

# Lagrangesche statistische Eigenschaften hydrodynamischer und magnetohydrodynamischer Turbulenz

Von der Universität Bayreuth  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)  
genehmigte Abhandlung

von

Angela Busse

geboren in Los Angeles

1. Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Wolf-Christian Müller-Nutzinger
2. Gutachter: Prof. Dr. Walter Zimmermann

Tag der Einreichung: 24. April 2009

Tag des Kolloquiums: 28. Juli 2009



## Kurzfassung

### *Lagrangesche statistische Eigenschaften hydrodynamischer und magnetohydrodynamischer Turbulenz*

In dieser Arbeit werden die Lagrangeschen statistischen Eigenschaften inkompressibler hydrodynamischer und magnetohydrodynamischer Turbulenz mit Hilfe direkter numerischer Simulationen untersucht. Magnetohydrodynamische Turbulenz wird hierbei in mehreren Konfigurationen, als makroskopisch isotrope Turbulenz, unter den Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds und im zweidimensionalen Fall, behandelt.

Die Lagrangesche Statistik ist besonders zur Untersuchung des diffusiven und dispersiven Charakters turbulenter Strömungen geeignet. Im hydrodynamischen und magnetohydrodynamischen Fall treten in der turbulenten relativen Dispersion charakteristische Unterschiede auf. Es wird gezeigt, dass diese Unterschiede über das wechselnde Vorherrschen verschiedener Ausrichtungsprozesse begründet werden können. Diese Interpretation kann auch auf magnetohydrodynamische Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds erweitert werden.

Die Frage der phänomenologischen Beschreibung der turbulenten Energiekaskade ist im magnetohydrodynamischen Fall noch nicht gelöst. Im Eulerschen Bezugssystem ist es schwierig, zwischen verschiedenen Kaskadenmechanismen zu unterscheiden. Aus der Skalierung der Lagrangeschen Frequenzspektren ergeben sich Einsichten in die Zeitskalen und die Interaktionsmechanismen der turbulenten Energiekaskade.

Die Formen der Trajektorien der Testteilchen werden unter Berücksichtigung der Statistik der Krümmung und Beschleunigung im hydrodynamischen und magnetohydrodynamischen Fall verglichen.

Weiterhin werden in dieser Arbeit verschiedene Antriebsverfahren, die in Simulationen hydrodynamischer Turbulenz verwendet werden, untersucht und auf den MHD-Fall erweitert.

## Abstract

### *Lagrangian statistical properties of hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence*

In this work an investigation of the Lagrangian statistical properties of incompressible hydrodynamic and magnetohydrodynamic turbulence by direct numerical simulations is presented. Magnetohydrodynamic turbulence is studied in several configurations: in the macroscopically isotropic case, under the influence of a strong mean magnetic field, and in the two-dimensional case.

The Lagrangian reference frame is ideally suited to the investigation of the diffusive and dispersive character of turbulence. The time-evolution of the turbulent relative dispersion shows significant differences between the hydrodynamic and the magnetohydrodynamic case. These differences are explained in the framework of several competing alignment processes. This interpretation can be extended to the magnetohydrodynamic case under the influence of a strong mean magnetic field.

The question of the phenomenological description of the turbulent energy cascade in magnetohydrodynamic turbulence is yet unresolved. In the Eulerian reference frame it is difficult to distinguish between different cascade mechanisms. The scaling of the Lagrangian frequency spectra gives insight into the time scales and the interaction mechanisms involved in the energy cascade process.

A comparative study of tracer trajectory shapes in the hydrodynamic and magnetohydrodynamic case by evaluation of the curvature and acceleration statistics is reported.

In addition an investigation of several forcing schemes commonly employed in simulations of hydrodynamic turbulence and their extension to the magnetohydrodynamic case is presented.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Turbulenzbeschreibung</b>	<b>5</b>
2.1	Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen . . . . .	5
2.1.1	Entdimensionierung und charakteristische Parameter . . . . .	6
2.1.2	Druck und Wirbelstärke . . . . .	7
2.1.3	Mittleres Magnetfeld . . . . .	8
2.1.4	Elsässer-Gleichungen . . . . .	8
2.1.5	Zweidimensionaler Fall . . . . .	9
2.1.6	Ideale Invarianten . . . . .	9
2.1.7	Lagrangesche Flüssigkeitsbeschreibung . . . . .	10
2.2	Phänomenologische Beschreibung hydrodynamischer Turbulenz . . . . .	11
2.2.1	Kaskadenbild . . . . .	11
2.2.2	Hypothesen von Kolmogorov . . . . .	12
2.3	MHD-Phänomenologien . . . . .	14
2.3.1	Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie . . . . .	15
2.3.2	Phänomenologie von Goldreich und Sridhar . . . . .	16
2.3.3	Zusammenfassung . . . . .	17
2.4	Intermittenz . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Numerische Methoden</b>	<b>19</b>
3.1	Lösung der Grundgleichungen . . . . .	19
3.1.1	Pseudospektralverfahren . . . . .	20
3.1.2	Integrationsverfahren . . . . .	21
3.1.3	Erreichbare Reynoldszahlen . . . . .	22
3.1.4	Anfangsbedingung . . . . .	22
3.2	Verfolgung der Testteilchen . . . . .	23
3.2.1	Interpolationsverfahren . . . . .	23
3.2.2	Integration der Bewegungsgleichung . . . . .	24
3.2.3	Diagnostiken . . . . .	24
3.2.4	Anfangspositionen der Teilchen . . . . .	25
3.2.5	Auswertung . . . . .	25
3.3	Parallelisierung und Skalierung . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Antriebsmethoden</b>	<b>27</b>
4.1	Grundsätzliche Erwägungen . . . . .	27
4.2	Hydrodynamische Turbulenz . . . . .	28
4.2.1	Stochastische Verfahren . . . . .	29
4.2.2	Deterministische Methoden . . . . .	30

4.2.3	Vergleich der Verfahren . . . . .	31
4.3	Magnetohydrodynamische Turbulenz . . . . .	34
4.3.1	Stochastische Antriebe . . . . .	35
4.3.2	Deterministische Antriebe . . . . .	35
4.3.3	Vermeidung der Ausbildung Alfvénscher Zustände . . . . .	37
4.3.4	Einfluss des mittleren Magnetfelds . . . . .	38
4.3.5	Zusammenfassung . . . . .	39
4.4	Besonderheiten im zweidimensionalen Fall . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Die Simulationen aus Eulerscher Sicht</b>	<b>41</b>
5.1	Parameter und Kennzahlen . . . . .	41
5.1.1	Die vorgegebenen Parameter . . . . .	41
5.1.2	Charakteristische Skalen und die turbulente Reynoldszahl . . . . .	42
5.2	Energiespektren . . . . .	47
5.3	Räumliche Gestalt der Felder . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Einzelteilchenstatistik</b>	<b>57</b>
6.1	Absolute Dispersion . . . . .	57
6.1.1	Makroskopisch isotrope Fälle . . . . .	58
6.1.2	Anisotroper MHD-Fall . . . . .	61
6.1.3	Zweidimensionaler MHD-Fall . . . . .	64
6.2	Lagrangesche Frequenzspektren . . . . .	64
6.2.1	Dreidimensionaler Fall . . . . .	67
6.2.2	Zweidimensionaler Fall . . . . .	71
6.3	Lagrangesche Strukturfunktionen . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Zwei-Teilchen-Statistik</b>	<b>79</b>
7.1	Relative Dispersion . . . . .	79
7.1.1	Makroskopisch isotroper Navier-Stokes- und MHD-Fall . . . . .	82
7.1.2	Einfluss des mittleren Magnetfeldes . . . . .	87
7.1.3	Zweidimensionaler Fall . . . . .	94
7.2	Relativgeschwindigkeit . . . . .	96
7.2.1	Ausrichtungsprozesse . . . . .	96
7.2.2	Wahrscheinlichkeitsverteilung der Relativgeschwindigkeit . . . . .	103
7.2.3	Zweidimensionaler Fall . . . . .	106
<b>8</b>	<b>Eigenschaften der Teilchentrajektorien</b>	<b>109</b>
8.1	Beispiele für Teilchentrajektorien . . . . .	109
8.2	Analyse . . . . .	118
8.2.1	Beschleunigung . . . . .	118
8.2.2	Krümmung . . . . .	122
8.2.3	Zusammenhang der Trajektorienform mit den Strukturen des Vortizitätsfeldes . . . . .	130
8.2.4	Zusammenfassung . . . . .	131
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>133</b>

---

<b>A</b>	<b>Vergleichszahlen der Antriebsmethoden</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Integrale Längenskala</b>	<b>143</b>
B.1	Zusammenhang zwischen $L_{\text{cor}}$ und $R(r)$ . . . . .	143
B.2	Zusammenhang zwischen $R(r)$ und $E(k)$ . . . . .	144
B.2.1	Fourier-Transformation radialsymmetrischer Funktionen . . . . .	144
B.2.2	Wiener-Khinchin-Theorem . . . . .	145
B.2.3	Zusammenhang zwischen $L_{\text{cor}}$ und $E(k)$ . . . . .	145
<b>C</b>	<b>Anfangs-Anordnung der Lagrangeschen Testteilchen</b>	<b>147</b>
<b>D</b>	<b>Einfluss eines einzelnen Eddies</b>	<b>149</b>
<b>E</b>	<b>Batchelor-Gesetz im MHD-Fall</b>	<b>153</b>
E.1	Kolmogorov- und Goldreich-Sridhar- Phänomenologie . . . . .	153
E.2	Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie . . . . .	153
E.3	Batchelor-Zeitskala . . . . .	154
<b>F</b>	<b>Winkelstatistik</b>	<b>155</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>157</b>
	<b>Liste verwendeter Abkürzungen und Symbole</b>	<b>167</b>



# 1 Einleitung

Ein großer Teil der Materie, die uns umgibt, wie Flüsse, Ozeane, die Atmosphäre, kann als Fluid, d. h. als Flüssigkeit beschrieben werden. Auch ionisierte Materie, die einen großen Teil der sichtbaren Materie des Universums ausmacht [17], kann zumindest innerhalb gewisser Grenzen als elektrisch leitfähiges Fluid angesehen werden, welches durch Magnetfelder beeinflusst werden kann.

Wenn ein Fluid mit einer ausreichend hohen Geschwindigkeit fließt<sup>1</sup>, wird seine Strömung turbulent. Dies bedeutet, dass die Strömung Strukturen auf einem breiten Band von Längen- und Zeitskalen aufweist und nicht mehr vorhersagbar ist. Über die Zeitentwicklung turbulenter Strömungen können lediglich statistische Aussagen gemacht werden. Auch eine statistische Beschreibung turbulenter Strömungen ist nur in begrenztem Rahmen möglich, denn bisher konnte noch keine umfassende statistische Theorie der Turbulenz aufgestellt werden.

Turbulente Strömungen spielen in vielen natürlichen Systemen, etwa bei der Verteilung von Aerosolen in der Atmosphäre [40], der Entstehung von Magnetfeldern in Himmelskörpern [27] und der Dynamik des Sonnenwinds [31], eine wichtige Rolle. Auch in vielen technischen Anwendungen, wie z. B. dem Fahr- und Flugzeugbau [24] oder bei der Vermischung von Substanzen in chemischen Reaktoren [62], sind turbulente Strömungen von hoher Relevanz.

Trotz der großen Formenvielfalt turbulenter Strömungen in der Natur und Technik teilen diese doch alle eine Reihe von Eigenschaften wie z. B. ein hoch effizientes Mischungsverhalten. Ziel der allgemeinen Turbulenzforschung ist es daher, diese universellen statistischen Eigenschaften zu untersuchen, und eine möglichst allgemeingültige Beschreibung derselben zu finden.

Ein großer Durchbruch in der Theorie turbulenter Strömungen war Kolmogorovs phänomenologisches Modell zur Beschreibung der turbulenten Energiekaskade, mit dem er die Skalierung des Energiespektrums korrekt vorhersagte [51]. Jedoch wurde mit einer zunehmenden Verbesserung der experimentellen Messmethoden bald klar, dass man mit diesem Modell wichtige Eigenschaften turbulenter Strömungen, wie ihre gebrochene Selbstähnlichkeit und Intermittenz, nicht beschreiben kann. In magnetohydrodynamischer Turbulenz konnte bis heute noch kein phänomenologisches Modell aufgestellt werden, das die Energiekaskade zufriedenstellend beschreiben könnte.

In der Vergangenheit wurden Strömungen bevorzugt im Eulerschen Sinne an festen Punkten in einem gewählten Bezugssystem untersucht. Dies ist auch heute noch der Fall, und wird sich auch in Zukunft nicht ändern, denn für viele Anwendungen ist dies der sinnvollste Zugang. Gewisse Eigenschaften turbulenter Strömungen lassen sich jedoch besser im Lagrangeschen Bezugssystem erforschen, indem man den Bahnen infinitesimaler

---

<sup>1</sup>Die Höhe der kritischen Geschwindigkeit hängt von der Art des Fluids und der Geometrie der Strömung ab.

Fluidelemente folgt. Dies trifft vor allem auf die turbulente Diffusion zu, d. h. die charakteristische Eigenschaft turbulenter Strömungen, für eine besonders effiziente Vermischung und Verteilung von Substanzen zu sorgen. Weiterhin bietet das Lagrangesche Bezugssystem einen zweiten, unabhängigen Zugang zur statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen. So können phänomenologische Turbulenzmodelle, die in der Regel im Eulerschen Bezugssystem aufgestellt werden, auf ihre Stichhaltigkeit untersucht werden, indem man ihre Vorhersagen über die Lagrangeschen statistischen Eigenschaften der Turbulenz überprüft. Die Eulersche und die Lagrangesche Turbulenz-Statistik können sich so also gegenseitig ergänzen.

Nachdem eine experimentelle Untersuchung turbulenter Strömungen im Lagrangeschen Bezugssystem mit hoher Messgenauigkeit erst in den letzten zehn bis fünfzehn Jahren möglich geworden ist [89, 96, 129], hat die Lagrangesche Turbulenzstatistik erst in jüngerer Zeit an Bedeutung gewonnen. Auch in phänomenologischen Turbulenzmodellen ist der Lagrangesche Aspekt in der Regel nicht berücksichtigt worden. Im magnetohydrodynamischen Fall sind die Lagrangeschen statistischen Eigenschaften bis heute nur über numerische Simulationen zugänglich. Dies ist unter anderem durch die großen Schwierigkeiten bedingt, voll entwickelte magnetohydrodynamische Turbulenz unter Laborbedingungen zu erzeugen.

In dieser Arbeit werden die Lagrangeschen statistischen Eigenschaften (magneto-)hydrodynamischer Turbulenz mit Hilfe direkter numerischer Simulationen untersucht. Hierbei werden die Besonderheiten des magnetohydrodynamischen Falls durch den Vergleich mit dem hydrodynamischen Fall herausgearbeitet. Magnetohydrodynamische Turbulenz wird in drei verschiedenen Konfigurationen untersucht, nämlich im makroskopisch isotropen Fall, unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes und im zweidimensionalen Fall.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Gleichungen, die Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen, vorgestellt. Weiterhin wird eine Einführung in die phänomenologische Turbulenzbeschreibung gegeben, und die wichtigsten phänomenologischen Modelle magnetohydrodynamischer Turbulenz werden besprochen.

Die verwendeten numerischen Methoden zur Lösung der Grundgleichungen und die Verfolgung der Testteilchen in den turbulenten Feldern werden in Kapitel 3 erläutert.

Nachdem in dieser Arbeit statistisch stationäre turbulente Strömungen untersucht werden, muss zur Aufrechterhaltung eines quasistationären Zustands ein Antriebsverfahren auf großen Skalen eingesetzt werden. In Kapitel 4 wird ein Vergleich zwischen verschiedenen Antriebsformen dargestellt, die in Simulationen hydrodynamischer Turbulenz eingesetzt werden. Die Probleme, die bei der Erweiterung dieser Antriebsformen auf den MHD-Fall auftreten, und Möglichkeiten für ihre Auflösung werden im zweiten Teil dieses Kapitels beschrieben.

Die Lagrangesche Turbulenzstatistik baut auf Erkenntnissen, die man im Eulerschen Bezugssystem über turbulente Strömungen gewonnen hat, auf. In Kapitel 5 werden daher die untersuchten Systeme zunächst aus Eulerscher Sicht über ihre typischen Längen- und Zeitskalen, ihre Energiespektren und ihre räumliche Gestalt charakterisiert.

Die restliche Arbeit befasst sich mit verschiedenen Formen der Lagrangeschen Turbulenzstatistik. In Kapitel 6 wird die Statistik einzelner Testteilchen beschrieben. Dazu gehört die absolute Dispersion, aber auch die Lagrangeschen Strukturfunktionen und die Lagrangeschen Frequenzspektren, die in Zusammenhang mit der phänomenologischen

Turbulenzbeschreibung stehen.

Die relative Dispersion von Testteilchen wird in Kapitel 7 untersucht. Die Übereinstimmung der Resultate mit phänomenologischen Vorhersagen über die relative Dispersion wird besprochen. Es wird gezeigt, dass der Zeitablauf der relativen Dispersion über das Zusammenspiel verschiedener Ausrichtungsprozesse verstanden werden kann.

In Kapitel 8 werden charakteristische Trajektorienformen vorgestellt, die bei der Betrachtung der Teilchenbahnen ins Auge fallen. Weiterhin werden Versuche dargestellt, die Form der Trajektorien über Größen wie die Krümmung und die Zentripetalbeschleunigung zu klassifizieren.

Das letzte Kapitel fasst die Arbeit zusammen und legt offene Fragestellungen dar. Einige längere Herleitungen, die Vergleichszahlen der Antriebsformen, eine Einführung in die Winkelstatistik und ein stark vereinfachtes Modell, das für das Verständnis mancher Aspekte der relativen Dispersion hilfreich sein kann, können im Anhang gefunden werden.



## 2 Turbulenzbeschreibung

In der Turbulenzforschung geht man in der Regel von einer Flüssigkeitsbeschreibung durch die Navier-Stokes-Gleichungen oder ihren erweiterten Formen wie z. B. den magnetohydrodynamischen (MHD-) Gleichungen aus. Analytische Lösungen dieser Gleichungen lassen sich nur für einfache, laminare Probleme angeben. Deswegen werden in der Turbulenztheorie Modelle verwendet, die je nach Anwendung unterschiedliche Wege der Vereinfachung verfolgen. In technischen Problemen, wie z. B. der turbulenten Umströmung eines Fahrzeuges, reicht es oft aus, nur die Strömung auf großen räumlichen Skalen betrachten. Zur Beschreibung der im Allgemeinen komplexen Randbedingungen muss dagegen viel Aufwand getrieben werden.

In der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird, wird ein anderer Ansatz verfolgt. Hier sind gerade die kleinskaligen turbulenten Fluktuationen von Interesse, weil man ihnen ein universelles statistisches Verhalten zuspricht. Der Einfluss der Ränder und unter bestimmten Bedingungen auch der großen räumlichen Skalen wird dagegen vernachlässigt.

In diesem Kapitel werden zunächst kurz die Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen eingeführt. Eine ausführliche Herleitung dieser Gleichungen findet man z. B. in [25, 53, 70]. Anschließend wird ein kurzer Überblick über die phänomenologischen Turbulenztheorien gegeben, die im Folgenden von Bedeutung sind. Die Intermittenz turbulenter Strömungen zeigt die Grenzen der phänomenologischen Beschreibung auf.

### 2.1 Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen

Die MHD-Gleichungen werden zur Beschreibung von Strömungen elektrisch leitfähiger Flüssigkeiten verwendet. Unter geeigneten Voraussetzungen<sup>1</sup> kann mit ihnen auch die Dynamik nichtrelativistischer Plasmen beschrieben werden. Sind die Strömungsgeschwindigkeiten sehr viel kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit (magneto-)akustischer Wellen im Fluid, so ist die Annahme der Inkompressibilität gerechtfertigt. Die Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld lauten in diesem Fall in Gaußschen Einheiten

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \nu \Delta \mathbf{v} \quad \text{Impulsbilanz} \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{Inkompressibilitätsbedingung.} \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{v}$  das Geschwindigkeitsfeld,  $\mathbf{B}$  das Magnetfeld und  $p$  den Druck.  $\rho_0$  ist die konstante Dichte, die in dieser Arbeit zu Eins gewählt wird, und  $\nu$  die kinematische Viskosität des Fluids.

---

<sup>1</sup>Die MHD-Beschreibung ist nur für Plasmen mit ausreichend hoher Stoßrate auf Zeit- und Längenskalen, die sehr viel größer sind als die Gyrofrequenz bzw. der Larmor-Radius der Elektronen und Ionen, geeignet.

Der Lorentz-Kraftterm<sup>2</sup> kann in zwei Anteile aufgespalten werden: den Gradienten des magnetischen Drucks  $-\frac{1}{8\pi}\nabla B^2$  und die magnetische Spannung  $\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{B}$ . Im Falle einer vernachlässigbaren elektrischen Leitfähigkeit des Fluids entfällt der Lorentz-Kraftterm auf der rechten Seite der Gleichung (2.1), die Gleichungen (2.1) und (2.2) entsprechen dann den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen.

Die Zeitentwicklung des Magnetfelds wird durch die Induktionsgleichung beschrieben, die man unter Vernachlässigung des Verschiebungsstroms und unter Annahme einer konstanten Resistivität  $\lambda$  aus den Maxwell'schen Gleichungen und dem verallgemeinerten Ohmschen Gesetz herleiten kann. Weiterhin ist die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes zu berücksichtigen.

$$\partial_t\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \lambda\Delta\mathbf{B} \quad \text{Induktionsgleichung} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Quellenfreiheit des Magnetfelds} \quad (2.4)$$

Insgesamt setzen sich die MHD-Gleichungen aus den Gleichungen (2.1) bis (2.4) zusammen.

### 2.1.1 Entdimensionierung und charakteristische Parameter

Um die allgemeinen Eigenschaften der MHD-Gleichungen und den Einfluss charakteristischer Parameter untersuchen zu können, werden in dieser Arbeit die MHD-Gleichungen in einer entdimensionierten Form verwendet. Dazu werden alle Größen des Systems mit Hilfe einer charakteristischen Länge  $L_{\text{ch}}$ , Geschwindigkeit  $V_{\text{ch}}$ , Magnetfeld  $B_{\text{ch}}$  und der konstanten Massendichte  $\rho_0$  skaliert.

$$\mathbf{r} \rightarrow L_{\text{ch}}\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \rightarrow V_{\text{ch}}\mathbf{v}, \quad t \rightarrow \frac{L_{\text{ch}}}{V_{\text{ch}}}t, \quad \mathbf{B} \rightarrow B_{\text{ch}}\mathbf{B}, \quad p \rightarrow \rho_0 V_{\text{ch}}^2 p$$

In diesen dimensionslosen, sogenannten *Alfvénischen* Einheiten lauten die MHD-Gleichungen dann

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + S_B \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \text{Re}^{-1}\Delta\mathbf{v} \quad (2.5)$$

$$\partial_t\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \text{Rm}^{-1}\Delta\mathbf{B} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.8)$$

Hierbei ist  $S_B = B_{\text{ch}}^2/(4\pi\rho_0 V_{\text{ch}}^2)$  der sogenannte Interaktionsparameter, der ein Maß für die relative Bedeutung des Geschwindigkeitsfeldes und des Magnetfeldes für die Dynamik der Strömung ist. Er wird in dieser Arbeit gleich eins gesetzt, indem man die charakteristische Geschwindigkeit zur Entdimensionierung des Systems im MHD-Fall gleich der Alfvén-Geschwindigkeit  $v_A = B_{\text{ch}}/\sqrt{4\pi\rho_0}$  wählt.  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$  bezeichnet die dimensionslose elektrische Stromdichte.

Die charakteristischen Parameter der Gleichungen sind nun sichtbar. Dies sind die hydrodynamische Reynoldszahl  $\text{Re} = L_{\text{ch}}V_{\text{ch}}/\nu$ , die eine Abschätzung für den Einfluss der

<sup>2</sup>Genau genommen handelt es sich hierbei nicht um einen Kraft- sondern um einen Beschleunigungsterm. Wegen der konstanten Massendichte werden in dieser Arbeit Beschleunigungsterme als Kraftterme bezeichnet.

	Re	Rm	Pm	Ref.
Turbulenzexperimente mit passiven Testteilchen	$\approx 1 \cdot 10^5$	-	-	[90, 132]
Wolken in der Atmosphäre	$10^6$ - $10^7$	-	-	[115]
Dynamo-Experiment (Lyon)	$\approx 5 \cdot 10^6$	$\leq 50$	$10^{-5}$	[87]
Erdkern	$10^8$	$10^2$	$10^{-6}$	[125]
Sonne (Konvektionszone, oberer Teil)	$10^{13}$	$10^6$	$10^{-7}$	[27]
Sonne (Konvektionszone, unterer Teil)	$10^{13}$	$10^9$	$10^{-4}$	[27]
Akkretionsscheiben um aktive galaktische Kerne	$10^7$	$10^{11}$	$10^4$	[27]

**Tabelle 2.1** Beispiele für hydrodynamische und magnetische Reynoldszahlen, sowie für die magnetische Prandtlzahl in Experimenten und in der Natur. Die für astrophysikalische Systeme angegebenen Werte sind teilweise mit hohen Unsicherheiten behaftet.

nichtlinearen Terme gegenüber dem dissipativen Term in Gleichung (2.5) darstellt. Sie charakterisiert den Übergang von laminaren Strömungen zu turbulenten<sup>3</sup>. Auf ähnliche Weise ist die magnetische Reynoldszahl  $Rm = L_{ch}V_{ch}/\lambda$  eine Abschätzung des relativen Einflusses des Induktionsterms gegenüber dem Resistivitätsterm in der Induktionsgleichung. Die in der Natur auftretenden Werte der hydrodynamischen und magnetischen Reynoldszahlen erstrecken sich über viele Größenordnungen (siehe Tabelle 2.1). In direkten numerischen Simulationen können nur vergleichsweise niedrige Werte der Reynoldszahlen erreicht werden ( $\mathcal{O}(10^3 - 10^4)$ ).

Die magnetische Prandtlzahl  $Pr_m = Rm/Re = \nu/\lambda$  ist ein Maß für die relative Bedeutung der viskosen zur Ohmschen Dissipation. Sie variiert in der Natur ebenfalls über viele Größenordnungen (siehe Tabelle 2.1). In dieser Arbeit wird die magnetische Prandtlzahl stets zu eins gewählt. Dadurch ergibt erstrecken sich die Fluktuationen des Geschwindigkeits- und Magnetfelds ungefähr über den gleichen Längenskalenbereich.

Die hydrodynamische und magnetische Reynoldszahl, wie sie in den Gleichungen (2.5) und (2.6) erscheinen, werden im Folgenden formal als dimensionslose kinematische Viskosität bzw. Resistivität des Fluids behandelt und entsprechend mit den Variablen  $\nu$  und  $\lambda$  bezeichnet. Zur Charakterisierung der turbulenten Strömung sind wegen der in dieser Arbeit verwendeten periodischen Randbedingungen alternative Definitionen der Reynoldszahlen besser geeignet (siehe Kapitel 4 und 5).

### 2.1.2 Druck und Wirbelstärke

Der Druck ist wegen der Inkompressibilität des Fluids eine passive Variable. Er kann durch Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta p = \nabla \cdot [-(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}] \quad (2.9)$$

unter Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen bestimmt werden.

Die Vortizitätsgleichung ist eine alternative Darstellung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (2.10)$$

<sup>3</sup>Oberhalb einer kritischen Reynoldszahl, die von der Strömungsgeometrie abhängt, wird eine Strömung turbulent. In Rohrströmungen liegt dieser Wert z. B. bei  $Re \approx 2000$  (siehe z. B. [42]).

wobei  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  die Wirbelstärke bzw. Vortizität des Geschwindigkeitsfeldes ist. Man erhält sie, indem man den Rotationsoperator  $\nabla \times$  auf (2.1) anwendet. Das Geschwindigkeitsfeld ist durch (2.10) bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Bei Verwendung von (2.10) statt (2.1) kann auf die Bestimmung des Druckes über (2.9) verzichtet werden. Deswegen wird im Simulationsprogramm statt der Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld (2.5) die Vortizitätsgleichung gelöst (siehe Kapitel 3).

### 2.1.3 Mittleres Magnetfeld

Die MHD-Gleichungen haben die Eigenschaft, Galilei-invariant zu sein. Dies hat zur Folge, dass man stets ein Inertialsystem finden kann, in dem die mittlere Geschwindigkeit des Fluids Null ist. Es genügt also, die Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes zu betrachten.

Ein mittleres Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  bleibt durch eine Galilei-Transformation der MHD-Gleichungen unberührt, und es kann kein Bezugssystem gewählt werden, in dem es verschwindet. Es macht daher Sinn, das Magnetfeld in Magnetfeldfluktuationen  $\mathbf{b}$  und ein mittleres Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$ , das in dieser Arbeit stets konstant und parallel zur  $z$ -Achse gewählt wird, aufzuteilen

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = B_0 \mathbf{e}_z + \mathbf{b}(x, y, z, t).$$

### 2.1.4 Elsässer-Gleichungen

In den Elsässer-Variablen[45]

$$\mathbf{z}^+ = \mathbf{v} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z}^- = \mathbf{v} - \mathbf{b},$$

ausgedrückt nehmen die MHD-Gleichungen eine besonders symmetrische Form an

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm + (\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\nabla P \pm (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm + \frac{1}{2}(\nu + \lambda) \Delta \mathbf{z}^\pm + \frac{1}{2}(\nu - \lambda) \Delta \mathbf{z}^\mp \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0, \quad (2.12)$$

wobei  $P$  der Gesamtdruck  $P = p + \frac{1}{2}B^2$  ist.

Linearisiert man die Elsässer-Gleichungen um ein starkes mittleres Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  unter Vernachlässigung der dissipativen Effekte, so ergibt sich folgende Gleichung, die die Ausbreitung der Alfvén-Wellen beschreibt[17]

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm \mp (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = 0.$$

Die Funktion  $\mathbf{z}^- = \mathbf{z}^-(\mathbf{x} - \mathbf{B}_0 t)$  steht für Alfvén-Wellen, die sich parallel zum mittleren Magnetfeld ausbreiten, während  $\mathbf{z}^+ = \mathbf{z}^+(\mathbf{x} + \mathbf{B}_0 t)$  sich entgegengesetzt zum mittleren Magnetfeld ausbreitende Wellen beschreibt. In den gewählten Einheiten ist die Alfvén-Geschwindigkeit  $v_A$  gleich der Stärke des mittleren Magnetfelds  $B_0$ . Alfvén-Wellen spielen in der phänomenologischen Beschreibung inkompressibler MHD-Turbulenz eine wichtige Rolle (siehe Kapitel 2.3). In Gleichung (2.11) kann man am nichtlinearen Term  $(\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm$  ablesen, dass die nichtlineare Wechselwirkung in den Elsässer-Gleichungen auf der Interaktion sich entgegengesetzt ausbreitender Alfvén-Wellen beruht.

### 2.1.5 Zweidimensionaler Fall

In manchen Fällen ist die Dynamik eines Fluids im Wesentlichen auf eine Ebene beschränkt [72, 121]. Dies kann durch die Randbedingungen verursacht sein, wenn die Ausdehnung des Fluids in einer Raumrichtung sehr viel kleiner ist als in den beiden anderen, wie es z. B. in der Erdatmosphäre der Fall ist. Im MHD-Fall stellt sich eine ähnliche Situation auch ein, wenn das Fluid einem sehr starken äußeren Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  ausgesetzt ist. Fluktuationen des Geschwindigkeits- und Magnetfelds treten dann fast nur noch in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld auf.

Durch die Beschränkung auf zwei Dimensionen vereinfachen sich die MHD-Gleichungen. Wegen der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeits- und Magnetfeldes können  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{b}$  durch zwei skalare Felder, die Stromfunktion  $\varphi$  und das magnetische Potential  $\psi$  ausgedrückt werden.

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{e}_z \times \nabla \varphi(x, y, t) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{b}(x, y, t) = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi(x, y, t) \quad (2.14)$$

Die Stromdichte  $j$  und die Wirbelstärke  $\omega$  sind ebenfalls skalare Felder, die über  $j = \Delta \psi$  und  $\omega = \Delta \varphi$  berechnet werden können. In  $\omega$ -Darstellung lauten die zweidimensionalen MHD-Gleichungen dann

$$\partial_t \omega = \mathbf{b} \cdot \nabla j - \mathbf{v} \cdot \nabla \omega + \nu \Delta \omega \quad (2.15)$$

$$\partial_t \psi = -\mathbf{v} \cdot \nabla \psi + \lambda \Delta \psi. \quad (2.16)$$

Im Navier-Stokes-Fall unterscheiden sich der zwei- und der dreidimensionale Fall deutlich. So kaskadiert beispielsweise in zweidimensionaler hydrodynamischer Turbulenz die Energie invers<sup>4</sup>, während man in dreidimensionaler hydrodynamischer Turbulenz eine direkte Energiekaskade findet. Zweidimensionale MHD Turbulenz gleicht dagegen in vielen Aspekten, wie z. B. den Kaskadenrichtungen der idealen Invarianten, dem dreidimensionalen MHD-Fall [104].

### 2.1.6 Ideale Invarianten

In der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung (siehe Kapitel 2.2) spielen die quadratischen idealen Invarianten der Navier-Stokes- bzw. MHD-Gleichungen eine wichtige Rolle. Unter idealen Invarianten versteht man Größen, die bei Vernachlässigung der dissipativen Terme der MHD-Gleichungen und bei der Abwesenheit äußerer Kräfte erhalten sind.

