

Robert Baier und Frank Lempio

Von Eudoxos bis zur Klimafolgenforschung

Exhaustion, Finite Elemente und mengenwertige Numerik

Motivation, Mathematik zu treiben, kann die **Schönheit** einer mathematischen Idee sein. Motivation, Mathematik zu treiben, kann aber auch die **Nützlichkeit** einer mathematischen Methode sein. Idealerweise gelingt Motivation über beides. Stellt man zusätzlich noch den **historischen Bezug** her, so zeigt sich, dass Mathematik ein sich folgerichtig entwickelndes Beziehungsgeflecht von Ideen und Methoden ist, das schön **und** nützlich ist.

Dies soll für das aktuelle Forschungsgebiet der **mengenwertigen Numerik** näher ausgeführt werden, und zwar so, dass die Grundprinzipien auch für den Nichtspezialisten verständlich werden. Wir beschränken uns dabei auf die Darstellung und Approximation von Mengen mittels so genannter **Finiter Elemente**, die Erweiterung der Vektorrechnung auf das **Rechnen mit Mengen** und die diskrete Approximation **dynamischer Systeme**, insbesondere in der **Klimafolgenforschung**.

1 Von Eudoxos bis zur Methode der Finiten Elemente

EUDOXOS VON KNIDOS (ca. 400 bis 350 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Philosoph, war Begründer der so genannten **Exhaustionsmethode**, mit der man Kurvenlängen, Flächen und Rauminhalte berechnen konnte durch **Ausschöpfung** mittels elementarer Mengen bekannten Inhalts. ARCHIMEDES VON SYRACUS (285 bis 212 v. Chr.), griechischer Mathematiker und Physiker, wandte diese Methode systematisch auf konkrete Probleme an.

Bemerkenswert ist hierbei, dass die Resultate ohne Kenntnis der Differential- und Integralrechnung im heutigen Sinne gewonnen wurden. Als elementares Beispiel betrachten wir die Berechnung der Fläche F zwischen der x -Achse und der **Parabel** $y = x^2$ über dem Intervall $[0, 1]$, vergleiche Abb. 1.

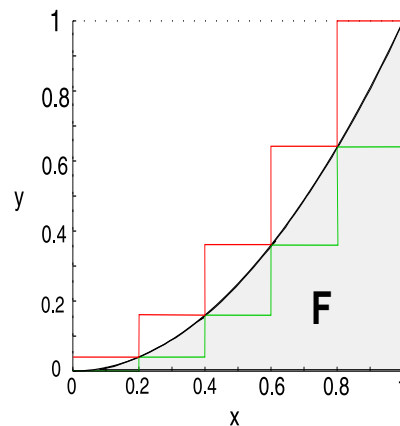


Abb. 1: Parabelabschnitt

Als untere und obere Approximation der Parabel wählen wir Treppenkurven, wie sie derzeit bereits in der Schule bei der Einführung des Riemann-Integrals Verwendung finden.

Zerlegen wir das Intervall $[0, 1]$ in N Teilintervalle gleicher Länge, so liefern die Flächen unter den Treppenkurven nach elementaren Umformungen die Einschließung

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2} \leq F \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}.$$

Nach dem **Archimedischen Axiom**, das auch schon auf Eudoxos zurückgeht, gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Wendet man es auf die Einschließung an, so erhält man als Fläche unter dem Parabelabschnitt

$$F = \frac{1}{3}.$$

In moderner Terminologie würde man die Teilintervalle des Ausgangsintervalls $[0, 1]$ (eindimensionale) **Finite Elemente** nennen und die zur Approximation verwendeten Treppenkurven auch (zusammengesetzte, stückweise konstante) **Finite Element-Funktionen**. Das sind Funktionen, deren Definitionsbereich aus finiten Elementen zusammengesetzt ist und die auf jedem einzelnen Element durch endlich viele Daten beschrieben werden. Im Falle der Treppenkurven sind die zugehörigen finiten Elemente die eindimensionalen Teilintervalle auf der x -Achse. Die Treppenkurve ist vollständig festgelegt durch ihren Wert in einem Endpunkt jedes Teilintervalls.

Archimedes hat bei seinen Flächenberechnungen noch viel kompliziertere innere und äußere “Ausschöpfungen” verwendet. Auch in Abb. 1 würde eine Approximation des Parabelbogens durch stückweise lineare Finite Element-Funktionen eine viel bessere äußere Ausschöpfung liefern. Heutzutage wird diese stückweise lineare Approximation als Basis hocheffizienter Extrapolationsmethoden für die numerische Integration verwendet in Verbindung mit adaptiven Finite Element-Gittergenerierungstechniken.

Höherdimensionale Finite Elemente illustrieren wir durch das folgende Anwendungsbeispiel, den **Entwurf eines Zeltdaches**. Der Grundriss der Zeltdachkonstruktion ist dargestellt in Abb. 2.

