhängig
- Charakterisierung des Verhaltens für unterschiedliche Belastungszustände
- Typische Prüfversuche:
  - Uniaxialer Zugversuch
  - Äquibiaxialer Zugversuch
  - Planarer Zugversuch (engl. pure shear)



### Hyperelastizität

- Verzerrungsenergiedichte

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad \mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}}$$

- Polynomansätze:

$$\Psi = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \cdot (\bar{I}_1 - 3)^i \cdot (\bar{I}_2 - 3)^j + \frac{K}{2} \cdot (J - 1)^2$$

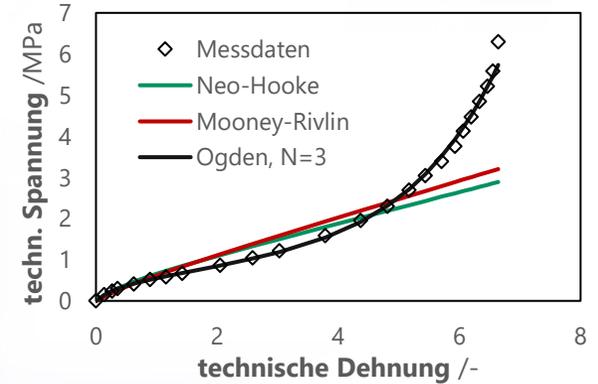
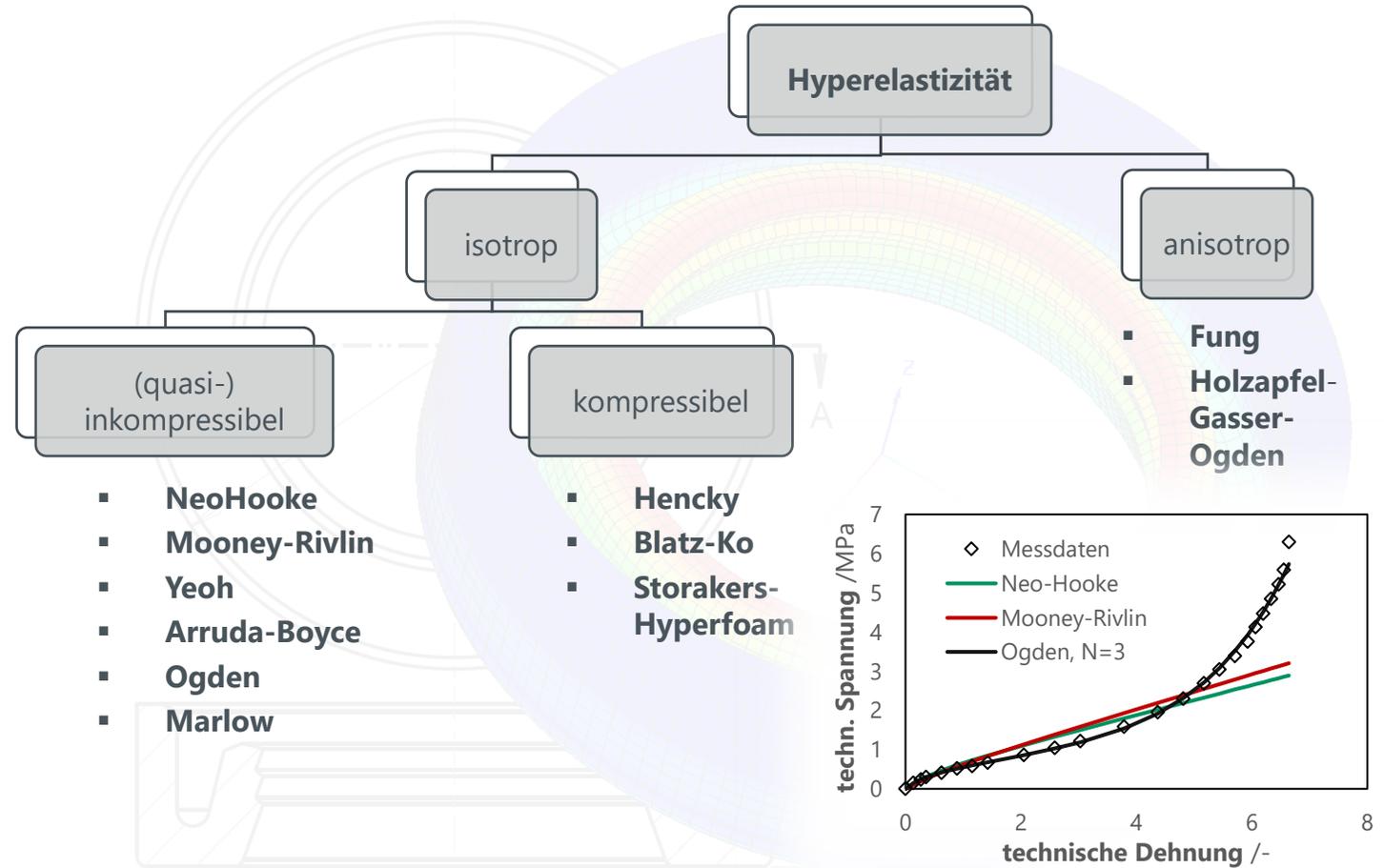
- **Mooney-Rivlin**, Ordnung  $N = 1$
- **NeoHooke**, Ordnung  $N = 1, j = 0$