Dies ist in allen hier betrachteten Fällen die Gesamtenergie des Fluids

$$E := E^K + E^M = \int_V dV \frac{1}{2} (\mathbf{v}^2 + \mathbf{b}^2),$$

die Summe der kinetischen  $E^K$  und magnetischen Energie  $E^M$  der Strömung. Im Navier-Stokes-Fall entspricht die Gesamtenergie der kinetischen Energie. Die weiteren quadratischen Invarianten hängen vom betrachteten System ab und charakterisieren die topologische Gestalt der Felder. Im dreidimensionalen Navier-Stokes-Fall ist die kinetische

<sup>4</sup>Der Begriff *Energiekaskade* wird in Abschnitt 2.2 näher erläutert.

Helizität

$$H^K = \int_V dV \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

eine weitere ideale Invariante. Sie ist ein Maß für die Verflechtung und Verdrehung der Wirbelröhren.

Im dreidimensionalen MHD-Fall sind die magnetische Helizität<sup>5</sup>

$$H^M = \int_V dV \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

mit  $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$  und die Kreuzhelizität

$$H^X = \int_V dV \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$$

ideal erhalten. Die magnetische Helizität kann in Analogie zur kinetischen Helizität als Maß für die Verflechtung und Verdrehung der magnetischen Flussröhren interpretiert werden. Die Kreuzhelizität beschreibt die Verflechtung der Wirbelröhren mit den Flussröhren [26].

Die Kreuzhelizität ist auch im zweidimensionalen MHD-Fall eine ideale Invariante. An Stelle der magnetische Helizität tritt das mittlere magnetische Potential

$$A := \int_V dV \psi^2.$$

Quadratische ideale Invarianten haben die angenehme Eigenschaft, auch in einem diskreten Fourier-Raum mit einer endlichen Anzahl von Moden erhalten zu bleiben<sup>6</sup> [17, Seite 89].

Berücksichtigt man die dissipativen Terme in den Navier-Stokes- bzw. MHD-Gleichungen, so entwickeln sich die idealen Invarianten in der Zeit<sup>7</sup>. Die Energie zerfällt mit der Gesamtenergiedissipationsrate

$$\epsilon = -\dot{E} = \int_V dV (\nu \omega^2 + \lambda j^2).$$

Die Gesamtenergiedissipationsrate kann in eine magnetische  $\epsilon^M = -\dot{E}^M = \int_V dV \lambda j^2$  und eine kinetische Energiedissipationsrate  $\epsilon^K = -\dot{E}^K = \int_V dV \nu \omega^2$  aufgeteilt werden.

### 2.1.7 Lagrangesche Flüssigkeitsbeschreibung

Bisher wurde die Strömung immer aus der Eulerschen Sichtweise als Feld, also an festen Punkten im gewählten Inertialsystem beschrieben. Im Lagrangeschen Bild verfolgt man dagegen die Trajektorien  $\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t)$  infinitesimaler Fluidelemente. Diese sind durch ihre Startpunkte  $\mathbf{X}_0$  zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  eindeutig bestimmt. Über die Geschwindigkeit wird die Eulersche Beschreibung mit der Lagrangeschen verknüpft, die instantane

<sup>5</sup>Die magnetische Helizität ist nur in Systemen ohne mittleres Magnetfeld erhalten (siehe z. B. [116]).

<sup>6</sup>Man spricht in diesem Zusammenhang von *rugged invariants*.

<sup>7</sup>Einen Überblick über die Zerfallsgesetze der quadratischen idealen Invarianten findet man in [17].

Geschwindigkeit eines Fluidelements ist gleich dem Wert des Geschwindigkeitsfeldes an seiner gegenwärtigen Position

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t). \quad (2.17)$$

In Falle einer verschwindenden Resistivität  $\lambda$  bzw. einer unendlichen magnetischen Reynoldszahl besagt das Alfvénsche Theorem [3, Seite 80f], dass die Magnetfeldlinien an die Fluidelemente eines Teilchens gebunden sind. Dies ist eine nützliche Vorstellung, jedoch sollte sie nicht zu weit interpretiert werden, da es keine Möglichkeit gibt, eine Feldlinie von einer anderen zu unterscheiden (siehe z. B. [47])<sup>8</sup>.

Im restlichen Teil dieses Kapitels steht die Eulersche Turbulenzbeschreibung im Vordergrund. Auf die daraus folgenden Vorhersagen für die Lagrangesche Turbulenzstatistik wird bei der Darstellung der Ergebnisse in den folgenden Kapiteln eingegangen.

## 2.2 Phänomenologische Beschreibung hydrodynamischer Turbulenz

In der phänomenologischen Turbulenzbetrachtung wird in der Regel das Konzept der homogenen Turbulenz verwendet (siehe z. B. [10]), da man die universellen Eigenschaften turbulenter Strömungen untersuchen will. Man betrachtet hierbei turbulente Strömungen weit entfernt von ihren Begrenzungen, und nimmt sie als unendlich ausgedehnt an. Weiterhin sollen die Mittelwerte statistischer Größen nicht vom Ort der Messung abhängen. Oft wird noch die Forderung der statistischen Isotropie hinzugenommen, so dass das Geschwindigkeitsfeld als im statistischen Mittel isotrop angenommen wird.

### 2.2.1 Kaskadenbild

Grundlage phänomenologischer Turbulenzmodelle ist das Kaskadenbild von Richardson [108]. Im Kaskadenbild wird eine turbulente Strömung als Überlagerung von Wirbelstrukturen, den sogenannten *Eddies*<sup>9</sup>, verschiedener Ausdehnung  $\ell$  gesehen. Die typische Geschwindigkeit von Wirbelstrukturen der Ausdehnung  $\ell$  kann z. B. über das Geschwindigkeitsinkrement definiert werden

$$v_\ell := \sqrt{\langle \delta v^2(\ell) \rangle} = \sqrt{\langle [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}(\mathbf{r})]^2 \rangle}.$$

Die großen Wirbelstrukturen sind instabil und zerfallen in kleinere Wirbelstrukturen, diese kleineren Wirbelstrukturen zerfallen anschließend in noch kleinere, usw. Die kleinsten Wirbel werden schließlich durch Dissipation in ungeordnete Wärmebewegung aufgelöst. Die kinetische Energie kaskadiert dabei in vielen Schritten durch nichtlineare Wechselwirkung zwischen Wirbelstrukturen ähnlicher Ausdehnung<sup>10</sup> von großen zu kleinen Längenskalen. Die typische Zeitskala, auf der ein Wirbel einen wesentlichen Teil seiner

<sup>8</sup>Feldlinien sind im Grunde nur ein mathematisches Konstrukt, das der Visualisierung des Magnetfelds dient.

<sup>9</sup>Der englische Begriff *Eddy* hat keine direkte Entsprechung in der deutschen Sprache. Dies ist mag auch daran liegen, dass es für einen Eddy keine genaue Definition gibt.

<sup>10</sup>Im Fourier-Raum spricht man daher von einer *lokalen* Wechselwirkung.

	Navier-Stokes (3D)	MHD (3D)	MHD (2D)
$E$	direkt	direkt	direkt
$H^K$	direkt	-	-
$H^X$	-	direkt	direkt
$H^M$ bzw. $A$	-	invers	invers

**Tabelle 2.2** Kaskadenrichtungen der quadratischen idealen Invarianten [17, Seite 167].

Energie weitergibt, ist die Kaskadenzeit  $\tau_{\text{cas}}$ , die in hydrodynamischer Turbulenz der sogenannten *eddy turnover time* oder auch Wirbelzeit  $\tau_\ell := \ell/v_\ell$  entspricht.

Die spektrale Verteilung der kinetischen Energie auf Wirbelstrukturen verschiedener Ausdehnung  $\ell \sim k^{-1}$  wird durch winkelintegrierte Energiespektrum

$$E(k) := \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}' \delta(|\mathbf{k}'| - k) |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}')|^2$$

dargestellt.

Auch andere quadratische ideale Invarianten unterliegen einem turbulenten Kaskadenprozess. Dieser kann auch ein inverser sein, bei dem im Gegensatz zu einer direkten Kaskade eine Größe von kleinen zu großen Skalen weitergegeben wird. Einen Überblick über die Kaskadenrichtungen bietet Tabelle 2.2.

## 2.2.2 Hypothesen von Kolmogorov

Nach den Hypothesen von Kolmogorov<sup>11</sup> (K41) (siehe z. B. [51]) kann man das Energiespektrum der Wirbelstrukturen bei ausreichend hoher Reynoldszahl in drei Bereiche aufteilen (siehe Abbildung 2.1). Der Bereich der großen Wirbelstrukturen ist stark von der bestimmten Realisierung einer turbulenten Strömung, also den Randbedingungen, der Art der Energiezufuhr etc., geprägt. Die typische Ausdehnung der größten turbulenten Strukturen kann über  $L_E = E^{3/2}/\epsilon$  abgeschätzt werden[102]. Die Zeitskala, auf der sich die größten Wirbelstrukturen entwickeln, ist die *large eddy turnover time*, die durch  $T_E = E/\epsilon$  näherungsweise berechnet werden kann.

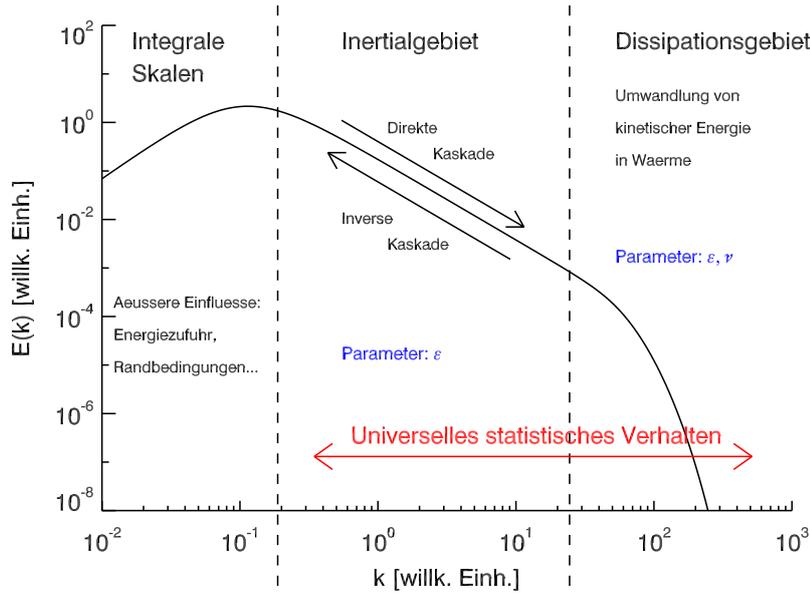
Die turbulenten Wirbelstrukturen mit einer Ausdehnung  $\ell \ll L_E$  sind nach K41 statistisch isotrop und zeigen ein universelles statistisches Verhalten, das nur von der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der Energiedissipationsrate  $\epsilon$  abhängt.

Die Dissipation kinetischer Energie in ungeordnete Wärmebewegung findet auf den kleinsten turbulenten Skalen statt. Eine Abschätzung für die Skalen, auf denen die dissipativen Effekte dominant werden, bieten die sogenannten Kolmogorov- oder auch Dissipationsskalen<sup>12</sup>

$$\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad \text{und} \quad u_\eta = (\nu\epsilon)^{1/4}.$$

<sup>11</sup>Es sind verschiedene deutsche Schreibweisen dieses russischen Namens üblich: Kolmogorov, Kolmogorow, Kolmogoroff. In dieser Arbeit wird bei russischen Namen die transliterierte Schreibweise verwendet, in diesem Falle also *Kolmogorov*.

<sup>12</sup>Tatsächlich unterschätzt man mit den Kolmogorov-Skalen die typische Ausdehnung der Eddies des Dissipationsbereichs[102]. Dimensionsanalytische Abschätzungen können immer noch einen konstanten Vorfaktor enthalten



**Abbildung 2.1** Schematische Darstellung des Energiespektrums nach Kolmogorov.

Sie stellen die einzige mögliche Kombination der Parameter  $\epsilon$  und  $\nu$  dar, die die Dimension einer Länge, Zeit oder Geschwindigkeit ergeben. Die kleinsten Wirbelstrukturen der Ausdehnung  $\ell \approx \eta$  bilden den sogenannten Dissipationsbereich.

Wirbelstrukturen mit  $\eta \ll \ell \ll L_E$  gehören dem Inertialgebiet an. Im Inertialgebiet können nach K41 sowohl der Einfluss der größten Wirbelstrukturen als auch dissipative Effekte vernachlässigt werden. Die funktionale Form der Statistik der Wirbelstrukturen des Inertialgebietes ist allein durch die Energiedissipationsrate  $\epsilon$ , die der Transferrate der Energie in der Kaskade entspricht, bestimmt.

Der große Erfolg der K41-Phänomenologie ist in ihren Vorhersagen über die Statistik des Inertialgebietes begründet. Mit Hilfe der Dimensionsanalyse

$$\epsilon \sim \frac{v_\ell^2}{\tau_{cas}} \sim \frac{v_\ell^3}{\ell} \quad \rightarrow \quad v_\ell \sim (\epsilon \ell)^{1/3}$$

und dem Zusammenhang (siehe z. B. [17, Seite 95ff])

$$v_\ell^2 \sim kE(k) \quad \text{mit} \quad k \sim \ell^{-1} \tag{2.18}$$

erhält man für das winkelintegrierte Energiespektrum

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}.$$

Weiterhin folgt für die longitudinalen Strukturfunktion des Geschwindigkeitsfeldes

$$S_p^{E,\parallel}(\ell) = \langle [(\mathbf{v}(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \boldsymbol{\ell}/\ell]^p \rangle \sim (\epsilon \ell)^{p/3}.$$

Das Energiespektrum entspricht einer Fouriertransformation der Strukturfunktion zweiter Ordnung. Zwischen der Skalierung des Geschwindigkeitsspektrums  $E(k) \sim k^{-\alpha}$  und

der longitudinalen Strukturfunktion zweiter Ordnung besteht in statistisch isotroper Turbulenz der Zusammenhang[51]

$$1 \leq \alpha < 3, \quad S_2^{E,\parallel}(\ell) \sim \ell^{\alpha-1}.$$

Für die Strukturfunktion dritter Ordnung lässt sich eine exakte Beziehung angeben, das sogenannte 4/5-Gesetz [51]

$$S_3^{E,\parallel}(\ell) = -\frac{4}{5}\epsilon\ell.$$

Experimentell wurde die  $k^{-5/3}$ -Skalierung des Energiespektrums vielfach bestätigt (siehe z. B. [63, 88]). Jedoch weichen die Skalierungsexponenten  $\zeta^E(p)$  der Strukturfunktionen höherer Ordnung deutlich von dem erwarteten linearen Verhalten  $\zeta^E(p) = p/3$  ab. Diese Abweichung wird von der intermittenten Natur turbulenter Strömungen verursacht (siehe Abschnitt 2.4).

## 2.3 MHD-Phänomenologien

Der Erfolg der K41-Phänomenologie bei der Beschreibung der Energiekaskade in hydrodynamischer Turbulenz legt es nahe, auch im magnetohydrodynamischen Fall ein ähnlich einfaches phänomenologisches Turbulenzmodell zu suchen.

Das Energiespektrum hat im MHD-Fall einen kinetischen und magnetischen Anteil

$$E(k) = E^K(k) + E^M(k) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{k}' \delta(|\mathbf{k}'| - k) (|\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}')|^2 + |\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}')|^2).$$

Statt der Skalenabhängigkeit der Geschwindigkeitsfluktuationen betrachtet man im Allgemeinen die Skalenabhängigkeit der Fluktuationen der Elsässer-Felder  $z_\ell^\pm \sim z_\ell$ . Zwischen  $z_\ell^+$  und  $z_\ell^-$  wird nicht unterschieden, da im einfachsten Fall die Effekte der Kreuzhelizität vernachlässigt werden<sup>13</sup>.

Im Allgemeinen wird in den folgenden Modellen für die Energiekaskade davon ausgegangen, dass die Energie im Inertialbereich ungefähr gleich auf die Fluktuationen des Magnetfeldes und des Geschwindigkeitsfeldes verteilt ist, und dass sich diese über den gleichen Längenskalenbereich erstrecken  $v_\ell \sim b_\ell$  (*Äquipartition*). Die Größe der kleinsten dissipativen Eddies wird im MHD-Fall in der Regel über die Iroshnikov-Kraichnan-Längenskala abgeschätzt

$$\eta_{\text{IK}} = \left( \frac{\nu^2 b_{\text{rms}}}{\epsilon} \right)^{1/3}.$$

Trotz der bereits angenommenen Vereinfachungen gibt es im magnetohydrodynamischen Fall noch keine allgemein anerkannte Phänomenologie, die die Energiekaskade zufriedenstellend beschreibt. Das liegt unter anderem an folgenden Komplikationen:

- Ein mittleres Magnetfeld wie auch die magnetischen Fluktuationen des integralen Skalenbereiches können den Energietransferprozess im Inertialgebiet beeinflussen.

<sup>13</sup>Für Systeme mit hoher Kreuzhelizität gibt es eigene phänomenologische Modelle. In dieser Arbeit werden nur Systeme mit geringer Kreuzhelizität untersucht.

- Experimentelle Messungen des Energiespektrums sind praktisch nicht vorhanden, weil die Erzeugung voll entwickelter MHD-Turbulenz unter typischen Laborbedingungen nicht möglich ist [125]. Im Sonnenwind findet man eine Skalierung des Energiespektrums mit  $k^{-5/3}$  [17], jedoch ist fraglich, ob der Sonnenwind mit den inkompressiblen MHD-Gleichungen hinlänglich beschrieben werden kann.
- Weitaus zahlreicher sind die Resultate numerischer Simulationen. Die Ergebnisse sind widerstreitend, in der Regel findet man eine Skalierung der Energiespektren mit  $k^{-5/3}$  oder  $k^{-3/2}$  [86]. Es gibt Hinweise darauf, dass die gemessenen Skalierungsgesetze von der Präparation der integralen Fluktuationen abhängen ([81], siehe auch Kapitel 4).

Aus den oben genannten Punkten kann man schließen, dass eine phänomenologische Beschreibung der Energiekaskade im MHD-Fall auch im Inertialbereich nicht allein mit dem Parameter  $\epsilon$  auskommen kann, sondern auch die Effekte des mittleren Magnetfelds und der großskaligen Magnetfeldfluktuationen auf den Kaskadenprozess berücksichtigen muss. Im Folgenden sollen einige MHD-Phänomenologien vorgestellt werden, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

### 2.3.1 Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie

In der ältesten MHD-Phänomenologie, der sogenannten *Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie* (IK) [67, 71], wird angenommen, dass die Energiekaskade durch Kollisionen zwischen sich entgegengesetzt ausbreitenden Alfvén-Wellenpaketen verursacht wird. Eine nichtlineare Wechselwirkung ist nur zwischen Alfvén-Wellen entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung möglich, wie man aus den Elsässer-Gleichungen (2.11) ersehen kann. Die Wechselwirkungszeit  $\tau_{ac}$  während einer solchen Kollision ist von der Größenordnung der Alfvén-Zeit  $\tau_A$ . Während einer einzelnen Kollision wird ein Wellenpaket wegen der kurzen Wechselwirkungszeit im Allgemeinen nur gering verformt, wie aus der folgenden Abschätzung folgt

$$\frac{\delta z_\ell}{z_\ell} \sim \frac{\tau_A}{\tau_\ell} \sim \frac{z_\ell}{v_A} \ll 1.$$

Wenn man davon ausgeht, dass die Kollisionen statistisch unabhängige Phasenbeziehungen haben, sind viele ( $N_{ia} \sim (v_A/z_\ell)^2$ ) Kollisionen nötig, um ein Wellenpaket aufzulösen. Deswegen ergibt sich für die Kaskadenzeit

$$\tau_{cas}^{IK} \sim \left( \frac{v_A}{z_\ell} \right)^2 \tau_A \sim \frac{1}{k z_\ell} \frac{v_A}{z_\ell},$$

woraus für das Energiespektrum

$$E^{IK}(k) \sim (\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}$$

folgt.

In zweidimensionaler MHD-Turbulenz bietet die Iroshnikov-Kraichnan Phänomenologie eine recht gute Beschreibung der Energiekaskade. Hier wird eine Skalierung des Energiespektrums mit  $k^{-3/2}$  gefunden [20]. In dreidimensionaler MHD-Turbulenz findet man dagegen im makroskopisch isotropen Fall in der Regel eine Skalierung des Energiespektrums

mit  $k^{-5/3}$  [17, 86]. Eine wesentliche Schwäche der IK-Phänomenologie besteht darin, dass sie von einer isotropen Energiekaskade ausgeht. In MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds erwartet man jedoch, dass die Energiekaskade im Wesentlichen von den  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen getragen wird [17, Seite 100f.]

$$\epsilon \sim \frac{z_{\ell_{\perp}}^2}{\tau_{\text{cas}}}, \quad (2.19)$$

(mit  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}$ ,  $\mathbf{k}_{\parallel} = k_z \hat{\mathbf{e}}_z$ ). Das senkrechte und das parallele Energiespektrum

$$E(k_{\perp}) = \int d\mathbf{k}' \delta(|\mathbf{k}'_{\perp}| - k_{\perp}) E(\mathbf{k}'), \quad E(k_{\parallel}) = \int d\mathbf{k}' \delta(|\mathbf{k}'_{\parallel}| - k_{\parallel}) E(\mathbf{k}'),$$

sollten also einen unterschiedlichen Verlauf zeigen. Die Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie kann die erwartete und in numerischen Simulationen beobachtete Anisotropie der Energiekaskade nicht beschreiben.

*Gogoberidze* (GG) [54] hat eine Phänomenologie für MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds vorgeschlagen, die einer anisotropen Version der Iroshnikov-Kraichnan Phänomenologie entspricht. Die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen des integralen Längenskalenbereichs lenken Alfvén-Wellen, die sich parallel und antiparallel zum Magnetfeld ausbreiten, voneinander ab. Die Wechselwirkungszeit ist nicht mehr durch die Ausdehnung eines Wellenpaketes sondern durch diesen Dekorrelationseffekt bestimmt  $\tau_{\text{ac}}^{\text{GG}} \sim (k_{\perp} b_{\text{rms}})^{-1}$ . Entsprechend ergibt sich eine Kaskadenzeit von  $\tau_{\text{cas}}^{\text{GG}} \sim b_{\text{rms}} / (k_{\perp} z_{\ell}^2)$ . Mit (2.19) folgt für das senkrechte Energiespektrum

$$E^{\text{GG}}(k_{\perp}) \sim (\epsilon b_{\text{rms}})^{1/2} k_{\perp}^{-3/2}.$$

Diese Skalierung des senkrechten Energiespektrums wurde in mehreren Simulationen anisotroper MHD-Turbulenz gefunden (siehe z. B. [94, 81]). Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, ein solches Skalierungsgesetz herzuleiten (siehe unten).

### 2.3.2 Phänomenologie von Goldreich und Sridhar

In der *Goldreich-Sridhar-Phänomenologie* (GS)[56] verhält sich die Energiekaskade senkrecht zum Magnetfeld ähnlich wie die Energiekaskade im Navier-Stokes-Fall  $\tau_{\text{cas}} \sim \ell_{\perp} / z_{\ell_{\perp}}$ . Das Verhältnis zwischen der mittleren Ausdehnung eines Wellenpaketes senkrecht  $\ell_{\perp}$  und parallel  $\ell_{\parallel}$  zum mittleren Magnetfeld lässt sich nach GS mit Hilfe des sogenannten *kritischen Gleichgewichts*<sup>14</sup> zwischen dem linearen und nichtlinearen Term der idealen Elsässer-Gleichungen

$$(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{z}^{\pm} \sim (\mathbf{z}^{\mp} \cdot \nabla) \mathbf{z}^{\pm}$$

abschätzen

$$v_A / \ell_{\parallel} \sim z_{\ell_{\perp}} / \ell_{\perp} \quad \rightarrow \quad \tau_{\text{cas}}^{\text{GS}} \sim \ell_{\parallel} / v_A \sim \ell_{\perp} / z_{\ell_{\perp}}.$$

Mit (2.19) ergibt sich ein Längenverhältnis von

$$\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp}^{2/3}. \quad (2.20)$$

<sup>14</sup>Im Englischen: *critical balance*

Es sollte also eine zunehmende Streckung der turbulenten Strukturen parallel zum Magnetfeld beobachtbar sein, wenn Strukturen abnehmender Ausdehnung untersucht werden. Für das senkrechte Energiespektrum ergibt sich mit (2.19)

$$E^{\text{GS}}(k_{\perp}) \sim \epsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3},$$

während das parallele Spektrum wie

$$E^{\text{GS}}(k_{\parallel}) \sim k_{\parallel}^{-2}$$

skalieren sollte, was aus der Streckung der Eddies (Gleichung (2.20)) folgt (siehe z. B. [125, Seite 269]).

Nachdem in numerischen Simulationen anisotroper MHD-Turbulenz eine Skalierung des senkrechten Energiespektrums mit  $k_{\perp}^{-3/2}$  statt  $k_{\perp}^{-5/3}$  gefunden wurde, hat *Boldyrev* (DA) [22] eine Modifikation der Goldreich-Sridhar-Phänomenologie vorgeschlagen. In seiner Phänomenologie wird ein weiterer MHD-Effekt berücksichtigt, die sogenannte dynamische Ausrichtung (*dynamic alignment*). Magnet- und Geschwindigkeitsfeld neigen dazu, sich parallel oder antiparallel zueinander auszurichten. Dadurch wird die nichtlineare Wechselwirkung geschwächt, und die Kaskadenzeit verlängert sich

$$\tau_{\text{ac}}^{\text{DA}} = \tau_{\text{cas}}^{\text{DA}} \sim \frac{1}{kz_{\perp}} \frac{v_A}{z_{\ell_{\perp}}}.$$

Für das senkrechte Energiespektrum ergibt sich somit

$$E^{\text{DA}}(k_{\perp}) \sim (\epsilon v_A)^{1/2} k_{\perp}^{-3/2}.$$

Man kann also mit völlig verschiedenen Modellen das gleiche Skalierungsgesetz für die senkrechte Energiekaskade herleiten.

### 2.3.3 Zusammenfassung

In Tabelle 2.3 sind die wesentlichen Parameter der in diesem Kapitel besprochenen Phänomenologien zusammengefasst. In den Phänomenologien von Kolmogorov, Goldreich und Sridhar bzw. Boldyrev geht man von einem starken Interaktionsmechanismus aus. Eine oder wenige Wechselwirkungen ( $N_{\text{ia}} \sim 1$ ) reichen aus, um ein Wellenpaket oder eine Wirbelstruktur aufzulösen. Zwischen Wechselwirkungszeit  $\tau_{\text{ac}}$  und Kaskadenzeit  $\tau_{\text{cas}}$  wird in diesen Phänomenologien nicht unterschieden. In der Iroshnikov-Kraichnan- bzw. der Gogoberidze-Phänomenologie sind die einzelnen Interaktionen schwach. Es sind daher viele Wechselwirkungen erforderlich  $N_{\text{ia}} \gg 1$ , um ein Wellenpaket zu zerstören, und es muss zwischen Wechselwirkungszeit und Kaskadenzeit unterschieden werden.

Bis auf die jeweiligen Vorfaktoren unterscheiden sich die Ergebnisse von Gogoberidze und Boldyrev für das senkrechte Energiespektrum nicht. Ihr wesentlicher Unterschied liegt in dem in der Gogoberidze-Phänomenologie angenommenen Dekorrelationsmechanismus begründet. Das daraus resultierende unterschiedliche Verhältnis von Wechselwirkungs- und Kaskadenzeit erlaubt eine Unterscheidung zwischen den beiden Modellen an Hand des Lagrangeschen Energiespektrums (siehe Kapitel 6.2).

	$E(k) \sim$	$\tau_{\text{cas}}$	$\tau_{\text{ac}}$	$\ell_{\parallel}$	Interaktion
K41	$\epsilon^{2/3} k^{-5/3}$	$\tau_{\text{cas}} \sim \frac{1}{(k v_{\ell})}$	$\tau_{\text{ac}} \sim \tau_{\text{cas}}$	$(\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp})$	stark
IK	$(\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}$	$\tau_{\text{cas}} \sim \frac{v_A}{(k v_{\ell}^2)}$	$\tau_{\text{ac}} \sim \frac{1}{(v_A k)}$	$(\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp})$	schwach
GS	$\epsilon^{2/3} k_{\perp}^{-5/3}$	$\tau_{\text{cas}} \sim \frac{1}{(k_{\perp} v_{\ell})}$	$\tau_{\text{ac}} \sim \tau_{\text{cas}}$	$\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp}^{2/3}$	stark
DA	$(\epsilon v_A)^{1/2} k_{\perp}^{-3/2}$	$\tau_{\text{cas}} \sim \frac{v_A}{(k_{\perp} v_{\ell}^2)}$	$\tau_{\text{ac}} \sim \tau_{\text{cas}}$	$\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp}^{1/2}$	stark
GG	$(\epsilon b_{\text{rms}})^{1/2} k_{\perp}^{-3/2}$	$\tau_{\text{cas}} \sim \frac{b_{\text{rms}}}{(k_{\perp} v_{\ell}^2)}$	$\tau_{\text{ac}} \sim \frac{1}{(b_{\text{rms}} k_{\perp})}$	$\ell_{\parallel} \sim \ell_{\perp}^{1/2}$	schwach

**Tabelle 2.3** Überblick über phänomenologische Modelle von Navier-Stokes- und MHD-Turbulenz

## 2.4 Intermittenz

Alle oben besprochenen Phänomenologien gehen von einer räumlich konstanten Energietransferrate im Inertialgebiet aus. Jedoch gab es gegen diese Annahme schon früh Einwände [51, 75], denn die Energiedissipationsrate und auch andere Größen wie die Vortizität und Stromdichte können in einer Strömung räumlich stark variieren.

Eine Konsequenz dieser Tatsache ist, dass das in Experimenten und numerischen Simulationen gemessene Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen höherer Ordnung ( $p \geq 4$ ) deutlich von einem linearen Verlauf abweicht [5, 19]. Betrachtet man das turbulente Geschwindigkeitsfeld auf immer kleineren Längenskalen, so beobachtet man, dass sich hohe Variationen der Geschwindigkeit auf immer kleinere Bereiche beschränken während das Geschwindigkeitsfeld zwischen diesen Bereichen nur geringe Variationen zeigt (siehe z. B. Bilder in [143]). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsinkremente über eine Distanz  $\ell$  entwickelt sich von einer annähernden Normalverteilung auf großen Skalen zu einer Verteilung mit exponentiell abfallenden Flügeln. Das Geschwindigkeitsfeld verhält sich also nicht perfekt selbstähnlich, wie es von der K41-Phänomenologie angenommen wird. Ein ähnliche Skalenabhängigkeit beobachtet man auch für die Elsässer-Felder in magnetohydrodynamischer Turbulenz [93, 94]. Diese Eigenschaft turbulenter Felder bezeichnet man als *Intermittenz*<sup>15</sup>. Intermittenz kann man auch im zeitlichen Sinne beobachten. Bei zunehmender Zeitaufösung eines turbulenten Signals beobachtet man, dass hohe Variationen des Signales innerhalb immer kleinerer Zeitintervalle auftreten, während zwischen diesen Ereignissen nur sehr geringe Fluktuationen auftreten.

Ein weiteres Anzeichen für die intermittente Natur turbulenter Felder sind die charakteristischen Strukturen hoher Intensität, die man im Vortizitäts- und Stromdichtefeld findet. Im Navier-Stokes-Fall sind Wirbelfilamente die typischen Strukturen hoher Intensität [51], im MHD-Fall bilden sich Wirbel- und Stromschichten [17] aus, die miteinander korreliert sind (siehe Kapitel 5).

Um die intermittenten Eigenschaften turbulenter Felder zu verstehen und zu beschreiben, wurden zahlreiche Modelle entwickelt. Im Rahmen der Lagrangeschen Flüssigkeitsbeschreibung ist das Multifraktalmodell von besonderer Bedeutung (siehe z. B. [21]).

<sup>15</sup>Das Wort Intermittenz leitet sich etymologisch vom lateinischen Verb *intermittere* = unterbrechen ab.

# 3 Numerische Methoden

Numerische Simulationen sind durch die zunehmende Leistungsfähigkeit moderner Rechneranlagen neben dem Experiment und der Theorie zu einer dritten Säule der naturwissenschaftlichen Forschung herangewachsen. In der Turbulenzforschung spielen numerische Simulationen eine besonders wichtige Rolle. Dies ist durch den hohen Aufwand für genaue experimentelle Messungen in turbulenten Strömungen (insbesondere im MHD-Fall) und die Schwierigkeiten bei der analytischen Behandlung der Navier-Stokes- bzw. der MHD-Gleichungen begründet. Die in direkten numerischen Simulationen erreichten Reynoldszahlen sind jedoch deutlich niedriger als die in Experimenten üblichen.

Um die inhärenten Eigenschaften homogener turbulenter Strömungen weit entfernt von ihren Begrenzungen zu untersuchen, werden in numerischen Simulationen üblicherweise periodische Randbedingungen angenommen. Periodische Randbedingungen legen in inkompressibler Turbulenz die Verwendung spektraler Verfahren nahe [110].

In dieser Arbeit werden die Grundgleichungen mit einem Pseudospektralverfahren numerisch gelöst und von einem Anfangszustand aus in der Zeit fortintegriert. In dieses Verfahren eingefügt ist die Verfolgung der Testteilchen.