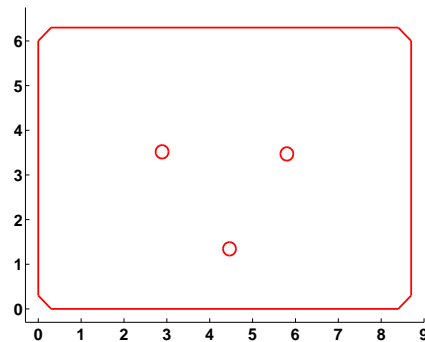


Abb. 2: Grundriss der Zeltdachkonstruktion

Zunächst ist eine Ausgangszerlegung des Grundrisses in zweidimensionale finite Elemente, eine so genannte Triangulation, zu berechnen, vergl. Abb. 3. Es handelt sich hierbei um ein adaptives Gitter, das an die Krümmung des Randes (rot in Abb. 2 und 3) angepasst ist.

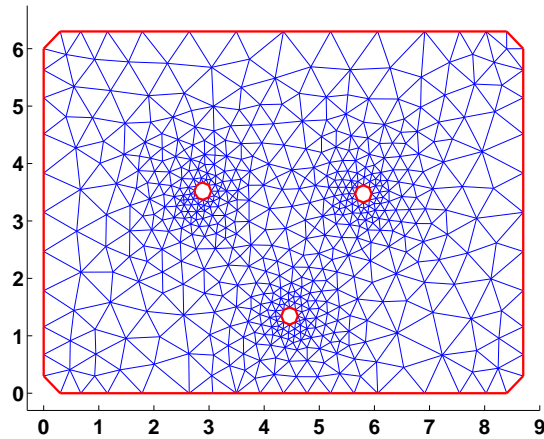


Abb. 3: Triangulation des Grundrisses

Das Zeltdach wird eingespannt in vorgegebener Höhe an den vier abgeschragten Ecken des zu überspannenden Bereichs und an drei inneren Masten verschiedener Höhe. Dies sind so genannte Randbedingungen erster Art für diesen Teil des Randes. Im übrigen Teil des Randes wird die Neigung des Daches vorgeschrieben.

Das Zeltdach selbst wird mittels stückweise linearer Finite Element-Funktionen über der blauen Triangulation des Grundrisses approximiert, dies ist ein gekrümmtes Gitternetz, das aus lauter ebenen Dreiecken besteht, vergl. Abb. 4. Aus all diesen stückweise linearen Finite Element-Funktionen, die die Randbedingungen erfüllen, wird im Sinne der modernen Finite Element-Methode, verstanden als Variationsmethode, diejenige ausgewählt, die zusätzlich ein problemspezifisches Funktional, wie z.B. ein Wirkungsintegral, ein Energiefunktional oder ein Steifigkeitsmaß, minimiert bzw. maximiert.

Abb. 4 gibt eine bereits optimierte Konfiguration wieder, die die Lösung eines inhomogenen Dirichlet-Problems mit den vorgegebenen Randbedingungen approximiert. Wir wollen hier nicht weiter auf die mathematisch präzise Formulierung dieser Randwertaufgabe für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung eingehen. Eine numerische Lösung, die früher den Einsatz großer Rechenanlagen erfordert hätte, kann von unseren Mathematikstudenten schon im Rahmen des Grundstudiums in den Numerikübungen mit dem PC gewonnen werden.

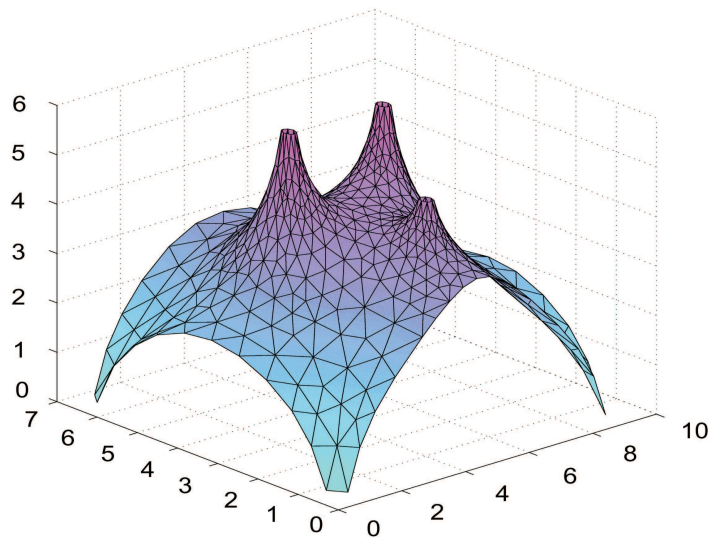


Abb. 4: Zeltdach

Die Visualisierung auf dem Computer erfordert eine dreidimensionale Darstellung. Die Einfärbung

kann zur Unterstützung dieser Darstellung oder für die Darstellung von Zusatzinformationen herangezogen werden. Die Farbstufen in Abb. 4 sind z.B. ein Maß für die Höhe des Zeltdachs.