- Potenzansätze:

- **Ogden**, Ordnung  $N = 1 \dots 6$ ,

- Spline-Interpolation:

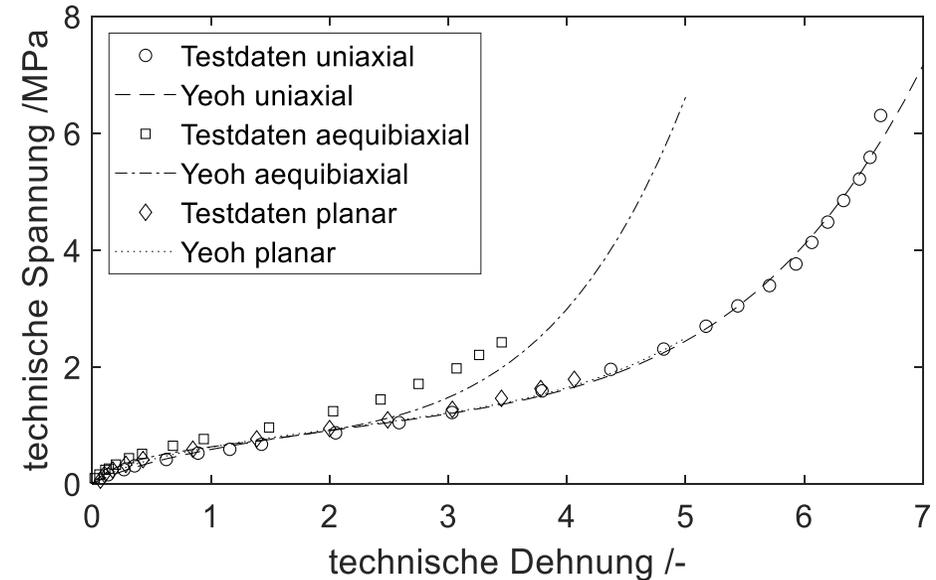
- **Marlow-Modell**



### Curve Fitting

- Die Modellparameter haben nur bei einfachen Modellen eine physikalische Bedeutung und lassen sich direkt messen
- Meist werden die Modellparameter numerisch durch Curve Fitting ermittelt:
  - Lineare Ausgleichsrechnung (Invarianten-basierte Modelle)
  - Nichtlineare Ausgleichsrechnung (Ogden), z. B. Levenberg-Marquardt-Algorithmus.
- Ansatz: Minimierung des Fehlerquadrats

$$F = \sum_{i=1}^M \{\sigma_i^{Mess} - \sigma_i^{Modell}(\varepsilon_i^{Mess})\}^2 \rightarrow \min$$



### Yeoh

$$\psi = C_{10}(I_1 - 3) + C_{20}(I_2 - 3)^2 + C_{30}(I_3 - 3)^3$$

→  $C_{10} = 0.18346, C_{20} = -1.38796 \cdot 10^{-3}, C_{30} = 3.80829 \cdot 10^{-5}$