## 3.1 Lösung der Grundgleichungen

Die numerische Behandlung der Grundgleichungen wird im Folgenden am Beispiel der hydrodynamischen Vortizitätsgleichung (siehe Gleichung 2.10) dargestellt. Die Lösung der MHD-Gleichungen erfolgt analog.

Der Lösungsbereich ist ein Würfel bzw. ein Quadrat mit der Seitenlänge  $\mathcal{L} = 2\pi$ , die Gitterpunkte bilden im Ortsraum ein kubisch bzw. quadratisch primitives Gitter mit  $N$  Punkten in jeder Raumrichtung, also insgesamt  $N^D$  Punkten, wobei  $D$  der Dimensionalität des Problems (hier  $D = 3$  bzw.  $D = 2$ ) entspricht. Der Gitterabstand zwischen den Punkten beträgt  $\Delta x = \frac{2\pi}{N}$ .

Den räumlichen Gitterpunkten entsprechen Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  im Fourier-Raum, mit<sup>1</sup>

$$\mathbf{k} = (e_x k_x + e_y k_y + e_z k_z), \quad -\frac{1}{2}N \leq k_i \leq \frac{1}{2}N - 1.$$

Für eine hohe Effizienz der verwendeten schnellen Fourier-Transformation [50] wird die Zahl  $N$  als ganzzahlige Potenz von 2 gewählt.

Im MHD-Turbulenz mit einem starken mittleren Magnetfeld sind die Fluktuationen der turbulenten Felder weitgehend auf die Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld beschränkt. In diesem Fall kann die Auflösung in der  $z$ -Richtung erniedrigt werden.

---

<sup>1</sup>Im zweidimensionalen Fall sind die Fourier-Vektoren analog definiert. Die  $z$ -Richtung entfällt.

### 3.1.1 Pseudospektralverfahren

Bei Pseudospektralverfahren werden die Felder als endliche Fourier-Reihen dargestellt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t).$$

Die Vortizitätsgleichung wird in ihrer Fourier-transformierten Form gelöst

$$\partial_t \hat{\boldsymbol{\omega}} = i\mathbf{k} \times (\widetilde{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}}) - \nu k^2 \hat{\boldsymbol{\omega}}$$

Die räumlichen Ableitungen werden zu Multiplikationen mit den Wellenvektoren, worin die hohe Genauigkeit der spektralen Methode für glatte Funktionen begründet liegt [34, Seite 31 ff]. Das Geschwindigkeitsfeld kann im Fourier-Raum algebraisch aus dem Vortizitätsfeld berechnet werden

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) = i \frac{\mathbf{k} \times \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}, t)}{|\mathbf{k}|^2}.$$

Die Inkompressibilitätsbedingung bleibt mit Rechengenauigkeit erfüllt.

Nichtlineare Terme wie  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  werden zu Faltungen im Fourierraum

$$\widetilde{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}'} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}', t) \times \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t).$$

Eine direkte Berechnung der Faltungen ist nur mit sehr hohem Rechenaufwand  $\mathcal{O}(N^{2D})$  möglich. Deswegen werden diese Terme im Realraum berechnet. Zur Transformation der Felder zwischen Orts- und Fourierraum werden schnelle Fourier-Transformationen (Aufwand  $\mathcal{O}(N^D \log N)$ ) verwendet. Ein Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass durch die Berechnung der Faltungen im Ortsraum sogenannte *Aliasing-Fehler* erzeugt werden (siehe unten).

Da die Fouriermoden einer realwertigen Funktion der Symmetriebedingung

$$\hat{f}(-\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k})^* \tag{3.1}$$

erfüllen, werden im dreidimensionalen Fall nur die Fouriermoden mit  $k_z \geq 0$  berechnet. Im zweidimensionalen Fall wird die Symmetriebedingung (3.1) nicht ausgenutzt. Dies ist durch technische Schwierigkeiten bei der Verwendung des entsprechenden zweidimensionalen schnellen Fourier-Transformations-Paketes begründet.

#### Behandlung des Aliasing Fehlers

Bei der Berechnung der Faltungen im Ortsraum können Fouriermoden angeregt werden, die außerhalb des aufgelösten Bereichs liegen. Durch die Rücktransformation in den Fourierraum mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation werden diese auf den aufgelösten Bereich zurückgefaltet. Bei den größten Wellenzahlen kommt es dadurch zu einem Fehler, dem sogenannten *Aliasing-Fehler*. Es gibt mehrere Verfahren, um den Aliasing Fehler zu entfernen oder zu reduzieren [34, Kapitel 3.2], von denen zwei im Simulationsprogramm implementiert sind.

Beim sogenannten 3/2-Dealiasing wird der Aliasing-Fehler entfernt, indem man den Bereich der verwendeten Fouriermoden in jeder Raumrichtung um ein Drittel einschränkt

$(-\frac{1}{3}N \leq k_i \leq \frac{1}{3}N - 1)^2$ , und nach der Rücktransformation Moden außerhalb des eingeschränkten Bereichs auf Null setzt. Im dreidimensionalen Fall wird dann jedoch etwa 70% (bzw. 56% im zweidimensionalen Fall) des Rechenaufwands für die Moden außerhalb des eingeschränkten Bereichs aufgewendet.

Beim sphärischen Modenabschneiden wird der Bereich der verwendeten Fourier-Moden auf  $\{\mathbf{k} | k \leq N/2 - 1\}$ , also ein kugelförmiges Volumen eingeschränkt. Dadurch wird nur ein Teil des Aliasing-Fehlers entfernt. Der verbleibende Aliasing-Fehler ist jedoch bei dreidimensionalen Turbulenzsimulationen mit ausreichender Auflösung von der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers [127] und kann deshalb in der Regel vernachlässigt werden. Im zweidimensionalen Fall wirkt sich der Aliasing-Fehler bei gleicher Auflösung der kleinen Skalen stärker aus, weil er auf weniger Fourier-Moden verteilt ist (siehe auch [130]). In allen in dieser Arbeit besprochenen Simulationen wird das 3/2-Dealiasing verwendet.

### 3.1.2 Integrationsverfahren

Zur Integration der Navier-Stokes- und der MHD-Gleichungen in der Zeit wird ein Leapfrog-Verfahren zweiter Ordnung verwendet. Da das Leapfrog-Verfahren für dissipative Probleme instabil ist, wird der dissipative Term durch einen integrierenden Faktor [8, 34] exakt behandelt:

$$\partial_t(e^{\nu k^2 t} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)) = (\partial_t \hat{\omega} + \nu k^2 \hat{\omega}) e^{\nu k^2 t} = e^{\nu k^2 t} \mathcal{L}(\hat{\omega})$$

Hierbei steht der Operator  $\mathcal{L}(\hat{\omega})$  für die nichtlinearen Terme auf der rechten Seite der Vortizitätsgleichung

$$\mathcal{L}(\hat{\omega}) = i\mathbf{k} \times (\widetilde{\mathbf{u} \times \hat{\omega}}).$$

Das Integrationsverfahren besteht insgesamt aus drei Schritten:

$$\hat{\omega}^{2n'} = \hat{\omega}^{2n-2} e^{-\nu k^2 2\Delta t} + \Delta t \mathcal{L}(\hat{\omega}^{n-1}) e^{-\nu k^2 \Delta t} \quad (3.2)$$

$$\hat{\omega}^{2n+1} = \hat{\omega}^{2n-1} e^{-\nu k^2 2\Delta t} + \Delta t \mathcal{L}(\hat{\omega}^{2n'}) e^{-\nu k^2 \Delta t} \quad (3.3)$$

$$\hat{\omega}^{2n} = \frac{1}{2}(\hat{\omega}^{2n+1} + \hat{\omega}^{2n-1}) \quad (3.4)$$

Um das Auftreten zeitlicher Oszillationen [34, Kapitel 4.3.1] zu verhindern, wird im dritten Schritt eine Mittelung durchgeführt. Der volle Zeitschritt des Verfahrens beträgt  $2\Delta t$ . Am Anfang einer Simulation wird ein Euler-Integrationsschritt durchgeführt, um die zweite Ebene des Leapfrog-Verfahrens zu erhalten.

Eine obere Grenze für den maximalen stabilen Zeitschritt kann über das Courant-Kriterium [106] bestimmt werden<sup>3</sup>

$$2\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{D}v_{\max}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}Nv_{\max}} \quad (3.5)$$

wobei  $v_{\max}$  die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit im betrachteten System ist. Diese kann im makroskopisch isotropen Fall über die Energie des Systems abgeschätzt werden  $v_{\max} \approx \sqrt{E}$ , im anisotropen Fall ( $B_0 \neq 0$ ) über  $v_{\max} \approx \max(\sqrt{E}, v_A)$ , wobei  $v_A = B_0$  die typische Alfvén-Geschwindigkeit des Systems ist.

<sup>2</sup>Wahlweise kann der Bereich der Fouriermoden auch um die Hälfte erweitert werden, deswegen '3/2-Dealiasing'.

<sup>3</sup>Da das Courant-Kriterium streng genommen nur für lineare Probleme gilt, liegt der tatsächliche maximale stabile Zeitschritt in der Regel niedriger.

### 3.1.3 Erreichbare Reynoldszahlen

Die bei einer bestimmten Anzahl von Kollokationspunkten erreichbare Reynoldszahl ist dadurch begrenzt, dass die kleinskaligen, dissipativen Moden ausreichend aufgelöst werden müssen. Ein übliches Kriterium für die ausreichende Auflösung der kleinsten Skalen ist [102]

$$k_{\max}\eta \geq 1.5 \quad , \text{ dies entspricht } \frac{\Delta x}{\eta} \lesssim \begin{cases} 2.1 & \text{für sphärisches Modenabschneiden} \\ 1.4 & \text{für 3/2-Dealiasing.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Es mag verwundern, dass die Kolmogorov-Länge  $\eta$  somit auch kleiner als der Gitterabstand  $\Delta x$  sein darf, jedoch unterschätzt man mit  $\eta$  die Größe der dissipativen Eddies [102]. Im MHD-Fall wird manchmal ein ähnliches Auflösungskriterium verwendet, das auf der Iroshnikov-Kraichnan Dissipationsskala  $\eta_{\text{IK}}$  basiert<sup>4</sup> [144]

$$k_{\max}\eta_{\text{IK}} \geq 2.$$

Die Separation der größten von den dissipativen Skalen und damit die Ausdehnung des Inertialgebiets hängt über

$$L_{\text{E}}/\eta \sim Re^{3/4}, \quad T_{\text{E}}/\tau_{\eta} \sim Re^{1/2} \quad (3.7)$$

mit der Reynoldszahl zusammen [102, Seite 131]. Die Anzahl der zum Erreichen einer bestimmten Reynoldszahl benötigten Kollokationspunkte lässt sich dann zu

$$\begin{aligned} N^3 &\sim Re^{9/4} && \text{(dreidimensionaler Fall)} \\ N^2 &\sim Re^{3/2} && \text{(zweidimensionaler Fall)} \end{aligned}$$

abschätzen. Im zweidimensionalen Fall lassen sich mit dem gleichen Simulationsaufwand erheblich höhere Reynoldszahlen erreichen. Jedoch nimmt der maximale Zeitschritt mit  $\Delta x$  ab (siehe Gleichung 3.5), so dass der tatsächlich Aufwand bezogen auf eine feste Simulationsdauer mindestens von der Ordnung  $\mathcal{O}(N^D \log(N)N)$  ist, wenn man das Courant-Kriterium zu Abschätzung des Zeitschrittes verwendet.

Aus den Beziehungen (3.7) folgt, dass der Eulersche Inertialbereich ( $\eta \ll \ell \ll L_{\text{E}}$ ) schneller mit der Reynoldszahl wächst als der Lagrangesche ( $\tau_{\eta} \ll \tau \ll T_{\text{E}}$ ). Dies ist auch eine Ursache für die Schwierigkeiten, in Lagrangeschen statistischen Größen einen Skalierungsbereich zu beobachten [124].

### 3.1.4 Anfangsbedingung

Als Anfangszustand wird eine stochastische Modenverteilung mit vorgegebener spektraler Energieverteilung verwendet [93]. Die Kreuzhelizität und die magnetische Helizität werden auf Null gesetzt. Falls schon eine vergleichbare Simulation vorhanden ist, können auch die turbulenten Felder zu einem geeigneten Zeitpunkt aus dieser Simulation als Anfangszustand verwendet werden. Gegebenenfalls wird die Modenanzahl erhöht bzw. erniedrigt.

<sup>4</sup>In den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen hat sich dieses Kriterium als weniger streng erwiesen.

Bevor die Lagrangeschen Testteilchen in die turbulente Strömung eingestreut werden, wird in jedem Fall der Anfangszustand mehrere Large-Eddy-Turnover Zeiten in der Zeit fortintegriert, damit sich ein quasistationärer Zustand einstellen kann, und die Korrelation zum Anfangszustand abgeklungen ist.

## 3.2 Verfolgung der Testteilchen

Die Verfolgung der Testteilchen setzt sich im Wesentlichen aus der Bestimmung der instantanen Teilchengeschwindigkeit, der Integration der Bewegungsgleichung und der regelmäßigen Ausgabe der relevanten Teilchendaten zusammen.

### 3.2.1 Interpolationsverfahren

Durch die Verwendung eines Pseudospektralverfahrens zur numerischen Lösung der Navier-Stokes bzw. MHD-Gleichungen liegt zu jedem Integrationszeitpunkt das Geschwindigkeitsfeld im Ortsraum vor. Da sich die Testteilchen in der Regel nicht auf den Gitterpunkten befinden, müssen ihre Geschwindigkeiten durch Interpolation bestimmt werden. Im Folgenden wird mit  $N_{\text{ip}}$  die Anzahl der verfolgten Testteilchen bezeichnet.

Bei der Wahl des Interpolationsverfahrens gilt es, die Genauigkeit und Glattheit eines Verfahrens gegen seinen Aufwand abzuwägen. Das in diesem Zusammenhang genaueste Verfahren, die Fourier-Interpolation, scheidet wegen des gewaltigen erforderlichen Rechenaufwands aus ( $\mathcal{O}(N^D \log(N)N_{\text{ip}})$ ). In der einschlägigen Literatur werden im Wesentlichen drei verschiedene Verfahren verwendet. Dies sind kubische Splines [38, 138], trikubische und trilineare Interpolation [13].

Kubische Splines bieten hohe Genauigkeit und sind zweimal stetig differenzierbar. Die Interpolation mit kubischen Splines ist ein globales Verfahren, d. h. in die Bestimmung der Interpolationskoeffizienten gehen Werte von allen Gitterpunkten des Feldes ein. Der Aufwand der Interpolation steigt deshalb mit der Auflösung der turbulenten Felder [139]. Im Falle einer Großrechner-Architektur mit verteiltem Speicher<sup>5</sup> bringt die Parallelisierung deshalb einen hohen Kommunikationsaufwand mit sich. Wegen des hohen Rechenaufwands  $\mathcal{O}(N^D N_{\text{ip}})$  wurde dieses Verfahren nicht implementiert.

Bei dem trilinearen und dem trikubischen Interpolationsverfahren (siehe [32, 64]) handelt es sich um lokale Verfahren. In die Berechnung der Interpolationskoeffizienten gehen nur Werte von den das Testteilchen unmittelbar umgebenden Gitterpunkten ein. Der Rechenaufwand hängt somit nur von der Anzahl der Testteilchen und nicht von der Auflösung ab  $\mathcal{O}(N_{\text{ip}})$ . Das Ergebnis des trilinearen Interpolationsverfahrens ist an den Grenzen einer Gitterzelle stetig, aber nicht differenzierbar. Das trikubische Interpolationsverfahren bezieht neben den Werten des Feldes an den Gitterpunkten auch die Werte verschiedener räumlicher Ableitungen ein, sein Ergebnis ist in diesen Ableitungen differenzierbar.

Die Untersuchungen von *Homann, Dreher und Grauer* [65] haben gezeigt, dass der intermittente Charakter der Trajektorien vom trikubischen Interpolationsverfahren im Vergleich zum trilinearen besser wiedergegeben wird. In dieser Arbeit wird das trikubische bzw. das bikubische Interpolationsverfahren eingesetzt, da es einen sinnvollen Kompromiss zwischen Aufwand und Genauigkeit bietet.

---

<sup>5</sup> *distributed memory architecture*

Eine Abschätzung des Interpolationsfehlers durch den Vergleich mit Fourier-interpolierten Werten zeigt, dass der mittlere Interpolationsfehler des trikubischen Interpolationsverfahrens nur etwa ein Fünftel des Fehlers des trilinearen Verfahrens beträgt (Ergebnis bei Standard-Auflösung  $k_{\max}\eta = 1.5$ : mittlerer relativer Fehler 0.4%). Werden Felder interpoliert, die höhere kleinskalige Variationen zeigen als das Geschwindigkeitsfeld, wie z. B. das Vortizitätsfeld, so nimmt der Interpolationsfehler zu (mittlerer relativer Fehler: 5%). Da diese Werte jedoch nicht in die Integration der Teilchentrajektoren eingehen, ist hier ein höherer Fehler hinnehmbar.

### 3.2.2 Integration der Bewegungsgleichung

Zur Integration der Bewegungsgleichung der Testteilchen (2.17) wird ein Mittelpunkts-Verfahren [106, Kapitel 16.3] verwendet.

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'(t + \Delta t) &= \mathbf{X}(t) + \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{X}(t + 2\Delta t) &= \mathbf{X}(t) + \Delta t [\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{X}', t + \Delta t)]\end{aligned}$$

Da der durch das Courant-Kriterium vorgegebene Zeitschritt sehr klein ist, und auf kurzen Zeitskalen die Teilchengeschwindigkeit ungefähr konstant ist, kann der numerische Fehler der Zeitintegration gegenüber dem Interpolationsfehler vernachlässigt werden.

Bei der Integration der Teilchentrajektorien wird das Simulationsvolumen periodisch fortgesetzt. Dadurch treten keine Sprünge in der Position  $\mathbf{X}(t)$  eines Teilchens auf.

### 3.2.3 Diagnostiken

In regelmäßigen Abständen werden die Teilchenpositionen und die Geschwindigkeitswerte ausgegeben. Da auf sehr kurzen Zeitskalen die Teilchengeschwindigkeiten annähernd konstant sind, muss die Ausgabe nicht nach jedem Integrationsschritt erfolgen, sondern es reicht aus, etwa  $\frac{1}{10}\tau_\eta$  aufzulösen.

Neben den Positionen und Geschwindigkeit sind noch andere Größen an den Teilchenpositionen von Interesse, so z. B. das Magnetfeld, der Gradiententensor des Geschwindigkeitsfeldes und die Beschleunigung.

Das Magnetfeld liegt innerhalb des Pseudospektralverfahrens schon im Ortsraum vor. Es kann also wie das Geschwindigkeitsfeld direkt interpoliert werden. Die Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes müssen dagegen erst im Fourierraum berechnet und in den Ortsraum transformiert werden (eine lokale Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes im Ortsraum ist auch möglich, aber weniger genau [139]). Deswegen ist die Berechnung des Gradiententensors des Geschwindigkeitsfeldes ungleich aufwändiger.

Die Beschleunigung der Teilchen kann mit zwei unterschiedlichen Methoden berechnet werden. Einerseits kann man die rechte Seite der Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld interpolieren

$$\mathbf{A}(t) = \partial_t \mathbf{v}(t) + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}^v(t),$$

andererseits durch Zeitableitung der Teilchengeschwindigkeit z. B. unter der Verwendung zentrierter Differenzen

$$\mathbf{A}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{V}(t) \approx \frac{1}{4\Delta t} (\mathbf{V}(t + 2\Delta t) - \mathbf{V}(t - 2\Delta t)). \quad (3.8)$$

Bei ausreichender Auflösung der kleinskaligen Moden des Geschwindigkeitsfeldes stimmen die Ergebnisse der beiden Verfahren gut überein [13]. Da der numerische Aufwand für die Berechnung der Zeitableitung deutlich niedriger ist, wird in dieser Arbeit die Beschleunigung nach Gleichung (3.8) berechnet.

### 3.2.4 Anfangspositionen der Teilchen

Die Anfangspositionen der Teilchen im Strömungsfeld werden je nach beabsichtigter Untersuchung unterschiedlich gewählt. Im Falle der Mehrteilchenstatistik werden die Teilchen an den Ecken von regelmäßigen Tetraedern bzw. gleichseitigen Dreiecken angeordnet. Zur Berechnung der Zweiteilchenstatistik werden sogenannte Tetraden bzw. Triaden verwendet

$$\mathbf{R}(0) = (R_0, 0, 0), \quad (0, R_0, 0) \quad \text{oder} \quad (0, 0, R_0) \quad \textit{Tetrade}$$

$$\mathbf{R}(0) = (R_0, 0), \quad (0, R_0) \quad \textit{Triade}.$$

Die Abstandsvektoren sind parallel zu den Koordinatenachsen gewählt. Dadurch erhält man identische Paaranzahlen in allen drei bzw. zwei Raumrichtungen.

Diese Teilchengruppen werden zufällig im Simulationsvolumen verteilt, um eine hohe statistische Unabhängigkeit zu erreichen [138]. Gleichzeitig ist dadurch die Wahl der Teilchenanzahl und -anfangsabstände flexibler. Für die Einzeteilchenstatistik werden entweder zufällig verteilte Teilchen oder die Teilchen der Paarstatistik nach einigen  $T_E$  verwendet, wenn die Korrelation zur Anfangskonfiguration weitgehend abgeklungen ist.

### 3.2.5 Auswertung

In einer typischen Simulation werden die Fluidteilchen über einen Zeitraum von  $200\tau_\eta$  verfolgt. Bei einer Zeitaufösung von  $\frac{1}{20}\tau_\eta$  und circa 1.5 Millionen verfolgter Teilchen kommt man bei Verwendung aller Diagnostiken ( $\mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \nabla \mathbf{v}, \mathbf{B}, \nabla \mathbf{B}$ ) auf eine Rohdatenmenge von etwa 1.4 TeraByte. Eine wesentliche Schwierigkeit besteht darin, diese Daten sinnvoll zu analysieren. Um Speicherplatz zu sparen, werden die ausgegebenen Daten von doppelter Genauigkeit auf einfache Genauigkeit reduziert.

Die Auswertungsprogramme sind zum großen Teil parallelisiert. Insbesondere die Berechnung der Lagrangeschen Spektren ist aufwändig, da hierzu die Korrelation aller Zeitpunkte untereinander berechnet werden muss.

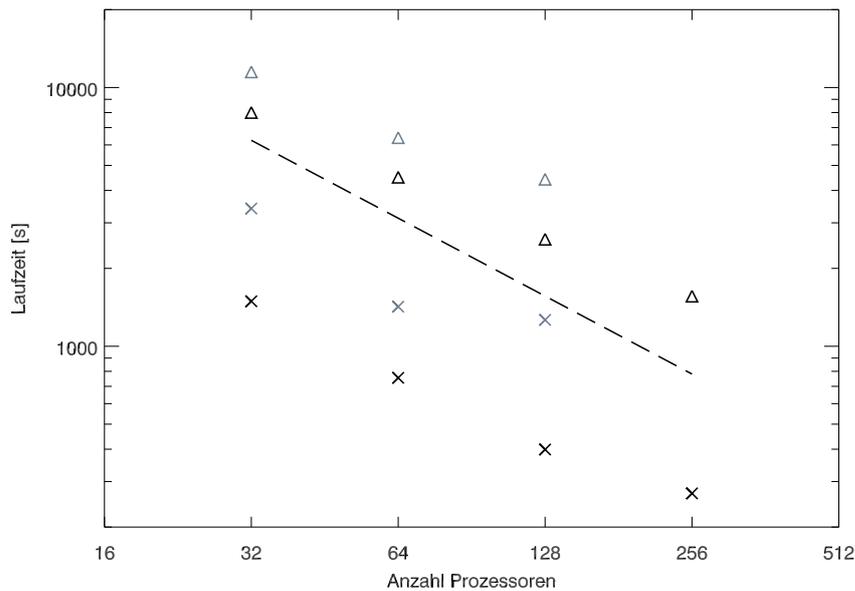
## 3.3 Parallelisierung und Skalierung

Wie bereits mehrfach in diesem Kapitel erwähnt, ist das Simulationsprogramm parallelisiert. Das Simulationsvolumen wird in  $x$ -Richtung in Scheiben aufgeteilt und auf die Prozessoren verteilt<sup>6</sup>. Dies ist durch die verwendete schnelle Fourier-Transformation FFTW [50] vorgegeben.

In der alten Version des Simulationsprogrammes werden die Teilchen zentral vom Master-Prozess verwaltet. Nur die Interpolation der Teilchengeschwindigkeiten wird lokal

---

<sup>6</sup> *slab-decomposition*



**Abbildung 3.1** Laufzeit des Simulationsprogrammes im MHD-Fall für 100 Integrationsschritte auf der IBM Regatta am RZG (Power4 Architektur). Gesamtlaufzeit (Dreiecke) und Anteil der Laufzeit für Lagrangesche Teilchen (Kreuze) für die neue (schwarze Symbole) und alte (graue Symbole) Version des Simulationsprogrammes. Die minimale Prozessoranzahl auf der IBM Regatta beträgt 32 (1 Knoten). Die gestrichelte Linie deutet die ideale Skalierung mit  $(\text{Prozessoranzahl})^{-1}$  an. Gewählte Simulationsparameter: MHD-Fall, Auflösung  $512^3$ ,  $2 \cdot 10^6$  Teilchen, Ausgabe der Teilchendaten (hier: Position, Geschwindigkeit und Magnetfeld) jeweils nach 5 Integrationsschritten.

auf den Prozessoren durchgeführt. Jedoch beeinträchtigt jeder serielle Anteil eines parallelisierten Programmes die Skalierung desselben, d. h. die Beschleunigung des Programmes mit zunehmender Anzahl der verwendeten Prozessoren (*Amdahls Gesetz* [4]).

Durch Umstellung auf eine lokale Teilchenverwaltung und eine Verbesserung der Kommunikationsstrategie bei der Interpolation der Felder konnte die Skalierung des Programmes deutlich verbessert werden. Während in der alten Version jeder Prozess in der aufgeteilten Raumrichtung mindestens vier Gitterpunkte benötigt, was die Anzahl der verwendbaren Prozesse begrenzt, ist in der neuen Version diese Einschränkung auf mindestens zwei Gitterpunkte pro Prozessor reduziert. Weiterhin wurde auch die Schleife zur Integration der turbulenten Felder optimiert. Diese Veränderungen führen zu einer erheblichen Beschleunigung des Programmes (siehe Figur 3.1).

Da zur Zeit bei Supercomputern die Prozessorenanzahl weit schneller anwächst als die Rechenleistung der einzelnen Prozessoren<sup>7</sup> [7], wird es in Zukunft wohl nötig sein, das Simulationsprogramm auch in der  $y$ -Richtung zu parallelisieren.

<sup>7</sup> *massively parallel computing*

## 4 Antriebsmethoden

In dreidimensionalen turbulenten Strömungen wird Energie in der Regel durch einen Kaskadenprozess von großen zu kleinen Skalen transportiert, wo sie dissipiert, d. h. in ungeordnete Wärmebewegung umgewandelt wird (siehe Kapitel 2.2). Wenn auf großen Skalen nicht fortwährend Energie in das System eingespeist wird, zerfällt die Turbulenz, und es bildet sich nach einiger Zeit ein laminarer Strömungszustand aus. In vielen Fällen, wie auch in dieser Arbeit, will man jedoch einen quasistationären turbulenten Zustand untersuchen, da dann statt einer Ensemblemittelung eine Zeitmittelung durchgeführt werden kann [31, Seite 11]. Außerdem wird so eine explizite Abhängigkeit vom Startzeitpunkt bei statistischen Größen wie der Autokorrelation der Geschwindigkeit vermieden.

Es gibt viele Möglichkeiten, einem turbulenten System auf großen Skalen Energie zuzuführen. In Experimenten geschieht dies beispielsweise durch das Anlegen eines Druck- oder Temperaturgradienten oder durch das Rühren mit Propellern. Letztere Methode wird in mehreren Experimenten eingesetzt, in denen Lagrangesche Messungen vorgenommen werden [91, 129]. In numerischen Simulationen turbulenter Strömungen einer bestimmten Geometrie, wie etwa einer turbulenten Rohrströmung, kann man die in den entsprechenden Experimenten verwendeten Antriebsmethoden anwenden, indem man z. B. einen Druckgradienten vorgibt. In idealisierten Systemen mit dreifach periodischen Randbedingungen, die der Simulation homogener turbulenter Strömungen weit entfernt von den Randbereichen dienen, ist dies in der Regel nicht möglich. Deswegen sind hierfür eigene Antriebsmethoden entwickelt worden. Eine systematische Untersuchung und Vergleich dieser Antriebsformen steht noch aus. In vielen numerischen Studien wird zwar die Form des Antriebs angegeben aber nicht der Grund, weshalb dieser ausgewählt wurde, und welche Eigenschaften dieser hat. Jedoch ist insbesondere in magnetohydrodynamischer Turbulenz die Art des verwendeten Antriebs von nicht zu vernachlässigender Bedeutung, weil hier durch nichtlokale Wechselwirkungen der Antrieb einen stärkeren Einfluss auf das Inertialgebiet nehmen kann [1, 2]. Weiterhin ist es in der Lagrangeschen Statistik nicht möglich, Effekte bei kleinen Wellenzahlen klar von denen bei großen Wellenzahlen zu trennen, da in die Teilchengeschwindigkeit Geschwindigkeitsfluktuationen aller Wellenzahlen eingehen. Deswegen werden im Folgenden einige Erkenntnisse dargestellt, die bei der Suche nach geeigneten Antriebsformen gewonnen wurden.

### 4.1 Grundsätzliche Erwägungen

Bei allen im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Antriebsformen handelt es sich um spektrale Antriebsformen. Den Fourier-transformierten Navier-Stokes- bzw. MHD-Gleichungen werden externe Kräfte  $\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t)$  bzw.  $\hat{\mathbf{f}}^b(\mathbf{k}, t)$  hinzugefügt, die nur auf großen Skalen wirken, d. h. außerhalb des Bereichs der angetriebenen Moden  $K^f$  gilt  $\hat{\mathbf{f}}^{v,b}(\mathbf{k}, t) = 0$ . Der Bereich der angetriebenen Moden  $K^f$  wird in der Regel kugelsymmetrisch um den Ursprung des Fourier-Raums gewählt,  $K^f := \{\mathbf{k} | k_{\min}^f \leq |\mathbf{k}| \leq k_{\max}^f\}$ . Die Kräfte  $\hat{\mathbf{f}}^{v,b}(\mathbf{k}, t)$  dürfen die

Divergenzfreiheit der turbulenten Felder  $\hat{\mathbf{v}}$  und  $\hat{\mathbf{b}}$  nicht verletzen ( $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{v,b}(\mathbf{k}, t) = 0$ ). Nicht immer lässt sich für  $\hat{\mathbf{f}}^{v,b}(\mathbf{k}, t)$  ein expliziter Ausdruck angeben.

Im Folgenden werden einige Eigenschaften aufgelistet, die ein idealer Antrieb haben sollte:

- Der Antrieb sollte selbst einem physikalischen Prozess zur Turbulenzerzeugung möglichst nahe kommen. Idealerweise entspricht der Antriebsbereich dem integralen Skalenbereich einer realistischen turbulenten Strömung.
- Der Antrieb soll einen im statistischen Mittel isotropen Strömungszustand erzeugen. Bei einem mittleren Magnetfeld soll das Antriebskraftfeld in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld statistisch isotrop sein.
- Der Antrieb soll einen quasistationären, turbulenten Strömungszustand aufrecht erhalten. Die Schwankungen globaler Größen wie der Gesamtenergie und Energiedissipationsrate sollten nicht zu hoch sein, z. B.  $\sqrt{\langle E - \langle E \rangle \rangle^2} \ll \langle E \rangle$ .
- Der Antrieb sollte zuverlässig über viele  $T_E$  einsetzbar sein.
- Der Antrieb sollte eine möglichst freie Entwicklung des Systems erlauben. Er sollte keine zusätzlichen physikalischen Effekte oder Zwangsbedingungen in das System einführen.

Diese Kriterien alle optimal zu erfüllen ist nicht möglich. Denn bereits das verwendete numerische Verfahren selbst hat einige Eigenschaften, die dies verhindern. So wird das turbulente System niemals perfekt isotrop sein, weil mit einer diskreten Menge von Fouriermoden auf einem einfach kubischen Gitter und mit einer endlichen Anzahl von angetriebenen Moden gearbeitet wird [46]. Die Anzahl der angetriebenen Moden sollte daher nicht zu klein gewählt werden, da sonst die Diskretisierung stärker ins Gewicht fällt [46]. Periodische Randbedingungen existieren nur in der theoretischen Physik und nicht in natürlichen Strömungen. Deswegen sollte man versuchen, die Effekte der Periodizität durch einen geeigneten Verlauf des Energiespektrums bei kleinen Wellenzahlen möglichst gering zu halten.

Weiterhin sind einige Kriterien nicht gleichzeitig gut zu erfüllen. Wenn man für sehr geringe Schwankungen der Energie oder Energiedissipationsrate sorgt, um einen möglichst stationären Zustand zu erhalten, kann dies zur Folge haben, dass eine sehr lange zeitliche Korrelation im Antriebsbereich besteht. Dies widerspricht wiederum dem Wunsch nach einer turbulenzähnlichen zeitlichen Entwicklung des Antriebs und sorgt für Anisotropie durch den Antriebsbereich, es sei denn, es wird über einen sehr langen Zeitraum gemittelt oder ein spezieller Zustand herausgegriffen [76].