Die Grundidee der Finite Element-Methode findet sich für den eindimensionalen Fall etwas versteckt bereits in den Werken von LEONHARD EULER (1707–1783). Er entwickelte aufbauend auf Vorarbeiten von PIERRE DE FERMAT (1601–1665), JAKOB BERNOULLI (1655–1705) und JOHANN BERNOULLI (1667–1748) die Variationsrechnung und veröffentlichte 1744 das grundlegende Werk “Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes sive Solutio Problematis Isoperimetrici Latissimo Sensu Accepti (Methode zum Auffinden ebener Kurven, die gewisse Maximum- oder Minimumeigenschaften aufweisen ...)”. Darin behandelt er das so genannte **einfachste Problem der Variationsrechnung** in kontinuierlicher und diskreter Form. Euler benutzte in seiner Darstellung natürlich noch nicht den Begriff der Finite Element-Funktion, aber konzeptionell besteht seine Idee darin, das Ausgangsproblem durch eine Folge von Optimierungsproblemen auf Finite Element-Räumen zu approximieren, und dies ist gerade das Wesen der modernen Finite Element-Methode, verstanden als **Variationsmethode**. Euler verfügte auch noch nicht über Computer und Algorithmen, mit denen er die diskreten Ersatzprobleme hätte direkt lösen können. So verfolgte er den analytischen Zugang weiter und leitete durch Variation der diskreten Probleme die berühmte **Eulersche Differentialgleichung** her. Diese analytische Methode war zunächst so erfolgreich, dass der ursprüngliche Ansatz der Finite Element-Methode wieder vergessen wurde.

In Arbeiten von SCHELLBACH [10] und COURANT [6] wird die Finite Element-Methode konzeptionell verwendet. Auch HILBERTS Beweis des **Dirichlet-Prinzips**, wonach (in geeigneten Funktionenräumen) die Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe das Dirichlet-Integral minimiert (und umgekehrt), ist in dem hier betrachteten Zusammenhang von großer Bedeutung.

Wirklich neuentdeckt und unter Einsatz von Computern angewendet wurde die Finite Element-Methode erst nach dem zweiten Weltkrieg, zunächst von Ingenieuren, dann weiterentwickelt in Zusammenarbeit mit Mathematikern. Heute ist die Finite Element-Methode aus weiten Bereichen naturwissenschaftlich-technischer Anwendungen, wie z.B. der Baustatik, der Elastizitätstheorie, der Hydrodynamik und der Aerodynamik nicht mehr wegzudenken.

Wichtig für die folgenden Abschnitte ist, dass Mengen durch ihre Finite Element-Triangulationen und Abbildungen auf diesen Mengen durch zusammengesetzte Finite Element-Funktionen approximiert und diese Approximationen auch im Computer verarbeitet werden können, da sie durch endlich viele Daten beschrieben werden.

2 Mengenarithmetik und mengenwertige Numerik

Für die mengenwertige Numerik, ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit dem Entwurf und der Analyse mengenwertiger Verfahren beschäftigt, benötigt man zunächst eine geeignete Arithmetik (Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation von Mengen). Die folgende Erweiterung der Vektorrechnung zum Rechnen mit Mengen berührt einerseits die Geometrie, andererseits führt sie mitten hinein in ein aktuelles Forschungsgebiet der Angewandten Mathematik. Hier soll nur das Prinzip verdeutlicht werden, nach dem Mengen **in einem algebraischen Sinne**, nicht zu verwechseln mit der BOOLEschen Mengenalgebra, voneinander **subtrahiert** werden können. Ausgangspunkt ist hierbei die Addition nach HERMANN MINKOWSKI (1864-1909) zweier nichtleerer Teilmengen eines n -dimensionalen Vektorraums zusammen mit der Multiplikation mit reellen Skalaren, vergl. Abb. 5.

$$\begin{aligned} A + B &= \{ a + b \mid a \in A, b \in B \} \\ \lambda \cdot A &= \{ \lambda \cdot a \mid a \in A \} \end{aligned}$$

Abb. 5: Mengenoperationen

Für das Einheitsquadrat A in der Ebene und die Kreisscheibe B mit Radius $1/2$ veranschaulichen wir die **Minkowski-Summe** in Abb. 6. Sie kann als Vereinigung über alle Verschiebungen der Menge B (violett berandet) um ein beliebiges Element von A (blau berandet) interpretiert werden. In der Abbildung sind exemplarisch einige solcher verschobenen Mengen (grau berandet) eingezeichnet, dabei sind jeweils nur die Ränder der Mengen gezeichnet worden. Die Minkowski-Summe ist dann die rot berandete Menge. Die Addition einer Menge zu einer einpunktigen Menge ergibt also einfach die verschobene Menge. Sind beide Mengen sogar einpunktig, erhält man die übliche Vektoraddition.

