

Tests auf Exogenität im funktionalen linearen Regressionsmodell unter schwacher Stationarität

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

Manuela Dorn

aus Hof

1. Gutachter: Prof. Dr. Melanie Birke
2. Gutachter: Prof. Dr. Carsten Jentsch

Tag der Einreichung: 10.09.2020

Tag des Kolloquiums: 19.03.2021

THE PEOPLE YOU LOVE
BECOME GHOSTS INSIDE
OF YOU AND LIKE THIS
YOU KEEP THEM ALIVE

Robert Montgomery

für

Lorenz

Thea

Gretl

Peter

Danksagung

Das Thema dieser Arbeit, das mich bis zum letzten Pinselstrich motiviert und meinen Kampfgeist herausgefordert hat, wurde mir von Prof. Dr. Melanie Birke vorgeschlagen. Ich danke ihr herzlich für diese spannende Aufgabe und die Betreuung meiner Dissertation, die stets geprägt war von einem guten Miteinander und einem freundlichen Lachen. Sehr gewinnbringend für mich persönlich wie auch für den Fortschritt meiner Arbeit war die Zeit an der Universität Mannheim. Dafür, dass er dies ermöglicht hat, sowie für die fachlichen Diskussionen, insbesondere zum Bootstrap, die hilfreiche Anknüpfungspunkte und Denkanstöße hervorbrachten, danke ich Prof. Dr. Carsten Jentsch. Meine Freude an der Präzision und dem Ausbuchstabieren mathematischer Zusammenhänge entstammen maßgeblich den Vorlesungen von Prof. Dr. Helmut Rieder, der mein Interesse an Statistik während des Studiums gefördert hat und von dem ich sehr viel gelernt habe.

Meinen Kollegen Katharina Strohriegel und Florian Dumpert danke ich für viele gute Gespräche, Hörnchen und Kuchen und nicht zuletzt für ihre Freundschaft. Ebenfalls großer Dank gebührt Elvira Rettner, die gute Seele nebenan, Quelle für Kraft und Kaffee.

Eine schwere Zeit begann für mich, als ich vor Abschluss der Dissertation meinen Wunsch, in der Automobilbranche zu arbeiten, realisiert habe. Ich danke meinen Vorgesetzten Michael Betz und Jörg Klug für die flexiblen Arbeitszeiten und die Zurverfügungstellung des Hochleistungsrechners für meine Simulationen. Auch meinem Kollegen Alexander Vibe danke ich herzlich für die motivierenden Diskussionen zu numerischen Themen.

Meinen Freunden Matthias Rodler und Julia Rietsch gebührt besonderer Dank. Danke, Matthias, dass du immer für mich da bist. Danke für das Lösen sämtlicher technischer Probleme, ad hoc! Danke, liebes Julchen, unter anderem für deinen unerschütterlichen Glauben an mich, für deine Gastfreundschaft und deine Spontanität.

Für seine mentale Unterstützung und seine Geduld danke ich meinem Freund Mario Kuhnt, der alle Phasen dieser Arbeit, alle Höhen und Tiefen, mit mir zusammen durchlebt hat. Nicht in Worte zu fassen ist meine Dankbarkeit gegenüber meinen Eltern, Karlheinz und Gabi Dorn. Danke für eure Liebe, Mama und Papa! Danke für eure Unterstützung! Danke, dass ihr mich stets zu Leistung motiviert habt und mich auf meinem Weg begleitet.

Manuela

Gaimersheim, 05.05.2021

Zusammenfassung

Eine bekannte Fragestellung für das funktionale lineare Regressionsmodell

$$Y = \int_0^1 \beta(t)X(t)dt + \sigma U$$

ist, ob der Regressor X endogen ist, also mit dem Fehlerterm U korreliert. Die vorliegende Arbeit präsentiert einen Test auf Exogenität für den Fall, dass der unbekannte Slopeparameter β ein Element des Sobolevraums der periodischen Funktionen und der Regressor schwach stationär ist. Zur Konstruktion der auf funktionalen instrumentellen Variablen basierenden Teststatistik werden zwei Schätzer verwendet, die jeweils unter Exogenität konsistent sind, aber unterschiedliches Verhalten unter Endogenität aufweisen. Da die Schätzung des Slopeparameters ein schlechtgestelltes inverses Problem ist, wird zur Regularisierung eine Folge von Schwellenwerten verwendet. Die Teststatistik des ursprünglichen Hausman-Tests ist im funktionalen Kontext nicht anwendbar, sodass eine andere Gestalt für die Teststatistik gefunden werden muss. Um einen Ansatzpunkt für das asymptotische Verhalten dieser Teststatistik zu erhalten, wird zunächst die asymptotische Verteilung des Vorhersagefehlers untersucht, bevor dann die asymptotische Verteilung der Teststatistik hergeleitet wird. Varianz und Bias werden dabei explizit berechnet. Um die Anwendbarkeit in der Praxis sicherzustellen, wird ein Bootstrapverfahren für die Teststatistik vorgestellt und dessen Konsistenz bewiesen. Der Ansatz dazu basiert auf der Idee des Residuenbootstraps und kann als naiver oder wild Bootstrap umgesetzt werden. Abschließend wird die Performance des asymptotischen Tests und seiner Bootstrapvariante für endliche Stichprobenumfänge in einer Simulationsstudie überprüft.

Abstract

For the functional linear regression model

$$Y = \int_0^1 \beta(t)X(t)dt + \sigma U$$

a common question is whether the functional regressor X is endogenous, i.e. correlated with the error term U . Considering the case that the unknown slope parameter β is an element of the Sobolev space of periodic functions and assuming second order stationarity of the regressor, a test of exogeneity is proposed. Using functional instrumental variables, the test statistic is constructed from two estimators that are consistent under exogeneity but have different behavior under endogeneity. As the estimation of β is an ill-posed inverse problem, thresholding is used for regularization. However, as it is not applicable in the functional context, the test statistic must have a different form than the one used in the original Hausman test. In order to get an idea of the asymptotic behaviour of the test statistic, the asymptotic distribution of the prediction error is examined first. The asymptotic distribution of the test statistic is then derived, with the bias and asymptotic variance being explicitly calculated.

To ensure the applicability in practice a bootstrap procedure is presented and its consistency is proven. The approach is based on the idea of the residual bootstrap and is working for both, naive and wild bootstrapping. Finally, the finite-sample performance of the asymptotic test and its bootstrap variant is checked by a simulation study.

Inhaltsverzeichnis

Notation	III
1. Einleitung	1
1.1. Funktionale Daten	1
1.2. Endogenität	2
1.3. Aufbau der Arbeit	4
2. Theoretische Grundlagen	7
2.1. Hilberträume	7
2.2. Spektraltheorie linearer Operatoren auf Hilberträumen	10
2.3. (Cross-)Kovarianzoperatoren funktionaler Variablen und (gemeinsame) schwache Stationarität	14
2.4. Regularisierte Inversen der (Cross-)Kovarianzoperatoren	20
3. Funktionale lineare Regression	23
3.1. Das Modell und grundlegende Annahmen	23
3.2. Unter Endogenität konsistenter Schätzer $\hat{\beta}_{IV}$ des Slopeparameters	25
3.3. Unter Endogenität inkonsistenter Schätzer $\hat{\beta}$ des Slopeparameters	26
4. Schwache Konvergenz des Vorhersagefehlers von $\hat{\beta}_{IV}$	31
4.1. Diskussion der Biasterme	33
4.2. Schwach konvergenter Term	44
5. Asymptotischer Test auf Exogenität	51
5.1. Vorüberlegung	51
5.2. Konstruktion einer Teststatistik	54
5.3. Schwach konvergenter Term	56
5.4. Diskussion der Bias-Terme	73
5.5. Zentraler Grenzwertsatz für die Teststatistik	91
6. Bootstrapvariante des Tests auf Exogenität	97
6.1. Ein Bootstrapverfahren für die Teststatistik	97
6.2. Schwach konvergenter Term	101
6.3. Diskussion der Bias-Terme	117
6.4. Zentraler Grenzwertsatz für die Teststatistik	130

7. Simulationen	133
7.1. R-Code zum Bootstraptest	133
7.1.1. Bootstraphahmenprogramm	133
7.1.2. Bootstrapfunktion	143
7.1.3. Weitere Bootstrapvarianten	146
7.2. R-Code zum asymptotischen Test	147
7.3. Simulationsergebnisse	149
8. Schlusswort	163
8.1. Ergebnisse der Arbeit	163
8.2. Einordnung in den wissenschaftlichen Kontext	163
8.3. Ausblick	165
A. Technische Hilfsresultate	167
A.1. Allgemeine Resultate	167
A.2. Hilfsresultate zu Kapitel 4	169
A.3. Hilfsresultate zu Kapitel 5	174
A.4. Hilfsresultate zu Kapitel 6	176
Literaturverzeichnis	180

Notation

Abkürzungen

AIC	Akaike Information Criterion
BIC	Bayesian Information Criterion
FDA	Functional Data Analysis
f. s.	fast sicher
RMPP	Residual Marked empirical Process based on Projections
u. i. v.	stochastisch unabhängig und identisch verteilt
VONS	vollständiges Orthonormalsystem

Mathematische Symbole

\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen
\mathbb{Z}	die ganzen Zahlen
\mathbb{R}	die reellen Zahlen
\mathbb{C}	die komplexen Zahlen
\bar{z}	die zu z komplex konjugierte Zahl
i	imaginäre Einheit
Res	Residuum
$I\{\cdot\}$	Indikatorfunktion
$o, o_P, \mathcal{O}, \mathcal{O}_P$	Landau-Symbole
\xrightarrow{P}	stochastische Konvergenz
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	Konvergenz in Verteilung
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	Maßraum
\mathcal{B}	Borelsche Sigmaalgebra
$\sigma(\mathcal{M})$	die kleinste von \mathcal{M} erzeugte Sigmaalgebra
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$\mathcal{U}_{(a,b)}$	uniforme Verteilung auf dem Intervall (a, b)
$\ \cdot\ $	L_2 -Norm
$\ \cdot\ _\nu$	Sobolevnorm
$\ \cdot\ _{HS}$	Hilbert-Schmidt-Norm
$\ \cdot\ _\infty$	Supremumsnorm
\mathcal{W}_ν	Sobolevraum der periodischen Funktionen
$L_q([a, b]), L_q$	Hilbertraum von (Äquivalenzklassen von) \mathbb{C} -wertigen Funktionen f , sodass $\int_a^b f ^q d\mu < \infty$
ℓ_2	Hilbertraum der quadratisch summierbaren komplexwertigen Folgen
\square	quod erat demonstrandum

1. Einleitung

1.1. Funktionale Daten

Warum soll man Daten, die bekanntlich einen funktionalen Zusammenhang besitzen, nicht bereits bei der Analyse als Funktion betrachten? Schon in Publikationen aus den 1950er Jahren findet man Ideen, den funktionalen Charakter von Daten zu berücksichtigen. So lässt Grenander (1950) Resultate über zeitstetige stochastische Prozesse in die statistische Auswertung von Zeitreihen einfließen, für die damals nur Erkenntnisse für endliche Stichproben vorlagen. Dabei sei insbesondere auf die wegweisenden Resultate von Kari Karhunen zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse hingewiesen. Auch der Umgang von Rao (1958) mit Wachstumskurven signalisiert das Interesse an einer besseren Nutzung der funktionalen Form der Daten. Die Idee der funktionalen Daten ist es, Zufallsvariablen mit Werten in einem Funktionenraum zu betrachten. Ramsay (1982) und Ramsay und Dalzell (1991), die bekannte Konzepte der multivariaten Statistik, wie Kleinst-Quadrat-Schätzung und Hauptkomponentenanalyse, mit Hilfe von Funktionalanalysis auf funktionale Daten übertragen, verhelfen diesem Ansatz schließlich zu großer Popularität. Seitdem ist der Bereich der funktionalen Daten beachtlich gewachsen.

Ferraty und Vieu (2006) definieren eine Zufallsvariable als *funktionale Variable*, falls sie Werte in einem unendlichdimensionalen Raum oder einem Funktionenraum annimmt. Die Realisierungen einer funktionalen Variable heißen *funktionale Daten*. Müller (2011) beschreibt *Functional Data Analysis (FDA)* als die statistische Analyse von Stichproben, deren Elemente zufällige Funktionen oder Oberflächen sind.

Typischerweise geht man bei funktionalen Variablen davon aus, dass nahe beieinanderliegende Funktionswerte nicht allzu stark voneinander abweichen. Die Annahme einer gewissen Glattheit der Funktion oder zumindest deren Approximierbarkeit durch glatte Funktionen ist daher in der FDA oftmals zu finden. Dies ermöglicht, im Vergleich zu multivariaten Ansätzen, die Nutzung von Informationen über Steigung und Krümmungsverhalten, die man aus der Betrachtung von Ableitungen erhält. Als neue Herausforderung stellt sich häufig die Unendlichdimensionalität des Bildraumes dar, für deren Bewältigung die Lösung schlechtgestellter inverser Probleme erforderlich sein kann.

Ein sehr anschauliches Beispiel für funktionale Daten sind Wachstumskurven von Kindern. So wurden zum Beispiel im Rahmen der Zurich Longitudinal Growth Study von Falkner (1960), die Körpergrößen von Jungen in unterschiedlichen zeitlichen Abständen gemessen um Rückschlüsse auf die Wachstumsgeschwindigkeit ziehen zu können. Obwohl nur diskrete Messpunkte vorliegen, ist klar, dass das Wachstum eine stetige Funktion der Zeit ist. Es empfiehlt sich, den Wachstumsverlauf jedes Jungen als eine funktionale Beobachtung zu betrachten, siehe Ramsay und Silverman (2002). Anstelle der Zeit sind für

funktionale Variablen auch andere Kontinua wie Ort, Temperatur und Wellenlänge zugrunde legbar. Letztere ist für spektrometrische Analysen, die im Bereich der Chemometrie häufig zum Einsatz kommen, von Interesse. So modellieren Ferraty und Vieu (2006) den Absorptionsgrad ausgesendeter Strahlung in Abhängigkeit der Wellenlänge für eine Anwendung bei der Qualitätskontrolle in der Lebensmittelindustrie. Auch in der Ökonometrie, Biostatistik, Biometrie, Medizin und weiteren Fachrichtungen finden funktionale Daten inzwischen Anwendung. Als weiteres Beispiel seien archäologische Knochenfunde genannt, deren Untersuchung Rückschlüsse auf eine vorgelegene Arthritis-Erkrankung zulässt. Dazu wurden die Knochenformen im Kniegelenk als funktionale Variablen modelliert, siehe Ramsay und Silverman (2002).

Einen kurzen Überblick über Grundlagen und aktuelle Forschungsergebnisse im Bereich FDA findet man bei Müller (2011), Cuevas (2013) und Wang et al. (2015). Ausführliche Einführungen stellen Ramsay und Silverman (1997), Ferraty und Vieu (2006), Horváth und Kokoszka (2012) und Hsing und Eubank (2015) bereit, unterschiedliche Anwendungsbeispiele führen Ramsay und Silverman (2002) vor.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem funktionalen linearen Regressionsmodell

$$Y = \int_0^1 \beta(s)X(s) ds + \sigma U,$$

in dem X eine funktionale Variable ist. Der ebenfalls funktionale Parameter β sei dabei unbekannt und muss geschätzt werden. Eine Anwendung für das funktionale lineare Regressionsmodell findet man in Ramsay und Silverman (1997) auf Seite 158: die Vorhersage der jährlichen Niederschlagsmenge aus den Temperaturschwankungen, die ein Jahr lang an kanadischen Wetterstationen registriert wurden. Dafür sei die reelle abhängige Variable Y_i gerade die logarithmierte Niederschlagsmenge an der Wetterstation i . X_i ist die zugehörige Temperaturfunktion. Das Kontinuum ist die Zeit in Form von $I = [0, 12]$ oder $I = [0, 365]$. Doch lässt sich lediglich auf Grundlage der Temperaturschwankungen eine gute Prognose für die Niederschlagsmenge ableiten? Ein Ansatzpunkt zur Klärung dieser Frage ist, auf Basis des geschätzten Regressionsparameters β zu prüfen ob das Modell endogen ist. Beispiele für Endogenität in funktionalen linearen Modellen findet man bei Babii (2015).

1.2. Endogenität

Der Begriff *endogen* stammt aus dem Griechischen als eine Zusammensetzung der Wörter *endon*, auf deutsch „darin, innen, innerhalb“, und *gennan*, auf deutsch „erzeugen, hervorbringen“ und kann als „von innen kommend, im Innern entstanden“ umschrieben werden¹. In der Statistik hat die Eigenschaft *endogen* ihren Ursprung im Bereich der Mehrgleichungsmodelle, bei denen durch die Simultanität der Gleichungen, und damit aus dem System selbst kommend, Korrelationen zwischen Variablen entstehen können, siehe Wooldridge (2013), Seite 83. In einem Regressionmodell definieren Auer et al. (2013)

¹Wahrig, Herkunftswörterbuch A–Z, <https://www.wissen.de/wortherkunft/endogen> (Stand 08.09.2020)

eine erklärende Variable X als endogen, falls der bedingte Erwartungswert des Störterms U gegeben X stochastisch abhängig von X ist. *Endogenität* beschreibt dann das Vorliegen einer endogenen erklärenden Variable, vgl. Wooldridge (2013), Seite 842. Das Antonym zu Endogenität ist die *Exogenität*. Eine erklärende Variable X ist gemäß Auer et al. (2013) exogen, falls $E[U | X] = 0$.

Andere Autoren, wie beispielsweise Wooldridge (2013), definieren eine erklärende Variable als endogen, falls sie mit dem Störterm korreliert ist, was eine direkte Folgerung aus der stochastischen Abhängigkeit von $E[U | X]$ und X ist, wie sie in der ersten Variante der Definition gefordert wird.

Bleibt Endogenität in einem Modell unentdeckt, kann dies zu verzerrten Schätzungen führen. So lässt sich im linearen Modell leicht nachrechnen, dass der Kleinst-Quadrat-Schätzer, der unter den Annahmen des Gauß-Markov-Theorems ein bester linearer erwartungstreuer Schätzer ist, unter Endogenität im Allgemeinen verzerrt ist. Frölich (2006) rechnet in Kapitel 3 den relativen asymptotischen Bias im multivariaten linearen Modell in einigen konkreten Fällen aus.

Zurückzuführen ist Endogenität möglicherweise auf eine wegen Nichtberücksichtigung einer erklärenden Variable fehlerhafte Modellwahl. Dies kann geschehen durch die Unmöglichkeit der Datenerhebung oder mangels Wissen um den Einfluss einer bestimmten Größe auf die abhängige Variable. Ist die ausgelassene Variable eine Funktion einer anderen erklärenden Variable, so resultiert der entstandene Fehler in der Zugrundelegung einer falschen funktionalen Form des Regressionsparameters, wie es in Wooldridge (2013), Seite 293, erwähnt wird. Ein häufig zitiertes Beispiel ist das Regressionsmodell

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + U,$$

aus dem der Einfluss β_1 der Bildung X_1 und der Einfluss β_2 der angeborenen Fähigkeiten X_2 unter Berücksichtigung eines Messfehlers U auf den Stundenlohn Y geschätzt werden sollen, siehe zum Beispiel Wooldridge (2013), Seite 83 und Albers et al. (2007), Seite 231. X_2 kann nicht gemessen werden und wird deshalb weggelassen, es wird lediglich Y auf X_1 regressiert, also ein Modell

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \tilde{U}, \quad \tilde{U} = \beta_2 X_2 + U$$

betrachtet. Da X_2 nun Teil des Störterms ist, erhält man $E[\tilde{U} | X_1, X_2] = \beta_2 E[X_2 | X_1, X_2]$, was nicht notwendig gleich Null ist. Eine weitere potenzielle Ursache für Endogenität ist simultane Kausalität, auf die man zum Beispiel bei der Frage nach dem Einfluss der Anzahl eingesetzter Polizisten auf die Anzahl der Straftaten stößt: Eine hohe Polizeipräsenz hat eine abschreckende und präventive Wirkung. Jedoch werden in Gebieten mit erhöhter Kriminalitätsrate auch mehr Polizisten eingesetzt. Endogenität kann auch durch Messfehler in einer erklärenden Variable verursacht werden. Enthält der Störterm systematisch einen Teil der erklärenden Variable, resultiert dies in Korrelation zwischen dieser und dem Störterm, siehe Albers et al. (2007), S.233. So kann die (un)bewusste Verwendung von Proxyvariablen, wie sie beispielsweise bei missverständlich formulierten Fragen in Umfragen oder nicht erhebbaren Größen wie Talent vorkommt, in

durch Messfehler verursachter Endogenität enden, siehe Stocker (2004). Die durch verzögerte abhängige Variablen entstehende Autokorrelation wird von Stocker (2004) ebenfalls als Ursache von Endogenität genannt. Da die Kleinste-Quadrate-Methode im endogenen Regressionsmodell zu inkonsistenten Schätzungen führt (siehe Wooldridge (2013), Seite 164f.) und kein unverzerrter Schätzer existiert, der ausschließlich auf Daten aus dem Modell basiert (siehe Stocker (2004), Kapitel 10, Seite 5), ist es üblich auf Instrumentvariablen zurückzugreifen und ein zweistufiges Kleinste-Quadrate-Verfahren anzuwenden. Als Instrumentvariable bezeichnet man eine Variable, die nicht in der Modellgleichung vorkommt, unkorreliert mit dem Störterm und korreliert mit der endogenen erklärenden Variable ist, siehe Wooldridge (2013). Dabei ist das Instrument umso besser, je stärker es mit der endogenen Variable korreliert. Im oben genannten Beispiel der Kriminalität-Polizei-Beziehung verwendet Levitt (1997) als Instrumentvariable die Wahljahre, da in diesen die Ausgaben für öffentliche Sicherheit steigen und sie somit positiv korreliert sind mit der Anzahl eingesetzter Polizisten.

Mit einem statistischen Test kann man nun überprüfen, ob die Hypothese der Exogenität zu einem vorgegebenen Niveau verworfen werden kann. Die wegweisende Arbeit dazu, die zugleich Inspiration für die vorliegende Abhandlung ist, stammt aus dem Jahr 1978 von Hausman. Er testet im linearen Regressionsmodell die Hypothese $E[U | X] = 0$. Seine Teststatistik basiert auf der Idee neben einem effizienten Schätzer (im Falle der linearen Regression der Kleinste-Quadrate-Schätzer) einen Instrumentvariablen-Schätzer zu verwenden, der sowohl unter Exogenität als auch unter Endogenität konsistent ist. Unter Exogenität ist dann die Korrelation zwischen der Differenz der beiden Schätzer und dem effizienten Schätzer gleich Null. Bereits Wu (1973) verwendet diesen Ansatz um im linearen Modell die Hypothese, dass X und U stochastisch unabhängig sind, zu testen. Inzwischen gibt es etliche Varianten der von Hausman und Wu vorgeschlagenen Teststatistiken für unterschiedliche Modelle. Diese sind allerdings wegen der Unendlichdimensionalität des Bildraumes nicht im funktionalen Kontext anwendbar. Die vorliegende Arbeit schlägt einen Test auf Exogenität für das funktionale lineare Regressionsmodell vor. Begründet durch die funktionale Form von Regressor und Slopeparameter ist dafür jedoch eine angepasste Gestalt der Teststatistik nötig um eine nichtentartete asymptotische Verteilung unter der Nullhypothese zu erhalten.

1.3. Aufbau der Arbeit

Die Verwendung von funktionalen Daten anstelle von Vektoren, wie sie in der multivariaten Statistik benutzt werden, erfordert eine Anpassung der grundlegenden Konzepte der Statistik. In Kapitel 2 werden einige bekannte Resultate aus der Funktionalanalysis sowie über lineare Operatoren zwischen Hilberträumen zusammengefasst und zur Herleitung und Charakterisierung von Kovarianzoperatoren für funktionale Variablen verwendet. Auch die Bedeutung der schwachen Stationarität wird erläutert. Kapitel 3 stellt anschließend das funktionale lineare Modell und zwei Schätzer für dessen Slopeparameter vor, die beide unter Exogenität konsistent sind, aber unterschiedliches Verhalten im endogenen Fall aufweisen. Da die Schätzung des Slopeparameters ein schlechtgestelltes

inverses Problem ist, wird als Regularisierung eine Folge von Schwellenwerten verwendet. Eine weitere wesentliche Voraussetzung für die Handhabbarkeit des Problems ist die gemeinsame schwache Stationarität von Regressor und Instrument. Um eine Idee für die asymptotische Verteilung der Schätzerdifferenz zu bekommen, wird zunächst in Kapitel 4 der Vorhersagefehler untersucht und dessen asymptotische Verteilung berechnet. Nach einigen weiteren Vorüberlegungen wird schließlich in Kapitel 5 eine Teststatistik formuliert und ein zentraler Grenzwertsatz dafür bewiesen. Um die Performance des Tests in der Praxis zu verbessern, präsentiert Kapitel 6 ein Bootstrapverfahren für die Teststatistik sowie den Konsistenzbeweis dafür. Die vorgestellten Testverfahren werden in einer kleinen Simulationsstudie in Kapitel 7 verglichen. Abschließend ordnet Kapitel 8 die Resultate der Arbeit in den wissenschaftlichen Kontext ein und gibt einige Denkanstöße für weitere Forschungsaufgaben.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Hilberträume

Die vorliegende Arbeit verwendet Zufallsvariablen, deren Werte in Hilberträumen liegen. Darum seien zunächst der Begriff Hilbertraum definiert und einige grundlegende, häufig verwendete Resultate für Hilberträume genannt. Die zugehörigen Beweise sowie weitere Erläuterungen finden sich in Kapitel 1 von Gohberg et al. (2003).

1. Definition: [PRÄHILBERTRAUM] Sei \mathcal{H} ein Vektorraum über \mathbb{C} . Dann heißt eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H} \quad (2.1)$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

$$\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H} \quad (2.3)$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle > 0 \quad \text{falls} \quad x \neq 0 \quad (2.4)$$

Skalarprodukt oder inneres Produkt. Das Tupel $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt Prähilbertraum. Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm auf \mathcal{H} ist gegeben durch $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, der Abstand zweier Elemente $x, y \in \mathcal{H}$ wird durch $\|x - y\|$ gemessen.

2. Definition: [HILBERTRAUM] Es sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum. Falls jede Cauchyfolge in \mathcal{H} konvergiert im Sinne von $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \rightarrow \infty$, so ist \mathcal{H} vollständig. Ein vollständiger Prähilbertraum heißt Hilbertraum.

3. Theorem: [UNGLEICHUNGEN] Es sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum. Dann gelten folgende Ungleichungen für $x, y \in \mathcal{H}$:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung}) \quad (2.5)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (2.6)$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit sind zwei Hilberträume von besonderem Interesse. Das ist zum einen der Raum der p -fach integrierbaren Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$,

$$L_p([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_p^p := \int_{[a, b]} |f|^p \lambda(dx) < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty),$$

wobei λ das Lebesgue-Maß bezeichnet. Zum anderen wird der Sobolevraum der periodischen Funktionen

$$\mathcal{W}_\nu := \left\{ f \in L^2[0, 1] : \|f\|_\gamma^2 := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^\nu |\langle f, \phi_k \rangle|^2 < \infty \right\} \quad (2.7)$$

verwendet, der Teilmenge des $L_2([0, 1])$ ist. $(\gamma_k^\nu)_{k \in \mathbb{Z}}$ fungieren dabei als Gewichte in der Sobolevnorm, festgelegt durch

$$\gamma_k = 1 + |2\pi k|^2, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Die Funktionen $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in \mathcal{W}_ν .

Ein System von Funktionen $\{\phi_k\}_{k \in I}$ in einem Prähilbertraum heißt orthogonal, falls für alle $k \neq m$ gilt $\phi_k \perp \phi_m$ im Sinne von $\langle \phi_k, \phi_m \rangle = 0$. Falls außerdem $\|\phi_k\| = 1$ für alle $k \in I$, so nennt man das System orthonormal. Analog zu den Resultaten der linearen Algebra für endlichdimensionale Vektorräume, lässt sich mit einem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren zu einer Menge linear unabhängiger Funktionen $\{f_1, f_2, \dots\}$ eine orthogonale Menge $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ berechnen, sodass $\text{span}\{f_1, f_2, \dots\} = \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$. Für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum enthält dieses orthonormale System dabei unendlich viele Elemente. So ist beispielsweise $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein unendliches Orthonormalsystem in $L_2([-\pi, \pi])$, siehe Seite 19 in Gohberg et al. (2003). Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Funktionen in $L_2([0, 1])$, für die entsprechend

$$\left\{ e^{2\pi ikt} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, t \in [0, 1] \quad (2.9)$$

verwendet wird. Das nachfolgende Theorem fasst einige wichtige Eigenschaften des Orthonormalsystems in Hilberträumen zusammen, die im weiteren Verlauf der Arbeit regelmäßig Anwendung finden. Es sei kurz erwähnt, dass das innere Produkt in Hilberträumen \mathcal{H} stetig ist auf $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

4. Theorem: *Es sei $\{\phi_k\}_{k \in I}$ ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} . Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{H}$:*

$$\sum_{k \in I} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}) \quad (2.10)$$

$$\sum_{k \in I} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \text{ konvergiert} \quad (2.11)$$

$$\sum_{k \in I} \alpha_k \phi_k \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \{\alpha_k\}_{k \in I} \in \ell_2 \quad (2.12)$$

$$f = \sum_{k \in I} \alpha_k \phi_k \Rightarrow \alpha_k = \langle f, \phi_k \rangle \quad \forall k \in I. \quad (2.13)$$

Um diese Resultate für beliebige Elemente eines Hilbertraumes nutzen zu können, benötigen diese eine Darstellung bezüglich eines Orthonormalsystems. Es ist also von Interesse, unter welchen Voraussetzungen das Orthonormalsystem eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} ist. Diese wird nun definiert, um anschließend einige weitere technische Hilfsmittel aufzulisten, deren Verwendung im Zusammenhang mit der Orthonormalbasis steht.

5. Definition: [ORTHONORMALBASIS (VONS)] Ein Orthonormalsystem $\{\phi_k\}_{k \in I}$ heißt Orthonormalbasis (oder vollständiges Orthonormalsystem, kurz VONS) für \mathcal{H} , falls für jedes $f \in \mathcal{H}$ Koeffizienten $\{\alpha_k\}_{k \in I}$ existieren, sodass

$$f = \sum_{k \in I} \alpha_k \phi_k.$$

Nach Theorem 4 (2.13) gilt dann $\alpha_k = \langle f, \phi_k \rangle$ für alle $k \in I$. Diese heißen Fourierkoeffizienten.

6. Theorem: Es sei $\{\phi_k\}_{k \in I}$ ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\{\phi_k\}_{k \in I}$ ist eine Orthonormalbasis in \mathcal{H} .
- (ii) $\langle f, \phi_k \rangle = 0 \forall k \in I \Rightarrow f = 0$.
- (iii) $\text{span}\{\phi_k\}_{k \in I}$ liegt dicht in \mathcal{H} , das heißt jedes Element in \mathcal{H} lässt sich als Grenzwert einer Folge in $\text{span}\{\phi_k\}_{k \in I}$ ausdrücken.
- (iv) Für jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in I} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \quad (\text{Parseval'sche Gleichung})$$

- (v) Für alle $f, g \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k \in I} \langle f, \phi_k \rangle \overline{\langle g, \phi_k \rangle}.$$

Ein Hilbertraum besitzt genau dann eine Orthonormalbasis, wenn er separabel ist, das heißt wenn Funktionen f_1, f_2, \dots existieren, die einen Unterraum aufspannen, der dicht in \mathcal{H} liegt. Das oben aufgeführte Orthonormalsystem $\{e^{2\pi ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}, t \in [0, 1]}$ ist ein Beispiel für eine Orthonormalbasis des separablen $L_2([0, 1])$, was aus Beispiel 2 auf Seite 28 in Gohberg et al. (2003) folgt. Betrachtet man also funktionale Zufallsvariablen

$$X, W : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow L_2([0, 1]),$$

so sind $X(\omega)$ und $W(\omega)$ für jedes feste $\omega \in \Omega$ Elemente des $L_2([0, 1])$. Nach Theorem 4 (2.13) und Theorem 6 (iii) besitzen sie eine Darstellung bezüglich der Orthonormalbasis $\{\phi_k := e^{2\pi ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ der Form

$$X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle X, \phi_k \rangle \phi_k, \quad W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle W, \phi_k \rangle \phi_k.$$

Dabei sind die Fourierkoeffizienten $\langle X, \phi_k \rangle$ und $\langle W, \phi_k \rangle$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ komplexwertige zentrierte Zufallsvariablen.

2.2. Spektraltheorie linearer Operatoren auf Hilberträumen

Für hilbertraumwertige Zufallsvariablen wird eine Verallgemeinerung des klassischen Kovarianz-Begriffes benötigt. Dazu nutzt man einige bekannte Resultate über lineare Operatoren zwischen Hilberträumen, die das folgende Kapitel zusammengefasst bereitstellt. Diese sind den Kapiteln 2, 4, 5, 10 und 13 von Gohberg et al. (2003), den Kapiteln II und V–VII von Werner (2011) sowie der Synopsis und Kapitel 1 von Bosq (2000) entnommen.

Im Folgenden seien \mathcal{H} , \mathcal{H}_1 und \mathcal{H}_2 Hilberträume über \mathbb{C} . $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ bezeichnet den Raum aller beschränkten linearen Operatoren von \mathcal{H}_1 nach \mathcal{H}_2 . Falls $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ gilt, schreibt man kurz $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Entsprechend wird der Raum der kompakten Operatoren mit $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ beziehungsweise $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ bezeichnet. I bezeichnet eine abzählbare Indexmenge.

7. Definition: [(BESCHRÄNKTER) LINEARER OPERATOR]

- (i) Eine Funktion $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ heißt linearer Operator, falls für alle $f, g \in \mathcal{H}_1$ und für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} A(f + g) &= Af + Ag \\ A(\alpha f) &= \alpha Af. \end{aligned}$$

- (ii) Der lineare Operator A heißt beschränkt, falls $\|A\| := \sup_{\|f\| \leq 1} \|Af\| < \infty$, wobei $\|A\|$ Operatornorm von A heißt.

Für eine messbare Funktion $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt < \infty$$

lässt sich ein Operator $K : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$ definieren über

$$(Kf)(t) = \int_0^1 k(t, s)f(s) ds. \quad (2.14)$$

K ist linear und beschränkt und wird Integraloperator mit Integrkern k genannt. An späterer Stelle wird man sehen, dass der Kovarianzoperator von diesem Typ ist.

Eine weitere Eigenschaft des linearen Operators A ist, dass er genau dann beschränkt ist, wenn er stetig in einem Punkt ist oder, äquivalent dazu, wenn er gleichmäßig stetig auf \mathcal{H}_1 ist.

$A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$, mit $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$, bezeichnet den sogenannten zu A adjungierten Operator. Ein Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$.

8. Theorem: [HELLINGER-TOEPLITZ] Falls ein linearer Operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ symmetrisch im Sinne von

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

ist, dann ist er stetig und folglich selbstadjungiert.

Über den zum Integraloperator aus (2.14) adjungierten Operator macht das folgende Theorem eine Aussage.

9. Theorem: Sei K der Integraloperator aus (2.14). Dann gilt für alle $g \in L_2([0, 1])$, dass

$$(K^*g)(t) = \int_0^1 \overline{k(s, t)} g(s) ds.$$

K ist also genau dann selbstadjungiert, wenn $\overline{k(s, t)} = k(t, s)$ f. s. In diesem Fall spricht man von einem Integraloperator mit symmetrischem Kern. Eine weitere Eigenschaft von K ist die Kompaktheit.

10. Definition: Ein beschränkter linearer Operator $C : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ ist kompakt, falls für jede Folge $\{f_n\}_n$ in \mathcal{H}_1 mit $\|f_n\| = 1 \forall n$ die Folge $\{Cf_n\}_n$ eine in \mathcal{H}_2 konvergente Teilfolge hat.

Ein Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ist genau dann kompakt, wenn sein adjungierter Operator A^* kompakt ist.

Die Handhabbarkeit solcher Operatoren erleichtert sich durch den Spektralsatz, eine Verallgemeinerung der Hauptachsentransformation aus der linearen Algebra. Dazu werden zunächst die Begriffe Eigenfunktion und Eigenwert im vorliegenden Kontext definiert und dann ein Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren formuliert.

11. Definition: Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, falls ein $\phi \in \mathcal{H}$, $\phi \neq 0$, existiert, sodass $A\phi = \lambda\phi$. Die Funktion ϕ heißt dann Eigenfunktion.

Für selbstadjungierte Operatoren sind alle Eigenwerte reellwertig. Zudem sind Eigenfunktionen unterschiedlicher Eigenwerte orthogonal. Für einen Eigenwert λ von $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt die Abschätzung $|\lambda| \leq \|A\|$.

Falls $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert ist, gilt $\|A\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Af, f \rangle|$. Falls $\mathcal{H} \neq \{0\}$ so existiert für selbstadjungierte $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mindestens ein Eigenwert. Für nicht selbstadjungierte kompakte Operatoren gilt dies nicht ohne Weiteres.

12. Theorem: [SPEKTRALSATZ] Es sei Γ ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Dann existiert ein Orthonormalsystem $\{\phi_k\}_{k \in I}$ aus Eigenfunktionen von Γ und zugehörige Eigenwerte $\{\lambda_k\}_{k \in I}$, sodass für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\Gamma f = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k.$$

Falls $(\lambda_k)_{k \in I}$ eine unendliche Folge ist, dann konvergiert sie gegen 0.

Auch die Umkehrung des Spektralsatzes ist richtig. Diese wird später zur Definition einer empirischen Version des (Cross-)Kovarianzoperators verwendet.

13. Theorem: *Es sei $\{\phi_k\}_{k \in I}$ ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} und $\{\lambda_k\}_{k \in I}$ eine Folge reeller Zahlen die entweder endlich ist oder gegen Null konvergiert. Dann ist der lineare Operator*

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad Af = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$$

kompakt und selbstadjungiert.

Aus dem Spektralsatz folgt also für jeden kompakten selbstadjungierten Operator $A \neq 0$ die Existenz eines Orthonormalsystems bestehend aus Eigenfunktionen $\{\phi_k\}_{k \in I}$ und zugehörigen von Null verschiedenen Eigenwerten $\{\lambda_k\}_{k \in I}$, dass $Af = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k$ für alle $f \in \mathcal{H}$ erfüllt. Man nennt dies Eigensystem von A .

Wählt man als Kern eine stetige Funktion k mit Periodenlänge 1, die $k(s, t) = k(t - s)$ erfüllt, so kann man zeigen, dass K aus (2.14) ein Eigensystem $\{\lambda_k, \phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ besitzt, wobei $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ die Exponentialbasis des $L_2([0, 1])$ aus (2.9) ist. Dies führt später zum Begriff der (gemeinsamen) schwachen Stationarität.

14. Lemma:

(i) *Das Orthonormalsystem $\{\phi_k\}_{k \in I}$ ist eine Orthonormalbasis für $\overline{\text{Im}A} = \text{Ker}A^\perp$ und es gilt*

$$f = P_0 f + \sum_{k \in I} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k,$$

wobei P_0 die Orthogonalprojektion auf $\text{Ker}A$ ist.

(ii) *\mathcal{H} besitzt genau dann eine Orthonormalbasis bestehend aus dem Eigensystem von A , wenn $\text{Ker}A = \{0\}$.*

(iii) *Falls $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A ist, dann ist $\lambda = \lambda_k$ für ein k .*

(iv) *Jedes λ_k tritt genau p_k -mal auf, wobei $p_k = \dim \text{Ker}(\lambda_k I - A)$*

Für die Herleitung eines Schätzers für die Slopefunktion im funktionalen linearen Regressionsmodell muss der Kovarianzoperator invertiert werden. Ein kompakter linearer Operator ist jedoch nicht invertierbar, falls der zugrundeliegende Hilbertraum unendlichdimensional ist, was bei dem in dieser Arbeit betrachteten Modell der Fall ist. Das nachfolgende Theorem zeigt, unter welchen Bedingungen eine Inversion möglich ist und welche Gestalt der inverse Operator hat.

15. Theorem: *Sei $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein kompakter selbstadjungierter Operator mit einem Eigensystem $\{\lambda_k, \phi_k\}_{k \in I}$. Die Gleichung*

$$Cf = g$$

mit $g \in \mathcal{H}$ hat genau dann eine Lösung, wenn

(i) $g \perp \text{Ker } C$ und

$$(ii) \sum_{k \in I} \frac{1}{\lambda_k^2} |\langle g, \phi_k \rangle|^2 < \infty.$$

Jede Lösung hat die Form $f = u + \sum_{k \in I} \frac{1}{\lambda_k} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k$, wobei $u \in \text{Ker } C$.

Die Spektraltheorie kann man nun auf kompakte selbstadjungierte Integraloperatoren, wie den Kovarianzoperator, der später verwendet wird, spezialisieren. Für den Beweis der schwachen Konvergenz der Teststatistik benötigt man hier eine stärkere Konvergenzaussage für die Spektralzerlegung. Aus dem Spektralsatz folgt lediglich die L_2 -Konvergenz des Operators. Die Theoreme von Hilbert-Schmidt und Mercer liefern Bedingungen für gleichmäßige und absolute Konvergenz der Spektralentwicklung.

16. Theorem: [HILBERT-SCHMIDT] *Es sei K der Integraloperator aus (2.14) mit $\overline{k(t, s)} = k(s, t)$ f. s. und*

$$\sup_{t \in [0, 1]} \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds < \infty.$$

Es sei $\{\lambda_k, \phi_k\}_{k \in I}$ ein Eigensystem von K . Dann gilt für alle $f \in L_2([0, 1])$

$$Kf(t) = \sum_k \lambda_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(t) \quad \text{f. s.}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[0, 1]$.

17. Satz: [MERCER] *Es sei k stetig auf $[0, 1] \times [0, 1]$. Angenommen für alle $f \in L_2([0, 1])$ gilt*

$$\int_0^1 \int_0^1 k(t, s) \bar{f}(t) ds dt \geq 0.$$

Falls $\{\lambda_k, \phi_k\}_{k \in I}$ ein Eigensystem des Integraloperators mit Integralkern k ist, dann gilt für alle $t, s \in [0, 1]$

$$k(t, s) = \sum_{k \in I} \lambda_k \phi_k(t) \bar{\phi}_k(s).$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $[0, 1] \times [0, 1]$.

Nimmt man also für den Integraloperator K aus (2.14) zusätzlich an, dass er positiv ist und einen stetigen Kern hat, so folgt mit Satz 17 absolute und gleichmäßige Konvergenz der Entwicklung des Kerns und damit die absolute Summierbarkeit der Eigenwerte von K . Dies führt zum Begriff der Nuklearität, der hier nur im Spezialfall kompakter Operatoren auf \mathcal{H} eingeführt wird. Dazu werden zunächst die Quadratwurzel aus einem Operator, die später auch zur Berechnung der asymptotischen Varianz der Teststatistik verwendet wird, sowie die Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren definiert.

18. Satz: *Sei $C \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ selbstadjungiert und positiv ($\langle Cf, f \rangle \geq 0$ für alle $f \in \mathcal{H}$). Dann existiert genau ein positiver selbstadjungierter Operator $S \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ mit $S^2 = C$. Die Lösung der Gleichung bezeichnet man als $S = C^{1/2}$.*

19. Definition: [HILBERT-SCHMIDT-OPERATOR, NUKLEARER OPERATOR] *Ein Operator $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ heißt Hilbert-Schmidt-Operator, falls $s := (s_k(T))_{k \in I} \in \ell^2$. Dabei bezeichnet $s_k(T)$, $k \in I$, die sogenannten singulären Zahlen von T , die Eigenwerte des positiven selbstadjungierten Operators $(T^*T)^{1/2}$.*

Die Hilbert-Schmidt-Norm $\|\cdot\|_{HS}$ ist definiert als

$$\|T\|_{HS} =: \|s\|_{\ell^2} = \left(\sum_{k \in I} s_k^2(T) \right)^{1/2}.$$

$T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ heißt nuklear, falls $(s_k(T))_{k \in I}$ absolut summierbar ist.

20. Satz: *Es sei $T \in \mathcal{L}(L_2([0, 1]))$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert $k \in L_2([0, 1])$, sodass $Tf(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t) dt$ fast überall.*

(ii) *T ist Hilbert-Schmidt-Operator.*

Gilt für den Integraloperator aus (2.14) also $\overline{k(t, s)} = k(s, t)$, so ist dieser vom Hilbert-Schmidt-Typ und $\sum_{k \in I} s_k(K) = \int_0^1 \int_0^1 |k(t, s)|^2 ds dt$. Falls K zusätzlich positiv ist, so sind die singulären Zahlen von T gerade die Eigenwerte von T . Ein Operator $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ist genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator, wenn $\|T\|_{HS} = (\sum_{k \in I} \|T\varphi_k\|^2)^{1/2} < \infty$ für jede Orthonormalbasis $\{\varphi_k\}_{k \in I}$.

Für die Definition der Kovarianz zwischen einer reellwertigen und einer hilbertraumwertigen Zufallsvariable benötigt man das lineare Funktional, eine Abbildung $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$. Ein wichtiges Resultat für F ist der Rieszsche Darstellungssatz.

21. Theorem: [RIESZSCHER DARSTELLUNGSSATZ] *Falls F ein beschränktes lineares Funktional auf \mathcal{H} ist, dann existiert genau ein $g \in \mathcal{H}$, sodass für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt: $F(f) = \langle f, g \rangle$. Außerdem ist $\|F\| = \|g\|$.*

2.3. (Cross-)Kovarianzoperatoren funktionaler Variablen und (gemeinsame) schwache Stationarität

22. Theorem: *Ein Operator $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ist genau dann ein Kovarianzoperator, wenn er symmetrisch, positiv und nuklear ist.*

Die vorangegangenen Resultate aus der Funktionalanalysis werden nun genutzt um für hilbertraumwertige Zufallsvariablen den Kovarianzbegriff unter Zuhilfenahme linearer Operatoren zu erweitern. Die Konzepte finden sich in Johannes (2013), Johannes (2016), Bosq (2000) und Cardot et al. (2006).

Man betrachtet einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) und auf diesem definierte Zufallsvariablen

$$X, W : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow L_2([0, 1])$$

mit Werten im Hilbertraum der komplexen, quadratisch integrierbaren Funktionen $L_2([0, 1])$ mit Norm $\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2}$ und Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)} dt$ für $f, g \in L_2([0, 1])$. \bar{g} bezeichnet die zu g komplex konjugierte Funktion. Es wird davon ausgegangen, dass X und W reellwertige Funktionen sind. Die Einbettung in den komplexen L_2 wird aus technischen Gründen vorgenommen, die im weiteren Verlauf erläutert werden. Um die Notation zu vereinfachen wird zudem angenommen die Zufallsvariablen seien zentriert in dem Sinne, dass $EX(t) = EW(t) = 0$ für alle $t \in [0, 1]$. Weiter wird angenommen, dass X und W von zweiter Ordnung sind, also $E\|X\|^2 < \infty$ und $E\|W\|^2 < \infty$. Weiter seien Y und U reellwertige Zufallsvariablen auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsraum mit $EU = 0$ und $E|U|^2 < \infty$. Die Konstante $\sigma > 0$ sei als bekannt angenommen, sodass das funktionale lineare Regressionsmodell

$$Y = \langle \beta, X \rangle + \sigma U$$

betrachtet wird, wobei der Slopeparameter β , der wiederum ein Element des Sobolevraums der periodischen Funktionen $\mathcal{W}_\nu \subset L_2([0, 1])$ ist, geschätzt werden soll. Dies geschieht auf Grundlage eines Datensatzes $(X_i, W_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$, $n \in \mathbb{N}$, wobei die Tripel jeweils stochastisch unabhängig und identisch verteilt seien.

Der lineare Operator

$$\Gamma_X : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad f \mapsto E[(X \otimes X)f] =: E[\langle f, X \rangle X] \quad (2.15)$$

wird definiert. Dieser ist offenbar positiv und symmetrisch und somit nach Satz 8 selbstadjungiert und stetig. Auch die Kompaktheit lässt sich nachweisen, siehe zum Beispiel Abschnitt II.3 in Werner (2011). Damit ist nach Theorem 12 bekannt, dass eine Spektralzerlegung von Γ_X bezüglich eines Eigensystems $\{x_k, \phi_k\}_k$ existiert, sodass gilt

$$\Gamma_X f = \sum_k x_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \quad \forall f \in L_2([0, 1]).$$

Wendet man Γ_X auf ein $f \in L_2([0, 1])$ an und nutzt die Linearität des Integrals sowie die Reellwertigkeit von $X(t)$ für festes t aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Gamma_X f(t) &= E[\langle f, X \rangle X(t)] = E\left(\int_0^1 f(s)\overline{X(s)} ds X(t)\right) \\ &= \int_0^1 f(s)E[\overline{X(s)}X(t)] ds \\ &= \int_0^1 f(s)\text{cov}(X(s), X(t)) ds \\ &= \int_0^1 f(s)c_X(s, t) ds, \end{aligned}$$

wobei $c_X : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, als Kovarianzfunktion symmetrisch und positiv definit ist. Da $X \in L_2([0, 1])$ ist c quadratisch integrierbar auf $[0, 1]^2$. Γ_X ist also ein Integraloperator

wie in (2.14) mit symmetrischem Kern und nach Satz 20 vom Hilbert-Schmidt-Typ. Gleiches gilt für den analog definierten Kovarianzoperator der Instrumentvariable W ,

$$\Gamma_W : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad f \mapsto \mathbb{E}[(W \otimes W) f] =: \mathbb{E}[\langle f, W \rangle W]. \quad (2.16)$$

Aus Abschnitt 2.1 ist bekannt, dass eine Reihenentwicklung von X und W bezüglich der Basis $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ des $L_2([0, 1])$ existiert und dass sich die Kovarianzoperatoren von X beziehungsweise W nach dem Spektralsatz mit einem Eigensystem $\{x_k, \phi_k\}_k$ entwickeln lassen. Es ist aber zunächst nicht klar, ob diese beiden Systeme die gleichen Eigenfunktionen enthalten, was die Handhabbarkeit wesentlich erleichtern würde. Dazu wird angenommen, dass X und W jeweils schwach stationär sind, also ihre Kovarianzfunktion an zwei Zeitpunkten $s, t \in [0, 1]$ lediglich von der Differenz $t - s$ abhängt. Es gilt also $c_X(s, t) = c_X(t - s)$ für alle $s, t \in [0, 1]$, entsprechend für W bzw. c_W . Die gewünschte Aussage liefert Lemma A.1 aus Johannes (2013):

23. Lemma: *Es sei X schwach stationär mit $\mathbb{E}[X(t)X(s)] = c(t-s)$, $t, s \in [0, 1]$ für eine positiv definite Funktion $c : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann besitzt der zugehörige Kovarianzoperator Γ_X eine Spektralzerlegung bezüglich der trigonometrischen Basis*

$$\phi_1 := 1, \phi_{2j} := \sqrt{2} \cos(2\pi js), \phi_{2j+1} := \sqrt{2} \sin(2\pi js), \quad s \in [0, 1], j \in \mathbb{N},$$

und den zugehörigen Eigenwerten

$$x_1 = \int_{-1}^1 c(s) ds, \quad x_{2j} = x_{2j+1} = \int_{-1}^1 \cos(2\pi js) c(s) ds.$$

Nutzt man nun die Beziehung

$$e^{2\pi kit} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \cos(2\pi kt) + \sqrt{2} \sin(2\pi kt) \right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}, t \in [0, 1]$$

zwischen der exponentiellen und der trigonometrischen Basis aus, so folgt die Behauptung aus obigem Lemma.

Für die Eigenwerte erhält man

$$\Gamma_X \phi_k = \mathbb{E}[\langle \phi_k, X \rangle X] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[\langle \phi_k, X \rangle \langle X, \phi_m \rangle] \phi_m = \mathbb{E}[\langle X, \phi_k \rangle]^2 \phi_k =: x_k \phi_k,$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$, da wegen der Orthogonalität der Basis für alle $k \neq m$

$$\mathbb{E}[\langle \phi_k, X \rangle \langle X, \phi_m \rangle] = 0 \quad (2.17)$$

gilt. Für Γ_W erhält man die Eigenwerte $\mathbb{E}[\langle W, \phi_k \rangle]^2 =: w_k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Bei der Verwendung von Instrumentvariablen ist die Korrelation zwischen Regressor und Instrument stets zu beachten. Dazu wird der Crosskovarianzoperator von X und W folgendermaßen definiert:

$$\Gamma_{WX} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad f \mapsto \mathbb{E}[(W \otimes X) f] =: \mathbb{E}[\langle f, X \rangle W] \quad (2.18)$$

Wie der Kovarianzoperator ist der Crosskovarianzoperator linear, nuklear, Hilbert-Schmidt und kompakt, vgl. Synopsis und Kapitel 1 in Bosq (2000), und besitzt somit eine Spektralzerlegung. Als Integrkern erhält man bei Wiederholung obiger Rechnungen

$$c_{WX} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad c_{WX}(s, t) = \mathbb{E}[X(s)W(t)].$$

Das Resultat aus Lemma 23 erhält man mit vergleichbaren Voraussetzungen auch für den Crosskovarianzoperator. Man benötigt, dass X und W gemeinsam schwach stationär sind im Sinne von

$$c_{WX}(s, t) = c_{WX}(t - s), \quad s, t, \in [0, 1]. \quad (2.19)$$

Da X und W von zweiter Ordnung sind, ist $c_{WX}(\cdot) \in L_2([-1, 1])$ und besitzt somit eine Entwicklung bezüglich dessen exponentieller Basis $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ mit Fourierkoeffizienten

$$c_k := \int_{-1}^1 c_{WX}(t) e^{-2\pi k i t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dass $\{c_k, \phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Eigensystem von Γ_{WX} ist, sieht man an der folgenden Rechnung, die für alle $k \in \mathbb{Z}$ und für alle $f \in L_2([0, 1])$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{WX} f, \phi_k \rangle &= \int_0^1 \int_0^1 c_{WX}(t - s) f(t) dt \phi_k(s) ds \\ &= \int_{-1}^1 c_{WX}(t) e^{-2\pi k i t} dt \int_0^1 f(s) \phi_k(s) ds = c_k \langle f, \phi_k \rangle. \end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Gleichheit aus der Faltungsformel für Fouriertransformierte. Mit der Kenntnis des Eigensystems $\{c_k, \phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ von Γ_{WX} erhält man außerdem $c_k = \mathbb{E}[\langle \phi_k, X \rangle \langle W, \phi_k \rangle]$ und für alle $k \neq m$

$$\mathbb{E}[\langle \phi_k, X \rangle \langle W, \phi_m \rangle] = 0, \quad (2.20)$$

wobei c_k für $k \in \mathbb{Z}$ wegen der komplexwertigen Fourierkoeffizienten von X und W komplexwertig sind. Folglich ist Γ_{WX} weder positiv noch symmetrisch. Außerdem ist Γ_{WX} nicht selbstadjungiert. Als stetiger, linearer Operator zwischen Hilberträumen erfüllt der zu Γ_{WX} adjungierte Operator jedoch

$$\Gamma_{WX}^* f = \int_0^1 c_{WX}^*(s, t) f(s) ds$$

mit

$$c_{WX}^*(s, t) = \overline{c_{WX}(t, s)},$$

vgl. Werner (2011), Beispiel b) im Anschluss an Definition V.5.3. Für den Integrkern gilt wegen der gemeinsamen schwachen Stationarität von X und W , dass $c_{WX}(s, t) = c_{WX}(s - t)$ und somit $c_{WX}^*(s, t) = \overline{c_{WX}(t, s)} = c_{WX}(t - s)$ gilt.

Durch die Verwendung des optimalen, im Allgemeinen aber unbekanntem, linearen Instrumentes \tilde{W} anstelle von W erhält man einen Crosskovarianzoperator mit Eigenschaften analog derer der Kovarianzoperatoren. Für

$$\lambda_k := \frac{|c_k|^2}{w_k} \leq x_k, k \in \mathbb{Z}, \quad (2.21)$$

und unter der Voraussetzung

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\lambda_k}{w_k} \right| \leq M < \infty \quad (2.22)$$

ist das Instrument

$$\tilde{W} := \ell(W) := \Gamma_{XW} \Gamma_{WW}^{-1} W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\overline{c_k}}{w_k} \langle W, \phi_k \rangle \phi_k \quad (2.23)$$

wohldefiniert, d.h. $\|\tilde{W}\| < \infty$. Falls für den linearen Operator

$$\ell : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1])$$

zusätzlich gilt, dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_k}{w_k} < \infty, \quad (2.24)$$

dann ist ℓ ein Hilbert-Schmidt-Operator und \tilde{W} ist die beste lineare Vorhersage für X basierend auf W , vgl. Johannes (2016). Einfaches Nachrechnen zeigt, dass für den Cross-Covarianzoperator von \tilde{W} und X , definiert als

$$\tilde{\Gamma} := \Gamma_{\tilde{W}X} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), f \mapsto \mathbb{E}[(\tilde{W} \otimes X)f] =: \mathbb{E}[\langle f, X \rangle \tilde{W}], \quad (2.25)$$

gilt, dass $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{\tilde{W}\tilde{W}}$ und die Eigenwerte gerade $\lambda_k = \frac{|c_k|^2}{w_k} \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ sind. $\Gamma_{\tilde{W}X}$ ist also selbstadjungiert.