## 4.2 Hydrodynamische Turbulenz

In dreidimensionaler hydrodynamischer Turbulenz kaskadieren die beiden idealen Invarianten des Systems, die kinetische Energie  $E^K$  und die kinetische Helizität  $H^K$ , direkt. Der Einsatz eines großskaligen Antriebs ist also ohne grundsätzliche Probleme möglich, da bei gleichmäßigem Antrieb des Systems keine Zunahme der Energie und kinetischen Helizität im Antriebsbereich zu erwarten ist. Die hier besprochenen Antriebsformen werden alle in

numerischen Simulationen hydrodynamischer Turbulenz eingesetzt. Ihre Erweiterung auf den MHD-Fall wird im nächsten Abschnitt besprochen.

Die Antriebsformen lassen sich zunächst in stochastische und deterministische Verfahren unterscheiden. Bei stochastischen Verfahren wird der Kraftterm durch stochastische Prozesse modelliert. Hingegen verwendet man bei deterministischen Verfahren nur Größen, die bei der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen selbst auftreten.

### 4.2.1 Stochastische Verfahren

Zur Modellierung des Kraftterms werden verschiedene Arten stochastischer Prozesse verwendet. Die stochastischen Prozesse unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre Zeitkorrelation und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung. Da das Geschwindigkeitsfeld auf großen Längenskalen ungefähr normalverteilt ist, liegt es nahe, Gaußsche stochastische Prozesse zu verwenden (siehe z. B. [102, Anhang J]).

Verwendet man Gaußsches weißes Rauschen zu Modellierung des Kraftterms, so ist  $\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t)$  in der Zeit  $\delta$ -korreliert. Die Amplituden der Komponenten  $\hat{f}_i^v$  sind normalverteilt mit einer Varianz  $\sigma_f^2$ . Für die mittlere Energie-Injektionsrate des weißen Rauschens lässt sich ein exakter Ausdruck herleiten (siehe z. B. [85]), sie beträgt [46]

$$\dot{E}_f = 4N_f\sigma_f^2,$$

wobei  $N_f$  die Zahl der angetriebenen Moden im Fourier-Raum ist<sup>1</sup>. Das weiße Rauschen hat also den Vorteil, dass man über  $\sigma_f$  die Energie-Injektionsrate des Antriebs und damit auch die Energiedissipationsrate genau steuern kann. Jedoch bringt man auf großen Skalen einen Vorgang ins System, der keine Zeitkorrelation hat. Dies widerspricht in mancher Hinsicht der Annahme in der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung, dass die turbulenten Prozesse auf großen Längenskalen eine endliche Zeitkorrelation besitzen. Die in Experimenten üblicherweise verwendeten Antriebsmethoden wie Rühren, Druck- und Temperaturgradienten etc. haben alle eine endliche Zeitkorrelation. Auch ist eine Berechnung der Beschleunigung über zeitliche Differentiation der Geschwindigkeit problematisch, da das weiße Rauschen nicht in der Zeit differenzierbar ist.

Um einen Kraftterm mit einer endlichen Korrelationszeit zu modellieren, verwendet man daher statt weißem Rauschen *Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse* [46]. Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse sind ebenfalls Gaußsche stochastische Prozesse, sie haben jedoch eine endliche Zeitkorrelation  $\langle \hat{f}_i^v(\mathbf{k}, t) \hat{f}_i^v(\mathbf{k}, t + \Delta t) \rangle \sim \exp(-\Delta t/T^f)$ . Da nun zwischen Geschwindigkeit  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)$  und Kraft  $\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t)$  eine endliche Korrelation besteht, lässt sich die Energieinjektionsrate nicht mehr analytisch angeben. Die geeigneten Werte der Parameter  $\sigma_f$  und  $T^f$  müssen durch Ausprobieren herausgefunden werden. Die Korrelationszeit des Antriebs  $T^f$  sollte in der Größenordnung der Korrelationszeit des Geschwindigkeitsfeldes  $T_{\text{cor}}^K$  gewählt werden [81] (zur Berechnung der Korrelationszeit siehe Kapitel 5.1.2). Durch seine endliche Zeitkorrelation kommt der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb einem realistischen großskaligen Prozess näher. Er wird im Rahmen dieser Arbeit am häufigsten verwendet.

<sup>1</sup>Bei der Berechnung von  $N_f$  wird der volle Fourier-Raum berücksichtigt.

### 4.2.2 Deterministische Methoden

Ein Einwand, der manchmal gegen die Verwendung stochastischer Antriebsmethoden geäußert wird, ist, dass durch den stochastischen Antrieb eine zusätzliche Quelle der Zufälligkeit in das turbulente System eingeführt wird. Dadurch könnten die statistischen Eigenschaften der Turbulenz verändert werden. Deswegen ziehen manche Forscher deterministische Antriebsmethoden vor. Allerdings gibt es in jedem natürlichen turbulenten System äußere Einflüsse. Man kann deshalb genauso gut einwenden, dass es ein in sich geschlossenes turbulentes System nicht gibt, und durch einen künstlichen Abschluss des Systems Effekte hervorgerufen werden können, die in realen turbulenten Systemen nicht auftreten.

Hier sollen nun einige der üblichsten deterministischen Antriebsmethoden vorgestellt werden. Sie können in konservative und lineare Antriebe unterteilt werden.

#### Konservative Antriebe

Die einfachste Antriebsform besteht darin, die Moden im Antriebsbereich eines vollentwickelten turbulenten Zustands, den man aus einer Simulation zerfallender Turbulenz erhalten kann, von der Zeitintegration auszunehmen. Durch die Wechselwirkung der nicht getriebenen Moden ( $|\mathbf{k}| > k_{\max}^f$ ) mit den Moden des Antriebsbereichs wird ein kontinuierlicher Energietransfer zu kleineren Längenskalen aufrecht erhalten. Dieses Verfahren wird als *Einfrieren der Moden* bezeichnet und wurde von *Siggia und Patterson* [117] in einer der ersten pseudospektralen Turbulenz-Simulationen eingesetzt. Diese Form des Antriebs hat einen offensichtlichen Nachteil: die Moden im Antriebsbereich haben eine unendliche Zeitkorrelation. Deswegen ist eine statistische Isotropie und Homogenität des Systems auch im zeitlichen Mittel nicht erreichbar.

Beim Antrieb mit *konstanten Amplituden* ist die Entwicklung der Moden im Antriebsbereich weniger stark eingeschränkt. Es werden nur die Amplituden der angetriebenen Moden und nicht ihre Phasen und räumliche Orientierung konstant gehalten [36]. Für eine isotrope Energieverteilung im Fourier-Raum sollten die Amplituden der Moden gleich groß gewählt werden. Weil nun auch eine zeitliche Fortentwicklung der Antriebsmoden möglich ist, kommt man im zeitlichen Mittel einer statistischen Isotropie näher. Allerdings werden in einem realistischen turbulenten System auch die Amplituden der großskaligen Moden Variationen zeigen. Der Antriebsbereich unterscheidet sich daher immer noch deutlich von einer realistischen turbulenten Strömung.

Der Antrieb mit *konstanter Energie* erlaubt auch eine zeitliche Entwicklung der Amplituden der angetriebenen Moden. Er besteht darin, dass die Energie im angetriebenen Modenbereich  $E^f$  konstant gehalten wird, indem man nach jedem Integrationschritt die Moden des Antriebsbereichs mit einem entsprechenden Faktor

$$\hat{v}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{v}'_i(\mathbf{k}, t) \sqrt{\frac{2E^f}{\sum_{\mathbf{q} \in K^f} |\hat{\mathbf{v}}'(\mathbf{q}, t)|^2}}$$

multipliziert [37, 120]. Einer Mode wird also um so mehr Energie zugeführt, je größer ihre Amplitude ist. Einzelne Moden können daher vorübergehend stark anwachsen. In der Regel [37] unterteilt man den Antriebsbereich in zwei Schalen ( $1 \leq |\mathbf{k}| < 2$  und  $2 \leq |\mathbf{k}| < 3$ ), in denen die Energie getrennt konstant gehalten wird. Das Verhältnis von  $E^f(1)$

zu  $E^f(2)$  wird üblicherweise der K41-Skalierung folgend gewählt, um den Inertialbereich künstlich zu verlängern. Diese Praxis widerspricht jedoch einem realistischen turbulenten Energiespektrum, welches auf großen Skalen in der Regel abfällt und nicht ansteigt [102]. Die Periodizitätseffekte des Systems können verstärkt auftreten, weil ein Großteil der Energie in der Schale  $k = 1$  konzentriert ist.

### Lineare Antriebsmethoden

Bei den linearen Antriebsmethoden wird die Kraft als Vielfaches des Geschwindigkeitsfeldes modelliert  $\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t) = c^f(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)$ . Durch geschickte Wahl von  $c^f(\mathbf{k}, t)$  können Schwankungen der Energiedissipationsrate gering gehalten werden.

Beim sogenannten *gleichmäßigen Antrieb* wird jeder angetriebenen Mode gleich viel Energie zugeführt, indem man die Kraft  $\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t)$  über

$$\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t) = \frac{\gamma^f \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)}{N_f |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)|^2} \quad (4.1)$$

definiert. Die Energie-Injektionsrate ist zeitlich konstant und beträgt  $\gamma^f$  [52].

Ein leichte Modifizierung des Krafttermes in Gleichung (4.1) ergibt den sogenannten *beschleunigenden Antrieb*[61, 74]

$$\hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t) = \frac{\gamma^f \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)}{\sum_{\mathbf{q} \in K^f} |\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{q}, t)|^2}$$

Auch hier beträgt die Energieinjektionsrate  $\gamma^f$ . Da alle Moden des Antriebsbereichs mit dem gleichen konstanten Faktor multipliziert werden, wird ihre relative Korrelation nicht verändert [120]. Die Energiezufuhr rate ist proportional zum Energieinhalt einer Mode. Dies hat zur Folge, dass einzelne Moden wie beim Antrieb mit konstanter Energie vorübergehend stark anwachsen können.

### 4.2.3 Vergleich der Verfahren

Alle oben beschriebenen Verfahren sind geeignet, die Turbulenz über einen langen Zeitraum aufrecht zu erhalten. Um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der einzelnen Antriebe zu untersuchen, wurde für jede Antriebsart mit Ausnahme des Modeneinfrierens eine lange Simulation durchgeführt. Hierbei wurde jeweils die gleiche kinematische Viskosität  $\nu$  vorgegeben und der gleiche Antriebsbereich  $1 \leq |\mathbf{k}| < 3$  gewählt. Die Antriebsparameter wurden so eingestellt, dass sich ungefähr die gleiche mittlere Energiedissipationsrate  $\epsilon$  ergab. Somit sollte die Turbulenz nach der K41-Phänomenologie auf kleinen Skalen vergleichbar sein.

Zum Vergleich der Antriebsformen wurden folgende Größen berechnet: Mittelwerte, Standardabweichungen, Maxima und Minima der Energie, der Energiedissipationsrate und der kinetischen Helizität. Um die zeitliche Dauer der Schwankungen dieser Größen zu charakterisieren, wurden ihre Korrelationszeiten bestimmt. Als sehr grobes Maß für die makroskopische Isotropie wurden die oben genannten Größen auch für die quadratischen Mittelwerte der Komponenten der Geschwindigkeit berechnet  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$  und  $\langle v_z^2 \rangle$ . Weiterhin wurden Details des Energiespektrums auf großen Skalen untersucht. Die Ergebnisse sind in den Tabellen A.2 bis A.7 im Anhang A zusammengefasst.

Vergleicht man alle Antriebsformen mit dem Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb, so erhält man folgende Ergebnisse: Im Falle des Antriebs mit weißem Rauschen ergeben sich für die Mittelwerte und die Standardabweichungen der untersuchten Größen ähnliche Ergebnisse wie für den Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb. Die Korrelationszeiten sind kürzer, was durch die verschwindende zeitliche Korrelation des Antriebs bedingt ist.

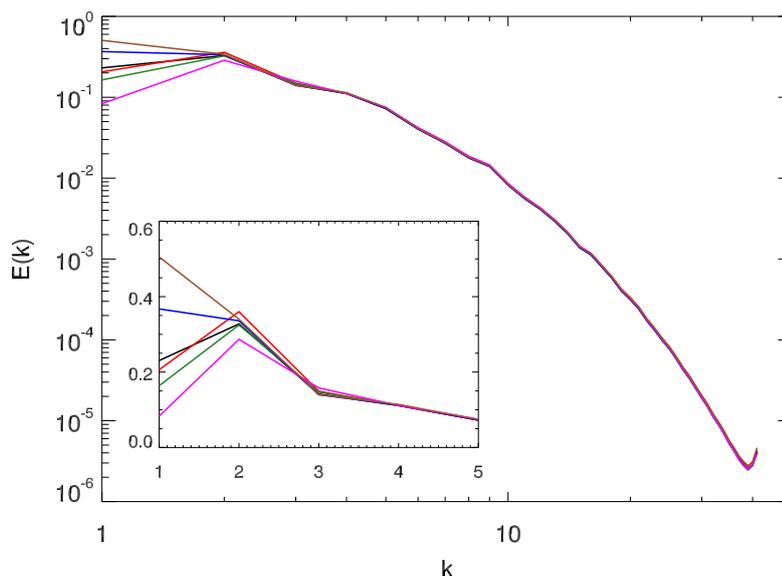
Der Antrieb mit konstanten Amplituden hat die geringste mittlere kinetische Energie im Bereich der angetriebenen Moden  $E^f$  von allen untersuchten Antriebsformen. Die Tatsache, dass die Moden des Antriebsbereichs identische Amplituden haben, scheint also für einen besonders effizienten Energietransfer zu kleineren Skalen zu sorgen. Die Standardabweichungen der gemessenen Größen sind deutlich geringer als bei den stochastischen Antriebsmethoden. Die Korrelationszeiten sind kürzer, nur die Kreuzhelizität zeigt eine etwas längere Korrelationszeit als im Falle des Ornstein-Uhlenbeck-Antriebs.

Auch beim gleichmäßigen Antrieb fallen die deutlich niedrigeren Standardabweichungen von  $E$ ,  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$ ,  $\langle v_z^2 \rangle$  und  $\epsilon$  im Vergleich zu den stochastischen Antriebsformen ins Auge. Dies ist dadurch bedingt, dass der Antrieb zu jedem Zeitschritt angepasst wird und durch die gleichmäßige Verteilung der zugeführten Energie keine einzelne Mode besonders stark anwächst. Die Korrelationszeit von  $E$  ist etwas und die Korrelationszeit von  $H^K$  deutlich länger als beim Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb. Dagegen ist Korrelationszeit von  $\epsilon$  etwas kürzer. Dies ist wahrscheinlich eine Folge der Tatsache, dass die Rate, mit der dieser Antrieb dem System kinetische Energie zuführt, konstant ist.

Deutlichere Abweichungen kann man beim beschleunigenden Antrieb beobachten. Der Mittelwert der Energie ist um etwa 10% höher, was durch eine Zunahme der Energie im Antriebsbereich verursacht ist. Die Standardabweichungen von  $E$  und  $\epsilon$  liegen zwar niedriger, die von  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$  und  $\langle v_z^2 \rangle$  sind dagegen sogar etwas höher als für den Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb.  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$  und  $\langle v_z^2 \rangle$  zeigen auch eine höhere Schwankungsbreite. Auffallend sind weiterhin die langen Korrelationszeiten von  $E$  und  $H^K$ . Diese Effekte werden wahrscheinlich dadurch hervorgerufen, dass einzelne Moden des Antriebsbereichs vorübergehend stark anwachsen können.

Beim Antrieb mit konstanter Energie ist der Mittelwert der Energie um fast 30% höher. Wenn man die Relation  $(E - E^f)/E$  als Effizienz des Antriebs betrachtet, so ist diese Form des Antriebs besonders ineffizient. Das System wird durch den hohe Energieinhalt der angetriebenen Moden mehr von diesen beeinflusst als es im Fall der anderen Antriebsformen der Fall ist. Die Korrelationszeit der Energie ist zwar kürzer als für den Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb, die Korrelationszeiten von  $\langle v_x^2 \rangle$ ,  $\langle v_y^2 \rangle$ ,  $\langle v_z^2 \rangle$  und insbesondere von  $H^K$  sind dagegen länger. Bei Verwendung dieses Antriebs ist also eine längere Zeitmittelung erforderlich, um ein annähernd isotropes System zu erhalten.

Betrachtet man den Verlauf des Energiespektrums bei kleinen Wellenzahlen (siehe Abbildung 4.1), so kann man beobachten, dass bei allen betrachteten Antrieben außer dem beschleunigenden und dem Antrieb mit konstanter Energie das Energiespektrum von  $k = 1$  zu  $k = 2$  ansteigt, im Falle der anderen beiden Antriebe dagegen sinkt. Im Falle des Antriebs mit konstanter Energie ist der Energieverlauf im Wesentlichen durch die gewählten Energiewerte in den angetriebenen Schalen vorgegeben und könnte auch anders eingestellt werden. Bei der ersten Wellenzahl der Spektrums, der keine angetriebenen Wellenvektoren zugeordnet sind ( $k = 4$ ), ergibt sich bei allen Verfahren fast der gleiche Wert. Die kleinen Skalen  $|\mathbf{k}| \gg k_{\max}^f$  sollten im zeitlichen Mittel also das gleiche statistische



**Abbildung 4.1** Verlauf des zeitgemittelten Energiespektrums bei Verwendung unterschiedlicher Antriebsmethoden: Ornstein-Uhlenbeck (schwarz), weißes Rauschen (rot), negative Viskosität (grün), beschleunigender Antrieb (blau), Antrieb mit konstanten Amplituden (magenta) und Antrieb mit konstanter Energie (braun). Der eingesetzte Graph zeigt das Energiespektrum bei den niedrigsten Wellenzahlen mit linearer  $y$ -Achse.

Verhalten zeigen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Abweichungen der Antriebsformen eher im Detail liegen und im Wesentlichen auf großen Skalen auftreten. Grundsätzlich reicht es nicht aus, über einige wenige  $T_{\text{cor}}^K$  zu mitteln, um z. B. die Mittelwerte von  $E$  und  $\epsilon$  zu bestimmen. Insbesondere bei aufwändigen, hochaufgelösten Simulationen fallen die beobachteten Unterschiede in den Korrelationszeiten ins Gewicht, weil hier die Simulationsdauer in der Regel  $\approx 10 - 20T_{\text{cor}}^K$  nicht überschreitet. Am ausgeglichensten bezüglich ihrer Standardabweichung, Schwankungsbreite und Korrelationszeit sind der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb und der gleichmäßige Antrieb. Die Nachteile des Antriebs mit konstanter Energie könnten vermindert werden, wenn man im Antriebsbereich einen realistischeren Energieverlauf vorgäbe (z. B.  $E^f(k) \sim k^2$  statt  $E^f(k) \sim k^{-5/3}$ ).

### Anmerkung zur Reynoldszahl

Eine übliche Definition für die turbulente Reynoldszahl in direkten numerischen Simulationen mit periodischen Randbedingungen besteht in (siehe z. B. [102])

$$Re_{\text{NV}} = \frac{L_E(E^K)^{1/2}}{\nu}. \quad (4.2)$$

Vergleicht man die berechneten Werte von  $Re_{\text{NV}}$  für die verschiedenen Antriebsformen (siehe Tabelle A.1 im Anhang A), stellt man fest, dass sich der höchste Wert ( $Re_{\text{NV}} = 483$ ,

Antrieb mit konstanter Energie) sich vom niedrigsten Wert ( $Re_{NV} = 212$ , Antrieb mit konstanten Amplituden) um einen Faktor  $\approx 2.28$  unterscheidet.

Direkte numerische Simulationen mit periodischen Randbedingungen zielen eigentlich immer auf eine Untersuchung des Inertial- oder Dissipationsgebietes ab. Die Unterschiede in den berechneten Reynoldszahlen sind allein durch die Verhältnisse auf großen Skalen zurückzuführen. Definition (4.2) ist zu Charakterisierung der Ausdehnung des Inertialgebiets daher ungeeignet, wenn man Simulationen mit unterschiedlichen Antriebsmethoden vergleichen will. Nachdem die Reynoldszahl über  $(L_E/\eta)^{4/3}$  mit der Ausdehnung des Inertialgebietes zusammenhängt (siehe Kapitel 3.1.3) ist

$$Re_{NV}^f = \left( \frac{2\pi}{k_{\max}^f \eta} \right)^{4/3} \quad (4.3)$$

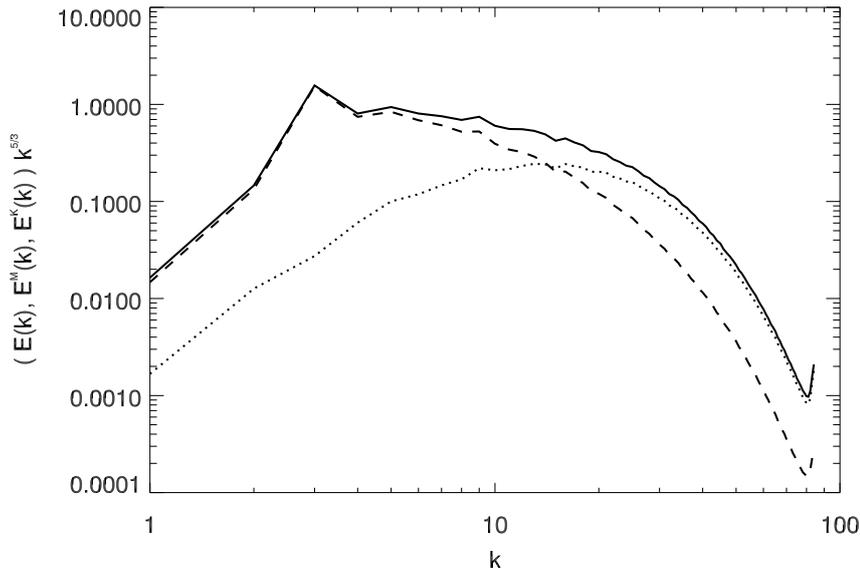
besser geeignet, um als Maß für die Ausdehnung des Inertialbereichs zu dienen. Hierbei wird die Ausdehnung der größten sich frei entwickelnden Eddies über  $L_E^f = 2\pi/k_{\max}^f$  abgeschätzt. Mit Definition (4.3) ergeben sich für die Vergleichssimulationen (fast) identische Werte für die Reynoldszahl ( $Re_L^f \approx 202$ ). Nachdem die Eddies des Antriebsbereichs ausgenommen werden, liegt der Wert der Reynoldszahl niedriger als bei Verwendung von Definition (4.2).

### 4.3 Magnetohydrodynamische Turbulenz

In magnetohydrodynamischer Turbulenz kaskadieren nur zwei der drei idealen Invarianten, die Gesamtenergie  $E$  und die Kreuzhelizität  $H^X$ , direkt, während die magnetische Helizität  $H^M$  (im dreidimensionalen Fall) bzw. das mittlere magnetische Potential  $A$  (im zweidimensionalen Fall) einer indirekten Kaskade folgen. Die inverse Kaskade von  $H^M$  bzw.  $A$  kann dazu führen, dass - spektral betrachtet - im oder nahe beim Antriebsbereich, die magnetische Helizität bzw. das mittlere magnetische Potential zunimmt, was langfristig auch ein Wachstum der magnetischen Energie auf diesen Skalen zur Folge hat (zweidimensionaler Fall) oder haben kann (dreidimensionaler Fall). Jedoch sind die Zeitskalen, auf denen sich die magnetische Helizität oder das mittlere magnetische Potential entwickeln, deutlich länger als die der Gesamtenergie [17, Seiten 76, 175]. Deshalb treten diese Effekte in der Regel nur bei langen Simulationsdauern auf.

Zum Antrieb magnetohydrodynamischer Turbulenz gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann entweder nur das Geschwindigkeitsfeld, nur das Magnetfeld oder beide Felder gleichzeitig antreiben. In Simulationen des kleinskaligen turbulenten Dynamos (siehe z. B. [113]) wird in der Regel nur das Geschwindigkeitsfeld auf großen Skalen angetrieben. Durch den Induktionsterm werden Magnetfeldfluktuationen angeregt<sup>2</sup>. Diese sind jedoch hauptsächlich auf kleinen Skalen im Dissipationsbereich zu finden (siehe Abbildung 4.2). Da in dieser Arbeit Systeme untersucht werden sollen, bei denen ungefähr Äquipartition zwischen den Fluktuationen des Magnet- und Geschwindigkeitsfeldes besteht, ist daher der alleinige Antrieb des Geschwindigkeitsfeldes nicht ausreichend. Deswegen werden in dieser Arbeit sowohl Magnet- als auch Geschwindigkeitsfeld einer äußeren Kraft  $\hat{\mathbf{f}}^b$  bzw.  $\hat{\mathbf{f}}^v$  ausgesetzt.

<sup>2</sup>Der Startzustand muss ein schwaches Saat-Magnetfeld enthalten.



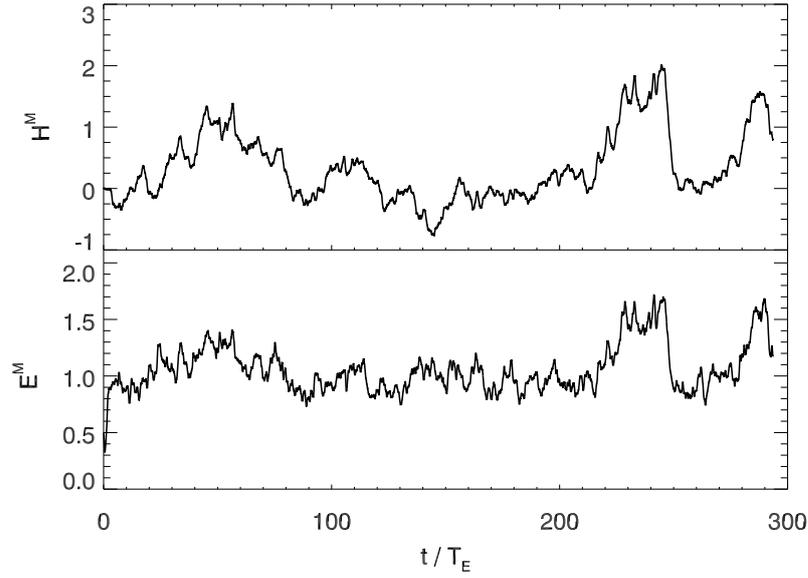
**Abbildung 4.2** Energiespektrum bei alleinigem Antrieb des Geschwindigkeitsfeldes mit einer stochastischen Kraft. Spektrum der Gesamtenergie (durchgezogene Linie), Spektrum der magnetischen Energie (gepunktete Linie), Spektrum der kinetischen Energie (gestrichelte Linie).

### 4.3.1 Stochastische Antriebe

In dieser Arbeit werden die Kräfte  $\hat{\mathbf{f}}^b$  und  $\hat{\mathbf{f}}^v$  in der Regel durch unabhängige Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse modelliert. Im MHD-Fall gibt es Hinweise darauf, dass eine sehr kurze bzw. verschwindende Zeitkorrelation des Antriebs die Skalierung des Energiespektrums verändert [81]. Die Korrelationszeit wird daher in der Größenordnung der integralen Zeitskala gewählt. In manchen Arbeiten werden  $\hat{\mathbf{f}}^b$  und  $\hat{\mathbf{f}}^v$  nicht unabhängig voneinander gewählt, sondern so, dass die Kreuzhelizität des Antriebsterms verschwindet ( $\hat{\mathbf{f}}^b(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{f}}^v(\mathbf{k}, t) = 0$  [144]). Damit soll die Kreuzhelizität der Turbulenz möglichst gering gehalten werden. Im Vergleich zur Verwendung unabhängiger stochastischer Prozesse konnte jedoch kein signifikanter Vorteil dieses Verfahrens gefunden werden. Die Kreuzhelizität nimmt in beiden Fällen nur geringe Werte an. Die magnetische Helizität kann dagegen vorübergehend auf große Werte anwachsen, was mit einer Zunahme der magnetischen Energie einhergeht (siehe Abbildung 4.3). Die Schwankungen der magnetischen Helizität können vermindert werden, wenn man die kleinsten Wellenzahlen vom Antriebsbereich ausnimmt, also z. B. den Antriebsbereich  $2.5 \leq |\mathbf{k}| \leq 3.5$  statt  $1 \leq |\mathbf{k}| < 3$  wählt.

### 4.3.2 Deterministische Antriebe

Bei der Verwendung deterministischer Antriebe (das Modeneinfrieren ausgenommen) kann es durch Ordnungsprozesse auf großen Skalen zu unerwünschten Effekten kommen. Dies wird im folgenden Abschnitt am Beispiel des Antriebs mit konstanter Energie dargestellt.



**Abbildung 4.3** Verlauf der magnetischen Energie (unten) und der magnetischen Helizität (oben) bei Antrieb des Geschwindigkeits- und Magnetfeldes mit stochastischen Kräften im Bereich  $1 \leq |\mathbf{k}| < 3$ .

### Großskalige Ordnungsprozesse

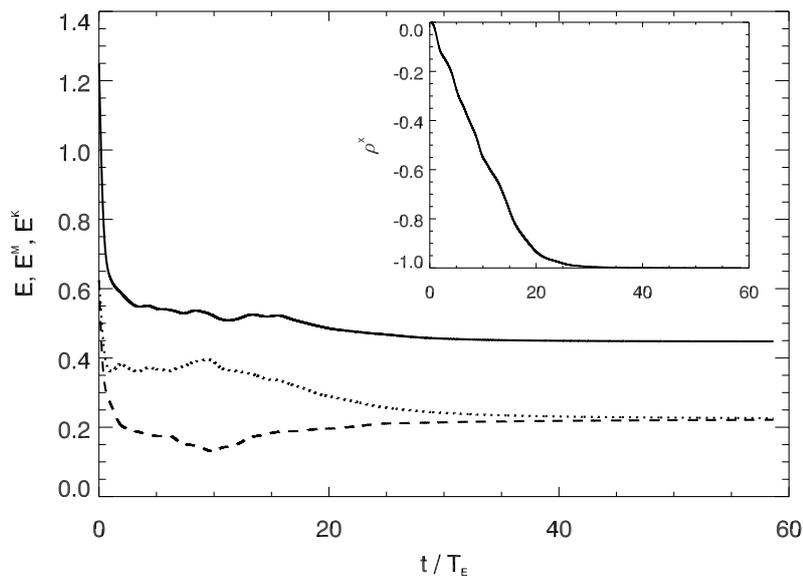
Die Erweiterung des Konzepts des Antriebs mit konstanter Energie auf den MHD-Fall ist auf mehrere Arten denkbar.

Hält man die Gesamtenergie konstant, indem man die Moden des Magnet- und Geschwindigkeitsfeldes im Antriebsbereich mit einem entsprechenden Faktor multipliziert, so bildet sich nach wenigen  $T_E$  ein Alfvénscher Zustand aus [17, Kapitel 4.2.2]. In einem Alfvénschen Zustand sind Magnet- und Geschwindigkeitsfeld überall parallel oder überall antiparallel zueinander ausgerichtet. Die Energie des System ist also entweder vollständig auf  $\mathbf{z}^+$  oder  $\mathbf{z}^-$  konzentriert, und der Betrag der normierten Kreuzhelizität

$$\rho^X = \frac{H^X}{2\sqrt{E^K}\sqrt{E^M}}$$

beträgt Eins (siehe Abbildung 4.4). Da in diesem Fall die nichtlinearen Terme  $\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm$  der Elsässer-Gleichungen (siehe Kapitel 2.1.4) identisch Null sind, ist ein nichtlinearer Energietransfer und damit auch eine inertielle Energiekaskade nicht mehr möglich. Es bildet sich schließlich ein Zustand aus, in dem das Spektrum rein dissipativ ist. Der gemessene Skalierungsexponent des Energiespektrums  $\alpha = -6 \pm 1$  stimmt mit Werten überein, die im tiefen Dissipationsgebiet hydrodynamischer Turbulenz gemessen werden [80].

Eine naheliegende Möglichkeit, die Ausbildung eines Alfvénschen Zustandes zu verhindern, besteht darin, die Elsässer Energien  $E^\pm = \frac{1}{4} \int_V |\mathbf{z}^\pm|^2 dV$  im Antriebsbereich getrennt konstant zu halten, so dass  $E^{+,f} = E^{-,f}$ . Da sich jedoch in magnetohydrodynamischer



**Abbildung 4.4** Kinetische (gestrichelte Linie), magnetische (gepunktete Linie) und Gesamtenergie (durchgezogene Linie) bei Antrieb durch Erhaltung der Gesamtenergie im Antriebsbereich. Eingesetzter Graph: Zeitlicher Verlauf der normierten Kreuzhelizität.

Turbulenz mit verschwindender Kreuzhelizität die Tendenz besteht, dass Energie vom Geschwindigkeitsfeld auf das Magnetfeld übertragen wird [18, 93], wächst die magnetische Energie im Antriebsbereich stetig an, bis fast die ganze Energie der angetriebenen Moden im Magnetfeld enthalten ist<sup>3</sup>. Ein verwandtes Phänomen, der sogenannte *selektive Zerfall*, ist auch aus zerfallender Turbulenz bekannt [17, Kapitel 4.2.1]. Das starke Ungleichgewicht zwischen kinetischer und magnetischer Energie im Antriebsbereich widerspricht der Forderung nach einer ungefähren Gleichverteilung der Energie auf das Magnet- und das Geschwindigkeitsfeld. Diese Art des Antriebs ist also ebenfalls nicht geeignet.

Hält man wiederum kinetische und magnetische Energie im Antriebsbereich getrennt konstant, so stellt sich abermals ein Alfvénscher Zustand ein. Ähnliche Beobachtungen kann man auch bei den anderen deterministischen Antriebsformen machen.