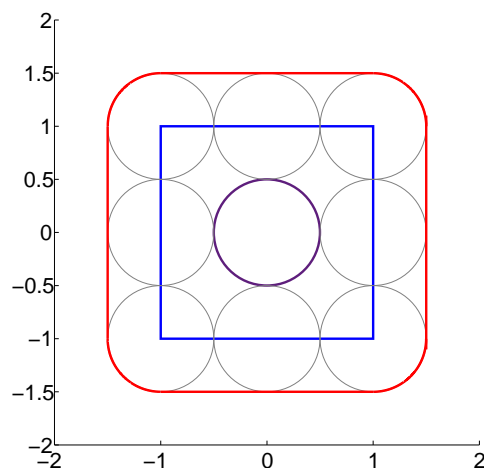


Abb. 6: Minkowski-Summe $A + B$

Die “naive” oder “punktweise” Differenz von A und B , nämlich $A + (-1) \cdot B = \{ a - b \mid a \in A, b \in B \}$, hat keine besonders brauchbaren Eigenschaften, ist doch z. B. für das Einheitsquadrat $A + (-1) \cdot A = 2 \cdot A$ und nicht, wie es wünschenswert wäre, der Nullvektor.

Will man also die Minkowski-Addition durch eine Subtraktion ergänzen, so dass die bekannten Rechenregeln für reelle Vektoren erhalten bleiben, so braucht man neue Ideen. Wir schildern für den interessierten Leser die so genannte **gerichtete Differenz** am Beispiel zweier ebener, abgeschlossener, beschränkter und konvexer Mengen etwas detaillierter, bevor wir zu den Grundideen der Mengenarithmetik zurückkehren. Eine Menge heißt dabei konvex, wenn die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte der Menge selbst ganz in der Menge liegt.

Wiederum sei der Minuend A das Einheitsquadrat, der Subtrahend B die Kreisscheibe mit Radius $1/2$, vergl. Abb. 7. Dort sind für den vertikalen äußeren Normalenvektor l_1 (rot) bzw. eine weitere Normale l_2 (grün) die entsprechenden Paare paralleler Stützgeraden an A und B und die zugehörigen Stützpunktmenge A_{l_1}, B_{l_1} (rot) bzw. A_{l_2}, B_{l_2} (grün) eingezeichnet. Da B_{l_1} einpunktig ist, lässt sich die Differenz $A_{l_1} - B_{l_1}$ “im üblichen Sinne” als Verschiebung von A_{l_1} bilden und liefert die mit der Normale

l_1 markierte Teilstrecke des blauen Streckenzugs in Abb. 8. Die Stützpunktmenge A_{l_2} und B_{l_2} sind sogar beide einpunktig, und die Differenz $A_{l_2} - B_{l_2}$ kann als gewöhnliche Vektordifferenz berechnet werden. Sie liefert den mit der Normale l_2 markierten Punkt des blauen Streckenzugs in Abb. 8.

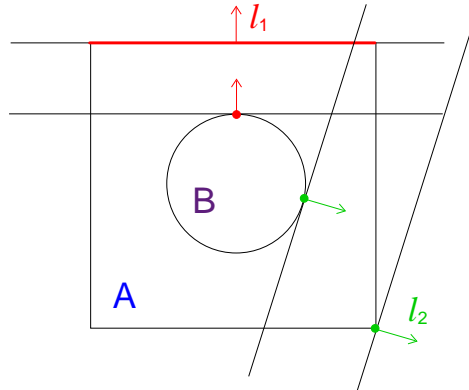


Abb. 7: Stützpunktmenge von A und B

Führt man diese Konstruktion für **alle** Normalen durch, so erhält man als Differenz $A - B$ den durch diese Normalen markierten Streckenzug (blau) in Abb. 8. Dies ist die so genannte gerichtete Differenz von A und B . Dabei wurde eine Menge mit lauter **äußeren Normalen** hellblau hervorgehoben, die als konvexer Anteil der gerichteten Menge aufgefasst werden kann.

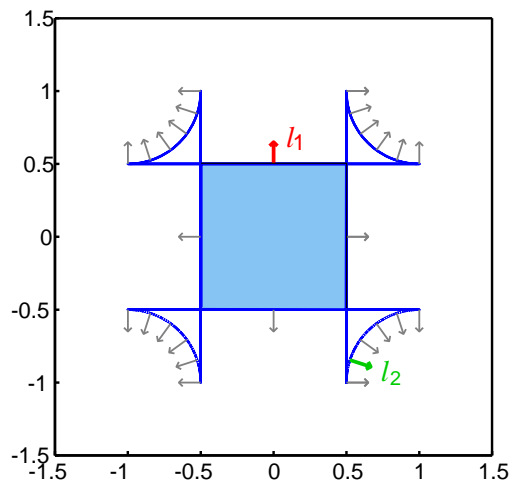


Abb. 8: gerichtete Differenz $A - B$

Die Grundidee dieser Konstruktion besteht also darin, die Differenz konvexer Mengen auf die Differenz von Stützpunktmenge zurückzuführen und damit auf (konvexe) Mengen niedrigerer Dimension. Nach endlich vielen Reduktionsschritten (im Beispiel war nur ein Schritt erforderlich) landet man bei bekannten Differenzen (Translationen oder gewöhnlichen Differenzen).