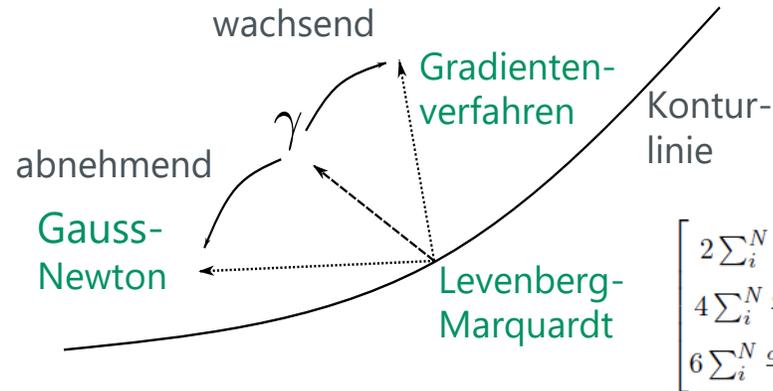


### Lineare Ausgleichsrechnung

- $\frac{\partial P}{\partial C_{ij}} \neq f(C_{ij})$
- $E = \sum_i^N \left[ 1 - \frac{P(C_{ij}, \lambda_i)}{P_i} \right]^2 \rightarrow \min.$
- Führt auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems

### Nichtlineare Ausgleichsrechnung

- $\frac{\partial P}{\partial C_{ij}} = f(C_{ij})$
- Levenberg-Marquardt-Algorithmus: Inkrement  $\Delta \vec{a} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^T \vec{E}$
- Dämpfungsparameter  $\gamma$ : Kombination der Vorteile von Gauss-Newton und Gradientenverfahren in Abhängigkeit der Entfernung von der Lösung



$$\begin{bmatrix} 2 \sum_i^N \frac{\alpha^2}{P_i^2} & 4 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta}{P_i^2} & 6 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^2}{P_i^2} \\ 4 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta}{P_i^2} & 8 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^2}{P_i^2} & 12 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^3}{P_i^2} \\ 6 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^2}{P_i^2} & 12 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^3}{P_i^2} & 18 \sum_i^N \frac{\alpha^2 \beta^4}{P_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^N \frac{\alpha}{P_i} \\ 2 \sum_i^N \frac{\alpha \beta}{P_i} \\ 3 \sum_i^N \frac{\alpha \beta^2}{P_i} \end{bmatrix}$$



Materialprüf-  
versuche



Softwaremodul

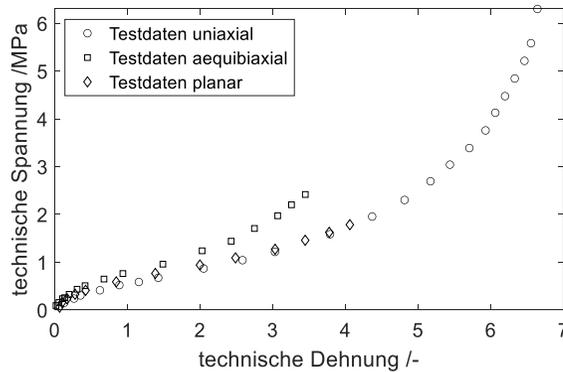
Kalibrierung der  
Materialmodelle



Evaluierung

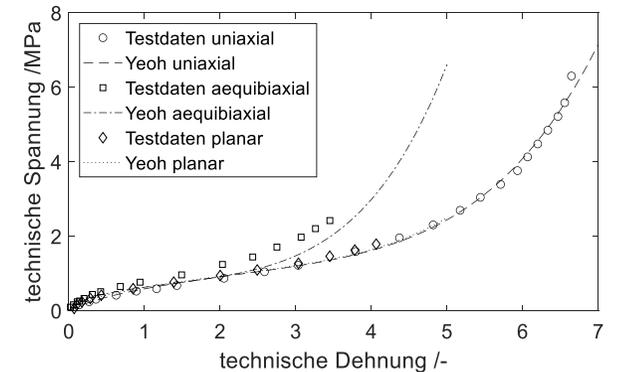


Beschreibung von  
nichtlinearen  
Spannungs-Dehnungs-  
Relationen



Anforderungen:

- Modularer Aufbau, einfach erweiterbar
- Steuerbar mittels grafischer Benutzeroberfläche
- Evaluierung der Abbildungsgenauigkeit
- Visualisierung durch Plots



# Simulation hyperelastischer Materialien

## Kalibrierungstool: Ablauf und Funktionsweise

Einstellungen in der grafischen Oberfläche

Übergabe der Steuerparameter:

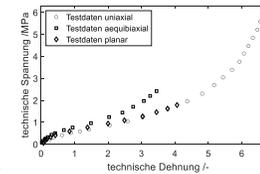
- Materialmodell(e)
- Modellspezifische Parameter