Insgesamt kommt man zu dem Schluss, dass sowohl  $E^M$  als auch  $E^K$  als auch  $H^X$  im Antriebsbereich kontrolliert werden müssen. Treibt man das Geschwindigkeits- und das Magnetfeld getrennt an, so kann man eine einseitige Energieverteilung auf das Magnetfeld ausschließen. Durch die Kontrolle der Kreuzhelizität wird die Ausbildung Alfvénscher Zustände verhindert.

### 4.3.3 Vermeidung der Ausbildung Alfvénscher Zustände

Die Ausbildung eines Alfvénschen Zustands im angetriebenen Modenbereich kann dadurch verhindert werden, dass die Kreuzhelizität im Antriebsbereich auf einem niedrigen Wert

<sup>3</sup>In der Testsimulation stellt sich ein Zustand mit  $E^M \approx 40E^K$  ein.

gehalten wird. Im Fourier-Raum ist die Kreuzhelizität über

$$H^X = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(-\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{v}}(-\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) \right]$$

definiert [17]. Jede Mode trägt also

$$H_{\text{local}}^X(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \left[ \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}^*(\mathbf{k}) + \hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}) \right] = \Im(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Im(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) + \Re(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Re(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}))$$

zur Kreuzhelizität bei. Wenn man nun zur Dämpfung der Kreuzhelizität nur Verfahren in Betracht zieht, die lokal auf einzelnen Wellenvektoren arbeiten und die Amplituden der Moden intakt lassen, kommen im Wesentlichen zwei Strategien in Frage:

- Man hält die Moden des Magnet- und Geschwindigkeitsfelds senkrecht aufeinander, so dass  $\Re(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Re(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) \approx 0$  und  $\Im(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Im(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) \approx 0$ . Dies kann durch ein Drehen des Real- und Imaginärteils der Moden in der Ebene senkrecht zum Wellenvektor  $\mathbf{k}$  geschehen.
- Man manipuliert die Phasen der Moden des Geschwindigkeits- und Magnetfelds, so dass  $\Im(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Im(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k})) \approx -\Re(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k})) \cdot \Re(\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}))$ <sup>4</sup>. Die Moden des Geschwindigkeits- und Magnetfeldes stehen nun in den beiden unabhängigen komplexen Ebenen senkrecht aufeinander.

Durch entsprechende Anpassung der Winkel bzw. Phasen zwischen den Moden des Magnet- und Geschwindigkeitsfeldes kann man die Kreuzhelizität auch auf endliche Werte dämpfen.

Nicht bei allen Antriebsmethoden führt die Dämpfung der Kreuzhelizität zum Erfolg. In einer Simulation mit dem beschleunigenden Antrieb konzentrierte sich die magnetische und kinetische Energie nach einer langen Simulationsdauer  $t > 100 T_E$  in einer einzigen Mode (eine ähnliche Beobachtung wird auch in [128] erwähnt). Von der Verwendung dieses Verfahrens im MHD-Fall ist also eher abzuraten.

#### 4.3.4 Einfluss des mittleren Magnetfelds

In MHD-Turbulenz mit einem starken mittleren Magnetfeld werden durch einen stochastischen Antrieb langwellige Alfvénsche Fluktuationen angeregt, die sich entlang des mittleren Magnetfelds ausbreiten. Die Verfahren zur Dämpfung der Kreuzhelizität führen bei der Verwendung deterministischer Antriebsformen dazu, dass im Antriebsbereich die Ausbildung sich ausbreitender Alfvénscher Fluktuationen behindert wird. Wird die lokale Kreuzhelizität im Antriebsbereich auf Null gesetzt, können sich keine laufenden, sondern nur noch stehende Alfvén-Wellen ausbilden, da eine sich ausbreitende Alfvén-Welle immer eine endliche Kreuzhelizität aufweist. Der Antrieb mit Modeneinfrieren lässt keine Form Alfvénscher Fluktuationen auf großen Skalen zu. Nachdem die Dynamik der Alfvén-Wellen eine wichtige Rolle in der phänomenologischen Beschreibung magnetohydrodynamischer Turbulenz spielt, sind diese Unterschiede nicht unwesentlich. Wie stark

<sup>4</sup>Im dreidimensionalen Fall erfolgt dies jeweils getrennt in den beiden unabhängigen komplexen Ebenen, die einem Wellenvektor  $\mathbf{k}$  zugeordnet sind. Im zweidimensionalen Fall gibt es nur eine solche Ebene.

	$ \mathbf{k}  = 1$	$ \mathbf{k}  = 2$	$ \mathbf{k}  = 3$	$ \mathbf{k}  = 4$
3D-Fall	18	62	98	210
2D-Fall	8	12	16	32

**Tabelle 4.1** Anzahl der Moden in verschiedenen Schalen im Fourierraum.

großskalige Alfvén-Wellen ausgeprägt sind, kann man z. B. an Hand des Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrums beobachten (siehe Kapitel 6.2). Im Eulerschen Energiespektrum ist die unterschiedliche Ausprägung der großskaligen Alfvén-Wellen dagegen weniger offensichtlich.

Der Antrieb mit konstanten Amplituden ist in der hier vorgestellten Form im anisotropen MHD-Fall nicht zu empfehlen. In MHD-Turbulenz mit einem starken mittleren Magnetfeld ist die Energie im statistischen Mittel nicht mehr kugelsymmetrisch um den Ursprung im Fourier-Raum verteilt, sondern die Flächen konstanter Energie sind entlang des mittleren Magnetfelds gestreckt[39]. Gibt man nun auf großen Skalen gleich große Amplituden vor, so erzwingt man kugelförmige Flächen konstanter Energie bei kleinen Wellenzahlen. Das System kann sich also auf großen Skalen nicht auf das mittlere Magnetfeld einstellen.

In manchen Simulationen wird der Kraftterm anisotrop gewählt (z. B.  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}) \times \mathbf{B}_0 = 0$  [81]). Allerdings gibt man durch diese Wahl des Kraftterms dem System eine zusätzliche Anisotropie vor, und die Zahl der unabhängigen Kraftkomponenten ist im Vergleich zu einem isotropen Kraftterm reduziert.

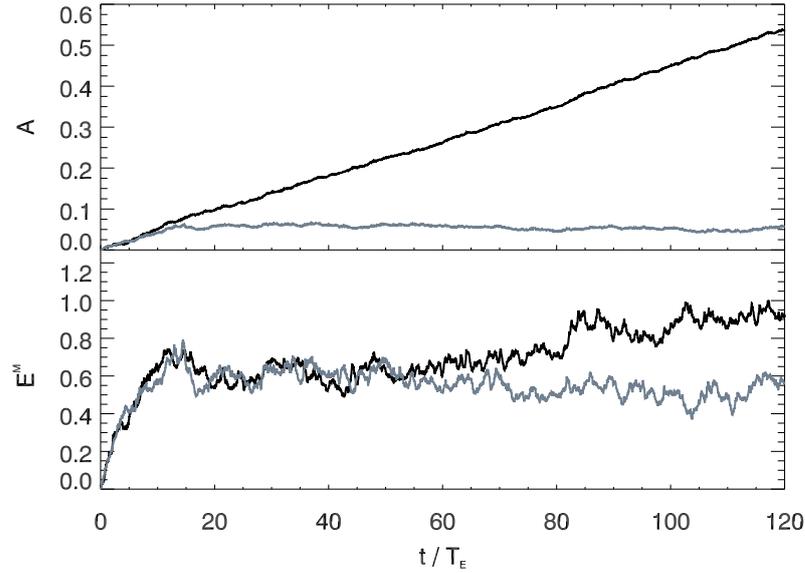
#### 4.3.5 Zusammenfassung

Wie in den vorangegangenen Abschnitten erläutert wurde, ist die Anwendung der deterministischen Antriebsmethoden mit Ausnahme des Modeneinfrierens nur nach der Einführung einer weiteren Zwangsbedingung im Antriebsbereich möglich. Im Vergleich zur Verwendung stochastischer Antriebsmethoden ist das System auf großen Skalen weit stärker in seiner freien Entwicklung eingeschränkt. Dies wird besonders im anisotropen MHD-Fall deutlich. Nachdem der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb eine weitgehend freie Entwicklung des Systems zulässt, scheint er im Allgemeinen die geeignetste Antriebsform zu sein. Allerdings erschweren die im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds angeregten großskaligen Alfvén-Wellen die Auswertung der Lagrangeschen Statistik.

## 4.4 Besonderheiten im zweidimensionalen Fall

In zweidimensionaler MHD-Turbulenz beobachtet man ähnliche Effekte wie im dreidimensionalen Fall. Durch die deutlich niedrigere Anzahl der angetriebenen Moden bei gleicher Wahl des Antriebsbereichs (siehe Tabelle 4.1) sind die zeitlichen Schwankungen der Energie, Energiedissipationsrate etc. jedoch deutlich höher.

Stärker als die inverse Kaskade der magnetischen Helizität sorgt die inverse Kaskade des mittleren magnetischen Potentials für ein Anwachsen der magnetischen Energie auf großen Skalen. Der Effekt der inversen Kaskade des mittleren magnetischen Potentials ist stärker



**Abbildung 4.5** Magnetische Energie (unten) und mittleres magnetischen Potential (oben) in zweidimensionaler MHD-Turbulenz bei Antrieb mit stochastischer Kraft ohne (schwarze Linien) und mit Dämpfung (graue Linien) auf großen Skalen.

als der entsprechenden inversen Kaskade der magnetischen Helizität im dreidimensionalen MHD-Fall, da jedem Zuwachs von  $A$  ein Zuwachs von  $E^M$  entspricht, während  $H^M$  auch zunehmen kann, ohne dass  $E^M$  steigt.

Bei Verwendung deterministischer Antriebsmethoden (das Modeneinfrieren ausgenommen) muss wie im dreidimensionalen Fall die Ausbildung Alfvénscher Zustände verhindert werden, was mit dem zweiten der oben genannten Verfahren geschehen kann.

Bei Antriebsformen, die eine Zeitentwicklung der Energie des Antriebsbereichs zulassen, sorgt die inverse Kaskade des mittleren magnetischen Potentials für ein Anwachsen der magnetischen Energie auf großen Skalen. Eine Verschiebung des Antriebsbereichs zu leicht höheren Wellenzahlen kann ein langfristiges Anwachsen der magnetischen Energie nicht verhindern. Für langandauernde Simulationen ist daher eine Dämpfung auf großen Skalen nötig. Der verwendete Dämpfungsterm wird wie ein zusätzlicher Kraftterm zur rechten Seite der Gleichung (2.14) für das magnetische Potential  $\psi$  addiert. Er wurde aus [29] übernommen und hat die Form

$$\hat{D}^\psi(\mathbf{k}, t) = -d_0 e^{-(k-k_0)^2/2\sigma_0^2} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t).$$

Damit werden die Moden des magnetischen Potentials um  $k_0$  in einem Band der Breite  $\sigma_0$  gedämpft, und damit ein fortwährendes Anwachsen des mittleren magnetischen Potentials verhindert (siehe Abbildung 4.5).

# 5 Die Simulationen aus Eulerscher Sicht

Turbulenz wurde in der Vergangenheit und wird auch weiterhin bevorzugt vom Eulerschen Standpunkt aus untersucht. Die Lagrangesche Turbulenzforschung, die erst in der jüngeren Vergangenheit an Bedeutung gewonnen hat, baut daher auf den Erkenntnissen auf, die man aus Eulerschen Turbulenzuntersuchungen gewonnen hat. In diesem Kapitel sollen daher die durchgeführten Simulationen zunächst aus Eulerscher Sicht charakterisiert werden.

Im ersten Abschnitt werden die in den Simulationen vorgegebenen Parameter und die charakteristischen Kennzahlen der Simulationen diskutiert. Anschließend werden die Energiespektren im Zusammenhang mit der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung diskutiert. Zum Abschluss werden die turbulenten Felder dargestellt, um einen Eindruck von der jeweiligen Form der turbulenten Strömung zu geben, in denen sich die Testteilchen bewegen.

## 5.1 Parameter und Kennzahlen der numerischen Simulationen

### 5.1.1 Die vorgegebenen Parameter

Im dreidimensionalen MHD-Fall wurde für den Großteil der in dieser Arbeit besprochenen Simulationen der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb verwendet. Die Parameter dieser Simulationen sind in den Tabelle 5.1 und 5.2 zusammengefasst. Als Antriebsbereich wurde eine Schale im Fourierraum ( $2.5 \leq |\mathbf{k}| < 3.5$ ) gewählt. Die kleinsten Wellenzahlen wurden vom Antriebsbereich ausgenommen, um ein vorübergehendes starkes Anwachsen einzelner Moden gering zu halten (siehe Kapitel 4.3.1). Für alle Simulationen wurden dieselben Antriebsparameter, d. h. die gleiche Korrelationszeit und Amplitude, verwendet. Im MHD-Fall wurde das Magnetfeld ebenso wie das Geschwindigkeitsfeld mit unabhängigen stochastischen Prozessen angetrieben. Die Amplitude und Korrelationszeit der stochastischen Prozesse, mit denen das Magnetfeld angetrieben wurde, stimmen mit denen für das Geschwindigkeitsfeld überein. Im Navier-Stokes- und makroskopisch isotropen MHD-Fall wurden jeweils zwei Simulationen bei verschiedenen Auflösungen durchgeführt.

In den Simulationen NVFOU512N3, B0FOU512N3 und B5FOU512N3 wurde die gleiche kinematische Viskosität und magnetische Diffusivität vorgegeben. Beim Vergleich dieser Simulationen fällt auf, dass im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld nicht nur das Spektrum der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen, sondern auch das Spektrum der Fluktuationen senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$  stärker abfällt als im makroskopisch isotropen MHD-Fall (siehe Abbildung 5.3). Dies äußert sich auch in den geringeren Reynoldszahlen (siehe Tabelle 5.1) in Simulation B5FOU512N3 im Vergleich zu Simulation B0FOU512N3. Die Annahme, dass die turbulenten Fluktuationen in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld durch dieses unbeeinflusst bleiben, kann also nicht gemacht werden. Um einen Fall untersuchen

zu können, in dem sich die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen über einen ähnlichen Skalenbereich erstrecken wie im makroskopisch isotropen MHD-Fall, wurde eine weitere Simulation mit niedrigerer kinematischer Viskosität und magnetischer Diffusivität durchgeführt (B5REFOU512N3).

Im MHD-Fall mit einem starken mittleren Magnetfeld werden durch den Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb auf großen Skalen Alfvén-Wellen angeregt, die sich in verschiedenen Lagrangeschen statistischen Größen wie z. B. der Autokorrelation der Geschwindigkeit bemerkbar machen. Um auch Systeme ohne großskalige Alfvén-Wellen untersuchen zu können, wurden zwei Simulationen einem deterministischen Antrieb durchgeführt (siehe Tabelle 5.2). In diesen Simulationen (B5FRZ512N3 und B5FRZ1024N3) wurde die Turbulenz durch Modeneinfrieren im Bereich  $0 < |\mathbf{k}| \leq 2.5$  angetrieben. Weil sich die eingefrorenen Moden nicht in der Zeit entwickeln können, ist die Ausbildung von Alfvén-Wellen auf großen Skalen nicht möglich.

Im zweidimensionalen MHD-Fall wurden die Auflösung zusammen mit der kinematischen Viskosität bzw. magnetischen Diffusivität variiert, um das Verhalten bei verschiedenen Reynoldszahlen untersuchen zu können (siehe Tabelle 5.3). Die turbulenten Felder wurden im Bereich ( $1 \leq |\mathbf{k}| < 3$ ) durch den Antrieb durch Erhaltung der Energie und bei verschwindender Kreuzhelizität im Antriebsbereich angetrieben. Der Energie-erhaltende Antrieb wurde gewählt, um sehr starke Schwankungen der makroskopischen Größen zu verhindern.

Die Simulationsdauer  $T_{\text{sim}}$  ist im Wesentlichen durch den Rechen- und damit auch den Kostenaufwand begrenzt. Deswegen sind die Simulationsdauern der hoch aufgelösten Simulationen ( $1024^3$ ,  $4096^2$ ) auch entsprechend kürzer, da hier der Rechenaufwand sehr viel größer ist. Die Simulationsdauern entsprechen jedoch gemessen in Vielfachen der Dissipationszeitskala mehreren  $100\tau_\eta$ . Dies reicht in allen hier betrachteten Fällen aus, um das statistische Verhalten der Testteilchen auf kurzen bzw. mittleren Zeitskalen zu beobachten.

### 5.1.2 Charakteristische Skalen und die turbulente Reynoldszahl

Zur Charakterisierung einer turbulenten Strömung werden verschiedene Längenskalen verwendet. Die charakteristische Ausdehnung  $L_E$  und Entwicklungszeit  $T_E$  der größten Eddies wird häufig über

$$L_E = \frac{E^{3/2}}{\epsilon}, \quad T_E = \frac{E}{\epsilon} \quad (5.1)$$

abgeschätzt (siehe auch Kapitel 2.2.2). Im anisotropen und im zweidimensionalen MHD-Fall funktioniert diese Abschätzung nicht besonders gut, es ergeben sich zu große Werte. Ein besseres Maß für die tatsächliche Ausdehnung der größten turbulenten Strukturen sind die integralen Längen- und Zeitskalen (siehe unten).

Die mit  $L_E$  und  $T_E$  berechnete turbulente Reynoldszahl hängt stark von der Wahl des Antriebs ab (siehe Kapitel 4.2.3), und ist daher ungeeignet, die Ausdehnung des Inertialbereiches zu charakterisieren. Deswegen wird auf die Definition (4.3) zur Berechnung der turbulenten Reynoldszahl zurückgegriffen. Im MHD-Fall sollte in die Definition der Reynoldszahl auch das Magnetfeld einbezogen werden. Deswegen wird in Analogie zur

	NVFOU512N3	B0FOU512N3	B5FOU512N3	B5REFOU512N3
$v_{\perp,\text{rms}}, v_{\parallel,\text{rms}}$	0.56	0.44	0.35, 0.45	0.34, 0.46
$b_{\perp,\text{rms}}, b_{\parallel,\text{rms}}$	-	0.59	0.45, 0.46	0.47, 0.46
$B_0$	-	0	5	5
$\epsilon^K$	0.16	0.11	$3.6 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-2}$
$\epsilon_{\perp}^K$	-	-	$4.7 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$
$\epsilon_{\perp}^M$	-	0.17	$4.4 \cdot 10^{-2}$	$4.2 \cdot 10^{-2}$
$\epsilon_{\perp}^M$	-	-	$6.9 \cdot 10^{-2}$	$6.5 \cdot 10^{-2}$
$\nu$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$\lambda$	-	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
$N_{\perp}^2 \cdot N_{\parallel}$	$512^3$	$512^3$	$512^2 \cdot 256$	$512^2 \cdot 256$
$\Delta x$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$1.23 \cdot 10^{-2}$
$L_E$	2.1	2.6	6.6	5.3
$L_{\text{cor},\perp}^K, L_{\text{cor},\parallel}^K$	0.57	0.57	0.69, 1.99	0.59, 1.95
$L_{\text{cor},\perp}^M, L_{\text{cor},\parallel}^M$	-	0.61	0.94, 2.06	1.14, 1.98
$\mathcal{L}/L_{\text{cor},\perp}^K$	11	11	9.1	11
$\eta$	$9.0 \cdot 10^{-3}$	$9.7 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{\perp}$	-	-	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$9.3 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{\text{IK}}$	-	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$
$\eta_{\text{IK},\perp}$	-	-	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.3 \cdot 10^{-2}$
$k_{\text{max}}\eta, k_{\text{max}}\eta_{\perp}$	1.51	1.64	2.18, 2.04	1.68, 1.58
$\eta/\Delta x$	0.73	0.79	1.05	0.81
$k_{\text{max}}\eta_{\text{IK}}$	-	2.17	3.02, 2.66	2.43, 2.16
$T_E$	3.1	2.9	6.6	7.1
$T_{\text{cor},\perp}^K, T_{\text{cor},\parallel}^K$	1.0	1.3	2.0, 4.5	1.7, 4.3
$T_{\text{cor},\perp}^M, T_{\text{cor},\parallel}^M$	-	1.0	2.1, 4.5	2.4, 4.3
$\tau_{\eta}$	$8.0 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$	0.17	0.14
$T_{\perp}^L/\tau_{\eta}, T_{\parallel}^L/\tau_{\eta}$	9.6	6.1	(7.0, 12.5)	(5.4, 18)
$T_{\text{sim}}/T_{\text{cor},\perp}^K$	24.8	19.8	20.8	30.4
$Re_{\text{NV}}^f, Re_{\text{NV},\perp}^f$	1170	1050	720, 790	1020, 1110
$Re_{\text{MHD}}^f, Re_{\text{MHD},\perp}^f$	-	1770	1010, 1220	1390, 1670

**Tabelle 5.1** Parameter und typische Kennzahlen der dreidimensionalen numerischen Simulationen, erster Teil. In den makroskopisch isotropen Fällen wird zwischen senkrechter und paralleler Richtung nicht unterschieden. Für alle in dieser Tabelle beschriebenen Simulationen wurde der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb verwendet.

	B5FRZ512N3	B5FRZ1024N3	NVFOU1024N3	B0FOU1024N3
$v_{\perp,\text{rms}}, v_{\parallel,\text{rms}}$	0.50, 0.58	0.52, 0.60	0.56	0.46
$b_{\perp,\text{rms}}, b_{\parallel,\text{rms}}$	0.64, 0.57	0.66, 0.58	-	0.64
$B_0$	5	5	-	0
$\epsilon^{\text{K}}$	$7.4 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-2}$	0.15	0.12
$\epsilon_{\perp}^{\text{K}}$	0.10	0.11	-	-
$\epsilon^{\text{M}}$	$8.5 \cdot 10^{-2}$	$8.8 \cdot 10^{-2}$	-	0.17
$\epsilon_{\perp}^{\text{M}}$	0.14	0.14	-	-
$\nu$	$8 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$
$\lambda$	$8 \cdot 10^{-4}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$	-	$3.4 \cdot 10^{-4}$
$N_{\perp}^2 \cdot N_{\parallel}$	$512^2 \cdot 256$	$1024^2 \cdot 512$	$1024^3$	$1024^3$
$\Delta x$	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$6.14 \cdot 10^{-3}$
$L_{\text{E}}$	6.1	6.5	2.2	3.1
$L_{\text{cor},\perp}^{\text{K}}, L_{\text{cor},\parallel}^{\text{K}}$	0.76, 1.52	0.72, 1.42	0.55	0.51
$L_{\text{cor},\perp}^{\text{M}}, L_{\text{cor},\parallel}^{\text{M}}$	1.07, 1.60	1.06, 1.45	-	0.58
$\mathcal{L}/L_{\text{cor},\perp}^{\text{K}}$	8.3	8.7	11.4	12.5
$\eta$	$9.1 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{\perp}$	$8.4 \cdot 10^{-3}$	$4.3 \cdot 10^{-3}$	-	-
$\eta_{\text{IK}}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	-	$6.4 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{\text{IK},\perp}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	-	-
$k_{\text{max}}\eta, k_{\text{max}}\eta_{\perp}$	1.54, 1.42	1.57, 1.46	1.56	1.45
$\eta/\Delta x$	0.74	0.76	0.75	0.70
$k_{\text{max}}\eta_{\text{IK}}$	2.28, 2.02	2.55, 2.24	-	2.17
$T_{\text{E}}$	6.2	6.4	3.2	3.2
$T_{\text{cor},\perp}^{\text{K}}, T_{\text{cor},\parallel}^{\text{K}}$	1.53, 2.62	1.40, 2.37	0.98	1.1
$T_{\text{cor},\perp}^{\text{M}}, T_{\text{cor},\parallel}^{\text{M}}$	1.69, 2.82	1.62, 2.48	-	0.91
$\tau_{\eta}$	0.10	$6.54 \cdot 10^{-2}$	$5.25 \cdot 10^{-2}$	$5.37 \cdot 10^{-2}$
$T_{\perp}^{\text{L}}/\tau_{\eta}, T_{\parallel}^{\text{L}}/\tau_{\eta}$	6.2, 9.0	13, 17	14	8.9
$T_{\text{sim}}/T_{\text{cor},\perp}^{\text{K}}$	31.4	12.7	14.8	12.7
$Re_{\text{NV}}^{\text{f}}, Re_{\text{NV},\perp}^{\text{f}}$	1790, 2000	4410, 4900	2870	3150
$Re_{\text{MHD}}^{\text{f}}, Re_{\text{MHD},\perp}^{\text{f}}$	2540, 3050	6150, 7460	-	4720

**Tabelle 5.2** Parameter und typische Kennzahlen der dreidimensionalen numerischen Simulationen, zweiter Teil. Für die Simulationen B5FRZ512N3 und B5FRZ1024 wurde der Antrieb durch Modeneinfrieren verwendet, bei den Simulationen NVFOU1024N3 und B0FOU1024N3 wurde der Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb eingesetzt.

	2DFCEHXZ1024	2DFCEHXZ2048	2DFCEHXZ4096
$v_{\text{rms}}$	0.75	0.80	0.80
$b_{\text{rms}}$	0.93	0.98	0.98
$\epsilon_K$	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$7.2 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$
$\epsilon_M$	$9.7 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-1}$	$8.9 \cdot 10^{-2}$
$\nu$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$\lambda$	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
$N^2$	$1024^2$	$2048^2$	$4096^2$
$\Delta x$	$6.14 \cdot 10^{-3}$	$3.07 \cdot 10^{-3}$	$1.53 \cdot 10^{-3}$
$L_E$	10.6	11.7	12.9
$L_{\text{cor}}^K$	0.73	0.67	0.65
$L_{\text{cor}}^M$	0.61	0.56	0.56
$\mathcal{L}/L_{\text{cor}}^K$	8.6	9.4	9.6
$\eta$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{\text{IK}}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$5.7 \cdot 10^{-3}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
$k_{\text{max}}\eta$	2.26	2.04	1.82
$\eta/\Delta x$	1.08	0.98	0.87
$k_{\text{max}}\eta_{\text{IK}}$	3.84	3.87	3.85
$T_E$	8.9	9.2	10.2
$T_{\text{cor}}^K$	0.98	0.84	0.82
$T_{\text{cor}}^M$	0.66	0.57	0.57
$\tau_\eta$	$8.8 \cdot 10^{-2}$	$5.0 \cdot 10^{-2}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$
$T^L/\tau_\eta$	6.5	12	25
$T/T_{\text{cor}}^K$	102	61.6	29.4
$Re_{\text{NV}}^f$	2150	6200	18240
$Re_{\text{MHD}}^f$	2520	7070	20210

**Tabelle 5.3** Parameter und typische Kennzahlen der Simulationen zweidimensionaler MHD-Turbulenz.

Definition (4.3) folgende Reynoldszahl-Definition für den MHD-Fall gewählt (siehe [20])

$$Re_{\text{MHD}}^f = \left( \frac{2\pi}{k_{\text{max}}^f \eta_{\text{IK}}} \right)^{3/2}. \quad (5.2)$$

Da der Antriebsbereich bei der Berechnung der Reynoldszahlen ausgenommen wird, sind die angegebenen Reynoldszahlen tendenziell niedriger als in vergleichbaren Arbeiten in der Literatur. Zwischen hydrodynamischer und magnetischer Reynoldszahl wird nicht unterschieden, da die magnetische Prandtl-Zahl in allen Simulationen zu Eins gewählt wurde.

Im anisotropen Fall konzentrieren sich die turbulenten Fluktuationen im Wesentlichen auf die Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld. Mit der üblichen Definition der Kolmogorov- bzw. Iroshnikov-Kraichnan-Dissipationsskala überschätzt man im Vergleich zum isotropen Fall die Größe der dissipativen Strukturen in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld. Eine dem isotropen Fall äquivalente Energiedissipationsrate in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Ebene kann über die partiellen Ableitungen der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen abgeschätzt werden. Im statistisch isotropen Navier-Stokes-Fall gilt  $\epsilon^K = \frac{15}{2}\nu\langle(\partial_y v_x)^2\rangle$  [102, Seite 199ff.]. In Analogie hierzu werden die äquivalenten senkrechten Energiedissipationsraten definiert

$$\epsilon_{\perp}^K = \frac{15}{4}\nu \left[ \langle(\partial_y v_x)^2\rangle + \langle(\partial_x v_y)^2\rangle \right], \quad (5.3)$$

$$\epsilon_{\perp}^M = \frac{15}{4}\nu \left[ \langle(\partial_y b_x)^2\rangle + \langle(\partial_x b_y)^2\rangle \right]. \quad (5.4)$$

Mit Hilfe dieser Größen kann man die Dissipationsskalen in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Ebene  $\eta_{\perp} = (\nu^3/\epsilon_{\perp}^K)^{1/4}$  und  $\eta_{\text{IK},\perp} = (\nu^2 b_{\text{rms}}/\epsilon_{\perp})^{1/3}$  mit  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\perp}^K + \epsilon_{\perp}^M$  definieren. Die entsprechenden Reynoldszahlen  $Re_{\text{NV},\perp}^f$  und  $Re_{\text{MHD},\perp}^f$  charakterisieren die Ausdehnung des Inertialbereichs der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen.

Die integrale Längenskala  $L_{\text{cor}}^K$  entspricht der Korrelationslänge des Geschwindigkeitsfeldes. Sie kann im statistisch isotropen Fall aus dem winkelintegrierten kinetischen Energiespektrum berechnet werden (siehe Anhang B)

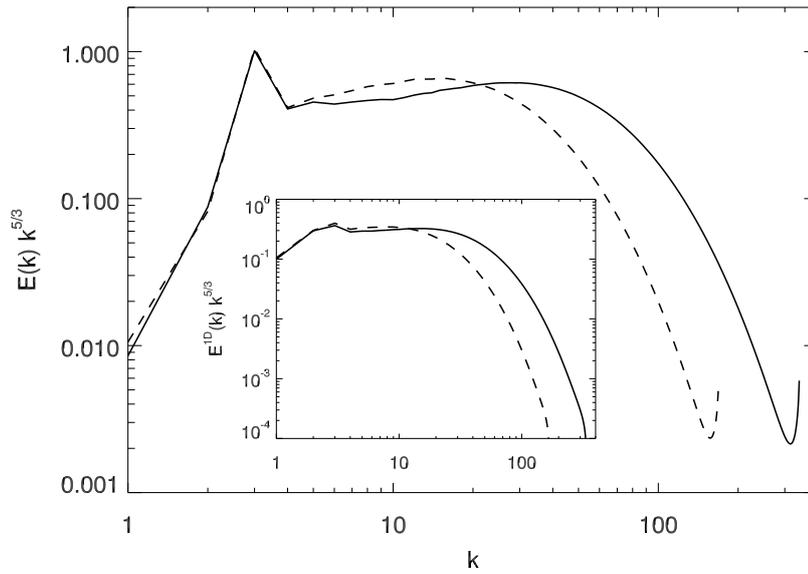
$$L_{\text{cor}}^K := \frac{c_D}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^{k_{\text{max}}} dk k^{-1} E^K(k) \quad \text{mit} \quad c_D = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{im 3D-Fall,} \\ 2 & \text{im 2D-Fall.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Analog kann man auch eine integrale Längenskala des Magnetfeldes  $L_{\text{cor}}^M$  definieren. Aus Tabelle 5.1 ersieht man, dass die integralen Längenskalen deutlich kürzer als  $L_E$  sind.

Im anisotropen MHD-Fall kann Relation (5.5) nicht mehr zur Berechnung der integralen Längenskalen verwendet werden. Die Korrelationslängen des Geschwindigkeits- und Magnetfeldes ist nun richtungsabhängig. Die entsprechenden richtungsabhängigen integralen Längenskalen  $L_{\text{cor},i}^K$ ,  $i = x, y, z$  können unter Verwendung der eindimensionalen longitudinalen Spektren des Geschwindigkeitsfeldes berechnet werden [145]

$$L_{\text{cor},i}^K = \frac{\pi}{\langle v_i^2 \rangle} \mathcal{E}_{ii}^K(0) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_{ii}^K(k) = \int d\mathbf{k}' \delta(|k'_i| - k) |v_i(\mathbf{k}')|^2, \quad i = x, y, z. \quad (5.6)$$

Die richtungsabhängigen integralen Längenskalen des Magnetfeldes ergeben sich entsprechend aus den eindimensionalen Spektren des Magnetfeldes. Durch ein starkes mittleres



**Abbildung 5.1** Kompensiertes winkelintegriertes Energiespektrum im Navier-Stokes-Fall. Eingesetzter Graph: kompensiertes eindimensionales Energiespektrum. Durchgezogene Linien: Simulation NVFOU1024N3, gestrichelte Linien: Simulation NVFOU512N3.