Man kann zeigen, dass die Menge aller nichtleeren, abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Teilmengen eines n -dimensionalen reellen Vektorraumes durch rekursive Anwendung dieses Reduktionsprinzips erweitert wird zum reellen Vektorraum der so genannten **gerichteten Mengen**. Diese gerichteten Mengen können auch algorithmisch visualisiert werden, für Einzelheiten vergleiche man [3]. Sie erweitern daher den bereits Mitte des 20. Jahrhunderts entwickelten algebraischen Einbettungszugang von HANS RÅDSTRÖM und LARS HÖRMÄNDER.

Der hier angedeutete Erweiterungsprozess der Mengen zu gerichteten Mengen, mit denen man ähnlich

wie mit gewöhnlichen Vektoren rechnen kann, ist zusammen mit der klassischen BOOLEschen Mengenalgebra grundlegend für die mengenwertige Numerik.

Wir können hier nicht auf weitere mathematische Einzelheiten eingehen, sondern visualisieren die oben beschriebene gerichtete Differenz von Mengen für einige instruktive Beispiele. In den Abb. 9 und 10 sieht man, wie sich die Differenz ändert, wenn man beim Subtrahenden den Radius der Kreisscheibe B auf $2\sqrt{2}$ bzw. 4 erhöht. Dabei ist für die erste Differenz der konvexe Anteil zum Nullpunkt zusammengeschumpft. In der zweiten Differenz ist eine Menge mit lauter **inneren Normalen** rosa eingefärbt, die interessanterweise als “konkaver” Anteil interpretiert werden kann.

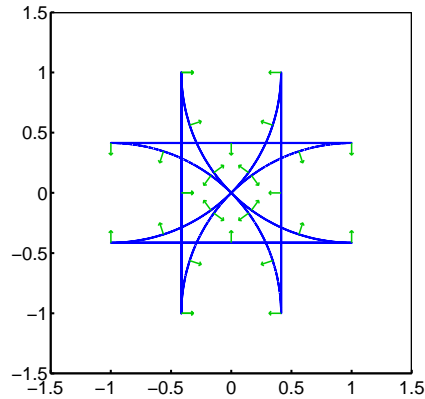


Abb. 9: $A - 2\sqrt{2} \cdot B$

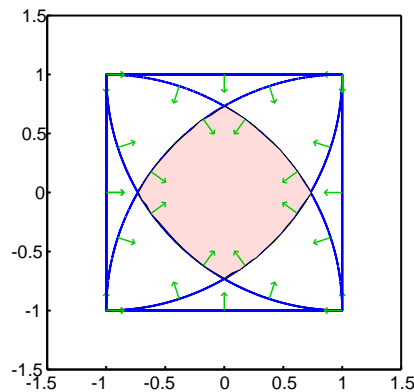


Abb. 10: $A - 4 \cdot B$

Diese Mengenarithmetik wird u.a. eingesetzt in Computeranimationen zum Bewegen von Objekten und beim dynamischen Umformen einer Figur in eine andere, dem so genannten **Morphing**.

Ein weiterer Anknüpfungspunkt findet sich in der **mengenwertigen Interpolation**. Dabei wird eine komplizierte mengenwertige Funktion (d.h. die Funktionswerte sind nicht Vektoren, sondern Mengen) durch eine viel einfacher zu beschreibende ersetzt, die in wenigen Datenvorgaben mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt. Im Falle einer Funktion einer Veränderlichen ergibt sich bei ein, zwei oder drei Mengenvorgaben die konstante, lineare bzw. quadratische Interpolation. Um den Fehler an Zwischenstellen klein zu halten, wendet man das Verfahren stückweise auf Teilintervalle an.

Durch mengenwertige Integration der stückweise Interpolierenden gewinnt man Quadraturverfahren, z.B. die mengenwertige Treppensumme oder Trapezregel. Auch die Berechnung der Fläche unter der Parabel in Abschnitt 1 lässt sich so interpretieren. Solch ein mengenwertiges Integral wurde vom Mathematiker ROBERT J. AUMANN in [1] eingeführt, der 2005 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften erhalten hat. Durch dieses **Aumann-Integral** kann man auch die Menge der Endpunkte aller zulässigen Lösungen eines linearen Steuerungsproblems, die so genannte **erreichbare Menge**, beschreiben. Diese

Menge ist für lineare Steuerungsprobleme immer konvex, was ihre numerische Approximation erheblich erleichtert.

Für ein spezielles Steuerungsproblem, eine angeregte Schwingung, werden in Abb. 13 die erreichbaren Mengen für variable Endzeiten $t_f \in [0, 2\pi]$ approximiert. Es dient hier als Modellproblem, das auch mit dem PONTYAGINSchen Maximumprinzip aus der Kontrolltheorie behandelt werden könnte. Im Folgenden sollen die erreichbaren Mengen durch mengenwertige Integration berechnet werden. In Abb. 11 ist das zugehörige Aumann-Integral für die Endzeit 2π als Menge gewöhnlicher Integrale notiert. Die Funktionen $u(\cdot)$ müssen dabei integrierbar sein und zu jedem Zeitpunkt die Beschränkung $-1 \leq u(\tau) \leq 1$ erfüllen, ihre Werte sind also Auswahlen aus dem Steuerbereich $U = [-1, 1]$.