Daten: uniaxial, äquibiaxial, eben  
Yeoh-Modell

Einlesen Testdaten

Übergabe der Testdaten



Kalibrierung

Aufrufen der jeweiligen Rechenroutinen

$$\begin{bmatrix} 2 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2}{P_i^2} & 4 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i}{P_i^2} & 6 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^2}{P_i^2} \\ 4 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i}{P_i^2} & 8 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^2}{P_i^2} & 12 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^3}{P_i^2} \\ 6 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^2}{P_i^2} & 12 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^3}{P_i^2} & 18 \sum_i^N \frac{\alpha_i^2 \beta_i^4}{P_i^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^N \frac{\alpha_i}{P_i} \\ 2 \sum_i^N \frac{\alpha_i \beta_i}{P_i} \\ 3 \sum_i^N \frac{\alpha_i \beta_i^2}{P_i} \end{bmatrix}$$

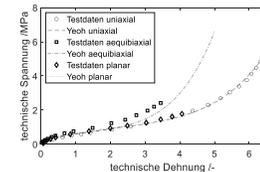
Ausgaben

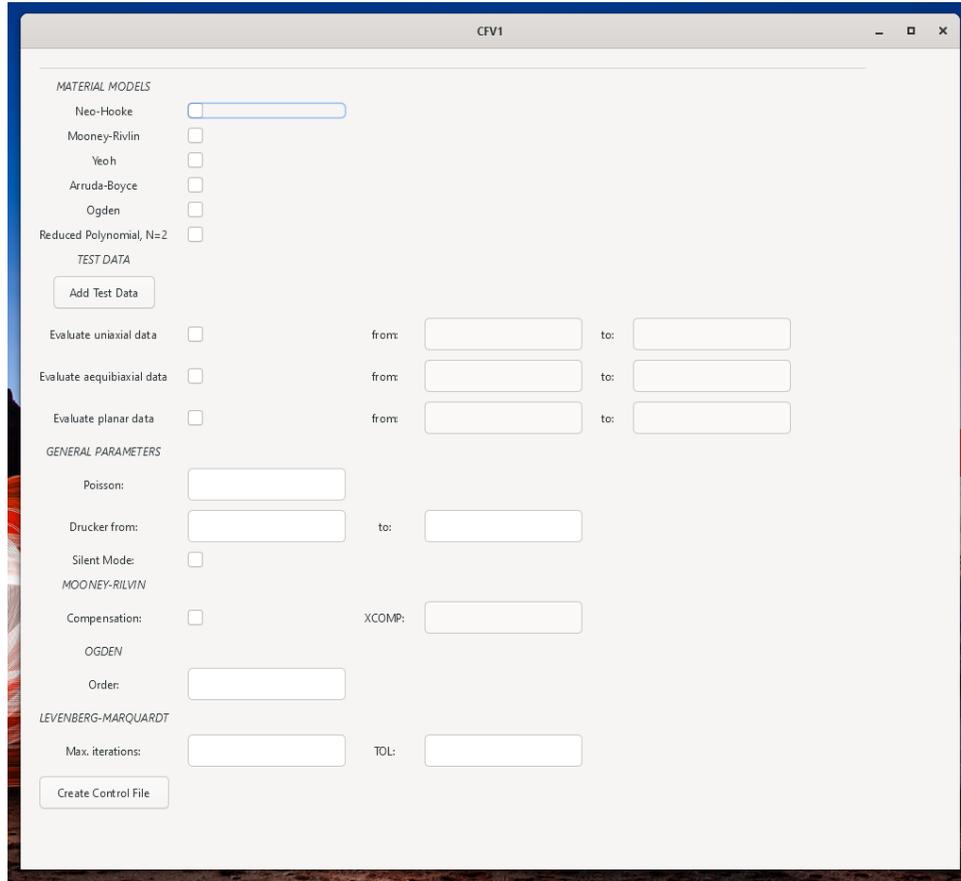
Schreiben der Ergebnisse in getrennte Ausgabedateien

$$\begin{aligned} C_{10} &= 0.18346 \\ C_{20} &= -1.38796 \cdot 10^{-3} \\ C_{30} &= 3.80829 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Plotting