Um die Kovarianz von W bzw. \tilde{W} und dem \mathbb{R} -wertigen Fehlerterm σU auszudrücken, werden die linearen Funktionale

$$\begin{aligned} \mathcal{U} : L_2([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R}, & f &\mapsto \sigma \mathbb{E}[(W \otimes U)f], \\ \tilde{\mathcal{U}} : L_2([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R}, & f &\mapsto \sigma \mathbb{E}[(\tilde{W} \otimes U)f], \end{aligned}$$

mit Tensorproduktfunktional $(W \otimes U)f := \langle f, W \rangle U$ für $f \in L_2([0, 1])$ verwendet. Analog definiert man

$$\begin{aligned} \Delta_W : L_2([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R}, & f &\mapsto \mathbb{E}[(W \otimes Y)f], \\ \tilde{\Delta}_W : L_2([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R}, & f &\mapsto \mathbb{E}[(\tilde{W} \otimes Y)f]. \end{aligned}$$

Aus den unabhängigen und identisch verteilten Beobachtungen $(W_i, X_i, Y_i)_{i=1\dots n}$ berechnet man eine empirische Version von Γ_{WX} , nämlich

$$\Gamma_n : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad \Gamma_n f := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i \otimes X_i) f, \quad f \in L_2([0, 1]).$$

Analog schätzt man die Kovarianzoperatoren von X und W mit

$$\Gamma_{X,n} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad \Gamma_{X,n} f := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i \otimes X_i) f, \quad f \in L_2([0, 1]),$$

$$\Gamma_{W,n} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad \Gamma_{W,n} f := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i \otimes W_i) f, \quad f \in L_2([0, 1])$$

Die empirischen Versionen besitzen dieselben Eigenschaften wie die (Cross-)Kovarianzoperatoren und sind konsistent. Für die Eigenwerte werden die konsistenten Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{w}_k &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle W_i, \phi_k \rangle|^2, & \hat{x}_k &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle X_i, \phi_k \rangle|^2, \\ \hat{c}_k &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_k, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle, & \hat{\lambda}_k &:= \frac{|\hat{c}_k|^2}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\}. \end{aligned}$$

verwendet. Die empirischen Kovarianzfunktionale sind

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n : L_2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f &\mapsto \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n (W_i \otimes U_i) f, \\ \Delta_{W,n} : L_2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f &\mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i \otimes Y_i) f. \end{aligned}$$

Mit Beobachtungen

$$\tilde{W}_i := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \langle W_i, \phi_k \rangle \phi_k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

aus dem optimalen linearen Instrument, die mit

$$\tilde{W}_{n,i} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \langle W_i, \phi_k \rangle \phi_k, \quad 1 \leq i \leq n,$$

geschätzt werden, ergeben sich die empirischen Versionen von $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Delta}_W$ als

$$\tilde{\Gamma}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_{n,i} \otimes X_i = \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.26)$$

$$\tilde{\Delta}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \tilde{W}_{n,i} \rangle Y_i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, W_i \rangle Y_i. \quad (2.27)$$

Für die empirischen Versionen der Kovarianzfunktionale wird jeweils eine Version mit den geschätzten sowie eine Version mit den wahren Beobachtungen aus dem optimalen linearen Instrument benötigt:

$$\tilde{U}_n := \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \tilde{W}_i \rangle U_i = \frac{\sigma}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \sum_{i=1}^n \langle \phi_k, W_i \rangle \langle \cdot, \phi_k \rangle U_i, \quad (2.28)$$

$$\hat{U}_n := \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \tilde{W}_{n,i} \rangle U_i = \frac{\sigma}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \sum_{i=1}^n \langle \phi_k, W_i \rangle \langle \cdot, \phi_k \rangle U_i. \quad (2.29)$$

2.4. Regularisierte Inversen der (Cross-)Kovarianzoperatoren

Analog zum linearen Modell aus der multivariaten Statistik, ist für die Formulierung eines Kleinste-Quadrate-Schätzers für β die Inversion des Kovarianzoperators von X nötig. Im endogenen Modell wird ein Schätzer mit einem zweistufigen Kleinste-Quadrate-Verfahren hergeleitet, der entsprechend die Inversion des Crosskovarianzoperators von X und einer Instrumentvariable \tilde{W} verlangt. Kompakte lineare Operatoren auf unendlich-dimensionalen Hilberträumen sind jedoch nicht invertierbar, siehe zum Beispiel Kapitel 4 von Gohberg et al. (2003). Da deren empirische Versionen fast sicher von endlichem Rang sind, tritt hier dasselbe Problem auf, siehe Cardot et al. (2006). Die Schätzung des Slopeparameters ist somit ein schlecht gestelltes inverses Problem, für dessen Lösung die (Cross-)Kovarianzoperatoren und deren empirische Pendanten durch regularisierte Versionen ersetzt werden um dann Theorem 15 anzuwenden. In der Literatur finden sich dazu verschiedene Ansätze, die einen zusätzlichen Regularisierungsparameter einführen. Müller und Stadtmüller (2005) und Cardot et al. (2006) berechnen funktionale Hauptkomponenten, deren Anzahl mit wachsendem Stichprobenumfang in geeigneter Weise wächst. Diese Methode ist somit eine Art spectraler Cut-off. Von Hall und Horowitz (2007) wird eine Tikhonov-Regularisierung verwendet, also αId addiert um zu kleine Werte bei der Inversen zu vermeiden. Babii (2015) untersucht zwei Schätzer mit Tikhonov- bzw. Galerkin-Regularisierung im funktionalen linearen Regressionsmodell. Einen Überblick über diese und weitere Regularisierungsmethoden findet man bei Carrasco et al. (2007). Die von Johannes (2013) und Johannes (2016) vorgeschlagenen und in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schätzer benutzen Schwellenwerte zur Regularisierung. Der Schätzer, und wegen der (gemeinsamen) schwachen Stationarität auch die (Cross-)Kovarianzoperatoren, besitzen eine Reihenentwicklung bezüglich einer bekannten Orthonormalbasis. Sobald die zugehörigen Koeffizienten einen Schwellenwert, der mit wachsendem Stichprobenumfang in vorgegebener Weise gegen Null konvergiert, unterschreiten, werden diese Summanden nicht mehr berücksichtigt. Für einen festen Schwellenwert hat der Bildraum also endliche Dimension, der Operator kann invertiert werden. Die folgenden Definitionen der inversen Operatoren sind Cardot et al. (2006) nachempfunden.

Dazu wird zunächst die Menge

$$\mathcal{K}_n =: \{k \in \mathbb{Z} : \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \quad (2.30)$$

definiert und eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ benötigt, die die Eigenwerte der regularisierten Inversen von $\tilde{\Gamma}$ und deren empirischer Version repräsentiert. Hierfür wird

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \frac{1}{x} I\{|x| \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \quad (2.31)$$

in Anlehnung an Beispiel 1 von Cardot et al. (2006) verwendet. Dies lässt sich auch als Funktion $\tilde{f}_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{f}_n(z) = \frac{1}{z} I_{\mathcal{C}_n}(z)$ schreiben, wobei $\mathcal{C}_n = \bigcup_{i=1}^{\mathcal{K}_n} \mathcal{B}_i$ gilt, mit \mathcal{B}_i die orientierte Kreislinie in \mathbb{C} um den Mittelpunkt λ_i mit Radius $\delta_i := \min_{p \in \mathcal{K}_n} \{\frac{1}{2}|\lambda_i - \lambda_p| : \lambda_p \neq \lambda_i\}$, $i \in \mathcal{K}_n$, siehe Cardot et al. (2006) für Details. Damit lassen sich die regularisierte Inverse von $\tilde{\Gamma}$ und deren empirische Version folgendermaßen darstellen:

$$\tilde{\Gamma}^\dagger = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_n} (z - \tilde{\Gamma})^{-1} \tilde{f}_n(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(\lambda_k) \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{1}{\lambda_k} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.32)$$

$$\tilde{\Gamma}_n^\dagger = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(\hat{\lambda}_k) \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.33)$$

Die Spektraldarstellung folgt durch Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes bei Integration entlang der geschlossenen Kreislinie um λ_k (Windungszahl = 1, $\text{Res}_{\lambda_k}(\text{Integrand}) = f_n(\lambda_k)$) und der Verwendung der bekannten Eigenfunktionen. Die als Argument von f_n verwendeten inversen Eigenwerte von $\tilde{\Gamma}$ bzw. deren Schätzer werden dabei gewichtet mit γ_k^ν aus der Sobolevnorm:

$$f_n(\lambda_k) = \frac{1}{\lambda_k} 1\{\lambda_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} = \frac{w_k}{|c_k|^2} 1\{|c_k|^2 \geq \gamma_k^\nu \alpha w_k\} I\{w_k \geq \alpha\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

bzw. in der empirischen Version als

$$f_n(\hat{\lambda}_k) = \frac{1}{\hat{\lambda}_k} 1\{\hat{\lambda}_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} = \frac{\hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} 1\{|\hat{c}_k|^2 \geq \gamma_k^\nu \alpha \hat{w}_k\} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da auf Grund der gemeinsamen schwachen Stationarität aus Lemma 14 (ii) folgt, dass $\text{Ker} \tilde{\Gamma} = \{0\}$, ist diese Darstellung der inversen Operatoren gerade im Einklang mit Theorem 15.

Analog lassen sich regularisierte Inversen von Γ_X und dessen empirischer Version berechnen:

$$\Gamma_X^\dagger = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_n} (z - \Gamma_X)^{-1} \tilde{f}_n(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(x_k) \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k, \quad (2.34)$$

$$\Gamma_{X,n}^\dagger = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(\hat{x}_k) \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (2.35)$$

Ab Kapitel 5 wird für Γ_X^\dagger und $\Gamma_{X,n}^\dagger$ die Regularisierungsbedingung aus (2.32) beziehungsweise (2.33) verwendet, sodass eine Darstellung $\Gamma_X^\dagger = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{1}{x_k} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k$ beziehungsweise $\Gamma_{X,n}^\dagger = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\hat{x}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k$ möglich wird. Die Gründe dafür werden in Abschnitt 3.3 erläutert.

Die Man bedenke an dieser Stelle, dass die Dimension d_n von $\tilde{\Gamma}_n^\dagger$ von den geschätzten Eigenwerten abhängt und somit zufällig ist und nicht mit der Dimension k_n von $\tilde{\Gamma}^\dagger$ übereinstimmen muss. Aus den Kapiteln 4 und 5 wird jedoch hervorgehen, dass $P(d_n \neq k_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ mit für die vorliegenden Resultate geeigneter Rate gilt.

Mit Hilfe von (2.25), (2.30) sowie (2.32) lässt sich nun für $f \in L_2([0, 1])$ der Operator

$$\Pi_{\mathcal{K}_n} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad \Pi_{\mathcal{K}_n} f := \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\Gamma} f = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k \quad (2.36)$$

definieren. Dieser entspricht der Projektion von f auf den Eigenraum aller Eigenwerte λ_k des Crosskovarianzoperators $\tilde{\Gamma}$, die größer oder gleich $\alpha \gamma_k^\nu$ sind ($k \in \mathbb{Z}$). Der zufällige Operator

$$\hat{\Pi}_{\mathcal{K}_n} : L_2([0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1]), \quad \hat{\Pi}_{\mathcal{K}_n} f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k \quad (2.37)$$

wird als Schätzer für $\Pi_{\mathcal{K}_n}$ verwendet.

3. Funktionale lineare Regression

3.1. Das Modell und grundlegende Annahmen

Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) seien

$$X, W : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow L_2([0, 1], \mathcal{B} \cap [0, 1], \mu)$$

zwei funktionale Zufallsvariablen. μ sei als bekannt angenommen. Um zu gewährleisten, dass $X(\cdot, \omega)$ in $L_2([0, 1])$ liegt und X ein zufälliges Element des $L([0, 1])$ ist, wird $X(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0, 1]$, als messbar bezüglich der Produktsigmaalgebra $\mathcal{B} \cap [0, 1] \times \mathcal{A}$ angenommen. Entsprechendes gelte für W . Eine umfassende und allgemeine Behandlung der Messbarkeit und weiterer maßtheoretischer Resultate für funktionale Zufallsvariablen finden sich bei Hsing und Eubank (2015). Im Rahmen dieser Arbeit soll darauf nicht näher eingegangen werden. Der Übersichtlichkeit halber wird bei der Notation stets auf das zweite Argument verzichtet, wobei aus dem Kontext klar hervorgeht, ob es sich um ein zufälliges Element oder eine Realisation handelt.

Mit zwei Zufallsvariablen

$$Y, U : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$$

und einer positiven Konstante σ wird das funktionale lineare Regressionsmodell

$$Y = \int_0^1 \beta(s)X(s) \mu(ds) + \sigma U \tag{3.1}$$

betrachtet. Der unbekannte Slopeparameter β sei ein Element des Sobolevraums der periodischen Funktionen aus (2.7), also

$$\beta \in \mathcal{W}_\nu \text{ für ein } \nu > 0. \tag{V1}$$

W sei ein exogenes Instrument für X im Sinne von

$$E[UW(t)] = 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{V2}$$

Für die Wohldefiniertheit der (Cross-)Kovarianzoperatoren sei vorausgesetzt, dass X und W endliche zweite Momente haben im Sinne von

$$\int_0^1 E|X(t)|^2 dt < \infty \quad \text{und} \quad \int_0^1 E|W(t)|^2 dt < \infty. \tag{V3}$$

Der Zufallsvektor (X, W) sei zentriert und gemeinsam schwach stationär:

$$EX(t) = EW(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{V4}$$

$$c_{WX}(s, t) = c_{WX}(t - s), \quad s, t, \in [0, 1], \quad (\text{V5})$$

wobei c_{WX} der Kern des Crosskovarianzoperators aus (2.19) ist. Entsprechend gelte für X bzw. W die schwache Stationarität mittels

$$c_X(s, t) = c_X(t - s), \quad s, t, \in [0, 1] \quad (\text{V6})$$

$$c_W(s, t) = c_W(t - s), \quad s, t, \in [0, 1]. \quad (\text{V7})$$

Damit die lineare Vorhersage von X auf Basis von W wohldefiniert ist, sei angenommen, dass

$$\exists \tau > 0 : \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\lambda_k}{w_k} \right| \leq \tau \quad (\text{V8})$$

gilt. Dabei bezeichnen $\lambda_k, w_k, k \in \mathbb{Z}$, die Eigenwerte der (Cross-)Kovarianzoperatoren aus Kapitel 2.3. Für den Fehlerterm gelte

$$EU = 0, \quad \text{var}(U) = 1. \quad (\text{V9})$$

Die Regularisierungsfolge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die für die Inversion der (Cross-)Kovarianzoperatoren und somit für die Wohldefiniertheit der Schätzer benötigt wird, erfülle

$$\alpha = \alpha(n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = o(1) \quad \text{und} \quad \frac{1}{n\alpha^2} = o(1). \quad (\text{V10})$$

Für die Schätzung von β liege eine Stichprobe

$$(X_1, W_1, Y_1), \dots, (X_n, W_n, Y_n) \text{ u.i.v.} \quad (\text{V11})$$

der Länge n aus (X, W, Y) vor. Im weiteren Verlauf der Arbeit bezeichne $\{\phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ stets die exponentielle Basis des $L_2([0, 1])$ aus (2.9). $(\gamma_k^\nu)_{k \in \mathbb{Z}}$ bezeichne die Folge der Gewichte der Sobolevnorm, für die gilt

$$\gamma_k = 1 + |2\pi k|^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Formulierung weiterer Momentenbedingungen stützt sich auf die Mengen

$$\mathcal{F}_\eta^m := \left\{ (X, W) : (\text{V3}) - (\text{V5}), (\text{V8}), \right. \\ \left. \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle X, \phi_k \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^m \leq \eta \quad \text{und} \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle W, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^m \leq \eta \right\} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{G}_\eta^m := \left\{ X : (\text{V3}), (\text{V4}), (\text{V6}) \text{ für } X, \Gamma_X > 0 \quad \text{und} \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle X, \phi_k \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^m \leq \eta \right\}. \quad (3.3)$$

In der gesamten Arbeit wird ohne Einschränkung mit η das größte verwendete aller Suprema der Momente aus den Mengen \mathcal{F}_η^m und \mathcal{G}_η^m bezeichnet, also

$$\eta := \max_m \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle X, \phi_k \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^m, \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle W, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^m \right).$$

Dasselbe gilt für die Konstante τ .

Im Verlauf der Arbeit wird regelmäßig die Annahme der Exogenität des Regressors benötigt:

$$\mathbb{E}[UX(t)] = 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (\text{H0})$$

3.2. Unter Endogenität konsistenter Schätzer $\hat{\beta}_{IV}$ des Slopeparameters

Multipliziert man beide Seiten der Modellgleichung (3.1) mit dem optimalen linearen Instrument (2.23), so führt dies zu einer Art funktionalem Äquivalent der Normalgleichung des linearen Modells. Die anschließende Bildung des Erwartungswertes ergibt

$$g := \mathbb{E} [Y\tilde{W}] = \mathbb{E} [\langle \beta, X \rangle \tilde{W}] = \tilde{\Gamma}\beta. \quad (3.4)$$

Dabei steht auf der rechten Seite der Gleichung gerade der Crosskovarianzoperator von \tilde{W} und X angewendet auf β . Die Schätzung von β ist also mit der Inversion von $\tilde{\Gamma}$ verbunden. Da $\tilde{\Gamma}$ als kompakter Operator auf einem unendlichdimensionalen Hilbertraum im Allgemeinen jedoch nicht invertierbar sein muss, ist die Schätzung von β ein schlecht gestelltes inverses Problem. Um Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (3.4) zu gewährleisten, wird wie in Johannes (2016) angenommen, dass

$$|c_k|^2 > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\mathbb{E}[Y\langle W, \phi_k \rangle]|^2}{|c_k|^2} < \infty. \quad (V12)$$

Denn aus Lemma 14 (ii) folgt, dass wegen der gemeinsamen schwachen Stationarität $\text{Ker}\tilde{\Gamma} = \{0\}$ und somit $g \perp \text{Ker}\tilde{\Gamma}$. Um nach Theorem 15 eine Lösung der Normalgleichung zu erhalten, muss also nur noch gelten, dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda_k^2} |\langle g, \phi_k \rangle|^2$ endlich ist, wobei $\lambda_k = \mathbb{E}|\langle \tilde{W}, \phi_k \rangle|^2$ gerade die Eigenwerte von $\tilde{\Gamma}$ sind ($k \in \mathbb{Z}$). Einfache Umformungen zeigen, dass dies äquivalent ist zur Summierbarkeitsbedingung in (V12). Diese besagt, dass die Fourierkoeffizienten in geeigneter Weise schneller gegen Null konvergieren müssen als die Eigenwerte von Γ_{WX} , und ist ein Spezialfall der Picard-Bedingung, die häufig im Kontext inverser Probleme angenommen wird. Weitere Details dazu finden sich in Engl et al. (1996). Aus Theorem 15 ist bekannt, dass die Lösung von der Form

$$\beta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda_k} \langle g, \phi_k \rangle \phi_k$$

ist. Recht intuitiv schätzt man diese Lösung mit

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{IV} &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{g}_k}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} \phi_k, \quad \text{mit } \hat{g}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle \tilde{W}_{n,i}, \phi_k \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle Y_i}{\hat{c}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \phi_k, \end{aligned} \quad (3.5)$$

wobei gilt

$$I\{\hat{\lambda}_k \geq \gamma_k^\nu \alpha\} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} = 1 \iff I\{|\hat{c}_k|^2 \geq \alpha^2 \gamma_k^\nu\} = 1. \quad (3.6)$$

Dabei ist α der Regularisierungsparameter aus (V10). Da \tilde{W} die beste lineare Vorhersage auf Basis von X ist und Y auf \tilde{W} regressiert wird, ist dieser Schätzer ein funktionaler zweistufiger Kleinste-Quadrate-Schätzer. Weitere Eigenschaften von $\hat{\beta}_{IV}$ sowie das folgende Konsistenzresultat findet man bei Johannes (2016).

24. Theorem: [KONSISTENZ VON $\hat{\beta}_{IV}$] *Es gelten die Voraussetzungen (V1)–(V5) und (V8)–(V12). Wenn zudem $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und $E|U|^4 < \infty$, dann ist der Instrumentvariablen-Schätzer $\hat{\beta}_{IV}$ aus (3.5) konsistent für β im Sinne von*

$$E\|\hat{\beta}_{IV} - \beta\|_\nu^2 = o(1). \quad (3.7)$$

3.3. Unter Endogenität inkonsistenter Schätzer $\hat{\beta}$ des Slopeparameters

Analog zu den Überlegungen in Abschnitt 3.2 lässt sich ein Kleinste-Quadrate-Schätzer für β herleiten, der ohne die Verwendung eines Instrumentes auskommt, jedoch lediglich unter Exogenität konsistent ist. Zur Herleitung einer Normalgleichung multipliziert man (3.1) mit X und bildet den Erwartungswert:

$$h := E[YX] = E[\langle \beta, X \rangle X] = \Gamma_X \beta. \quad (3.8)$$

Zur Schätzung von β muss hier also der Kovarianzoperator von X invertiert werden. Unter der Voraussetzung (V6) erhält man mit Lemma 14 (ii) wieder die Orthogonalität von h zu $\text{Ker}\Gamma_X$. Mit der Voraussetzung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|E[Y \langle X, \phi_k \rangle]|^2}{x_k^2} < \infty \quad (V13)$$

ist nach Theorem 15 dann Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (3.8) sichergestellt und es gilt

$$\beta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x_k} \langle h, \phi_k \rangle \phi_k,$$

für das man mit

$$\check{\beta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} I\{\hat{x}_k \geq \alpha\} \cdot \phi_k \quad (3.9)$$

einen Schätzer hat. Diesen findet man zum Beispiel bei Johannes (2013), der das asymptotische Verhalten des Schätzers unter verschiedenen Regularitätsannahmen an $\beta \in L_2([0, 1])$ und den Kovarianzoperator, die mittels gewichteter L_2 -Normen formuliert werden, untersucht. Die Konsistenz von $\check{\beta}$, ausgedrückt durch die L_2 -Konvergenz (einer nicht notwendigerweise gewichteten Norm), lässt sich dabei leicht in den Kontext dieser Arbeit übertragen. Der Schätzer aus (3.9) und der Instrumentvariablen-Schätzer aus Abschnitt 3.2 sollen später verwendet werden, um eine Teststatistik für einen Test auf Exogenität im funktionalen linearen Regressionsmodell herzuleiten. Um bei der Berechnung der asymptotischen Verteilung der Teststatistik künstliche oder zumindest schlecht überprüfbare Bedingungen an die Konvergenzgeschwindigkeit der Indikatorfunktionen, die zur Regularisierung in beiden Schätzern verwendet werden, zu vermeiden, wird der Kleinste-Quadrate-Schätzer $\check{\beta}$ leicht modifiziert. Die Konsistenz des Schätzers unter Exogenität bleibt dabei erhalten, wie das nachfolgende Resultat zeigt.

25. Proposition: [KONSISTENZ VON $\hat{\beta}$] *Es gelten die Voraussetzungen (V1)–(V11) sowie (V13). Zusätzlich sei X exogen im Sinne von (H0) mit $X \in \mathcal{G}_\eta^4$, $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und $E|U|^4 < \infty$. Dann ist*

$$\hat{\beta}(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \phi_k \rangle Y_i}{\hat{x}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \cdot \phi_k(t) \quad (3.10)$$

ein konsistenter Schätzer für β aus (3.1) im Sinne von

$$E\|\hat{\beta} - \beta\|_\nu^2 = o(1).$$

BEWEIS: Der Beweis folgt der Argumentation des Beweises von Proposition 3.1 von Johannes (2013), der wesentliche Unterschied ist die Verwendung von $I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$ anstelle von $I\{\hat{x}_k \geq \alpha\}$.

Definiere

$$\tilde{\beta}_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k. \quad (3.11)$$

Dann lässt sich mit der Dreiecksungleichung abschätzen, dass

$$E\|\hat{\beta} - \beta\|_\nu^2 \leq 2 \left\{ E\|\hat{\beta} - \tilde{\beta}_n\|_\nu^2 + E\|\tilde{\beta}_n - \beta\|_\nu^2 \right\},$$

wobei nun beide Summanden getrennt betrachtet werden. Für die Abschätzung des ersten Summanden nutzt man die Ungleichung $\hat{\lambda}_k \leq \hat{x}_k$, $k \in \mathbb{N}$, aus Lemma A.1.4. Außerdem wird für

$$T_{n,k} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle - |\langle X_i, \phi_k \rangle|^2 \langle \beta, \phi_k \rangle \right)$$

die Abschätzung (A.10)

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{E|T_{n,k}|^{2m}}{x_k^m} \leq \frac{C}{n^m} \left\{ \|\beta\|^{2m} (E\|X\|^2)^m + \sigma^{2m} \eta \right\} \eta$$

aus Lemma A.2 in Johannes (2013), die hier analog gültig ist, für $m = 1$ benutzt.

$$\begin{aligned} E\|\hat{\beta} - \tilde{\beta}_n\|_\nu^2 &= E \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} - \langle \beta, \phi_k \rangle \right) I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k \right\|_\nu^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^\nu E \left| \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle - \hat{x}_k \langle \beta, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^2 \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k^\nu E \left| \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle - \hat{x}_k \langle \beta, \phi_k \rangle}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k^\nu} \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle - \hat{x}_k \langle \beta, \phi_k \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k^\nu} \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(Y_i \langle X_i, \phi_k \rangle - |\langle X_i, \phi_k \rangle|^2 \langle \beta, \phi_k \rangle \right) \right|^2 \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{E} |T_{n,k}|^2}{x_k} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{\gamma_k^\nu} \\
 &\leq \frac{C}{n\alpha^2} \{ \|\beta\|^2 \mathbb{E} \|X\|^2 + \sigma^2 \} \eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{\gamma_k^\nu} \\
 &\leq \frac{C\eta}{n\alpha^2} \{ \|\beta\|^2 \mathbb{E} \|X\|^2 + \sigma^2 \} \mathbb{E} \|X\|^2 \longrightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Die Konvergenz des zweiten Summanden wird im Beweis von Proposition 3.1. in Johannes (2016) verifiziert. \square

Für die Teststatistik ist neben der Konsistenz von $\hat{\beta}$ unter Exogenität insbesondere dessen Inkonsistenz unter Endogenität von Interesse. Für einen endogenen Regressor X verschwindet $\mathbb{E}[UX(t)]$ nicht für alle $t \in [0, 1]$. Bei der Herleitung der Normalengleichung (3.8) fällt auf, dass dieser Term für entsprechende t stehen bleibt:

$$\mathbb{E}[YX] = \Gamma_X \beta + \sigma \mathbb{E}[UX]. \quad (3.12)$$

Somit müsste in $\hat{\beta}$ anstelle einer Schätzung für $\mathbb{E}[YX]$ eine für $\mathbb{E}[(Y - \sigma U)X]$ einfließen. Da dies nicht geschieht (U ist nicht beobachtbar), ist eine Verzerrung des Schätzers die Konsequenz.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \hat{\beta}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \phi_k \rangle Y_i I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{1}{\hat{x}_k} - \frac{1}{x_k} \right) \right] \phi_k(t) \\
 &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[\left(I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \phi_k \rangle Y_i \right] \frac{1}{x_k} \phi_k(t) \\
 &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle X_i, \phi_k \rangle Y_i \right]}{x_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k(t) \\
 &=: F_{n,1} + F_{n,2} + F_{n,3}.
 \end{aligned}$$

Wegen (2.21) gilt für den ersten Term die Abschätzung $\hat{x}_k \geq \alpha$. Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt mit Lemma A.1.1 und (V11)

$$\begin{aligned}
 \|F_{n,1}\|^2 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\langle X_i, \phi_k \rangle Y_i I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right] \right|^2 \\
 &\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\mathbb{E} [|\langle X_i, \phi_k \rangle|^2 Y_i^2]} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right|^2} \right|^2
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C\eta}{n\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{\mathbb{E} [|\langle X_1, \phi_k \rangle|^2 Y_1^2]} \right|^2.$$

Erneute Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung lässt für $X \in \mathcal{G}_\eta^8$ und $\mathbb{E}U^8 < \infty$ die Abschätzung

$$\mathbb{E} [|\langle X_1, \phi_k \rangle|^2 Y_1^2] \leq x_k \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{\langle X_1, \phi_k \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^4} \mathbb{E}Y_1^4 \leq C\sqrt{\eta}x_k$$

zu. Mit (V10) folgt $\|F_{n,1}\|^2 \leq \frac{C\eta}{n\alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \frac{C\eta}{n\alpha^2} \mathbb{E}\|X\|^2 = o(1)$. $\|F_{n,2}\| = o(1)$ folgt aus der mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ kleiner werdenden Differenz der Indikatorfunktionen. Die nötigen Argumente werden später im Beweis von Proposition 29 ausgeführt. Für den führenden Term gilt schließlich wegen (V11)

$$\begin{aligned} F_{n,3} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{E}[\langle X_1, \phi_k \rangle Y_1]}{x_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \phi_k(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\mathbb{E}[\langle \beta, X_1 \rangle \langle X_1, \phi_k \rangle]}{x_k} + \frac{\sigma \mathbb{E}[U \langle X_1, \phi_k \rangle]}{x_k} \right) I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \phi_k(t). \end{aligned}$$

Dabei gilt für die erste Summe für $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{E}[\langle \beta, X_1 \rangle \langle X_1, \phi_k \rangle]}{x_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \phi_k(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \phi_k(t) \rightarrow \beta.$$

Es bleibt also der Term

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\sigma \mathbb{E}[U \langle X_1, \phi_k \rangle]}{x_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \phi_k(t)$$

übrig, der im exogenen Modell gleich Null ist. Unter Endogenität hingegen ist ohne weitere Annahmen an die Korrelation zwischen U und X sowie an die Konvergenzraten der Eigenwerte des Kovarianzoperators von X selbst die Konvergenz der Reihe nicht bekannt. In jedem Fall kann für $X \in \mathcal{G}_\eta^m$, $m \in \mathbb{N}$, der Biasterm nicht die Nullfunktion sein.

4. Schwache Konvergenz des Vorhersagefehlers von $\hat{\beta}_{IV}$

Als Vorüberlegung zur Konstruktion einer Teststatistik, deren asymptotische Verteilung bekannt und insbesondere nicht entartet sein soll, wird zunächst der Vorhersagefehler des Instrumentvariablenschätzers $\hat{\beta}_{IV}$ untersucht. Dazu orientiert man sich an der Argumentation des Beweises von Theorem 2 von Cardot et al. (2006). Dort wird ein Schätzer für das exogene Modell basierend auf funktionalen Hauptkomponenten betrachtet und dabei eine recht allgemein gehaltene Regularisierungsmethode verwendet, für die die in der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegte Regularisierung ein Spezialfall ist. Die Annahme der schwachen Stationarität ist bei Cardot et al. (2006) nicht nötig, jedoch müssen die Eigenwerte des Kovarianzoperators eine konvexe Funktion des Laufindex sein, was für die am häufigsten betrachteten Abnahmeraten erfüllt ist.

Zunächst wird der Instrumentvariablenschätzer aus (3.5) durch Einsetzen der Modellgleichung (3.1) für Y in mehrere Terme zerlegt, die durch die in den Abschnitten 2.3 und 2.4 eingeführten Operatoren und Funktionale ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{IV} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle Y_i}{\hat{c}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \phi_k \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \frac{\overline{\hat{c}_k}}{\hat{w}_k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\langle \beta, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle + \sigma \langle W_i, \phi_k \rangle U_i) \phi_k \\
&= \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta + \tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n \\
&= \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta + \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger - \tilde{\Gamma}^\dagger \right) \hat{\mathcal{U}}_n + \tilde{\Gamma}^\dagger \left(\hat{\mathcal{U}}_n - \tilde{\mathcal{U}}_n \right) + \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n.
\end{aligned}$$

Für $\tilde{\Gamma}_n$ gilt dabei

$$\tilde{\Gamma}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\lambda}_k \langle \cdot, \phi_k \rangle \phi_k + N_n, \quad \|N_n\| = \mathcal{O}_P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Somit entsteht bei der Berechnung von $\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta$ neben einer mit $I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$ regularisierten Version von β ein weiterer Term, für dessen Diskussion

$$B_n =: \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\overline{c_k}}{w_k} f_n(\lambda_k) \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_m, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle \phi_k \quad (4.1)$$

eingeführt wird. Weiter ist eine regularisierte Version von β der Form

$$\tilde{\beta} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k = \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\Gamma} \beta \quad (4.2)$$

nötig. Damit lässt sich die Differenz zwischen $\hat{\beta}_{IV}$ und der regularisierten Version von β aus (4.2) schreiben als

$$\hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta} = R_n + \sum_{j=1}^3 B_{j,n}, \quad (4.3)$$

mit

$$\begin{aligned} B_{1,n} &= (\tilde{\Gamma}_n^\dagger - \tilde{\Gamma}^\dagger) \hat{\mathcal{U}}_n \\ B_{2,n} &= \tilde{\Gamma}^\dagger (\hat{\mathcal{U}}_n - \tilde{\mathcal{U}}_n) \\ B_{3,n} &= \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta - \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\Gamma} \beta - B_n \\ R_n &= \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n + B_n. \end{aligned}$$

Ziel ist es nun, die asymptotische Verteilung des Vorhersagefehlers

$$\langle \hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta}, X_{n+1} \rangle = \left\langle R_n + \sum_{j=1}^3 B_{j,n}, X_{n+1} \right\rangle \quad (4.4)$$

durch Anwendung eines zentralen Grenzwertsatzes herzuleiten. Zur Formulierung der Normalisierungsfolge für ebendiesen sei die reelle Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.5)$$

definiert.

26. Bemerkung: Es wird sich zeigen, dass die Normalisierungsfolge $\sqrt{\frac{n}{s_n}}$ ist. Aus (2.21) folgt direkt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Mit (V10) und $s_n \leq \frac{1}{\alpha} E\|X\|^2$ erhält man die Abschätzung

$$\frac{n}{s_n} \geq Cn\alpha > Cn\alpha^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

und somit, dass $\sqrt{\frac{n}{s_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass $\langle B_{j,n}, X_{n+1} \rangle$ für $j \in \{1, 2, 3\}$ Biasterme sind, die mit passender Rate asymptotisch vernachlässigbar sind, bevor im übernächsten Abschnitt der schwach konvergente Term $\langle R_n, X_{n+1} \rangle$ behandelt wird.

4.1. Diskussion der Biasterme

Um die asymptotische Vernachlässigbarkeit der Biasterme zu beweisen, verwendet man jeweils die Reihendarstellung bezüglich der Orthonormalbasis $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ des $L_2([0, 1])$, die auf Grund der gemeinsamen schwachen Stationarität von X und W für die (Cross-)Kovarianzoperatoren und L_2 -Funktionen verwendet werden kann. Dabei wird in den Beweisen regelmäßig zwischen den Koeffizienten des geschätzten optimalen linearen Instrumentes oberhalb und unterhalb des Regularisierungsparameters α unterschieden. Für die relevanten Summanden wiederum betrachtet man diejenigen zusammen, für die die geschätzten als auch die wahren Eigenwerte von $\tilde{\Gamma}$ oberhalb von α liegen. Dazu seien die beiden Indexmengen

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n &:= \{k \in \mathbb{Z} \mid \hat{w}_k \geq \alpha\} \\ \mathcal{L}_n &:= \left\{k \in \mathcal{K}_n \mid \hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right\}\end{aligned}$$

eingeführt.

27. Proposition: *Es gelten (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ und $E|U|^{32} < \infty$. Dann gilt*

$$\langle B_{2,n}, X_{n+1} \rangle = o_P \left(\sqrt{\frac{s_n}{n}} \right).$$

BEWEIS: Da X_{n+1} stochastisch unabhängig von $(X_i, W_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ist, lässt sich der Term schreiben als

$$\begin{aligned}E |\langle B_{2,n}, X_{n+1} \rangle|^2 &= E \left| \langle \tilde{\Gamma}^\dagger (\hat{U}_n - \tilde{U}_n), X_{n+1} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{\lambda_k^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} E \left| \left(\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{c_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^2.\end{aligned}$$

Für $k \in \mathcal{K}_n$ lässt sich der Erwartungswert auf der rechten Seite mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen zu

$$E \left| \left(\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^2 \leq \sqrt{E \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^4} \sqrt{E \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^4}.$$

Dabei gilt für den ersten Faktor wegen (A.7)

$$\sqrt{E \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^4} \leq \frac{C}{n} \sqrt{\left(\frac{|c_k|^4}{w_k^4} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \leq \frac{C}{n} \left(\frac{|c_k|^2}{w_k^2} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right).$$

Für die Erwartung im zweiten Faktor erhält man mit (V2), (V9) und (V11) sowie der Abschätzung

$$\mathbb{E}|\langle W_1, \phi_k \rangle|^4 \leq w_k^2 \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_1, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^4 \leq \eta w_k^2,$$

die sich aus $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ ergibt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^4 &= n \mathbb{E} U_1^4 \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_1, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^4 w_k^2 \\ &\quad + n(n-1) \mathbb{E} U_1^2 \mathbb{E} U_2^2 \mathbb{E} |\langle W_1, \phi_k \rangle|^2 \mathbb{E} |\langle W_2, \phi_k \rangle|^2 \\ &\leq C_{\eta, \tau} n w_k^2 + n^2 w_k^2 \\ &= n^2 w_k^2 \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Zusammen mit der Überlegung $\frac{1}{\alpha} o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n\alpha^2}} o(1) = o(1)$, die aus (V10) folgt, erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\lambda_k^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{c_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{C\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k}{\lambda_k^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{|c_k|^2}{w_k^2} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \\ &\leq \frac{C\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + o \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \frac{C\sigma^2}{n^2 \alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &= \frac{C s_n}{n^2} + o(1) \frac{C\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k^2}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k^2}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq C s_n$ (und möglicherweise sogar endlich), da $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Nullfolge ist. Der erste Term ist also der führende Term, der obige Ausdruck ist dementsprechend ein $\mathcal{O} \left(\frac{s_n}{n^2} \right)$.

Es bleibt der Fall $\hat{w}_k < \alpha$ zu betrachten. Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Abschätzung (4.6) führen zu

$$\begin{aligned} &\frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\lambda_k^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{c_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k |c_k|^2}{\lambda_k^2 w_k^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| I\{\hat{w}_k < \alpha\} \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n^2} \sqrt{\sup_{k \in \mathbb{Z}} P(\hat{w}_k < \alpha \wedge \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{\lambda_k w_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle W_i, \phi_k \rangle \right|^4} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sigma^2}{n} \sqrt{\sup_{k \in \mathbb{Z}} P(\hat{w}_k < \alpha \wedge \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu)} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}.$$

Mit (A.4) lässt sich $\sup_{k \in \mathbb{Z}} P(\hat{w}_k < \alpha \wedge \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu)$ abschätzen, sodass man für den führenden Term

$$\frac{C}{n^{3/2}} s_n = \mathcal{O}\left(\frac{s_n}{n^{3/2}}\right)$$

erhält. Insgesamt ergibt dies

$$\mathbb{E} |\langle B_{2,n}, X_{n+1} \rangle|^2 = \mathcal{O}\left(s_n \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = o(1).$$

Durch Anwendung der Markov-Ungleichung folgt die Behauptung. \square

28. Proposition: *Es gelten (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ und $\mathbb{E}|U|^{32} < \infty$. Dann gilt*

$$\langle B_{1,n}, X_{n+1} \rangle = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

BEWEIS: Wegen der Orthogonalität der Basisfunktionen sowie der stochastischen Unabhängigkeit von X_{n+1} und $(X_i, W_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\langle B_{1,n}, X_{n+1} \rangle|^2 &= \mathbb{E} \left| \left\langle \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger - \tilde{\Gamma}^\dagger \right) \hat{\mathcal{U}}_n, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[f_n(\hat{\lambda}_k) - f_n(\lambda_k) \right] \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \langle X_{n+1}, \phi_k \rangle \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \mathbb{E} \left| \left[f_n(\hat{\lambda}_k) - f_n(\lambda_k) \right] \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Da alle Summanden für $\hat{w}_k < \alpha$ gleich Null sind, genügt es $k \in \mathcal{K}_n$ zu betrachten. Außerdem gilt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| f_n(\hat{\lambda}_k) - f_n(\lambda_k) \right| &\leq \left| \frac{\lambda_k - \hat{\lambda}_k}{\lambda_k \hat{\lambda}_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &\quad + \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Setzt man dies ein, so lässt sich $CE |\langle B_{1,n}, X_{n+1} \rangle|^2$ durch die Summe dreier Terme abschätzen, die mit $\mathbb{E} \left| \langle B_{1,n}^{[i]}, X_{n+1} \rangle \right|^2$, $i \in \{1, 2, 3\}$, bezeichnet und im Folgenden separat

behandelt werden. Für die Betrachtung von $B_{1,n}^{[1]}$ überlegt man sich zunächst, dass für alle $k \in \mathcal{L}_n$ gilt

$$\left| \frac{\lambda_k - \hat{\lambda}_k}{\lambda_k \hat{\lambda}_k} \right| \leq \frac{1}{\alpha \gamma_k^{2\nu} \lambda_k} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|.$$

Damit und durch Einschieben von $\frac{\bar{c}_k}{w_k}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[1]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 &\leq \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k^2} \mathbb{E} \left| \lambda_k - \hat{\lambda}_k \right| \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{2\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k w_k} \mathbb{E} \left| \lambda_k - \hat{\lambda}_k \right| \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\quad + \frac{2\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k^2} \mathbb{E} \left| \lambda_k - \hat{\lambda}_k \right| \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung schätzt man weiter ab und wendet (4.6) erneut an. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[1]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 &\leq \frac{2\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^4} \left\{ \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k w_k} \sqrt{\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k^2} \left(\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^8 \right)^{1/4} \left(\mathbb{E} \left| \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right|^8 \right)^{1/4} \right\} \\ &\leq \frac{2\sigma^2}{n \alpha^2} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \sum_{k \in \mathcal{L}_n} w_k \left\{ \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k w_k} \sqrt{\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k^2} \left(\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^8 \right)^{1/4} \left(\mathbb{E} \left| \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right|^8 \right)^{1/4} \right\}. \end{aligned}$$

Hier liefert Lemma A.2.1 die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^4}, \left(\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^8 \right)^{1/4} &\leq \frac{C}{n} x_k \lambda_k + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ \left(\mathbb{E} \left| \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right|^8 \right)^{1/4} &\leq \frac{C}{n} \frac{\lambda_k}{w_k} + \frac{C}{n^2} \frac{x_k}{w_k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right), \end{aligned}$$

mit deren Hilfe man

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[1]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 &\leq \frac{C}{n \alpha^2} \frac{1}{n} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k w_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k} \left(x_k \lambda_k + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\quad \left[\frac{1}{w_k} + \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{C}{n} \frac{\lambda_k}{w_k} + \frac{C}{n^2} \frac{x_k}{w_k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

erhält, wobei die grobe Abschätzung

$$\sup_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{1}{\lambda_k} \left(\frac{C}{n} \frac{\lambda_k}{w_k} + \frac{C}{n^2} \frac{x_k}{w_k} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = o(1)$$

möglich ist. Zusammen mit (V10) und Lemma A.1.3 führt dies zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[1]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 &\leq o \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k} \left(x_k \lambda_k + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\quad + o \left(\frac{1}{n} \right) \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k w_k}{\gamma_k^{2\nu} \lambda_k} \left(x_k \lambda_k + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \\ &\leq o \left(\frac{1}{n} \right) \left\{ \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k^2}{\gamma_k^{2\nu}} + \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k^2 w_k}{\gamma_k^{2\nu}} + o(\alpha) \left[\sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{3\nu}} + \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k w_k}{\gamma_k^{3\nu}} \right] \right\} \\ &= o \left(\frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Für die Summanden mit $\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu$ und $\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu$ geht man zunächst ähnlich vor und nutzt zusätzlich aus, dass $\frac{\lambda_k}{\hat{\lambda}_k} \leq 1$ sowie $\frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \frac{1}{\alpha \gamma_k^\nu}$ ist.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[3]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k \lambda_k}{w_k} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{w_k} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu}} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} + \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu}} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \leq x_k$ und es gilt

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \mathbb{E} \|X\|^2 < \infty.$$

4. Schwache Konvergenz des Vorhersagefehlers von $\hat{\beta}_{IV}$

Da $\alpha = \alpha(n)$ nach (V10) eine Nullfolge ist, existiert für jedes feste $k \in \mathbb{Z}$ ein $n(k)$ sodass für alle $n > n(k)$ gilt $\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$. Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = 0.$$

Der Satz von Lebesgue ist also auf die erste Reihe anwendbar. Beachtet man weiter, dass alle Summanden nicht negativ sind, führt dies zu

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \lim_{n \rightarrow \infty} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = 0.$$

Folglich gilt

$$\frac{\sigma^2}{n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Die zweite Reihe lässt sich nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wieder mit (A.7) sowie (4.6) abschätzen.

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu}} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ & \leq \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right|^4} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^4} \\ & \leq \frac{\sigma^2}{n^2 \alpha^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k w_k \left(\frac{\lambda_k}{w_k} + \frac{C}{n} \frac{x_k}{w_k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) = o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

da alle Reihen konvergent sind nach Lemma A.1.3. Damit ist auch

$$\mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[3]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es bleibt $B_{1,n}^{[2]}$, also die Summanden für $\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu$ und $\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ zu betrachten. Wiederum ergänzt man den Term $\frac{\bar{c}_k}{w_k}$ und wendet auf die aus Anwendung der Dreiecksungleichung resultierenden Summen jeweils die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \left\langle B_{1,n}^{[2]}, X_{n+1} \right\rangle \right|^2 &= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{2\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \left(\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \\ &\quad + \frac{2\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{w_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^4} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^4} \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k}{w_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sqrt{\mathbb{E} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n U_i \langle \phi_k, W_i \rangle \right|^4} \end{aligned}$$

Die erste Reihe schätzt man mit $\frac{1}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \frac{1}{\alpha \gamma_k^\nu}$ sowie mit (4.6) und (A.7) weiter ab. Für die zweite Reihe verwendet man ebenfalls (4.6) sowie, dass für festes $k \in \mathbb{Z}$ für $n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} = P(\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu) = o(1).$$

Analog zur Diskussion des entsprechenden Terms von $B_{2,n}$ und mit der Stetigkeit von $\sqrt{\cdot}$ folgt die gewünschte Aussage mit dem Satz von Lebesgue.

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \langle B_{1,n}^{[2]}, X_{n+1} \rangle \right|^2 \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{C}{n} \frac{|c_k|^2}{w_k^2} + \frac{C}{n^2} \frac{x_k}{w_k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sqrt{P(\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu)} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left\{ \frac{C}{n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k + \frac{C}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k^2}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + \frac{C}{n^3} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k}{\lambda_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right\} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) \left\{ \frac{C}{n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k + \frac{C}{n^2 \alpha} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k^2}{\gamma_k^\nu} + \frac{C}{n^3 \alpha} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k}{\gamma_k^\nu} \right\} \\ &= o\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

da alle Reihen nach Lemma A.1.3 konvergieren. Insgesamt ergibt sich nun

$$\mathbb{E} |\langle B_{1,n}, X_{n+1} \rangle|^2 = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit der Markovungleichung folgt die Behauptung. \square

29. Proposition: *Es gelten (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ und $\mathbb{E}|U|^{32} < \infty$. Dann gilt*

$$\langle B_{3,n}, X_{n+1} \rangle = o_P\left(\sqrt{\frac{s_n}{n}}\right).$$

BEWEIS: Da

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_m \rangle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_m, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle \phi_k \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k \\
 &+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} \langle W_i, \phi_k \rangle I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \phi_k
 \end{aligned}$$

und weil $\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta$ gerade eine durch $I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$ regularisierte Version von β ist, muss also gezeigt werden, dass gilt

$$\left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \left(I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) \phi_k, X_{n+1} \right\rangle = o_P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{\hat{c}}_k}{\hat{w}_k} \langle W_i, \phi_k \rangle I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \right. \\
 & \quad \left. \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \phi_k - B_n, X_{n+1} \right\rangle = o_P \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie dem Zusammenhang

$$\left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right| = \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^2$$

ergibt sich für den Ausdruck in (4.8)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \left(I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) \phi_k, X_{n+1} \right\rangle \right| \\
 &= \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \left(I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \right| \\
 &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k^{1/2} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|.
 \end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite lässt sich wiederum mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen gegen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k^{1/2} \leq \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k} = \|\beta\| \sqrt{\mathbb{E} \|X\|^2} < \infty.$$

Zudem kann man sich leicht überlegen, dass für alle $\omega \in \Omega$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right| = 1 \\ \iff & I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} + I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\}I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} = 1 \end{aligned}$$

gilt. Mit der Dreiecksungleichung erhält man also die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right| \\ & \leq I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} + P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right). \end{aligned}$$

Da $\alpha = \alpha(n)$ nach (V10) eine Nullfolge ist, existiert für jedes beliebige, aber feste $k \in \mathbb{Z}$ ein $n(k) \in \mathbb{N}$, sodass $I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = 0$ für alle $n > n(k)$. Darum gilt für jede reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k^{1/2} a_n I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} = 0.$$

Nach Lemma A.1.2 gilt für $\mathcal{I}_n := \{k \in \mathbb{Z} \mid \lambda_k \geq 4\tau\alpha\gamma_k^\nu\}$ die Abschätzung

$$\sup_{k \in \mathcal{I}_n} P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right) \leq \frac{C\eta}{n\alpha} \mathbb{E}\|X\|^2 \left(1 + \frac{\mathbb{E}\|W\|^2}{\alpha n}\right),$$

mit deren Hilfe man erhält

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k^{1/2} P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right) \\ & \leq \frac{C\eta}{\sqrt{n\alpha^2}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k^{1/2} \mathbb{E}\|X\|^2 \left(1 + \frac{\mathbb{E}\|W\|^2}{\alpha n}\right) = 0. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Lebesgue ergibt sich somit

$$\sqrt{n} \mathbb{E} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \left(I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} - I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right) \phi_k, X_{n+1} \right\rangle = o(1),$$

was Behauptung (4.8) impliziert. Für (4.9) lässt sich L_2 -Konvergenz zeigen. Dazu zerlegt man den Term folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \langle W_i, \phi_k \rangle I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \phi_k - B_n, X_{n+1} \right\rangle \\ & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \\ & \quad - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{c}_k}{w_k} f_n(\lambda_k) \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \end{aligned}$$

4. Schwache Konvergenz des Vorhersagefehlers von $\hat{\beta}_{IV}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} f_n(\hat{\lambda}_k) \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \left(f_n(\hat{\lambda}_k) - f_n(\lambda_k) \right) \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \\
&=: T_{n,1} + T_{n,2}.
\end{aligned}$$

In allen von Null verschiedenen Summanden von $T_{n,1}$ schätzt man zunächst $f_n(\hat{\lambda}_k)$ gegen $\frac{1}{\alpha \gamma_k^\nu}$ ab. Mit der stochastischen Unabhängigkeit von X_{n+1} und $(X_i, W_i, Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sowie der Orthogonalität der $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ergibt sich für $T_{n,1}$ nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\mathbb{E} |T_{n,1}|^2 \leq \frac{1}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{\gamma_k^{2\nu}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right|^4} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle \mathbb{E} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^4}.$$

Da die Terme für $m \neq k$ unkorreliert sind und weil

$$\mathbb{E} \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_1 \rangle \right|^4 < \infty \tag{4.10}$$

nach Lemma A.1.3, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle \mathbb{E} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^4 &\leq C \left(n \mathbb{E} |\langle W_i, \phi_k \rangle|^4 + n(n-1) w_k^2 \right) \\
&\leq n^2 w_k^2 \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\mathbb{E} |\langle W_i, \phi_k \rangle|^4$ für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ gegen ηw_k^2 abgeschätzt. Mit (A.7) erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |T_{n,1}|^2 &\leq \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{\gamma_k^{2\nu}} \left[\left(\frac{|c_k|^2}{w_k^2} + \frac{C x_k}{n w_k} \right) \left(1 + \frac{C}{n} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right] \\
&= \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\gamma_k^{\nu^2}} \left(x_k \lambda_k + \frac{x_k^2}{n} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right) = o \left(\frac{1}{n} \right),
\end{aligned}$$

da beide Reihen nach Lemma A.1.3 konvergieren und $n \alpha^2 \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. $T_{n,2}$ erfüllt

$$T_{n,2} \leq \frac{1}{n \alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{\bar{c}_k}{\gamma_k^\nu w_k} \frac{\lambda_k - \hat{\lambda}_k}{\lambda_k} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{L}_n} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} + \frac{1}{\lambda_k} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) \\
 & \quad \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle.
 \end{aligned}$$

Für den ersten Ausdruck lässt sich wieder L_2 -Konvergenz zeigen. Man nutzt die stochastische Unabhängigkeit von X_{n+1} und der Stichprobe sowie die Orthogonalität der Basis. Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt sich für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ mit (4.10), (4.11), (A.6) und Lemma A.1.3

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{\bar{c}_k}{\gamma_k^\nu w_k} \frac{\lambda_k - \hat{\lambda}_k}{\lambda_k} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^2 \\
 & \leq \frac{1}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^\nu w_k} \sqrt{\mathbb{E} |\lambda_k - \hat{\lambda}_k|^4} \sqrt{n^2 w_k^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
 & \leq \frac{C}{n\alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{L}_n} \frac{x_k}{\gamma_k^\nu} \left(\frac{x_k \lambda_k}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = o\left(\frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Der zweite Ausdruck kann für $\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu \wedge \lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu$ analog zu dem entsprechenden Term in Proposition 27 behandelt werden: Mit $\frac{\lambda_k}{\hat{\lambda}_k} \leq 1$ sowie $\frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \frac{1}{\alpha \gamma_k^\nu}$ gilt für das zweite Moment

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{L}_n} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^2 \\
 & \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_k|^2 x_k}{w_k^2} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \frac{1}{\hat{\lambda}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^2 \\
 & \leq \frac{1}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{w_k} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \langle W, \phi_k \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X \rangle \right|^2 \\
 & \leq \frac{C}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \\
 & = o\left(\frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

4. Schwache Konvergenz des Vorhersagefehlers von $\hat{\beta}_{IV}$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus dem Satz von der dominierten Konvergenz. Es bleiben die Summanden für $\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ zu betrachten. Für diese wird wieder mit (4.11) L_2 -Konvergenz gezeigt.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\bar{c}_k}{w_k} \frac{1}{\lambda_k} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^2 \\
& \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \sqrt{\mathbb{E} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right|^4} \\
& \leq \frac{C}{n} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \\
& = \mathcal{O}\left(\frac{s_n}{n}\right) \sqrt{\sup_{k \in \mathbb{Z}} P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right)} \\
& = o\left(\frac{s_n}{n}\right),
\end{aligned}$$

da laut Lemma A.1.2 gilt $P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu \wedge \lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Damit gilt

$$T_{n,2} = o\left(\frac{s_n}{n} + \frac{1}{n}\right),$$

womit (4.9) bewiesen ist. □

4.2. Schwach konvergenter Term

In diesem Abschnitt soll verifiziert werden, dass $\sqrt{\frac{n}{s_n}} \langle R_n, X_{n+1} \rangle$ unter (H0) schwach gegen eine Normalverteilung konvergiert. Dazu wird der Ausdruck zunächst geschrieben als

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{n}{s_n}} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{U}_n + B_n, X_{n+1} \rangle \\
& = \sqrt{\frac{n}{s_n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_n(\lambda_k) \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i \langle \tilde{W}_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle + B_n \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{s_n n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \langle W_i, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \left\{ \sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right\} \\
& =: \sum_{i=1}^n Z_{n,i}.
\end{aligned}$$

Es seien $\mathcal{F}_{n,0} =: \sigma(X_{n+1})$ und $\mathcal{F}_{n,i} =: \sigma(X_{n+1}, X_1, W_1, Y_1, \dots, X_i, W_i, Y_i)$. Dann ist $(\mathcal{F}_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ eine aufsteigende Filtrierung und $Z_{n,i}$ ist $\mathcal{F}_{n,i}$ -messbar für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Existenz des ersten Moments von $Z_{n,i}$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, folgert man aus der Existenz des zweiten Moments. Denn unter Ausnutzung von $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$, (V9), (V2), (2.20), Lemma A.1.3 und $E|U^4| < \infty$ gilt für alle i, n :

$$\begin{aligned} E|Z_{n,i}|^2 &= \frac{1}{s_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} E\left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X \rangle\right)^2 \\ &\leq \frac{C}{s_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m\right) \\ &\leq \frac{C}{s_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} = \frac{C}{n} < \infty. \end{aligned}$$

Wegen (V11) sind U_i und $\langle \phi_m, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n,i-1}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Zusammen mit (V2) bzw. (2.20) liefert dies

$$\begin{aligned} &E[Z_{n,i} | \mathcal{F}_{n,i-1}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{s_n n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \left\{ E[\sigma U_i \langle W_i, \phi_k \rangle | \mathcal{F}_{n,i-1}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle E[\langle \phi_m, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle | \mathcal{F}_{n,i-1}] \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s_n n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \langle \phi_k, X_{n+1} \rangle \left\{ \sigma E[U_i \langle W_i, \phi_k \rangle] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle E[\langle \phi_m, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle] \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist $(Z_{n,i}, \mathcal{F}_{n,i})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ ein Martingaldifferenzschema. Die asymptotische Normalität der Summe der $Z_{n,i}$ folgt aus einem zentralen Grenzwertsatz für Martingaldifferenzschemata. Dazu werden die Gültigkeit einer bedingten Lindeberg-Bedingung und die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit der bedingten Varianz gegen eine Konstante geprüft. Dies stellen die beiden folgenden Lemmata bereit.