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sin(4(2\pi - \tau)) \\ \cos(4(2\pi - \tau)) \end{pmatrix} u(\tau) d\tau \mid u(\tau) \in [-1, 1] \right\}$$

Abb. 11: Aumann-Integral

Ein naiver Weg, das Aumann-Integral zu approximieren, wäre es, die Steuerungsfunktion $u(\cdot)$ in Abb. 11 stückweise konstant anzusetzen und an jedem Gitterpunkt nur zufällig aus den Randpunkten des Steuerbereichs U auszuwählen, vgl. Abb. 12. Die zugehörigen Lösungen des zugrunde liegenden Kontrollproblems zu verschiedenen Auswahlen starten zum Zeitpunkt $t = 0$ alle im Ursprung und sind zur besseren Unterscheidbarkeit in verschiedenen Farben gezeichnet worden.

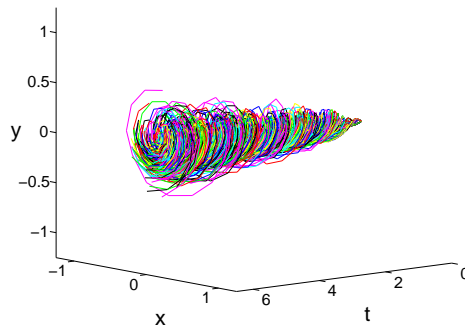


Abb. 12: Simulation von 200 zufälligen Schwingungen

Um Approximationen zu erhalten, die zur Endzeit $t_f = 2\pi$ nahe an der tatsächlichen erreichbaren Menge liegen, muss man aber sehr viele Schwingungen bestimmen, selbst 20000 ergeben noch kein wesentlich genaueres Bild.

Aufgrund dieser Schwierigkeiten bieten sich mengenwertige Quadraturverfahren für lineare Kontrollprobleme an. In Abb. 13 und Abb. 14 sieht man Ergebnisse der Treppensumme für 50 Teilintervalle bzw. der Trapezregel für 30 Teilintervalle. Dabei ist zu beachten, dass bei der Trapezregel eine gröbere Schrittweite verwendet wurde und daher der Gesamtrechnaufwand niedriger ist. Um Zwischenwerte besser zu approximieren, wurde in Abb. 14 die stückweise quadratische Interpolation verwendet, in Abb. 13 dagegen nur die stückweise lineare Interpolation.

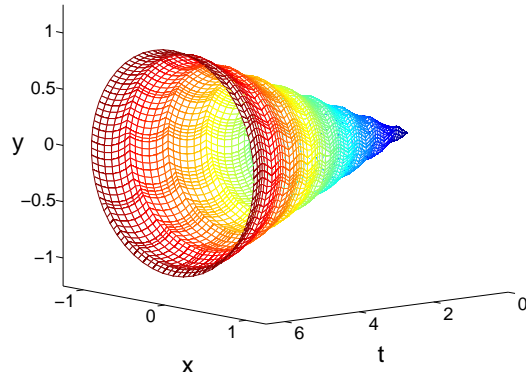


Abb. 13: Treppensumme mit 50 Teilintervallen

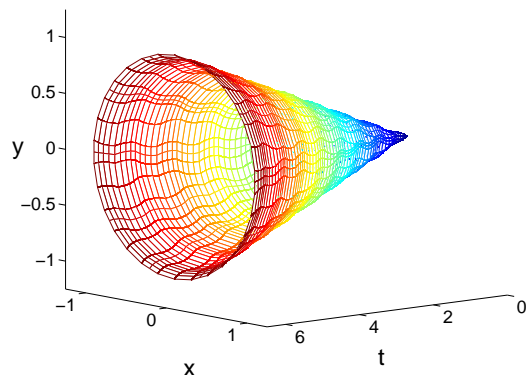


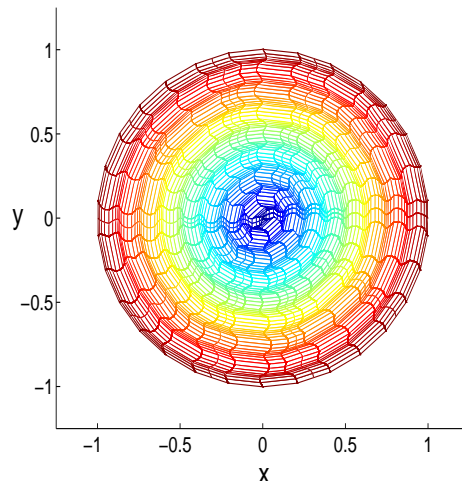
Abb. 14: Trapezregel mit 30 Teilintervallen

Während bei der stückweise linearen Interpolation nur positive Gewichte an den Teilintervallenden auftreten, kommen bei der quadratischen Interpolation auch negative Gewichte bei der Berechnung der interpolierenden mengenwertigen Funktion an Zwischenstellen vor (vergl. Abb. 15). Die Mengensubtraktion kann hier also nicht vermieden werden.