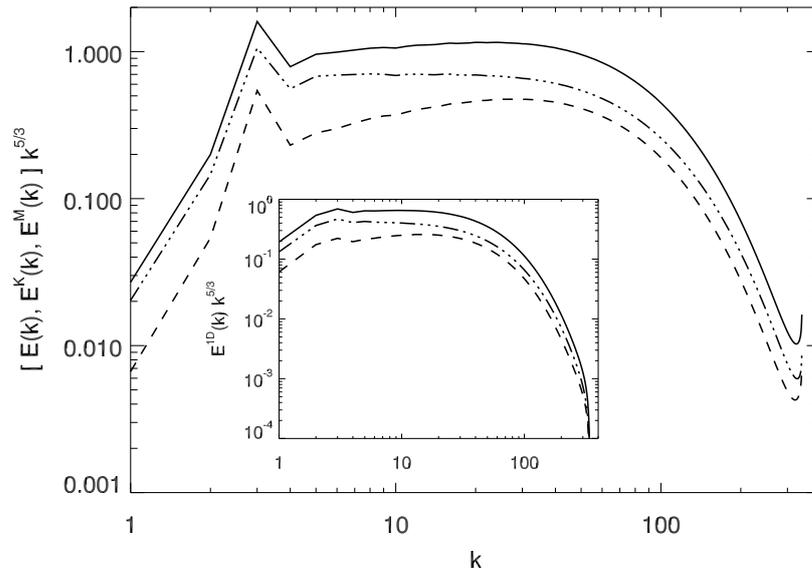
Magnetfeld erhöhen sich die Korrelationslängen in  $\mathbf{B}_0$ -paralleler Richtung auf das Doppelte bis Dreifache. In der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Ebene ändern sich die Korrelationslängen dagegen nur wenig. Die zu den integralen Längenskalen korrespondierenden integralen Zeitskalen kann man über  $T_{\text{cor},i}^K = L_{\text{cor},i}^K/v_{i,\text{rms}}$  bzw.  $T_{\text{cor},i}^M = L_{\text{cor},i}^M/b_{i,\text{rms}}$  abschätzen.

## 5.2 Energiespektren

In den Energiespektren beobachtet man sowohl im Navier-Stokes- als auch im MHD-Fall einen Abfall der Energie auf großen Skalen, also bei kleinen Wellenzahlen (siehe Abbildungen 5.1 und 5.2). Ein Abfall des winkelintegrierten Energiespektrums auf großen Skalen tritt auch in Experimenten auf [51].

Im Antriebsbereich erreichen die Spektren ihre Maxima, um dann zu höheren Wellenzahlen hin abzufallen. Bei sehr großen Wellenzahlen steigen die winkelintegrierten Spektren etwas an, man sieht einen kleinen Haken. Dieser Haken wird durch das sogenannte *Gibbs-Phänomen* hervorgerufen [34, 48, 58]. Sehr steile Gradienten, wie sie z. B. im Vortizitätsfeld auftreten, können in der trunkierten Fourierdarstellung nicht aufgelöst werden, es kommt in der Umgebung dieser Gradienten zu typischen Über- und Unterschwingern. Im Realraum kann man die Auswirkungen des Gibbs-Phänomens z. B. an den Isoflächen des Vortizitätsfeldes beobachten, in denen man schwache Wellenmuster sehen kann (siehe z. B. Bilder in [58]).

Im Inertialbereich (hier etwa  $5 \leq |\mathbf{k}| \leq 20$ ) sollten die Spektren einem Skalierungsgesetz folgen. Im Navier-Stokes-Fall erwartet man eine Skalierung mit  $k^{-5/3}$ , tatsächlich zeigt



**Abbildung 5.2** Kompensiertes winkelintegriertes Spektrum der Gesamt-Energie (durchgezogene Linien), der magnetischen (Punkt-Strich-Linien) und kinetischen Energie (gestrichelte Linien) im makroskopisch isotropen MHD-Fall. Eingesetzter Graph: entsprechende eindimensionale Energiespektren. Simulation: B0FOU1024N3.

das Spektrum jedoch einen flacheren Verlauf (siehe Abbildung 5.1). Diese Abweichung wird wahrscheinlich durch einen numerischen Effekt verursacht, der letztendlich durch die diskrete Darstellung des Raumes verursacht wird, den sogenannten Flaschenhals-Effekt<sup>1</sup>. In den eindimensionalen Energiespektren<sup>2</sup>

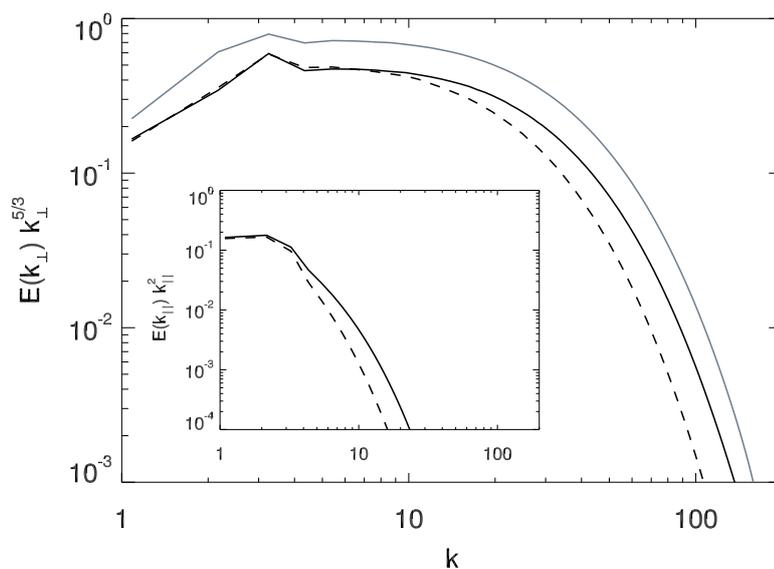
$$E^{1D,K}(k) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{k}' \delta(|k'_i| - k) |\mathbf{v}(\mathbf{k}')|^2, \quad i = x, y, z, \quad (5.7)$$

tritt der Flaschenhals-Effekt nicht so stark auf [44]. Hier trifft eine Skalierung des Energiespektrums mit  $k^{-5/3}$  deutlich besser zu.

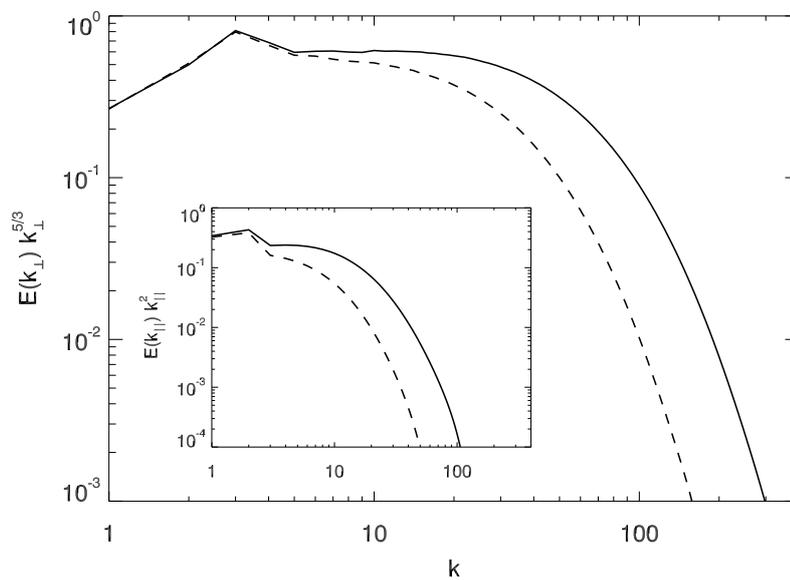
Im makroskopisch isotropen MHD-Fall skaliert sowohl das winkelintegrierte als auch das eindimensionale Energiespektrum etwa mit  $k^{-5/3}$  (siehe Abbildung 5.2). An den Spektren der magnetischen und kinetischen Energie kann man erkennen, dass die magnetische Energie auf großen Skalen deutlich überwiegt [95]. Das Spektrum der kinetischen Energie zeigt einen flacheren Verlauf als  $k^{-5/3}$ , es skaliert eher mit  $k^{-3/2}$ . Das Spektrum der magnetischen Energie fällt dagegen steiler als das Spektrum der Gesamtenergie ab. Die Annahme der Äquipartition, die in den phänomenologischen Turbulenz-Modellen gemacht wird, ist im makroskopisch isotropen MHD-Fall also nicht ganz gerechtfertigt.

<sup>1</sup>Englisch: *bottleneck effect*. Eine mögliche Ursache für den Flaschenhals-Effekt ist, dass die Wechselwirkung der turbulenten Eddies im Inertialbereich nicht vollkommen lokal ist. Wenn nicht genug kleine Eddies vorhanden sind, wird die Energie am kleinskaligen Ende des Inertialbereichs aufgestaut (siehe z. B. [79, 126]).

<sup>2</sup>Die eindimensionalen Spektren der magnetischen und der Gesamt-Energie sind entsprechend definiert.



**Abbildung 5.3** Kompensiertes senkrecht energiespektrum im dreidimensionalen MHD-Fall bei Verwendung des Ornstein-Uhlenbeck-Antriebs (durchgezogene Linie: Simulation B5REFOU512N3; gestrichelte Linie: B5FOU512N3; graue Linie: B0FOU512N3). Eingesetzter Graph: kompensiertes paralleles energiespektrum.



**Abbildung 5.4** Kompensiertes senkrecht energiespektrum und paralleles energiespektrum (eingesetzter Graph) im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld  $B_0$  bei Verwendung des Antriebs mit Modeneinfrieren; durchgezogene Linien: Simulation B5FRZ1024N3; gestrichelte Linien: Simulation B5FRZ512N3.

Im anisotropen MHD-Fall mit einem starken mittleren Magnetfeld erwartet man eine Skalierung des senkrechten Energiespektrums  $E(k_{\perp})$  mit  $k_{\perp}^{-3/2}$  nach der Boldyrev- bzw. der Gogoberidze-Phänomenologie oder mit  $k_{\perp}^{-5/3}$  nach der Goldreich-Shridhar-Phänomenologie. Bei der Verwendung des Ornstein-Uhlenbeck-Antriebs zeigt das senkrechte Energiespektrum eher eine Skalierung mit  $k_{\perp}^{-5/3}$  (siehe Abbildung 5.3). Für das parallele Energiespektrum kann keine Skalierung angegeben werden, da es zu stark abfällt. Bei großen Wellenzahlen dominieren die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen völlig.

Wird die Turbulenz durch Modeneinfrieren angetrieben, zeigt das senkrechte Energiespektrum ebenfalls keine Skalierung mit  $k_{\perp}^{-3/2}$ . In der Simulation B5FRZ1024N3 ist ein relativ klarer Skalierungsbereich beobachtbar, in dem das senkrechte Energiespektrum mit  $k_{\perp}^{-5/3}$  skaliert. Das parallele Energiespektrum zeigt einen kurzen Skalierungsbereich mit  $k_{\parallel}^{-2}$ . Auf kleinen Skalen sind im Vergleich zu den Simulationen mit stochastischem Antrieb mehr  $\mathbf{B}_0$ -parallele Fluktuationen vorhanden.

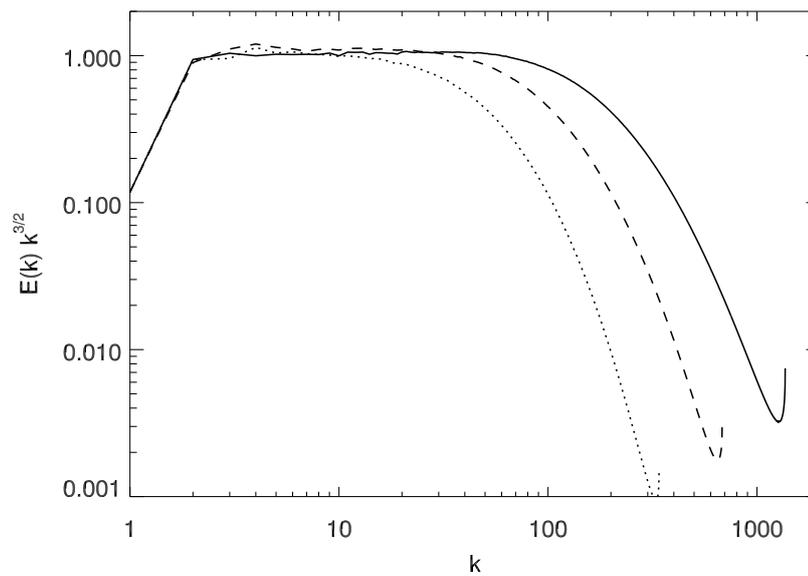
Im anisotropen MHD-Fall wird also im Wesentlichen ein Skalierungsverhalten beobachtet, dass der Goldreich-Sridhar-Phänomenologie entspricht. Diese Beobachtung lässt sich nur schlecht mit den Resultaten von *Mason et al.* [81] und *Müller und Grappin* [95] vereinbaren. Nachdem in dieser Arbeit die  $k_{\perp}^{-5/3}$ -Skalierung sowohl bei der Verwendung eines stochastischen als auch eines deterministischen Antriebs beobachtet wurde, ist die wahrscheinlichste Ursache für diese Abweichung die Auflösung der kleinen Skalen. In den oben genannten Arbeiten wurden die kleinsten dissipativen Eddies in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Richtung sehr viel schlechter aufgelöst als in den hier besprochenen Simulationen. Eine Reihe von Testsimulationen, bei denen die Kleinskalen-Auflösung schrittweise herabgesetzt wurde, ergab eine Abweichung des senkrechten Energiespektrums von der  $k_{\perp}^{-5/3}$ -Skalierung sobald die Auflösung  $k_{\max}\eta_{\text{IK},\perp} \approx 1.5$  unterschritten wurde. Bei einer Auflösung von  $k_{\max}\eta_{\text{IK},\perp} \approx 1.1$ , die ungefähr der in [95] verwendeten Kleinskalen-Auflösung entspricht, wurde schließlich eine Skalierung mit  $k_{\perp}^{-3/2}$  gefunden. In zerfallender MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds findet man weiterhin ebenfalls eine Skalierung mit  $k_{\perp}^{-5/3}$  [92].

Im zweidimensionalen Fall findet man im Energiespektrum die erwartete Skalierung mit  $k^{-3/2}$ . Wie man in Abbildung 5.5 sieht, vergrößert sich der Inertialbereich mit zunehmender Reynoldszahl. Bei der höchsten erreichten Reynoldszahl ergibt sich ein Inertialbereich von deutlich mehr als einer Dekade.

### 5.3 Räumliche Gestalt der Felder

Für die Dynamik der Testteilchen sind vor allem das Geschwindigkeits- und das Vortizitätsfeld von unmittelbarer Bedeutung. Das Geschwindigkeitsfeld (siehe Abbildung 5.6) unterscheidet sich im MHD-Fall sichtbar vom Navier-Stokes-Fall. Im Navier-Stokes-Fall sind viele wirbelförmige Strukturen beobachtbar, während man im MHD-Fall vor allem Schicht-Strukturen erkennen kann. Die großskaligen Magnetfeldfluktuationen führen zu einer lokalen Anisotropie des Geschwindigkeitsfeldes.

Durch ein starkes mittleres Magnetfeld wird das Geschwindigkeitsfeld deutlich anisotrop (siehe Abbildung 5.7). In der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld kann man weiterhin ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld mit vielen Schicht-Strukturen erkennen.

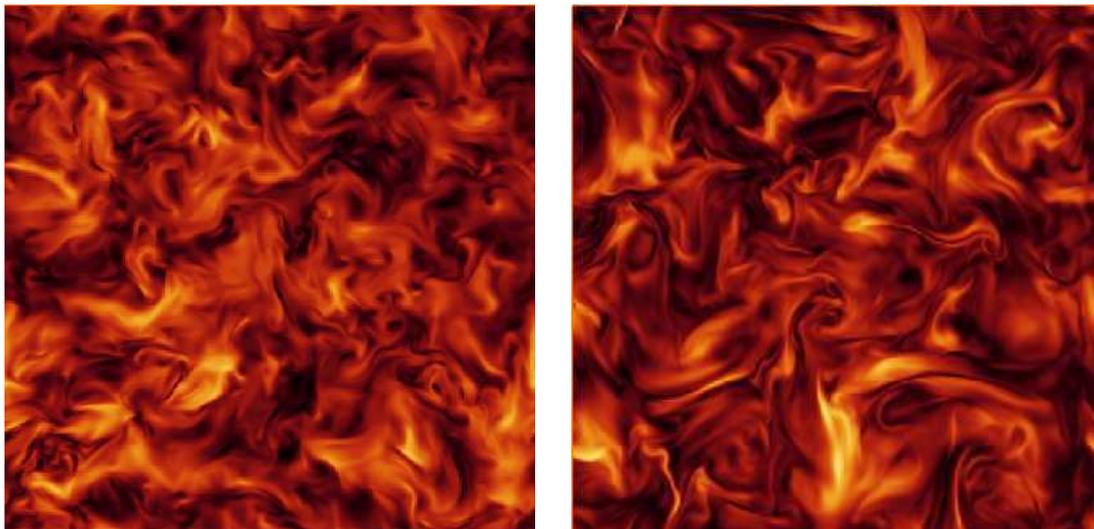


**Abbildung 5.5** Kompensiertes Energiespektrum im zweidimensionalen MHD-Fall bei verschiedenen Auflösungen bzw. Reynoldszahlen. Simulation 2DCEHXZ4096: durchgezogene Linie, Simulation 2DCEHXZ2048: gestrichelte Linie, Simulation 2DCEHXZ1024: gepunktete Linie.

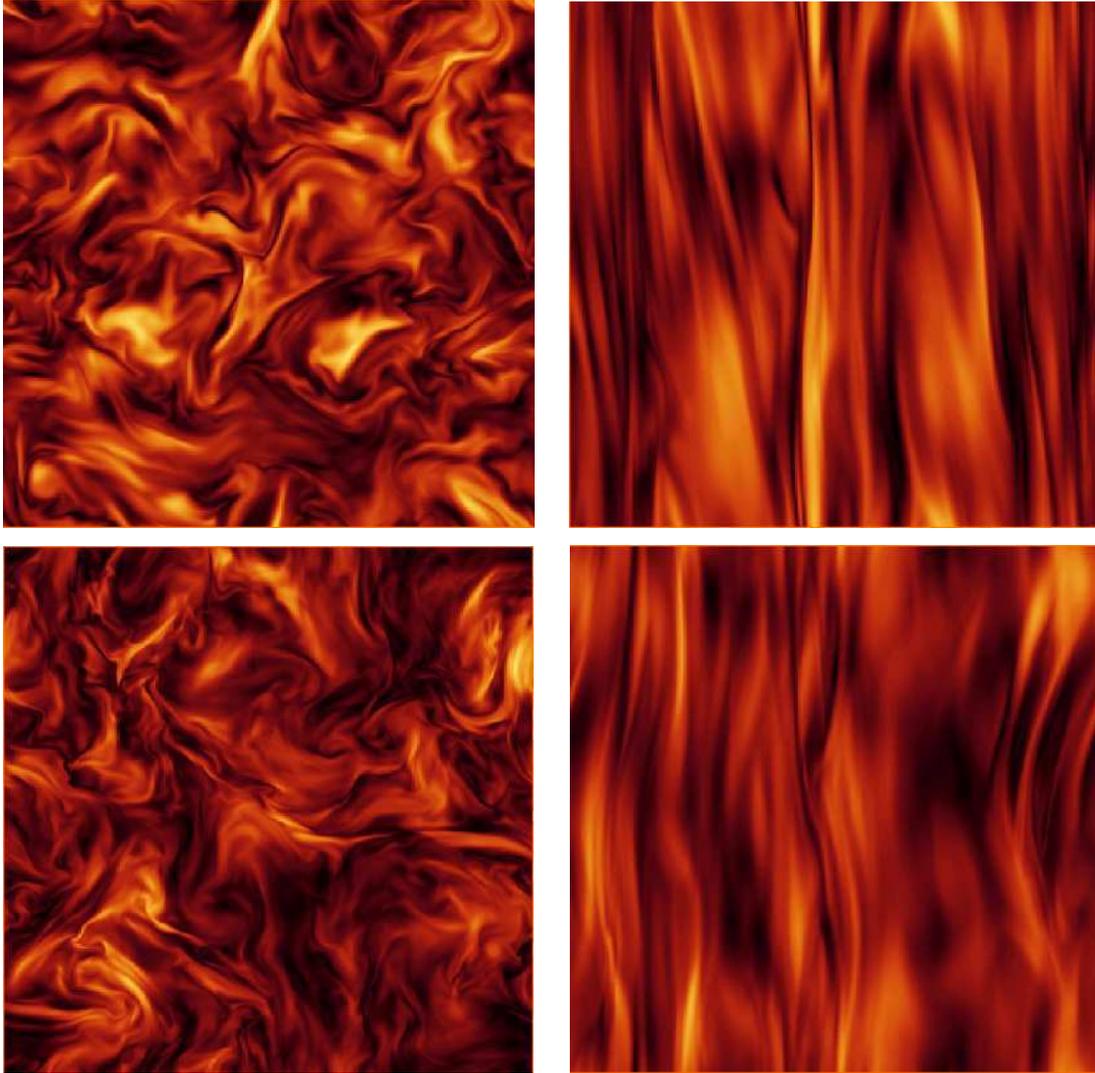
Dagegen ist das Geschwindigkeitsfeld in Richtung des mittleren Magnetfelds sehr stark geordnet; es dominieren in Richtung des mittleren Magnetfelds gestreckte Strukturen. Bei Verwendung des Antriebs mit Modeneinfrieren ist die Ausrichtung entlang des mittleren Magnetfeldes nicht ganz so stark ausgeprägt.

Die unterschiedlichen Strukturen des Geschwindigkeitsfeldes im Navier-Stokes- und MHD-Fall hängen auch mit den unterschiedlichen charakteristischen Strukturen hoher Intensität des Vortizitätsfeldes zusammen. Im Navier-Stokes-Fall konzentrieren sich hohe Werte der Wirbelstärke in Filamenten, im MHD-Fall dagegen in Form von Schichten (siehe Abbildung 5.8). Durch ein starkes mittleres Magnetfeld werden diese Schichten in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet und gestreckt (siehe Abbildung 5.9).

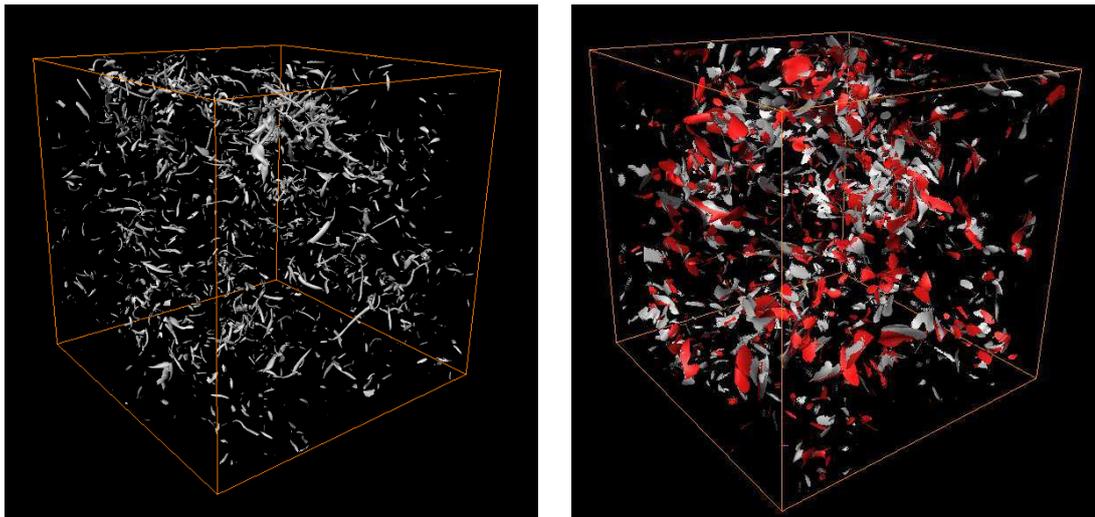
Im zweidimensionalen MHD-Fall werden sehr viel höhere Reynoldszahlen erreicht. Man sieht, dass im Geschwindigkeits und Vortizitätsfeld sehr viel feinere Strukturen auftreten (siehe Abbildung 5.10). Im Vergleich zum dreidimensionalen MHD-Fall treten mehr wirbelförmige Strukturen auf. Dies ist eine Konsequenz der Einschränkung des Systems auf zwei Dimensionen [20].



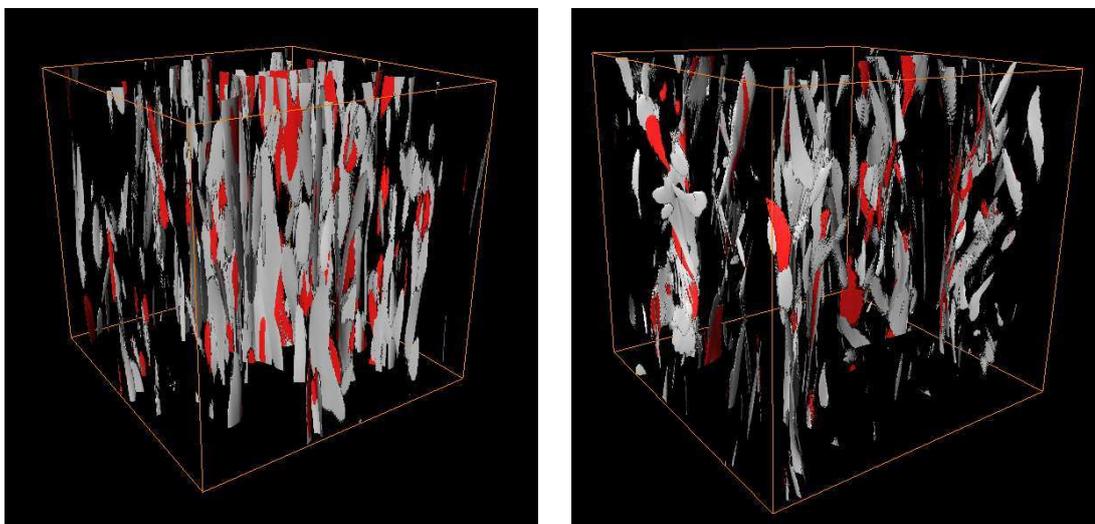
**Abbildung 5.6** Absolutbetrag des Geschwindigkeitsfeldes auf einem Schnitt durch das Simulationsvolumen im Navier-Stokes- (links) und makroskopisch isotropen MHD-Fall (rechts). Dunkle Farben entsprechen niedrigen Werten, helle Farben hohen Werten des Geschwindigkeitsbetrags. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 bzw. B0FOU512N3



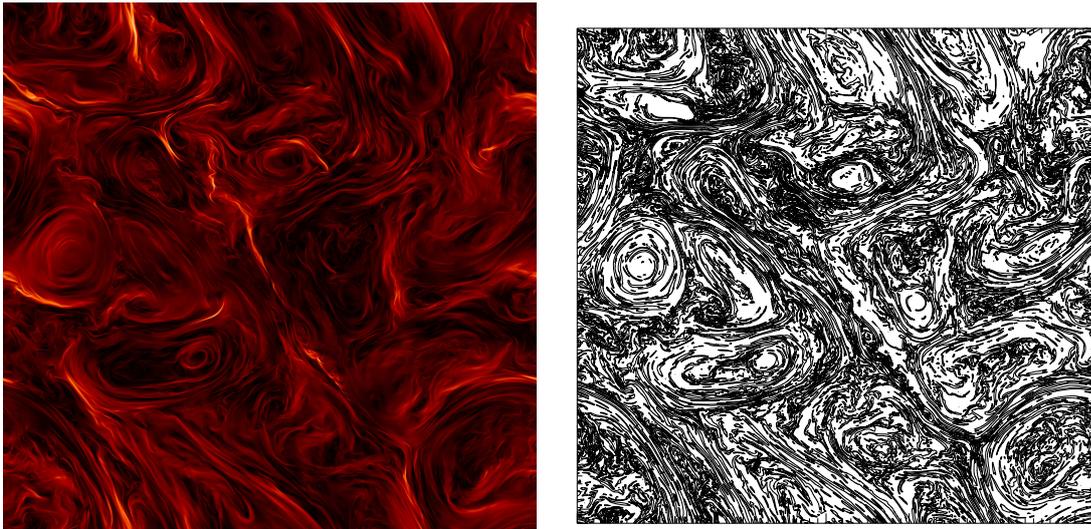
**Abbildung 5.7** Absolutbetrag des Geschwindigkeitsfeldes auf Schnitten durch das Simulationsvolumen im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld. Links: Schnitt senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$ , rechts: Schnitt parallel zu  $\mathbf{B}_0$ . Oben: Simulation mit Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb (B5REFOU512N3); unten: Simulation mit Modeneinfrieren (B5FRZ512N3); Farben wie in Abbildung 5.6.



**Abbildung 5.8** Flächen konstanter Wirbelstärke (grau) im Navier-Stokes (links) und MHD-Fall (rechts). Im MHD-Fall werden auch die Flächen konstanter Stromdichte (rot) gezeigt. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 bzw. B0FOU512N3.



**Abbildung 5.9** Flächen konstanter Wirbelstärke (grau) und Stromdichte (rot) im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds. Linkes Bild: stochastischer Antrieb (Simulation B5REFOU512N3); rechtes Bild: Antrieb mit Modeneinfrieren (Simulation B5FRZ512N3).



**Abbildung 5.10** Absolutbetrag des Geschwindigkeitsfeldes (links, Farben ähnlich wie in Abbildung 5.6) und Isolinien der Vortizität (rechts) im zweidimensionalen MHD-Fall. Daten aus der Simulation 2DFCEHXZ4096.



# 6 Einzelteilchenstatistik

Eine der charakteristischen Eigenschaften turbulenter Strömungen ist ihre Fähigkeit zum effizienten Verteilen und Vermischen passiver Skalare<sup>1</sup>. In voll entwickelter Turbulenz ist die durch die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen verursachte turbulente Dispersion sehr viel stärker als die durch die thermische Bewegung der Flüssigkeitsmoleküle verursachte molekulare Diffusion. Die Effekte der molekularen Diffusion werden im Folgenden nicht berücksichtigt, und nur die turbulente Dispersion der Flüssigkeitsteilchen betrachtet<sup>2</sup>.

G.I. Taylor [122] erkannte, dass sich der turbulente Dispersionsprozess sehr gut im Lagrangeschen Bezugssystem beschreiben lässt. Mit der Statistik von Einzelteilchen kann man die absolute Dispersion<sup>3</sup>, d. h. die Diffusion von einer festen Quelle aus, untersuchen. Das Problem der relativen Dispersion, d. h. die Diffusion von einer mit der Strömung bewegten Quelle aus, wird im folgenden Kapitel behandelt.

Über die Autokorrelation der Geschwindigkeit hängt das Lagrangesche Geschwindigkeitsfrequenzspektrum mit dem Problem der turbulenten Diffusion zusammen. Die Lagrangeschen Frequenzspektren können Aufschlüsse über die Zeitskalen in der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung geben. Für die Modellierung turbulenter Dispersionsprozesse ist die Lagrangesche Strukturfunktion zweiter Ordnung von hoher Bedeutung (siehe z. B. [101, 35]). Lagrangesche Strukturfunktionen höherer Ordnung zeigen die intermittente Natur der Teilchentrajektorien.

## 6.1 Absolute Dispersion

Die absolute Dispersion beschreibt, wie sich im statistischen Mittel ein passiver Skalar von einem festen Punkt in der turbulenten Strömung ausbreitet. Ein Beispiel hierfür ist die Ausbreitung von Rauchpartikeln aus einem Kamin. Im Lagrangeschen Bezugssystem wird dieser Diffusionsprozess untersucht, indem man die Entfernung eines Testteilchens von seinem Ausgangspunkt betrachtet.

Der mittlere quadratische Abstand eines Testteilchens von seinem Ausgangspunkt  $\langle \xi^2(t) \rangle$  mit  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$  hängt von der Autokorrelation der Teilchengeschwindigkeit  $\rho^L(t)$  ab (siehe z. B. [49, 83]). Entlang einer Raumrichtung ergibt sich in quasistationärer Turbulenz:

$$\langle \xi_i(t)^2 \rangle = 2 \langle V_i^2 \rangle \int_0^t (t - \tau) \rho_i^L(\tau) d\tau,$$

---

<sup>1</sup>Ein passiver Skalar ist eine Eigenschaft eines Fluids, die keine Rückwirkung auf die Dynamik einer Strömung hat, wie z. B. die Konzentration eines Farbstoffes.

<sup>2</sup>Die Wechselwirkung zwischen turbulenter und molekularer Diffusion ist nicht immer trivial (siehe z. B. [82]). Eine Untersuchung dieses Problems geht über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.

<sup>3</sup>In diesem Zusammenhang wird auch oft der Begriff *Einzelteilchendiffusion* verwandt. Die Begriffe Diffusion und Dispersion überschneiden sich.

wobei die Autokorrelation der Geschwindigkeitskomponente  $V_i$  über

$$\rho_i^L(\tau) = \langle V_i(t)V_i(t-\tau) \rangle / \langle V_i^2 \rangle$$

definiert ist. Eine allgemeine funktionale Form von  $\rho_i^L(t)$  ist für turbulente Strömungen nicht bekannt. Jedoch lassen sich die Grenzfälle für  $\rho_i^L(\tau)$  für sehr kurze und lange Zeitskalen angeben. Auf sehr kurzen Zeitskalen ist  $\rho_i^L(\tau)$  annähernd konstant und hat einen Wert von  $\lesssim 1$ . Auf sehr langen Zeitskalen ist die Geschwindigkeit eines Testteilchens vollständig von der Ausgangsgeschwindigkeit dekorreliert. Die Autokorrelation beträgt Null und das Integral über die Autokorrelationsfunktion entspricht der Lagrangeschen integralen Zeitskala  $T_i^L$ <sup>4</sup>

$$T_i^L = \int_0^\infty d\tau \rho_i^L(\tau).$$

Für den mittleren quadratischen Abstand vom Ausgangspunkt ergibt sich damit folgende Zeitabhängigkeit auf sehr kurzen und langen Zeitskalen

$$\langle \xi_i(t)^2 \rangle = \begin{cases} \langle V_i^2 \rangle t^2, & \text{für } t \ll T_i^L & (\text{ballistisches Verhalten}), \\ 2\langle V_i^2 \rangle T_i^L t, & \text{für } t \gg T_i^L & (\text{diffusives Verhalten}). \end{cases}$$

Die lineare Zeitabhängigkeit im Grenzfall langer Zeitskalen erinnert an die molekulare Diffusion, weshalb man

$$D_i^T = \langle V_i^2 \rangle T_i^L$$

als den turbulenten Diffusionskoeffizienten bezeichnet.