Grafische Darstellung der Modellvorhersage mittels gnuplot





- Einfaches Anwählen der gewünschten Materialmodelle

### Vollständiger Polynomansatz

- Mooney-Rivlin, N=2

### Reduzierter Polynomansatz

- Neo-Hooke, N=1
- N=2
- Yeoh, N=3

### Materialistische Ansätze

- Arruda-Boyce
- Ogden, N=1...6

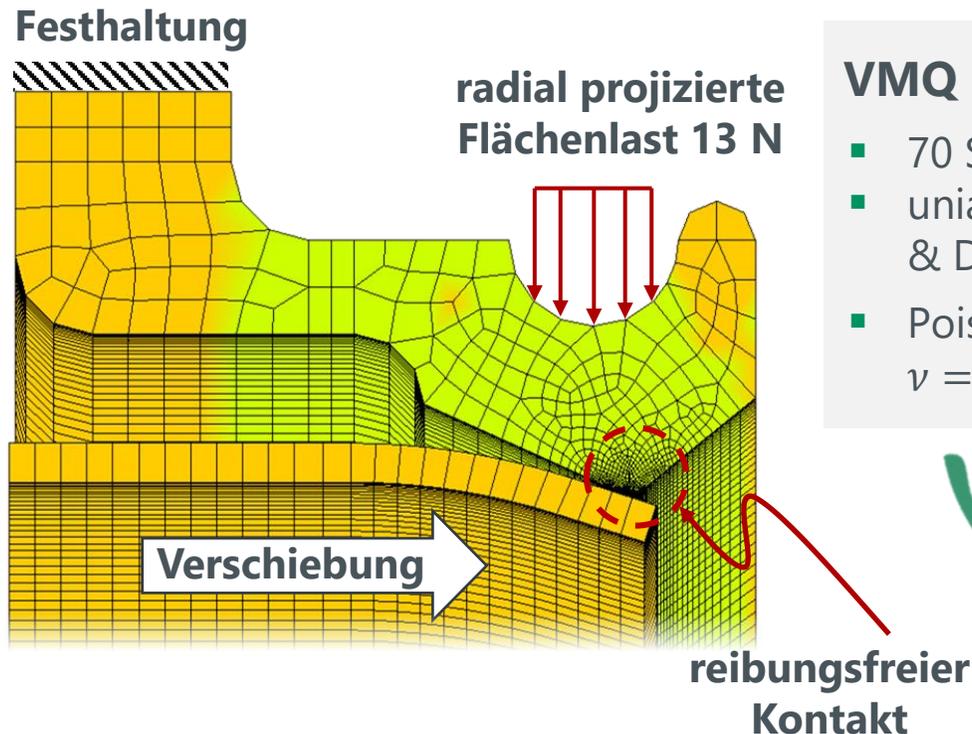
- Eingabe der Spannungs-Dehnungs-Testdaten
- Steuerung der Rechnung und Verfeinerung der Ergebnisse möglich
- Ergebnisplots und Anzeige der relativen Abbildungsgenauigkeit



# Simulation hyperelastischer Materialien

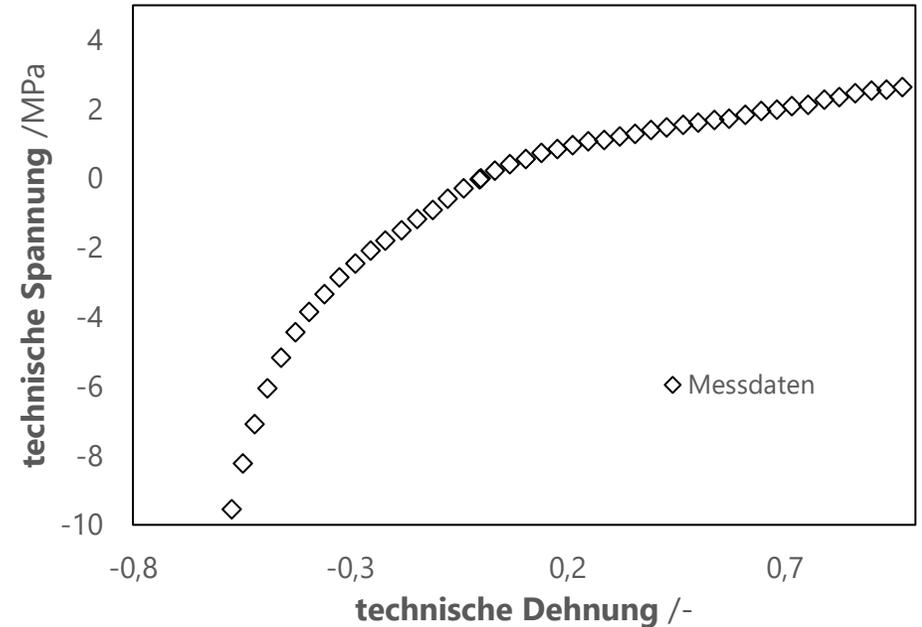
Anwendungsbeispiel: Montage eines Radialwellendichtrings