| Interpolationsart | Approximation zur Zeit $t = t_j + h/2$ |
|------------------------|--|
| stückweise linear | $\frac{1}{2} \cdot F(t_j) + \frac{1}{2} \cdot F(t_{j+1})$ |
| stückweise quadratisch | $\frac{3}{8} \cdot F(t_j) + \frac{3}{4} \cdot F(t_{j+1}) - \frac{1}{8} \cdot F(t_{j+2})$ |

Abb. 15: lineare und quadratische Interpolation

In Abb. 16 ist mehr aus ästhetischen Gründen die x - y -Projektion der erreichbaren Mengen, berechnet mit der Trapezregel, dargestellt.

Abb. 16: x - y -Projektion der erreichbaren Mengen

3 Mengenwertige Numerik in der Klimafolgenforschung

Die mengenwertige Numerik kann auch eingesetzt werden für die Approximation der Menge aller zulässigen Lösungen dynamischer Systeme mit Unsicherheiten, z. B. in der **Klimafolgenforschung**. Dynamische Systeme modellieren Prozesse, die sich zeitlich verändern. Für das folgende dreidimensionale nichtlineare, zustandsbeschränkte System zur Modellierung der globalen Erwärmung aus [9] führen wir dies etwas näher aus:

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= E(t) , \\
 C'(t) &= B \cdot F(t) + \beta \cdot E(t) - \sigma \cdot (C(t) - C_1) , \\
 T'(t) &= \mu \cdot \ln \left(\frac{C(t)}{C_1} \right) - \alpha \cdot (T(t) - T_1) , \\
 (C(t), T(t)) &\in W , \\
 E_{min}(t) &\leq E(t) \leq E_{max}(t) \quad (0 \leq t \leq t_f) .
 \end{aligned}$$

Abb. 17: Klimawandelmodell

Darin ist t die Zeitvariable und $E(t)$ der vom Menschen verursachte (über ein Jahr gemittelte) Kohlenstoffeintrag in die Erdatmosphäre, der die Rolle einer Steuerungsfunktion für das System übernimmt. Zustandsvariablen sind der zeitlich kumulierte Kohlenstoffeintrag $F(t)$, der atmosphärische Kohlenstoffgehalt $C(t)$ und die globale Jahresdurchschnittstemperatur $T(t)$. Die Zustandsbeschränkungen werden durch das so genannte **tolerierbare Fenster** W aus Abb. 18 beschrieben.

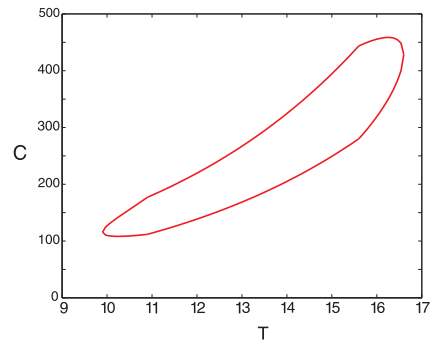
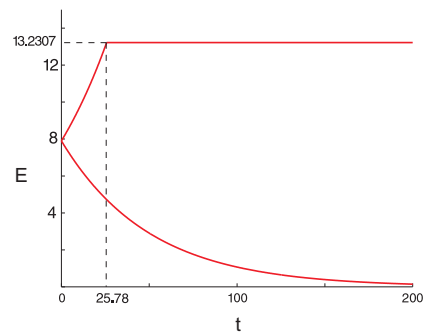


Abb. 18: Tolerierbares Fenster

Die zeitabhängigen Schranken für die Steuerungen werden gemäß Abb. 19 gewählt. Zur Interpretation des Modells und zur konkreten Wahl der Maßeinheiten, Anfangsbedingungen und Modellparameter vergleiche man [9].

Abb. 19: Schranken für $E(\cdot)$

Ziel ist es nun, **alle** zulässigen Steuerungen und zugehörigen Zustandstrajektorien zu berechnen, die die Systemgleichungen lösen und sämtliche Zustands- und Steuerbeschränkungen erfüllen. Dieses Ziel wird mit dem folgenden mengenwertigen Euler-Verfahren für zustandsbeschränkte dynamische Systeme erreicht. Die numerischen Resultate können dann als Entscheidungshilfe dafür dienen, welche Emissionsprofile $E(t)$ tolerierbar sind.

$$\begin{aligned}
& Y_0 \subset W \\
& Y_{j+1} = \bigcup_{\eta \in Y_j} ((\eta + hV(t_j, \eta)) \cap W) \\
& (j = 0, \dots, N-1)
\end{aligned}$$

Abb. 20: Mengenwertiges Euler-Verfahren

Hierbei ist Y_0 die Startmenge der Rekursion, h die Zeitschrittweite und N die Anzahl der Teilintervalle, in die das Zeitintervall $[0, t_f]$ zerlegt wird. $V(t_j, \eta)$ ist die (dreidimensionale) so genannte Geschwindigkeitsmenge. Sie ergibt sich durch Einsetzen aller Steuerungswerte in die rechte Seite der Systemgleichung aus Abb. 17, die im Zeitpunkt t_j und im Zustand η (mit den Koordinaten F, C, T) die Steuerbeschränkungen erfüllen.