30. Lemma: [BEDINGTE LINDEBERG-BEDINGUNG] *Es gelten (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ und $E|U|^4 < \infty$. Dann gilt*

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{i=1}^n E\left[|Z_{n,i}|^2 I\{|Z_{n,i}| > \varepsilon\} | \mathcal{F}_{n,i-1}\right] = o(1).$$

BEWEIS: Um die bedingte Lindeberg-Bedingung zu verifizieren, wird die unbedingte Lyapunov-Bedingung

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E} |Z_{n,i}|^4 = o(1)$$

gezeigt. Diese impliziert die unbedingte Lindeberg-Bedingung, welche wiederum die bedingte Lindeberg-Bedingung zur Folge hat, siehe zum Beispiel Alj et al. (2014) und Gänssler et al. (1978).

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |Z_{n,i}|^4 \\ &= \frac{1}{s_n^2 n} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \langle W_1, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_2 \rangle \left\{ \sigma U_1 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_1 \rangle \right\} \right)^4 \\ &\leq \frac{C}{s_n^2 n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\mathbb{E} |\langle W_1, \phi_k \rangle|^4 \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_2 \rangle|^4}{|c_k|^4} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sigma^4 \mathbb{E} U_1^4 + \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_1 \rangle \right|^4 \right) \\ &\quad + \frac{C}{s_n^2 n} \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ k \neq l}} \mathbb{E} \left[\left(\frac{|\langle W_1, \phi_k \rangle|^2 |\langle \phi_k, X_2 \rangle|^2}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sigma^2 U_1^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 |\langle \phi_m, X_1 \rangle|^2 \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{|\langle W_1, \phi_l \rangle|^2 |\langle \phi_l, X_2 \rangle|^2}{|c_l|^2} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \left(\sigma^2 U_1^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq l}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 |\langle \phi_m, X_1 \rangle|^2 \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ gilt die Abschätzung

$$\mathbb{E} |\langle W_1, \phi_k \rangle|^4 \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_2 \rangle|^4 = w_k^2 x_k^2 \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_1, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^4 \mathbb{E} \left| \frac{\langle \phi_k, X_2 \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^4 \leq \eta^2 w_k^2 x_k^2.$$

Außerdem ist für alle von Null verschiedenen Summanden $\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu$. Die Terme $\sigma^4 \mathbb{E} U_1^4 + \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_1 \rangle \right)^4$ lassen sich für alle $k \in \mathbb{Z}$ nach Lemma (A.1.3) gegen eine Konstante abschätzen. Die Reihe mit den quadratischen Summanden verhält sich asymptotisch wie s_n^2 , da die Terme $\sigma^2 \mathbb{E} U_1^2 + \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq q}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 |\langle \phi_m, X_1 \rangle|^2 \right)$ für $q = k, l$ gemäß Lemma A.1.3 lediglich eine multiplikative Konstante liefern. Für $m = k$ bzw. $m = l$ ergibt sich eine Reihe, die möglicherweise konvergiert, in jedem Fall aber gegen s_n abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[\frac{|\langle W_1, \phi_k \rangle|^2 |\langle \phi_k, X_2 \rangle|^2}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 |\langle \phi_k, X_1 \rangle|^2 \right] \\ &\leq \eta \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{ |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k \} s_n \leq C s_n.$$

Insgesamt ergibt dies

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |Z_{n,i}|^4 &\approx \frac{C}{n s_n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k^2}{|c_k|^4} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{C}{n \alpha s_n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k}{\gamma_k^\nu |c_k|^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

da $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k}{\gamma_k^\nu |c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq C s_n$ gilt. \square

31. Lemma: [STOCHASTISCHE KONVERGENZ DER BEDINGTEN VARIANZ] *Es gelten (H0), (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ und $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. V^2 sei eine fast sicher endliche Zufallsvariable. Falls zusätzlich die Voraussetzungen*

$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k^2}{|c_k|^4} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} (|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k)^2 = o(1), \quad (4.12)$$

$$\frac{C}{s_n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \right)^2 = o(1) \quad (4.13)$$

erfüllt sind, dann folgt

$$V_{n,n}^2 =: \sum_{i=1}^n \mathbb{E} [|Z_{n,i}|^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} V^2.$$

BEWEIS: Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt auf Grund der stochastischen Unabhängigkeit von X_{n+1} und $\mathcal{F}_{n,i-1}$ unter (H0)

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} [|Z_{n,i}|^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \quad (4.14) \\ &= \frac{1}{s_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 \left\{ \sigma^2 \mathbb{E} [|\langle W_i, \phi_k \rangle|^2 U_i^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left[|\langle W_i, \phi_k \rangle|^2 \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right)^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Terme in den bedingten Erwartungen wegen (V11) stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n,i-1}$. Zusammen mit (V2), (V9) und (2.20) ergibt sich

$$\mathbb{E} [|Z_{n,i}|^2 \mid \mathcal{F}_{n,i-1}] = \frac{1}{s_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2$$

$$\left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right). \quad (4.15)$$

Es sei nun

$$V^2 := \sigma^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k. \quad (4.16)$$

Um die stochastische Konvergenz von $V_{n,n}^2$ gegen V^2 zu erhalten, wird der L_2 -Abstand betrachtet. Durch Umordnung und Abschätzung gegen die quadratischen Terme ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} (V_{n,n}^2 - V^2) \\ &= \mathbb{E} \left(\frac{1}{s_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ m \neq k}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right) \right. \\ & \quad \left. - \sigma^2 - \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\sigma^2 \left[\frac{1}{s_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - \frac{s_n}{s_n} \right] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \left[\frac{1}{s_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - \frac{s_n}{s_n} \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{s_n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \right)^2 \\ &\leq \frac{C \sigma^4}{s_n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k) \right)^2 \\ & \quad + \frac{C}{s_n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k) \right)^2 \\ & \quad + \frac{C}{s_n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \right)^2 \\ &= \mathcal{V}_n^{[1]} + \mathcal{V}_n^{[2]} + \mathcal{V}_n^{[3]}. \end{aligned}$$

Mit $\mathbb{E} (|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k}{|c_k|^2} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k) \right)^2$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{w_k^2}{|c_k|^4} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k'\} E(|\langle \phi_k, X_{n+1} \rangle|^2 - x_k)^2.$$

Unter Voraussetzung (4.12) folgt damit $\mathcal{V}_n^{[1]} = o(1)$. Mit (4.12) und Lemma A.1.3 gilt außerdem $\mathcal{V}_n^{[2]} = o(1)$. Mit Voraussetzung (4.13) gilt $\mathcal{V}_n^{[3]} = o(1)$. Da L_2 -Konvergenz stochastische Konvergenz impliziert, folgt nun $V_{n,n}^2 \xrightarrow{P} V^2$. Da nach Satz 18

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k = \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 < \infty$$

gilt, ist V^2 fast sicher endlich und als Konstante eine messbare Funktion und somit eine Zufallsvariable. Die Behauptung folgt. \square

32. Proposition: *Es gelten (H0), (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ und $E|U|^4 < \infty$. Falls (4.12) und (4.13) erfüllt sind, dann folgt*

$$\sqrt{\frac{n}{s_n}} \langle R_n, X_{n+1} \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V^2)$$

mit V^2 aus (4.16).

BEWEIS: Mit den Vorüberlegungen zu Beginn von Abschnitt 4.2 und den Aussagen der Lemmata 30 und 31 folgt die Behauptung mit Theorem 3.2 aus Hall und Heyde (1980) mit den alternativen Voraussetzungen aus Corollary 3.1. \square

Schließlich ist das asymptotische Verhalten aller Terme aus (4.3) untersucht worden, sodass das folgende Theorem über die asymptotische Verteilung des Vorhersagefehlers für den Instrumentvariablenschätzer formuliert werden kann.

33. Theorem: *Es gelten (H0), (V2)–(V5) und (V8)–(V12). Außerdem seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{32}$ und $E|U|^{32} < \infty$. Falls zusätzlich die Voraussetzungen (4.12) und (4.13) erfüllt sind, dann folgt*

$$\sqrt{\frac{n}{s_n}} \langle \hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta}, X_{n+1} \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V^2)$$

mit V^2 aus (4.16).

BEWEIS: Nach (4.3) gilt die Zerlegung $\hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta} = R_n + \sum_{i=1}^3 B_{i,n}$. Mit den Resultaten der Propositionen 27, 28 und 29 folgt dann

$$\sqrt{\frac{n}{s_n}} \left\langle \sum_{i=1}^3 B_{i,n}, X_{n+1} \right\rangle \xrightarrow{P} 0.$$

Zusammen mit der schwachen Konvergenz von $\sqrt{\frac{n}{s_n}} \langle R_n, X_{n+1} \rangle$, die durch Proposition 32 bereitgestellt wird, folgt die Behauptung durch Anwendung des Lemmas von Slutsky. \square

5. Asymptotischer Test auf Exogenität

5.1. Vorüberlegung

Ziel dieses Kapitels ist es, einen asymptotischen Test auf Exogenität zu konstruieren. Um das Quantil für die Testentscheidung zu bestimmen, wird die asymptotische Verteilung der Teststatistik unter der Nullhypothese benötigt. Dazu wird im Folgenden angenommen, dass das Modell (3.1) exogen im Sinne von (H0) ist. Gemäß Theorem 24 ist der Instrumentvariablen-Schätzer $\hat{\beta}_{IV}$ aus (3.5) sowohl unter Endogenität als auch unter Exogenität konsistent. $\hat{\beta}$ aus (3.10) hingegen ist im exogenen Modell konsistent, unter Endogenität im Allgemeinen jedoch nicht, wie in Abschnitt 3.3 ausgeführt wurde. Damit bildet der Abstand beider Schätzer die Grundlage für eine Teststatistik. Die L_2 -Norm der Schätzerdifferenz ist jedoch als Teststatistik ungeeignet, da ihre asymptotische Verteilung stets entartet ist. Dies ist die Aussage des nachfolgenden Theorems.

34. Theorem: *Es existiert keine Zufallsvariable Z mit nicht-entarteter Verteilung, so dass $s_n \|\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}\| \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$, wobei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige reelle Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ ist.*

BEWEIS: Das Theorem lässt sich auf zwei Wegen verifizieren. So kann man das Vorgehen von Ruymgaart et al. (2000), Kapitel 4, auf den vorliegenden Kontext übertragen. Hier sei jedoch der Argumentation des Beweises von Theorem 4.1 bei Cardot et al. (2006) gefolgt.

Angenommen, es existieren eine nicht-entartete Zufallsvariable $\|Z\|$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie gefordert, sodass

$$s_n \|\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}\| \xrightarrow{\mathcal{D}} \|Z\|. \quad (5.1)$$

Da Normkonvergenz schwache Konvergenz (im Sinne der Funktionalanalysis) impliziert, muss $s_n (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta})$ schwach konvergieren. Laut einer Folgerung aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz, die zum Beispiel als Korollar V.3.7 (a) in Werner (2011) zu finden ist, ist dies äquivalent zu

$$s_n \langle \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}, f \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle Z, f \rangle \quad \forall f \in L_2([0, 1]). \quad (5.2)$$

Durch Ergänzen von $\tilde{\beta}$ aus (4.2) lässt sich der Ausdruck auf der linken Seite schreiben als

$$s_n \langle \hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta}, f \rangle + s_n \langle \tilde{\beta} - \hat{\beta}, f \rangle. \quad (5.3)$$

Es sei nun zunächst der erste Summand betrachtet. Zerlegt man $\hat{\beta}_{IV} - \tilde{\beta}$ wie in (4.3) und nutzt die Resultate der Propositionen 27, 28, 29 und 32, so sieht man, dass lediglich der führende Term $\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n + B_n$ für die asymptotische Verteilung betrachtet werden muss.

Wiederholt man die Argumente aus Kapitel 4 für den zweiten Summand aus (5.3), so erhält man als führenden Term entsprechend $\Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + B_{X,n}$, wobei

$$B_{X,n} := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{x_k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \phi_k.$$

Der führende Term von (5.3) lässt sich also für ein beliebiges $f \in L_2([0, 1])$ ausdrücken als

$$\begin{aligned} & s_n (\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n + B_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} - B_{X,n}, f) \\ &= \frac{s_n}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_k, f \rangle I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{x_k} \right) \left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right) \\ &=: \frac{s_n}{n} \sum_{i=1}^n Z_i, \end{aligned}$$

wobei die Zufallsvariablen $\{Z_i\}_{i=1 \dots n}$ stochastisch unabhängig, identisch verteilt und zentriert sind. Für die Varianz von Z_1 erhält man mit Rechenschritten, wie sie ausführlich später im Beweis von Proposition 36 dargelegt werden

$$\text{var}(Z_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right) =: v_{n,f}^2.$$

Für das asymptotische Verhalten von $v_{n,f}^2$ lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Dabei sei erwähnt, dass der Operator $\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1}$ positiv und selbstadjungiert ist. Gemäß Abschnitt 2.2 ist dann $(\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2}$ wohldefiniert und eindeutig.

1. Fall: f liegt im Definitionsbereich von $(\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2}$. Das heißt

$$(\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_k \rangle (\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2} \phi_k \in L_2([0, 1])$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2} f\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \langle (\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1}) \phi_k, \phi_k \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 < \infty. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Varianz der $\{Z_i\}_{i=1\dots n}$ endlich, denn mit Lemma A.1.3 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n,f}^2 \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \|(\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2} f\|^2 < \infty.$$

Die Voraussetzungen für den zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy sind erfüllt, es gilt

$$\sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i}{v_{n,f}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Folglich ist $s_n = \sqrt{n}$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz erhält man zudem $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,f}^2 = \|(\tilde{\Gamma}^{-1} - \Gamma_X^{-1})^{1/2} f\|^2 =: v_f^2$, sodass mit dem Lemma von Slutsky und der Transformation der Normalverteilung gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, v_f^2).$$

Dabei hängt die asymptotische Varianz von den Eigenwerten von $\tilde{\Gamma}$ und Γ_X sowie von f ab.

2. Fall: Angenommen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \infty$.

Eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$f_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \quad k \mapsto \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}.$$

Diese Funktionen sind $(2^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B})$ -messbar und liegen in $L_1(\delta_{\mathbb{Z}})$, denn für jedes beliebige, aber feste $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} < \infty.$$

Außerdem gilt $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem gilt für jedes beliebige, aber feste $k \in \mathbb{Z}$ die Konvergenz

$$\lim_{n \nearrow \infty} f_n(k) = \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \lim_{n \nearrow \infty} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} = \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2,$$

das heißt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise und somit insbesondere fast überall. Mit dem Satz von Beppo Levi, wie er unter anderem als Satz 4.20 bei Klenke (2008) nachzulesen ist, folgt schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n,f}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x} \right) |\langle f, \phi_k \rangle|^2 = \infty.
 \end{aligned}$$

Somit erhält man im zweiten Fall keine asymptotische Normalverteilung.

Das Konvergenzverhalten in Verteilung unterscheidet sich also für verschiedene $\tilde{\Gamma}$ und Γ_X . Dies ist gleichbedeutend damit, dass der Ausdruck aus (5.2) nicht in Verteilung konvergieren kann, da man keine einheitliche Grenzverteilung erhält. Mit dem Kontrapositionsprinzip erhält man einen Widerspruch zu (5.1). \square

5.2. Konstruktion einer Teststatistik

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, eignet sich die L_2 -Norm der Schätzerdifferenz auf Grund ihrer entarteten asymptotischen Verteilung nicht als Teststatistik. Stattdessen wird der Ausdruck

$$T_n := \left\langle \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}, \Gamma_{X,n} \left(\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta} \right) \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left| \left\langle \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}, X_j \right\rangle \right|^2 \quad (5.4)$$

verwendet. Es wird also das Skalarprodukt aus der Schätzerdifferenz und dem Bild selbiger unter der empirischen Version des Kovarianzoperators von X betrachtet. Da $\Gamma_{X,n}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist, ist T_n eine Metrik auf dem $L_2([0, 1])$ und somit geeignet um den Abstand zwischen den Schätzern zu beurteilen. Diese Idee findet man in Müller und Stadtmüller (2005), die zentrale Grenzwertsätze für die Differenz zwischen Schätzer und wahren Slopeparameter in einem generalisierten funktionalen linearen Modell unter Exogenität beweisen. Dafür wird ein trunkierter, auf der Karhunen-Loève-Entwicklung basierender Schätzer verwendet.

Ziel des restlichen Kapitels ist es nun die asymptotische Verteilung von T_n unter (H0) herzuleiten. In Anlehnung an die für beide Schätzer identisch gewählte Regularisierung wird (2.30) für die Definition der reellen Folge $(t_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ verwendet, wobei

$$t_n^2 := \|(\tilde{\Gamma}^\dagger - \Gamma_X^\dagger) \Gamma_X\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2, \quad (5.5)$$

die Teil der Normalisierungsfolge für den zentralen Grenzwertsatz für T_n sein wird. Zudem werden die folgenden Ausdrücke für $k, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ benötigt:

$$D_{i,k,n} := \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{1}{\hat{x}_k} \langle X_i, \phi_k \rangle \quad (5.6)$$

$$D_{i,k} := \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{1}{x_k} \langle X_i, \phi_k \rangle \right) \quad (5.7)$$

$$S_{i,m} := \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \quad (5.8)$$

Zunächst wird die Teststatistik mit den Operatoren und Funktionalen aus Kapitel 2 formuliert, um dann in einem Zwischenschritt für beide Schätzer eine Zerlegung angelehnt an Cardot et al. (2006) vorzunehmen. Die entstehenden Terme werden so zusammengefasst, dass sie jeweils aus der Differenz der analogen Ausdrücke für $\hat{\beta}_{IV}$ und $\hat{\beta}$ bestehen, um abschließend noch Hilfstern einzufügen.

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta} &= \tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n + \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \beta \\
 &= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger - \tilde{\Gamma}^\dagger \right) \hat{\mathcal{U}}_n - \left(\Gamma_{X,n}^\dagger - \Gamma_X^\dagger \right) \mathcal{U}_{X,n} + \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \right) \beta \\
 &\quad + \tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \\
 &= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) - \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) + \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \right) \beta \\
 &\quad + \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \\
 &= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) \\
 &\quad + \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \right) \beta - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} A_n \\
 &\quad + \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n \right) - \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n \right) \\
 &\quad + \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n \\
 &= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + R_n,
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

mit

$$\begin{aligned}
 T_{n,1} &:= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) \\
 T_{n,2} &:= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \right) \beta - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} A_n \\
 T_{n,3} &:= \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n \right) - \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n \right) \\
 R_n &:= \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} + A_n
 \end{aligned}$$

wobei

$$A_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \phi_k. \tag{5.10}$$

Aus dem Term $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n, X_j \rangle|^2$ geht dabei die asymptotische Verteilung der Teststatistik hervor. Er lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n, X_j \rangle|^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{x}_k - x_k) \left| \sum_{i=1}^n D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \right|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left\{ \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 \left| \sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^n D_{i,k} \left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \overline{D_{j,k}} \left(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \overline{S_{j,m}} \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \sum_{j=1}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \left\{ \right. \\
 & \quad \sum_{i=1}^n D_{i,k} \left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \overline{D_{i,l}} \left(\sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{i,m}} \right) \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n D_{i_1,k} \left(\sigma U_{i_1} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m} \right) \overline{D_{i_2,l}} \left(\sigma U_{i_2} + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{i_2,m}} \right) \right\} \\
 & =: \sum_{i=1}^5 R_{n,i}. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

In Abschnitt 5.3 wird gezeigt, dass $R_{n,3}$ bei Multiplikation mit einer geeigneten Normalisierungsfolge einen zentralen Grenzwertsatz für Martingaldifferenzschemata erfüllt und somit asymptotisch normal ist. Dafür werden zunächst eine bedingte Lindeberg-Bedingung sowie die stochastische Konvergenz der bedingten Varianz gegen eine Konstante gezeigt. Die verbleibenden Terme werden anschließend in Abschnitt 5.4 diskutiert. Dort wird bewiesen, dass $R_{n,1}$, $R_{n,4}$ und $R_{n,5}$ sowie die aus $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$ hervorgehenden Terme asymptotisch vernachlässigbar sind und dass $R_{n,2}$ einen Bias-Term liefert.

5.3. Schwach konvergenter Term

Im Folgenden sei für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{U}_{i,k} := \sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \tag{5.12}$$

definiert. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \mathcal{U}_{i,k} &= 0 \\
 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{i,k}|^2 &= \sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \\
 \mathbb{E} D_{i,k} S_{i,k} &= 0.
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{U}_{i,k}$ unkorreliert mit $D_{i,k}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Im Folgenden sei der Term

$$\begin{aligned} \frac{n}{2t_n} R_{n,3} &= \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}} \\ &= \sum_{j=2}^n Y_{n,j}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

betrachtet, mit

$$Y_{n,j} := \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k},$$

wobei

$$Z_{n,j,k} := \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}}.$$

Ziel ist es nun zu zeigen, dass $\frac{n}{t_n} R_{n,3}$ schwach gegen eine Normalverteilung konvergiert. Für die aufsteigende Filtrierung $(\mathcal{F}_{n,j})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n}$, definiert über

$$\mathcal{F}_{n,j} =: \sigma(X_1, W_1, Y_1, \dots, X_j, W_j, Y_j), \quad \mathcal{F}_{n,0} =: \sigma(\emptyset, \Omega), \quad (5.14)$$

ist $Y_{n,j}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{n,j}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$. Weiter ist $Y_{n,j}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$ zentriert und unter den Voraussetzungen (V9) und $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^2$ quadratisch integrierbar. Da $Z_{n,j,k}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_{n,j-1}$ ist und $\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n,j-1}$ ist, erfüllt $Y_{n,j}$ zudem für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$ die Martingaldifferenzeigenschaft:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n,j} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] &= \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_{n,j,k} \mathbb{E}[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] \\ &= \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_{n,j,k} \mathbb{E}[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}] = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Folge $(S_{n,p} := \sum_{j=2}^p Y_{n,j}, \mathcal{F}_{n,p})_{2 \leq p \leq n < \infty}$ ein Martingaldifferenzschema. Um nun einen zentralen Grenzwertsatz für Martingaldifferenzschemata anwenden zu können, wird zunächst im Rahmen von Proposition 36 die Gültigkeit einer bedingten Lindeberg-Bedingung überprüft, um anschließend mit Proposition 38 die stochastische Konvergenz der bedingten Varianz des Diagonalelements $S_{n,n}$ gegen eine Konstante zu verifizieren. Dieses Vorgehen findet sich zum Beispiel bei Hall (1984), Beweis von Theorem 1, und bei Birke (2006), Beweis von Satz A.4.

Da im vorliegenden Fall die Filtrierung $\mathcal{F}_{n,j} = \mathcal{F}_j$ erfüllt, ist $(S_n := \sum_{j=2}^n Y_{n,j}, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Martingaldifferenzen. Auf diesen Spezialfall lässt sich oben beschriebenes Vorgehen anwenden, wie man in den Bemerkungen nach Corollary 3.1 in Hall und Heyde (1980) nachlesen kann.

35. Bemerkung: Es wird sich zeigen, dass die Normalisierungsfolge für den zentralen Grenzwertsatz $\frac{n}{t_n}$ ist. Nach Voraussetzung (2.21) gilt $|c_k|^2 \leq x_k w_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Somit tritt der Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 = 0$ genau dann ein, wenn $|c_k|^2 = x_k w_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Das bedeutet aber, dass die Korrelation von $\langle X, \phi_k \rangle$ und $\langle W, \phi_k \rangle$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gleich Eins sein muss und somit, dass W und X perfekt linear zusammenhängen. Dann wäre aber im Falle der Endogenität auch W mit U korreliert.

(ii) Es ist im Allgemeinen nicht klar, ob t_n^2 divergiert oder konvergiert. Es werden die quadrierten Abstände zwischen Eins und dem quadrierten inversen Korrelationskoeffizienten von $\langle X, \phi_k \rangle$ und $\langle W, \phi_k \rangle$ aufsummiert. Das Konvergenzverhalten von t_n ist damit von der Korrelation zwischen X und W und somit von der Güte des Instrumentes abhängig.

(iii) In jedem Fall gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t_n} = \infty$. Denn mit $t_n \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} |x_k - \lambda_k|^2}$ sowie (V10) und Lemma A.1.3 erhält man die Abschätzung

$$\frac{n}{t_n} \geq Cn\alpha > Cn\alpha^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

und somit, dass $\sqrt{\frac{n}{t_n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.

36. Proposition: [BEDINGTE LINDEBERG-BEDINGUNG] Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ die bedingte Lindeberg-Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0: \sum_{j=2}^n \mathbb{E} [Y_{n,j}^2 I\{|Y_{n,j}| > \varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] \xrightarrow{P} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (5.15)$$

BEWEIS: Wie in Lemma 30 folgt die Gültigkeit der bedingten Lindeberg-Bedingung aus der unbedingten Lyapunov-Bedingung. Es wird also

$$\sum_{j=2}^n \mathbb{E} |Y_{n,j}|^4 = o(1)$$

verifiziert. Dazu zerlegt man den Term zunächst folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n \mathbb{E} |Y_{n,j}|^4 \\ &= \frac{1}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k}|^4 + \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}}|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{k,l,q \in \mathbb{Z}, \\ |k|, |l| \neq |q|, |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k}|^2 \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q} Z_{n,j,q}} \right] \\
 & + \sum_{\substack{k,l,p,q \in \mathbb{Z}, \\ |k|, |l|, |p| \neq |q|, \\ |k|, |l| \neq |p|, |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k}} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}} \overline{\mathcal{U}_{j,p} D_{j,p} Z_{n,j,p}} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q} Z_{n,j,q}} \right] \Big\} \\
 =: & \sum_{i=1}^4 L_{n,i}.
 \end{aligned}$$

Für $L_{n,1}$ nutzt man zunächst aus, dass für alle $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, n\}$ die $Z_{n,j,k}$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}$ sind, sowie dass $\mathcal{U}_{j,k}$ und $D_{j,k}$ unkorreliert sind. Weiter ist das vierte absolute Moment von $\mathcal{U}_{j,k}$ wegen (V9) und Lemma A.1.3 gleichmäßig beschränkt. Das vierte absolute Moment von $D_{j,k}$ schätzt man wegen (V10) und $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ ab gegen

$$\mathbb{E}|D_{j,k}|^4 \leq C \left(\frac{\mathbb{E}|\langle W, \phi_k \rangle|^4}{|c_k|^4} + \frac{\mathbb{E}|\langle X, \phi_k \rangle|^4}{x_k^4} \right) \leq C\eta \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right) \leq \frac{C\eta}{\alpha^2}. \quad (5.16)$$

Auch für das vierte absolute Moment von $Z_{n,j,k}$ wird eine Abschätzung benötigt. Da für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $i, p \in \{1, \dots, n\}, i \neq p$, $\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}$ und $\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}$ stochastisch unabhängig sind und $\mathbb{E}\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} = 0$ gilt, sind bei dessen Berechnung lediglich die quadratischen Terme relevant. Die Momente von $\mathcal{U}_{i,k}$ sind beschränkt nach Lemma A.1.3 und (V9). Zudem gilt wegen der Unkorreliertheit von $|\mathcal{U}_{i,k}|^2$ und $|D_{i,k}|^2$ für alle $k \in \mathbb{Z}, i_1 \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}|\mathcal{U}_{i_1,k} D_{i_1,k}|^2 = \mathbb{E}|\mathcal{U}_{i_1,k}|^2 \mathbb{E}|D_{i_1,k}|^2 \leq C \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right). \quad (5.17)$$

Zusammen mit (V10) ergibt dies

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4 \\
 & = x_k^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}|\mathcal{U}_{i,k}|^4 \mathbb{E}|D_{i,k}|^4 + 2 \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq j-1} \mathbb{E}|\mathcal{U}_{i_1,k} D_{i_1,k}|^2 \mathbb{E}|\mathcal{U}_{i_2,k} D_{i_2,k}|^2 \right\} \\
 & \leq \frac{Cn}{\alpha^2} x_k^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + Cn^2 x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}. \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

Damit folgt für $L_{n,1}$

$$L_{n,1} = \frac{1}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|\mathcal{U}_{j,k}|^4 \mathbb{E}|D_{j,k}|^4 \mathbb{E}|Z_{n,j,k}|^4$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^4 \alpha^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4 \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^4 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{1}{n \alpha^2} x_k^2 + \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 \right) \\
 &= o(1) \frac{1}{t_n^4} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right),
 \end{aligned}$$

wobei die erste Reihe nach Lemma A.1.3 konvergiert und die zweite Reihe sich gegen $C t_n^2$ abschätzen lässt (oder sogar konvergiert).

Sei nun der Blick auf $L_{n,4}$ gerichtet. Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von $Z_{n,j,k}$ und $\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}} \mathcal{U}_{j,p} D_{j,p} Z_{n,j,p} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q} Z_{n,j,q}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}} \mathcal{U}_{j,p} D_{j,p} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q}} \right] \mathbb{E} \left[Z_{n,j,k} \overline{Z_{n,j,l}} Z_{n,j,p} \overline{Z_{n,j,q}} \right].
 \end{aligned}$$

Zunächst überlegt man sich die Struktur im ersten Erwartungswert, der den Term

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{U}_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l}} \mathcal{U}_{j,p} \overline{\mathcal{U}_{j,q}} \\
 &= \left(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{j,m} \right) \left(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{j,m}} \right) \left(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |p|}} S_{j,m} \right) \left(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |q|}} \overline{S_{j,m}} \right)
 \end{aligned}$$

enthält. Für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $D_{j,k}, D_{j,l}, D_{j,p}$ und $D_{j,q}$ sind unkorreliert mit $S_{j,m}$ für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{m \in \mathbb{Z} : |m| = |k|, |l|, |p|, |q|\}$ und stochastisch unabhängig von U_j . Da $\mathbb{E} S_{j,m} = \mathbb{E} U_j = 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt, sind unter (H0) für obigen Erwartungswert lediglich die Terme

$$S_{j,k} D_{j,k} \overline{S_{j,l} D_{j,l}} S_{j,p} D_{j,p} \overline{S_{j,q} D_{j,q}}$$

relevant. Für diese gilt jedoch wegen ihrer Unkorreliertheit

$$\mathbb{E} \left[S_{j,k} D_{j,k} \overline{S_{j,l} D_{j,l}} S_{j,p} D_{j,p} \overline{S_{j,q} D_{j,q}} \right] = \mathbb{E} [S_{j,k} D_{j,k}] \mathbb{E} [\overline{S_{j,l} D_{j,l}}] \mathbb{E} [S_{j,p} D_{j,p}] \mathbb{E} [\overline{S_{j,q} D_{j,q}}],$$

wobei für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [S_{j,k} D_{j,k}] &= \langle \beta, \phi_k \rangle \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle \left(\frac{\langle W_j, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_j, \phi_k \rangle}{x_k} \right) \right] \\
 &= \langle \beta, \phi_k \rangle \left(\frac{c_k}{c_k} - \frac{x_k}{x_k} \right) = 0. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass auch alle Erwartungswerte der Form $\mathbb{E} [\overline{S_{j,k} D_{j,k}}]$ und $\mathbb{E} [S_{j,k} \overline{D_{j,k}}]$ gleich Null sind, da wie in Abschnitt 2.3 erklärt lediglich reellwertige $X(t)$, $t \in [0, 1]$, betrachtet werden. Somit ist $L_{n,4} = 0$.

Für $L_{n,2}$ ergibt sich auf Grund der stochastischen Unabhängigkeit von $Z_{n,j,k}$ und $\mathcal{U}_{j,l}$ für $k, l \in \mathbb{Z}$ die Darstellung

$$L_{n,2} = \frac{1}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ k \neq l}} \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}}|^2 \mathbb{E} |Z_{n,j,k} \overline{Z_{n,j,l}}|^2.$$

Für die erste Erwartung überlegt man sich weiter, dass

$$\mathcal{U}_{j,k} = S_{j,l} + S_{j,-l} + \sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{j,m}, \quad (5.20)$$

wobei $\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{j,m}$ unkorreliert mit $S_{j,k}$, $S_{j,-k}$ sowie $D_{j,k} \overline{D_{j,l}}$ ist. Auch $(\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{j,m}) (\sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{j,m})$ ist unkorreliert mit $D_{j,k} \overline{D_{j,l}}$. Zudem gilt $S_{j,-k} = \overline{S_{j,k}}$. Mit Lemma A.1.3 führt dies zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}}|^2 \\ &= \mathbb{E} \left| (S_{j,l} + S_{j,-l} + \sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{j,m}) (\overline{S_{j,k}} + \overline{S_{j,-k}} + \sigma U_j + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} \overline{S_{j,m}}) D_{j,k} \overline{D_{j,l}} \right|^2 \\ &\leq C \{ \mathbb{E} |S_{j,l} \overline{S_{j,k}} D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 + \mathbb{E} |S_{j,l} D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 \\ &\quad + \mathbb{E} |\overline{S_{j,k}} D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 + \mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 \} \\ &\leq C \{ \mathbb{E} |\overline{S_{j,k}} D_{j,k}|^2 \mathbb{E} |S_{j,l} \overline{D_{j,l}}|^2 + \mathbb{E} |D_{j,k}|^2 \mathbb{E} |S_{j,l} \overline{D_{j,l}}|^2 \\ &\quad + \mathbb{E} |\overline{S_{j,k}} D_{j,k}|^2 \mathbb{E} |D_{j,l}|^2 + \mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 \}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dies wird mit der Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |\overline{S_{j,k}} D_{j,k}|^2 &\leq |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \sqrt{\mathbb{E} |\langle X, \phi_k \rangle|^4 \mathbb{E} |D_{j,k}|^4} \\ &\leq \sqrt{\eta} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k \left(\frac{\mathbb{E} |\langle W, \phi_k \rangle|^4}{|c_k|^4} + \frac{\mathbb{E} |\langle X, \phi_k \rangle|^4}{x_k^4} \right)^{1/2} \\ &\leq C |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^{1/2} \leq \frac{C |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

die für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathcal{K}_n$ gilt, weiter abgeschätzt. Mit den bisherigen Rechnungen lässt sich nun auch die zweite Erwartung handhaben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |Z_{n,j,k} \overline{Z_{n,j,l}}|^2 &\leq C x_k^2 x_l^2 I \{ \lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu \} I \{ \lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu \} \left\{ \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \mathcal{U}_{i,l} D_{i,l} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E} \left| \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq j-1} \mathcal{U}_{i_1,k} D_{i_1,k} \mathcal{U}_{i_2,l} D_{i_2,l} \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq Cx_k^2x_l^2I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} E|\mathcal{W}_{i,k}D_{i,k}\mathcal{W}_{i,l}D_{i,l}|^2 \right. \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq j-1} E[\mathcal{W}_{i_1,k}D_{i_1,k}\mathcal{W}_{i_1,l}D_{i_1,l}] E[\overline{\mathcal{W}_{i_2,k}D_{i_2,k}\mathcal{W}_{i_2,l}D_{i_2,l}}] \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq j-1} E|\mathcal{W}_{i_1,k}D_{i_1,k}|^2 E|\mathcal{W}_{i_2,l}D_{i_2,l}|^2 \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq j-1} E|\mathcal{W}_{i_1,k}D_{i_1,k}|^2 E[\mathcal{W}_{i_2,l}D_{i_2,l}] E[\overline{\mathcal{W}_{i_3,l}D_{i_3,l}}] \\
 &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq j-1} E[\mathcal{W}_{i_1,k}D_{i_1,k}] E[\overline{\mathcal{W}_{i_2,k}D_{i_2,k}}] \\
 &\quad \left. E[\mathcal{W}_{i_3,l}D_{i_3,l}] E[\overline{\mathcal{W}_{i_4,l}D_{i_4,l}}] \right\}.
 \end{aligned}$$

Auf Grund der Unkorreliertheit von $\mathcal{W}_{i,k}$ und $D_{i,k}$ für alle $k \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, n\}$, sind die letzten beiden Summen gleich Null. Mit den Ungleichungen (5.21) und (5.22) erhält man für alle $k, l \in \mathbb{Z}, |k| \neq |l|$ und $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned}
 &E|\mathcal{W}_{i,k}D_{i,k}\mathcal{W}_{i,l}D_{i,l}|^2 \\
 &\leq C \left\{ \frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C|\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C|\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\}. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

Die zweite Summe ist gleich Null, da für alle $k, l \in \mathbb{Z}, |k| \neq |l|$ und $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ $S_{i_1,k}D_{i_1,k}$ und $S_{i_1,l}D_{i_1,l}$ unkorreliert sind und in Folge (5.19) erneut angewendet werden kann:

$$E[\mathcal{W}_{i_1,k}D_{i_1,k}\mathcal{W}_{i_1,l}D_{i_1,l}] = E[S_{i_1,k}D_{i_1,k}S_{i_1,l}D_{i_1,l}] = E[S_{i_1,k}D_{i_1,k}] E[S_{i_1,l}D_{i_1,l}] = 0. \quad (5.24)$$

Die Summanden der dritten Summe lassen sich mit (5.17) abschätzen. Somit erhält man

$$\begin{aligned}
 &E|Z_{n,j,k}\overline{Z_{n,j,l}}|^2 \\
 &\leq Cx_k^2x_l^2I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\}(n-1) \\
 &\quad \left\{ \left[\frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C|\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{C|\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (n-2) \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Verwendet man dies für die Abschätzung von $L_{n,2}$, nutzt die Symmetrie der Summen über k und l aus und schätzt gegen die quadratischen Terme ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 L_{n,2} &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 &\quad \left\{ \frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\} \\
 &\quad \left\{ \left[\frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{C |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + (n-2) \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\} \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 &\quad \left\{ \frac{C}{\alpha^4} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^2 |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 x_l^2 + \frac{C |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 x_l^2}{\alpha^2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + n \left[\frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right] \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\} \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 (n\alpha^2)^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4 \right)^2 + \frac{C}{t_n^2 n^2 \alpha^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 x_l^4 + \frac{C}{n^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 \left(\frac{w_k x_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \\
 & + \frac{C}{t_n^2 n \alpha} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l^2 \left(\frac{w_l x_l}{|c_l|^2} - 1 \right) I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} + \frac{C}{n} \\
 & \leq o\left(\frac{1}{t_n^4} + \frac{1}{t_n^2 n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{C}{t_n^2 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4 + \frac{C}{t_n n \alpha} \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4} \\
 & = o\left(\frac{1}{t_n^4} + \frac{1}{t_n^2 n} + \frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{t_n \sqrt{n}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
 & = o(1),
 \end{aligned}$$

wobei die beiden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 \left(\frac{w_k x_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 & \leq \frac{C}{t_n^2 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4 = o\left(\frac{1}{t_n^2}\right), \\
 \frac{C}{t_n^2 n \alpha} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l^2 \left(\frac{w_l x_l}{|c_l|^2} - 1 \right) I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} & \leq \frac{C}{t_n n \alpha} \sqrt{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 x_l^4} = o\left(\frac{1}{t_n \sqrt{n}}\right)
 \end{aligned}$$

verwendet wurden, die durch Anwendung der Hölder-Ungleichung und von Lemma A.1.3 folgen.

Für die einzelnen Summanden von $L_{n,3}$ erhält man wegen der stochastischen Unabhängigkeit zunächst

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k}|^2 \mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q} Z_{n,j,q}} \right] \\
 & = \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 \mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q}} \right] \mathbb{E} \left[|Z_{n,j,k}|^2 Z_{n,j,l} \overline{Z_{n,j,q}} \right].
 \end{aligned}$$

Mit analoger Vorgehensweise zu der der bisher betrachteten Terme überlegt man sich, dass die einzigen in Erwartung von Null verschiedenen Terme gerade die der Gestalt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 \mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} \overline{\mathcal{U}_{j,q} D_{j,q}} \right] \\
 & = \mathbb{E} |D_{j,k}|^2 \mathbb{E} [|S_{j,l}|^2 D_{j,l}] \mathbb{E} [|S_{j,q}|^2 D_{j,q}] \\
 & = \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 |\langle \beta, \phi_q \rangle|^2 \\
 & \mathbb{E} \left[|\langle X_j, \phi_l \rangle|^2 \left(\frac{\langle W_j, \phi_l \rangle}{c_l} - \frac{\langle X_j, \phi_l \rangle}{x_l} \right) \right] \mathbb{E} \left[|\langle X_j, \phi_q \rangle|^2 \left(\frac{\langle \phi_q, W_j \rangle}{\bar{c}_q} - \frac{\langle \phi_q, X_j \rangle}{x_q} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

sind. Bei der Betrachtung von $\mathbb{E} [|Z_{n,j,k}|^2 Z_{n,j,l} \overline{Z_{n,j,q}}]$ nutzt man zunächst aus, dass wegen $\mathbb{E} [\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}}] = 0$ (siehe (5.24)) und $\mathbb{E} [\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}] = 0$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$, und

$i \in \{1, \dots, n\}$ lediglich eine Summe über Terme der Gestalt wie sie in (5.25) beschrieben wurden von Null verschieden ist. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[|Z_{n,j,k}|^2 Z_{n,j,l} \overline{Z_{n,j,q}}] \\ &= x_k^2 x_l x_q I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k'\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l'\} I\{\lambda_q \geq \alpha \gamma_q'\} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E}[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 \mathcal{U}_{i,l} D_{i,l} \overline{\mathcal{U}_{i,q} D_{i,q}}] \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} L_{n,3} & \leq \frac{1}{t_n^4 n^2} \sum_{\substack{k,l,q \in \mathbb{Z}, \\ |k|, |l| \neq |q|, |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l x_q I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k'\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l'\} I\{\lambda_q \geq \alpha \gamma_q'\} \\ & \quad \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 |\langle \beta, \phi_q \rangle|^4 \\ & \quad \left(\mathbb{E} \left[|\langle X, \phi_l \rangle|^2 \left(\frac{\langle W, \phi_l \rangle}{c_l} - \frac{\langle X, \phi_l \rangle}{x_l} \right) \right] \mathbb{E} \left[|\langle X, \phi_q \rangle|^2 \left(\frac{\langle \phi_q, W \rangle}{c_q} - \frac{\langle \phi_q, X \rangle}{x_q} \right) \right] \right)^2. \end{aligned}$$

Die Reihe über k lässt sich gegen t_n^2 abschätzen. Mit der Hölder-Ungleichung ergibt sich für $l \in \mathcal{K}_n$

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left[|\langle X, \phi_l \rangle|^2 \left(\frac{\langle \phi_l, W \rangle}{c_l} - \frac{\langle \phi_l, X \rangle}{x_l} \right) \right] \right)^2 & \leq \mathbb{E} |\langle X, \phi_l \rangle|^4 \mathbb{E} |D_{1,l}|^2 \\ & \leq \eta x_l^2 \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \leq \frac{C}{\alpha^2} x_l^2. \end{aligned}$$

Mit (V10) und Lemma A.1.3 führt dies zu

$$\begin{aligned} L_{n,3} & \leq \frac{C}{t_n^2 n^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k \frac{x_k - \lambda_k}{\lambda_k} \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{t_n^2 n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k (x_k - \lambda_k) = o\left(\frac{1}{t_n^2 n}\right). \end{aligned}$$

□

37. Bemerkung: Beständen die für die asymptotische Verteilung relevanten Terme $\mathcal{U}_{i,k} = \sigma U_i + \sum_{|m| \neq |k|} S_{i,m}$ ($i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z}$) lediglich aus σU_i so ließe sich die bedingte Lindeberg-Bedingung analog zum Beweis selbiger in Lemma A.6 in Birke (2006), der sich wiederum auf Lemma 2 in Hall (1984) stützt, verifizieren. Der hier zusätzlich vorhandene Ausdruck $\sum_{|m| \neq |k|} S_{i,m}$ ist jedoch im Vergleich zu den Fehlertermen nicht unabhängig von den Gewichten des Schätzers, sondern bestenfalls unkorreliert zu diesen. Darin liegt die Begründung der aufwendigen Argumentation im Beweis sowohl von Proposition 36 als auch von einigen folgenden Resultaten.

38. Proposition: [STOCHASTISCHE KONVERGENZ DER BEDINGTEN VARIANZ] *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Zudem gelte*

$$\frac{1}{t_n^4} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^4 = o(1). \quad (\text{T1})$$

Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$

$$\mathfrak{V}_n := \sum_{j=2}^n \mathbb{E} [Y_{n,j}^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1}] \xrightarrow{P} \mathfrak{V} \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (5.26)$$

wobei \mathfrak{V} eine positive Konstante ist.

BEWEIS: Zunächst wird die bedingte Varianz in drei Terme zerlegt. Der gemischte Term für $k, l \in \mathbb{Z}, |k| \neq |l|$, fällt dabei weg. Denn wegen der $\mathcal{F}_{n,j-1}$ -Messbarkeit von $Z_{n,j,k}$ und $Z_{n,j,l}$ sowie der stochastischen Unabhängigkeit von $\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}}$ und der Filtrierung lässt sich (5.24) anwenden:

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}} \mid \mathcal{F}_{n,j-1} \right] = Z_{n,j,k} \overline{Z_{n,j,l}} \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l}} \right] = 0.$$

Für den verbleibenden Ausdruck nutzt man erneut aus, dass $\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_{n,j-1}$ ist, sowie dass $\mathcal{U}_{j,k}$ unkorreliert mit $D_{j,k}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_n &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \right|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1} \right] \\ &= \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[\left| \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \right|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} Z_{n,j,k} \overline{\mathcal{U}_{j,l} D_{j,l} Z_{n,j,l}} \mid \mathcal{F}_{n,j-1} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} |Z_{n,j,k}|^2 \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1} \right] \\ &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left| \sum_{i=1}^{j-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \right|^2 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 \\ &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k}|^2 \mathbb{E} |D_{j,k}|^2 \\ &\quad \left(\sum_{i=1}^{j-1} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 + \sum_{\substack{i, p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{t_n^2 n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2 \\
 &\quad \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \right) \\
 &=: \mathfrak{V}_{n,1} + \mathfrak{V}_{n,2}.
 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass aus $\mathfrak{V}_{n,1}$ die asymptotische Varianz hervorgeht, während $\mathfrak{V}_{n,2}$ asymptotisch vernachlässigbar ist.

Zunächst wird verifiziert, dass $\mathfrak{V}_{n,1}$ stochastisch gegen

$$\mathfrak{V} := \left(\sigma^2 + \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \quad (5.27)$$

konvergiert. Dabei ist $\mathfrak{V} > 0$ und wegen Lemma A.1.3 endlich. Unter Verwendung des Ausdrucks

$$\mathfrak{H}_n := \frac{\mathfrak{V}}{t_n^2 n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \quad (5.28)$$

wird nun gezeigt, dass

$$\mathbb{E} (\mathfrak{V}_{n,1} - \mathfrak{H}_n)^2 = o(1)$$

sowie dass \mathfrak{V} der punktweise Limes von \mathfrak{H}_n ist. Zunächst ergänzt man den Term $|\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k$ in $\mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2$, sodass man für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ schreiben kann

$$\begin{aligned}
 &|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2 - \mathfrak{V} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \\
 &= \mathfrak{V}^{1/2} \left[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \right] - |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k.
 \end{aligned}$$

Die entstehenden Terme werden dann separat abgeschätzt, wobei man verwendet, dass $\sigma^2 + \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \leq C$ gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} (\mathfrak{V}_{n,1} - \mathfrak{H}_n)^2 \\
 &= \frac{1}{t_n^4 n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^{n-1} \right. \\
 &\quad \left. \left\{ \mathfrak{V}^{1/2} \left[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \right] - |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k \right\} \right)^2 \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C}{t_n^4 n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 \right)^2 \\
 & = \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\
 & \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E} \left(|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^2 \right)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{1,k}|^2 \right] \mathbb{E} \left[(|\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{1,k}|^2) \right] \right\} \\
 & + \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} x_l \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right) I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 & \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left(|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^2 \right) \left(|\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,l}|^2 \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^2 \right] \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,l}|^2 \right] \right\} \\
 & + \frac{2}{t_n^4 n^2} \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^{n-1} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 \right)^2 \\
 & =: \mathbb{V}_{n,1} + \mathbb{V}_{n,2} + \mathbb{V}_{n,3}.
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle seien einige kurze Vorüberlegungen gemacht, bevor die Terme $\mathbb{V}_{n,1}$, $\mathbb{V}_{n,2}$ und $\mathbb{V}_{n,3}$ diskutiert werden.

Mit

$$\mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 = \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right) \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right), \quad (5.29)$$

was sich aus der Unkorreliertheit von $|\mathcal{U}_{j,k}|^2$ und $|D_{j,k}|^2$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ergibt, sowie mit Lemma A.1.3 und (5.16) gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathcal{K}_n$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left(|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^2 \right)^2 & \leq C \left(\mathbb{E}|D_{1,k}|^4 - (\mathbb{E}|D_{1,k}|^2)^2 \right) \\
 & \leq C \mathbb{E}|D_{1,k}|^4 \leq \frac{C}{\alpha^2}. \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Weiter lässt sich der Term

$$\mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^2 \right] = -\mathbb{E}|D_{1,k}|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k$$

$$= - \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \quad (5.31)$$

vereinfachen. Für die gemischten Terme mit $k, l \in \mathbb{Z}, |k| \neq |l|$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ erhält man mit (5.23) und wegen $\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(|\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E} |D_{i,k}|^2 \right) \left(|\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \mathbb{E} |D_{i,l}|^2 \right) \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{1,k} D_{1,k} \mathcal{U}_{1,l} D_{1,l}|^2 \right] + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \\ & \leq C \left\{ \frac{1}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{x_l}{\alpha} |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{x_k}{\alpha} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right\}. \quad (5.32) \end{aligned}$$

Für $\mathbb{V}_{n,1}$ ergibt sich mit (5.30) und (5.31) unter der Voraussetzung (V10) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{n,1} & \leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ & \quad \left\{ \frac{n}{\alpha^2} + n^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 \right\} \\ & \leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ & \quad + \frac{C}{t_n^4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^4 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} = o \left(1 + \frac{1}{t_n^2} \right), \end{aligned}$$

denn die erste Reihe lässt sich gegen $C t_n^2$ abschätzen (oder ist sogar konvergent). Die zweite Reihe konvergiert wegen (T1) und Lemma A.1.3. Dies sowie (5.32) und (5.31) verhelfen dann zusammen mit der Symmetrie der Terme in k und l zur gewünschten Konvergenz des zweiten Ausdrucks:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{n,2} & \leq \frac{C}{t_n^4} \left\{ \frac{1}{n \alpha^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{t_n^2}{n \alpha} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} x_l^2 \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \right) + \frac{(t_n^2)^2}{n} \right\} \\ & \quad + \frac{C}{t_n^4} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2. \end{aligned}$$

Das Quadrat der ersten Reihe lässt sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wegen Lemma A.1.3 gegen $C t_n^2$ abschätzen. Analog erhält man die Konvergenz für die dritte

Reihe unter Voraussetzung (T1). Der gemischte Term lässt sich ebenfalls konservativ mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gegen $\frac{Ct_n^3}{n\alpha}$ abschätzen. Somit gilt

$$\mathbb{V}_{n,2} = o\left(1 + \frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{\sqrt{nt_n}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Für die Abschätzung von $\mathbb{V}_{n,3}$ verwendet man (5.23) und (5.16), was für alle $k \in \mathcal{K}_n$ gilt.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{n,3} &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^4 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left\{ n \mathbb{E}|D_{1,k}|^4 + n^2 (\mathbb{E}|D_{1,k}|^2)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &\quad \quad x_l^2 \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1\right) |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\ &\quad \left\{ n \left[\frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l + \frac{C |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l}{\alpha} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k}\right) \right. \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \frac{C |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k}{\alpha} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l}\right) + \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k}\right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + n^2 \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k}\right) \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l}\right) \right\} \\ &\leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^4 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &\quad + \frac{C}{t_n^4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right)^4 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &\quad + \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^3 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \\ &\quad + \frac{C}{t_n^4 n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \\ &\quad + \frac{C}{t_n^4 n \alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1\right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &\quad \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_l^3 \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1\right) |\langle \beta, \phi_l \rangle|^4 I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{C}{t_n^4} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \\
 & = o \left(1 + \frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{nt_n}} \right)
 \end{aligned}$$

unter Voraussetzung (T1). Somit ist verifiziert, dass

$$\mathfrak{V}_{n,1} = \mathfrak{H}_n + o_P(1).$$

Dabei gilt die punktweise Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{H}_n = \mathfrak{V} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{t_n^2 n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} = \mathfrak{V}. \quad (5.33)$$

Bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{V}_{n,2}$ stochastisch gegen Null konvergiert. Dafür wird wieder L_2 -Konvergenz gezeigt. Hierbei schätzt man für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ mit (V9) und Lemma A.1.3 den Term $E|\mathcal{U}_{1,k}|^2$ gegen eine Konstante ab.

$$\begin{aligned}
 E|\mathfrak{V}_{n,2}|^2 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} E \left| \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} x_l \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right) I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \right. \\
 & \quad \left. E \left[\left(\sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \right) \left(\sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \overline{\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l} \mathcal{U}_{p,l} D_{p,l}} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Da $\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}$ ist für $p \neq i$, sind alle nichtquadratischen Terme gleich Null. Für die quadratischen Terme mit $k \in \mathbb{Z}$ wiederum gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} E \left| \mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \right|^2 & = \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} E |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}|^2 E |\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}|^2 \\
 & = (n-1)(n-2) (E |\mathcal{U}_{1,k}|^2 E |D_{1,k}|^2)^2 \\
 & \leq C n^2 \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Für $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ erhält man mit (5.24)

$$\sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} E \left[\left(\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}} \right) \left(\overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k} \mathcal{U}_{p,l} D_{p,l}} \right) \right]$$

$$= \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{n-1} \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \overline{\mathcal{U}_{i,l} D_{i,l}} \right] \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{p,k} D_{p,k}} \mathcal{U}_{p,l} D_{p,l} \right] = 0.$$

Daraus resultiert unter Voraussetzung (T1)

$$\mathbb{E} |\mathfrak{V}_{n,2}|^2 \leq \frac{C}{t_n^4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^4 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} = o(1),$$

woraus

$$\mathfrak{V}_{n,2} = o_P(1)$$

folgt. Dass die Summe zweier stochastisch konvergenter Folgen gegen die Summe ihrer Limiten konvergiert, impliziert schließlich die Behauptung. \square

39. Bemerkung: Für die Konvergenz von $\mathfrak{V}_{n,1}$ in Proposition 38 genügt die schwächere Voraussetzung

$$\frac{1}{t_n^4} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 = o(1)$$

anstelle von (T1).

Nun kann ein zentraler Grenzwertsatz für $R_{n,3}$ formuliert werden.

40. Proposition: Die Folge $(t_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5.5) erfülle $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 = \infty$. Weiter seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (T1) erfüllt. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$

$$\frac{n}{t_n} R_{n,3} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \mathfrak{V}),$$

mit \mathfrak{V} aus Proposition 38.