## Radialwellendichtring



### VMQ Elastomer

- 70 Shore A
- uniaxialer Zug- & Druckdaten
- Poisson-Zahl:  
 $\nu = 0,48 \dots 0,495$



- Modellkalibrierung
- Simulation mit Z88

**Z88**

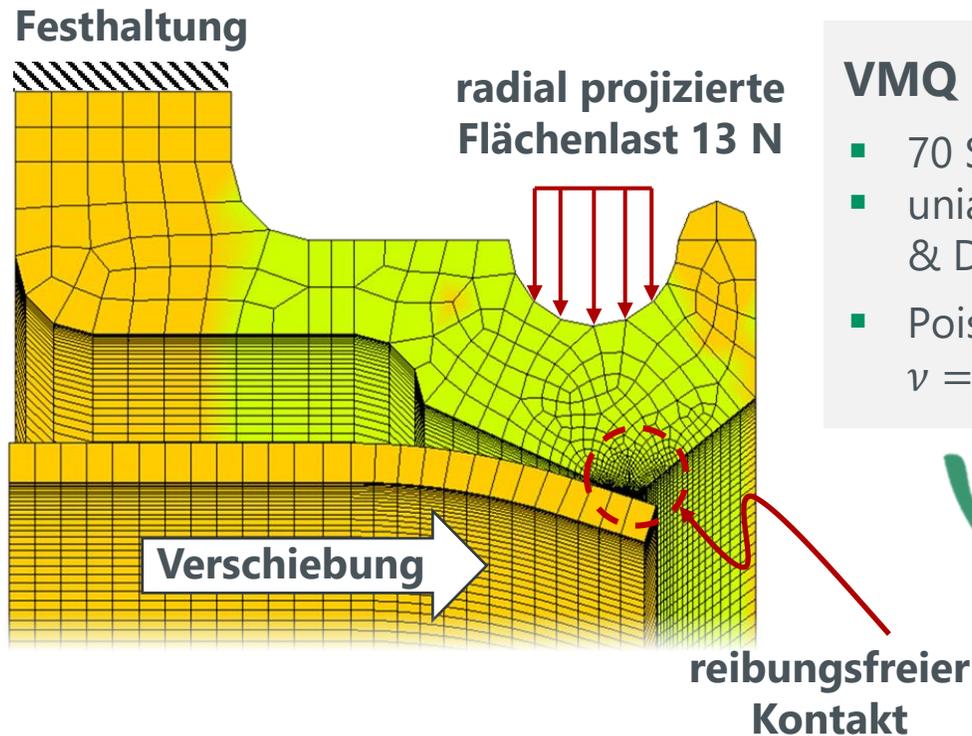
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-16621-1>,  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.09.002>,  
[https://www.nafems.org/publications/resource\\_center/nwc21-219-b/](https://www.nafems.org/publications/resource_center/nwc21-219-b/)