Dies ist der wesentliche Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, wo die Menge $V(t, \eta)$ stets **einpunktig** ist. Die Durchführung des Algorithmus erfordert also die Übergabe von **Mengen** $V(t, \eta)$ an den Rechner. Dazu sind diese Mengen durch Finite Element-Gitter im Sinne von Abschnitt 1 zu approximieren, die Zustandsbeschränkungen sind in jedem Gitterpunkt einzuhalten. Gegenüber den in Abschnitt 2 eingeführten Mengenoperationen muss zusätzlich die Vereinigung auch nichtkonvexer Mengen implementiert werden. Dies ist für Finite Element-Approximationen möglich. In mathematischer Fachterminologie erzeugt damit das mengenwertige Euler-Verfahren eine Folge von Vereinigungen simplizialer Komplexe, die die Menge aller zulässigen Trajektorien diskret approximiert.

Zur numerischen Analyse und Durchführung dieses Verfahrens vergleiche man die Dissertation [5]. Stabilitätsbeweise und Konvergenzordnungsabschätzungen finden sich für eine etwas allgemeinere Problemklasse in [2].

Das mengenwertige Euler-Verfahren vermittelt Einsichten in die zeitliche Entwicklung der zulässigen Zustände des Klimawandelmodells auch auf langen Zeitintervallen. Wegen der Komplexität der mengenwertigen Numerik ist der erforderliche Rechenaufwand groß, aber für die Zustandsraumdimension 3 mit den an der Universität Bayreuth zur Verfügung stehenden Rechnern im parallelen Verbund noch realisierbar.

Abb. 21 zeigt die mit dem mengenwertigen Euler-Verfahren berechnete erreichbare Menge nach 200 Jahren. Dies ist also eine Approximation **aller Endzustände** zulässiger Zustandstrajektorien.

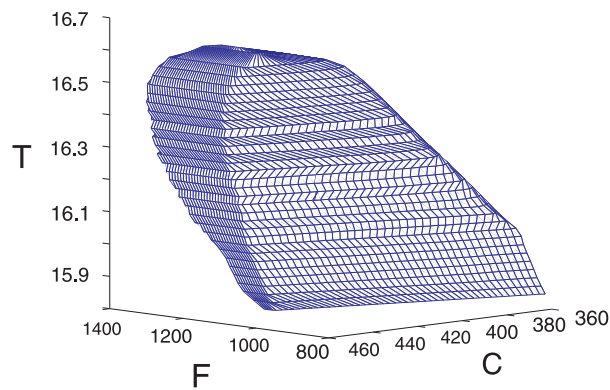


Abb. 21: Erreichbare Menge nach 200 Jahren

Durch interaktive Rotation dieser Menge erhält man einen guten Eindruck von ihrer dreidimensionalen Struktur. Durch Vergleich ihrer Projektionen auf die drei Koordinatenebenen des Zustandsraumes mit dem tolerierbaren Fenster in Abb. 18 erkennt man, dass sich die Zustandsrestriktionen wesentlich auswirken. Unvorsichtig oder verantwortungslos gewählte Emissionsprofile $E(\cdot)$ führen zu unzulässigen, nicht überlebensfähigen Zustandstrajektorien.

Literatur

- [1] R. J. Aumann. Integrals of set-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 12:1–12, 1965.
- [2] R. Baier, I. A. Chahma, and F. Lempio. Stability and Convergence of Euler’s Method for State-Constrained Differential Inclusions. *SIAM J. Optim.*, 18:1004–1026, 2007.
- [3] R. Baier and E. Farkhi. Differences of Convex Compact Sets in the Space of Directed Sets, Part I: The Space of Directed Sets and Part II: Visualization of Directed Sets. *Set-Valued Anal.*, 9:217–245, 247–272, 2001.
- [4] D. Braess. *Finite Elemente — Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, 4., verb. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [5] I. A. Chahma. Set-valued discrete approximation of state-constrained differential inclusions. *Bayreuth. Math. Schr.*, 67:3–162, 2003.
- [6] R. Courant. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49:1–23, 1943.
- [7] H. H. Goldstine. *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [8] F. Lempio. Set-valued interpolation, differential inclusions, and sensitivity in optimization. In R. Lucchetti and J. Revalski, editors, *Recent Developments in Well-Posed Variational Problems*, pages 137–169, Dordrecht, 1995. Kluwer.
- [9] G. Petschel-Held, H.-J. Schellnhuber, T. Brückner, and F. L. Tóth. The tolerable windows approach: theoretical and methodological foundations. *Climatic Change*, 41:303–331, 1999.
- [10] K. H. Schellbach. Probleme der Variationsrechnung. *J. reine und angew. Math.*, 41:293–363, 1851.