Die Zeitabhängigkeit von  $\rho_i^L(\tau)$  lässt sich oftmals näherungsweise durch eine Exponentialfunktion beschreiben

$$\rho_i^L(\tau) = \exp(-\tau/T_i^L) \quad \text{für } \tau \geq 0. \quad (6.1)$$

Jedoch wird der Kurvenverlauf um  $\tau = 0$ , wo man eine parabolische Abhängigkeit erwartet, durch (6.1) nicht korrekt beschrieben [63, Seite 52].

### 6.1.1 Makroskopisch isotrope Fälle

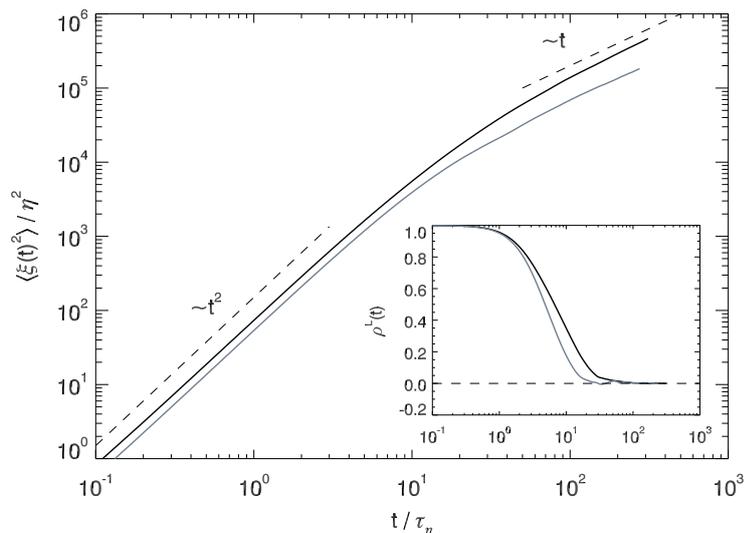
Im Navier-Stokes- und im makroskopisch isotropen MHD-Fall existiert im statistischen Mittel keine ausgezeichnete Richtung der turbulenten Strömung. Deswegen ist die absolute Dispersion richtungsunabhängig

$$\rho^L(\tau) = \rho_x^L(\tau) = \rho_y^L(\tau) = \rho_z^L(\tau), \quad (6.2)$$

$$T^L = T_x^L = T_y^L = T_z^L, \quad (6.3)$$

und es ergibt sich ein absoluter Diffusionskoeffizient von  $D^T = 3D_i^T$ . Wegen der zeitlichen Schwankungen der Anteile der kinetischen Energie entlang der drei Raumrichtungen ( $\frac{1}{2}v_x^2, \frac{1}{2}v_y^2, \frac{1}{2}v_z^2$ ) ist die statistische Isotropie jedoch nur im zeitlichen Mittel erfüllt.

<sup>4</sup>In Experimenten und Simulationen ist natürlich eine unendliche Messdauer nicht möglich, es ist jedoch ausreichend, solange zu messen, bis die Autokorrelationsfunktion auf einen sehr niedrigen Wert abgesunken ist, was in der Regel nach mehreren  $T_E$  der Fall ist.

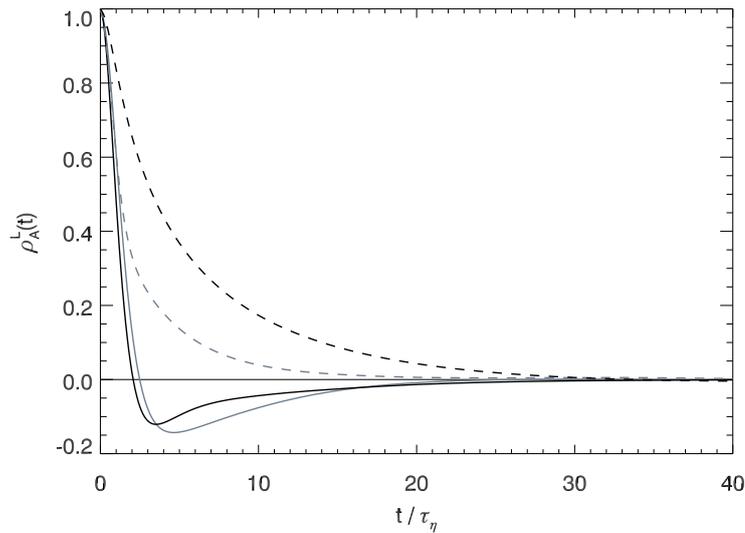


**Abbildung 6.1** Zeitlicher Verlauf des mittleren quadratischen Abstands vom Ausgangspunkt im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarze Linien) und MHD-Fall (graue Linien). Die dünnen, gestrichelten Linien deuten eine diffusive bzw. ballistische Zeitabhängigkeit an. Eingesetzter Graph: Autokorrelation der Teilchengeschwindigkeit. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

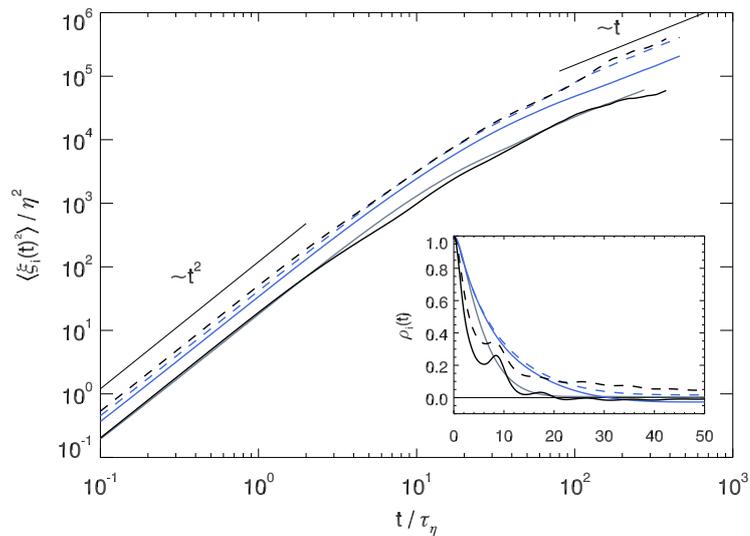
Vergleicht man die absolute Dispersion im makroskopisch isotropen MHD-Fall mit dem Navier-Stokes-Fall, so beobachtet man im Verlauf der Kurven keine qualitativen Unterschiede (siehe Abbildung 6.1). Sowohl der Grenzfall kurzer als auch der Grenzfall langer Zeiten stellt sich ein. Die absolute Dispersion verläuft im MHD-Fall etwas langsamer, und die Teilchengeschwindigkeit ist schneller von der Anfangsgeschwindigkeit dekorreliert. Dies kann man auch an der Lagrangeschen integralen Zeitskala ablesen (siehe Tabellen 5.1 und 5.2).

Für den kleinskaligen turbulenten Dynamo wurde die Ausbildung einer subdiffusiven Zeitabhängigkeit der absoluten Dispersion ( $\langle \xi^2(t) \rangle \sim t^\alpha$  mit  $\alpha < 1$ ) durch die Wirkung der Lorentz-Kraft vorhergesagt [69]. Ein solches subdiffusives Regime kann hier nicht beobachtet werden.

In einigen Modellen zur turbulenten Diffusion wird diese über eine Langevin-Gleichung modelliert [102, Seite 483ff]. Dies beinhaltet die Annahme, dass die Teilchenbeschleunigung  $\mathbf{A}$  in der Zeit  $\delta$ -korreliert ist. Jedoch haben Experimente [90] und numerische Simulationen [135] gezeigt, dass zwar die Komponenten der Beschleunigung sehr schnell dekorrelieren, der Absolutbetrag der Beschleunigung jedoch relativ lange korreliert bleibt. Dies wird auch hier beobachtet (siehe Abbildung 6.2). Im makroskopisch isotropen MHD-Fall beobachtet man im Vergleich zum Navier-Stokes-Fall eine deutlich schnellere Dekorrelation von  $|\mathbf{A}|$ . Die Komponenten  $A_i$  bleiben dagegen geringfügig länger korreliert (siehe auch Kapitel 8).



**Abbildung 6.2** Autokorrelation der Teilchenbeschleunigung im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarze Linien) und MHD-Fall (graue Linien), Komponente der Beschleunigung: durchgezogene Linien; Absolutwert der Beschleunigung: gestrichelte Linien. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 6.3** Mittlerer quadratischer Abstand vom Ausgangspunkt senkrecht (durchgezogene Linien) und parallel (gestrichelte Linien) zum mittleren Magnetfeld im dreidimensionalen MHD-Fall unter Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes bei stochastischen Antrieb (schwarz) bzw. Antrieb durch Modeneinfrieren (blau). Zum Vergleich ist auch der mittlere quadratische Abstand in einer Raumrichtung im makroskopisch isotropen MHD-Fall (graue Linien) dargestellt. Ein-gesetzter Graph: Autokorrelation der Komponenten der Teilchengeschwindigkeit. Daten aus den Simulationen B5REFOU512N3, B5FRZ512N3 und B0FOU512N3.

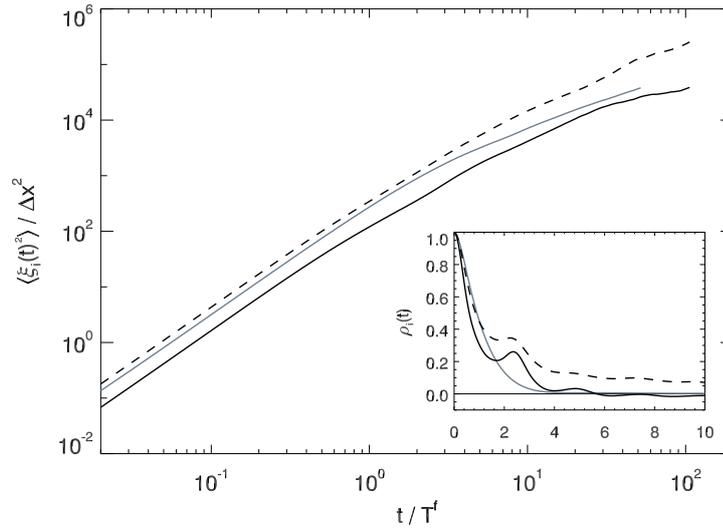


Abbildung 6.4 Darstellung wie in Figur 6.3. Achsen hier mit  $T^f$  und  $\Delta x$  skaliert.

### 6.1.2 Anisotroper MHD-Fall

Im anisotropen MHD-Fall ist die statistische Isotropie des Geschwindigkeitsfeldes nicht mehr gegeben. Die Richtung parallel zum mittleren Magnetfeld (hier:  $z$ -Richtung) unterscheidet sich von den Richtungen senkrecht ( $x, y$ -Richtungen) dazu. Dementsprechend liegt es nahe, ein anisotropes Diffusionsverhalten zu erwarten, jedoch weiterhin von statistischer Isotropie in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld auszugehen  $\rho_{\perp}^L = \rho_x^L = \rho_y^L \neq \rho_z^L = \rho_{\parallel}^L$ . Die Korrelationszeiten und Diffusionskoeffizienten werden folglich ebenfalls richtungsabhängig

$$T_{\perp}^L = T_x^L = T_y^L \neq T_z^L = T_{\parallel}^L, \quad D_{\perp}^T = D_x^T = D_y^T \neq D_z^T = D_{\parallel}^T.$$

Im anisotropen MHD-Fall ohne großskalige Alfvén-Wellen, der durch die Verwendung des Modeneinfrierens erzeugt wurde, kann man eine schwache Anisotropie in der Autokorrelation der Geschwindigkeit beobachten (siehe Abbildung 6.3).  $T_{\parallel}^L$  ist um etwa ein Drittel größer als  $T_{\perp}^L$  (siehe Tabelle 5.2). In  $\mathbf{B}_0$ -paralleler Richtung hält somit die Korrelation zur Anfangsgeschwindigkeit länger an als in der Ebene senkrecht dazu. Dies lässt sich mit der Tatsache begründen, dass kleinskalige Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes bevorzugt in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld auftreten (siehe Kapitel 2.3). Auf langen Zeitskalen ist daher die absolute Dispersion parallel zum Magnetfeld deutlich größer.

Durch einen stochastischen Antrieb können großskalige Alfvén-Wellen angeregt werden (siehe Kapitel 4), die sich parallel zum mittleren Magnetfeld ausbreiten. Am stärksten sind die Moden  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  angeregt ( $|\mathbf{k}| = 1, 2, 3$ ), denen Alfvén-Wellen mit den Frequenzen  $\omega_A(\mathbf{k}) = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}$  zugeordnet sind. Durch diese großskaligen Alfvénwellen erfahren die Teilchen eine zusätzliche Wellenbewegung, die der Bewegung durch das turbulente Geschwindigkeitsfeld überlagert ist. Die Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeit

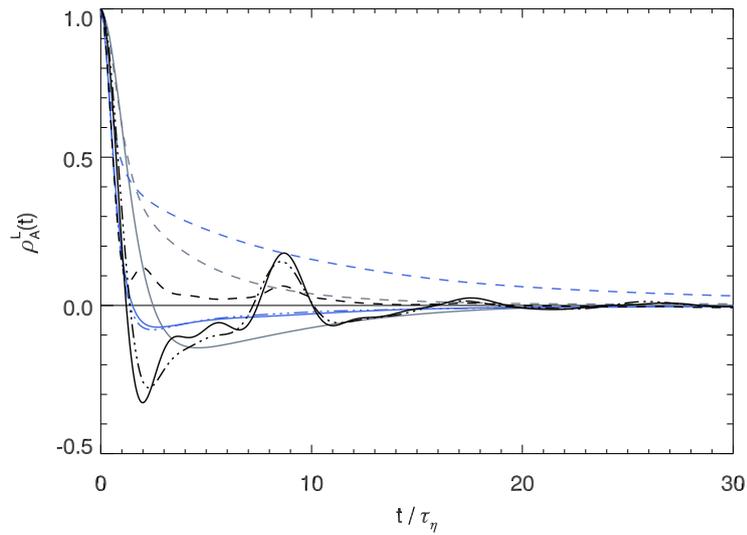
setzt sich daher aus einer ungefähr Kosinus-förmigen Korrelation, die durch die Alfvén-Wellen verursacht wird, und einem ungefähr exponentiellen Abfall durch die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen zusammen<sup>5</sup> (siehe Abbildung 6.3). In diesem Fall sind die Unterschiede zwischen  $\mathbf{B}_0$ -paralleler und  $\mathbf{B}_0$ -senkrechter Richtung deutlich stärker ausgeprägt. Die Autokorrelation der Geschwindigkeit fällt in  $\mathbf{B}_0$ -senkrechter Richtung deutlich schneller ab. Die dominanten großskaligen Alfvénwellen führen zu einer starken Fluktuation der  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Geschwindigkeit. Für diese Geschwindigkeitskomponenten nimmt die Autokorrelation deshalb besonders schnell ab. Auf die  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit wirken sich die Alfvénischen Fluktuationen dagegen eher indirekt durch die oszillierende Bewegung der Teilchen in der  $xy$ -Ebene aus. Deswegen ist hier der Effekt der Alfvén-Wellen nicht ganz so stark.

Der mittlere quadratische Abstand wächst in senkrechter Richtung langsamer an als in paralleler Richtung, was auf den höheren Wert von  $\langle v_z^2 \rangle^{1/2}$  im Vergleich zu  $\langle v_{x,y}^2 \rangle^{1/2}$  und die schnellere Dekorrelation der Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ -/ $y$ -Richtung zurückzuführen ist. Ob die absolute Dispersion im anisotropen MHD-Fall schneller oder langsamer als im makroskopisch isotropen MHD-Fall ist, ist eine Frage der gewählten Einheiten (siehe Abbildung 6.4). Skaliert man den mittleren quadratischen Abstand und die Zeitachse nicht mehr mit den Kolmogorov-Skalen sondern mit dem Gitterabstand und der Korrelationszeit des stochastischen Antriebs, so verläuft die absolute Dispersion senkrecht zum mittleren Magnetfeld sichtbar langsamer als im makroskopisch isotropen MHD-Fall.

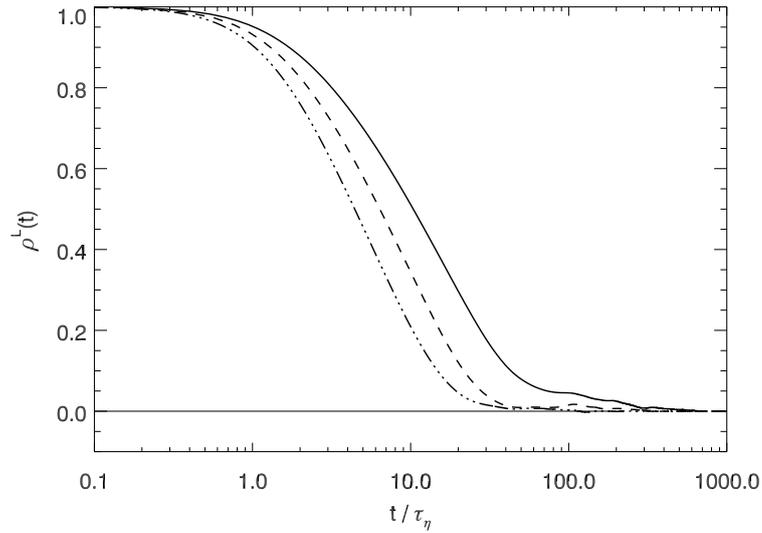
Eine noch kompliziertere Zeitabhängigkeit als die Autokorrelation der Geschwindigkeit zeigt die Autokorrelation der Teilchenbeschleunigung (siehe Abbildung 6.5). Hier kann besser man beobachten, dass bei der Verwendung des stochastischen Antriebs Alfvén-Wellen verschiedener Frequenzen angeregt sind. Im Vergleich zum isotropen Fall läuft die Dekorrelation auf kurzen Zeitskalen schneller ab, durch die Alfvén-Wellen ist jedoch auch noch eine wiederkehrende Korrelation auf etwas längeren Zeitskalen  $t \approx 10\tau_\eta$  sichtbar. Eine genauere Analyse des Alfvén-Wellen-Einflusses ist mit Hilfe des Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrums möglich (siehe Abschnitt 6.2). Bei Verwendung des Antriebs mit Modeneinfrieren fällt die deutlich längere Korrelation des Beschleunigungsbetrags auf.

Die Anisotropie der Korrelationsfunktionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung ist bei der Verwendung des stochastischen Antriebs deutlich stärker ausgeprägt als bei Antrieb der Turbulenz durch Modeneinfrieren. Dies ist nicht allein eine Folge des Vorhandenseins bzw. der Abwesenheit von Alfvén-Wellen auf großen Längenskalen, sondern auch in der Natur des Modeneinfrierens begründet. Die großskaligen Fluktuationen bestimmen die Autokorrelation der Geschwindigkeit wesentlich mit. Da sich die Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes im Antriebsbereich im Falle des Modeneinfrierens nicht fortentwickeln können und damit eine unendliche Korrelationszeit aufweisen, verhält sich ein durch Modeneinfrieren angetriebenes System auf großen Längenskalen in Bezug auf seine Korrelationszeiten isotrop. Der Unterschied zwischen  $T_\perp^L$  und  $T_\parallel^L$  wird in diesem Fall allein durch die nicht angetriebenen kleinskaligen Fluktuationen hervorgerufen, und ist dadurch schwächer ausgeprägt als in einem System, in dem sich auch die angetriebenen Moden zeitlich fortentwickeln können.

<sup>5</sup> Eine oszillierende Korrelationsfunktion kann zu einer verlangsamten Diffusion führen, da negative Beiträge schnelle Dekorrelation verursachen [82].



**Abbildung 6.5** Autokorrelation der Komponenten der Teilchenbeschleunigung senkrecht (durchgezogene Linien) und parallel (Punkt-Strich Linien) zum mittleren Magnetfeld sowie der Absolutbetrag der Teilchenbeschleunigung (gestrichelte Linien) im dreidimensionalen MHD-Fall unter Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes bei stochastischen Antrieb (schwarz) bzw. Antrieb durch Modeneinfrieren (blau). Zum Vergleich ist auch die Autokorrelation im makroskopisch isotropen MHD-Fall (graue Linien) dargestellt. Daten aus den Simulationen B5REFOU512N3, B5FRZ512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 6.6** Zeitlicher Verlauf der Autokorrelation der Teilchengeschwindigkeit in zweidimensionaler MHD-Turbulenz bei verschiedenen Reynoldszahlen; durchgezogene Linie: Simulation 2DFCEHXZ4096, gestrichelte Linie: Simulation 2DFCEHXZ2048, Punkt-Strich Linie Simulation 2DFCEHXZ1024.

### 6.1.3 Zweidimensionaler MHD-Fall

Im zweidimensionalen MHD-Fall unterscheidet sich der Verlauf der absoluten Dispersion nicht wesentlich vom makroskopisch isotropen MHD-Fall. Die erwartete ballistische bzw. diffusive Zeitabhängigkeit auf kurzen und langen Zeitskalen stellt sich ein. Mit zunehmender Reynoldszahl beobachtet man, dass die Korrelationszeit (gemessen in Vielfachen der Kolmogorov-Zeitskala) zunimmt (siehe Abbildung 6.6 und Tabelle 5.3). Dies wird auch in dreidimensionaler, hydrodynamischer Turbulenz beobachtet [136].

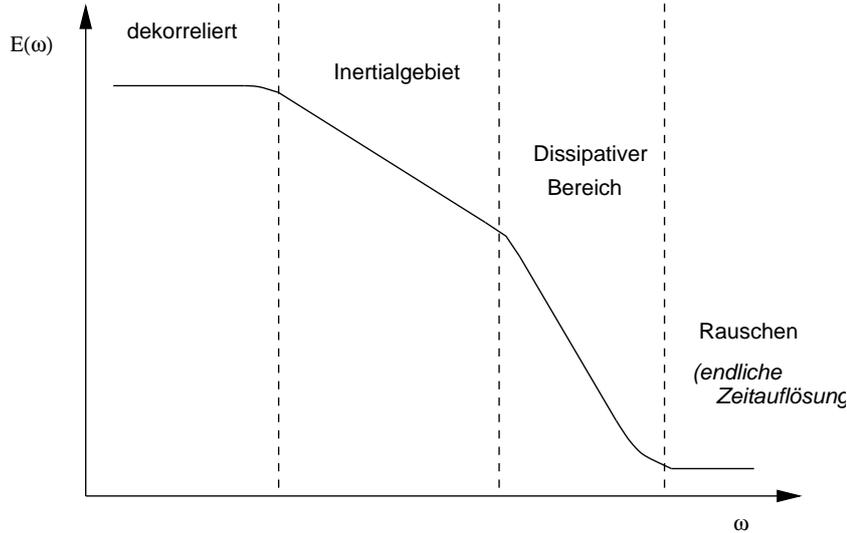
## 6.2 Lagrangesche Frequenzspektren

Das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum<sup>6</sup> entspricht bis auf den konstanten Faktor  $\langle V_i^2 \rangle$  der Kosinus-Transformation von  $\rho_i^L$  (siehe z. B. [139])

$$E_i^L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \langle V_i^2 \rangle \cos(\omega\tau) \rho_i^L(\tau) d\tau. \quad (6.4)$$

Im makroskopisch isotropen Fall entfällt die Unterscheidung zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und man betrachtet das gesamte Geschwindigkeitsspektrum  $E^L(\omega) = \sum_{i=1,3} E_i^L(\omega)$ . Das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum lässt sich ähnlich wie das Eulersche Energiespektrum bei ausreichend hoher Reynoldszahl in mehrere Bereiche einteilen (siehe Abbildung 6.7, [90]). Auf sehr langen Zeitskalen, also bei sehr niedrigen Frequenzen ( $\omega < \omega_E$ , mit  $\omega_E = \pi/T_E$ ), ist die Teilchengeschwindigkeit vollständig von der Anfangsgeschwindigkeit dekorreliert. Man erwartet daher ein flaches Spektrum  $E_i^L(\omega) = \text{const.}$

<sup>6</sup>Es handelt sich um das Leistungsdichtespektrum (*power spectrum*) der Geschwindigkeit.



**Abbildung 6.7** Schematische Darstellung des Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrums.

[90, 123]. Auf etwas kürzeren Zeitskalen wird die Bewegung der Lagrangeschen Testteilchen wesentlich von den Eddies des Inertialbereiches beeinflusst. Bei ausreichend hoher Reynoldszahl sollte sich gemäß der phänomenologischen Turbulenzbeschreibung ein Frequenz-Inertialbereich ( $\omega_L < \omega < \omega_\eta$ , mit der Kolmogorov-Frequenz  $\omega_\eta = \pi/\tau_\eta$ ) einstellen, in dem das Spektrum einem Skalierungsgesetz folgt. Bei noch höheren Frequenzen ( $\omega > \omega_\eta$ ) dominieren die kleinsten turbulenten Strukturen, das Spektrum zeigt einen steileren Abfall als im Inertialbereich[90], man kann diesen Bereich analog zum Eulerschen Energiespektrum als Dissipationsbereich bezeichnen. Schließlich werden die Frequenzen so hoch, dass sie in Experimenten oder numerischen Simulationen nicht mehr aufgelöst werden. Das Spektrum nimmt hier wieder einen flacheren Verlauf an.

Nach der Kolmogorov-Phänomenologie erwartet man im Navier-Stokes-Fall, dass das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum im Inertialbereich wie

$$E^L(\omega) = B_{K41} \epsilon^K \omega^{-2} \quad (6.5)$$

skaliert [41]. Dies folgt aus dem erwarteten Skalierungsgesetz für die Lagrangesche Strukturfunktion zweiter Ordnung (siehe Abschnitt 6.3), oder auch aus einer dimensionsanalytischen Abschätzung [123]. Die  $\omega^{-2}$ -Skalierung des Energiespektrums ist im Navier-Stokes-Fall experimentell [90, 78] und numerisch [141] bestätigt worden. Um einen Skalierungsbereich zu erhalten, sind jedoch deutlich höhere Reynoldszahlen erforderlich als für das Eulersche Energiespektrum (siehe Kapitel 3.1.3).

Im MHD-Fall werden je nach angenommener Phänomenologie unterschiedliche Skalierungen des Geschwindigkeitsspektrums im Inertialbereich vorhergesagt [55]. Zwischen dem Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrum und dem (senkrechten) Energiespektrum kann man folgenden Zusammenhang annehmen

$$E^L(\omega) \omega \sim E(k_\perp) k_\perp, \quad \text{mit } \omega \sim 1/\tau_{ac},$$

$$E^L(\omega) \omega \sim v_{\ell_\perp}^2 \sim \epsilon \tau_{cas}$$

$$\Rightarrow E^L(\omega) \sim \tau_{ac} \tau_{cas}. \quad (6.6)$$

In Phänomenologien, in denen sich die Wechselwirkungszeit nicht von der Kaskadenzeit unterscheidet (also GS und DA, siehe Kapitel 2.3), ergibt sich für das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum mit Gleichung (6.6) der gleiche Zusammenhang wie im Navier-Stokes-Fall

$$E^L(\omega) = B_{GS} \epsilon \omega^{-2}. \quad (6.7)$$

Unterscheiden sich die beiden Zeitskalen jedoch wie in der Iroshnikov-Kraichnan- oder der Gogoberidze-Phänomenologie, so erhält man unter Verwendung der Zusammenhänge in Tabelle 2.3

$$E^L(\omega) = B_{IK} \epsilon^{1/2} b_{rms} \omega^{-3/2}. \quad (6.8)$$

Die Skalierung des Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrums bietet also einen Einblick in die Zeitskalen, die in der turbulenten Energiekaskade eine Rolle spielen, den man im Eulerschen Bezugssystem so nicht gewinnen kann<sup>7</sup>.

Die oben genannten MHD-Phänomenologien beschreiben jedoch genau genommen die Kaskade der Gesamtenergie und nicht die Kaskade der kinetischen Energie, da kinetische und magnetische Energie alleine keine idealen Invarianten sind. Wenn man nun nicht von einer perfekten Äquipartition der Geschwindigkeits- und Magnetfeldfluktuationen sowohl im Frequenz- als auch im Wellenlängenbereich ausgeht, darf der Zusammenhang (6.6) nicht angenommen werden. Deswegen wird an dieser Stelle das Lagrangesche Frequenzspektrum der Magnetfeldfluktuationen eingeführt

$$E_i^{L,M}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \langle (b_i(\mathbf{X}_0, t + \tau) b_i(\mathbf{X}_0, t))_{\mathbf{X}_0, t} \cos(\omega\tau) d\tau,$$

und in Analogie zum Eulerschen Gesamtenergiespektrum das Lagrangesche Gesamtenergie(frequenz)spektrum über

$$E_i^{L,ges}(\omega) = E_i^L(\omega) + E_i^{L,M}(\omega)$$

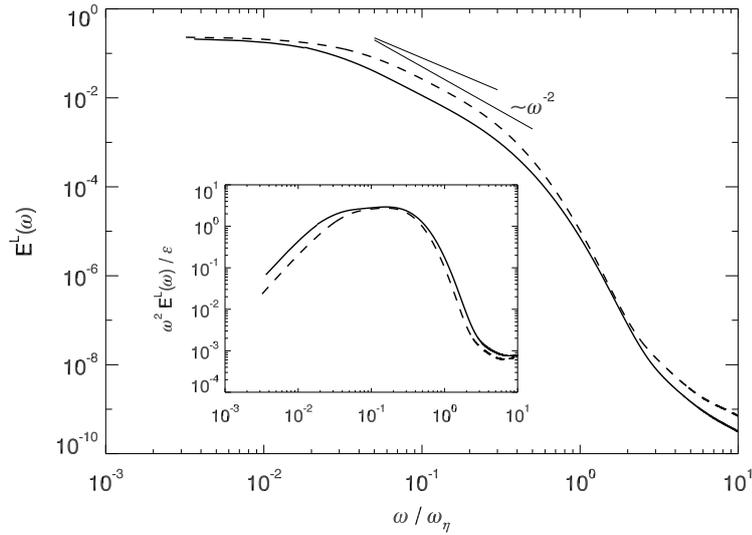
definiert.

Zur Auflösung der Lagrangeschen Frequenzspektren bei niedrigen Frequenzen sind lange Simulationsdauern nötig. Um das Rauschen möglichst gering zu halten, wird die Autokorrelation der Geschwindigkeit und der Magnetfeldfluktuationen auf die in [139] beschriebene Weise berechnet, die die Fluktuationen der Autokorrelationsfunktionen um Null auf langen Zeitskalen dämpft [107]. Zwischen dem Geschwindigkeits- und dem Beschleunigungsspektrum  $\Phi_i^L(\omega)$ , das analog zu Gleichung (6.4) definiert ist, besteht allgemein folgender Zusammenhang (siehe z. B. [102, Seite 691])

$$\Phi_i^L(\omega) = \omega^2 E_i^L(\omega). \quad (6.9)$$

Bei der praktischen Berechnung des Geschwindigkeitsspektrums wurde gefunden, dass  $\Phi_i^L(\omega)/\omega^2$  den Verlauf des Geschwindigkeitsspektrums bei hohen Frequenzen genauer

<sup>7</sup>Das Eulersche Energie-Frequenzspektrum sollte die gleiche Skalierung wie das räumliche Energiespektrum zeigen, da hier die Frequenz  $\omega$  durch die großen Wirbel bestimmt wird  $\omega \sim kv_{rms}$  [123], die die kleinskaligen turbulenten Fluktuationen am Messpunkt vorbeitragen. Das Eulersche Frequenzspektrum reagiert also nicht auf die verschiedenen möglichen Beziehungen zwischen Wechselwirkungs-  $\tau_{ac}$  und Kaskadenzeit  $\tau_{cas}$ .



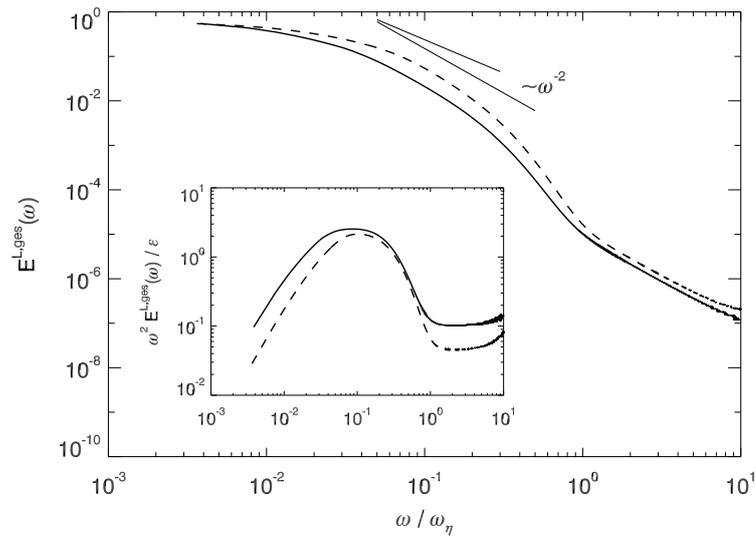
**Abbildung 6.8** Lagrangesches Geschwindigkeits-Frequenzspektrum im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes-Fall bei zwei verschiedenen Reynoldszahlen. Durchgezogene Linie: Simulation NVFOU1024N3; gestrichelte Linien: Simulation NVFOU512N3. Die untere eingezeichnete Hilfslinie zeigt die im Navier-Stokes-Fall erwartete  $\omega^{-2}$ -Skalierung, die obere Hilfslinie deutet eine Skalierung mit  $\omega^{-3/2}$  an. Der eingesetzte Graph zeigt die gemäß Gleichung (6.5) kompensierten Spektren.

wiedergibt [139, 84]. Deswegen wird in dieser Arbeit der hoch-frequente Bereich des Geschwindigkeitsspektrums über Gleichung (6.9) bestimmt, falls das Beschleunigungsspektrum vorhanden ist. Im Inertialbereich stimmen  $E_i^L(\omega)$  und  $\Phi_i^L(\omega)/\omega^2$  sehr gut überein. Für das Spektrum der Magnetfeldfluktuationen ergibt sich deshalb im Vergleich zum Geschwindigkeitsspektrum ein stärkeres Rauschen bei hohen Frequenzen.