# Simulation hyperelastischer Materialien

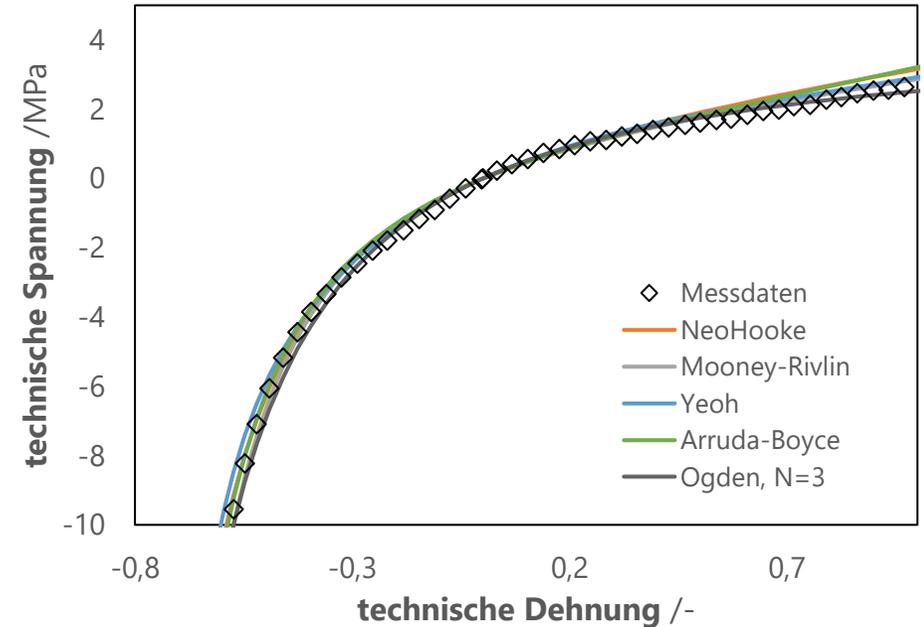
Anwendungsbeispiel: Montage eines Radialwellendichtrings

## Radialwellendichtring



### VMQ Elastomer

- 70 Shore A
- uniaxialer Zug- & Druckdaten
- Poisson-Zahl:  
 $\nu = 0,48 \dots 0,495$



- Modellkalibrierung
- Simulation mit Z88

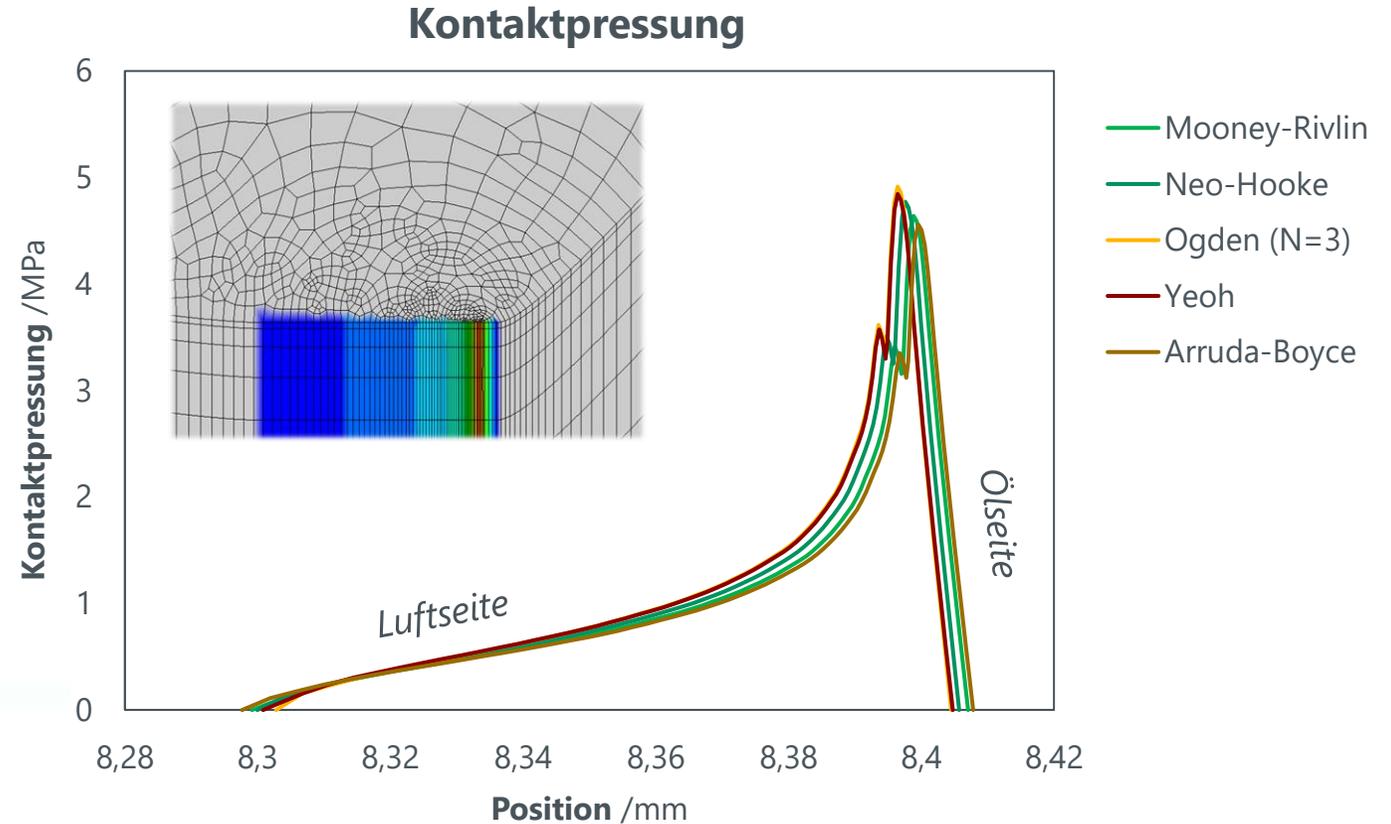
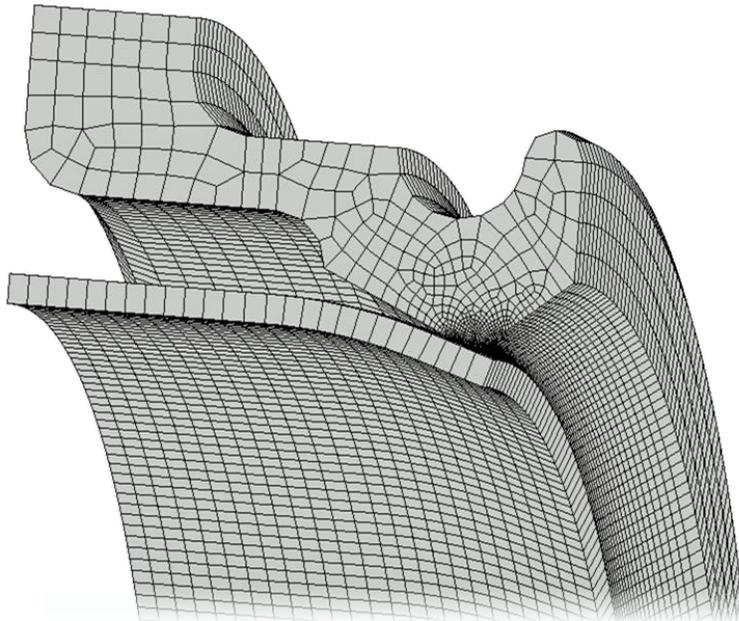
**Z88**