BEWEIS: \mathfrak{V} ist als positive Konstante insbesondere endlich und messbar. Nach den Vorüberlegungen zu Beginn von Abschnitt 5.3 ist $R_{n,3}$ ein Martingaldifferenzschema. Mit den Propositionen 36 und 38 folgt die Behauptung aus Theorem 3.2 unter Berücksichtigung der alternativen Voraussetzungen von Corollary 3.1 bei Hall und Heyde (1980). \square

5.4. Diskussion der Bias-Terme

41. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{128}$ und U erfülle $E|U|^{128} \leq \eta < \infty$. Dann gilt unter den Voraussetzungen (V1)-(V13), dass

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}, X_j \rangle|^2 = o_P\left(\frac{1}{n}\right).$$

BEWEIS: Für

$$T_{n,1} = \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right) - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} \right)$$

gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{\mathcal{U}}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} \right) \phi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i D_{i,k,n} \phi_k, \\ \tilde{\Gamma}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n - \Gamma_X^\dagger \mathcal{U}_{X,n} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{x_k} \right) \phi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i D_{i,k} \phi_k. \end{aligned}$$

Damit lässt sich das erste absolute Moment von $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}, X_j \rangle|^2$ ausdrücken und mit der Dreiecksungleichung abschätzen:

$$\begin{aligned} &E \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}, X_j \rangle|^2 \right| \\ &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n E \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_i \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right|^2 \\ &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ E \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} E \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} E \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l < \alpha\gamma_l^\nu\} \overline{D_{i,l,n}} \right] \Bigg\} \\ & = T_{n,1}^{[1]} + T_{n,1}^{[2]} + T_{n,1}^{[3]}. \end{aligned}$$

Zuerst wird $T_{n,1}^{[1]}$ untersucht. Für $|k| \neq |l|$ nutzt man die Unkorreliertheit aus. Unter (H0) und (V9) lässt sich durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung der Erwartungswert für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ weiter abschätzen.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2 \\ & = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2 \\ & \quad + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right] \\ & \quad \mathbb{E} \left[\langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,l,n}} - \overline{D_{i,l}}) \right] \\ & \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{\mathbb{E}|\langle \phi_k, X \rangle|^4} \sqrt{\mathbb{E}I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k})^4} \\ & \quad + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k^{1/2} x_l^{1/2} \sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2} \\ & \quad \sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,l,n}} - \overline{D_{i,l}}) \right|^2}. \end{aligned}$$

Für die führenden Terme gilt dabei nach Lemma A.3.1 für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^4 \leq \frac{C}{n^2} \left(\frac{x_k^2 w_k^4}{|c_k|^8} + \frac{1}{x_k^2} \right) I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}$$

beziehungsweise

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2 \leq \frac{C}{n} \left(\frac{x_k w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k} \right) I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}.$$

Zudem erfüllen $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{128}$ insbesondere

$$\mathbb{E}|\langle \phi_k, X \rangle|^4 \leq \eta x_k^2.$$

Dies resultiert unter (V10) in

$$T_{n,1}^{[1]} \leq \frac{C}{n^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} + 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 \leq \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

$T_{n,1}^{[2]}$ lässt sich mit zweifacher Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen zu

$$\begin{aligned} T_{n,1}^{[2]} &\leq \frac{C}{n^3} \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^4} \\ &\leq \frac{C}{n^3} \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^8 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Mit der Überlegung $\frac{1}{\hat{c}_k} = \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k \hat{\lambda}_k} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k}$ wird der Erwartungswert weiter abgeschätzt, um dann nach Ergänzung von $\langle W, \phi_k \rangle \frac{\bar{c}_k}{w_k}$ die Dreiecks- und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anzuwenden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^8 &= \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\langle W, \phi_k \rangle}{\hat{\lambda}_k} \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \right|^8 \\ &\leq \frac{1}{\alpha^8} \mathbb{E} \left| \langle W, \phi_k \rangle \frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \right|^8 \\ &\leq \frac{C}{\alpha^8} \left(\mathbb{E} \left| \langle W, \phi_k \rangle \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \right|^8 + \frac{|c_k|^8}{w_k^4} \right) \\ &\leq \frac{C}{\alpha^8} \left(w_k^4 \sqrt{\mathbb{E} \left| \left(\frac{\bar{c}_k}{\hat{w}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{\bar{c}_k}{w_k} \right) \right|^{16}} + \lambda_k^4 \right) \end{aligned}$$

Mit (A.7) lässt sich der führende Term davon abschätzen gegen

$$\frac{C}{\alpha^8} \left(\frac{C}{n^4} \left(\frac{|c_k|^8}{w_k^4} + \frac{C}{n^4} x_k^4 \right) + \lambda_k^4 \right),$$

sodass

$$T_{n,1}^{[2]} \leq \frac{C}{n \alpha^2} \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\lambda_k \left(1 + \frac{C}{n} \right) + \frac{C}{n} x_k \right).$$

Dabei lässt sich für die zweite Reihe $\sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right)}$ gegen Eins abschätzen.

Für die erste Reihe lässt sich (A.5) anwenden. Insgesamt resultiert dies in

$$T_{n,1}^{[2]} \leq \frac{C}{n \alpha^2} \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} \frac{\lambda_k}{x_k} \sqrt{P\left(\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(1 + \frac{C}{n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\leq \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 \left(1 + \frac{C}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Es bleibt $T_{n,1}^{[3]}$ zu diskutieren. Durch Wiederholen der Argumentation für $T_{n,1}^{[2]}$ erhält man auch dafür $T_{n,1}^{[3]} = o\left(\frac{1}{n}\right)$. \square

42. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{64}$ und U erfülle $E|U|^{64} \leq \eta < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) seien erfüllt. Falls zudem

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| \frac{x_k^{3/2} w_k}{|c_k|^2} < \infty, \quad (\text{T2})$$

und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} < \infty, \quad (\text{T3})$$

so gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,2}, X_j \rangle|^2 = o_P\left(\frac{t_n}{n}\right).$$

BEWEIS: Wie in Proposition 29 in Kapitel 4 schreibt man $\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n \beta$ als die Summe einer regularisierten Version von β und einem gemischten Term. Dasselbe gilt auch für $\Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \beta$:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \beta \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_m \rangle \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\hat{x}_k} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_m, X_i \rangle \langle X_i, \phi_k \rangle \phi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \phi_k \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\hat{x}_k} \langle X_i, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \phi_k. \end{aligned}$$

Da für $\hat{\beta}$ dieselbe Regularisierung wie für $\hat{\beta}_{IV}$ gewählt wurde, fällt bei Betrachtung der Differenz $(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n}) \beta$ die regularisierte Version von β weg. Relevant bleibt lediglich der gemischte Term

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} f_n(\hat{\lambda}_k) I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} \langle W_i, \phi_k \rangle \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{\hat{x}_k} \langle X_i, \phi_k \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right] \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \langle \beta, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle \right) \phi_k \\
 & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{i,k,n} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \phi_k. \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \phi_k, X_j \right\rangle \right|^2 \\
 & = o_P \left(\frac{t_n}{n} \right). \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

Hierfür wird nun L_1 -Konvergenz gezeigt.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,2}, X_j \rangle|^2 \right| \\
 & \leq \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \\
 & \leq \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,l,n}} - \overline{D_{i,l}} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{i,m}} \right) \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left[|\langle \phi_k, X_j \rangle|^2 I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m} \right) (\overline{D_{i_2,k,n}} - \overline{D_{i_2,k}} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \overline{S_{i_2,m}} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right. \\
 & \quad \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m} \right) \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 & \quad \left. \left(\overline{D_{i_2,l,n}} - \overline{D_{i_2,l} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}} \right) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{i_2,m}} \right) \right] \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

Es sei zunächst die gemischte Summe für $j, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$ und $k \in \mathbb{Z}$ betrachtet. Hier sind alle Summanden gleich Null, denn wählt man ohne Einschränkung $j \neq i_1$, dann ist der Ausdruck $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m}$ stochastisch unabhängig von $|\langle \phi_k, X_j \rangle|^2$ und wegen $i_1 \neq i_2$ stochastisch unabhängig von $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_2,m}$ sowie wegen $|m| \neq |k|$ unkorreliert mit $I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{p,k,n} - D_{p,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\})$, $p \in \{1, \dots, n\}$. Letzteres ist mit der Orthogonalität der Fourierkoeffizienten zu begründen, siehe (2.17) und (2.20). Und $\mathbb{E} S_{i,m} = 0$ für alle i, m .

Nun sei der Blick auf die Summe über $j, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$ und $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ gerichtet. Wegen $i_1 \neq i_2$ ist $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m}$ stochastisch unabhängig von $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} S_{i_2,m}$.

Wegen $|m| \neq |k|$ ist $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i_1,m}$ zudem für alle $|k| \neq |m|$ unkorreliert mit

$\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\})$. Somit bleiben lediglich die Summanden der Gestalt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) S_{i_1,l} \right. \\
 & \quad \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i_2,l,n}} - \overline{D_{i_2,l} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}}) \overline{S_{i_2,k}} \right] \\
 & = \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \overline{S_{i_2,k}} \right] \\
 & \quad \mathbb{E} \left[\langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i_2,l,n}} - \overline{D_{i_2,l} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}}) S_{i_1,l} \right]
 \end{aligned}$$

für $|k| \neq |l|$ stehen. Wie im Beweis von Proposition 41 wird nun unterschieden, ob $\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu$ oder $\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu$ ist, analog für l . Dazu wird nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung mit $(I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} + I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\})$ multipliziert, um anschließend die Dreiecksungleichung anzuwenden.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \overline{S_{i_2,k}} \right] \\
 & \leq \sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right|^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k \\
 & \leq \left(2\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k}) \right|^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$$+ 2\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i_1,k,n} \right|^2 \Big)^{1/2} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k.$$

Mit (A.15) folgt dann

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i_1,k,n} - D_{i_1,k}) \right|^2 \leq \frac{C}{n} \left(\frac{w_k^2 x_k}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k} \right) (1 + o(1)).$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Ergänzen einer 1 in Form von $\frac{\lambda_k^2 x_k^2}{\lambda_k^2 x_k^2}$ und Anwendung von (A.5) erhält man weiter

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i_1,k,n} \right|^2} \\ & \leq \left(\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i_1,k,n} \right|^4 \sup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{K}_n} P(\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu) \right)^{1/4} \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left(\frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i_1,k,n} \right|^4 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Hier schätzt man mit einer Zerlegung ähnlich zum Beweis von Lemma A.3.1 den Erwartungswert ab und verwendet dabei, dass alle von Null verschiedenen Summanden $1 = \frac{\hat{\lambda}_k}{\lambda_k} \leq \frac{\hat{\lambda}_k}{\alpha}$ erfüllen.

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i_1,k,n} \right|^4 & \leq \mathbb{E} |D_{i,k}|^4 + \frac{1}{\alpha^4} \mathbb{E} \left| \tilde{D}_{i,k,n} \hat{\lambda}_k I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right|^4 \\ & \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right) + \frac{1}{\alpha^4} \mathbb{E} \left| \tilde{D}_{i,k,n} \hat{\lambda}_k I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right|^4, \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{D}_{i,k,n} =: \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} \left(\frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right)^2 + \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} + \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k}.$$

Additives Ergänzen von λ_k im zweiten Summand und anschließende Anwendung von (A.6) und (A.16) resultieren in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^4} \mathbb{E} \left| \tilde{D}_{i,k,n} \hat{\lambda}_k I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right|^4 \\ & \leq \frac{C}{\alpha^4} \left(\sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \tilde{D}_{i,k,n} \right|^8} \mathbb{E} |\hat{\lambda}_k - \lambda_k|^8 + \lambda_k^4 \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \tilde{D}_{i,k,n} \right|^4 \right) \\ & \leq \frac{C}{n^2 \alpha^4} \left(\lambda_k^4 + \frac{x_k^2 \lambda_k^2}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right) \right) \left(\frac{w_k^4 x_k^2}{|c_k|^8} + \frac{1}{x_k^2} \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{C}{\sqrt{n}} \left(\frac{x_k^2}{\lambda_k^2} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i_1, k, n} \right|^4 \right)^{1/4} \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left(\frac{x_k^{1/2} w_k}{|c_k|^2} + \frac{w_k^{1/2}}{|c_k|} + \frac{C}{\sqrt{n \alpha^2}} \left[\frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} + \lambda_k^{1/2} + \frac{x_k^{1/2}}{n^{1/4}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(\frac{w_k^{3/2} x_k}{|c_k|^3} + \frac{w_k^{1/2}}{|c_k|} \right) \mathcal{O} \left(\frac{1}{n} \right) \right] \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Somit lässt sich für alle $i_1, i_2, j \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, und $k \in \mathbb{Z}$ der führende Term von $\mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1, k, n} - D_{i_1, k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \overline{S_{i_2, k}} \right]$ gegen

$$\leq \frac{C}{\sqrt{n}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| x_k \left[I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{x_k^{1/2} w_k}{|c_k|^2} + \frac{1}{x_k^{1/2}} \right) + \frac{x_k^{1/2} w_k}{|c_k|^2} + \frac{w_k^{1/2}}{|c_k|} \right]$$

abschätzen, sodass gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i_1, k, n} - D_{i_1, k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \overline{S_{i_2, k}} \right] \\ & \quad \mathbb{E} \left[\langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i_2, l, n}} - \overline{D_{i_2, l}} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}) S_{i_1, l} \right] \\ & \leq \frac{C}{n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle| \left(\frac{w_k x_k^{3/2}}{|c_k|^2} + \frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} + x_k^{1/2} \right) \right)^2 (1 + o(1)) \\ & = o \left(\frac{t_n}{n} \right). \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit auf Grund von Voraussetzung (T2) und wegen Lemma A.1.3.

Die Summe über $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ lässt sich genauso behandeln wie die eben besprochene Summe über $j, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, $|k| \neq |l| \in \mathbb{Z}$. Hier sind lediglich die Terme

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}) S_{i,l} \right. \\ & \quad \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,l,n}} - \overline{D_{i,l}} I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\}) \overline{S_{i,k}} \right] \end{aligned}$$

für $|k| \neq |l|$ von Null verschieden. Zusammen mit Voraussetzung (T2) und Lemma A.1.3 erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ k \neq l}} \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}) S_{i,l} \right. \\ & \quad \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,l,n}} - \overline{D_{i,l}} I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\}) \overline{S_{i,k}} \right] \\ & = o\left(\frac{t_n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Es bleibt der erste Ausdruck von Zerlegung (5.36) zu besprechen. Hier ist $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}$ unkorreliert von den restlichen Faktoren und erfüllt nach Lemma A.1.3 die Abschätzung $\mathbb{E} \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right|^8 \leq C < \infty$. Nun unterscheidet man wieder ob $\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ oder $\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu$ gilt. Mit der Dreiecksungleichung schätzt man weiter ab.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} \right) \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \\ & \leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \\ & \quad + \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \\ & \leq J_{n,1} + J_{n,2}. \end{aligned}$$

Mit den Lemmata A.3.1 und A.1.3 sowie wegen (V10) erhält man für die erste Summe

$$\begin{aligned} J_{n,1} & \leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\mathbb{E} |\langle \phi_k, X_j \rangle|^4 \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{1,k,n} - D_{1,k}) \right|^4 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k \sqrt{\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^4} \\ & \leq \frac{C}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\frac{x_k w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k} \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Um zu zeigen, dass auch $J_{n,2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ genügt es

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} D_{1,k,n} \langle \phi_k, X_2 \rangle \right|^2 = o(1) \quad (5.37)$$

zu verifizieren. Dazu zerlegt man $D_{i,k,n}$ wie in (A.17) und schätzt den Erwartungswert mit der Dreiecksungleichung ab. Im führenden Term aus (5.37) separiert man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung den Erwartungswert der Indikatoren und ergänzt die Erwartung von $1 = \frac{\hat{\lambda}_k^2}{\lambda_k^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \hat{\lambda}_k^2$, um dann (A.14) anzuwenden.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \left(\frac{\langle W_1, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_1, \phi_k \rangle}{x_k} \right) \langle \phi_k, X_2 \rangle \right|^2 \\ & \leq C x_k \left(\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4 \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_1, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_1, \phi_k \rangle}{x_k} \right|^4 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left(\mathbb{E} |\hat{\lambda}_k|^2 \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{\alpha} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left\{ \left[\lambda_k^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{|c_k|^4}{n(n\alpha^2)} + \frac{1}{n^2} x_k^2 + \frac{x_k^2 w_k^2}{n^3(n\alpha^2)} \right] \right. \\ & \quad \left. \mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Für den ersten Summand schätzt man die Erwartung der Indikatoren nun mit (A.5) ab, für die restlichen Terme genügt eine Abschätzung selbiger gegen 1. Die führenden Terme lassen sich also gegen

$$\frac{C}{\alpha} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left\{ \frac{x_k^2}{n^2} + \frac{|c_k|^4}{n(n\alpha^2)} + \frac{x_k^2}{n^2} \right\}^{1/2} \leq \frac{C}{\alpha} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left(\frac{x_k}{n} + \frac{|c_k|^2}{\sqrt{n(n\alpha^2)}} \right)$$

abschätzen, sodass insgesamt gilt

$$J_{n,2} \approx \frac{C}{\sqrt{n\alpha^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left(\frac{x_k}{\sqrt{n}} - \frac{|c_k|^2}{\sqrt{n\alpha^2}} \right).$$

Unter Voraussetzung (T3) und Lemma A.1.3 folgt dann (5.37). \square

43. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und U erfülle $\mathbb{E}|U|^8 \leq \eta < \infty$. Voraussetzungen (V1)–(V13) seien erfüllt. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,3}, X_j \rangle|^2 = o_P\left(\frac{t_n}{n}\right).$$

BEWEIS: Zunächst überlegt man sich leicht, dass gilt

$$T_{n,3} = \left(\hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} - I \right) R_n.$$

Dabei bewirkt der zufällige Operator $\hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} - I$, dessen Eigenwerte für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu$ gerade 1 und sonst 0 sind, dass lediglich Terme für $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu$ relevant sind. Da $\hat{\lambda}_k$ ein konsistenter Schätzer für λ_k ist, macht man sich hier zunutze, dass in R_n lediglich Terme für $\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ von Null verschieden sind. Schreibt man also $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,3}, X_j \rangle|^2 =: \sum_{i=1}^5 \check{R}_{n,i}$ analog zu (5.11), so lassen sich $\check{R}_{n,1}$, $\check{R}_{n,4}$ und $\check{R}_{n,5}$ gegen $R_{n,1}$, $R_{n,4}$ beziehungsweise $R_{n,5}$ abschätzen. Für

$$\frac{n}{t_n} \check{R}_{n,3} := \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\}$$

lässt sich ausnutzen, dass $\frac{n}{t_n} R_{n,3}$ ein endliches zweites (und somit auch endliches erstes) Moment hat, was aus Abschnitt 5.3 bekannt ist. Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zunächst auf die regularisierte Reihe über k und dann auf die Erwartung führt zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{n}{t_n} \check{R}_{n,3} \right| &\leq \mathbb{E} \left| \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\}} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left| \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}} x_k \right|^2} \right| \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \right|} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left| \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}} x_k \right|^2 \right|}. \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \right| &\leq \frac{1}{\alpha} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k I\{\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\} \right| \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{k \in \mathcal{X}_n} P\left(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu\right) \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k \\ &\leq \frac{C}{n\alpha^2} \mathbb{E} \|X\|^2 = o(1) \end{aligned} \tag{5.38}$$

nach (A.3) sowie

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \mathbb{E} \left| \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k}} x_k \right|^2 &\leq \frac{1}{t_n^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\mathbb{E} |\mathcal{U}_{j,k} D_{j,k}|^2 \right)^2 x_k^2 \\ &\leq \frac{C}{t_n^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 = C. \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{E} \left| \frac{n}{t_n} \check{R}_{n,3} \right| = o(1)$.

Ähnlich lässt sich

$$\check{R}_{n,2} := \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2$$

abschätzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{n}{t_n} \check{R}_{n,2} \right| &= \frac{1}{t_n n} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} x_k \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{t_n n} \mathbb{E} \left| \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 \left(\sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2 \right)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{t_n n} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \right|} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2 \right|^2} \end{aligned}$$

Dabei gilt wegen Lemma A.1.3, (5.16) und (5.17)

$$\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2 \right|^2 \leq Cn \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 \mathbb{E} |D_{1,k}|^4 + Cn^2 t_n^2 \leq \frac{Cn}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 + Cn^2 t_n^2.$$

Zusammen mit (5.38) folgt unter (V10), dass

$$\mathbb{E} \left| \frac{n}{t_n} \check{R}_{n,2} \right| \leq o(1) \frac{1}{t_n n} \left(\frac{C\sqrt{n}}{\alpha} + nt_n \right) = o\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)$$

und die Behauptung folgt. \square

44. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Zudem sei $\mathbb{E}|U|^4 \leq \eta < \infty$. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$*

$$R_{n,1} = o_P\left(\frac{1}{n}\right).$$

BEWEIS: Es wird L_1 -Konvergenz für $R_{n,1}$ gezeigt. Dafür ergänzt man den Term $\frac{x_k}{x_k}$ und wendet die Hölderungleichung an. Die entstehenden Ausdrücke lassen sich dann mit (A.1) und (5.18) abschätzen.

$$\mathbb{E}|R_{n,1}| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{\hat{x}_k - x_k}{x_k} \right|^2} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right|^4}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C}{n^2\sqrt{n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{x_k} \sqrt{\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}|^4 \right.} \\
 &\leq \frac{C}{n^2\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k + \frac{C}{n\sqrt{n}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}.
 \end{aligned}$$

Dabei gilt $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \mathbb{E}\|X\|^2$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (x_k - \lambda_k) \leq \frac{C}{\alpha},$$

sodass man insgesamt

$$\mathbb{E}|R_{n,1}| = o\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

erhält, was die Behauptung impliziert. \square

45. Proposition: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Zudem gelte*

$$\frac{1}{t_n^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right)^2 = o(1). \quad (\text{T4})$$

Es sei

$$\mathfrak{R}_n =: \frac{\mathfrak{Y}^{1/2}}{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}. \quad (5.39)$$

Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$

$$R_{n,2} = \mathfrak{R}_n + o_P\left(\frac{t_n}{n}\right) \quad (5.40)$$

und

$$\mathfrak{R}_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (5.41)$$

BEWEIS: Um auf (5.40) zu schließen wird L_2 -Konvergenz für $\frac{n}{t_n} (R_{n,2} - \mathfrak{R}_n)$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
 &\frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E}|R_{n,2} - \mathfrak{R}_n|^2 \\
 &\leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left\{ \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - n \mathfrak{Y}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right\} \right|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right) \right|^2 \\
 &\quad + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} x_l I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 &\quad \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right) \left(|D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} x_l I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\
 &\quad \quad \sum_{\substack{i, p=1, \\ i \neq p}}^n \mathbb{E} \left[|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right] \mathbb{E} \left[|D_{p,l} \mathcal{U}_{p,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Zuerst sei der Blick auf die in $k \in \mathbb{Z}$ quadratischen Terme gerichtet. Zunächst nutzt man (V11) aus, um anschließend im quadratischen Term den Summand $|\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k$ separat zu betrachten. Dies liefert $\text{var}(D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}) \leq \mathbb{E} |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^4$, welche sich mit Lemma A.1.3 und (5.16) weiter abschätzen lässt, sowie einen vernachlässigbaren Term. Im gemischten Term sieht man mit Blick auf (5.29) sofort, dass alle Ausdrücke bis auf den aus $|\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k$ hervorgehenden Term verschwinden.

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right) \right|^2 \\
 &= n \mathbb{E} \left(|D_{1,k} \mathcal{U}_{1,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right)^2 \\
 &\quad + n(n-1) \left(\mathbb{E} \left[|D_{1,k} \mathcal{U}_{1,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right] \right)^2 \\
 &\leq 2n \mathbb{E} \left(|D_{1,k} \mathcal{U}_{1,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right) \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right)^2 \\
 &\quad + 2n \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^2 \\
 &\quad + n^2 \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^2 \\
 &\leq 2n \mathbb{E} |D_{1,k} \mathcal{U}_{1,k}|^4 + C n^2 \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\
 &\leq \frac{Cn}{\alpha^2} + C n^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Für die Abschätzungen des gemischten Erwartungswertes für $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ lässt sich nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (5.30) erneut anwenden. Man erhält

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right) \left(|D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right) \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E} \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right) \right)^2 \right)^{1/2} \left(\mathbb{E} \left(|D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left(\frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right) \right)^2 \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte für $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ und $i, p \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq p$ lassen sich mit (5.31) vereinfachen. Zusammengefasst ergibt dies unter Voraussetzung (T4)

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} |R_{n,2} - \mathfrak{R}_n|^2 \\ & \leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \left\{ \frac{Cn}{\alpha^2} + Cn^2 \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right)^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ & \quad + \frac{C}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} x_k I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} x_l I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\ & \quad \left\{ \frac{n}{\alpha^2} + n(n-1) \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right) |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 \right\} \\ & = o \left(1 + \frac{1}{t_n^2} \right). \end{aligned}$$

Für (5.41) genügt die Abschätzung

$$\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \leq \frac{1}{\alpha} (x_k - \lambda_k), \quad (5.42)$$

die für alle $k \in \mathcal{K}_n$ gilt. Zusammen mit Lemma A.1.3 folgt die Behauptung. \square

46. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$*

$$R_{n,4} = o_P \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right).$$

BEWEIS: Es wird L_2 -Konvergenz für den Ausdruck

$$\begin{aligned} & \frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} |R_{n,4}|^2 \\ &= \frac{1}{n^4 t_n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \sum_{j=1}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \sum_{i=1}^n D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}} \right|^2 \end{aligned}$$

gezeigt. Alle beim Quadrieren zu berücksichtigenden Summanden werden nun einzeln besprochen. Dabei sind lediglich Summanden für die Indizes $k, l \in \mathcal{K}_n$ von Null verschieden. Zunächst sei das Augenmerk auf die in k und l quadratischen Summanden gerichtet. Für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ergeben sich Summanden der Gestalt

$$\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}} \right|^2.$$

Zerlegen von $\mathcal{U}_{i,k}$ und $\mathcal{U}_{i,l}$ wie in (5.20) und anschließende Anwendung der Dreiecksungleichung resultiert auf Grund der in k und l vorliegenden Symmetrie in drei Termen. Diese lassen sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (5.16) weiter abschätzen.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}} \right|^2 \\ & \leq C \left\{ \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_j \rangle D_{i,k}|^2 \mathbb{E} |\langle X_j, \phi_l \rangle \overline{D_{i,l}}|^2 \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{i,m} \right|^4 \right. \\ & \quad + \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle D_{i,k} \overline{S_{i,k}} \overline{D_{i,l}} S_{i,l}|^2 \\ & \quad \left. + \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_j \rangle D_{i,k}|^2 \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|, |l|}} S_{i,m} \right|^2 \mathbb{E} |\langle X_j, \phi_l \rangle \overline{D_{i,l}} S_{i,l}|^2 \right\} \\ & \leq \frac{C}{\alpha^2} \left(x_k x_l + |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l^2 + x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l^2 \right). \end{aligned}$$

Mit Lemma A.1.3 erhält man hier konvergente Reihen über k und l .

Für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $i_1, i_2, j \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, erhält man für die Summanden

$$\mathbb{E} \left[|\langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle|^2 D_{i_1,k} \mathcal{U}_{i_1,k} \overline{D_{i_1,l} \mathcal{U}_{i_1,l}} \overline{D_{i_2,k} \mathcal{U}_{i_2,k}} D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l} \right].$$

Nimmt man ohne Einschränkung an, dass $j \neq i_2$ gilt, dann ist $\overline{D_{i_2,k} \mathcal{U}_{i_2,k}} D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}$ stochastisch unabhängig von den restlichen Termen. Da wegen (5.24) gilt, dass $\mathbb{E}[\overline{D_{i_2,k} \mathcal{U}_{i_2,k}} D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}] = 0$, sind diese Summanden also gleich Null. Ebenso verschwinden alle Summanden für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $j_1, j_2, i \in \{1, \dots, n\}$, $j_1 \neq j_2$, denn ohne Einschränkung lässt sich hier $j_1 \neq i$ wählen, sodass $\langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle$ stochastisch unabhängig vom Rest ist. Wegen $|k| \neq |l|$ ist auch dieser Term in Erwartung Null. Mit ähnlichen Überlegungen sieht man sofort, dass für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ lediglich die Terme für $j_1 = i_1 \wedge j_2 = i_2$ und $j_1 = i_2 \wedge j_2 = i_1$ von Null

verschieden sind. Aus Symmetriegründen genügt es hier den ersten Fall zu betrachten. Man erhält

$$\left| \mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle D_{j_1,k} \mathcal{U}_{j_1,k} \overline{D_{j_1,l} \mathcal{U}_{j_1,l}} \right] \right|^2.$$

Dies lässt sich mit den üblichen Rechnungen abschätzen gegen

$$\frac{C}{\alpha^2} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l,$$

wobei die Reihen über k und l nach Lemma A.1.3 wiederum konvergent sind. Es bleiben nun alle Terme für $k, l_1, l_2 \in \mathcal{K}_n$, $l_1 \neq l_2$, $k \neq l_1, l_2$ sowie für vier verschiedene Summationsindizes $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathcal{K}_n$ zu betrachten. Man sieht jedoch mit Blick auf die bisher betrachteten Terme sofort, dass mit derselben Argumentation alle diese Ausdrücke ein schlechtestenfalls analoges asymptotisches Verhalten besitzen oder sogar eine untergeordnete Rolle spielen.

Zusammengefasst ergibt sich mit (V10)

$$\frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} |R_{n,4}|^2 \leq \frac{C}{n^4 t_n^2} \cdot \frac{n^2}{\alpha^2} = o\left(\frac{1}{t_n^2 n}\right),$$

was die Behauptung impliziert. \square

47. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) erfüllt. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$*

$$R_{n,5} = o_P\left(\frac{1}{n}\right).$$

BEWEIS: Der Beweis orientiert sich am Beweis von Lemma 46. Es wird L_2 -Konvergenz für den Ausdruck

$$\mathbb{E} |R_{n,5}|^2 = \frac{1}{n^6} \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} \sum_{j=1}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n D_{i_1,k} \mathcal{U}_{i_1,k} \overline{D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}} \right|^2$$

gezeigt. Wiederum werden zuerst die in k und l quadratischen Summanden besprochen. Über $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $i_1, i_2, j \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2$, summiert man

$$\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle D_{i_1,k} \mathcal{U}_{i_1,k} \overline{D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}} \right|^2.$$

Wählt man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $j \neq i_1$, so gleicht dies

$$\mathbb{E} |D_{1,k} \mathcal{U}_{1,k}|^2 \mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \overline{D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}} \right|^2,$$

was sich mit (5.16), (5.17) und (5.42) sowie der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für alle $k, l \in \mathcal{K}_n$ abschätzen lässt zu

$$C \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) \left(\frac{x_l w_l}{|c_l|^2} + \frac{1}{x_l} \right) \leq \frac{C}{\alpha^2} (x_k - \lambda_k) x_l.$$

Für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und $i_1, i_2, i_3, j \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 \neq i_2, i_3$, $i_2 \neq i_3$, erhält man als Summanden

$$\mathbb{E} \left[|\langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle|^2 |D_{i_1, k} \mathcal{U}_{i_1, k}|^2 |D_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_2, l}|^2 \overline{D_{i_3, l} \mathcal{U}_{i_3, l}} \right].$$

Diese sind wegen (V11) und weil $\mathbb{E} D_{i_3, l} \mathcal{U}_{i_3, l} = 0$ gleich Null. Analoges erhält man für Summen über $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, und vier verschiedene Indizes $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Für den Fall $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, $j_1, j_2, i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, $j_1 \neq j_2$, $i_1 \neq i_2$, erhält man die Summanden

$$\mathbb{E} \left[\langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle \langle X_{j_2}, \phi_k \rangle \langle \phi_l, X_{j_2} \rangle |D_{i_1, k} \mathcal{U}_{i_1, k}|^2 |D_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_2, l}|^2 \right].$$

Diese sind lediglich für $j_1 = i_1 \wedge j_2 = i_2$ und $j_1 = i_2 \wedge j_2 = i_1$ von Null verschieden. Sie gleichen

$$\mathbb{E} [\langle \phi_k, X_1 \rangle |D_{1, k}|^2] \mathbb{E} [\langle X_1, \phi_l \rangle | \mathcal{U}_{1, k}|^2] \mathbb{E} [\langle \phi_l, X_2 \rangle |D_{2, l}|^2] \mathbb{E} [\langle X_2, \phi_k \rangle | \mathcal{U}_{2, l}|^2].$$

Mit Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf alle Erwartungen lässt sich dies mit (5.16) abschätzen zu

$$\frac{C}{\alpha^2} x_k x_l.$$

Mit der üblichen Argumentation sieht man für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$ und $j_1, j_2 \in \{1, \dots, n\}$, $j_1 \neq j_2$, sofort, dass alle mit drei verschiedenen $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$ bzw. vier verschiedenen $i_1, \dots, i_4 \in \{1, \dots, n\}$ indizierten Terme gleich Null sind.

Die in $k, l \in \mathcal{K}_n$ nicht quadratischen Terme lassen sich analog diskutieren. Wie in Lemma 46 verhalten sie sich schlechtestenfalls wie die bisher betrachteten Ausdrücke. Insgesamt gilt somit wiederum unter (V10), dass

$$\mathbb{E} |R_{n,5}|^2 \leq \frac{C}{n^6} \left(\frac{n^3 + n^2}{\alpha^2} \right) = o \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

was die Behauptung impliziert. □

5.5. Zentraler Grenzwertsatz für die Teststatistik

48. Theorem: [ZENTRALER GRENZWERTSATZ FÜR T_n] Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{128}$ und U erfülle $E|U|^{128} \leq \eta < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) seien erfüllt und für die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5.5) gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Falls zudem (T1), (T2) sowie (T3) erfüllt sind, dann gilt unter (H0)

$$\frac{n}{t_n} (T_n - \mathfrak{R}_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \mathfrak{V}).$$

Dabei bezeichnen \mathfrak{R}_n den Biasterm aus Proposition 45 und \mathfrak{V} die positive Konstante aus (5.27).

BEWEIS: Für die Teststatistik gilt mit Zerlegung (5.9)

$$\begin{aligned} \frac{n}{t_n} T_n &= \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + R_n, X_j \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}, X_j \rangle|^2 + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}, X_j \rangle \langle X_j, R_n \rangle \\ &\quad + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle X_j, T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \rangle \langle R_n, X_j \rangle + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n, X_j \rangle|^2. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Zerlegung (5.11) schreibt man zunächst

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n, X_j \rangle|^2 = \frac{n}{t_n} R_{n,3} + \frac{n}{t_n} (R_{n,2} - \mathfrak{R}_n) + \frac{n}{t_n} (R_{n,1} + R_{n,4} + R_{n,5}).$$

Dabei konvergiert der erste Term nach Proposition 40 schwach gegen eine Normalverteilung mit Erwartungswert Null und Varianz \mathfrak{V} . Nach Proposition 45 sowie den Lemmata 44, 46 und 47 gilt

$$\frac{n}{t_n} (R_{n,2} - \mathfrak{R}_n) + \frac{n}{t_n} (R_{n,1} + R_{n,4} + R_{n,5}) = o_P(1).$$

Dabei ist Proposition 45 anwendbar, weil die Voraussetzung (T1) die Gültigkeit von (T4) impliziert. Mit der Abschätzung

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}, X_j \rangle|^2 \leq \frac{C}{t_n} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^3 |\langle T_{n,p}, X_j \rangle|^2,$$

die sich aus der Dreiecksungleichung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt, lassen sich die Propositionen 41, 42 und 43 auf der rechten Seite anwenden, sodass man

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^3 |\langle T_{n,p}, X_j \rangle|^2 = o_P(1)$$

erhält. Die gemischten Terme lassen sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gegen zwei bereits diskutierte Terme abschätzen:

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle X_j, T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \rangle \langle R_n, X_j \rangle \leq \left(\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^3 |\langle T_{n,p}, X_j \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n, X_j \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

Mit dem Lemma von Slutsky, wie es unter anderem als Korollar 5.84 in Witting und Müller-Funk (1995) zu finden ist, und dem Stetigkeitssatz für schwache Konvergenz, siehe Klenke (2008), Satz 13.25, folgt die Konvergenz gegen das Diracmaß in Null und somit, dass $\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle X_j, T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \rangle \langle R_n, X_j \rangle$ stochastisch gegen Null konvergiert. Die Konvergenz des dazu komplex konjugierten Terms $\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}, X_j \rangle \langle X_j, R_n \rangle$ folgt analog.

Mit dem Lemma von Slutsky für die Summe aus einem stochastisch konvergenten und einem schwach konvergenten Term folgt die Behauptung. \square

Ein Blick auf die asymptotische Varianz \mathfrak{V} aus Theorem 48 verdeutlicht, dass diese neben der Konstanten σ^2 und der Varianz der Fehlerterme, die wegen (V9) gleich Eins ist, insbesondere vom unbekanntem Slopeparameter β abhängt. Der von β abhängige Anteil in \mathfrak{V} entsteht durch den Einfluss von $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \langle \beta, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_i \rangle$, wie man an den

Rechnungen für $\mathcal{U}_{i,k}$ verfolgen kann. Hätte dieser Term, zum Beispiel auf Grund hinreichend schneller Konvergenzraten der Fourierkoeffizienten und der Eigenwerte der (Cross-)Kovarianzoperatoren, keinen Einfluss auf die schwache Konvergenz, so erhielte man als asymptotische Varianz gerade σ^4 . Die Beschränkung der Konvergenzraten ist ein probates Mittel diesen Einfluss zu umgehen, wie man unter anderem an den Regularitätsannahmen in Horowitz (2007), der die asymptotische Normalität eines nichtparametrischen Instrumentvariablenschätzers mit Tikhonovregularisierung in einem funktionalen Regressionsmodell zeigt, sieht. In Cardot et al. (2006) wird dies durch Verwendung funktionaler Hauptkomponenten anstelle einer vorgegebenen Orthonormalbasis verhindert. Die Eigenwerte \check{x}_k (Scores) zu den Eigenfunktionen \check{e}_k (funktionale Hauptkomponenten) der empirischen Version des Kovarianzoperators von X sind von der Gestalt

$$\check{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle X_i, \hat{e}_k \rangle|^2.$$

Bei vorgegebener (Fourier-)Basis sind die Eigenwerte von Γ_n jedoch durch

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle X_i, \phi_k \rangle|^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_m, X_i \rangle \langle X_i, \phi_k \rangle = \hat{x}_k + o_P \left(\frac{1}{n^{1/4}} \right)$$

gegeben. Eine empirische Version der regularisierten Inversen des Kovarianzoperators besitzt bei Cardot et al. (2006) die Eigenwerte $f_n(\check{x}_k)$ zu den Eigenfunktionen \check{e}_k , wobei f_n unter anderem wie in (2.31) gewählt werden kann. Mit ebendieser Wahl für f_n erhält man

$\frac{1}{\hat{x}_k}$, versehen mit einer Regularisierung, als Eigenwerte. Selbiges gilt dabei für den Crosskovarianzoperator, der für den Instrumentvariablenschätzer verwendet wird. Im Kontext von Johannes (2016), dem die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schätzer für die Slopefunktion entnommen sind, wird als Argument für f_n wie bei Cardot et al. (2006) lediglich \hat{x}_k verwendet. Somit ist hier $\Gamma_{x,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \neq \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n}$ und $\tilde{\Gamma}_n^\dagger \Gamma_n \neq \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n}$, es entsteht der gemischte Term, wie er in (5.34) und in Konsequenz auch in (5.27) auftritt und damit die β -Abhängigkeit der asymptotischen Verteilung verursacht. Analoges war auch in Kapitel 4 zu beobachten.

Auch die für Theorem 48 gewählten Voraussetzungen bedürfen einer kurzen Erklärung, welche die nachfolgende Bemerkung zur Verfügung stellt.

49. Bemerkung:

- (i) *Wie bereits in Bemerkung 35 (ii) erläutert, hängt das Konvergenzverhalten von t_n von der Güte des Instrumentes ab. Voraussetzung (T1) sorgt dafür, dass die Reihe divergiert, jedoch nicht zu schnell.*
- (ii) *Die Schätzung von β im funktionalen linearen Modell ist ein inverses Problem. Um die Konvergenz der Teststatistik zu sichern darf dieses nicht beliebig schlecht gestellt sein, was durch Voraussetzung (T2) abgesichert wird. In anderen Worten besagt diese, dass $\beta \in \mathcal{R}(\Gamma_X^{-3/2} \tilde{\Gamma})$. Das heißt es muss ein $f \in L_2([0, 1])$ existieren, sodass $\beta = \Gamma_X^{-3/2} \tilde{\Gamma} f$ bzw. muss gelten*

$$\tilde{\Gamma}^{-1} \Gamma_X^{3/2} \beta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^{3/2} \langle \beta, \phi_k \rangle}{\lambda_k} \phi_k \in L_2([0, 1]).$$

Derartige Voraussetzungen sind im Kontext schlecht gestellter inverser Probleme unter anderem bei Florens et al. (2011) und Florens und Van Bellegem (2014) zu finden.

- (iii) *Es gilt $\|\tilde{\Gamma}^{-1/2} \Gamma_X\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2}$. Nach Definition 19 ist (T3) also äquivalent dazu, dass $\tilde{\Gamma}^{-1/2} \Gamma_X$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.*
- (iv) *Die Forderung der Existenz sehr hoher Momente ist der häufigen Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in den Beweisen geschuldet. Diese Annahme lässt sich abschwächen durch Verwendung von Fallunterscheidungen. Der Übersichtlichkeit halber wird in dieser Arbeit jedoch darauf verzichtet. Wegen einiger für die Argumentation nach bisherigem Wissen notwendiger Abschätzungen, wie beispielsweise Lemma A.1.2, dessen Voraussetzung achter Momente bereits scharf ist, lassen sich höhere Momentenbedingungen jedoch nicht gänzlich vermeiden.*

Mit der Teststatistik aus (5.4) lässt sich nun ein asymptotischer Test auf Exogenität, konkret für das Testproblem

$$H_0 : \mathbb{E}[X(t)U] = 0 \forall t \in [0, 1] \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists t \in [0, 1] : \mathbb{E}[X(t)U] \neq 0 \quad (5.43)$$

zum Niveau q formulieren. Er hat die typische Gestalt

$$\varphi_n : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \varphi_n = I \left\{ \frac{n}{t_n} (T_n - \mathfrak{R}_n) \geq c_q \right\}, \quad (5.44)$$

wobei c_q das q -Quantil der zentrierten Normalverteilung mit Varianz \mathfrak{V} aus (5.27) ist. Da die Testentscheidung durch \mathfrak{V} und \mathfrak{R}_n vom unbekanntem Slopeparameter β abhängt, sind hier für die Anwendbarkeit in der Praxis weitere Überlegungen notwendig, für die die folgenden Lemmata formuliert seien. Dazu schreibt man den Biasterm zunächst als

$$\mathfrak{R}_n = \frac{1}{n} \left(\sigma^2 + \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}. \quad (5.45)$$

50. Lemma: *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 48. Der Schätzer*

$$\hat{\mathfrak{R}}_n =: \frac{1}{n} \left(\sigma^2 + \|\Gamma_{X,n}^{1/2} \hat{\beta}_{IV}\|^2 \right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\hat{x}_k \hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} - 1 \right) I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$$

für den Biasterm aus Theorem 48 erfüllt

$$\frac{n}{t_n} \left(\hat{\mathfrak{R}}_n - \mathfrak{R}_n \right) = o_P(1).$$

BEWEIS: Zunächst überlegt man sich, dass $\|\Gamma_{X,n}^{1/2} \hat{\beta}_{IV}\|^2 - \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 = o_P(1)$. Dies ist ersichtlich durch die elementare Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \|\Gamma_{X,n}^{1/2} \hat{\beta}_{IV}\|^2 - \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 \right| &\leq \left\| \left(\Gamma_{X,n}^{1/2} - \Gamma_X^{1/2} \right) \hat{\beta}_{IV} \right\|^2 + \left\| \Gamma_X^{1/2} \left(\beta - \hat{\beta}_{IV} \right) \right\|^2 \\ &\leq \|\Gamma_{X,n}^{1/2} - \Gamma_X^{1/2}\|_{HS}^2 \|\hat{\beta}_{IV}\|^2 + \|\Gamma_X^{1/2}\|_{HS}^2 \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^2. \end{aligned}$$

Gemäß Kapitel 2 ist $\Gamma_X^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator, denn $\|\Gamma_X^{1/2}\|_{HS}^2 = \mathbb{E}\|X\|^2 < \infty$ nach Voraussetzung. Zusammen mit Theorem 24, das die Konsistenz von $\hat{\beta}_{IV}$ sichert, folgt die gewünschte Konvergenz für den zweiten Term. Der Ausdruck $\|\Gamma_{X,n}^{1/2} - \Gamma_X^{1/2}\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left\| \left(\Gamma_{X,n}^{1/2} - \Gamma_X^{1/2} \right) \phi_k \right\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\hat{x}_k - x_k)$ konvergiert gegen Null mit Lemma A.1.1. Weil zudem $\|\hat{\beta}_{IV}\|^2 = \mathcal{O}_P(1)$ gilt, folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, dass gilt

$$\frac{1}{t_n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\hat{x}_k \hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} - 1 \right) I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right) I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \right) = o_P(1).$$

Durch sukzessives Ersetzen der geschätzten Eigenwerte durch die wahren Eigenwerte und wiederholte Anwendung der Lemmata A.1.1 und A.1.2 lässt sich dies verifizieren. \square

51. Lemma: *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 48. Der Schätzer*

$$\hat{\mathfrak{V}}_n =: \left(\sigma^2 + \|\Gamma_{X,n}^{1/2} \hat{\beta}_{IV}\|^2 \right)^2$$

für die asymptotische Varianz aus Theorem 48 erfüllt

$$\frac{\mathfrak{V}}{\hat{\mathfrak{V}}_n} - 1 = o_P(1).$$

BEWEIS: Aus dem Beweis von Lemma 50 ist bereits bekannt, dass gilt $\|\Gamma_{X,n}^{1/2} \hat{\beta}_{IV}\|^2 - \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 = o_P(1)$. Da stochastische Konvergenz unter Anwendung stetiger Funktionen erhalten bleibt, siehe zum Beispiel 1.11.4 Lemma und 1.11.14 Korollar in Gänssler und Stute (1977), gilt infolgedessen $\mathfrak{V} - \hat{\mathfrak{V}}_n = o_P(1)$ sowie, da sowohl \mathfrak{V} also auch $\hat{\mathfrak{V}}_n$ fast sicher größer Null sind, $\frac{1}{\hat{\mathfrak{V}}_n} - \frac{1}{\mathfrak{V}} = o_P(1)$. Wegen $\frac{\mathfrak{V}}{\hat{\mathfrak{V}}_n} - 1 = \frac{1}{\hat{\mathfrak{V}}_n} (\mathfrak{V} - \hat{\mathfrak{V}}_n) + \left(\frac{1}{\hat{\mathfrak{V}}_n} - \frac{1}{\mathfrak{V}} \right) (\mathfrak{V} - \hat{\mathfrak{V}}_n)$ impliziert dies die Behauptung. \square

Auch die Normalisierungsfolge t_n soll noch geschätzt werden.

52. Lemma: *Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und U erfülle $E|U|^8 \leq \eta < \infty$. Die Voraussetzungen (V2)-(V11) seien erfüllt. Dann ist der Schätzer*

$$\hat{t}_n^2 =: \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\hat{x}_k \hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} - 1 \right)^2 I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}$$

für die Normalisierungsfolge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5.5) unter (H0) konsistent im Sinne von

$$\frac{1}{t_n^2} E |\hat{t}_n^2 - t_n^2| = o(1).$$

BEWEIS: Durch sukzessives Ersetzen der geschätzten durch die wahren Eigenwerte, sowie Anwendung der Lemmata A.1.1 und A.1.2 folgt die Behauptung. \square

Mit den Resultaten der Lemmata 50, 51 und 52 lässt sich nun das nachfolgende Lemma formulieren, dass die Anwendbarkeit des asymptotischen Tests aus Theorem 48 in der Praxis ermöglicht. Man beachte dabei, dass die Wahl der zur Regularisierung verwendeten Folge $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ noch aussteht. Die erstrebenswerte Festlegung einer geeigneten Regularisierung auf Grundlage der Stichprobe ist jedoch noch Gegenstand aktueller Forschung.

53. Lemma: *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 48. Dann gilt*

$$\frac{n}{\hat{t}_n} \frac{T_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

mit $\hat{\mathfrak{R}}_n$ aus Lemma 50, $\hat{\mathfrak{V}}_n$ aus Lemma 51 und \hat{t}_n aus Lemma 52.

BEWEIS: Nach Lemma 52 gilt $\frac{t_n}{\hat{t}_n} \xrightarrow{P} 1$. Weiter gilt

$$\frac{T_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} = \frac{T_n - \mathfrak{R}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}_n}} \frac{\sqrt{\mathfrak{V}_n}}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} + \frac{\mathfrak{R}_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}_n}} \frac{\sqrt{\mathfrak{V}_n}}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}}.$$

Da die Aussage von Theorem 48 äquivalent zu

$$\frac{n}{t_n} \frac{T_n - \mathfrak{R}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$$

ist, folgt mit den Lemmata 51 und 52 sowie dem Lemma von Slutsky, dass

$$\frac{n}{\hat{t}_n} \frac{T_n - \mathfrak{R}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}_n}} \frac{\sqrt{\mathfrak{V}_n}}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Wegen der Lemmata 50 und 51 konvergiert $\frac{n}{\hat{t}_n} \frac{\mathfrak{R}_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}_n}} \frac{\sqrt{\mathfrak{V}_n}}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}}$ stochastisch gegen Null. Erneutes Anwenden des Lemmas von Slutsky auf die Summe beider Ausdrücke liefert die gewünschte Aussage. \square

Ein asymptotischer Test zum Testproblem (5.43), der sich aus der Stichprobe (V11) berechnen lässt, ist nun gegeben durch

$$\tilde{\varphi}_n : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \tilde{\varphi}_n = I \left\{ \frac{n}{\hat{t}_n} \frac{T_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} \geq \tilde{c}_q \right\}, \quad (5.46)$$

wobei \tilde{c}_q das q -Quantil von $\mathcal{N}(0, 1)$ ist.

6. Bootstrapvariante des Tests auf Exogenität

6.1. Ein Bootstrapverfahren für die Teststatistik

Im vorangegangenen Kapitel wurde die asymptotische Verteilung der Teststatistik T_n aus (5.4) unter der Nullhypothese hergeleitet. Für die praktische Anwendung des Tests ist diese wegen der endlichen (und möglicherweise sogar kleinen) Stichprobengröße jedoch nur bedingt nutzbar. Hinzu kommt, dass die asymptotische Verteilung vom unbekanntem Slopeparameter β abhängt und somit das Einsetzen eines Schätzers notwendig wird, der für zusätzliche Ungenauigkeit bei der Berechnung des Quantils für die Testentscheidung sorgt. Daher empfiehlt sich hier die Anwendung eines Bootstrapverfahrens. Im Folgenden wird nach einer kurzen Erklärung des Prinzips die asymptotische Verteilung einer Bootstrapvariante der Teststatistik hergeleitet.

Bootstrap ist ein Resampling-Verfahren, das von Efron (1979) erstmals beschrieben wird, um durch Ziehen mit Zurücklegen aus einer unabhängigen und identisch verteilten Stichprobe eine von dieser abhängige Verteilung zu approximieren. So zeigen beispielsweise Bickel und Freedman (1981) und Freedman (1984) die Möglichkeit auf, die Verteilung von Schätzern in Regressionsmodellen konsistent durch Bootstrapvarianten zu approximieren, wobei letztere Arbeit zweistufige Kleinste-Quadrate-Schätzungen in stationären linearen Modellen untersucht. In Regressionsmodellen findet zur Approximation der Verteilung des Schätzers häufig ein Residuenbootstrap, ein Verfahren, bei dem aus den zentrierten Residuen mit Zurücklegen gezogen wird, Anwendung. Dieses Verfahren wird oft auch als naiver Bootstrap bezeichnet. Mammen (1993) führt im Kontext hochdimensionaler linearer Modelle für den Kleinste-Quadrate-Schätzer den wild Bootstrap ein – ein Verfahren, bei dem die Residuen mit geeigneten Zufallsvariablen multipliziert oder gänzlich durch diese ersetzt werden. Ein Residuenbootstrap kommt häufig bei Hypothesentests zum Einsatz, da die Nachahmung der Nullhypothese bei der Approximation des Quantils zur Testentscheidung gut gelingt. Auch für funktionale Variablen wurden bereits Bootstrapverfahren untersucht. So zeigen Ferraty et al. (2010) in einem funktionalen nichtparametrischen Modell Konsistenzresultate für einen Residuenbootstrap, der angewendet wird um die Verteilung eines Kernschätzers für den Slopeparameter zu approximieren. Für das funktionale lineare Modell liefern González-Manteiga und Martínez-Calvo (2010) Konsistenzresultate für einen Residuenbootstrap für einen auf funktionalen Hauptkomponenten basierenden Schätzer des Slopeparameters. Das Konzept der Bootstrapkonsistenz sowie grundlegende Beweisansätze werden in Kapitel 3.1 von Shao und Tu (1996) vorgestellt. Einen Überblick über theoretische Bootstrapresultate und Anwendungen des Bootstraps auf verschiedene statistische Fragestellungen bieten Shao und

Tu (1996) und DasGupta (2008).

In der nachfolgenden Bemerkung wird ein Bootstrapverfahren vorgestellt, das auf der Idee des Residuenbootstraps basiert. Im Weiteren bezeichne

$$\mathcal{S}_n =: \sigma(X_1, W_1, Y_1, \dots, X_n, W_n, Y_n) \quad (6.1)$$

die kleinste von der Stichprobe erzeugte Sigmaalgebra.

54. Vorgehen: Die folgenden Schritte beschreiben das Vorgehen zur Berechnung einer Bootstrapvariante der Teststatistik aus (5.4).

1. Angelehnt an die Idee des Residuenbootstraps werden die Terme $\mathcal{U}_{i,k}$ aus (5.3) zunächst auf Grundlage der Stichprobe (V11) geschätzt durch

$$\hat{\mathcal{U}}_{i,k} := \sigma \hat{U}_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \hat{S}_{i,m}, \quad (6.2)$$

wobei die Residuen mittels

$$\hat{U}_i := \frac{1}{\sigma} \left(Y_i - \langle \hat{\beta}_{IV}, X_i \rangle \right) \quad (6.3)$$

berechnet werden und der Schätzer für $S_{i,m}$ aus (5.8) definiert ist als

$$\hat{S}_{i,m} := \langle \hat{\beta}_{IV}, \phi_m \rangle \langle \phi_m, X_i \rangle, \quad (6.4)$$

$i \in \{1, \dots, n\}, m \in \mathbb{Z}$. Da der Instrumentvariablen-schätzer sowohl im exogenen als auch im endogenen Fall konsistent ist und somit eine Nachahmung des Modells unter der Nullhypothese sichergestellt wird, wurde dieser hier als Schätzer für β gewählt.

2. Berechne für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ auf einem Bootstrapverfahren basierte $\{\mathcal{U}_{1,k}^*, \dots, \mathcal{U}_{n,k}^*\}$, die (B1)–(B3) erfüllen.
3. Berechne aus den $\mathcal{U}_{i,k}^*$, die als $\sigma U_i^* + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^*$ aufgefasst werden können, Bootstrapregressanden

$$Y_i^* := \langle \hat{\beta}_{IV}, X_i \rangle + \sigma U_i^*.$$

4. Verwende Y_i^* und $\mathcal{U}_{i,k}^*$ ($i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{Z}$) für die Berechnung einer Bootstrapversion T_n^* der Teststatistik T_n aus Kapitel 5.

Mit einer Zerlegung analog zu (5.9) ergibt sich für T_n^* eine Darstellung der Form

$$T_n^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^* + T_{n,2}^* + T_{n,3}^* + R_n^*, X_j \rangle|^2. \quad (6.5)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} T_{n,1}^* &:= \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n}^* \right) - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n}^* \right) \\ T_{n,2}^* &:= \left(\left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\Gamma}_n - \Gamma_{X,n}^\dagger \Gamma_{X,n} \right) \beta \right)^* - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} A_n^* \\ &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k'\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k'\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^* \right) \phi_k \\ T_{n,3}^* &:= \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n}^* + A_n^* \right) - \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n}^* + A_n^* \right) \\ R_n^* &:= \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger \mathcal{U}_{X,n}^* + A_n^*, \end{aligned}$$

wobei

$$A_n^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k'\} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^* \phi_k. \quad (6.6)$$

Aus dem Term $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n^*, X_j \rangle|^2$ geht die asymptotische Verteilung der Teststatistik hervor.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n^*, X_j \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} (\hat{x}_k - x_k) \left| \sum_{i=1}^n D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^* \right|^2 \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k \left\{ \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^n D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{D_{j,k} \mathcal{U}_{j,k}^*} \right\} \\ &+ \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} \sum_{j=1}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \left\{ \sum_{i=1}^n D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}^*} + \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n D_{i_1,k} \mathcal{U}_{i_1,k}^* \overline{D_{i_2,l} \mathcal{U}_{i_2,l}^*} \right\} \\ &=: \sum_{i=1}^5 R_{n,i}^*. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist es, für T_n^* schwache Konvergenz in Wahrscheinlichkeit zu zeigen. Die stochastische Konvergenz bezüglich der unbekanntenen Verteilung $P(\cdot | \mathcal{S}_n)$ wird dabei durch mit \mathbb{P} indizierte Landau-Symbole gekennzeichnet.

55. Bemerkung: Bei einem Residuenbootstrap erhält man im vorliegenden Modell kein Martingaldifferenzschema, da $E \left[Y_{n,j}^* \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^* \right]$ im Allgemeinen von Null verschieden ist. Korrigiert man diesen Term, so erhält man einen Biasterm unpassender Rate für die Asymptotik.

Für die aus dem in Vorgehen 54 resultierenden $\left\{ \mathcal{U}_{i,k}^* \right\}_{1 \leq i \leq n}$ aus (6.10) werden die folgenden Annahmen getroffen:

Bedingt nach der Stichprobe liege Zentriertheit in der Form

$$E \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mid \mathcal{S}_n \right] = 0 \quad (\text{B1})$$

vor für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Sie seien außerdem quartisch integrierbar:

$$E \left| \mathcal{U}_{i,k}^* \right|^4 < \infty. \quad (\text{B2})$$

Weiter seien $\left\{ \mathcal{U}_{i,k}^* \right\}_{1 \leq i \leq n}$ bedingt stochastisch unabhängig in dem Sinn, dass

$$P \left(\mathcal{U}_{i,k}^* \in A, \mathcal{U}_{j,m}^* \in B \mid \mathcal{S}_n \right) = P \left(\mathcal{U}_{i,k}^* \in A \mid \mathcal{S}_n \right) P \left(\mathcal{U}_{j,m}^* \in B \mid \mathcal{S}_n \right) \quad (\text{B3})$$

für alle A, B der zugehörigen Sigmaalgebren und $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j, k, m \in \mathbb{Z}$ gilt. Damit gilt insbesondere

$$E \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{j,m}^* \mid \mathcal{S}_n \right] = E \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mid \mathcal{S}_n \right] E \left[\mathcal{U}_{j,m}^* \mid \mathcal{S}_n \right] \quad (\text{6.8})$$

und

$$E \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mid \mathcal{U}_{j,m}^*, \mathcal{S}_n \right] = E \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mid \mathcal{S}_n \right], \quad (\text{6.9})$$

siehe Corollary 2 beziehungsweise Corollary 5 in Kapitel 7.3 von Chow und Teicher (1997).

56. Bemerkung:

- (i) [WILD BOOTSTRAP] Es seien $V_1, \dots, V_n : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $EV_1 = 0$, $E|V|^2 = 1$ und $E|V|^4 < \infty$, die unabhängig von \mathcal{S}_n sind. Berechnet man $\left\{ \mathcal{U}_{i,k}^* \right\}_{1 \leq i \leq n}$ im zweiten Schritt von Vorgehen 54 für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ als

$$\mathcal{U}_{i,k}^* := V_i \hat{\mathcal{U}}_{i,k}, \quad (\text{6.10})$$

so erfüllen diese die Voraussetzungen (B1)–(B3).

(ii) [NAIVER BOOTSTRAP] Berechnet man $\left\{\mathcal{U}_{i,k}^*\right\}_{1 \leq i \leq n}$ im zweiten Schritt von Vorgehen 54 für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ durch Ziehen mit Zurücklegen aus $\left\{\hat{\mathcal{U}}_{1,k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{U}}_{i,k}, \dots, \hat{\mathcal{U}}_{n,k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{U}}_{i,k}\right\}$, so erfüllen diese die Voraussetzungen (B1)–(B3).

$\left\{\mathcal{U}_{1,k}^*, \dots, \mathcal{U}_{n,k}^*\right\}$ aus Bemerkung 56 (i) erfüllen (B1) weil $V_i, i \in \{1, \dots, n\}$, zentriert und stochastisch unabhängig von \mathcal{S}_n ist. Wegen $E|V_1|^4 < \infty$ und Lemma A.1.3 folgt (B2). (B3) ergibt sich analog zum wild Bootstrap für Residuen aus der \mathcal{S}_n -Messbarkeit von $\hat{\mathcal{U}}_{i,k}$ und der Unabhängigkeit von V_i und $\mathcal{S}_n, i \in \{1, \dots, n\}$.

Für $\left\{\mathcal{U}_{1,k}^*, \dots, \mathcal{U}_{n,k}^*\right\}$ aus Bemerkung 56 (ii) erhält man (B1) durch die Zentrierung der Residuen und (B2) durch Lemma A.1.3. Die empirische Verteilung der Residuen unterliegt $\left\{\mathcal{U}_{1,k}^*, \dots, \mathcal{U}_{n,k}^*\right\}$, sodass diese bedingt nach \mathcal{S}_n unabhängig und identisch verteilt sind, also insbesondere (B3) gilt.

6.2. Schwach konvergenter Term

Analog zu Abschnitt 5.3 wird nun gezeigt, dass der Term

$$\frac{n}{2t_n} R_{n,3}^* := \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k}^* D_{i,k} x_k} := \sum_{j=2}^n Y_{n,j}^*, \quad (6.11)$$

mit

$$Y_{n,j}^* := \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*$$

und

$$Z_{n,j,k}^* := \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k}^* D_{i,k} x_k}$$

in \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit schwach gegen eine Normalverteilung konvergiert. Dazu definiert man die aufsteigende Filtrierung $\left(\mathcal{F}_{n,j}^*\right)_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n}$ als die Folge der Sigmaalgebren

$$\mathcal{F}_{n,j}^* =: \sigma(\mathcal{S}_n, Y_1^*, \dots, Y_j^*), \quad \mathcal{F}_{n,0}^* =: \sigma(\mathcal{S}_n). \quad (6.12)$$

$Y_{n,j}^*$ ist messbar bezüglich $\mathcal{F}_{n,j}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$. Weiter ist $Y_{n,j}^*$ unter (B3) und (B1) für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$ zentriert und unter (B2) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^2$ quadratisch integrierbar. Da $Z_{n,j,k}^*$ und $D_{j,k}$ $\mathcal{F}_{n,j-1}^*$ -messbar sind, ist wegen (6.9) und (B1) auch die Martingaldifferenzeigenschaft für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$ erfüllt:

$$E[Y_{n,j}^* | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] = \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_{n,j,k}^* D_{j,k} E[\mathcal{U}_{j,k}^* | \mathcal{F}_{n,j-1}^*]$$

$$= \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} Z_{n,j,k}^* D_{j,k} \mathbb{E} [\mathcal{W}_{j,k}^* \mid \mathcal{S}_n] = 0.$$

Somit ist die Folge $(S_{n,p}^* := \sum_{j=2}^p Y_{n,j}^*, \mathcal{F}_{n,p}^*)_{2 \leq p \leq n < \infty}$ ein Martingaldifferenzschema.

Um nun wie in Kapitel 5 argumentieren zu können, werden wieder die Gültigkeit einer bedingten Lindeberg-Bedingung und die stochastische Konvergenz der asymptotischen Varianz gegen eine positive Konstante gezeigt. Dies wird in den Propositionen 57 und 58 vorgenommen.

57. Proposition: [BEDINGTE LINDEBERG-BEDINGUNG] *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B1)–(B3) erfüllt und es gelte $\mathbb{E}|U_1|^4 < \infty$. Weiter gelte*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} < \infty. \quad (\text{T3}^*)$$

Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ die bedingte Lindeberg-Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{j=2}^n \mathbb{E} \left[Y_{n,j}^{*2} I\{|Y_{n,j}^*| > \varepsilon\} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^* \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

BEWEIS: Da $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{F}_{n,j-1}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \{1, \dots, n+1\}$ ist, lassen sich die Summanden aus der Lindeberg-Bedingung gegen $\mathbb{E} \left[Y_{n,j}^{*2} I\{|Y_{n,j}^*| > \varepsilon\} \mid \mathcal{S}_n \right]$ abschätzen. Dem Vorgehen des Beweises von Proposition 36 folgend, wird die bedingte Lyapunov-Bedingung

$$\sum_{j=2}^n \mathbb{E} [|Y_{n,j}^*|^4 \mid \mathcal{S}_n] = o_{\mathbb{P}}(1) \quad (6.14)$$

gezeigt. Dazu wird zunächst die Summe der bedingten Erwartungen von $|Y_{n,j}^*|^4$ gegeben \mathcal{S}_n berechnet und in vier Terme aufgeteilt.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2}^n \mathbb{E} [|Y_{n,j}^*|^4 \mid \mathcal{S}_n] \\ &= \frac{1}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbb{E} \left[|\mathcal{W}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*|^4 \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} \mathbb{E} \left[|\mathcal{W}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^* \overline{\mathcal{W}_{j,l}^* D_{j,l} Z_{n,j,l}^*}|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{k,l,m \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |l| \neq |m|}} \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*|^2 \overline{\mathcal{U}_{j,l}^* D_{j,l} Z_{n,j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^* D_{j,m} Z_{n,j,m}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \\
 & + \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, \\ |m| \neq |r|}} \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,l}^* D_{j,l} Z_{n,j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^* D_{j,m} Z_{n,j,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,r}^* D_{j,r} Z_{n,j,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \Bigg\} \\
 =: & \sum_{i=1}^4 L_{n,i}^*.
 \end{aligned}$$

Für $L_{n,4}^*$ sind unter (B3) $Z_{n,j,k}^* \overline{Z_{n,j,l}^*} Z_{n,j,m}^* \overline{Z_{n,j,r}^*}$ bedingt stochastisch unabhängig von den restlichen Faktoren. Wegen der \mathcal{S}_n -Messbarkeit von $D_{j,k}$ für $k \in \mathbb{Z}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,l}^* D_{j,l} Z_{n,j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^* D_{j,m} Z_{n,j,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,r}^* D_{j,r} Z_{n,j,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \\
 & = D_{j,k} \overline{D_{j,l} D_{j,m} D_{j,r}} \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{j,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \mathbb{E} \left[Z_{n,j,k}^* \overline{Z_{n,j,l}^*} Z_{n,j,m}^* \overline{Z_{n,j,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right].
 \end{aligned}$$

Wegen (B1) gilt dabei

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[Z_{n,j,k}^* \overline{Z_{n,j,l}^*} Z_{n,j,m}^* \overline{Z_{n,j,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \\
 & = C x_k x_l x_m x_r \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \overline{D_{i,k} D_{i,l} D_{i,m} D_{i,r}} \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{i,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \overline{D_{i,k} D_{i,l} D_{p,m} D_{p,r}} \mathbb{E} \left[\overline{\mathcal{U}_{i,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{p,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{p,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der iterierten Erwartung und nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man L_1 -Konvergenz für $L_{n,4}^*$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} |L_{n,4}^*| \\
 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \\
 & \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E} \left| D_{j,k} \overline{D_{j,l} D_{j,m} D_{j,r}} D_{i,k} D_{i,l} \overline{D_{i,m} D_{i,r}} \overline{\mathcal{U}_{j,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,r}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,r}^*} \right| \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \mathbb{E} \left| D_{j,k} \overline{D_{j,l} D_{j,m} D_{j,r}} D_{i,k} D_{i,l} \overline{D_{p,m} D_{p,r}} \overline{\mathcal{U}_{j,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,r}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,k}^*} \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{p,m}^*} \overline{\mathcal{U}_{p,r}^*} \right| \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \\
 &\quad \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \sqrt{\mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{j,m} \overline{D_{j,r}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \overline{D_{i,m}} D_{i,r}|^2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \sqrt{\mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{j,m} \overline{D_{j,r}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \overline{D_{p,m}} D_{p,r}|^2} \right\} \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^3} (n + n(n-1)) \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} \left| \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right| \left| \frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right| \left| \frac{x_m w_m}{|c_m|^2} - 1 \right| \left| \frac{x_r w_r}{|c_r|^2} - 1 \right| \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} \right)^4 \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} \right)^4.
 \end{aligned}$$

Analog geht man für $L_{n,1}^*$ vor. Es gilt

$$\mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^*|^4 | \mathcal{S}_n] = |D_{j,k}|^4 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^4 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\overline{Z_{n,j,k}^*}|^4 | \mathcal{S}_n]$$

mit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [|\overline{Z_{n,j,k}^*}|^4 | \mathcal{S}_n] &= C x_k^4 \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} |D_{i,k}|^4 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^4 | \mathcal{S}_n] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} |D_{i,k} \overline{D_{p,k}}|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*}|^2 | \mathcal{S}_n] \right\},
 \end{aligned}$$

was zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |L_{n,1}^*| &\leq \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E} \left[|D_{j,k} \overline{D_{i,k}} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,k}^*}|^4 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \mathbb{E} \left[|D_{j,k} \mathcal{U}_{j,k}^*|^4 |D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*}|^2 \right] \right\} \\
 &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \left\{ \mathbb{E} |D_{1,k}|^8 + n \sqrt{\mathbb{E} |D_{1,k}|^8 \mathbb{E} |D_{1,k}|^4} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{C}{t_n^4 n^2} (n+1) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(\frac{x_k^4 w_k^4}{|c_k|^8} + 1 \right) \\ &\leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(\frac{x_k^4 w_k^2}{|c_k|^4} + x_k^2 \right) \end{aligned}$$

führt. Mit entsprechendem Vorgehen für $L_{n,2}^*$ und $L_{n,3}^*$ ergibt sich insgesamt unter (T3*), dass

$$\sum_{j=2}^n \mathbb{E} |Y_{n,j}^*|^4 = \mathbb{E} \left| \sum_{j=2}^n \mathbb{E} [|Y_{n,j}^*|^4 | \mathcal{S}_n] \right| \leq \sum_{i=1}^4 \mathbb{E} |L_{n,i}^*|^4 = o\left(\frac{1}{t_n^4}\right),$$

was (6.14) und somit die Behauptung impliziert. \square

58. Proposition: [STOCHASTISCHE KONVERGENZ DER BEDINGTEN VARIANZ] *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B1)–(B3) erfüllt und es gelte $\mathbb{E}|U_1|^4 < \infty$. Zudem gelte (T1) und (T3*) sowie die folgenden Bedingungen:*

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(x_k^2 \mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^4 \right)^{1/4} \frac{x_k^4 w_k^4}{|c_k|^8} = \mathcal{O}(1), \quad (\text{T2}^*)$$

$$\frac{1}{t_n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k^{3/2} w_k}{|c_k|^2} = \mathcal{O}(1). \quad (\text{T4}^*)$$

Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{16}$

$$\mathfrak{V}_n^* := \sum_{j=2}^n \mathbb{E} \left[Y_{n,j}^{*2} | \mathcal{F}_{n,j-1}^* \right] \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathfrak{V} \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (6.15)$$

wobei \mathfrak{V} die positive Konstante aus Proposition 38 ist.

BEWEIS: Analog zum Beweis von Proposition 38 wird \mathfrak{V}_n^* zerlegt. Da hier die in $k, l \in \mathcal{K}_n, k \neq l$, gemischten Terme von Null verschieden sind, ergeben sich vier Terme.

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_n^* &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} Z_{n,j,k}^* \right|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^* \right] \\ &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |D_{j,k} Z_{n,j,k}^*|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} D_{j,k} Z_{n,j,k}^* \overline{D_{j,l} Z_{n,j,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 |D_{j,k} D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mathbb{E}[|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathbb{E}[\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right\} \\
 &+ \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^{j-1} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 |D_{j,k}|^2 D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathbb{E}[|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathbb{E}[\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right\} \\
 &=: \mathfrak{V}_{n,1}^* + \mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^*.
 \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass aus $\mathfrak{V}_{n,1}^*$ die asymptotische Varianz hervorgeht, wird zunächst die Differenz $\mathfrak{V}_{n,1}^* - \mathfrak{H}_n$ mit \mathfrak{H}_n aus (5.28) in drei Teile zerlegt.

$$\begin{aligned}
 &\mathfrak{V}_{n,1}^* - \mathfrak{H}_n \\
 &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \left(|D_{i,k} D_{j,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mathbb{E}[|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] - \mathfrak{V} \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \\
 &\quad \left\{ |D_{i,k} D_{j,k}|^2 \left[|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mathbb{E}[|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathfrak{V} \left[|D_{i,k} D_{j,k}|^2 - \left(\frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right)^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - |D_{i,k} D_{j,k}|^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k - |D_{i,-k} D_{j,-k}|^2 |\langle \beta, \phi_{-k} \rangle|^2 x_{-k} \right\} \\
 &=: \mathbb{V}_{n,1}^* + \mathbb{V}_{n,2}^* + \mathbb{V}_{n,3}^*
 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $\mathbb{V}_{n,1}^*$ und $\mathbb{V}_{n,2}^*$ im L_2 -Sinne konvergieren, sowie dass $\mathbb{V}_{n,3}^*$ L_1 -konvergent ist. Bei der Berechnung des zweiten absoluten Moments von $\mathbb{V}_{n,1}^*$ entsteht für $i, j, p, q \in \{1, \dots, n\}$, alle verschieden, ein Ausdruck, der zunächst mit der iterierten Erwartung umgeformt wird, um dann (B3) auszunutzen:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \left\{ |\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right. \\
 & \quad \left. \left\{ |\mathcal{U}_{p,k}^*|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{q,k}^*|^2 | \mathcal{F}_{n,j-1}^*] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \right. \\
 & \quad \left\{ \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \\
 & \quad \left. \left\{ \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{p,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{q,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right]. \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Unter der Verwendung eines der in Bemerkung 56 beschriebenen Resampling-Verfahren lässt sich mit Lemma A.4.1 leicht erkennen, dass der führende Term von der Gestalt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \left\{ |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right. \\
 & \quad \left. \left\{ |\hat{\mathcal{U}}_{p,k} \hat{\mathcal{U}}_{q,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right] \quad (6.17)
 \end{aligned}$$

ist. Hierfür überlegt man sich zunächst die Gültigkeit der Zerlegung

$$\hat{\mathcal{U}}_{i,k} = \sigma U_i + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m} + \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_i \rangle = \mathcal{U}_{i,k} + \mathcal{J}_{i,k,n} \quad (6.18)$$

mit

$$\mathcal{J}_{i,k,n} := \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X_i \rangle,$$

die durch Einsetzen der Reihenentwicklung von β erfolgt. Setzt man nun (6.18) in obigen Term ein, so lässt sich (6.17) abschätzen gegen ein Vielfaches von

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \right. \\
 & \quad \left\{ |\mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{j,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 + |\mathcal{J}_{i,k,n} \mathcal{J}_{j,k,n}|^2 \right. \\
 & \quad \left. + |\mathcal{U}_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{j,k}| |\mathcal{J}_{j,k,n}| + |\mathcal{U}_{i,k}| |\mathcal{J}_{j,k,n}|^2 + |\mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{j,k}| |\mathcal{J}_{i,k,n} \mathcal{J}_{j,k,n}| \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ |\mathcal{U}_{p,k} \mathcal{U}_{q,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 + |\mathcal{I}_{p,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n}|^2 \right. \\ & \left. + |\mathcal{U}_{p,k}|^2 \mathcal{U}_{q,k} \mathcal{I}_{q,k,n} + |\mathcal{U}_{p,k} \mathcal{I}_{q,k,n}|^2 + \mathcal{U}_{p,k} \mathcal{U}_{q,k} \mathcal{I}_{p,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n} \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Unkorreliertheit von $D_{i,k}$ und $\mathcal{U}_{i,k}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist hier

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \left\{ |\mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{j,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right. \\ \left. \left\{ |\mathcal{U}_{p,k} \mathcal{U}_{q,k}|^2 - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right] = 0. \end{aligned}$$

Durch mehrfache Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wegen (5.16) ergibt sich für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{16}$ die grobe Abschätzung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 |\mathcal{I}_{i,k,n} \mathcal{I}_{j,k,n} \mathcal{I}_{p,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n}|^2 \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^{16} \mathbb{E} |D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k} \langle \phi_k, X_i \rangle \langle \phi_k, X_j \rangle \langle \phi_k, X_p \rangle \langle \phi_k, X_q \rangle|^4 \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^{16} \right)^{1/2} \mathbb{E} |D_{1,k}|^8 \mathbb{E} |\langle \phi_k, X_1 \rangle|^8 \\ & \leq C \left(\frac{w_k^4}{|c_k|^8} + \frac{1}{x_k^4} \right) x_k^4 \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^{16} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit analoger Argumentation und Abschätzung der Momente von $\mathcal{U}_{i,k}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{Z}$, gegen Konstanten erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{p,k}|^2 \mathcal{U}_{j,k} \mathcal{I}_{j,k,n} \mathcal{U}_{q,k} \mathcal{I}_{q,k,n} \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E} |D_{1,k}|^4 \right)^2 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^4 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2 \left(\mathbb{E} |\mathcal{I}_{j,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^2 x_k \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^8 \right)^{1/4} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 \mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{j,k} \mathcal{I}_{i,k,n} \mathcal{I}_{j,k,n} \overline{\mathcal{U}_{p,k} \mathcal{U}_{q,k} \mathcal{I}_{p,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n}} \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E} |D_{1,k}|^4 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2 \right)^2 \left(\mathbb{E} |\mathcal{I}_{i,k,n} \mathcal{I}_{j,k,n} \overline{\mathcal{I}_{p,k,n} \mathcal{I}_{q,k,n}}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^2 x_k^2 \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^{16} \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Entsprechend lassen sich alle gemischten Terme abschätzen. Exemplarisch sei hier der führende der gemischten Terme diskutiert:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k} D_{p,k} D_{q,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k} \mathcal{U}_{j,k} \mathcal{U}_{p,k}|^2 \mathcal{U}_{q,k} \mathcal{J}_{q,k,n} \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E} |D_{1,k}|^4 \right)^2 \left(\mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^4 \mathbb{E} |\mathcal{U}_{1,k}|^2 \mathbb{E} |\mathcal{J}_{q,k,n}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^2 x_k^{1/2} \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^4 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

So lässt sich der führende Term aus $\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,1}^*|^2$ abschätzen gegen

$$\frac{C}{t_n^4} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left| \frac{x_k^2 w_k^2}{|c_k|^4} + 1 \right|^2 x_k^{1/2} \left(\mathbb{E} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^4 \right)^{1/4},$$

was unter Voraussetzung (T2*) gerade ein $\mathcal{O} \left(\frac{1}{t_n^4} \right)$ ist.

Für den Term mit $i, p, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq p, p \neq j$, aus $\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,1}^*|^2$ ergibt sich unter (V10) nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left[|D_{j,k}|^4 |D_{i,k} D_{p,k}|^2 \right. \\ & \quad \left. \left\{ \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right. \\ & \quad \left. \left\{ \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{p,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\} \right] \\ & \leq \frac{C}{t_n^4 n} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^4 \left(\mathbb{E} |D_{1,k}|^8 \right)^{1/2} \mathbb{E} |D_{1,k}|^4 \\ & \leq \frac{C}{t_n^4 n} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^4 \left(\frac{w_k^4}{|c_k|^8} + \frac{1}{x_k^4} \right)^{1/2} \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right) \\ & \leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \left(\frac{x_k^4 w_k^2}{|c_k|^4} + x_k^2 \right) \\ & = o \left(\frac{1}{t_n^4} \right), \end{aligned}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen (T3*) gilt. Weiter gilt unter (V10) unter Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den in $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ quadratischen Term aus $\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,1}^*|^2$, dass

$$\begin{aligned}
 & \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k}|^4 \left\{ \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 | \mathcal{S}_n] \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \left(\sigma^2 + \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m \right)^2 \right\}^2 \right] \\
 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} |D_{1,k}|^8 \\
 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \left(\frac{w_k^4}{|c_k|^8} + \frac{1}{x_k^4} \right) \\
 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^2 \alpha^4} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^4 = o\left(\frac{1}{t_n^4}\right).
 \end{aligned}$$

Wiederholt man die vorangegangene Argumentation für die in $k, l \in \mathcal{K}_n$, $k \neq l$, gemischten Reihen, so sieht man deren untergeordnete Rolle. Somit gilt

$$\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,1}^*|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t_n^4}\right) + o\left(\frac{1}{t_n^4}\right)$$

und damit insbesondere $\mathbb{V}_{n,1}^* = o_{\mathbb{P}}(1)$.

Um L_2 -Konvergenz für $\mathbb{V}_{n,2}^*$ zu zeigen, nutzt man $\mathfrak{V} < \infty$. Wegen der Unkorreliertheit von $D_{i,k}$ und $D_{j,l}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq l$, erhält man

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k} D_{j,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \left(|D_{p,l} D_{q,l}|^2 - \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right|^2 \right) \right] \\
 & = \mathbb{E} \left[|D_{i,k} D_{j,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right] \mathbb{E} \left[|D_{p,l} D_{q,l}|^2 - \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right|^2 \right] = 0,
 \end{aligned}$$

was für alle $i, j, p, q \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $p \neq q$ erfüllt ist. Ebenso gilt unter (V11) für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$\mathbb{E} \left[\left(|D_{1,k} D_{2,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \left(|D_{3,k} D_{4,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \right] = 0.$$

Es ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,2}^*|^2 & \leq \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left| \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \left(|D_{i,k} D_{j,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \right|^2 \\
 & \leq \frac{C}{t_n^4 n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left[\left(|D_{1,k} D_{2,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \left(|D_{1,k} D_{3,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \right] \\
 & \quad + \frac{C}{t_n^4 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left| |D_{1,k} D_{2,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right|^2,
 \end{aligned}$$

wobei wegen (5.16) für alle $k \in \mathcal{K}_n$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(|D_{1,k}D_{2,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \left(|D_{1,k}D_{3,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right) \right] \\ & \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right) \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 + \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^4 \leq \frac{C}{\alpha^2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbb{E} \left| |D_{1,k}D_{2,k}|^2 - \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \right|^2 \leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^2 + \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^4 \leq \frac{C}{\alpha^4}$$

gilt. Dies führt unter (V10) zu

$$\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,2}^*|^2 \leq \frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left| \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} - x_k \right|^2 + \frac{C}{t_n^4 n^2 \alpha^4} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 = o\left(\frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{t_n^4}\right),$$

da die erste Reihe gegen Ct_n^2 abgeschätzt werden kann.

Für die Diskussion von $\mathbb{V}_{n,3}^*$ genügt es, den Term mit Index k zu betrachten (statt $-k$). Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergibt unter (T1) und Lemma A.1.3, dass

$$\mathbb{E} |\mathbb{V}_{n,3}^*| \leq \frac{1}{t_n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^3 \mathbb{E} |D_{1,k}D_{2,k}|^2 = \frac{1}{t_n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k \left| \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right|^2 = o(1).$$

Insgesamt ergibt sich also insbesondere $\mathfrak{V}_{n,1}^* = \mathfrak{H}_n + o_{\mathbb{P}}(1)$, und mit (5.33) schließlich

$$\mathfrak{V}_{n,1}^* = \mathfrak{V} + o_{\mathbb{P}}(1).$$

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^*$ stochastisch gegen Null konvergiert, berechnet man zunächst dessen bedingte Varianz gegeben \mathcal{S}_n , die mit $\text{var}_{\mathcal{S}_n}(\cdot)$ bezeichnet wird. Dabei nutzt man aus, dass unter (B3) gilt, dass $\mathbb{E}[\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^* \mid \mathcal{S}_n] = 0$. Nach Anwendung der Dreiecksungleichung nutzt man aus, dass unter (B1) für das zweite Moment von $\mathfrak{V}_{n,3}^*$ beziehungsweise $\mathfrak{V}_{n,4}^*$ lediglich die in i, p quadratischen Terme von Null verschieden sind:

$$\begin{aligned} & \text{var}_{\mathcal{S}_n} (\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^*) \\ & \leq \frac{1}{t_n^4 n^4} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ |k| \neq |l|}} \sum_{k, l \in \mathcal{K}_n} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ & \quad + \frac{C}{t_n^4 n^4} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 |D_{j,k}|^2 D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ & \quad + \frac{C}{t_n^4 n^4} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\
 &+ \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 |D_{j,k}|^2 D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right)^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right\} \\
 &+ \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < p < j < q \leq n} \left\{ \mathbb{E} \left[\left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 |D_{j,k}|^2 D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^2 |D_{q,k}|^2 D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{q,k}^*|^2 \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right) \mid \mathcal{S}_n \right] \\
 &\quad + \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l D_{q,k} \overline{D_{q,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathbb{E} [\mathcal{U}_{q,k}^* \overline{\mathcal{U}_{q,l}^*} \mid \mathcal{F}_{n,j-1}^*] \right) \mid \mathcal{S}_n \right] \left. \right\} \\
 &= \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left\{ \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}}|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 \mid \mathcal{S}_n] \right. \\
 &\quad + \sum_{\substack{k, l, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, \\ |m| \neq |l|}} x_k^2 x_l x_m |D_{j,k} D_{i,k}|^2 \overline{D_{j,l}} D_{j,m} \overline{D_{i,l}} D_{i,m} \\
 &\quad \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{i,m}^* \mid \mathcal{S}_n] \\
 &\quad + \sum_{\substack{k, l, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} D_{j,m} \overline{D_{j,r}} D_{i,m} \overline{D_{i,r}} \\
 &\quad \left. \mathbb{E} [\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^* \overline{\mathcal{U}_{j,r}^*} \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{i,r}^*} \mid \mathcal{S}_n] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^4 |D_{j,k}|^4 |D_{i,k} \overline{D_{p,k}}|^2 \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*}|^2 |\mathcal{U}_{j,k}^*|^4 \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
& \quad + \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 \left(|D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 |D_{i,k} \overline{D_{i,l}} D_{p,k} \overline{D_{p,l}}| \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{p,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*}| \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}}|^2 \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right) \right. \\
& \quad + \sum_{\substack{k,l,m \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, \\ |m| \neq |l|}} x_k^2 x_l x_m \overline{D_{j,l}} D_{j,m} \\
& \quad \quad \left(|D_{j,k}|^2 |D_{i,k} \overline{D_{p,k}} D_{i,l} \overline{D_{p,m}}| \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathcal{U}_{i,l}^* \overline{\mathcal{U}_{p,m}^*} \mathcal{U}_{j,l}^* \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*}| \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + |D_{j,k} D_{i,k}|^2 |\overline{D_{p,l}} D_{p,m}| \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 |\overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{p,m}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^*| \mid \mathcal{S}_n \right] \right) \\
& \quad + \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r D_{j,k} \overline{D_{j,l}} \overline{D_{j,m}} D_{j,r} D_{i,k} D_{i,l} \overline{D_{p,m}} \overline{D_{p,r}} \\
& \quad \quad \left. \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{p,r}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*} \mathcal{U}_{j,r}^* \mid \mathcal{S}_n \right] \right\} \\
& + \frac{C}{t_n^4 n^4} \sum_{1 \leq i < p < j < q \leq n} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{X}_n} x_k^4 |D_{j,k} D_{q,k} D_{i,k} \overline{D_{p,k}}|^2 \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{p,k}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{q,k}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
& \quad + \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 |D_{i,k} \overline{D_{j,l}} D_{p,k} \overline{D_{p,l}}| \\
& \quad \quad \left(|D_{j,k} \overline{D_{i,l}} D_{q,k} \overline{D_{q,l}}| \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{p,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{q,k}^* \overline{\mathcal{U}_{q,l}^*}| \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + |D_{j,k} D_{q,l}|^2 \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{p,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*}| |\mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{q,l}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right) \\
& \quad + \sum_{\substack{k,l,m \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |m| \neq |l|}} x_k^2 x_l x_m D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{q,k} \overline{D_{q,m}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(D_{i,k} \overline{D_{i,l} D_{p,k} D_{p,m}} \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{j,l}^* \mathcal{U}_{p,k}^* \mathcal{U}_{p,m}^* \mathcal{U}_{q,k}^* \mathcal{U}_{q,m}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\
 & \quad \left. + |D_{i,k}|^2 \overline{D_{p,l} D_{p,m}} \mathbb{E} \left[|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \overline{\mathcal{U}_{p,l}^* \mathcal{U}_{p,m}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{j,l}^* \mathcal{U}_{q,k}^* \mathcal{U}_{q,m}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \right) \\
 & + \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, \\ |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \overline{D_{j,k} D_{j,l} D_{i,k} D_{p,l} D_{q,m} D_{q,r} D_{i,m} D_{p,r}} \\
 & \quad \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^* \mathcal{U}_{p,r}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{j,l}^* \mathcal{U}_{q,m}^* \mathcal{U}_{q,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \Bigg\}.
 \end{aligned}$$

Hierfür lässt sich L_1 -Konvergenz zeigen. Mit Lemma A.4.2 lassen sich die Summen über $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, abschätzen gegen

$$\frac{C}{t_n^4 n^2 \alpha^4} \left\{ \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 x_l^2 + \sum_{\substack{k,l,m \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, \\ |m| \neq |l|}} x_k^2 x_l x_m + \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \right\} = o\left(\frac{1}{t_n^4}\right).$$

Die Summen über $1 \leq i < p < j \leq n$ lassen sich mit Lemma A.4.3 gegen

$$\frac{C}{t_n^4 n \alpha^2} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k^4 w_k^2}{|c_k|^4} + \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} \right)^2 + \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_l w_l^{1/2}}{|c_l|} \right)^2 + \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} \right)^4 \right\}$$

abschätzen, was unter (T3*) gerade $o\left(\frac{1}{t_n^4}\right)$ ist.

Für die Summen über $1 \leq i < p < j < q \leq n$ wird lediglich der letzte Term diskutiert, die anderen ergeben sich mit analogem Vorgehen. Zunächst erhält man mit Lemma A.4.1, dass

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t_n^4 n^4} \mathbb{E} \left[\sum_{1 \leq i < p < j < q \leq n} \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \overline{D_{j,k} D_{j,l} D_{i,k} D_{p,l} D_{q,m} D_{q,r} D_{i,m} D_{p,r}} \right. \\
 & \quad \left. \mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^* \mathcal{U}_{p,r}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{j,l}^* \mathcal{U}_{q,m}^* \mathcal{U}_{q,r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] \right] \\
 & \approx \frac{1}{t_n^4} \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \overline{D_{3,k} D_{3,l} D_{1,k} D_{2,l} D_{4,m} D_{4,r} D_{1,m} D_{2,r}} \right. \\
 & \quad \left. \widehat{\mathcal{U}}_{1,k} \widehat{\mathcal{U}}_{1,m} \overline{\widehat{\mathcal{U}}_{2,l} \widehat{\mathcal{U}}_{2,r} \widehat{\mathcal{U}}_{3,k} \widehat{\mathcal{U}}_{3,l} \widehat{\mathcal{U}}_{4,m} \widehat{\mathcal{U}}_{4,r}} \right].
 \end{aligned}$$

Wendet man Zerlegung (6.18) an, erhält man unter (V11) mit (5.19) sofort

$$\mathbb{E} \left[D_{3,k} \overline{D_{3,l} D_{1,k} D_{2,l} D_{4,m} D_{4,r} D_{1,m} D_{2,r}} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{1,m} \overline{\mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{2,r}} \mathcal{U}_{3,k} \overline{\mathcal{U}_{3,l} \mathcal{U}_{4,m} \mathcal{U}_{4,r}} \right] = 0$$

sowie mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[D_{3,k} \overline{D_{3,l} D_{1,k} D_{2,l} D_{4,m} D_{4,r} D_{1,m} D_{2,r}} \mathcal{I}_{1,k,n} \mathcal{I}_{1,m,n} \overline{\mathcal{I}_{2,l,n} \mathcal{I}_{2,r,n}} \mathcal{I}_{3,k,n} \overline{\mathcal{I}_{3,l,n} \mathcal{I}_{4,m,n} \mathcal{I}_{4,r,n}} \right] \\ & \leq \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \left| \frac{w_m}{|c_m|^2} - \frac{1}{x_m} \right| \left| \frac{w_r}{|c_r|^2} - \frac{1}{x_r} \right| x_k x_l x_m x_r \\ & \quad \left(\mathbb{E} \left[|\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^8 |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_l \rangle|^8 |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_m \rangle|^8 |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_r \rangle|^8 \right] \right)^{1/4}, \end{aligned}$$

was unter (T3*) zu einer konvergenten Reihe führt. Der führende Term ist hier also von der Gestalt

$$D_{3,k} \overline{D_{3,l} D_{1,k} D_{2,l} D_{4,m} D_{4,r} D_{1,m} D_{2,r}} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{1,m} \overline{\mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{2,r}} \mathcal{U}_{3,k} \overline{\mathcal{U}_{3,l} \mathcal{U}_{4,m} \mathcal{I}_{4,r,n}}.$$

Um dessen Verhalten zu untersuchen sortiert man die Reihe zunächst um, schätzt gegen die Beträge ab und schätzt $\mathcal{I}_{4,r,n}$ ab gegen $\|\beta - \hat{\beta}_{IV}\| \langle \phi_r, X_4 \rangle$, um dann auf das erste absolute Moment die Cauchy-Schwarz-Ungleichung anzuwenden:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |m|, |r|, \\ |l| \neq |m|, |r|, \\ |m| \neq |r|}} x_k x_l x_m x_r \overline{D_{3,k} D_{3,l} D_{1,k} D_{2,l} D_{4,m} D_{4,r} D_{1,m} D_{2,r}} \right. \\ & \quad \left. \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{1,m} \overline{\mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{2,r}} \mathcal{U}_{3,k} \overline{\mathcal{U}_{3,l} \mathcal{U}_{4,m} \mathcal{I}_{4,r,n}} \right] \\ & = \mathbb{E} \left[\sum_{r \in \mathcal{X}_n} x_r \overline{D_{2,r} D_{4,r} \mathcal{U}_{2,r} \mathcal{I}_{4,r,n}} \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |r|}} x_k D_{1,k} D_{3,k} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{3,k} \sum_{\substack{l \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |k|, |r|}} x_l \overline{D_{2,l} D_{3,l} \mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{3,l}} \right. \\ & \quad \left. \sum_{\substack{m \in \mathcal{X}_n, \\ |m| \neq |l|, |k|, |r|}} x_m D_{1,m} D_{4,m} \mathcal{U}_{1,m} \mathcal{U}_{4,m} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{r \in \mathcal{X}_n} x_r \overline{D_{2,r} D_{4,r} \mathcal{U}_{2,r} \mathcal{I}_{4,r,n}} \left| \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |r|}} x_k D_{1,k} D_{3,k} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{3,k} \right. \right. \\ & \quad \left. \sum_{\substack{l \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |k|, |r|}} x_l \overline{D_{2,l} D_{3,l} \mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{3,l}} \sum_{\substack{m \in \mathcal{X}_n, \\ |m| \neq |l|, |k|, |r|}} x_m D_{1,m} D_{4,m} \mathcal{U}_{1,m} \mathcal{U}_{4,m} \right| \Big] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\|\beta - \hat{\beta}_{IV}\| \sum_{r \in \mathcal{X}_n} x_r \overline{D_{2,r} D_{4,r} \mathcal{U}_{2,r}} \langle X_4, \phi_r \rangle \left| \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |r|}} x_k D_{1,k} D_{3,k} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{3,k} \right. \right. \\ & \quad \left. \sum_{\substack{l \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |k|, |r|}} x_l \overline{D_{2,l} D_{3,l} \mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{3,l}} \sum_{\substack{m \in \mathcal{X}_n, \\ |m| \neq |l|, |k|, |r|}} x_m D_{1,m} D_{4,m} \mathcal{U}_{1,m} \mathcal{U}_{4,m} \right| \Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\mathbb{E} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^2 \mathbb{E} \left| \sum_{r \in \mathcal{K}_n} x_r \overline{D_{2,r} D_{4,r} \mathcal{U}_{2,r} \langle X_4, \phi_r \rangle} \right| \left| \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |r|}} x_k D_{1,k} D_{3,k} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{3,k} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sum_{\substack{l \in \mathcal{K}_n, \\ |l| \neq |k|, |r|}} x_l \overline{D_{2,l} D_{3,l} \mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{3,l}} \sum_{\substack{m \in \mathcal{K}_n, \\ |m| \neq |l|, |k|, |r|}} x_m D_{1,m} D_{4,m} \mathcal{U}_{1,m} \mathcal{U}_{4,m} \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\mathbb{E} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^2 \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k D_{1,k} D_{3,k} \mathcal{U}_{1,k} \mathcal{U}_{3,k} \sum_{\substack{l \in \mathcal{K}_n, \\ |l| \neq |k|}} x_l \overline{D_{2,l} D_{3,l} \mathcal{U}_{2,l} \mathcal{U}_{3,l}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \sum_{\substack{m \in \mathcal{K}_n, \\ |m| \neq |l|, |k|}} x_m D_{1,m} D_{4,m} \mathcal{U}_{1,m} \mathcal{U}_{4,m} \sum_{\substack{r \in \mathcal{K}_n, \\ |r| \neq |m|, |l|, |k|}} x_r \overline{D_{2,r} D_{4,r} \mathcal{U}_{2,r} \langle X_4, \phi_r \rangle} \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq o(1) t_n^3 \sum_{r \in \mathcal{K}_n} \frac{x_r^{3/2} w_r}{|c_r|^2} \\
 &\leq o(1) t_n^3 \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

unter Voraussetzung (T4^{*}) und nach Theorem 24. Der betrachtete Ausdruck ist somit $o\left(\frac{1}{t_n}\right)$. Zusammengefasst erhält man also unter den Voraussetzungen (T3^{*}) und (T4^{*}), dass

$$\mathbb{E} \left| \text{var}_{\mathcal{S}_n} (\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^*) \right| = o\left(\frac{1}{t_n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t_n^4}\right) + o\left(\frac{1}{t_n^4}\right)$$

gilt und somit wegen $\mathbb{E} [\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^* \mid \mathcal{S}_n] = 0$ insbesondere

$$\mathfrak{V}_{n,2}^* + \mathfrak{V}_{n,3}^* + \mathfrak{V}_{n,4}^* = o_{\mathbb{P}}(1).$$

□

Dies führt zu folgendem Resultat für $R_{n,3}^*$:

59. Proposition: Die Folge $(t_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5.5) erfülle $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^2 = \infty$. Weiter seien die Voraussetzungen (V1)–(V13), (B1)–(B3) sowie (T1), (T2^{*}), (T3^{*}) und (T4^{*}) erfüllt und es gelte $\mathbb{E}|U_1|^4 < \infty$. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_n^{16}$

$$\frac{n}{t_n} R_{n,3}^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \mathfrak{V}) \text{ in Wahrscheinlichkeit bezüglich } \mathbb{P},$$

mit \mathfrak{V} aus Proposition 38.

BEWEIS: Zusammen mit den Konvergenzen bezüglich \mathbb{P} , die die Propositionen 57 und 58 zur Verfügung stellen, folgt die Aussage direkt mit dem Beweis von Proposition 40. □

6.3. Diskussion der Bias-Terme

60. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{128}$ und U erfülle $E|U|^{128} \leq \eta < \infty$. Dann gilt unter den Voraussetzungen (V1)–(V13) und (B1)–(B3) sowie (H0), dass

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^*, X_j \rangle|^2 = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n} \right).$$

BEWEIS: Für $T_{n,1}^* := \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{U}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger U_{X,n}^* \right) - \hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} \left(\tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{U}_n^* - \Gamma_X^\dagger U_{X,n}^* \right)$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_n^\dagger \hat{U}_n^* - \Gamma_{X,n}^\dagger U_{X,n}^* &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i^* \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} I\{\hat{w}_k \geq \alpha\} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} \right) \phi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i^* D_{i,k,n} \phi_k, \\ \tilde{\Gamma}_n^\dagger \tilde{U}_n^* - \Gamma_X^\dagger U_{X,n}^* &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i^* \left(\frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{x_k} \right) \phi_k \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n U_i^* D_{i,k} \phi_k. \end{aligned}$$

Bedingt nach \mathcal{S}_n erhält man nach Anwendung der Dreiecksungleichung für das erste absolute Moment von $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^*, X_j \rangle|^2$ unter (B1)–(B3) Folgendes:

$$\begin{aligned} &E \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^*, X_j \rangle|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n E \left[\left| \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_i^* \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^2 \right. \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^2 \\ &\quad + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \\ &\quad \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l < \alpha \gamma_l^\nu\} \overline{D_{i,l,n}} \right\} \end{aligned}$$

$$= T_{n,1}^{[1]} + T_{n,1}^{[2]} + T_{n,1}^{[3]}.$$

Nach Proposition 41 gilt $\mathbb{E} \left| T_{n,1}^{[1]} + T_{n,1}^{[2]} + T_{n,1}^{[3]} \right| = o\left(\frac{1}{n}\right)$, was die Behauptung impliziert. \square

61. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{64}$ und U erfülle $\mathbb{E}|U|^{64} < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)-(V13) sowie (B1)-(B3) seien erfüllt. Falls zudem (T3*) gilt, so folgt unter (H0), dass

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,2}^*, X_j \rangle|^2 = o_{\mathbb{P}}\left(\frac{t_n}{n}\right).$$

BEWEIS: Das Vorgehen ist analog zum Beweis von Proposition 42. Ziel ist es zu verifizieren, dass gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^* \right) \phi_k, X_j \right\rangle \right|^2 = o_{\mathbb{P}}\left(\frac{t_n}{n}\right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dafür wird zunächst die bedingte Erwartung gegeben \mathcal{S}_n berechnet. Dabei nutzt man, dass unter (B1) und (B3) $\mathbb{E}[S_{i,k}^* \overline{S_{j,m}^*} \mid \mathcal{S}_n] = 0$ für alle $i \neq j$ und für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ gilt.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,2}^*, X_j \rangle|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^* \right) \langle \phi_k, X_j \rangle \right|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{i,j=1}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \phi_k, X_j \rangle|^2 I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} |D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}|^2 \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} |S_{i,m}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right. \\ & \quad + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\}) \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\} \\ & \quad \left. \left(\overline{D_{i,k,n}} - \overline{D_{i,k} I\{\lambda_l \geq \alpha \gamma_l^\nu\}} \right) \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^* \right) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |l|}} \overline{S_{i,m}^*} \right) \mid \mathcal{S}_n \right] \right\} \end{aligned}$$

Hierfür wird nun L_1 -Konvergenz gezeigt. Es wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung angewendet um nach Lemma A.1.3 die Momente von $\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} S_{i,m}^*$ gegen positive Konstanten

abzuschätzen. Mit der Dreiecksungleichung zerlegt man weiter in Terme mit $\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ und solche mit $\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu$.

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,2}^*, X_j \rangle|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right| \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\}) \left(\sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ |m| \neq |k|}} \hat{S}_{i,m} \right) \right|^2 \\
 &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^4 \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^4 \right)^{1/2} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z}, \\ |k| \neq |l|}} \left(\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} (\overline{D_{i,k,n}} - \overline{D_{i,k}}) \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} I\{\lambda_k < \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \langle X_j, \phi_l \rangle I\{\hat{\lambda}_l \geq \alpha\gamma_l^\nu\} I\{\lambda_l < \alpha\gamma_l^\nu\} \right|^2 \right)^{1/2} \right\} \\
 &\leq J_{n,1} + J_{n,2} + J_{n,3} + J_{n,4}.
 \end{aligned}$$

Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie Lemma A.3.1 erhält man für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{64}$ unter (V10) für den führenden Term der ersten Summe

$$\begin{aligned}
 J_{n,1} &\leq \frac{C}{n^3} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k \left(\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k}) \right|^8 \right)^{1/4} \\
 &\leq \frac{C}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(\frac{x_k^2 w_k^2}{|c_k|^4} + 1 \right) \\
 &\leq \frac{C}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 = o\left(\frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Mit derselben Argumentation wie für den entsprechenden Term im Beweis von Lemma 42

erhält man auch hier

$$J_{n,2} \approx \frac{C}{\sqrt{n\alpha^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x_k}{\lambda_k} + 1 \right) \left(\frac{x_k}{\sqrt{n}} - \frac{|c_k|^2}{\sqrt{n\alpha^2}} \right).$$

Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $J_{n,3}$ und $J_{n,4}$ erlaubt die Wiederholung der Argumentation von $J_{n,1}$ und $J_{n,2}$, sodass insgesamt unter (T3*) die Behauptung folgt. \square

62. Proposition: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und U erfülle $E|U|^8 < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)-(V13), (B1)-(B3), (T1), (T3*) und (T4*) seien erfüllt. Dann gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,3}^*, X_j \rangle|^2 = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{t_n}{n} \right).$$

BEWEIS: Dem Beweis von Proposition 43 folgend gilt hier

$$T_{n,3}^* = \left(\hat{\Pi}_{\mathcal{X}_n} - I \right) R_n^*$$

und eine Darstellung $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,3}^*, X_j \rangle|^2 =: \sum_{i=1}^5 \check{R}_{n,i}^*$ analog zu (6.7) ist möglich. Dabei lassen sich $\check{R}_{n,1}^*$, $\check{R}_{n,4}^*$ und $\check{R}_{n,5}^*$ gegen $R_{n,1}^*$, $R_{n,4}^*$ beziehungsweise $R_{n,5}^*$ abschätzen, die gemäß der Propositionen (63), (65) und (66) das passende Konvergenzverhalten aufweisen. Aus Abschnitt 6.2 ergibt sich die Endlichkeit des zweiten (und somit des ersten) Momentes von

$$\frac{n}{t_n} \check{R}_{n,3}^* := \sum_{j=2}^n \frac{1}{t_n n} \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \mathcal{U}_{j,k}^* D_{j,k} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\mathcal{U}_{i,k}^* D_{i,k} x_k} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}.$$

Das bedingte zweite Moment gegeben \mathcal{S}_n erfüllt mit Lemma A.4.1 unter (B1)-(B3) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{t_n^2} E \left[|\check{R}_{n,3}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] &\lesssim \frac{C}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{k \in \mathcal{X}_n} |\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k}|^2 \sum_{i=1}^{j-1} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^2 x_k^2 I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \\ &+ \frac{C}{t_n^2 n^2} \sum_{j=2}^n \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} I\{\hat{\lambda}_l < \alpha \gamma_l^\nu\} \\ &\quad \overline{\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,l} D_{j,l}} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,l} D_{i,l}}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zunächst auf die regularisierte Reihe über k und dann auf die Erwartung lässt sich hierfür L_1 -Konvergenz zeigen:

$$\begin{aligned}
 & \frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} \left| \mathbb{E} \left[|\check{R}_{n,3}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right| \\
 & \lesssim \frac{C}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left[\sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left| \sum_{j=2}^n |\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k}|^2 \sum_{i=1}^{j-1} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^2 x_k^2 \right|^2} \right] \\
 & \leq \frac{C}{t_n^2 n^2} \sqrt{\mathbb{E} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\mathbb{E} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left| \sum_{j=2}^n |\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k}|^2 \sum_{i=1}^{j-1} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^2 x_k^2 \right|^2}.
 \end{aligned}$$

Wendet man (6.18) an auf $\mathbb{E} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{p,k} D_{p,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k} \hat{\mathcal{U}}_{q,k} D_{q,k}|^2$, so ergibt sich mit Lemma A.1.3 für die führenden Terme

$$\mathbb{E} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \mathcal{U}_{p,k} D_{p,k} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \mathcal{U}_{q,k} D_{q,k}|^2 \leq C x_k \left(\mathbb{E} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^8 \right)^{1/4} \frac{w_k^4}{|c_k|^8}$$

sowie

$$\mathbb{E} |\mathcal{U}_{i,k} D_{i,k} \mathcal{U}_{p,k} D_{p,k} \mathcal{U}_{j,k} D_{j,k} \mathcal{U}_{q,k} D_{q,k}|^2 \leq C \left| \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right|^4.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 & C \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \mathbb{E} \left| \sum_{j=2}^n |\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k}|^2 \sum_{i=1}^{j-1} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^2 x_k^2 \right|^2 \\
 & = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{E} |\hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^4 \\
 & \quad + \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \sum_{1 \leq i < p < j \leq n} \mathbb{E} [|\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k}|^4 |\hat{\mathcal{U}}_{p,k} D_{p,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k}|^2] \\
 & \quad + \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \sum_{1 \leq i < p < j < q \leq n} \mathbb{E} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{p,k} D_{p,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,k} D_{j,k} \hat{\mathcal{U}}_{q,k} D_{q,k}|^2 \\
 & \leq \frac{C n^2}{\alpha^4} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 + \frac{C n^3}{\alpha^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k^4 w_k^2}{|c_k|^4} + x_k^2 + o(n^4) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left| \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} - 1 \right|^4 + \frac{x_k^5 w_k^4}{|c_k|^8}.
 \end{aligned}$$

Analog lässt sich für $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, argumentieren. Zusammen mit (5.38) folgt unter (T1) und (T4^{*}), dass $\mathbb{E} \left| \frac{n}{t_n} \check{R}_{n,3} \right| = o(1)$.

Ähnlich lässt sich

$$\check{R}_{n,2}^* := \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^*|^2$$

abschätzen. Mit

$$\mathbb{E} [|\check{R}_{n,2}^*| \mid \mathcal{S}_n] \lesssim \frac{C}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{t_n} \mathbb{E} \left| \mathbb{E}[|\check{R}_{n,2}^*| \mid \mathcal{S}_n] \right| &= \frac{1}{t_n n} \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{K}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\} x_k \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 \right| \\
 &\leq \frac{1}{t_n n} \mathbb{E} \left| \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \left(\sum_{i=1}^n |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 \right)^2} \right| \\
 &\leq \frac{1}{t_n n} \sqrt{\mathbb{E} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} I\{\hat{\lambda}_k < \alpha \gamma_k^\nu\}} \sqrt{\sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 \right|^2}.
 \end{aligned}$$

Auf die zweite Erwartung lässt sich Zerlegung (6.18) anwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 \right|^2 \\
 &= \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \left\{ \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^4 + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i \neq j}}^n \mathbb{E} |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k} D_{j,k} \hat{\mathcal{U}}_{j,k}|^2 \right\} \\
 &\leq Cn \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \frac{x_k^2 w_k^2}{|c_k|^4} + Cn^2 t_n^2 + o(n^2) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left(\frac{x_k^3 w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{x_k^4 w_k^2}{|c_k|^4} \right).
 \end{aligned}$$

Mit (5.38) folgt unter (T4*) und (V10), dass gilt

$$\frac{n}{t_n} \mathbb{E} \left| \mathbb{E}[|\check{R}_{n,2}^*| \mid \mathcal{S}_n] \right| = o(1).$$

□

63. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B1)–(B3) erfüllt. Zudem sei $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$*

$$R_{n,1}^* = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{n} \right).$$

BEWEIS: Mit

$$\mathbb{E} [|R_{n,1}^*| \mid \mathcal{S}_n] \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |\hat{x}_k - x_k| \sum_{i=1}^n |D_{i,k}|^2 \mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n]$$

erhält man nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und unter Verwendung von (A.1) und Lemma A.4.1

$$\mathbb{E} |R_{n,1}^*| \lesssim \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E} \left| \frac{\hat{x}_k - x_k}{x_k} \right|^4 \mathbb{E} |D_{i,k}|^8 \right)^{1/4} \sqrt{\mathbb{E} |\hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^4}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{C}{n^{3/2}} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k \left(\mathbb{E} |D_{i,k}|^8 \right)^{1/4} \\
 &\leq \frac{C}{n\sqrt{n\alpha^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = o\left(\frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

□

64. Proposition: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) und (B1)–(B3) erfüllt. Weiter gelte $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Dann gilt für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ unter (H0) und (T3), dass*

$$\frac{n}{t_n} R_{n,2}^* = \frac{n}{t_n} \mathfrak{R}_n + o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{t_n}}\right), \quad (6.21)$$

mit \mathfrak{R}_n aus (5.39).