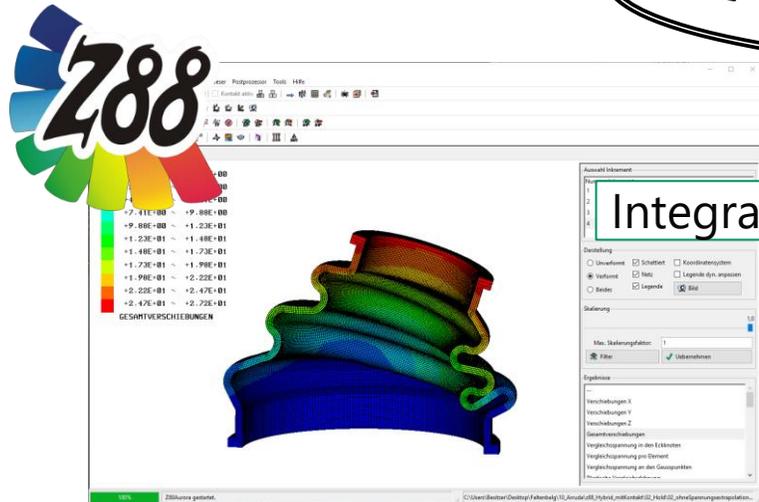


# Simulation hyperelastischer Materialien

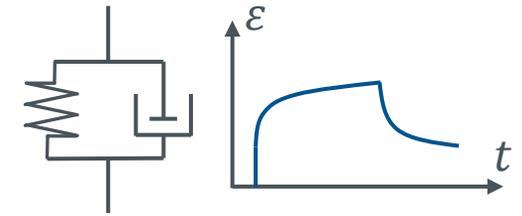
Anwendungsbeispiel: Montage eines Radialwellendichtrings

## Simulation Montagevorgang





Erweiterung um viskoelastisches Verhalten



Integration in Z88Arurora

Erweiterung um weitere Materialmodelle (Gent, Van-Der-Waals etc.)