BEWEIS: Zunächst wird das bedingte zweite Moment von $\frac{n}{t_n} (R_{n,2}^* - \mathfrak{R}_n)$ gegeben \mathcal{S}_n berechnet. Dabei wird \mathfrak{V} aus (5.27) eingesetzt und die bedingte stochastische Unabhängigkeit aus (B3) sowie Lemma A.4.1 ausgenutzt.

$$\begin{aligned}
 &\frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} [|R_{n,2}^* - \mathfrak{R}_n|^2 | \mathcal{S}_n] \\
 &\leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k \left\{ \sum_{i=1}^n |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 - n \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right\} \right|^2 | \mathcal{S}_n \right] \\
 &\leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^n \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right|^2 | \mathcal{S}_n \right] \\
 &\quad + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l \sum_{i=1}^n \\
 &\quad \quad \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}^*|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right) | \mathcal{S}_n \right] \\
 &\quad + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l \sum_{\substack{i, p=1, \\ i \neq p}}^n \\
 &\quad \quad \mathbb{E} \left[|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| | \mathcal{S}_n \right] \mathbb{E} \left[|D_{p,l} \mathcal{U}_{p,l}^*|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| | \mathcal{S}_n \right] \\
 &\lesssim \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \sum_{i=1}^n \left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{p,k} \hat{\mathcal{U}}_{p,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \\
& + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l \sum_{i=1}^n \left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{i,l} \hat{\mathcal{U}}_{i,l}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right) \\
& + \frac{1}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{p,l} \hat{\mathcal{U}}_{p,l}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right).
\end{aligned}$$

Hierfür lässt sich L_1 -Konvergenz zeigen. Für $k \in \mathcal{K}_n$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ erhält man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right)^2 & \leq C \mathbb{E} |D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^4 + C \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \\
& \leq C \left| \frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right| + C \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \leq \frac{C}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Für $k, l \in \mathbb{Z}$, $|k| \neq |l|$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ lässt sich der Ausdruck nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung analog abschätzen. Man erhält

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{i,l} \hat{\mathcal{U}}_{i,l}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right) \right] \\
& \leq C \left(\left| \frac{w_k}{|c_k|^2} + \frac{1}{x_k} \right| + \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(\left| \frac{w_l}{|c_l|^2} + \frac{1}{x_l} \right| + \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right) \leq \frac{C}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Um die Reihen für $i, p \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq p$ zu untersuchen, setzt man die Umformung

$$\begin{aligned}
|D_{i,k} \hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| & = |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{Y}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \\
& \quad + |D_{i,k} \mathcal{J}_{i,k,n}|^2 + D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \overline{\mathcal{J}_{i,k,n}} + \overline{D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}} \mathcal{J}_{i,k,n},
\end{aligned}$$

die aus (6.18) entsteht, ein. Für $k \in \mathcal{K}_n$ entsteht dabei eine Reihe, die bereits im Beweis von Proposition 45 diskutiert wurde. Für die übrigen Terme geht man ähnlich zu (6.19) vor: Man wendet zunächst die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Reihe über $k \in \mathcal{K}_n$ an, um $\beta - \hat{\beta}_{IV}$ zu separieren. Anschließend wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Erwartung der entstandenen Reihen an. Unter (T3) ergibt sich also

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^2 \left\{ \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) [|D_{p,k} \mathcal{I}_{p,k}|^2 + D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \mathcal{I}_{p,k,n}] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + |D_{i,k} \mathcal{I}_{i,k,n}|^2 [|D_{p,k} \mathcal{I}_{p,k,n}|^2 + D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \mathcal{I}_{p,k,n}] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \overline{\mathcal{I}_{i,k,n} D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \mathcal{I}_{p,k,n}} \right\} \right| \\
 & \leq \frac{C}{t_n^2 n^2} \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \mathbb{E} \left[\left(\max_{s \in \{1, \dots, 4\}} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^{2s} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \left\{ \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left| |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right|^2 [|D_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^4 + |D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^2] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + |D_{i,k} \langle \phi_k, X_i \rangle|^4 [|D_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^4 + |D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^2] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \langle X_i, \phi_k \rangle \overline{D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle} \right|^2 \right\} \right)^{1/2} \Big] \\
 & \leq o\left(\frac{1}{t_n^2}\right) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \mathbb{E} \left[\right. \\
 & \quad \left. \left| |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right|^2 [|D_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^4 + |D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^2] \right. \\
 & \quad \left. + |D_{i,k} \langle \phi_k, X_i \rangle|^4 [|D_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^4 + |D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle|^2] \right. \\
 & \quad \left. \left. + |D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k} \langle X_i, \phi_k \rangle \overline{D_{p,k} \mathcal{U}_{p,k} \langle \phi_k, X_p \rangle} \right|^2 \right] \\
 & \lesssim o\left(\frac{1}{t_n^2}\right) \sum_{k \in \mathcal{K}_n} x_k^4 \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} \left(\frac{x_k^2 w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{x_k w_k}{|c_k|^2} \right) + \frac{x_k^4 w_k^4}{|c_k|^8} \right) \\
 & \leq o\left(\frac{1}{t_n^2}\right).
 \end{aligned}$$

Für die Reihe über $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, geht man entsprechend vor. Hier erhält man zunächst mit (A.19) und Lemma A.1.3

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k x_l \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{p,l} \mathcal{U}_{p,l}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_l}{|c_l|^2} - \frac{1}{x_l} \right| \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{t_n^2} \sum_{\substack{k,l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_l \rangle|^2 x_l^2 \\ & = \mathcal{O} \left(\frac{1}{t_n^2} \right). \end{aligned}$$

Von den übrigen Reihen sei lediglich die führende betrachtet. Hier sortiert man zunächst die Reihen um, wendet die Abschätzung $|\langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_l \rangle|^2 \leq \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^2$ an und separiert die Erwartung davon mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Mit Lemma A.4.4 und Theorem 24 resultiert dies in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \sum_{l \in \mathcal{K}_n} x_l |D_{p,l} \mathcal{J}_{p,l}|^2 \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right| \\ & \leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \mathbb{E} \left\| \beta - \hat{\beta}_{IV} \right\|^2 \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \sum_{l \in \mathcal{K}_n} x_l |D_{p,l} \langle \phi_l, X_p \rangle|^2 \\ & \quad \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \Big| \\ & \leq \frac{1}{t_n^2 n^2} \left(\mathbb{E} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^4 \mathbb{E} \left| \sum_{\substack{i,p=1, \\ i \neq p}}^n \sum_{l \in \mathcal{K}_n} x_l |D_{p,l} \langle \phi_l, X_p \rangle|^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \sum_{\substack{k \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ & = o(1) \mathcal{O} \left(\frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{t_n^2 \sqrt{n \alpha^2}} \right) \\ & = o \left(\frac{1}{t_n^2} + \frac{1}{t_n^2 \sqrt{n \alpha^2}} \right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$\mathbb{E} \left| \frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} [|R_{n,2}^* - \mathfrak{R}_n|^2 \mid \mathcal{S}_n] \right| = \mathcal{O} \left(\frac{1}{t_n^2} \right) + o \left(\frac{1}{t_n^2} \right).$$

Dies impliziert die Behauptung. \square

65. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13) und (B1)–(B3) erfüllt. Weiter gelte $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Dann gilt unter (H0) und (T3*) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$*

$$\frac{n}{t_n} R_{n,4}^* = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{\sqrt{nt_n}} \right).$$

BEWEIS: Zunächst berechnet man das bedingte zweite Moment von $\frac{n}{t_n} R_{n,4}^*$ gegeben \mathcal{S}_n . Als führenden Term erhält man dabei

$$\frac{1}{n^4 t_n^2} \sum_{\substack{i,p,j,q=1, \\ i \neq p,j,q, \\ p \neq j,q, j \neq q}}^n \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k|,|l|,|m| \neq |r|, \\ |k|,|l| \neq |m|, |k| \neq |l|}} \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \langle X_q, \phi_m \rangle \langle \phi_r, X_q \rangle \\ D_{i,k} \overline{D_{i,l} D_{p,m} D_{p,r}} \mathbb{E}[\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^* \mathcal{U}_{p,m}^*} \mathcal{U}_{p,r}^* \mid \mathcal{S}_n].$$

Mit Lemma A.4.1 überlegt man sich, dass es für die Betrachtung der führenden Terme genügt in obiger Gleichung $\mathbb{E}[\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^* \mathcal{U}_{p,m}^*} \mathcal{U}_{p,r}^* \mid \mathcal{S}_n]$ durch $\widehat{\mathcal{U}}_{i,k} \widehat{\mathcal{U}}_{i,l} \widehat{\mathcal{U}}_{p,m} \widehat{\mathcal{U}}_{p,r}$ zu ersetzen, wobei Entsprechendes für die weiteren bedingten Erwartungen gilt. Nun lässt sich wiederum Zerlegung (6.18) anwenden, um dann L_1 -Konvergenz für die entstehenden Reihen zu zeigen. Alle Reihen, die kein $\mathcal{J}_{\dots,n}$ enthalten, wurden bereits in Proposition 46 diskutiert. Die Reihen, die kein \mathcal{U}_{\dots} enthalten, konvergieren, denn

$$\mathbb{E} \left| \sum_{\substack{i,p,j,q=1, \\ i \neq p,j,q, \\ p \neq j,q, j \neq q}}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \langle X_q, \phi_m \rangle \langle \phi_r, X_q \rangle D_{i,k} \overline{D_{i,l} D_{p,m} D_{p,r}} \mathcal{J}_{i,k,n} \overline{\mathcal{J}_{i,l,n} \mathcal{J}_{p,m,n} \mathcal{J}_{p,r,n}} \right| \\ \leq \left(\mathbb{E} \left| \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_l \rangle \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_m \rangle \langle \beta - \hat{\beta}_{IV}, \phi_r \rangle \right|^2 \right. \\ \left. \mathbb{E} \left| \sum_{1 \leq i < p < j < q \leq n} D_{i,k} \langle \phi_k, X_j \rangle \langle \phi_k, X_i \rangle \overline{D_{i,l}} \langle X_j, \phi_l \rangle \langle X_i, \phi_l \rangle \right. \right. \\ \left. \left. \overline{D_{p,m}} \langle X_q, \phi_m \rangle \langle X_p, \phi_m \rangle D_{p,r} \langle \phi_r, X_q \rangle \langle \phi_r, X_p \rangle \right|^2 \right)^{1/2} \\ \leq C \left(n^4 \mathbb{E} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^4 \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} \frac{x_l^2 w_l}{|c_l|^2} \frac{x_m^2 w_m}{|c_m|^2} \frac{x_r^2 w_r}{|c_r|^2} \right)^{1/2},$$

sodass man unter (T3*) und mit Theorem 24 ein $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ erhält. Der führende der gemischten Terme lässt sich analog zu (6.19) behandeln:

$$\frac{1}{n^4 t_n^2} \sum_{\substack{i,p,j,q=1, \\ i \neq p,j,q, \\ p \neq j,q, j \neq q}}^n \sum_{\substack{k,l,m,r \in \mathcal{X}_n, \\ |k|,|l|,|m| \neq |r|, \\ |k|,|l| \neq |m|, \\ |k| \neq |l|}} \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \langle X_q, \phi_m \rangle \langle \phi_r, X_q \rangle D_{i,k} \overline{D_{i,l} D_{p,m} D_{p,r}} \mathcal{J}_{i,k,n} \overline{\mathcal{U}_{i,l} \mathcal{U}_{p,m} \mathcal{U}_{p,r}}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{n^4 t_n^2} \|\beta - \hat{\beta}_{IV}\| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \sum_{i=4}^n \left| D_{i,k} \langle \phi_k, X_i \rangle \sum_{1 \leq p < j < q \leq i-1} \langle \phi_k, X_j \rangle \sum_{\substack{l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}} \langle X_j, \phi_l \rangle \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{m \in \mathcal{X}_n, \\ |m| \neq |k|, |l|}} \overline{D_{p,m} \langle X_q, \phi_m \rangle \mathcal{U}_{p,m}} \sum_{\substack{r \in \mathcal{X}_n, \\ |r| \neq |k|, |l|, |m|}} D_{p,r} \langle \phi_r, X_q \rangle \mathcal{U}_{p,r} \right|. \end{aligned}$$

Dafür lässt sich L_1 -Konvergenz zeigen, indem man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Erwartung von $\|\beta - \hat{\beta}_{IV}\|^2$ separiert, was nach Theorem 24 ein $o(1)$ ergibt. Dies wird multipliziert mit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n^4 t_n^2} \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathcal{X}_n} \sum_{i=4}^n \left| D_{i,k} \langle \phi_k, X_i \rangle \sum_{1 \leq p < j < q \leq i-1} \langle \phi_k, X_j \rangle \sum_{\substack{l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} \overline{D_{i,l} \mathcal{U}_{i,l}} \langle X_j, \phi_l \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\substack{m \in \mathcal{X}_n, \\ |m| \neq |k|, |l|}} \overline{D_{p,m} \langle X_q, \phi_m \rangle \mathcal{U}_{p,m}} \sum_{\substack{r \in \mathcal{X}_n, \\ |r| \neq |k|, |l|, |m|}} D_{p,r} \langle \phi_r, X_q \rangle \mathcal{U}_{p,r} \right| \right|^2 \Big)^{1/2} \\ &\frac{1}{n^3 t_n^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k^3 w_k^2}{|c_k|^4} \sum_{1 \leq p < j < q \leq n} \left(\sum_{l \in \mathcal{X}_n} \left| \frac{x_l w_l}{|c_l|^2} - 1 \right| \right)^3 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{n^{3/2} \alpha^{3/4} t_n^2} \left(\sum_{k \in \mathcal{X}_n} \frac{x_k^3 w_k}{|c_k|^2} \left(\sum_{l \in \mathcal{X}_n} \frac{x_l w_l^{1/2}}{|c_l|} \right)^3 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Unter (T3*) gilt also insbesondere

$$\frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [|R_{n,4}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n] \right] = o\left(\frac{1}{n t_n^2}\right)$$

und folglich $\frac{n}{t_n} R_{n,4}^* = o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{n t_n}}\right)$. \square

66. Lemma: *Es seien die Voraussetzungen (V1)–(V13), (B1)–(B3) sowie (T3*) erfüllt. Dann gilt unter (H0) für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$, dass*

$$\frac{n}{t_n} R_{n,5}^* = o_{\mathbb{P}}\left(\frac{1}{t_n}\right).$$

BEWEIS: Für das bedingte zweite Moment gegeben \mathcal{S}_n gilt unter (B1) und (B3)

$$\begin{aligned} &\frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} [|R_{n,5}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n] \\ &= \frac{1}{n^4 t_n^2} \sum_{\substack{i_1, i_2=1, \\ i_1 \neq i_2}}^n \mathbb{E} \left[\left| \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} D_{i_1, k} \mathcal{U}_{i_1, k}^* \overline{D_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_2, l}^*} \sum_{j=1}^n \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle \right|^2 \mid \mathcal{S}_n \right]. \end{aligned}$$

Möchte man hierfür L_1 -Konvergenz zeigen, so ist der führende Term von der Gestalt

$$\frac{1}{n^4 t_n^2} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < j_1 < j_2 \leq n} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left| \sum_{\substack{k, l \in \mathcal{K}_n, \\ |k| \neq |l|}} D_{i_1, k} \mathcal{U}_{i_1, k}^* \overline{D_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_2, l}^*} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle \langle X_{j_2}, \phi_k \rangle \langle \phi_l, X_{j_2} \rangle \right|^2 \mid \mathcal{S}_n \right] \right].$$

Für $k, l, m, r \in \mathcal{K}_n$ unterschiedlichen Betrages ergibt sich

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i_1, k}^* \overline{\mathcal{U}_{i_2, l}^* \mathcal{U}_{i_1, m}^* \mathcal{U}_{i_2, r}^*} \mid \mathcal{S}_n \right] D_{i_1, k} \overline{D_{i_2, l} D_{i_1, m} D_{i_2, r}} \right. \\ \left. \langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle \langle X_{j_2}, \phi_k \rangle \langle \phi_l, X_{j_2} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_m \rangle \langle \phi_r, X_{j_1} \rangle \langle \phi_m, X_{j_2} \rangle \langle X_{j_2}, \phi_r \rangle \right].$$

Nun wendet man Lemma A.4.1 und Zerlegung (6.18) an. Der Term ohne $\mathcal{J}_{\dots, n}$ ist unter (V11) gleich Null. Somit ist der führende Term gerade

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{U}_{i_1, k} \overline{\mathcal{U}_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_1, m} \mathcal{J}_{i_2, r, n}^*} D_{i_1, k} \overline{D_{i_2, l} D_{i_1, m} D_{i_2, r}} \right. \\ \left. \langle \phi_k, X_{j_1} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_l \rangle \langle X_{j_2}, \phi_k \rangle \langle \phi_l, X_{j_2} \rangle \langle X_{j_1}, \phi_m \rangle \langle \phi_r, X_{j_1} \rangle \langle \phi_m, X_{j_2} \rangle \langle X_{j_2}, \phi_r \rangle \right].$$

Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung schätzt man mit Theorem 24 und Lemma A.1.3 das zweite absolute Moment von $\mathcal{U}_{i_1, k} \overline{\mathcal{U}_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_1, m} \mathcal{J}_{i_2, r, n}^*}$ gegen $o(1)$ ab. Der zweite Erwartungswert lässt sich mit (2.21) gegen $\frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|} \frac{x_l w_l^{1/2}}{|c_l|} \frac{x_m w_m^{1/2}}{|c_m|} \frac{x_r w_r^{1/2}}{|c_r|}$ abschätzen, was unter (T3*) konvergente Reihen ergibt.

Für die in $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, quadratischen Terme gilt entsprechend die Abschätzung gegen $C \frac{x_k^2 w_k}{|c_k|^2} \frac{x_l^2 w_l}{|c_l|^2}$, was ebenfalls unter (T3*) zu konvergenten Reihen führt.

Für drei verschiedene Indizes $i_1, i_2, j \in \{1, \dots, n\}$ und $k, l \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|$, summiert man

$$\mathbb{E} \left| \langle \phi_k, X_j \rangle \langle X_j, \phi_l \rangle D_{i_1, k} \mathcal{U}_{i_1, k}^* \overline{D_{i_2, l} \mathcal{U}_{i_2, l}^*} \right|^2 \leq C x_k x_l (\mathbb{E} |D_{1, k}|^4 \mathbb{E} |D_{1, l}|^4)^{1/2} \leq \frac{C}{\alpha^2} x_k x_l,$$

was mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (5.16) abgeschätzt wurde. Insgesamt gilt somit wiederum unter (V10), dass

$$\mathbb{E} \left| \frac{n^2}{t_n^2} \mathbb{E} [|R_{n,5}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n] \right| = o \left(\frac{1}{t_n} \right)$$

und somit insbesondere, dass

$$\frac{n}{t_n} R_{n,5}^* = o_{\mathbb{P}} \left(\frac{1}{t_n} \right).$$

□

6.4. Zentraler Grenzwertsatz für die Teststatistik

Aus den Ergebnissen der Abschnitte 6.2 und 6.3 lässt sich ein Konsistenzresultat für die Verteilung der Bootstrapteststatistik aus (6.5) herleiten. Um dieses zu formulieren, wird die Kolmogorov-Metrik verwendet, die für zwei Verteilungen F und G definiert ist als

$$K(F, G) =: \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - G(x)|,$$

siehe zum Beispiel DasGupta (2008).

67. Theorem: [KONSISTENZ FÜR T_n^*] Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{128}$ und U erfülle $E|U|^{128} < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B1)–(B3) seien erfüllt und für die Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5.5) gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Falls zudem (T1) und (T2*)–(T4*) gelten, dann gilt unter (H0) für T_n^* aus (6.5) und T_n aus (5.4)

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P \left(\frac{n}{t_n} (T_n^* - \mathfrak{R}_n) \leq t \mid \mathcal{S}_n \right) - P \left(\frac{n}{t_n} (T_n - \mathfrak{R}_n) \leq t \right) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

BEWEIS: Es bezeichne $\phi_{\mathfrak{V}}(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der zentralen Normalverteilung mit Varianz \mathfrak{V} . Weiter bezeichnen F_n die Verteilungsfunktion von $\frac{n}{t_n} (T_n - \mathfrak{R}_n)$ und $F_{\mathcal{S}_n, n}^*$ die Verteilungsfunktion der bedingten Verteilung von $\frac{n}{t_n} (T_n^* - \mathfrak{R}_n)$ gegeben \mathcal{S}_n . Mit der Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_{\mathcal{S}_n, n}^*(t) - F_n(t)| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_{\mathcal{S}_n, n}^*(t) - \phi_{\mathfrak{V}}(t)| + \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - \phi_{\mathfrak{V}}(t)| \\ &=: M_{1, n} + M_{2, n}, \end{aligned}$$

wie sie ähnlich zum Beispiel in Kapitel 29 von DasGupta (2008) zu finden ist, folgt die Aussage durch die Konvergenz der Terme $M_{1, n}$ und $M_{2, n}$. Wegen der Stetigkeit von $\phi_{\mathfrak{V}}$ folgt die Konvergenz von $M_{2, n}$ direkt aus Theorem 48 und dem Theorem von Pólya, wie es unter anderem in Abschnitt 1.5.3 von Serfling (1980) nachzulesen ist. Wiederum nach dem Theorem von Pólya genügt es für $M_{1, n}$ nun zu zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} (|F_{\mathcal{S}_n, n}^*(t) - \phi_{\mathfrak{V}}(t)| > \varepsilon) = 0. \quad (6.22)$$

Dafür kann man den Beweis von Theorem 48 nachahmen. Mit Zerlegung (6.5) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{n}{t_n} T_n^* &= \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^* + T_{n,2}^* + T_{n,3}^*, X_j \rangle|^2 + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle T_{n,1}^* + T_{n,2}^* + T_{n,3}^*, X_j \rangle \langle X_j, R_n^* \rangle \\ &\quad + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n \langle X_j, T_{n,1}^* + T_{n,2}^* + T_{n,3}^* \rangle \langle R_n^*, X_j \rangle + \frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n^*, X_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

wobei mit (6.7) gilt, dass

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle R_n^*, X_j \rangle|^2 = \frac{n}{t_n} R_{n,3}^* + \frac{n}{t_n} (R_{n,2}^* - \mathfrak{R}_n) + \frac{n}{t_n} (R_{n,1}^* + R_{n,4}^* + R_{n,5}^*).$$

$\frac{n}{t_n} R_{n,3}^*$ konvergiert schwach in \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit gegen $\mathcal{N}(0, \mathfrak{V})$ nach Proposition 59, was nach dem Portmanteau-Theorem äquivalent zur punktweisen Konvergenz der Verteilungsfunktionen, wiederum in \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit, ist. Nach Proposition 64 sowie den Lemmata 63, 65 und 66 gilt

$$\frac{n}{t_n} (R_{n,2}^* - \mathfrak{R}_n) + \frac{n}{t_n} (R_{n,1}^* + R_{n,4}^* + R_{n,5}^*) = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Mit den Propositionen 60, 61 und 62 ergibt sich

$$\frac{1}{t_n} \sum_{j=1}^n |\langle T_{n,1}^* + T_{n,2}^* + T_{n,3}^*, X_j \rangle|^2 \leq \frac{C}{t_n} \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^3 |\langle T_{n,p}^*, X_j \rangle|^2 = o_{\mathbb{P}}(1).$$

Wie in Theorem 48 lassen sich die gemischten Terme auf bereits diskutierte Terme zurückführen und die Behauptung folgt mit dem Lemma von Slutsky. \square

Die Voraussetzungen, unter denen obiges Konsistenzresultat gilt, ähneln den Voraussetzungen für Theorem 48. Den Zusammenhang erläutert die nachfolgende Bemerkung.

68. Bemerkung:

- (i) Es gilt $\|\tilde{\Gamma}^{-1/4} \Gamma_X^{1/2}\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{x_k w_k^{1/2}}{|c_k|}$. Nach Definition 19 ist (T3*) also äquivalent dazu, dass $\tilde{\Gamma}^{-1/4} \Gamma_X^{1/2}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Dies ist eine Verschärfung von Voraussetzung (T3). Sie wird wegen der fehlenden Unkorreliertheit gemischter Terme, die durch die Berechnung der Residuen entsteht, benötigt.
- (ii) Die Voraussetzungen (T2*) und (T4*) sind weitere Regularitätsbedingungen, wie sie auch in Kapitel 5 benötigt und in Bemerkung 49 begründet wurden. (T2*) wird nun anstelle von (T2) benötigt. Dies hat seine Ursache in der Verwendung von $\hat{\beta}_{IV}$ als Plug-In-Schätzer zur Berechnung der Residuen. Falls $\tilde{\Gamma}^{-2} \Gamma_X^{1/4} \Gamma_X^2$ von Hilbert-Schmidt-Typ ist, ist (T2*) erfüllt. Entsprechend gelten (T3*) und (T4*), falls $\tilde{\Gamma}^{-1/4} \Gamma_X^{3/4}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist.

Mit dem Resultat aus Theorem 67 lässt sich nun ein Test wie in (5.44) zum Testproblem (5.43) formulieren, wobei T_n aus (5.4) durch T_n^* aus (6.5) ersetzt wird. Die Anwendbarkeit dieses Tests in der Praxis sichert das nachfolgende Lemma.

69. Lemma: Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 67. Dann gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| P \left(\frac{n}{\hat{t}_n} \frac{T_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} \leq t \mid \mathcal{S}_n \right) - P \left(\frac{n}{t_n} \frac{T_n - \mathfrak{R}_n}{\sqrt{\mathfrak{V}}} \leq t \right) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

mit $\hat{\mathfrak{R}}_n$ aus Lemma 50, $\hat{\mathfrak{V}}_n$ aus Lemma 51 und \hat{t}_n aus Lemma 52.

BEWEIS: Die Aussage folgt durch Wiederholen der Beweisführung von Lemma 53 und Theorem 67. \square

7. Simulationen

Die Kapitel 5 und 6 stellen für das Testproblem (5.43) eine Teststatistik sowie eine Bootstrapvariante selbiger bereit, deren asymptotische Verteilung jeweils bekannt ist. Diese Resultate werden nun im Rahmen von Simulationen an einigen Beispielen für endliche Stichprobenumfänge umgesetzt. Der Fokus liegt dabei auf der Überprüfung der grundsätzlichen Funktionalität des Tests sowie der Visualisierung der Testergebnisse für unterschiedliche Parameterkombinationen und Stichprobenumfänge. Implementiert wird der asymptotische Test aus (5.46), sowie seine Bootstrapvariante

$$\varphi_n^* : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad \varphi_n = I \left\{ \frac{n T_n^* - \hat{\mathfrak{A}}_n}{\hat{t}_n \sqrt{\hat{\mathfrak{V}}_n}} \geq c_q \right\}, \quad (7.1)$$

wobei c_q das q -Quantil von $\mathcal{N}(0, 1)$ ist. Im folgenden Abschnitt wird zunächst der Simulationscode erklärt, bevor in Abschnitt 7.3 die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt werden.

7.1. R-Code zum Bootstraptest

Die Simulationen wurden in der Programmiersprache R implementiert. Der Code wurde dabei so aufgebaut, dass die Funktionsweise leicht ersichtlich ist; es wurden keine Optimierungen vorgenommen.

7.1.1. Bootstraphmenprogramm

Zunächst werden alle Objekte aus dem Workspace entfernt. Für die Simulationen wird das R-Paket `fda` zur Erstellung der Fourierbasis verwendet. Um Daten mit einer vorgegebenen Korrelationsstruktur zu erzeugen wird das Paket `mnormt` eingebunden. Mit Hilfe der Pakete R-Pakete `foreach` und `doParallel` wird die Bootstrapschleife parallelisiert und somit Rechenzeit gespart.

```
1 rm(list=ls(all=TRUE)) #entfernt alle Objekte
2
3 library(fda)
4 library(mnormt)
5 library(foreach)
6 library(doParallel)
7
```

Es folgt der Eingabebereich. Hier wird zunächst das Verzeichnis angegeben, in dem der Quellcode liegt und die Ergebnisse gespeichert werden, und ein Name für die Ergebnisdatei vergeben. Im nächsten Schritt wählt man die zu verwendende Bootstraphmethode

durch Vorgabe der Codedatei auf die das Programm zugreifen soll. Dazu wurde vorab für jede Bootstrapvariante eine Funktion geschrieben. Zur Auswahl stehen hier ein naiver Bootstrap sowie drei Versionen des wild Bootstraps. Mit dem Befehl `detectCores` aus dem R-Paket `doParallel` fragt man die Anzahl der Kerne des Rechners ab, um dann mit `makeCluster` festzulegen, auf wievielen Kernen parallel gerechnet werden soll. Dieser Wert wird an `registerDoParallel` aus dem R-Paket `foreach` übergeben und bei der Parallelisierung zugrunde gelegt. Um die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse zu sichern wird ein Seed gesetzt.

```

8
9 #*****
10 #                               Eingabebereich                               #
11 #*****
12
13 # Arbeitsverzeichnis
14 PFAD = "C:/Simulationen"
15
16
17 # Datei zur Speicherung der Ergebnisse
18 FILENAMEboot = "sine_sim1000_boot500_naive.txt"
19
20
21 # Wahl der Bootstraphmethode:
22   source(paste(PFAD, "/", "wildBootstrap.r", sep=""))
23   # source(paste(PFAD, "/", "naiveBootstrap.r", sep=""))
24   # source(paste(PFAD, "/", "goldenRatioBootstrap.r", sep=""))
25   # source(paste(PFAD, "/", "RademacherBootstrap.r", sep=""))
26
27
28 # Parallelisierung: Anzahl der zu nutzenden Kerne
29 AnzKerne = detectCores(logical = TRUE)
30 #erstellteCluster = makeCluster(max(1, AnzKerne - 1))
31 erstellteCluster = makeCluster(max(1, AnzKerne))
32 registerDoParallel(erstellteCluster)
33 genutzteKerne = getDoParWorkers()
34 genutzteKerne
35
36 set.seed(28) # Setzen eines Seeds
37

```

Ein Vektor `N` wird festgelegt, der in jedem Eintrag eine Stichprobengröße n vorgibt. Weitere Parameter, unter anderem die Anzahl der Simulationsdurchläufe sowie die Anzahl der Bootstrapziehungen werden festgelegt.

```

38
39 # Festlegung des Stichprobenumfangs
40   N <- seq(25, 300, 25)
41   # N <- seq(2, 50, 2)
42
43
44 Simulationen = 1000           # Anzahl der Simulationsdurchlaufe
45 Durchlaufe = 500             # Anzahl der Bootstrapziehungen
46

```

```

47
48 q = 0.05          # Quantil zur Bestimmung des kritischen Werts
49                  # fuer die Testentscheidung
50 p = 50            # Feinheit der Partition der t-Werte
51 r = c(0.001,1)   # Bereich, auf dem t definiert ist
52 K = 9            # Anzahl der zu verwendenden Basisfunktionen,
53                  # ungerade zu waehlen
54 T = 1/2          # Periode der Basisfunktionen
55 sigma <- 1.4     # damit wird der Fehler multipliziert
56 alpha1 = 0.0001 # Threshold fuer den IV-Schaetzer
57 alpha2 = 0.0001 # Threshold fuer den Bootstrap-Loop
58 d <- 1           # Potenz der Konstante aus der Sobolev-Norm
59

```

Durch `rho` wird der Grad der Endogenität und durch `nu` die Stärke des Instrumentes festgelegt. Da beide Parameter zur Berechnung einer Kovarianzmatrix verwendet werden, ist bei der Wahl der `rho-nu`-Kombination auf die Erfüllung der im Kommentar hinterlegten Bedingung, die die positive Definitheit garantiert, zu achten.

```

60
61 # Waehle rho und nu derart, dass 12-12*nu^2 - 12*rho^2 > 0 gilt!
62 rho <- 0.4        # Korrelation von X und e
63 nu <- 0.6         # Korrelation von X und W
64

```

Die zugrunde liegende Slope-Funktion β , im Code mit `beta` bezeichnet, wird über den Befehl `function()` festgelegt, zum Beispiel als $\beta(t) =: \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{7} \sin(20\pi t)$.

```

65
66 # Festlegung der Slopefunktion beta
67 beta <- function(t){
68     b = sin((2*pi)/T*t)
69     + 1/2*sin((2*2*pi)/T*t)+1/7*sin((5*2*pi)/T*t)# b1
70 #     b = 2/pi*asin(cos(2*pi*t)) # b2
71     b
72     }
73
74 #*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
75 #                                     Ende des Eingabebereichs                                     #
76 #*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*-*
77

```

Mit `tvec` werden die Punkte t_0, \dots, t_{p+1} festgelegt, an denen die funktionalen Regressoren X bzw. W beobachtet werden. Die Fourierbasis $\phi_1(t), \dots, \phi_K(t)$ wird erstellt und die Werte der Basisfunktionen an den Stellen t_0, \dots, t_{p+1} in der Matrix `basiswerte` gespeichert.

```

78
79 tvec = seq(0,1, 1/p)          # Partitionierung der t-Achse
80
81
82 # Berechne beta an den Stellen t_1 bis t_p
83 betapunkte <- numeric(length(tvec)) # beta(t_1), ..., beta(t_p)
84

```

```

85
86 for (j in 1:length(tvec)){
87     betapunkte[j] = beta(tvec[j])
88 }
89
90
91 # Erzeuge Fourierbasis
92 fbasis <- create.fourier.basis(
93     rangeval = r , # Definitionsbereich von t
94     nbasis = K , # Anzahl der Basisfunktionen
95     period = T # Periode der Basisfunktionen
96 )
97
98 B <- fourier(tvec, nbasis=K, period=T, nderiv=0)
99 basiswerte <- as.matrix(B) # basiswerte enthaelt in jeder Spalte eine
100 # Basisfunktion, ausgewertet an
101 # den Eintraegen von tvec
102

```

Je ein Vektor zum Speichern der später für jedes n berechneten empirischen Power sowie des empirischen Fehlers erster Art werden erstellt.

```

103
104 # Vektoren zur Speicherung von Power und Fehler erster Art fuer
105 # diverse Stichprobenumfaenge
106 POWER <- c()
107 FEHLER1A <- c()
108

```

Es wird eine Datei mit einer Header-Zeile angelegt, die zur Speicherung der Ergebnisse verwendet wird.

```

109
110 #Erstelle Datei zur Speicherung der Ergebnisse
111 sink(file=paste(PFAD, "/", FILENAMEboot, sep=""), append=TRUE)
112   cat("N ", "alpha1 ", "alpha2 ",
113       "ro ", "nu ", "Power ", "F1A \n", sep="")
114   sink()
115

```

In einer `for`-Schleife über alle betrachteten Stichprobenumfänge wird zunächst jeweils ein Vektor zur Speicherung der Testentscheidung in jedem Simulationsdurchlauf für den exogenen und endogenen Fall angelegt.

```

116
117 #-----
118 #                               Beginn Stichprobenumfangschleife
119 #-----
120
121 for (n in 1:length(N)){
122
123 # Vektor zur Speicherung der Testentscheidung in jedem Simulations-
124 # durchlauf, exogener Fall
125 Entscheidung0 = c()
126

```

```

127 # Vektor zur Speicherung der Testentscheidung in jedem Simulations-
128 # durchlauf, exogener Fall
129 Entscheidung1 = c()
130
131
132 Xbeob <- matrix(0,N[n],length(tvec)) # Nxlength(tvec)-Matrix zum
133                                     # Speichern der Beobachtungspunkte
134                                     # von X
135 Wbeob <- matrix(0,N[n],length(tvec)) # Nxlength(tvec)-Matrix zum
136                                     # Speichern der Beobachtungspunkte
137                                     # von W
138 Xkoeff <- matrix(0,N[n],K) # NxK-Matrix fuer die Koeffizienten
139                             # der Fourierbasisdarstellung
140 Wkoeff <- matrix(0,N[n],K) # NxK-Matrix fuer die Koeffizienten
141                             # der Fourierbasisdarstellung fuer W
142 Yex <- numeric(N[n]) # Vektor zur Speicherung der Y_1,...,Y_N exogen
143 Yend <- numeric(N[n]) # Vektor zur Speicherung der Y_1,...,Y_N endogen
144
145 # Vektoren der Laenge K zur Speicherung der Eigenwerte des emp.
146 # Kovarianzoperators von X bzw. W sowie des Crosskovarianzoperators
147 # von X und W
148 xk <- numeric(length=K)
149 wk <- numeric(length=K)
150 ck <- numeric(length=K)
151
152 H <- matrix(0,N[n],1) # Speicherung der fuer W verwendeten Zufallszahlen
153
154 g <- numeric(K) # Vektor mit gamma_k^d (Sobolev-Konst.)
155
156 gew0 <- matrix(0,N[n],K) # Gewichte einfacher Schaetzer, exog. Fall
157 gew1 <- matrix(0,N[n],K) # Gewichte einfacher Schaetzer, endog. Fall
158 ivgew0 <- matrix(0,N[n],K) # Gewichte IV-Schaetzer, exog. Fall
159 ivgew1 <- matrix(0,N[n],K) # Gewichte IV-Schaetzer, endog. Fall
160 sumgew0 <- numeric(N[n]) # entspr. Gewichte aufsummiert ueber k
161 sumgew1 <- numeric(N[n]) # summierte Gewichte
162 sumivgew0 <- numeric(N[n])
163 sumivgew1 <- numeric(N[n])
164

```

Der Startwert der `repeat`-Schleife für die Simulationsdurchläufe wird gesetzt. Daten passender Korrelation werden aus der multivariaten Normalverteilung

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ e \\ u \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_4 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \nu sd_{Z_1} sd_{Z_2} & \rho sd_{Z_1} sd_e & 0 \\ \nu sd_{Z_1} sd_{Z_2} & 2 & 0 & 0 \\ \rho sd_{Z_1} sd_e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

erzeugt, wobei gerade $\text{corr}(Z_1, Z_2) = \nu$, $\text{corr}(Z_1, e) = \rho$, vgl. Wong (1996). Zudem werden uniformverteilte Daten `H` erzeugt.

```

165
166 #-----
167 #                               Beginn Simulationsschleife

```

```

168 #-----
169
170
171 simulation = 1 # Startwert fuer die Simulationsdurchlaeufe
172
173 repeat{
174
175 #Erzeuge Daten passender Korrelationen
176 daten <- matrix(0, N[n] , 4 ) # Spalten: X,W,e,u
177
178 covmatrix <- matrix(c(3,
179                       nu*sqrt(3*2) ,
180                       rho *sqrt(3*1) ,
181                       0,
182                       nu*sqrt(3*2) ,
183                       2 ,
184                       0 ,
185                       0 ,
186                       rho *sqrt(3*1) ,
187                       0,
188                       1,
189                       0,
190                       0 , 0 , 0, 1),byrow=TRUE ,nrow=4)
191
192
193 set.seed(simulation)
194 daten <- rmnorm(N[n], mean=c(0,0,0,0), varcov=covmatrix)
195
196 X <- daten[,1]
197 W <- daten[,2]
198 e <- daten[,3]
199 u <- daten[,4]
200
201 H[,1] = runif(N[n], min=-1/2, max = 1/2)
202

```

Damit wird für die funktionalen Regressoren

$$X(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)Z_1$$

$$W(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)Z_2 + H, \quad H \sim \mathcal{U}_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}$$

je eine Stichprobe der Länge n , beobachtet an den Stellen t_1, \dots, t_{p+1} , erzeugt, um daraus die zugehörigen Fourierkoeffizienten $\langle X_j, \phi_k \rangle$ und $\langle W_j, \phi_k \rangle$ näherungsweise durch $\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} X_j(t_i) \cdot \phi_k(t_i)$ beziehungsweise $\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} W_j(t_i) \cdot \phi_k(t_i)$ für $k \in \{1, \dots, K\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ zu bestimmen. Zudem wird die Responsevariable Y durch

$$Y = \frac{1}{p+1} \sum_{l=1}^p X(t_l) \cdot \beta(t_l) + \sigma \cdot \varepsilon,$$

approximiert, wobei im exogenen Fall für die Berechnung $\varepsilon = u$ benutzt und der Wert der

Responsevariable mit `Yex` bezeichnet wird. Im endogenen Fall wird entsprechend der mit den Daten korrelierte Fehler $\varepsilon = e$ addiert und die Responsevariable mit `Yend` bezeichnet.

```

203
204 # Berechne X und W an den Stellen t_1 bis t_p sowie Y (exogen, endogen)
205 for(i in 1:N[n])
206   {
207     for(j in 1:length(tvec))
208       {
209         Wbeob[i,j] = (tvec[j]+0.5)*daten[i,2] + H[i,1]
210         Xbeob[i,j] = (tvec[j]+0.5)*daten[i,1]
211       }
212     Yex[i] = mean(Xbeob[i,]*betapunkte)+sigma*u[i]
213     Yend[i] = mean(Xbeob[i,]*betapunkte)+sigma*e[i]
214   }
215
216
217 beob <- t(Xbeob) # transponierte Matrix Xbeob; enthaelt in jeder Spalte
218                 # ein X_i ausgewertet an den Stellen von tvec
219
220 IVbeob <- t(Wbeob) # transponierte Matrix Wbeob; enthaelt in jeder Spalte
221                 # ein W_i ausgewertet an den Stellen von tvec
222
223
224 # Berechne Fourierkoeffizienten von X und W
225 for (i in 1:N[n])
226   {
227     for(k in 1:K)
228       {
229         Xkoeff[i,k] <- mean(beob[,i] * basiswerte[,k])
230         Wkoeff[i,k] <- mean(IVbeob[,i] * basiswerte[,k])
231       }
232   }
233

```

Aus den Fourierkoeffizienten werden die geschätzten Eigenwerte x_k und w_k der Kovarianzoperatoren von X beziehungsweise W sowie die geschätzten Eigenwerte c_k des Crosskovarianzoperators von X und W für $k \in \{1, \dots, K\}$ bestimmt. Dazu wird über die Fourierkoeffizienten der Beobachtungen gemittelt. Außerdem werden die Konstanten γ_k' aus der Sobolevnorm, im Code `g[k]`, berechnet.

```

234
235 # Berechne fuer jede Basisfunktion die geschaetzten Eigenwerte der
236 # (Cross-)Kovarianzoperatoren sowie die Konstante aus der Sobolevnorm
237 for (k in 1:K)
238   {
239     xk[k] <- (1/N[n])*sum( Xkoeff[,k] * Xkoeff[,k] )
240     wk[k] <- (1/N[n])*sum( Wkoeff[,k] %%% Wkoeff[,k] )
241     ck[k] <- (1/N[n])*sum( Xkoeff[,k]*Wkoeff[,k] )
242     g[k] = (1+ (abs(2*pi*k))^2)^d
243   }
244

```

Mit den geschätzten Eigenwerten wird nun die Teststatistik berechnet, wobei unter der Nullhypothese berechnete Werte eine 0 am Ende des Namens tragen, unter der Alternative berechnete Werte eine 1. Indikatorfunktionen werden durch `if-else`-Bedingungen umgesetzt.

```

245
246 # Berechne die Gewichte des einfachen und des IV-Schaetzers jeweils
247 # im exogenen und endogenen Fall und summiere
248 for(j in 1:N[n])
249   {
250     for (k in 1:K){
251       if( (ck[k])^2 >= alpha1*g[k]*wk[k] && wk[k] >= alpha1){
252         gew0[j,k] <- 1/xk[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Xkoeff[,k]*Yex)
253         gew1[j,k] <- 1/xk[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Xkoeff[,k]*Yend)
254         ivgew0[j,k] <- 1/ck[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Wkoeff[,k]*Yex)
255         ivgew1[j,k] <- 1/ck[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Wkoeff[,k]*Yend)
256       }
257       else{
258         gew0[j,k] <- 0
259         gew1[j,k] <- 0
260         ivgew0[j,k] <- 0
261         ivgew1[j,k] <- 0
262       }
263       sumgew0[j] <- sum(gew0[j,])
264       sumgew1[j] <- sum(gew1[j,])
265       sumivgew0[j] <- sum(ivgew0[j,])
266       sumivgew1[j] <- sum(ivgew1[j,])
267     }
268   }
269
270 #Teststatistik mit Werten unter H0
271 Statistik0 <- mean((sumgew0-sumivgew0)^2)
272 #Teststatistik mit Werten unter H1
273 Statistik1 <- mean((sumgew1-sumivgew1)^2)
274

```

In der nun folgenden Bootstrapschleife werden die gesetzten Parameter sowie einige in der Simulationsschleife berechnete Werte in der Liste `uebergabewerte` gespeichert und an die aufgerufene Funktion `bootstrap` übergeben, die in Abschnitt 7.1.2 näher beschrieben wird. Die Funktion `bootstrap` wird nun in jedem Durchlauf der Bootstrapschleife durch `dopar` parallelisiert ausgeführt. Die Ergebnisse werden für den exogenen Fall im Vektor `ergebnisse0`, im endogenen Fall im Vektor `ergebnisse1` gespeichert.

```

275
276 #-----
277 #               Beginn Bootstrapschleife
278 #-----
279
280 # Vektoren zur Speicherung der Testergebnisse
281 ergebnisse0 = c() # exogener Fall
282 ergebnisse1 = c() # endogener Fall
283
284 # Auflistung der Uebergabewerte fuer die Bootstrapfunktion

```

```

285 uebergabewerte = list(
286   n = n, Xkoeff = Xkoeff, Wkoeff = Wkoeff,
287   ck = ck, xk = xk, wk=wk,
288   alpha1 = alpha1, alpha2 = alpha2,
289   PFAD=PFAD,
290   simulation=simulation, Umfang = N[n],
291   sumgew0=sumgew0, sumgew1=sumgew1,
292   sumivgew0=sumivgew0, sumivgew1=sumivgew1,
293   Yex=Yex, Yend=Yend,
294   g=g, sigma=sigma, K=K, N=N)
295
296
297 durchlauf = 1:Durchlaeufe
298
299 # Parallelisierte Ausfuehrung der Bootstrapfunktion
300 ergebnisdesbootstraps = foreach(
301   dd = durchlauf,
302   .combine=rbind,
303   .packages=c()) %dopar% bootstrap(uebergabewerte,
304   dd)
305
306 # Speicherung der Ergebnisse des Bootstraps (exogen, endogen)
307 ergebnisse0 = as.numeric(ergebnisdesbootstraps[,"teststatistik0"])
308 ergebnisse1 = as.numeric(ergebnisdesbootstraps[,"teststatistik1"])
309
310 #-----
311 #               Ende Bootstrapschleife
312 #-----
313

```

Die Einträge des Vektors `ergebnisse0` bzw. `ergebnisse1` der Bootstrapteststatistik werden nun aufsteigend sortiert. Mit der Funktion `floor()` wird ihr q -Quantil bestimmt, das im exogenen Fall mit `calpha0`, im endogenen Fall mit `calpha1` bezeichnet wird und als Entscheidungskriterium für den Test verwendet wird. Der Test `phi0` wird nun für jeden Simulationsdurchlauf auf die Teststatistik `Statistik0` im exogenen Fall angewendet, die Entscheidung in `Entscheidung0` gespeichert (analoges Vorgehen für den endogenen Fall mit `phi1`, `Statistik1` und `Entscheidung1`). Die Simulationsschleife endet.

```

314
315 # Sortiere die Ergebnisse der Bootstrapteststatistik fuer den
316 # exogenen bzw. endogenen Fall aufsteigend
317 sortierteErgeb0 <- sort(ergebnisse0)
318 sortierteErgeb1 <- sort(ergebnisse1)
319
320 # Berechne das q%-Quantil zur Testentscheidung fuer den exogenen
321 # bzw. endogenen Fall
322 calpha0 <- sortierteErgeb0[floor((1-q)*Durchlaeufe)]
323 calpha1 <- sortierteErgeb1[floor((1-q)*Durchlaeufe)]
324
325 # Berechne die Testentscheidung fuer jeden Simulationsdurchlauf fuer den
326 # exogenen Fall
327 if ( Statistik0 >= calpha0 ) { phi0=1 }
328 else { phi0 = 0 }

```

```

329
330 Entscheidung0 = c(Entscheidung0, phi0)
331
332
333
334 # Berechne die Testentscheidung fuer jeden Simulationsdurchlauf fuer den
335 # endogenen Fall
336 if ( Statistik1 >= calpha1 ) { phi1=1 }
337 else { phi1 = 0 }
338
339 Entscheidung1 = c(Entscheidung1, phi1)
340
341
342
343
344 simulation <- simulation + 1
345 if ( simulation > Simulationen ) break
346
347 } # Ende repeat-Schleife fuer Simulationsdurchlaeufe
348
349 #-----
350 #                               Ende Simulationsschleife
351 #-----
352

```

Die empirische Power des Tests wird nun aus dem Mittel der Entscheidungen des Tests `phi1`, der auf den endogenen Daten basiert, berechnet. Die Einhaltung des angestrebten Niveaus wird durch Mitteln über die Testentscheidungen von `phi0`, der auf den exogenen Daten beruht, überprüft. Die Ergebnisse für Power und Fehler erster Art für die verschiedenen Stichprobenumfänge werden jeweils in einem Vektor und in einer *.txt-Datei gespeichert. Nach Abschluss der Schleife über die Stichprobenumfänge wird die Parallelisierung beendet, die Ergebnisse werden in der Konsole ausgegeben.

```

353
354 # Berechnung der Power des Tests im endogenen Fall
355 power <- mean(Entscheidung1)
356
357 # Berechnung des Fehlers erster Art im exogenen Fall
358 F1A <- mean(Entscheidung0)
359
360
361 # Speicherung von Power und Fehler erster Art in Vektoren
362 POWER = c(POWER, power)
363 FEHLER1A = c(FEHLER1A, F1A)
364
365
366 # Speichere Power und Fehler erster Art in FILENAMEboot.
367 sink(file=paste(PFAD, "/", FILENAMEboot, sep=""), append=TRUE)
368     cat(N[n] , alpha1, alpha2 , rho , nu ,
369         power , F1A, "\n", sep=" ")
370     sink()
371
372

```

```

373 }      # Ende Stichprobenumfang-Schleife
374
375 #-----
376 #           Ende Stichprobenumfang-Schleife
377 #-----
378
379
380 # Beende Parallelisierung
381 stopCluster(erstellteCluster)
382 registerDoSEQ()
383
384
385
386 # Ausgabe der Ergebnisse
387 POWER
388 FEHLER1A
389

```

7.1.2. Bootstrapfunktion

Zur Bestimmung des kritischen Wertes für die Testentscheidung wird ein Bootstrapverfahren verwendet, das im Rahmenprogramm durch Ausführung der Funktion `bootstrap` in einer `repeat`-Schleife umgesetzt wird. Der nachfolgend beschriebene R-Code verwendet dazu einen wild Bootstrap mit standardnormalverteilten Zufallszahlen.

Nach Setzen eines neuen Seeds für jeden Funktionsaufruf und Einlesen der Übergabewerte aus der Simulationsschleife werden Vektoren und Matrizen zur Speicherung der Ergebnisse angelegt. Für Ungeduldige werden in der Datei `woderrechnerist.txt` Stichprobenumfang, Simulationsdurchlauf und Bootstrappedurchlauf ausgegeben, was jedoch für die angestrebten Berechnungen nicht notwendig ist.

```

1 bootstrap = function(uebergabewerte, dd)
2 {
3     set.seed(dd)
4
5     PFAD      = uebergabewerte$PFAD
6     simulation = uebergabewerte$simulation
7     Umfang    = uebergabewerte$Umfang
8
9
10 # Verfolge den Fortschritt der Berechnungen.
11 if (dd%%20==0 && simulation%%10==0)
12 {
13     sink(file=paste(PFAD, "/", "woderrechnerist.txt", sep=""), append=TRUE)
14     cat("\n Umfang = ", Umfang,
15         ", Simulation Nr. ", simulation,
16         ", Bootstrap Nr. ", dd, sep="")
17     sink()
18 }
19
20 # Einlesen der Uebergabewerte aus Bootstrap_main.r
21     n      = uebergabewerte$n

```

```

22     Xkoeff = uebergabewerte$Xkoeff
23     Wkoeff = uebergabewerte$Wkoeff
24     ck      = uebergabewerte$ck
25     xk      = uebergabewerte$xk
26     wk      = uebergabewerte$wk
27     g       = uebergabewerte$g
28     alpha1 = uebergabewerte$alpha1
29     alpha2 = uebergabewerte$alpha2
30     Yex     = uebergabewerte$Yex
31     Yend    = uebergabewerte$Yend
32     sigma   = uebergabewerte$sigma
33     K       = uebergabewerte$K
34     N       = uebergabewerte$N
35     sumgew0 = uebergabewerte$sumgew0
36     sumgew1 = uebergabewerte$sumgew1
37     sumivgew0 = uebergabewerte$sumivgew0
38     sumivgew1 = uebergabewerte$sumivgew1
39
40 # Anlegen leerer Vektoren und Matrizen zur Speicherung der Ergebnisse
41 Yexstar <- numeric(N[n]) # Y*_1,...,Y*_N, exogen
42 Yendstar <- numeric(N[n]) # Y*_1,...,Y*_N, endogen
43 ustar <- numeric(N[n]) # Fehlerterm, exogen
44 udach <- numeric(N[n]) # Residuen, exogen
45 edach <- numeric(N[n]) # Residuen, endogen
46 bootgew0 <- matrix(0,N[n],K) # Teststatistik für den Bootstrap,
47 bootivgew0 <- matrix(0,N[n],K) # exogener Fall
48 sumbootgew0 <- numeric(N[n])
49 sumbootivgew0 <- numeric(N[n])
50 bootgew1 <- matrix(0,N[n],K) # Teststatistik für den Bootstrap,
51 bootivgew1 <- matrix(0,N[n],K) # endogener Fall
52 sumbootgew1 <- numeric(N[n])
53 sumbootivgew1 <- numeric(N[n])
54

```

In jedem Durchlauf wird ein Vektor V mit n Zufallszahlen einer bestimmten Verteilung, im vorliegenden Fall der Standardnormalverteilung, erzeugt und anschließend mit dem Vektor $(\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n)^T$ der Residuen (im exogenen Fall mit `udach` und im endogenen Fall mit `edach` bezeichnet) multipliziert. Dabei werden die Residuen genähert durch

$$\hat{U}_i = \frac{1}{\sigma} \left(Y_i - \frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^p \hat{\beta}_{IV}(t_l) \cdot X_i(t_l) \right), \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

```

55
56 # Berechnung der Residuen im exogenen bzw. endogenen Fall
57 udach <- (Yex - sumivgew0)/sigma
58 edach <- (Yend - sumivgew1)/sigma
59
60 # Berechnung von Zufallszahlen einer bestimmten Verteilung und
61 # Speicherung selbiger im Vektor V
62 V <- rnorm(N[n], mean=0, sd=1)
63
64

```

```

65 # Berechnung neuer Fehlerterme durch Multiplikation der Residuen des
66 # exogenen bzw. endogenen Falls mit den Zufallszahlen aus V
67     ustar <- udach*V
68     estar <- edach*V
69

```

Aus den entstandenen U_i^* (bzw. e_i^* im endogenen Fall) und den Werten $\frac{1}{p+1} \sum_{l=0}^p \hat{\beta}_{IV}(t_l) \cdot X_i(t_l)$ aus dem aktuellen Simulationsdurchlauf wird Y_i^* berechnet, $i \in \{1, \dots, n\}$. Dabei wird jeweils der Instrumentvariablenschätzer unter Exogenität beziehungsweise unter Endogenität verwendet.

```

70
71 # Berechnung der Bootstrapregressanden fuer den exogenen
72 # bzw. endogenen Fall
73 for (i in 1:N[n]) {
74     Yexstar[i] <- sumivgew0[i] +sigma*ustar[i]
75     Yendstar[i] <- sumivgew1[i] +sigma*estar[i]
76 }
77

```

Mit Y_1^*, \dots, Y_n^* wird nun die Berechnung der Teststatistik wie in der Simulationsschleife durchgeführt. Die Ergebnisse werden an das Rahmenprogramm übergeben.

```

78
79 # Berechnung der Gewichte der Bootstrapteststatistik und deren Summe
80 # fuer den exogenen bzw. endogenen Fall
81 for(j in 1:N[n])
82 {
83     for (k in 1:K)
84     {
85         if( (ck[k])^2 >= alpha2*g[k]*wk[k] && wk[k] >= alpha2 )
86         {
87             bootgew0[j,k] <- 1/xk[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Xkoeff[,k]*
88                 Yexstar)
89             bootgew1[j,k] <- 1/xk[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Xkoeff[,k]*
90                 Yendstar)
91             bootivgew0[j,k] <- 1/ck[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Wkoeff[,k]*
92                 Yexstar)
93             bootivgew1[j,k] <- 1/ck[k]*Xkoeff[j,k]*mean(Wkoeff[,k]*
94                 Yendstar)
95         }
96         else{
97             bootgew0[j,k] <- 0
98             bootgew1[j,k] <- 0
99             bootivgew0[j,k] <- 0
100             bootivgew1[j,k] <- 0
101         }
102     }
103     sumbootgew0[j] <- sum(bootgew0[j,])
104     sumbootgew1[j] <- sum(bootgew1[j,])
105     sumbootivgew0[j] <- sum(bootivgew0[j,])
106     sumbootivgew1[j] <- sum(bootivgew1[j,])
107 }

```

```

105 # Berechnung der Bootstraptteststatistik fuer den exogenen
106 # bzw. endogenen Fall
107 teststatistik0 <- mean((sumbootgew0 - sumbootivgew0)^2)
108 teststatistik1 <- mean((sumbootgew1 - sumbootivgew1)^2)
109
110
111 # Übergabe der Ergebnisse an Bootstrap_main.r
112 return (list(teststatistik0=teststatistik0,
113             teststatistik1=teststatistik1))
114 }
115

```

7.1.3. Weitere Bootstrapvarianten

Neben dem in Abschnitt 7.1.2 beschriebenen wild Bootstrap wurden weitere Bootstrapvarianten implementiert. Bei Verwendung des naiven Bootstraps, wie zum Beispiel in González-Manteiga und Martínez-Calvo (2010), wird der Vektor der geschätzten Residuen zentriert. Dann werden daraus mit Zurücklegen U_1^*, \dots, U_n^* gezogen. Dafür werden in der Bootstrapfunktion die Codezeilen 60–69 ersetzt durch

```

60
61 # Berechnung neuer Fehlerterme durch Ziehen mit Zurücklegen aus
62 # den zentrierten Residuen fuer den exogenen bzw. endogenen Fall
63 ustar <- sample(udach - mean(udach), N[n], replace = TRUE, prob = NULL)
64 estar <- sample(edach - mean(edach), N[n], replace = TRUE, prob = NULL)
65

```

Bei Verwendung einer Variante des Wild Bootstraps, die den goldenen Schnitt zugrunde legt und von Mammen (1993) vorgeschlagen wird, multipliziert man die Residuen mit unabhängigen und identisch verteilten Zufallszahlen η_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ den Wert $\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ den Wert $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ annehmen.

```

60
61 # Berechnung von Zufallszahlen, die mit Wahrscheinlichkeit
62 # (sqrt(5)+1)/(2*sqrt(5)) den Wert -(sqrt(5)-1)/2 und mit Wahrschein-
63 # lichkeit (sqrt(5)-1)/(2*sqrt(5)) den Wert (sqrt(5)+1)/2 annehmen und
64 # im Vektor eta gespeichert werden
65 xi <- c(-(sqrt(5)-1)/2, (sqrt(5)+1)/2)
66 eta <- sample(xi, N[n], replace = TRUE,
67             prob = c((sqrt(5)+1)/(2*sqrt(5)), (sqrt(5)-1)/(2*sqrt(5))))
68
69 # Berechnung neuer Fehlerterme durch Multiplikation der Residuen
70 # des exogenen bzw. endogenen Falls mit den Zufallszahlen aus eta
71 ustar <- udach*eta
72 estar <- edach*eta
73

```

Auch ein auf der Rademacher-Verteilung basierender wild Bootstrap findet häufig Anwendung und lässt sich entsprechend implementieren.

```

60

```



```

61 # Berechnung von Zufallszahlen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit
62 # 0.5 den Wert 1 oder -1 annehmen und speichern selbiger im Vektor eta
63 xi <- c(-1,1)
64 eta <- sample(xi, N[n], replace = TRUE, prob = c(0.5 , 0.5))
65
66 # Berechnung neuer Fehlerterme durch Multiplikation der Residuen
67 # des exogenen bzw. endogenen Falls mit den Zufallszahlen aus eta
68 ustar <- udach*eta
69 estar <- edach*eta
70

```

7.2. R-Code zum asymptotischen Test

Da keine Parallelisierung für den asymptotischen Test verwendet wird, werden lediglich die R-Pakete `fda` und `mnormt` benötigt. Zudem genügt die Verwendung nur eines Schwellenwerts `alpha`. Von diesen Anpassungen abgesehen, können die Zeilen 1–278 des Bootstraphahmenprogramms aus Abschnitt 7.1.1 verwendet werden.

Im darauf folgenden Abschnitt wird die Teststatistik aus Lemma 53 umgesetzt, indem zunächst im Vektor `argtn` für jedes `k` je nach Lage bezüglich `alpha` der Wert $\frac{\hat{x}_k \hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} - 1$ oder 0 gespeichert wird, um daraus näherungsweise die Regularisierungsfolge `tn` und den Biasterm zu berechnen. Entsprechend werden die Werte $\left(\frac{1}{\hat{c}_k} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle W_i, \phi_k \rangle Y_i\right)^2 \hat{x}_k$ bzw. 0 in den Vektoren `Vsummand0` und `Vsummand1` gespeichert, wobei ersterer die exogenen Daten, letzterer die endogenen Daten zugrunde legt. Die asymptotische Standardabweichung unter der Nullhypothese, `V0`, wird schließlich durch Summieren der Einträge von `V0` und Addition von σ^2 berechnet (endogener Fall entsprechend als `V1`).

```

279
280 # Berechnung von argtn zur Verwendung für den Biasterm
281 # Berechnung von Vsummand0 zur Verwendung in der asymptotischen Varianz
282 # im exogenen Fall, Vsummand1 entsprechend für den endogenen Fall
283 argtn <- numeric(K)
284 Vsummand0 <- numeric(K)
285 Vsummand1 <- numeric(K)
286
287
288 for (k in 1:K)
289   {
290     if( (ck[k])^2 >= alpha*g[k]*wk[k] && wk[k] >= alpha) {
291       argtn[k] = xk[k]*wk[k]/ck[k]^2 -1
292       Vsummand0[k] = (1/ck[k]*mean(Wkoeff[,k]*Yex))^2 *xk[k]
293       Vsummand1[k] = (1/ck[k]*mean(Wkoeff[,k]*Yend))^2 *xk[k] }
294     else{
295       argtn[k] = 0
296       Vsummand0[k] = 0
297       Vsummand0[k] = 0
298     }
299   }
300
301 # Wurzel aus der asy. Varianz im exogenen bzw. endogenen Fall

```

7. Simulationen

```
302 V0 <- sigma^2 + sum(Vsummand0)
303 V1 <- sigma^2 + sum(Vsummand1)
304
305 # Berechnung des Biasterms, multipliziert mit N/V= bzw. N/V1
306 Bias <- sum(abs(argtn))
307
308
309 # Berechnung der Regularisierungsfolge t_n geclippt bei 1*10^{-9}
310 # zur Vermeidung der Division durch Null
311 if( sqrt(sum((abs(argtn))^2))>0)
312   tn = sqrt(sum((abs(argtn))^2))
313 else{ tn = 0.000000001}
314
```

Die Teststatistik wird dann der rechten Seite von

$$\frac{n T_n - \hat{\mathfrak{R}}_n}{\hat{t}_n \sqrt{\hat{\mathfrak{Y}}_n}} = \frac{n T_n}{\hat{t}_n \sqrt{\hat{\mathfrak{Y}}_n}} - \frac{n \hat{\mathfrak{R}}_n}{\hat{t}_n \sqrt{\hat{\mathfrak{Y}}_n}} = \frac{1}{\hat{t}_n} \frac{\sum_{j=1}^n |\langle \hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}, X_j \rangle|^2}{\sigma^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k |\langle \hat{\beta}_{IV}, \phi_k \rangle|^2} - \frac{1}{\hat{t}_n} \sum_{k \in \mathcal{K}_n} \left| \frac{\hat{x}_k \hat{w}_k}{|\hat{c}_k|^2} - 1 \right|$$

entsprechend umgesetzt.

```
315
316 #Teststatistik mit Werten unter H0
317 Statistik0 <- (sum((sumgew0-sumivgew0)^2))/(V0*tn) - Bias/tn
318
319
320 #Teststatistik mit Werten unter H0
321 Statistik1 <- (sum((sumgew1-sumivgew1)^2))/(V1*tn) - Bias/tn
322
```

Anstelle der Bootstraphmethode wird nun zur Bestimmung der Entscheidungsregel des Tests das q -Quantil der asymptotischen Verteilung der Teststatistik aus Lemma 53 verwendet.

```
323
324 # Berechnung des kritischen Wertes zur Testentscheidung als q-Quantil
325 # der Standardnormalverteilung
326 calpha <- qnorm(1-q, mean=0, sd=1)
327
```

Es folgen die Schritte des Bootstraphmenprogramms ab Zeile 334.

7.3. Simulationsergebnisse

Die Simulationen werden unter der \mathbb{R} -Version R x64 3.6.3 ausgeführt. Die folgenden, in Abbildung 7.1 dargestellten, Slopefunktionen werden dafür verwendet:

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= \sin(4\pi t) + \frac{1}{2} \sin(8\pi t) + \frac{1}{7} \sin(20\pi t) \\ \beta_2(t) &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\cos(2\pi t)) \\ \beta_3(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} r_n(s) k_{n,h}(t-s) ds\end{aligned}\quad (7.2)$$

Dabei ist $r_n(t) = I_{\{n+\frac{1}{4}, n+\frac{3}{4}\}}(t)$ eine periodische Rechtecksfunktion, die durch Faltung mit dem Kern $k_{n,h}(t) = \frac{1}{h} k_n(\frac{t}{h})$, $k_n(t) = \frac{1}{C} \exp\left(-\frac{1}{1-(t-2n)^2}\right) I_{(-1+2n, 2n+1)}(t)$, $C = \int_{\mathbb{R}} k_0(s) ds$, geglättet wird. Für die Simulationen wird die Bandbreite $h = \frac{1}{50}$ gewählt.

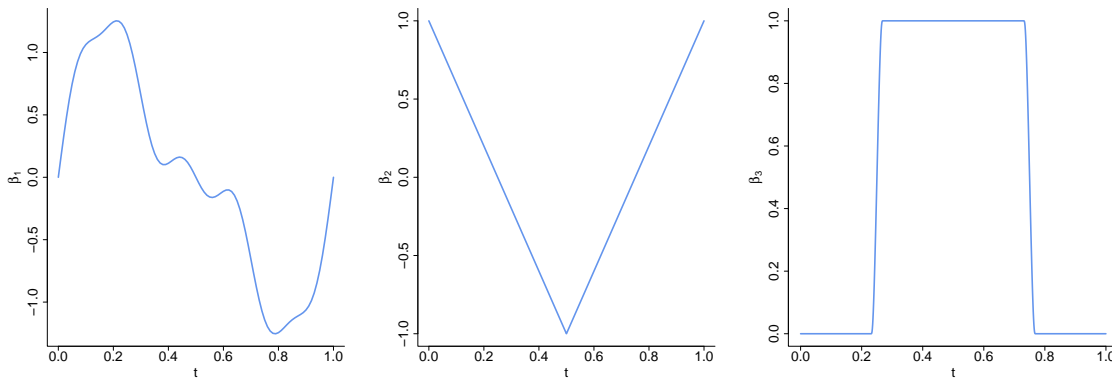


Abbildung 7.1.: Slopefunktionen aus (7.2)

Die Performance des asymptotischen Tests wird zunächst in Abhängigkeit der Stichprobengröße für unterschiedliche Schwellenwerte α untersucht. Dazu werden auf Grundlage von jeweils 1000 Simulationsdurchläufen Power und Fehler erster Art berechnet. Als Slope-Funktion wird β_1 verwendet. Zudem wird $\mathcal{K}_n = K = 9$ gesetzt. Der Grad der Endogenität liegt bei $\rho = 0.4$, die Korrelation zwischen Regressor und Instrument bei $\nu = 0.6$. Alle weiteren Parameter werden wie im in Abschnitt 7.1.1 beschriebenen Eingabebereich gesetzt. Die Ergebnisse veranschaulicht Abbildung 7.2, wobei die durch Dreiecke kenntlich gemachten Messwerte zur Verbesserung der Lesbarkeit linear interpoliert werden.

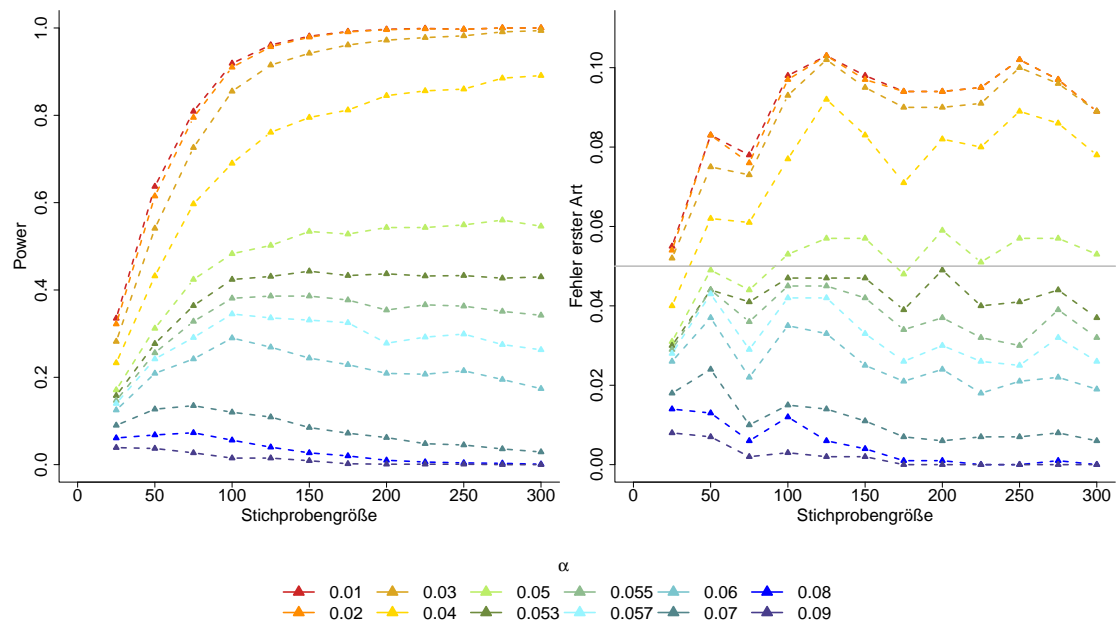


Abbildung 7.2.: Power und Fehler erster Art des asymptotischen Tests in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für unterschiedliche Schwellenwerte α

Von den verwendeten Schwellenwerten liefert $\alpha = 0.053$ das beste Ergebnis in dem Sinne, dass das vorgegebene Niveau von 5% annähernd ausgeschöpft und für keinen Stichprobenumfang überschritten wird. Die zugehörige Power steigt dabei bis zu einem Stichprobenumfang von etwa $N = 100$ merklich an, stagniert aber für größere N bei circa 40%. Die Performance des Tests ist stark von der Wahl des Schwellenwertes abhängig. So erhält man ein vergleichbares Ergebnis lediglich für $\alpha = 0.055$. Bei $\alpha = 0.050$ wird das Niveau im Mittel über die Stichprobenumfänge bereits um etwa 0,0013% überschritten, bei $\alpha = 0.057$ liegt der beobachtete Fehler erster Art im Mittel nur noch bei etwa 3.2%, was mit einer niedrigeren Power einhergeht.

Dieses Simulationsvorgehen wird für die Boostrapvariante des Tests wiederholt, wobei der naive Bootstrap aus Abschnitt 7.1.3 verwendet wird. Die in Grafik 7.3 veranschaulichten Ergebnisse zeigen vergleichbar gute Resultate für α zwischen $1 \cdot 10^{-5}$ und $1 \cdot 10^{-2}$ und somit deutlich mehr Stabilität bezüglich Änderungen des Schwellenwertes als der asymptotische Test. Ein steilerer Anstieg der Power und die erkennbare Annäherung an 100% mit wachsendem Stichprobenumfang sind weitere Vorteile des Bootstraps gegenüber des asymptotischen Tests.

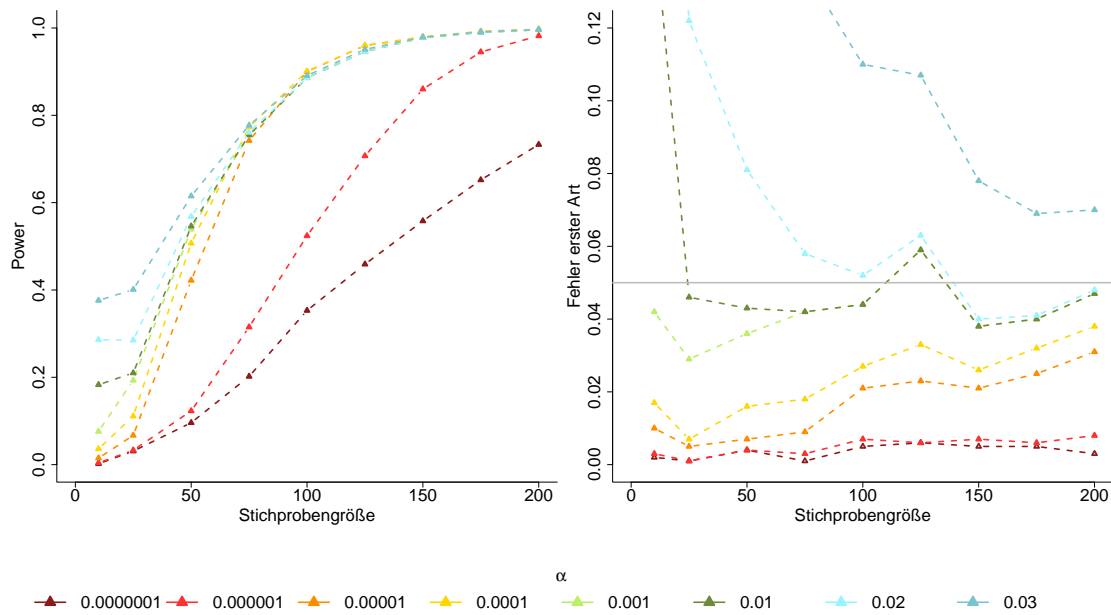


Abbildung 7.3.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für unterschiedliche Schwellenwerte α

Dass die Wahl der Bootstrapmethode dabei keine Rolle spielt, zeigen die Abbildungen 7.4 und 7.5. Hier wird das Verhalten der Bootstrapvarianten aus den Abschnitten 7.1.2 und 7.1.3, die gleichermaßen die Voraussetzungen für Theorem 67 erfüllen, für $\alpha = 0.0001$ verglichen. Die zweite Grafik zeigt dabei das Verhalten für kleine Stichprobenumfänge. Da alle Varianten erwartungsgemäß vergleichbare Ergebnisse liefern, wird für weitere Simulationen lediglich der naive Bootstrap verwendet.

7. Simulationen

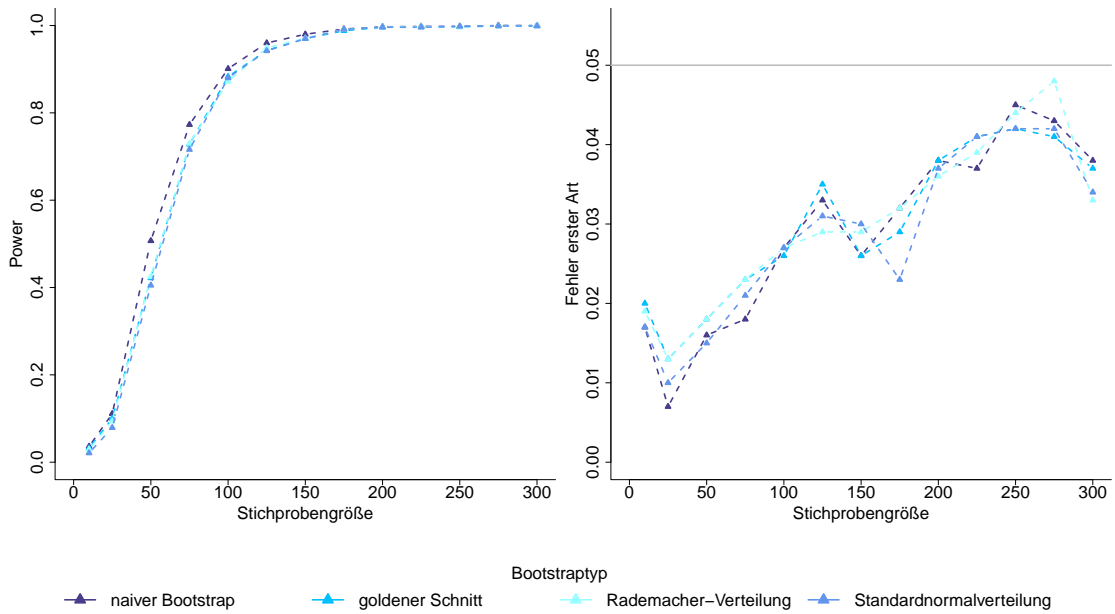


Abbildung 7.4.: Power und Fehler erster Art für verschiedene Bootstrapmethoden

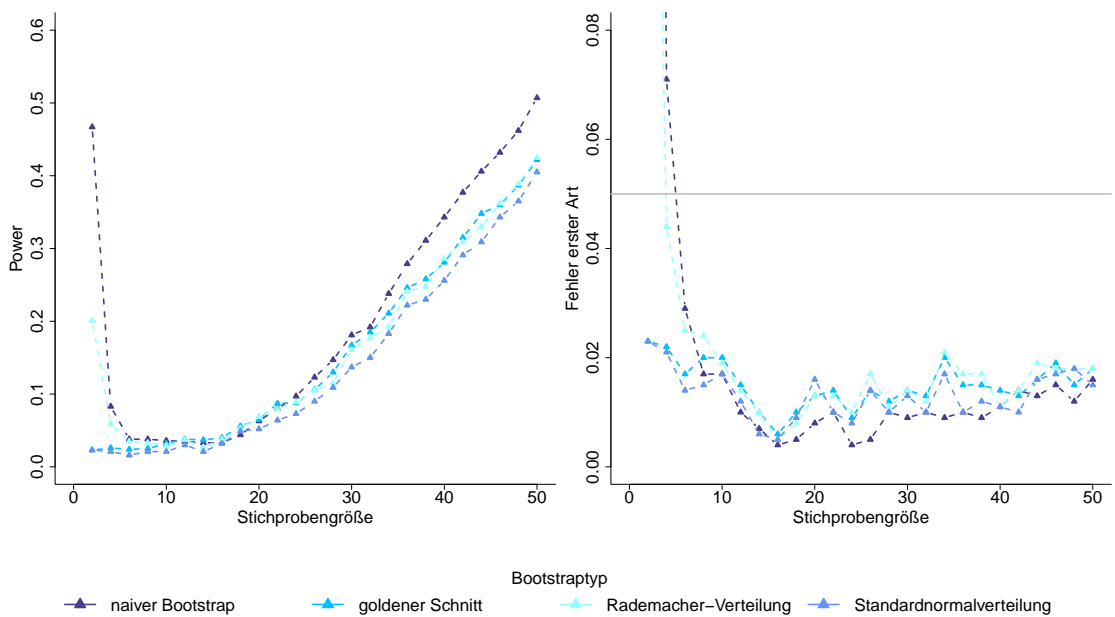


Abbildung 7.5.: Power und Fehler erster Art für verschiedene Bootstrapmethoden für kleine Stichprobenumfänge

Einen ebenfalls geringen Einfluss auf die Performance des Tests hat im vorliegenden Simulationssetup die Anzahl der verwendeten Basisfunktionen. Wählt man α so, dass das Niveau des asymptotischen Tests annähernd ausgeschöpft wird, so überschreiten bei allen zugrunde gelegten Slopefunktionen lediglich die Koeffizienten der ersten Basisfunktion den Schwellenwert und gehen als von Null verschieden in die Teststatistik ein, was Tabelle 7.1 zu entnehmen ist. Man erhält also identische Ergebnisse für $\mathcal{K} = 1$ – und der damit verbundenen, häufig schlechten Approximation der Slopefunktion – und größere Werte für \mathcal{K} . Unterschiede bei der Power des Tests sind nur bei sehr kleinem α erkennbar, was wiederum mit einer deutlichen Überschreitung des Niveaus einhergeht, vergleiche Tabelle 7.2. Eine mögliche Ursache für diesen Effekt ist die Verwendung von Konstanten für \mathcal{K} und α anstelle einer mit dem Stichprobenumfang wachsenden bzw. fallenden Folge.

β_1					β_2					β_3							
N					N					N							
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200			
	1	0.277	0.424	0.443	0.437		1	0.273	0.420	0.440	0.437		1	0.211	0.365	0.422	0.429
\mathcal{K}	3	0.277	0.424	0.443	0.437	\mathcal{K}	3	0.273	0.420	0.440	0.437	\mathcal{K}	3	0.211	0.365	0.422	0.429
	5	0.277	0.424	0.443	0.437		5	0.273	0.420	0.440	0.437		5	0.211	0.365	0.422	0.429
β_1					β_2					β_3							
N					N					N							
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200			
	1	0.044	0.047	0.047	0.049		1	0.047	0.049	0.047	0.050		1	0.027	0.033	0.024	0.025
\mathcal{K}	3	0.044	0.047	0.047	0.049	\mathcal{K}	3	0.047	0.049	0.047	0.050	\mathcal{K}	3	0.027	0.033	0.024	0.025
	5	0.044	0.047	0.047	0.049		5	0.047	0.049	0.047	0.050		5	0.027	0.033	0.024	0.025

Tabelle 7.1.: Asymptotischer Test für verschiedene Anzahlen \mathcal{K} an Basisfunktionen bei $\rho = 0.4$ und $\nu = 0.6$ sowie $\alpha = 0.053$. Obere Reihe: Power, untere Reihe: Fehler erster Art.

β_1					β_2					β_3							
N					N					N							
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200			
	1	0.640	0.919	0.981	0.997		1	0.641	0.915	0.977	0.997		1	0.530	0.818	0.942	0.988
\mathcal{K}	3	0.817	0.984	0.998	1	\mathcal{K}	3	0.810	0.978	0.998	0.999	\mathcal{K}	3	0.695	0.931	0.980	0.998
	5	0.817	0.984	0.998	1		5	0.810	0.978	0.998	0.999		5	0.695	0.931	0.980	0.998
β_1					β_2					β_3							
N					N					N							
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200			
	1	0.083	0.098	0.098	0.094		1	0.086	0.102	0.097	0.096		1	0.056	0.060	0.049	0.054
\mathcal{K}	3	0.253	0.257	0.279	0.281	\mathcal{K}	3	0.260	0.265	0.293	0.287	\mathcal{K}	3	0.154	0.163	0.172	0.169
	5	0.253	0.257	0.279	0.281		5	0.260	0.265	0.293	0.287		5	0.154	0.163	0.172	0.169

Tabelle 7.2.: Asymptotischer Test für verschiedene Anzahlen \mathcal{K} an Basisfunktionen bei $\rho = 0.4$ und $\nu = 0.6$ sowie $\alpha = 0.0001$. Obere Reihe: Power, untere Reihe: Fehler erster Art.

Wählt man für die Bootstrapvariante des Tests einen für $\mathcal{K} = 1$ geeigneten Schwellenwert, so schöpft man bereits für $\mathcal{K} = 3$ das Niveau nicht mehr aus, siehe Tabelle 7.3. Für β_1 und β_2 ist dies für kleine Stichprobenumfänge mit einer geringeren Power verbunden, ab $N = 100$ mit einer größeren Power. Für β_3 sind kaum Unterschiede bei der Power für $\mathcal{K} = 1$ und $\mathcal{K} = 3$ zu beobachten. Bei Verwendung zu weniger Basisfunktionen für ein vorgegebenes α bleiben also Koeffizienten oberhalb des Schwellenwertes unberücksich-

tigt und beeinflussen so die Testperformance negativ. Bei geeigneter Wahl von α kann man also \mathcal{K} konservativ etwas größer wählen. Im Vergleich der Slopefunktionen zeichnet sich ab, dass der Test für schwerer zu approximierende Funktionen, wie die geglättete Rechtecksfunktion β_3 , bei gleicher Wahl von \mathcal{K} und α geringfügig schlechter performt. Tabelle 7.4, die die Resultate des Tests für einen sehr kleinen Schwellenwert enthält, zeigt indes, dass mit wachsendem \mathcal{K} Fehler erster Art und Power des Tests nachlassen. Der niedrige Schwellenwert könnte zu einem Undersmoothing bei der Schätzung von β und damit zu einer Verfälschung der Teststatistik durch Koeffizientendifferenzen beider Schätzer, die nicht durch Endogenität verursacht werden, führen. Es wird deutlich, dass die Wahl von α entscheidend für das Verhalten des Tests ist. Die in den Tabellen 7.3 und 7.4 enthaltenen Ergebnisse lassen zudem erahnen, dass die Wahl eines mit dem Stichprobenumfang in geeigneter Weise wachsendem \mathcal{K}_n anstelle einer Konstante \mathcal{K} für eine wachsende Powerfunktion benötigt wird. Dies plausibilisiert wiederum die Verwendung einer Nullfolge α_n anstelle einer konstanten Schwelle.

β_1					β_2					β_3					
	N					N					N				
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200	
\mathcal{K}	1	0.539	0.886	0.978	0.996	1	0.539	0.886	0.978	0.996	1	0.539	0.886	0.978	0.996
	3	0.507	0.901	0.980	0.997	\mathcal{K} 3	0.568	0.912	0.979	0.997	\mathcal{K} 3	0.560	0.853	0.961	0.990
	5	0.507	0.901	0.980	0.997	5	0.568	0.912	0.979	0.997	5	0.560	0.853	0.961	0.990
β_1					β_2					β_3					
	N					N					N				
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200	
\mathcal{K}	1	0.036	0.036	0.038	0.047	1	0.036	0.044	0.024	0.038	1	0.036	0.044	0.038	0.047
	3	0.016	0.027	0.026	0.038	\mathcal{K} 3	0.013	0.024	0.024	0.040	\mathcal{K} 3	0.020	0.020	0.017	0.021
	5	0.016	0.027	0.026	0.038	5	0.013	0.024	0.024	0.040	5	0.020	0.020	0.017	0.021

Tabelle 7.3.: Bootstraptest für verschiedene Anzahlen \mathcal{K} an Basisfunktionen bei $\rho = 0.4$ und $\nu = 0.6$ sowie $\alpha = 0.0001$. Obere Reihe: Power, untere Reihe: Fehler erster Art.

β_1					β_2					β_3					
	N					N					N				
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200	
\mathcal{K}	1	0.539	0.886	0.978	0.996	1	0.539	0.886	0.978	0.996	1	0.539	0.886	0.978	0.996
	3	0.289	0.861	0.977	0.997	\mathcal{K} 3	0.446	0.888	0.973	0.995	\mathcal{K} 3	0.385	0.635	0.799	0.911
	5	0.171	0.642	0.921	0.986	5	0.324	0.792	0.947	0.983	5	0.191	0.266	0.357	0.466
	7	0.117	0.451	0.730	0.915	7	0.255	0.660	0.873	0.950	7	0.122	0.126	0.130	0.168
	9	0.096	0.353	0.558	0.733	9	0.202	0.545	0.790	0.900	9	0.0.074	0.058	0.052	0.064
β_1					β_2					β_3					
	N					N					N				
	50	100	150	200		50	100	150	200		50	100	150	200	
\mathcal{K}	1	0.036	0.044	0.038	0.047	1	0.025	0.036	0.042	0.044	1	0.036	0.044	0.038	0.047
	3	0.016	0.022	0.009	0.018	\mathcal{K} 3	0.003	0.002	0.004	0.009	\mathcal{K} 3	0.017	0.016	0.007	0.011
	5	0.010	0.012	0.003	0.004	5	0.002	0.001	0.001	0.000	5	0.011	0.006	0.003	0.006
	7	0.007	0.006	0.002	0.003	7	0.001	0.001	0.001	0.000	7	0.005	0.004	0.000	0.001
	9	0.004	0.005	0.005	0.003	9	0.000	0.000	0.002	0.002	9	0.004	0.004	0.000	0.001

Tabelle 7.4.: Bootstraptest für verschiedene Anzahlen \mathcal{K} an Basisfunktionen bei $\rho = 0.4$ und $\nu = 0.6$ sowie $\alpha = 1 * 10^{-7}$. Obere Reihe: Power, untere Reihe: Fehler erster Art.

Auch für verschiedene Slopefunktionen β aus dem Sobolevraum der periodischen Funk-

tionen ist das Verhalten des Tests in den Simulationen erwartungsgemäß vergleichbar, was den Tabellen 7.5 und 7.6 zu entnehmen ist.

		N											
		25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
β_1		0.158	0.277	0.364	0.424	0.431	0.443	0.433	0.437	0.432	0.433	0.427	0.430
β	β_2	0.157	0.273	0.358	0.420	0.429	0.440	0.432	0.437	0.432	0.433	0.427	0.430
	β_3	0.113	0.211	0.295	0.365	0.395	0.422	0.422	0.429	0.426	0.432	0.425	0.430

Tabelle 7.5.: Power des asymptotischen Tests für die Slopefunktionen aus (7.2) bei $\rho = 0,4$ und $\nu = 0,6$ sowie $\alpha = 0,053$.

		N											
		25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
β_1		0.111	0.507	0.773	0.901	0.960	0.980	0.992	0.997	0.998	0.998	1	1
β	β_2	0.164	0.568	0.798	0.912	0.958	0.979	0.992	0.997	0.999	0.998	1	1
	β_3	0.255	0.560	0.733	0.853	0.904	0.961	0.978	0.990	0.993	0.994	0.997	0.998

Tabelle 7.6.: Power des Bootstraptests für die Slopefunktionen aus (7.2) bei $\rho = 0.4$ und $\nu = 0.6$ sowie $\alpha = 0.0001$.

Als nächstes wird das Verhalten des Tests für unterschiedlich stark ausgeprägte Endogenität untersucht. Dazu wird die Power in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für ein Instrument der Stärke $\nu = 0.6$ simuliert, wobei β_1 als Slopeparameter verwendet wird. Zwar steigt die Power mit dem Grad der Endogenität ρ sowohl beim asymptotischen Test als auch bei dessen Bootstrapvariante, jedoch erreicht die Power im Fall des asymptotischen Tests selbst bei stark endogenen Daten und großen Stichprobenumfängen keine Werte über 50%, was in Grafik 7.6 zu sehen ist. Einen steileren Anstieg der Power und die Annäherung an 100% für große Stichprobenumfänge über unterschiedliche Endogenitätsgrade hinweg, wie in Abbildung 7.7 zu erkennen, sind Argumente für die Bootstrapvariante des Tests. Für die Simulationen wurde dabei wieder $\alpha = 0.053$ (asymptotischer Test) und $\alpha = 0.0001$ (Bootstrapvariante) gewählt um eine möglichst gute Ausschöpfung des angestrebten Niveaus zu erreichen, das nicht vom Grad der Endogenität beeinflusst wird.

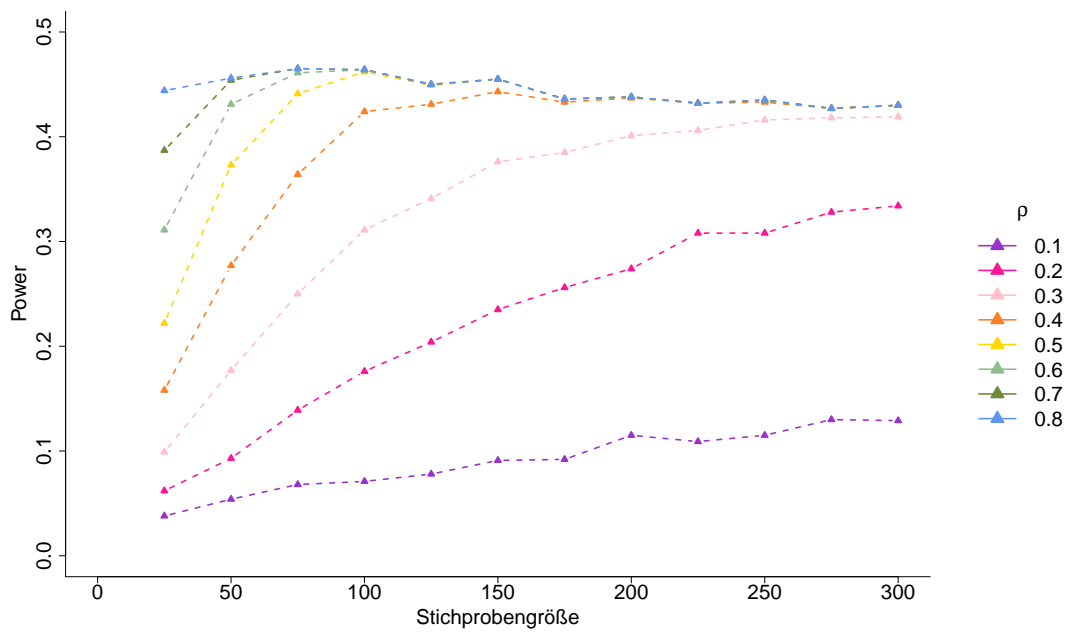


Abbildung 7.6.: Power des asymptotischen Tests in Abhängigkeit des Stichprobenumfangs für unterschiedliche Endogenitätsgrade ρ

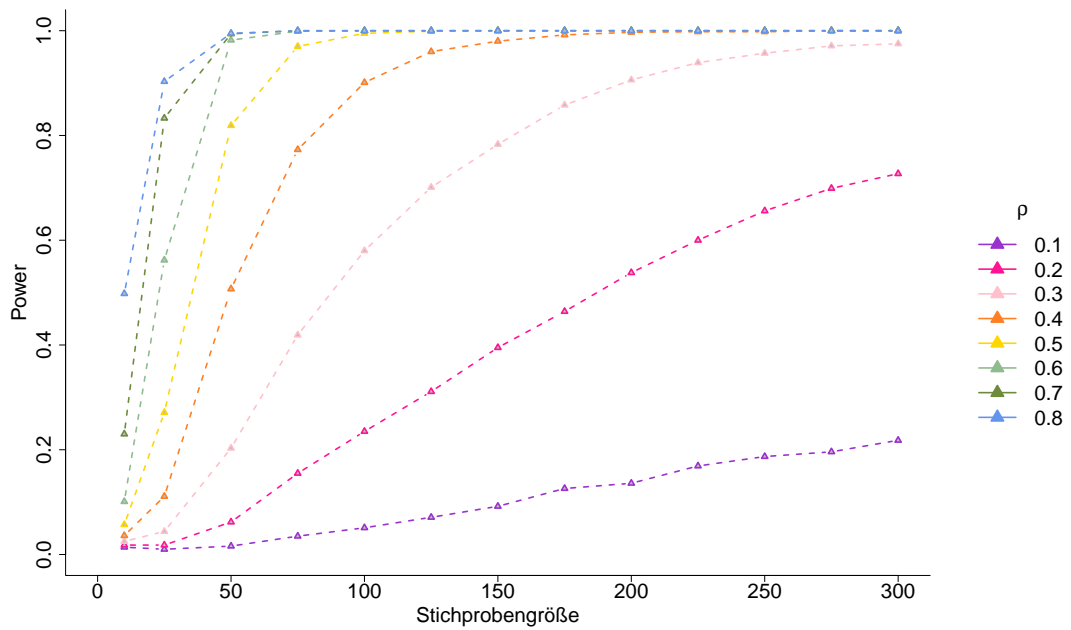


Abbildung 7.7.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests für verschieden stark ausgeprägte Endogenität ρ

Grafik 7.8 zeigt den Verlauf von Power und Fehler erster Art des asymptotischen Tests für verschieden starke Instrumente. Dabei wurden $\rho = 0.4$ und β_1 zugrunde gelegt. Bei Korrelationen bis zu 0.5 zwischen Regressor und Instrument ist die Power des Tests sehr gering. Je stärker das Instrument ist, umso größer ist die Power des Tests. Auffällig ist hier jedoch die Überschreitung des Niveaus mit steigender Güte des Instrumentes, was mit einer Anpassung von α korrigiert werden könnte, aber Performanceeinbußen nach sich zöge.

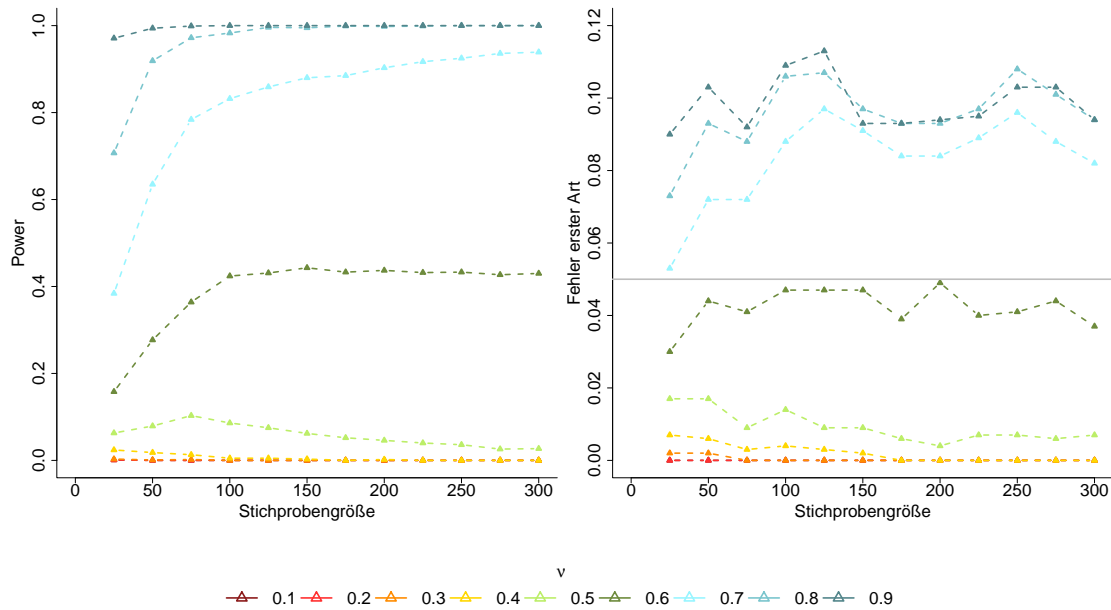


Abbildung 7.8.: Power und Fehler erster Art des asymptotischen Tests in Abhängigkeit der Güte ν des Instrumentes

Auch bei der Bootstrapvariante des Tests ist erkennbar, dass Power und Fehler erster Art mit steigender Korrelation zwischen Regressor und Instrument wachsen, jedoch wird das Niveau weitestgehend eingehalten. Lediglich für $\nu = 0.1$ scheitert der Test, siehe Abbildung 7.9.

Für einen Stichprobenumfang von $n = 75$ sieht man in Grafik 7.10 das Verhalten des Bootstraptests für verschiedene ρ - ν -Kombinationen. Um eine übersichtliche Ansicht zu ermöglichen wurde hier auf die Darstellung der Werte für negative Korrelationen verzichtet. Es wird deutlich, dass die Wahl eines geeigneten Instrumentes sehr großen Einfluss auf das Testergebnis hat. Selbst eine geringe Endogenität wird bei Verwendung eines starken Instrumentes erkannt, während hohe Endogenitätsgrade von 0.8 oder größer häufig unentdeckt bleiben, falls ein schwaches Instrument in die Berechnung der Teststatistik eingeht.

7. Simulationen

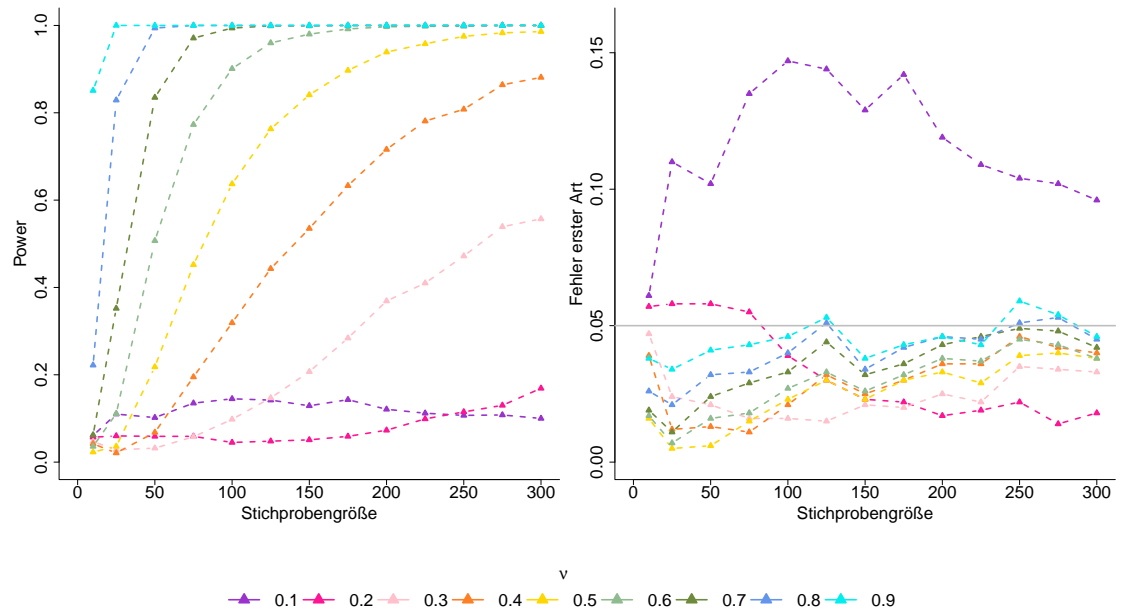


Abbildung 7.9.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests für verschiedene Werte der Güte ν des Instrumentes

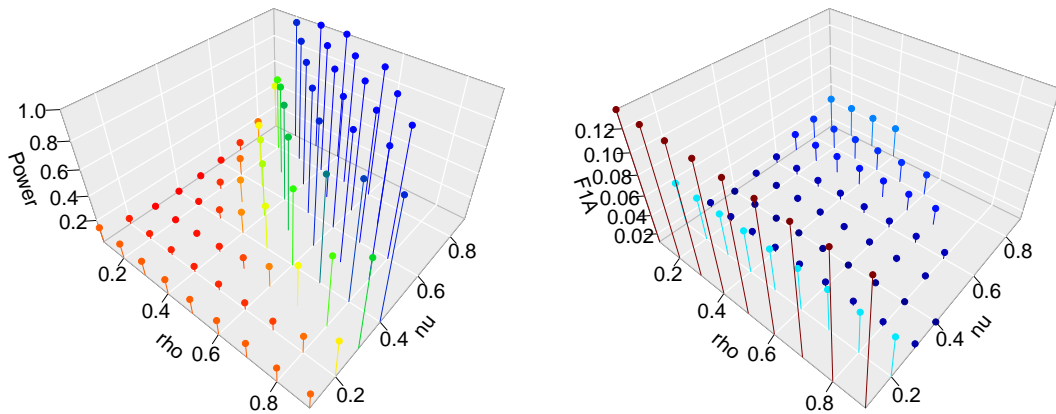


Abbildung 7.10.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests für $N = 75$ in Abhängigkeit der Güte ν des Instrumentes und des Grades an Endogenität ρ .

Eine weitere Frage, die sich für den Anwender stellt, ist, wie viele Beobachtungspunkte der funktionalen Daten man für eine gute Performance des Tests benötigt. Um eine Tendenz erkennen zu können, wird der Test mit Teststatistiken simuliert, die auf Basis unterschiedlich vieler Stützstellen berechnet werden. Dabei wird bereits bei 75 funktionalen Daten, die an lediglich zwei Punkten beobachtet wurden, eine Power von 54.6% erreicht, bei 150 funktionalen Daten eine Power von 94.3%. Eine stärkere Performance des Tests erhält man für $p = 5$, während die Hinzunahme weiterer Stützstellen bis hin zu $p = 50$ keinen interessanten Effekt auf das Verhalten des Tests hat. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.11 visualisiert.

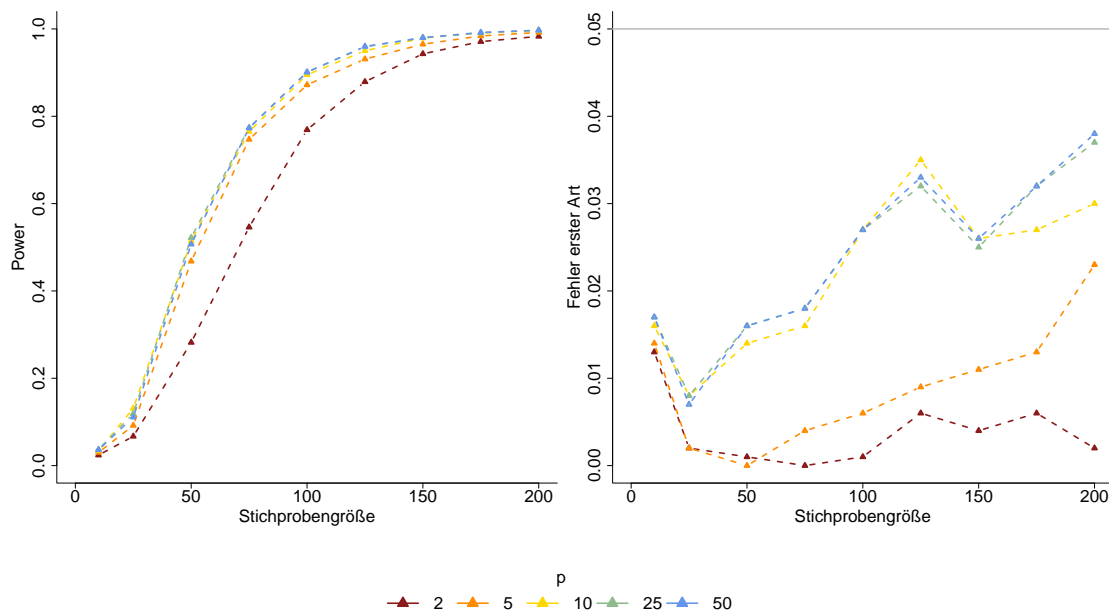


Abbildung 7.11.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests für unterschiedlich viele Beobachtungspunkte p der funktionalen Daten.

Abschließend wird überprüft, ob durch die Verwendung unterschiedlicher Schwellenwerte bei der Berechnung der Teststatistik (α_1) und in der Bootstrapschleife (α_2) eine Leistungssteigerung des Tests erzielt werden kann. Dazu werden Power und Fehler erster Art für β_1 bei Verwendung von $\alpha_1 = 0.0001$ und verschiedenen Werten von α_2 simuliert. Die in Abbildung 7.12 dargestellten Ergebnisse zeigen, dass selbst für geringfügig kleinere Schwellenwerte in der Bootstrapschleife die Power des Tests nachlässt im Vergleich zum Test mit nur einem Schwellenwert. Wählt man α_2 geringfügig größer als α_1 resultiert die in einer starken Überschreitung des vorgegebenen Niveaus, was daran liegt, dass das Quantil für die Testentscheidung unterschätzt wird.

Verwendet man für die Berechnung der Teststatistik $\alpha_1 = 0.053$, was sich für den asymptotischen Test bewährt hat, so erhält man für unterschiedliche α_2 ebenfalls stets schlechtere Ergebnisse als für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.0001$, was Tabelle 7.7 zeigt.

β_1		N							
		25	50	75	100	125	150	175	200
α_2	0.053	0.667	0.788	0.879	0.944	0.978	0.987	0.996	0.998
	0.01	0.135	0.251	0.344	0.408	0.428	0.442	0.432	0.436
	0.001	0.118	0.244	0.344	0.408	0.428	0.442	0.432	0.436
	0.0001	0	0.001	0.011	0.041	0.084	0.155	0.222	0.280
0.0001= α_1		0.111	0.507	0.773	0.901	0.960	0.980	0.992	0.997

β_1		N							
		25	50	75	100	125	150	175	200
α_2	0.053	0.570	0.569	0.561	0.561	0.577	0.565	0.588	0.586
	0.01	0.038	0.032	0.026	0.025	0.027	0.020	0.024	0.024
	0.001	0.021	0.025	0.026	0.025	0.027	0.020	0.024	0.024
	0.0001	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0001= α_1		0.007	0.016	0.018	0.027	0.033	0.026	0.032	0.038

Tabelle 7.7.: Bootstraptests für unterschiedliche Schwellenwerte bei der Berechnung der Teststatistik ($\alpha_1 = 0.053$) und des kritischen Wertes zur Testentscheidung (α_2). Obere Reihe: Power, untere Reihe: Fehler erster Art.

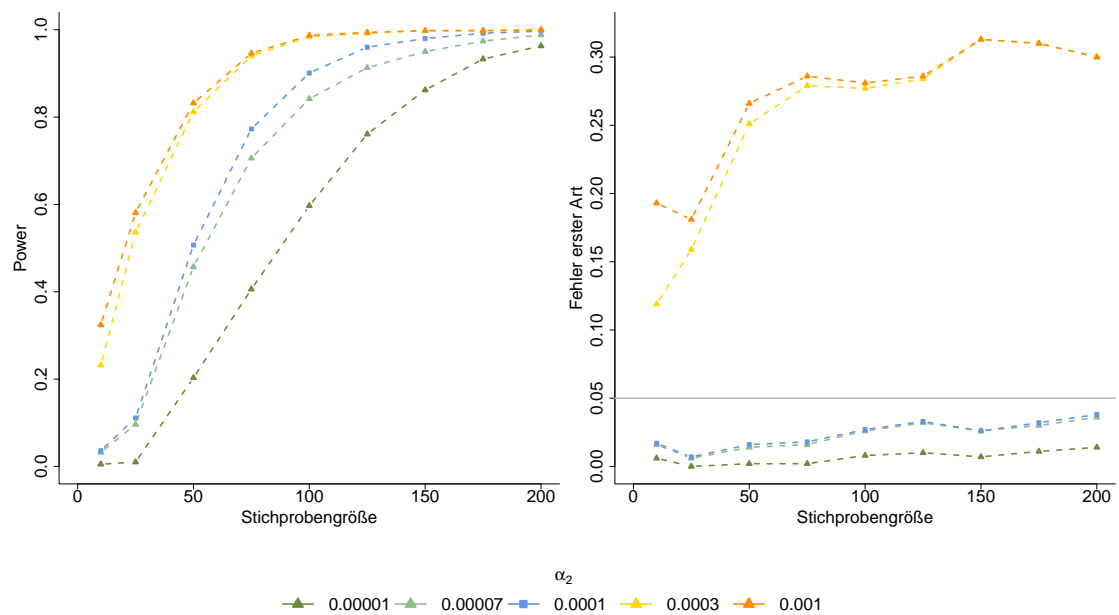


Abbildung 7.12.: Power und Fehler erster Art des Bootstraptests für unterschiedliche Schwellenwerte bei der Berechnung der Teststatistik ($\alpha_1 = 0.0001$) und des kritischen Wertes zur Testentscheidung (α_2).

Insgesamt stehen die Simulationsergebnisse im Einklang mit den theoretischen Resultaten. Um simulationsbasiert weitere Informationen über das Verhalten des Tests zu erlangen, müssten die Ergebnisse durch Streuungsmaße validiert werden. Auch eine Wiederholung der Simulationen für anderweitig generierte Regressoren wäre interessant. Die Testresultate in den unterschiedlichen Szenarien geben erste Anhaltspunkte für den Einfluss der Parameter auf eine günstige Wahl von α . Ein Verfahren zur datenbasierten Wahl von α kann aus den vorliegenden Simulationen jedoch nicht abgeleitet werden und bedarf weiterer Untersuchungen.

8. Schlusswort

8.1. Ergebnisse der Arbeit

Die vorliegende Arbeit schlägt für das funktionale lineare Regressionsmodell einen asymptotischen Test auf Exogenität vor. Dafür wird für einen nach Johannes (2013) unter Exogenität konsistenten Schätzer nachgerechnet, dass dieser im Allgemeinen unter Endogenität nicht konsistent ist. Zusammen mit dem Instrumentvariablenschätzer von Johannes (2016) wird eine Teststatistik konstruiert. Dazu wird zunächst die Regularisierung des Kleinste-Quadrate-Schätzers an die des Instrumentvariablenschätzers angepasst und für den modifizierten Schätzer erneut Konsistenz unter Exogenität bewiesen. Es wird analog zu Cardot et al. (2006) und Ruymgaart et al. (2000) gezeigt, dass die L_2 -Norm der Differenz beider Schätzer stets eine entartete Verteilung besitzt und somit als Teststatistik ausscheidet. Basierend auf der Idee von Müller und Stadtmüller (2005) wird das Skalarprodukt aus der Schätzdifferenz und deren Bild unter einer empirischen Version des Kovarianzoperators des Regressors als Teststatistik vorgeschlagen. Um zu erkennen, wie das asymptotische Verhalten dieser Teststatistik unter der Nullhypothese aussieht, wird für den Vorhersagefehler des Instrumentvariablenschätzers unter Exogenität die asymptotische Verteilung hergeleitet, wobei der Beweis dem Ansatz von Cardot et al. (2006) folgt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse wird schließlich verifiziert, dass die Teststatistik asymptotisch normalverteilt ist, wobei Bias und asymptotische Varianz explizit berechnet werden. Wegen der Abhängigkeit dieser Kenngrößen vom unbekanntem Slopeparameter, werden diese auf Grundlage des Instrumentvariablenschätzers geschätzt, um damit eine empirische Version der Teststatistik zu generieren, die dieselbe asymptotische Verteilung besitzt wie die ursprüngliche Teststatistik. Die Anwendbarkeit des Tests in der Praxis wird durch ein Bootstrapverfahren verbessert, das auf der Idee des Residuenbootstraps basiert. Um Konsistenz dafür zu zeigen, ist es jedoch erforderlich, zusätzlich zu den Residuen einen weiteren, von der Slopefunktion abhängigen Term zu schätzen und zu bootstrappen. Abschließend prüfen Simulationen die Funktionalität beider Tests für endliche Stichprobenumfänge, wobei jeweils die Power und der Fehler erster Art für unterschiedliche Szenarien näherungsweise bestimmt werden. Die Ergebnisse der Simulationsstudie harmonisieren mit den theoretischen Resultaten und sind sinnvoll interpretierbar.

8.2. Einordnung in den wissenschaftlichen Kontext

Mit Hilfe eines zentralen Grenzwertsatzes für Martingaldifferenzschemata zeigen Cardot et al. (2006) asymptotische Normalität für den Vorhersagefehler im funktionalen

linearen Regressionsmodell, wobei ein auf funktionalen Hauptkomponenten basierender Schätzer verwendet wird und das Resultat für unterschiedliche Regularisierungsmethoden gültig ist. Die Beweisideen sowie das grundsätzliche Verständnis für das funktionale lineare Regressionsmodell, das sich beim Lesen dieser Arbeit ergibt, wie beispielsweise die Problematik der entarteten asymptotischen Verteilung der Norm von $\hat{\beta} - \beta$, haben die vorliegende Arbeit wesentlich geprägt.

Die Gestaltung der Teststatistik in (5.4) orientiert sich an den Resultaten von Müller und Stadtmüller (2005), die für das generalisierte funktionale lineare Regressionsmodell eine Möglichkeit aufzeigen, mit einer geeigneten Metrik den Abstand $\hat{\beta} - \beta$ in einer Art L_2 -Sinn zu berechnen, sodass ein zentraler Grenzwertsatz für Martingale asymptotische Normalität dafür liefert. $\hat{\beta}$ ist dabei ein trunkierter, auf der Karhunen-Loève-Entwicklung basierender Schätzer, während (3.5) und (3.10) durch die Annahme der schwachen Stationarität von bekannten Eigenfunktionen des (Cross-)Kovarianzoperators ausgehen. Zur Trunkierung verwenden Müller und Stadtmüller (2005) eine Folge $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die $p_n n^{-1/4} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ erfüllen muss, was mit Voraussetzung (V10) einhergeht. Bei der Wahl von $p_n = p$ in der Praxis machen Müller und Stadtmüller (2005) gute Erfahrungen mit der Verwendung des AIC oder BIC, Beweise für die Validität dieser Verfahren bleiben jedoch offen.

Florens und Van Bellegem (2014) beweisen im endogenen funktionalen linearen Modell bereits asymptotische Normalität für einen Term der Gestalt $\langle \hat{\beta} - \beta, g \rangle$, wobei g eine deterministische, hilbertraumwertige Funktion und $\hat{\beta}$ ein Tikhonov-regularisierter, auf Instrumentvariablen basierender Kleinste-Quadrate-Schätzer für β ist. Für die asymptotische Varianz werden jedoch nur obere und untere Schranken angegeben, was zur Konstruktion eines Tests wie in Abschnitt 5.2 nicht ausreicht. Anders als in der vorliegenden Arbeit wird die Stärke des Instrumentes neben der Regularität des unbekanntem Parameters bezüglich der Eigenwerte des Crosskovarianzoperators simultan auch durch das Signal-Rausch-Verhältnis ermittelt. Für die Wahl des Regularisierungsparameters präsentieren Florens und Van Bellegem (2014) kein datenbasiertes Verfahren.

Im exogenen funktionalen linearen Regressionsmodell zeigen Ruymgaart et al. (2000) schwache Konvergenz für $\sqrt{n}(\hat{\beta}_\alpha - \beta_\alpha)$ gegen einen Gaußprozess, wobei $\hat{\beta}_\alpha$ der Tikhonov-regularisierte Schätzer von Hall und Horowitz (2007) ist, für den letztere Optimalität bezüglich der Konvergenzraten zeigen. Die schwache Konvergenz folgt durch Anwendung einer Deltamethode für Funktionen von Operatoren, wobei die asymptotische Kovarianzstruktur durch Anwendung der Karhunen-Loève-Entwicklung konkretisiert, jedoch nur für den Spezialfall eines gaußschen Regressors exakt berechnet wird. Insbesondere wird stets ein konstanter Regularisierungsparameter α vorausgesetzt, was zur Konstruktion einer Teststatistik zum Testen auf Exogenität nicht genutzt werden kann, da die Konsistenz der Schätzer unter der Nullhypothese nicht mehr gegeben sein muss. Aus der schwachen Konvergenz von $\sqrt{n}(\hat{\beta}_\alpha - \beta_\alpha)$ wird – ebenfalls für fixes α – Konvergenz von $n\|\hat{\beta}_\alpha\|^2$ gegen eine χ^2 -Verteilung gefolgert, ohne jedoch die relevanten Parameter vollständig zu spezifizieren. Die Theoreme 48 und 67 hingegen geben die asymptotische Verteilung für $\alpha_n \rightarrow 0$ vollständig an und kommen dabei, abgesehen von Momentenbedingungen, ohne Annahmen an die Verteilung des Regressors aus. Unter Verwendung einer Nullfolge α_n

beweisen Ruymgaart et al. (2000) lediglich, dass keine Folge $a_n \rightarrow \infty$ existiert, sodass $a_n \hat{\beta}_{\alpha_n}$ gegen ein nichtentartetes Zufallselement konvergiert.

Ruymgaart et al. (2013) spezialisieren die Resultate von Ruymgaart et al. (2000) für den Fall, dass die Eigenfunktionen des Kovarianzoperators bekannt sind, was zum Beispiel für schwach stationäre Regressoren, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden, erfüllt ist. Es wird jedoch weiter mit einem konstanten Regularisierungsparameter gearbeitet und die asymptotische Verteilung wiederum lediglich für Gaußsche Regressoren explizit angegeben.

Auch Hilgert et al. (2013) fokussieren sich auf eine konstante Anzahl zu verwendender funktionaler Hauptkomponenten für ihre Teststatistik, die für Modelltests im funktionalen linearen Regressionsmodell eingesetzt wird.

Ebenfalls für das Setup von Hall und Horowitz (2007) beweisen Patilea et al. (2012) im exogenen funktionalen linearen Regressionsmodell asymptotische Normalität einer Teststatistik für die Hypothese $E[U | X] = 0$ f. s., wobei alle relevanten Terme explizit berechnet werden. Die projektionsbasierte Teststatistik verwendet dabei einen generischen Schätzer für die Slopefunktion, der die Bedingung $\|\hat{\beta} - \beta\| = \mathcal{O}_P(n^{-\rho})$, $\frac{3}{8} \leq \rho \leq \frac{1}{2}$, erfüllt, was jedoch im Kontext der vorliegenden Arbeit, die keine Annahmen an Konvergenzraten der Fourierkoeffizienten und Eigenwerte des (Cross-)Kovarianzoperators trifft, im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Entsprechende Annahmen aus Hall und Horowitz (2007) (polynomieller Abfall), die von Patilea et al. (2012) leicht modifiziert werden, um ein passendes Verhalten der Bandbreite des Kerns sicher zu stellen, sorgen dafür, dass diese Voraussetzung erfüllt wird.

González-Manteiga und Martínez-Calvo (2010) berechnen für das funktionale lineare Regressionsmodell punktweise Konfidenzintervalle mit Hilfe eines Residuenbootstraps. Das dabei verwendete Vorgehen für den naiven und den wild Bootstrap bilden die Grundidee für die in Bemerkung 56 beschriebenen Bootstrapverfahren. Die Konsistenz des Bootstraps folgt mit Theorem 3.2. von Ferraty et al. (2010). Dieses wiederum folgt aus den Resultaten von Ferraty et al. (2007), die im nichtparametrischen funktionalen Regressionsmodell asymptotische Normalität für den Nadaraya-Watson-Schätzer beweisen. Die explizite Berechnung von asymptotischer Varianz und Bias, die eine Nutzung der Resultate in der Praxis ermöglichen, waren Inspiration und Motivation für die ausführlichen Berechnungen aller relevanten Terme in der vorliegenden Arbeit.

8.3. Ausblick

Eine Abstraktion der Argumentation auf Operatorebene am Vorbild der eleganten Beweisführung von Florens und Van Bellegem (2014) wäre eine Aufwertung der vorliegenden Arbeit. Im Zuge dessen könnte versucht werden, die Annahme der schwachen Stationarität abzuschwächen. Auch die Eruierung eines datenbasierten Verfahrens zur Wahl des Regularisierungsparameters ist eine ausstehende Aufgabe, die insbesondere wegen ihrer Praxisrelevanz Aufmerksamkeit verdient.

Im Gespräch mit Wenceslao González-Manteiga² entstand die Idee, eine auf zufälligen Projektionen basierende Teststatistik für das in der vorliegenden Arbeit betrachtete Testproblem zu verwenden. Dazu könnte man prüfen, ob die Teststatistik von García-Portugués et al. (2014), versehen mit dem Instrumentvariablenschätzer aus (3.5), für einen Test auf Exogenität geeignet ist. Sie besteht aus der Kolmogorov-Smirnov- beziehungsweise Cramér-von Mises-Norm des RMPP und wird für Goodness-of-Fit-Tests im funktionalen linearen Regressionsmodell vorgeschlagen. Einen vergleichbaren Ansatz findet man bei Cuesta-Albertos et al. (2019), die auch schwache Konvergenz ihrer Teststatistik beweisen, sowie bei García-Portugués et al. (2020), die das funktionale lineare Regressionsmodell mit funktionaler Responsevariable betrachten. Die Verwendung zufälliger Projektionen könnte zu einer rechnerisch effizienteren Alternative zu (5.2) führen und eine schöne Lösung des Dimensionalitätsproblems sein.

²Universidade de Santiago de Compostela

A. Technische Hilfsresultate

A.1. Allgemeine Resultate

A.1.1. Lemma: Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{4m}$ und U erfülle (V9) sowie $\mathbb{E}|U|^{4m} \leq \eta < \infty$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C_m$ sodass

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{x}_k - x_k}{x_k} \right|^{2m} \leq \frac{C\eta}{n^m}, \quad \mathbb{E} \left| \frac{\hat{w}_k - w_k}{w_k} \right|^{2m} \leq \frac{C\eta}{n^m}, \quad (\text{A.1})$$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\lambda_k^m}{x_k^m} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k - c_k}{c_k} \right|^{2m} \right\} \leq \frac{C\eta}{n^m}. \quad (\text{A.2})$$

BEWEIS: Siehe Beweis von Lemma A.1 aus Johannes (2016). \square

A.1.2. Lemma: Es seien $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und $\mathcal{I}_n := \{k \in \mathbb{Z} \mid \lambda_k \geq 4\tau\alpha\gamma_k^\nu\}$. Dann gilt für eine Konstante $C > 0$ die Abschätzung

$$\sup_{k \in \mathcal{I}_n} P(\hat{\lambda}_k < \alpha\gamma_k^\nu) \leq \frac{C\eta}{n\alpha} \mathbb{E}\|X\|^2 \left(1 + \frac{\mathbb{E}\|W\|^2}{\alpha n} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\sup_{k \in \mathcal{I}_n} P(\hat{w}_k < \alpha) \leq \frac{C\eta}{n}. \quad (\text{A.4})$$

Für $\mathcal{J}_n := \{k \in \mathbb{Z} \mid 8\lambda_k \leq \alpha\gamma_k^\nu\}$ gilt zudem

$$\sup_{k \in \mathcal{J}_n} \frac{\lambda_k^2}{x_k^2} P(\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu) \leq \frac{C\eta}{n^2} \left(1 + \frac{\mathbb{E}\|W\|^2}{\alpha n} \right). \quad (\text{A.5})$$

BEWEIS: Siehe (A.14) und (A.15) sowie Beweis von (A.14) in Lemma A.2 von Johannes (2016). \square

A.1.3. Lemma: Es gelte (V3) und $m \in \mathbb{N}$ sei fest. Dann konvergieren die Reihen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{2m}$ und $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{2m} w_k$. Falls zusätzlich $X \in \mathcal{G}_\eta^{2m}$ und $\beta \in L_2([0, 1])$, so gilt

$$\mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X \rangle \right|^{2m} < \infty.$$

BEWEIS: Falls X die Voraussetzung (V3) erfüllt, so gilt

$$\infty > (\mathbb{E}\|X\|^2)^2 = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|\langle X, \phi_k \rangle|^2 \right)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 + \sum_{\substack{k, m \in \mathbb{Z}, \\ k \neq m}} x_k x_m.$$

Falls auch W (V3) erfüllt, so folgt direkt die zweite Konvergenz. Mit (2.17) fallen in der dritten Summe alle gemischten Terme mit ungeradem Exponenten weg. Es bleibt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \beta, \phi_k \rangle \langle \phi_k, X \rangle \right|^4 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 \mathbb{E} |\langle \phi_k, X \rangle|^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathbb{Z}, \\ k \neq m}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 \mathbb{E} |\langle \phi_k, X \rangle|^2 |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 \mathbb{E} |\langle \phi_m, X \rangle|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^2 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 \mathbb{E} \left| \frac{\langle \phi_k, X \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathbb{Z}, \\ k \neq m}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m. \end{aligned}$$

Für $X \in \mathcal{G}_\eta^4$ gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{\langle \phi_k, X \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^4 \leq \eta.$$

Da $\Gamma_X^{1/2} \beta \in L_2([0, 1])$ für $\beta \in L_2([0, 1])$, gilt $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k = \|\Gamma_X^{1/2} \beta\|^2 < \infty$. Da $(x_k)_{|k|}$, $(w_k)_{|k|}$ und $(|\langle \beta, \phi_m \rangle|^2)_{|k|}$ Nullfolgen sind, konvergieren die Reihen auch für Exponenten $2m$, $m \in \mathbb{N}$. \square

A.1.4. Lemma: *Es gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung $\hat{\lambda}_k \leq \hat{x}_k$.*

BEWEIS: Sei $k \in \mathbb{Z}$ beliebig. Per Definition ist

$$\hat{c}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \phi_k, X_i \rangle \langle W_i, \phi_k \rangle,$$

was sich mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung abschätzen lässt zu

$$\hat{c}_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle \phi_k, X_i \rangle|^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\langle W_i, \phi_k \rangle|^2} = \sqrt{\hat{x}_k} \sqrt{\hat{w}_k}.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\hat{\lambda}_k = \frac{|\hat{c}_k|^2}{\hat{w}_k} \leq \hat{x}_k.$$

\square

A.2. Hilfsresultate zu Kapitel 4

A.2.1. Lemma: Es sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{8p}$ und U erfülle (V9) sowie $\mathbb{E}|U|^{8p} \leq \eta < \infty$. Dann gilt für festes $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ und Konstanten $C_{p,\eta,\tau} =: C$ die folgende Abschätzung:

$$\mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k - \lambda_k \right|^p \leq \frac{C_{p,\eta} x_k^{p/2} \lambda_k^{p/2}}{n^{p/2}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right). \quad (\text{A.6})$$

Falls außerdem $\hat{w}_k \geq \alpha$ gilt zudem

$$\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^p \leq \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{|c_k|^p}{w_k^p} + \frac{C}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \right) \left(1 + \frac{C}{n^{p/2}} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{3p/2}} \right). \quad (\text{A.7})$$

BEWEIS: Von

$$\frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} = \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \left(\frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right)^2 + \frac{\hat{c}_k}{w_k} \cdot \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} + \frac{1}{w_k} (\hat{c}_k - c_k) \quad (\text{A.8})$$

lässt sich unter Anwendung der Dreiecksungleichung und der Ungleichung

$$(x + y)^p \leq 2^{p-1} (x^p + y^p) \quad (\text{A.9})$$

für $p \geq 1$ und $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ der Erwartungswert abschätzen zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^p &\leq 2^{2(p-1)} \left(\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \left(\frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right)^2 \right|^p + \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{w_k} \cdot \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^p + \frac{1}{w_k^p} \mathbb{E} |(\hat{c}_k - c_k)|^p \right) \\ &=: 2^{2(p-1)} (S_{n,1} + S_{n,2} + S_{n,3}). \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Hölderungleichung entstehen Terme, die sich mit den Ungleichungen aus Lemma A.1.1 abschätzen lassen, sodass man für die Summanden die folgenden Abschätzungen erhält:

$$\begin{aligned} S_{n,1} &\leq \left(\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \right|^{2p} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{4p} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{C\eta}}{n^p} \left(\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \right|^{2p} \right)^{1/2}, \\ S_{n,2} &\leq \frac{(\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{2p})^{1/2}}{w_k^p} \cdot \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{2p} \right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{C\eta}}{n^{p/2}} \cdot \frac{(\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{2p})^{1/2}}{w_k^p}, \\ S_{n,3} &\leq \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_k|^p}{w_k^{p/2} x_k^{p/2}} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k - c_k}{c_k} \right|^p \leq \frac{C\eta}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}}. \end{aligned}$$

Mit ähnlichem Vorgehen lassen sich die Erwartungswerte auf den rechten Seiten weiter abschätzen:

$$\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{2p} \leq 2^{2p-1} (\mathbb{E} |\hat{c}_k - c_k|^{2p} + |c_k|^{2p}), \quad (\text{A.10})$$

mit

$$\mathbb{E}|\hat{c}_k - c_k|^{2p} \leq x_k^p w_k^p \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_k|^{2p}}{w_k^p x_k^p} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k - c_k}{c_k} \right|^{2p} \leq x_k^p w_k^p \frac{C\eta}{n^p}. \quad (\text{A.11})$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \right|^{2p} &= \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{w_k} + \frac{\hat{c}_k}{w_k} \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} + \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \left(\frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right)^2 \right|^{2p} \\ &\leq 2^{4p-2} \left(\mathbb{E} \frac{|\hat{c}_k|^{2p}}{w_k^{2p}} + \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{w_k} \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{2p} + \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \left(\frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right)^2 \right|^{2p} \right) \\ &\leq 2^{4p-2} \left[\frac{C|c_k|^{2p} + x_k^p w_k^p \frac{C\eta}{n^p}}{w_k^{2p}} + \frac{1}{w_k^{2p}} \left(\mathbb{E}|\hat{c}_k|^{4p} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{4p} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \right|^{4p} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{8p} \right)^{1/2} \right] \\ &\leq C \left(\frac{|c_k|^2}{w_k^2} \right)^p + \frac{C}{n^p} \left(\frac{x_k^p}{w_k^p} + \frac{|c_k|^{2p}}{w_k^{2p}} \right) + \frac{C}{n^{2p}} x_k^p w_k^p + \sqrt{\frac{C}{n^{4p}} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} \right|^{4p}} \\ &\leq C \frac{|c_k|^{2p}}{w_k^{2p}} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right) \right) + \frac{C}{n^p} \frac{x_k^p}{w_k^p} + \frac{C}{n^{2p}} x_k^p w_k^p \\ &\quad + \frac{C}{(n\alpha)^{2p}} |c_k|^{2p} + \frac{C}{n^{3p\alpha^{2p}}} x_k^p w_k^p. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Dabei folgt die letzte Zeile mit der Voraussetzung $\hat{w}_k \geq \alpha$. Damit lassen sich $S_{n,1}$ und $S_{n,2}$ weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned} S_{n,1} &\leq \frac{C}{n^p} \left\{ \frac{|c_k|^p}{w_k^p} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{p/2}} \right) \right) + \frac{C}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} + \frac{C|c_k|^p}{n^{p/2}(n\alpha^2)^{p/2}} + \frac{x_k^{p/2} w_k^{p/2}}{n^p} + \frac{x_k^{p/2} w_k^{p/2}}{n^p (n\alpha^2)^{p/2}} \right\} \\ &\leq \frac{C}{n^p} \left\{ \frac{|c_k|^p}{w_k^p} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{p/2}} \right) \right) + \frac{C}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} + o \left(\frac{1}{n^{p/2}} \right) \right\}, \\ S_{n,2} &\leq \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{|c_k|^p}{w_k^p} + \frac{C}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies

$$\mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k}{\hat{w}_k} - \frac{c_k}{w_k} \right|^p = \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{|c_k|^p}{w_k^p} + \frac{C}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \right) \left(1 + \frac{C}{n^{p/2}} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{3p/2}} \right),$$

was Behauptung (A.7) ist.

Mit ähnlicher Argumentation wie im Beweis von (A.7) sowie der Abschätzung

$$|\hat{c}_k|^2 - |c_k|^2 = (|\hat{c}_k| + |c_k|)(|\hat{c}_k| - |c_k|) \leq (|\hat{c}_k| + |c_k|)(\hat{c}_k - c_k),$$

die sich aus der dritten binomischen Formel und der Dreiecksungleichung in \mathbb{C} ergibt, schätzt man zunächst ab, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k - \lambda_k \right|^p &\leq 2^{p-1} \left\{ \mathbb{E} \left| \hat{c}_k \right|^2 \left(\frac{1}{\hat{w}_k} - \frac{1}{w_k} \right) \right|^p + \frac{1}{w_k^p} \mathbb{E} \left| |\hat{c}_k|^2 - |c_k|^2 \right|^p \right\} \\ &\leq 2^{2(p-1)} \left\{ \mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^p + \frac{|c_k|^p}{w_k^p} \mathbb{E} |\hat{c}_k - c_k|^p + \frac{1}{w_k^p} \mathbb{E} \left| |\hat{c}_k|^2 (\hat{c}_k - c_k) \right|^p \right\} \\ &=: 2^{2(p-1)} \{T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}\}. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie den Ungleichungen (A.10), (A.11) und (A.2) für $m = p$ erhält man $T_{n,3}$

$$\begin{aligned} T_{n,3} &\leq \frac{1}{w_k^p} \sqrt{\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{4p}} \sqrt{\mathbb{E} |\hat{c}_k - c_k|^{2p}} \\ &\leq \frac{1}{w_k^p} \left(|c_k|^{4p} + x_k^{2p} w_k^{2p} \frac{C\eta}{n^{2p}} \right)^{1/2} \left(x_k^p w_k^p \frac{C\eta}{n^p} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{C\eta}}{n^{p/2}} \frac{x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \left(|c_k|^{2p} + x_k^p w_k^p \frac{\sqrt{C\eta}}{n^p} \right) \\ &= \frac{C}{n^{p/2}} \left(\lambda_k^p x_k^{p/2} w_k^{p/2} + \frac{C x_k^{3p/2} w_k^{p/2}}{n^p} \right). \end{aligned}$$

Für den zweiten Term ergibt sich mit (A.2) für $m = \frac{p}{2}$

$$T_{n,2} \leq \frac{|c_k|^p x_k^{p/2}}{w_k^{p/2}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|c_k|^p}{w_k^{p/2} x_k^{p/2}} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{c}_k - c_k}{c_k} \right|^p \leq \frac{C\eta}{n^{p/2}} \lambda_k^{p/2} x_k^{p/2}.$$

Mit einer Zerlegung wie in (A.12), anschließender Abschätzung mit (A.9), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und (A.1) und unter Ausnutzung von $\hat{w}_k \geq \alpha$ für alle $\hat{\lambda}_k > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k \right|^p &\leq 2^{2(p-1)} \left\{ \frac{\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{2p}}{w_k^p} + \frac{1}{w_k^p} \mathbb{E} \left| \hat{c}_k \right|^2 \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^p + \mathbb{E} \left| \frac{|\hat{c}_k|^2}{\hat{w}_k} \left(\frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right)^2 \right|^p \right\} \\ &\leq C_p \left\{ \frac{|c_k|^{2p}}{w_k^p} + \frac{C\eta x_k^p}{n^p} + \frac{1}{w_k^p} \left(\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{4p} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{2p} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbb{E} \left| \frac{|\hat{c}_k|^2}{\hat{w}_k} \right|^{2p} \mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{4p} \right)^{1/2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_p \left\{ \lambda_k^p + \frac{C\eta x_k^p}{n^p} + \frac{1}{w_k^p} \frac{\sqrt{C\eta}}{n^{p/2}} \left(|c_k|^{4p} + \frac{C\eta x_k^{2p} w_k^{2p}}{n^{2p}} \right)^{1/2} + \frac{\sqrt{C\eta}}{n^p \alpha^p} \sqrt{\mathbb{E} |\hat{c}_k|^{4p}} \right\} \\
&\leq C_{p,\eta} \left\{ \lambda_k^p \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{p/2}} \right) \right) + \frac{|c_k|^{2p}}{n^{p/2} (n\alpha^2)^{p/2}} + \frac{x_k^p}{n^p} + \frac{x_k^p w_k^p}{n^{3p/2} (n\alpha^2)^{p/2}} \right\} \\
&= C_{p,\eta} \left\{ \lambda_k^p \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{p/2}} \right) \right) + \frac{|c_k|^{2p}}{n^{p/2} (n\alpha^2)^{p/2}} + \frac{1}{n^p} x_k^p \right\} + o \left(\frac{1}{n^{3p/2}} \right). \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen (A.14) sowie (A.1) für $m = p$ folgt für $T_{n,3}$ nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$T_{n,1} \leq \sqrt{\mathbb{E} |\hat{\lambda}_k|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{w_k - \hat{w}_k}{w_k} \right|^{2p}} \leq \frac{C_{p,\eta}}{n^{p/2}} \lambda_k^p + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right).$$

Zusammengefasst gilt also

$$\mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k - \lambda_k \right|^p \leq \frac{C_{p,\eta} \lambda_k^{p/2}}{n^{p/2}} \left(\lambda_k^{p/2} + x_k^{p/2} + \lambda_k^{p/2} x_k^{p/2} w_k^{p/2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right),$$

was sich mit (2.21) und wegen $\sup_{k \in \mathbb{Z}} x_k, \sup_{k \in \mathbb{Z}} w_k < \infty$ (folgt aus $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^2$) weiter abschätzen lässt zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left| \hat{\lambda}_k - \lambda_k \right|^p &\leq \frac{C_{p,\eta} \lambda_k^{p/2}}{n^{p/2}} \left(x_k^{p/2} + x_k^p w_k^{p/2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right) \\
&= \frac{C_{p,\eta} x_k^{p/2} \lambda_k^{p/2}}{n^{p/2}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^p} \right).
\end{aligned}$$

□

A.2.2. Lemma: Sei $p \in \mathbb{N}$ fix. Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{4p}$ und U erfülle (V9) sowie $\mathbb{E}|U|^{4p} \leq \eta < \infty$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C_p$ sodass für $k \in \mathcal{L}_n$ gilt

$$\mathbb{E} |D_{i,k,n} - D_{i,k}|^p \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^{p/2}} \left(\frac{x_k^{p/2} w_k^p}{|c_k|^p} + x_k^{p/2} \right).$$

BEWEIS: Für $k \in \mathcal{L}_n$ gilt mit (A.9)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |D_{i,k,n} - D_{i,k}|^p &= \mathbb{E} \left| \langle W_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{\hat{c}_k} - \frac{1}{c_k} \right) + \langle X_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right) \right|^p \\
&\leq 2^{p-1} \mathbb{E} \left| \langle W_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{\hat{c}_k} - \frac{1}{c_k} \right) \right|^p + 2^{p-1} \mathbb{E} \left| \langle X_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right) \right|^p.
\end{aligned}$$

Für den ersten Erwartungswert wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \langle W_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{\hat{c}_k} - \frac{1}{c_k} \right) \right|^p &= \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\lambda_k} \left(\frac{\lambda_k}{\hat{c}_k} - \frac{\lambda_k}{c_k} \right) \right|^p \\ &\leq \frac{1}{\lambda_k^p} \sqrt{\mathbb{E} |\langle W_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\lambda_k^{2p} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{\hat{c}_k c_k} \right|^{2p}}. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathcal{L}_n$ gilt wegen (3.6), die Abschätzung $|\hat{c}_k|^2 \geq \alpha^2 \gamma_k^\nu$. Durch Ergänzen geeigneter Terme lässt sich (A.2) anwenden, sodass

$$\begin{aligned} \lambda_k^{2p} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{\hat{c}_k c_k} \right|^{2p} &\leq \frac{1}{\alpha^{2p} \gamma_k^{p\nu}} \lambda_k^{2p} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{2p} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^{2p} \gamma_k^{p\nu}} \lambda_k^p x_k^p \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_k^p}{x_k^p} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{2p} \leq \frac{C\eta}{n^p \alpha^{2p}} \lambda_k^p x_k^p. \end{aligned}$$

Zudem gilt wegen $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{2p}$

$$\mathbb{E} |\langle W_i, \phi_k \rangle|^{2p} = w_k^p \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\sqrt{w_k}} \right|^{2p} \leq \eta w_k^p.$$

Zusammen erhält man

$$\mathbb{E} \left| \langle W_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{\hat{c}_k} - \frac{1}{c_k} \right) \right|^p \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^{p/2}} \frac{x_k^{p/2} w_k^p}{|c_k|^p}.$$

Für den zweiten Term geht man analog vor:

$$\mathbb{E} \left| \langle X_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right) \right|^p \leq \sqrt{\mathbb{E} |\langle X_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right|^{2p}}.$$

Weil $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{2p}$ gilt

$$\mathbb{E} |\langle X_i, \phi_k \rangle|^{2p} = x_k^p \mathbb{E} \left| \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\sqrt{x_k}} \right|^{2p} \leq \eta x_k^p$$

und mit (A.1) und der Abschätzung $\hat{x}_k \geq \hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu$, die für alle $k \in \mathcal{L}_n$ aus Lemma A.1.4 folgt, ergibt sich

$$\mathbb{E} \left| \frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right|^{2p} \leq \frac{1}{\alpha^{2p}} \mathbb{E} \left| \frac{\hat{x}_k - x_k}{x_k} \right|^{2p} \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^p}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{E} \left| \langle X_i, \phi_k \rangle \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{\hat{x}_k} \right) \right|^p \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^{p/2}} x_k^{p/2}.$$

Die Behauptung folgt. \square

A.3. Hilfsresultate zu Kapitel 5

A.3.1. Lemma: [VERSCHÄRFUNG VON LEMMA A.2.2] Sei $p \in \mathbb{N}$ fix. Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^{8p}$ und U erfülle (V9) sowie $\mathbb{E}|U|^{8p} \leq \eta < \infty$. Dann existiert eine positive Konstante $C = C_p$ sodass für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathbb{E}|I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k})|^p \leq \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}} + \frac{1}{x_k^{p/2}} \right) (1 + o(1)) \quad (\text{A.15})$$

sowie

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^p \leq C_p \left\{ \frac{w_k^{p/2}}{|c_k|^p} + \frac{1}{x_k^{p/2}} + \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}} + \frac{1}{x_k^{p/2}} \right) (1 + o(1)) \right\}. \quad (\text{A.16})$$

BEWEIS: Für $k \in \mathbb{Z}$ wird mit (A.9) der Term gegen die Summe von vier Termen abgeschätzt. Dabei verwendet man, dass für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ gilt $\hat{w}_k \geq \alpha$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k})|^p \\ & \leq C_p \left\{ \mathbb{E} \left| \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} \left(\frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right)^2 I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right|^p + \frac{1}{|c_k|^p} \mathbb{E} \left| \langle W_i, \phi_k \rangle \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^p \right. \\ & \quad \left. + \mathbb{E} \left| \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} \left(\frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right)^2 I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu\} \right|^p + \frac{1}{x_k^p} \mathbb{E} \left| \langle X_i, \phi_k \rangle \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right|^p \right\} \\ & =: C_p \{T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}\}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Erwartungswert wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, um dann Abschätzung (A.2) anzuwenden und $(W, X) \in \mathcal{F}_\eta^{8p}$ auszunutzen:

$$\begin{aligned} T_{n,2} & \leq \frac{1}{|c_k|^p} \sqrt{\mathbb{E}|\langle W_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{2p}} \\ & \leq C \frac{w_k^{p/2}}{|c_k|^p} \left(\frac{x_k^p}{\lambda_k^p} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_k^p}{x_k^p} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{2p} \right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C}{n^{p/2}} \frac{w_k^{p/2} x_k^{p/2}}{\lambda_k^{p/2} |c_k|^p} = \frac{C}{n^{p/2}} \frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}}. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ mit $\hat{\lambda}_k \geq \alpha\gamma_k^\nu$ gilt wegen (3.6) die Abschätzung $|\hat{c}_k|^2 \geq \alpha^2 \gamma_k^\nu$. Durch Ergänzen geeigneter Terme lässt sich wiederum (A.2) anwenden, sodass

$$T_{n,1} \leq \frac{1}{(\alpha^2 \gamma_k^\nu)^{p/2}} \sqrt{\mathbb{E}|\langle W_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{4p}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{(\alpha^2 \gamma_k^\nu)^{p/2}} w_k^{p/2} \left(\frac{x_k^{2p}}{\lambda_k^{2p}} \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\lambda_k^{2p}}{x_k^{2p}} \mathbb{E} \left| \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right|^{4p} \right)^{1/2} \\
&\leq \frac{C}{(\alpha^2 \gamma_k^\nu)^{p/2} n^p} \frac{w_k^{p/2} x_k^p}{\lambda_k^p} \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^{p/2}} \frac{1}{n^{p/2}} \frac{w_k^{p/2} x_k^p}{\lambda_k^p}.
\end{aligned}$$

Für den dritten und vierten Term geht man analog vor. Mit (A.1) und der Abschätzung $\hat{x}_k \geq \hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu$, die aus Lemma A.1.4 folgt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_{n,3} &\leq \frac{1}{\alpha^p} \sqrt{\mathbb{E} |\langle X_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right|^{4p}} \leq \frac{C}{(n\alpha^2)^{p/2}} \frac{1}{n^{p/2}} x_k^{p/2}, \\
T_{n,4} &\leq \frac{1}{x_k^p} \sqrt{\mathbb{E} |\langle X_i, \phi_k \rangle|^{2p}} \sqrt{\mathbb{E} \left| \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k} \right|^{2p}} \leq \frac{1}{n^{p/2}} \frac{1}{x_k^{p/2}}.
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt dies unter Berücksichtigung von (V10)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} |I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} (D_{i,k,n} - D_{i,k})|^p \\
&\leq \frac{C_p}{n^{p/2}} \frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}} \left(1 + \frac{w_k^{p/2} x_k^{p/2}}{(n\alpha^2)^{p/2}} \right) + \frac{C_p}{n^{p/2}} \frac{1}{x_k^{p/2}} \left(1 + \frac{x_k^p}{(n\alpha^2)^{p/2}} \right) \\
&= \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}} + \frac{1}{x_k^{p/2}} \right) (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Es bleibt (A.16) zu zeigen. Mit analogem Vorgehen für die Zerlegung

$$\begin{aligned}
D_{i,k,n} &= \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} + \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{c_k} \frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} + \frac{\langle W_i, \phi_k \rangle}{\hat{c}_k} \left(\frac{c_k - \hat{c}_k}{c_k} \right)^2 \\
&\quad - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{x_k} - \frac{\langle X_i, \phi_k \rangle}{\hat{x}_k} \frac{x_k - \hat{x}_k}{x_k}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

erhält man hier die Abschätzung

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^p \leq C_p \left\{ \frac{\mathbb{E} |\langle W, \phi_k \rangle|^p}{|c_k|^p} + \frac{\mathbb{E} |\langle X, \phi_k \rangle|^p}{x_k^p} + T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4} \right\}.$$

Somit gilt

$$\mathbb{E} \left| I\{\hat{\lambda}_k \geq \alpha \gamma_k^\nu\} D_{i,k,n} \right|^p \leq C_p \left\{ \frac{w_k^{p/2}}{|c_k|^p} + \frac{1}{x_k^{p/2}} + \frac{C}{n^{p/2}} \left(\frac{w_k^p x_k^{p/2}}{|c_k|^{2p}} + \frac{1}{x_k^{p/2}} \right) (1 + o(1)) \right\}.$$

□

A.4. Hilfsresultate zu Kapitel 6

A.4.1. Lemma: Seien $i \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Für das in Bemerkung 56 (i) beschriebene Bootstrap-Verfahren gilt

$$\mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n] = |\hat{\mathcal{U}}_{i,k}|^2 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Für das in Bemerkung 56 (ii) beschriebene Bootstrap-Verfahren gilt

$$\mathbb{E} [|\mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \mid \mathcal{S}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \hat{\mathcal{U}}_{i,k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{U}}_{i,k} \right|^2 \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

BEWEIS: Die erste Identität ergibt sich direkt aus der dem Verfahren 56 (i) zugrundeliegenden Konstruktion, da $\hat{\mathcal{U}}_{i,k}$ messbar bezüglich und V_i stochastisch unabhängig von \mathcal{S}_n ist.

Bei Verfahren 56 (ii) wird mit Zurücklegen aus $\{\hat{\mathcal{U}}_{1,k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{U}}_{i,k}, \dots, \hat{\mathcal{U}}_{n,k} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\mathcal{U}}_{i,k}\}$ gezogen, sodass $P(\mathcal{U}_{i,k}^* \mid \mathcal{S}_n) = \frac{1}{n}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ gilt. \square

A.4.2. Lemma: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ und U erfülle $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B2) seien erfüllt. Dann existiert eine positive Konstante C sodass für $k, l, m, r \in \mathcal{K}_n$, $|k| \neq |l|, |m|, |r|$, $|l| \neq |m|, |r|$, $|m| \neq |r|$, und $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ folgende Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 &\leq \frac{C}{\alpha^4} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k} D_{i,k}|^2 \overline{D_{j,l}} D_{j,m} \overline{D_{i,l}} D_{i,m} |\mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{i,m}^* \right] &\leq \frac{C}{\alpha^4} \\ \mathbb{E} \left[D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} D_{j,m} \overline{D_{j,r}} D_{i,m} \overline{D_{i,r}} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^* \overline{\mathcal{U}_{j,r}^*} \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{i,r}^*} \right] &\leq \frac{C}{\alpha^4}. \end{aligned}$$

BEWEIS: Nach Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wird das vierte Moment von $\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}$ gegen eine Konstante abgeschätzt, was für $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^4$ unter (B2) möglich ist. Zusammen mit (5.16) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}} \mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 &\leq C (\mathbb{E} |D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{i,l}}|^4)^{1/2} \\ &= C \mathbb{E} |D_{1,k}|^4 \mathbb{E} |D_{1,l}|^4 \leq \frac{C}{\alpha^4}. \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $D_{j,k} \overline{D_{j,l}}$ und $D_{i,k} \overline{D_{i,l}}$ für $i \neq j$ stochastisch unabhängig sind sowie dass $D_{j,k}$ und $\overline{D_{j,l}}$ für $|k| \neq |l|$ unkorreliert sind.

Die übrigen Abschätzungen ergeben sich analog. \square

A.4.3. Lemma: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und U erfülle $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (B2) seien erfüllt. Dann existiert eine positive Konstante C , sodass für $k, l, m, r \in \mathcal{X}_n$, $|k| \neq |l|, |m|, |r|$, $|l| \neq |m|, |r|$, $|m| \neq |r|$, und drei verschiedene $i, p, j \in \{1, \dots, n\}$ folgende Abschätzungen gelten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| |D_{j,k}|^4 |D_{i,k} \overline{D_{p,k}}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*}|^2 |\mathcal{U}_{j,k}^*|^4 \right| &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k^2}{|c_k|^4} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k} \overline{D_{j,l}}|^2 |D_{i,k} \overline{D_{i,l}} D_{p,k} \overline{D_{p,l}}| |\mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{i,l}^*} \mathcal{U}_{p,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*}| \right] &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k}{|c_k|^2} \frac{w_l}{|c_l|^2} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k} \overline{D_{j,l}} D_{i,k} \overline{D_{p,l}}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*}|^2 \right] &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k}{|c_k|^2} \frac{w_l}{|c_l|^2} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k}|^2 |\overline{D_{j,l}} D_{j,m} D_{i,k} \overline{D_{p,k}} \overline{D_{i,l}} D_{p,m}| |\mathcal{U}_{j,k}^*|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*} \mathcal{U}_{i,l}^* \overline{\mathcal{U}_{p,m}^*} \mathcal{U}_{j,l}^* \overline{\mathcal{U}_{j,m}^*}| \right] &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k}{|c_k|^2} \frac{w_m^{1/2}}{|c_m|} \frac{w_l^{1/2}}{|c_l|} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k} D_{i,k}|^2 |\overline{D_{j,l}} D_{j,m} \overline{D_{p,l}} D_{p,m}| |\mathcal{U}_{j,k}^* \mathcal{U}_{i,k}^*|^2 |\overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{p,m}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^*| \right] &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k}{|c_k|^2} \frac{w_l^{1/2}}{|c_l|} \frac{w_m^{1/2}}{|c_m|} \\ \mathbb{E} \left[|D_{j,k} D_{j,l} \overline{D_{j,m}} D_{j,r} D_{i,k} D_{i,l} \overline{D_{p,m}} D_{p,r} \mathcal{U}_{i,k}^* \mathcal{U}_{i,m}^* \overline{\mathcal{U}_{p,l}^*} \mathcal{U}_{p,r}^* \mathcal{U}_{j,k}^* \overline{\mathcal{U}_{j,l}^*} \mathcal{U}_{j,m}^* \mathcal{U}_{j,r}^* \right] &\leq \frac{C}{\alpha^2} \frac{w_k^{1/2}}{|c_k|} \frac{w_l^{1/2}}{|c_l|} \frac{w_m^{1/2}}{|c_m|} \frac{w_r^{1/2}}{|c_r|}. \end{aligned}$$

BEWEIS: Analog zum Vorgehen im Beweis von Lemma A.4.2 erhält man

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| |D_{j,k}|^4 |D_{i,k} \overline{D_{p,k}}|^2 |\mathcal{U}_{i,k}^* \overline{\mathcal{U}_{p,k}^*}|^2 |\mathcal{U}_{j,k}^*|^4 \right| \\ &\leq C (\mathbb{E}|D_{j,k}|^8)^{1/2} \mathbb{E}|D_{i,k}|^4 \\ &\leq C \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right)^2 \leq \frac{C}{\alpha^2} \left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right). \end{aligned}$$

Wegen (2.21) gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$\left(\frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right) \leq 2 \frac{w_k^2}{|c_k|^4},$$

was zur ersten Abschätzung führt.

Die weiteren Abschätzungen ergeben sich analog. \square

A.4.4. Lemma: Sei $(X, W) \in \mathcal{F}_\eta^8$ und $\mathbb{E}|U|^4 < \infty$. Die Voraussetzungen (V1)–(V13) sowie (T3) seien erfüllt. Dann existiert eine positive Konstante C , sodass unter (H0) gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| \sum_{p=2}^n \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l |D_{p,l} \langle \phi_l, X_p \rangle|^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{R}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right|^2 \\ &= \mathcal{O} \left(\frac{n^3}{\alpha^2} + n^4 \right). \end{aligned} \tag{A.18}$$

BEWEIS: Für $k, m \in \mathbb{Z}$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ sind $|D_{i,k}\mathcal{U}_{i,k}|^2$ und $|D_{j,m}\mathcal{U}_{j,m}|^2$ stochastisch unabhängig. Somit gilt mit Lemma A.1.3, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k}\mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{j,m}\mathcal{U}_{j,m}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_m}{|c_m|^2} - \frac{1}{x_m} \right| \right) \right] \\ &= \left(\mathbb{E} |D_{i,k}\mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(\mathbb{E} |D_{j,m}\mathcal{U}_{j,m}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_m}{|c_m|^2} - \frac{1}{x_m} \right| \right) \\ &= |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Für $i = j$ und $|k| \neq |m|$ erinnert man sich an Zerlegung (5.21) und erhält

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(|D_{i,k}\mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \left(|D_{i,m}\mathcal{U}_{i,m}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_m}{|c_m|^2} - \frac{1}{x_m} \right| \right) \right] \\ & \lesssim C \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \left| \frac{w_m}{|c_m|^2} - \frac{1}{x_m} \right| \\ & \leq \frac{C}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Weiter lässt sich die grobe Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(|D_{1,k}\mathcal{U}_{1,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right)^2 & \leq \mathbb{E} |D_{1,k}\mathcal{U}_{1,k}|^4 + \mathfrak{V} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right|^2 \\ & \leq C \frac{w_k^2}{|c_k|^4} \leq \frac{C}{\alpha^2} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{Z}$ verwenden. Damit erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \sum_{p=2}^n \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l |D_{p,l}\langle \phi_l, X_p \rangle|^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k}\mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{V}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right|^2 \\ & \leq \frac{Cn^2}{\alpha^2} \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l^2 \mathbb{E} |D_{1,l}\langle \phi_l, X_1 \rangle|^4 \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, \\ |k| \neq |m|}} x_k x_m \right\} \\ & \quad + \frac{Cn^2}{\alpha^2} \sum_{\substack{l, r \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |r|}} x_l x_r \mathbb{E} |D_{1,l}\langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \mathbb{E} |D_{1,r}\langle \phi_r, X_1 \rangle|^2 \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |r|}} x_k^2 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, |r|, \\ |k| \neq |m|}} x_k x_m \right\} \\ & \quad + \frac{n^3}{\alpha^2} \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l^2 \mathbb{E} |D_{1,l}\langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \mathbb{E} |D_{2,l}\langle \phi_l, X_2 \rangle|^2 \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^2 \\ & \quad + \frac{n^3}{\alpha^2} \sum_{\substack{l, r \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |r|}} x_l x_r \mathbb{E} |D_{1,l}\langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \mathbb{E} |D_{2,r}\langle \phi_r, X_2 \rangle|^2 \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |r|}} x_k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n^3 \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l^2 \mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^4 \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, |r|, \\ |k| \neq |m|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m^2 \right\} \\
& + n^3 \sum_{\substack{l, r \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |r|}} x_l x_r \mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \mathbb{E} |D_{1,r} \langle \phi_r, X_1 \rangle|^2 \\
& \quad \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 x_k^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, |r|, \\ |k| \neq |m|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m^2 \right\} \\
& + n^4 \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l^2 (\mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^2)^2 \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k^4 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, \\ |k| \neq |m|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m^2 \right\} \\
& + n^4 \sum_{\substack{l, r \in \mathcal{X}_n, \\ |l| \neq |r|}} x_l x_r \mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \mathbb{E} |D_{2,r} \langle \phi_r, X_2 \rangle|^2 \\
& \quad \left\{ \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|, |r|}} x_k^4 |\langle \beta, \phi_k \rangle|^4 + \sum_{\substack{k, m \in \mathcal{X}_n, \\ |k|, |m| \neq |l|, |r|, \\ |k| \neq |m|}} |\langle \beta, \phi_k \rangle|^2 x_k^2 |\langle \beta, \phi_m \rangle|^2 x_m^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Mit $\mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^2 \leq \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} + \frac{1}{x_k} \right| x_k$ und $\mathbb{E} |D_{1,l} \langle \phi_l, X_1 \rangle|^4 \leq \left| \frac{w_k^2}{|c_k|^4} + \frac{1}{x_k^2} \right| x_k^2$ sowie Lemma A.1.3 erhält man in obiger Abschätzung unter (T3) ausschließlich konvergente Reihen, sodass insgesamt gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left| \sum_{p=2}^n \sum_{l \in \mathcal{X}_n} x_l |D_{p,l} \langle \phi_l, X_p \rangle|^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{k \in \mathcal{X}_n, \\ |k| \neq |l|}} x_k \left(|D_{i,k} \mathcal{U}_{i,k}|^2 - \mathfrak{R}^{1/2} \left| \frac{w_k}{|c_k|^2} - \frac{1}{x_k} \right| \right) \right|^2 \\
& \leq C \left(\frac{n^3}{\alpha^2} + n^4 \right)
\end{aligned}$$

□

Literaturverzeichnis

- [Albers et al. (2007)] ALBERS, Sönke, KLAPPER, Daniel, KONRADT, Udo, WALTER, Achim und WOLF, Joachim (Hrsg.). *Methodik der empirischen Forschung*. Gabler, Wiesbaden 2., überarbeitete und erweiterte Auflage 2007.
- [Alj et al. (2014)] ALJ, Abdelkamel, AZRAK, Rajae und MÉLARD, Guy. *On Conditions in Central Limit Theorems for Martingale Difference Arrays* Long Version. CORE Discussion Paper (2014/12).
- [Auer et al. (2013)] AUER, Benjamin, HOLLAND, Heinrich, KAMPS, Udo, LÜBBECKE, Marco und ROTTMANN, Horst. *Kompakt-Lexikon Wirtschaftsmathematik und Statistik*. 750 Begriffe nachschlagen, verstehen, anwenden. Springer Gabler, Wiesbaden 2013.
- [Babii (2015)] BABII, Andrii. *Identification and estimation in the functional linear instrumental regression*. Version 13.11.2015: https://editorialexpress.com/cgi-bin/conference/download.cgi?db_name=EEAESEM2016&paper_id=23 (Stand 08.09.2020).
- [Bickel und Freedman (1981)] BICKEL, Peter J. und FREEDMAN, David A. *Some asymptotic Theory for the Bootstrap*. The Annals of Statistics (1981) 9(6):1196–1217.
- [Birke (2006)] BIRKE, Melanie. *Schätz- und Testverfahren in der nichtparametrischen Regression unter qualitativen Annahmen*. Dissertation. Ruhr-Universität Bochum 2006.
- [Bosq (2000)] BOSQ, Denis. *Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications*. Lecture notes in statistics 149. Springer, New York 2000.
- [Cardot et al. (2006)] CARDOT, Hervé, MAS, André und SARDA, Pascal. *CLT in functional linear regression models*. Probability Theory and Related Fields (2007) 138:325–361.
- [Carrasco et al. (2007)] CARRASCO, Marine, FLORENS, Jean-Pierre und RENAULT, Eric. *Linear inverse problems in structural econometrics estimation based on spectral decomposition and regularization*. In: HECKMAN, James, LEARNER, Edward, *Handbook of Econometrics*. Volume 6B. Elsevier, Amsterdam 2007, 77:5633–5751.
- [Chow und Teicher (1997)] CHOW, Yuan Shih und TEICHER, Henry. *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingales*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York 3. Auflage 1997.

- [Cuesta-Albertos et al. (2019)] CUESTA-ALBERTOS, Juan A., GARCÍA-PORTUGUÉS, Eduardo, FEBRERO-BANDE, Manuel und GONZÁLEZ-MANTEIGA, Wenceslao. *Goodness-of-fit tests for the functional linear model based on randomly projected empirical processes*. The Annals of Statistics (2019) 47(1):439–467.
- [Cuevas (2013)] CUEVAS, Antonio. *A partial overview of the theory of statistics with functional data*. Journal of Statistical Planning and Inference (2014) 147:1–23.
- [DasGupta (2008)] DASGUPTA, Anirban. *Asymptotic Theory of Statistics and Probability*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York 2008.
- [Dauxois et al. (1982)] DAUXOIS, Jacques, POUSSE, A. und ROMAIN, Yves. *Asymptotic Theory for the Principal Component Analysis of a Vector Random Function: Some Applications to Statistical Inference*. Journal of Multivariate Analysis (1982) 12:136–154.
- [Efron (1979)] EFRON, Bradley. *Bootstrap methods: Another look at the Jackknife*. The Annals of Statistics (1979) 7(1):1–26.
- [Engl et al. (1996)] ENGL, Heinz W., HANKE, Martin und NEUBAUER, Andreas. *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht u. a. 1996.
- [Falkner (1960)] FALKNER, Frank (Hrsg.). *Child Development: An International Method of Study and the International Children's Centre (Paris)*. Modern Problems in Paediatrics, Vol. 5. Karger, Basel 1960.
- [Ferraty et al. (2007)] FERRATY, Frédéric, MAS, André und VIEU, Philippe. *Nonparametric regression on functional data: Inference and practical aspects*. Australian & New Zealand Journal of Statistics (2007) 49(3):267–286.
- [Ferraty et al. (2010)] FERRATY, Frédéric, VAN KEILEGOM, Ingrid und VIEU, Philippe. *On the Validity of the Bootstrap in Non-Parametric Functional Regression*. Scandinavian Journal of Statistics (2010) 37:286–306.
- [Ferraty und Vieu (2006)] FERRATY, Frédéric und VIEU, Philippe. *Nonparametric Functional Data Analysis*. Theory and Practice. Springer Series in Statistics. Springer, New York 2006.
- [Florens et al. (2011)] FLORENS, Jean-Pierre, JOHANNES, Jan und VAN BELLEGEM, Sébastien. *Identification and estimation by penalization in nonparametric instrumental Regression*. Econometric Theory (2011) 27:472–496.
- [Florens und Van Bellegem (2014)] FLORENS, Jean-Pierre und VAN BELLEGEM, Sébastien. *Instrumental variable estimation in functional linear models*. ECORE Discussion Paper (2014/56).
- [Freedman (1981)] FREEDMAN, David A. *Bootstrapping Regression Models*. The Annals of Statistics (1981) 9(6):1218–1228.

-
- [Freedman (1984)] FREEDMAN, David A. *On bootstrapping two-stage least-squares estimates in stationary linear models*. The Annals of Statistics (1984) 12(3):827–842.
- [Frölich (2006)] FRÖLICH, Markus. *A Note on Parametric and Nonparametric Regression in the Presence of Endogenous Control Variables*. IZA Discussion Papers (2006) No. 2126.
- [García-Portugués et al. (2014)] GARCÍA-PORTUGUÉS, Eduardo, GONZÁLEZ-MANTEIGA, Wenceslao und FEBRERO-BANDE, Manuel. *A goodness-of-fit test for the functional linear model with scalar response*. arXiv:1205.6167v6.
- [García-Portugués et al. (2020)] GARCÍA-PORTUGUÉS, Eduardo, ÁLVAREZ-LIÉBANA, Javier, ÁLVAREZ-PÉREZ, Gonzalo und GONZÁLEZ-MANTEIGA, Wenceslao. *Goodness-of-fit tests for functional linear models based on integrated projections*. arXiv:2008.09885v1.
- [Gänssler und Stute (1977)] GÄNSSLER, Peter und STUTE, Winfried. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin Heidelberg 1977.
- [Gänssler et al. (1978)] GÄNSSLER, Peter, STROBEL, J. und STUTE, Winfried. *On central limit theorems for martingale triangular arrays*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae (1978) 31(3–4):205–216.
- [Gohberg et al. (2003)] GOHBERG, Israel, GOLDBERG, Seymour und KAASHOEK, Marinus A. *Basic Classes of Linear Operators*. Birkhäuser Verlag, Basel 2003.
- [González-Manteiga und Martínez-Calvo (2010)] GONZÁLEZ-MANTEIGA, Wenceslao und MARTÍNEZ-CALVO, Adela. *Bootstrap in functional linear regression*. Journal of Statistical planning and Inference (2011) 141:453–461.
- [González-Manteiga et al. (2014)] GONZÁLEZ-MANTEIGA, Wenceslao, GONZÁLEZ-RODRÍGUEZ, Gil, MARTÍNEZ-CALVO, Adela und GARCÍA-PORTUGUÉS, Eduardo. *Bootstrap independence test for functional linear models*. arXiv:1210.1072v3.
- [Grenander (1950)] GRENANDER, Ulf. *Stochastic processes and statistical inference*. Arkiv för Matematik (1950) 1(17):195–277.
- [Hall (1984)] HALL, Peter. *Integrated square error properties of kernel estimators of regression functions*. The Annals of Statistics (1984) 12(1):241–260.
- [Hall und Heyde (1980)] HALL, Peter und HEYDE, Christopher C. *Martingale Limit Theory and Its Application*. Probability and mathematical statistics. Academic Press, New York 1980.
- [Hall und Horowitz (2007)] HALL, Peter und HOROWITZ, Joel L. *Methodology and convergence rates for functional linear regression*. The Annals of Statistics (2007) 35(1):70–91.

- [Hausman (1978)] HAUSMAN, Jerry A. *Specification Tests in Econometrics*, *Econometrica* (1978) 46(6):1251–1271.
- [Hilgert et al. (2013)] HILGERT, Nadine, MAS, André und VERZELEN, Nicolas. *Minimax adaptive tests for the functional linear model*. *The Annals of Statistics* (2013) 41(2):838–869.
- [Horowitz (2007)] HOROWITZ, Joel L. *Asymptotic normality of a nonparametric instrumental variables estimator*, *International Economic Review* (2007) 48(4):1329–1349.
- [Horváth und Kokoszka (2012)] HORVÁTH, Lajos und KOKOSZKA Piotr. *Inference for Functional Data with Applications*. Springer, New York 2012.
- [Hsing und Eubank (2015)] HSING, Tailen und EUBANK, Randall. *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis with an Introduction to Linear Operators*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, West Sussex 2015.
- [Johannes (2013)] JOHANNES, Jan. *Nonparametric estimation in functional linear models with second order stationary regressors*. arXiv:0901.4266v1.
- [Johannes (2016)] JOHANNES, Jan. *Functional linear instrumental regression under second order stationarity*. arXiv:1603.01649v1.
- [Karhunen (1946)] KARHUNEN, Kari. *Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse*. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Series A. I. Mathematica – Physica* (1946) 34.
- [Karhunen (1947)] KARHUNEN, Kari. *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Series A. I. Mathematica – Physica* (1947) 37.
- [Klenke (2008)] KLENKE, Achim. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin Heidelberg 2., korrigierte Auflage 2008.
- [Levitt (1997)] LEVITT, Steven D. *Using Electoral Cycles in Police Hiring to Estimate the Effect of Police on Crime*. *The American Economic Review* (1997) 87(3):270–290.
- [Mammen (1993)] MAMMEN, Enno. *Bootstrap and wild bootstrap for high dimensional linear models*. *The Annals of Statistics* (1993) 21(1):255–285.
- [Müller (2011)] MÜLLER, Hans-Georg. *Functional Data Analysis*. https://www.encyclopediaofmath.org/images/a/ad/Functional_data_analysis.pdf (Stand 08.09.2020).
- [Müller und Stadtmüller (2005)] MÜLLER, Hans-Georg und STADTMÜLLER, Ulrich. *Generalized functional linear models*. *The Annals of Statistics* (2005) 33(2):774–805.

-
- [Patilea et al. (2012)] PATILEA, Valentin, SÁNCHEZ-SELLERO, César, und SAUMARD, Matthieu. *Projection-based nonparametric goodness-of-fit testing with functional covariates*. arXiv:1205.5578v1.
- [Pollard (1984)] POLLARD, David. *Convergence of Stochastic Processes*. Springer Series in Statistics. Springer, New York 1984.
- [Ramsay (1982)] RAMSAY, James O. *When the data are functions*. Psychometrika (1982) 47:379–396.
- [Ramsay und Dalzell (1991)] RAMSAY, James O. und DALZELL, C. *Some Tools for Functional Data Analysis*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) (1991) 53(3):539–572.
- [Ramsay und Silverman (1997)] RAMSAY, James O. and SILVERMAN, Bernard W. *Functional Data Analysis*. Springer Series in Statistics. Springer, New York 1997.
- [Ramsay und Silverman (2002)] RAMSAY, James O. and SILVERMAN, Bernard W. *Applied Functional Data Analysis*. Methods and Case Studies. Springer Series in Statistics. Springer, New York 2002.
- [Rao (1958)] RAO, C.Radhakrishna. *Some statistical methods for comparison of growth curves*. Biometrics (1958) 14(1):1–17.
- [Ruymgaart et al. (2000)] RUYMGAART, Frits, WANG, Jing, WEI, Shih-Hsuan und YU, Li. *Some asymptotic theory for functional regression and classification*. Texas Tech University, Lubbock 2000.
- [Ruymgaart et al. (2013)] RUYMGAART, Frits, WANG, Jing und WEI, Shih-Hsuan. *Some asymptotic theory for functional regression with stationary regressor*. IMS Collections. From Probability to Statistics and Back: High-Dimensional Models and Processes (2013) 9: 291–302.
- [Serfling (1980)] SERFLING, Robert J. *Approximation theorems of mathematical statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons, New York u. a. 1980.
- [Shao und Tu (1996)] SHAO, Jun und TU, Dongsheng. *The Jackknife and Bootstrap*. Springer Series in Statistics. Springer, New York 2. korrigierte Auflage 1996.
- [Stocker (2004)] STOCKER, Herbert. *Methoden der Empirischen Wirtschaftsforschung*. Unterlagen zum Kurs. <https://www.hsto.info/econometrics/> (Stand 05.11.2018).
- [Werner (2011)] WERNER, Dirk. *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin Heidelberg 7. korrigierte und erweiterte Auflage 2011.
- [Wang et al. (2015)] WANG, Jane-Ling, CHIOU, Jeng-Min und MÜLLER, Hans-Georg. *Review of Functional Data Analysis*. arXiv:1507.05135v1.

- [Witting und Müller-Funk (1995)] WITTING, Hermann und MÜLLER-FUNK, Ulrich. *Mathematische Statistik II*. B. G. Teubner, Stuttgart 1995.
- [Wong (1996)] WONG, Ka-fu. *Bootstrapping Hausman's exogeneity test*. *Economics Letters* (1996) 53:139–143.
- [Wooldridge (2013)] WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Introductory Econometrics A Modern Approach*. South-Western Cengage Learning, Mason u. a. 5. Auflage 2013.
- [Wu (1973)] WU, De-Min. *Alternative tests of independence between stochastic regressors and disturbances*. *Econometrica* (1973) 41(4):733–750.
- [Yao et al. (2005)] YAO, Fang, MÜLLER, Hans-Georg und WANG, Jane-Ling. *Functional linear regression analysis for longitudinal data*. *The Annals of Statistics* (2005) 33(6):2873–2903.