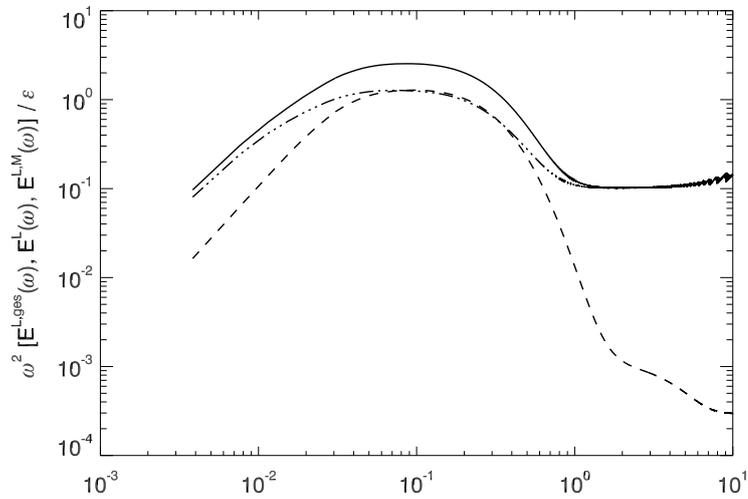
### 6.2.1 Dreidimensionaler Fall

Im hydrodynamischen Fall kann man bei der höchsten erreichten Reynoldszahl im Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrum zwischen  $0.03\omega_\eta \leq \omega \leq 0.3\omega_\eta$  einen Skalierungsbereich beobachten, in dem das Spektrum die erwartete Skalierung mit  $\omega^{-2}$  zeigt (siehe Abbildung 6.8). Mit zunehmender Reynoldszahl nimmt der Skalierungsbereich zu niedrigeren Frequenzen hin zu [141].

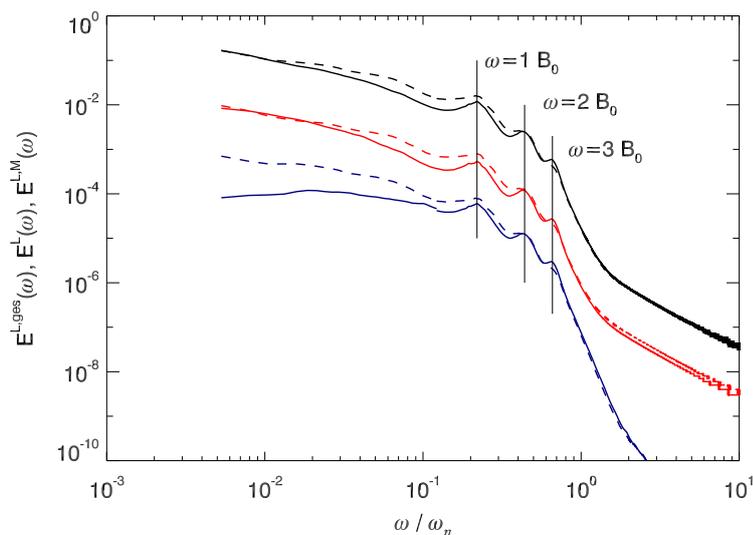
Im makroskopisch isotropen MHD-Fall zeigt das Spektrum der Gesamtenergie im Bereich  $0.04\omega_\eta \leq \omega \leq 0.2\omega_\eta$  bei der höchsten erreichten Reynoldszahl ebenfalls eine Skalierung mit  $\omega^{-2}$  (siehe Abbildung 6.9). Dies deutet im Sinne der Beziehung (6.6) darauf hin, dass die Energiekaskade auf einem starken Interaktionsmechanismus ( $\tau_{ac} \sim \tau_{cas}$ ) beruht. Im beobachteten Inertialgebiet fallen das Geschwindigkeitsspektrum und das Spektrum der magnetischen Fluktuationen gut zusammen (siehe Abbildung 6.10). Bei niedrigen Frequenzen überwiegt das Spektrum der magnetischen Fluktuationen, wie es auch im Eulerschen Energiespektrum bei kleinen Wellenzahlen der Fall ist (siehe Abbildung 5.2).



**Abbildung 6.9** Lagrangesches Frequenzspektrum der Gesamtenergie im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall bei zwei verschiedenen Reynoldszahlen. Durchgezogene Linie: Simulation B0FOU1024N3; gestrichelte Linien: Simulation B0FOU512N3. Die untere eingezeichnete Hilfslinie zeigt die im Falle der Goldreich-Sridhar-Phänomenologie erwartete  $\omega^{-2}$ -Skalierung, die obere Hilfslinie deutet eine Skalierung mit  $\omega^{-3/2}$  an. Der eingesetzte Graph zeigt die gemäß Gleichung (6.7) kompensierten Spektren.



**Abbildung 6.10** Lagrangesches Frequenzspektrum der Gesamtenergie (durchgezogene Linie), der Geschwindigkeit (gestrichelte Linie) und der Magnetfeldfluktuationen (Strich-Punkt-Linie) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall (Simulation B0FOU1024N3), kompensiert gemäß Gleichung (6.5).



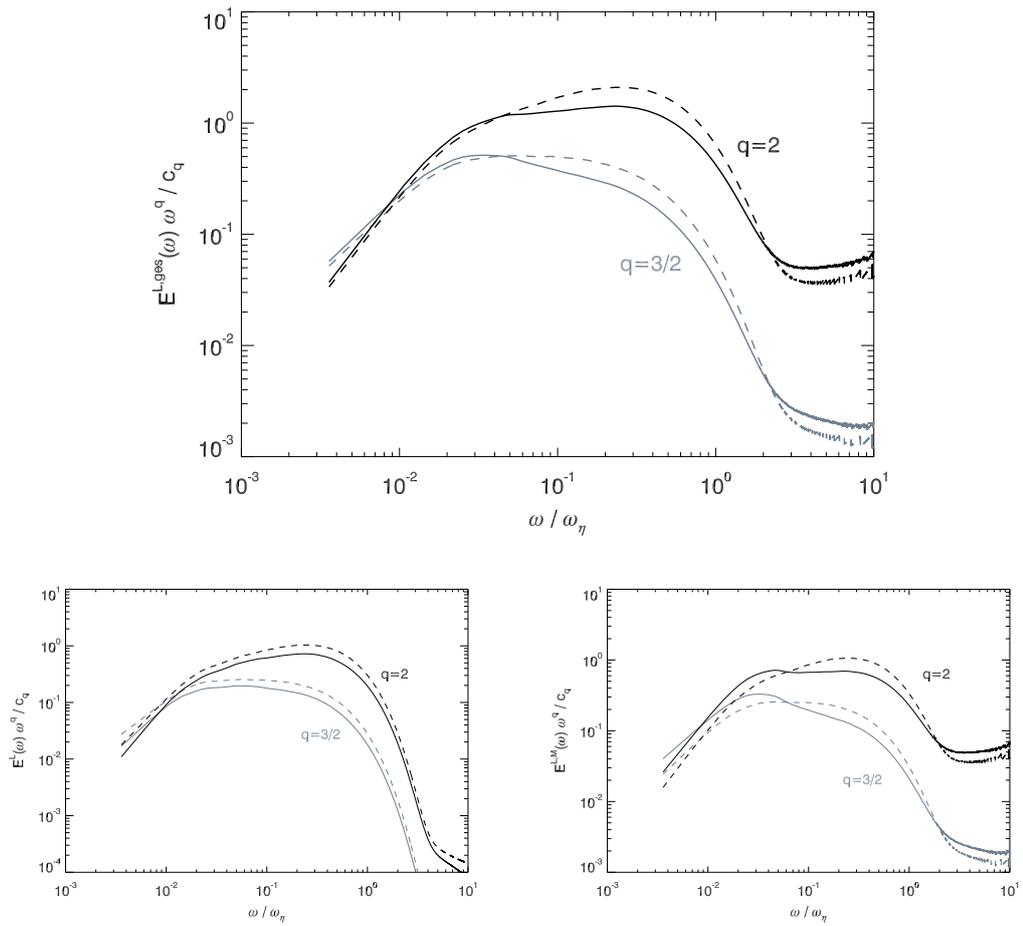
**Abbildung 6.11** Lagrangesches Frequenzspektrum der Gesamtenergie (schwarze Linien), der Geschwindigkeit (blaue Linien) und der Magnetfeldfluktuationen (rote Linien) im dreidimensionalen MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes bei Verwendung des stochastischen Antriebs (Simulation B5REFOU512N3). Komponente senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$ : durchgezogene Linien; Komponente parallel zu  $\mathbf{B}_0$ : gestrichelte Linien. Die Frequenzspektren der Geschwindigkeit und der Magnetfeldfluktuationen wurden mit dem konstanten Faktor 0.01 bzw. 0.1 skaliert, um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten. Die dünnen schwarzen Linien deuten die Frequenzen der angeregten großskaligen Alfvén-Wellen ( $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$  mit  $k_z = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ) an.

### Anisotroper MHD-Fall

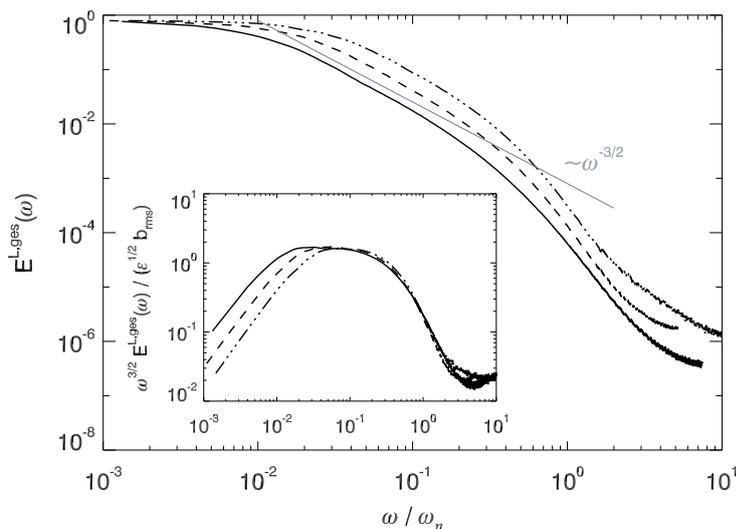
Im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes sieht man bei Verwendung des stochastischen Antriebs in den Spektren (siehe Abbildung 6.11) einige Spitzen, die den Frequenzen der am stärksten angeregten großskaligen Alfvénwellen entsprechen. Durch diese lokalen Maxima wird jedoch ein möglicherweise vorhandener Inertialbereich überdeckt.

Bei Verwendung des Antriebs mit Modeneinfrieren können auf großen Längenskalen keine Alfvén-Wellen angeregt werden. Möglicherweise angeregte höherfrequente Alfvén-Wellen fallen in den Dissipationsbereich des Frequenzspektrums und beeinträchtigen daher den Inertialbereich nicht. Bei der höchsten erreichten Reynoldszahl erstreckt sich der Inertialbereich ungefähr von  $0.04\omega_\eta \leq \omega \leq 0.4\omega_\eta$  (siehe Abbildung 6.12).

Die durch das starke mittlere Magnetfeld hervorgerufene Anisotropie der turbulenten Felder spiegelt sich auch in den Lagrangeschen Frequenzspektren wieder. Die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Komponenten des Lagrangeschen Gesamtenergiespektrums zeigen eine Skalierung mit ungefähr  $\omega^{-1.85 \pm 0.05}$ . Nachdem dieses Skalierungsverhalten eher einer  $\omega^{-2}$  Skalierung als einer  $\omega^{-3/2}$ -Skalierung nahekommt, kann man die beobachtete Skalierung als Anzeichen dafür interpretieren, dass ein starker Interaktionsmechanismus die Energiekaskade senkrecht zum mittleren Magnetfeld dominiert. Die  $\mathbf{B}_0$ -parallele Komponente des Lagrangeschen Gesamtenergiespektrums folgt dagegen im Inertialbereich einer  $\omega^{-3/2}$ -



**Abbildung 6.12** Oben: Lagrangesches Frequenzspektrum der Gesamtenergie kompensiert gemäß zwei verschiedenen Skalierungsgesetzen (Gleichung (6.8) bzw. (6.7)) im dreidimensionalen MHD-Fall unter Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes; Fluktuationskomponenten parallel (gestrichelte Linien) und senkrecht (durchgezogene Linien) zum mittleren Magnetfeld. Unten links: Entsprechende Darstellung für das Frequenzspektrum der Geschwindigkeit. Unten rechts: Entsprechende Darstellung für das Frequenzspektrum der Magnetfeldfluktuationen. Daten aus der Simulation B5FRZ1024N3.



**Abbildung 6.13** Lagrangesches Frequenzspektrum der Gesamtenergie im zweidimensionalen MHD-Fall bei verschiedenen Reynoldszahlen: durchgezogene Linie: Simulation 2DFCEHXZ4096, gestrichelte Linie: Simulation 2DFCEHXZ2048, Strich-Punkt-Linie: Simulation 2DFCEHXZ1024. Die eingezeichnete Hilfslinie (grau) zeigt die im Iroshnikov-Kraichnan-Fall erwartete  $\omega^{-3/2}$ -Skalierung. Der eingesetzte Graph zeigt die gemäß Gleichung (6.8) kompensierten Spektren.

Skalierung. Dies kann als Anzeichen dafür betrachtet werden, dass in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung die Energiekaskade auf einem schwachem Interaktionsmechanismus aufbaut.

Jedoch zeigen die senkrechten Komponenten des Geschwindigkeitsspektrums und des Spektrums der Magnetfeldfluktuationen nicht das gleiche Skalierungsverhalten. Das Geschwindigkeitsfrequenzspektrum folgt für alle Komponenten einer Skalierung mit  $\omega^{-3/2}$ . Während die senkrechten Komponenten von  $E_i^{L,M}(\omega)$  im Inertialgebiet eine  $\omega^{-2}$ -Skalierung zeigen, beobachtet man dagegen für die  $\mathbf{B}_0$ -parallele Komponente von  $E_i^{L,M}(\omega)$  wiederum eine  $\omega^{-3/2}$ -Skalierung. Das unterschiedliche Skalierungsverhalten der Komponenten des Lagrangeschen Gesamtenergiespektrums wird also im Wesentlichen durch die magnetischen Anteile hervorgerufen.

### 6.2.2 Zweidimensionaler Fall

Da im zweidimensionalen Fall deutlich höhere Reynoldszahlen erreicht werden können, ist eine Untersuchung der Reynoldszahl-Abhängigkeit der spektralen Skalierung möglich. Wie erwartet erweitert sich der Skalierungsbereich mit zunehmender Reynoldszahl. Bei der höchsten Reynoldszahl findet man eine Skalierung mit ungefähr  $\omega^{-3/2}$  (siehe Abbildung 6.13). Diese Skalierung stimmt mit der Vorhersage aus der Iroshnikov-Kraichnan Phänomenologie überein, die im zweidimensionalen MHD-Fall als (weitgehend) zutreffend angenommen wird. Das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum zeigt im zweidimensionalen MHD-Fall im Inertialbereich eine sehr deutliche Skalierung mit  $\omega^{-3/2}$ . Dagegen weicht das Spektrum der Magnetfeldfluktuationen bei niedrigen Frequenzen (bei  $\approx 0.02\omega_\eta$ ) etwas von dieser Skalierung ab. Dies könnte in Zusammenhang mit der inversen Kaskade

des mittleren magnetischen Potentials stehen.

### 6.3 Lagrangesche Strukturfunktionen

Die Lagrangeschen Strukturfunktionen der Geschwindigkeit sind analog zu den Eulerschen Strukturfunktionen definiert. Statt entlang von Längeninkrementen im Raum betrachtet man jedoch Änderungen der Teilchengeschwindigkeit nach Zeitinkrementen  $\tau$  entlang der Trajektorie

$$S_{p,i}^L(\tau) = \langle |\delta_\tau V_i|^p \rangle \quad \text{mit} \quad \delta_\tau V_i = V_i(t + \tau) - V_i(t).$$

Die Strukturfunktionen charakterisieren die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsinkremente  $P(\delta_\tau V_i)$ . Der Strukturfunktion zweiter Ordnung kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie hängt in stationärer Turbulenz mit der Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeit über

$$S_{2,i}^L(\tau) = 2\langle V_i^2 \rangle [1 - \rho_i^L(\tau)]$$

zusammen. Damit ergibt sich auch die Verbindung zum Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrum [88, Seite 360f.]

$$S_{2,i}^L(\tau) = 2 \int_0^\infty [1 - \cos(\omega\tau)] E_i^L(\omega) d\omega.$$

Da das Geschwindigkeitsfeld differenzierbar ist, wachsen auf sehr kurzen Zeitskalen die Geschwindigkeitsinkremente linear in der Zeit an. Die Strukturfunktionen verhalten sich daher selbstähnlich<sup>8</sup> zueinander [6]

$$\delta_\tau V_i \sim \tau \quad \text{für} \quad \tau \ll \tau_\eta \quad \rightarrow \quad S_{p,i}^L(\tau) \sim \tau^p.$$

Auf sehr langen Zeitskalen hängt die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht mehr vom Zeitinkrement  $\tau$  ab, und damit sind auch die Strukturfunktionen vom Zeitinkrement unabhängig

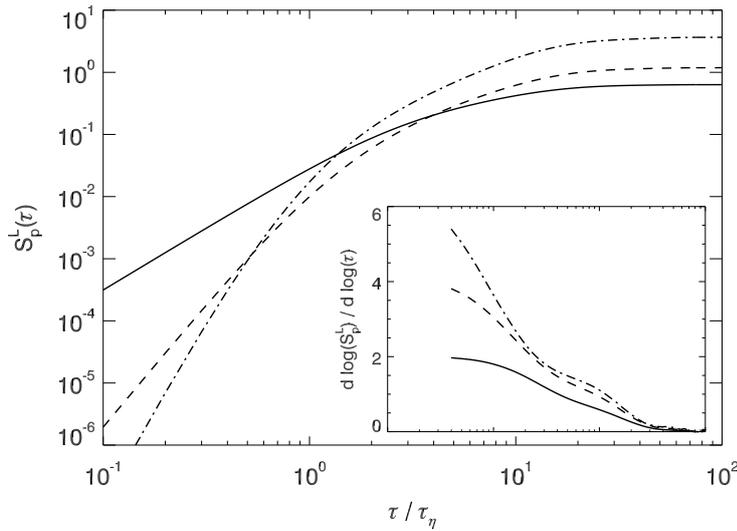
$$S_{p,i}^L(\tau) = \text{const.} \quad \text{für} \quad \tau \gg T_E.$$

Aus der K41-Phänomenologie lassen sich Vorhersagen zur Skalierung der Lagrangeschen Strukturfunktionen im zeitlichen Inertialbereich ( $\tau_\eta \ll \tau \ll T_E$ ) machen. Für die Strukturfunktion zweiter Ordnung erhält man folgende Relation [88, Seite 358ff.]

$$S_{2,i}^L(\tau) = C_0 \epsilon \tau \quad \text{für} \quad \tau_\eta \ll \tau \ll T_E.$$

Im Grenzfall hoher Reynoldszahlen ist  $C_0$  nach der K41-Phänomenologie eine universelle Konstante.  $C_0$  hängt mit der Konstante  $B_0$  in der entsprechenden Beziehung für das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum (6.5) über  $C_0 = \pi B_0$  zusammen [88] und ist ein wichtiger Parameter in stochastischen Turbulenzmodellen [101, 112, 137]. Für die

<sup>8</sup>Selbstähnlichkeit bedeutet in diesem Zusammenhang eine Skalierung der Lagrangeschen Strukturfunktionen mit einer Potenz des Zeitinkrementes, wobei die entsprechenden Exponenten einer lineare Funktion der Ordnung folgen.



**Abbildung 6.14** Lagrangesche Strukturfunktionen zweiter (durchgezogene Linie), vierter (gestrichelte Linie) und sechster Ordnung (Punkt-Strich-Linie) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes-Fall. Der eingesetzte Graph zeigt die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen nach der Zeit. Daten aus der Simulation NVFOU512N3.

Strukturfunktionen höherer Ordnung ergibt sich unter der Annahme der Selbstähnlichkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsinkremente

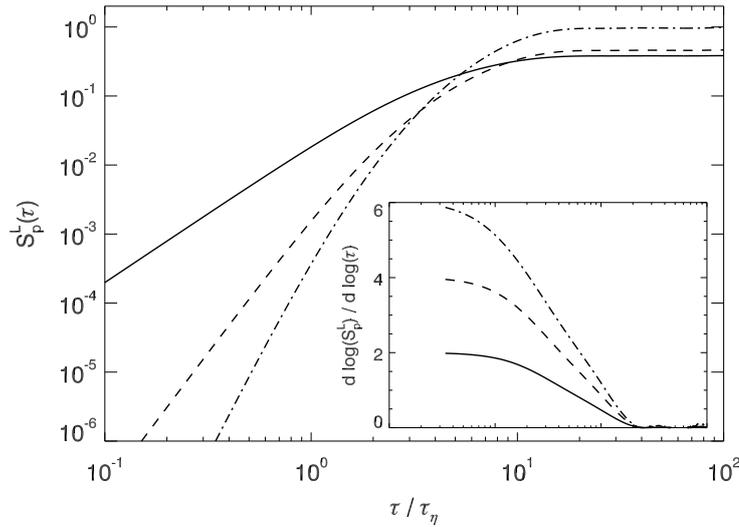
$$S_{p,i}^L \sim (\epsilon\tau)^{\zeta^L(p)} \quad \text{mit} \quad \zeta^L(p) = p/2.$$

Im MHD-Fall ergeben sich, wenn man von der Goldreich-Sridhar- oder der Boldyrev-Phänomenologie ausgeht, die gleichen Relationen wie im hydrodynamischen Fall. Verwendet man jedoch die Iroshnikov-Kraichnan- oder Gogoberidze-Phänomenologie so erhält man andere Skalierungsgesetze:

$$S_{2,i}^L(\tau) = C_0^{\text{IK}} \epsilon^{1/2} b_{\text{rms}} \tau^{1/2},$$

$$S_{p,i}^L(\tau) \sim (\epsilon b_{\text{rms}}^2 \tau)^{\zeta^L(p)} \quad \text{mit} \quad \zeta^L(p) = p/4.$$

Wie bei den Eulerschen Strukturfunktionen folgen die *gemessenen* Skalierungsexponenten im Inertialbereich keiner linearen Funktion der Ordnung  $p$ , die Strukturfunktionen verhalten sich also nicht selbstähnlich zueinander. Der Grad der Abweichung von einer linearen Abhängigkeit charakterisiert den Grad der Intermittenz des zeitlichen Verlaufs der Teilchengeschwindigkeit. Die Intermittenz äußert sich auch in der Formveränderung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Geschwindigkeitsinkremente  $P(\delta_\tau V_i)$  mit zunehmendem Zeitinkrement  $\tau$ . Auf sehr kurzen Zeitskalen hat  $P(\delta_\tau V_i)$  exponentiell abfallende Flügel zu großen Werten hin. Mit zunehmendem Zeitinkrement nimmt die Wahrscheinlichkeit sehr hoher Inkremente  $\delta_\tau V_i$  ab. Für sehr große Zeitinkremente ist  $P(\delta_\tau V_i)$  annähernd normalverteilt.



**Abbildung 6.15** Lagrangesche Strukturfunktionen zweiter (durchgezogene Linie), vierter (gestrichelte Linie) und sechster Ordnung (Punkt-Strich-Linie) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall. Der eingesetzte Graph zeigt die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen nach der Zeit. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.

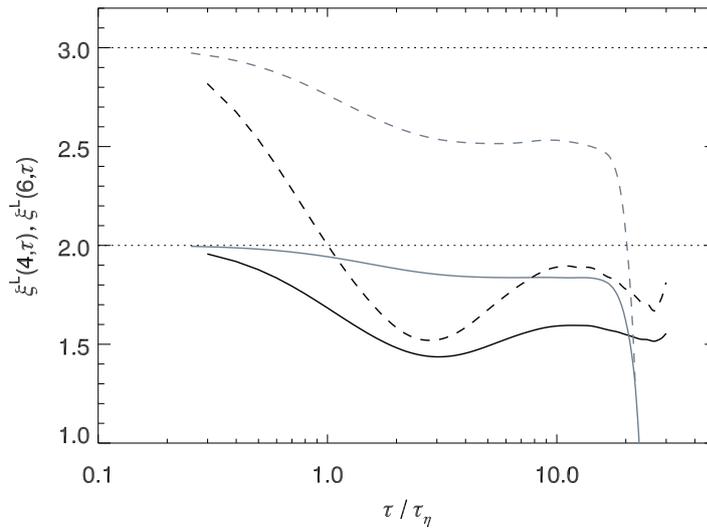
Ein großes Problem bei der Bestimmung der Skalierungsexponenten Lagrangescher Strukturfunktionen ist, dass bisher auch in Simulationen und Experimenten bei vergleichsweise hohen Reynoldszahlen kein zufriedenstellender Skalierungsbereich beobachtet werden konnte<sup>9</sup> [141, 132]. In den logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen nach der Zeit müsste im Fall einer Skalierung im Inertialbereich ein Plateau sichtbar sein. Ein solches Plateau kann hier nicht beobachtet werden (siehe Abbildungen 6.14 und 6.15). Um dennoch etwas über die Skalierungsexponenten der Lagrangeschen Strukturfunktionen erfahren zu können, verwendet man die von den Eulerschen Strukturfunktionen bekannte Methode der erweiterten Selbstähnlichkeit [11]. Man trägt eine Strukturfunktion nicht gegen die Zeit, sondern gegen die Strukturfunktion zweiter Ordnung auf und bestimmt im Inertialbereich den relativen Exponenten  $\xi^L(p) = \zeta^L(p)/\zeta^L(2)$ .

### Makroskopisch isotroper Navier-Stokes- und MHD-Fall

Nachdem in den absoluten Strukturfunktionen kein Inertialbereich beobachtet werden kann, muss der Inertialbereich, in dem die relativen Exponenten gemessen werden sollen, auf eine andere Weise definiert werden. Je nach Definition des Inertialbereiches erhält man unterschiedliche Werte der Exponenten  $\xi^L(p)$  [12]. Jedoch findet man für die Abhängigkeit der lokalen, d. h. vom Zeitinkrement abhängigen, Exponenten

$$\xi^L(p, \tau) = \frac{d \log(S_p^L(\tau))}{d \log(S_2^L(\tau))}$$

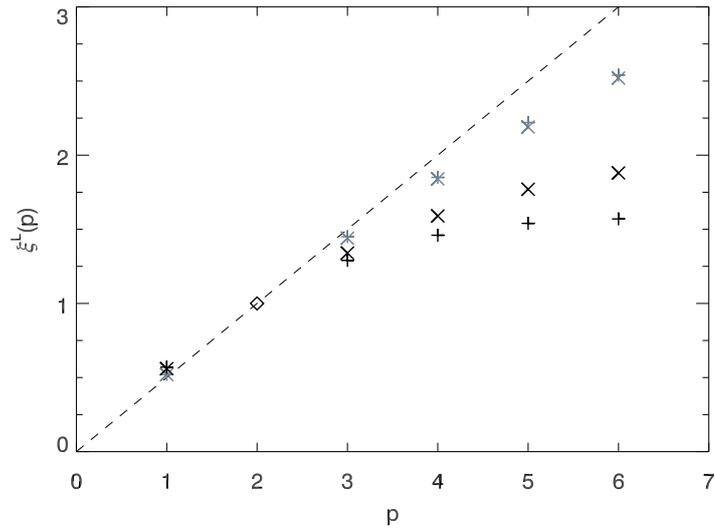
<sup>9</sup>Dies war auch der Fall, wenn das Lagrangesche Geschwindigkeitsspektrum eine Skalierung zeigte!



**Abbildung 6.16** Lokale relative Exponenten der Strukturfunktionen vierter (durchgezogene Linie) und sechster Ordnung (gestrichelte Linie) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarze Linien) und MHD-Fall (graue Linien). Die gepunkteten Linien deuten die Werte an, die man im Falle perfekter Selbstähnlichkeit erwartet. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

vom gewählten Messbereich im Navier-Stokes-Fall einen universellen Verlauf [6].  $\xi^L(p, \tau)$  ( $p > 2$ ) fällt vom Wert  $\xi^L(p, \tau) = p/2$  im dissipativen Bereich auf einen deutlich niedrigeren Wert bei  $\approx 1\tau_\eta$  ab, um dann wieder auf ein Plateau anzusteigen. Im makroskopisch isotropen MHD-Fall ist kein solches „Knie“ zu sehen (siehe Abbildungen 6.16 und 6.17). Dort beobachtet man einen stetig fallenden Kurvenverlauf von den Werten des Dissipationsbereichs bis zum erwarteten Wert  $\xi^L(p, \tau) = 0$  im Bereich der integralen Zeitskala. Eine Begründung für das abweichende Verhalten im MHD-Fall könnte das Fehlen des sogenannten Wirbeleinfangs (*vortex trapping*) sein, welcher im Navier-Stokes-Fall für die niedrigen Werte von  $\xi^L(p, \tau)$  im Bereich um  $1\tau_\eta$  verantwortlich gemacht wird [15] (siehe auch Kapitel 8).

Geht man von dem Frequenzbereich der Skalierung des Lagrangeschen Geschwindigkeitsspektrums aus, so kann man einen Skalierungsbereich zwischen  $5\tau_\eta$  und  $20\tau_\eta$  (bei Auflösung  $512^3$ ) annehmen. In diesem Bereich sieht man in den lokalen relativen Skalierungsexponenten ein Plateau (siehe Abbildung 6.16). Der Fehler der gemessenen Exponenten wird über die Unterschiede der drei Geschwindigkeitskomponenten ( $i = x, y, z$ ) bestimmt. Die tatsächlichen Abweichungen zwischen unabhängigen Messungen liegen deutlich höher, wie man in [6, Fig. 1] sehen kann, und liegen für den Skalierungsexponenten der Strukturfunktion vierter Ordnung bei etwa 10%. Eindeutig sichtbar ist (siehe Abbildung 6.17), dass die Strukturfunktionen im MHD-Fall deutlich weniger intermittent sind, d. h. weniger stark von einer linearen Funktion von  $p$  abweichen, als im Navier-Stokes-Fall. Dies könnte durch eine glättende Wirkung der magnetischen Spannung verursacht sein. Extreme Geschwindigkeitsvariationen würden zu einer starken Krümmung der Ma-



**Abbildung 6.17** Relative Skalierungsexponenten der Lagrangeschen Strukturfunktionen gemessen im Bereich  $2 - 5\tau_\eta$  (+) und im Bereich  $8 - 16\tau_\eta$  (x) für den makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarze Symbole) und MHD-Fall (graue Symbole). Die gestrichelte Linie deutet die lineare Skalierung im Falle perfekter Selbstähnlichkeit an. Die Raute zeigt den trivialen Wert  $\xi^L(2, \tau) = 1$ . Die dargestellten Daten stammen aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

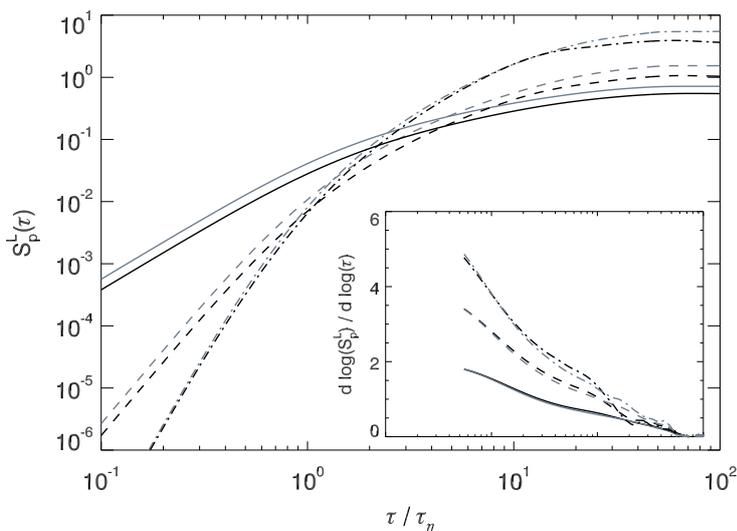
gnetfeldlinien führen.

### Anisotroper MHD-Fall

Eine Bestimmung von Skalierungsexponenten ist nicht möglich, wenn starke großskalige Alfvén-Wellen angeregt sind. Durch großskaligen Alfvén-Wellen wird den turbulenten Geschwindigkeitsinkrementen eine periodische Modulation überlagert, die jeglichen Skalierungsbereich unkenntlich macht.

In Simulation mit Modeneinfieren B5FRZ1024N3 konnten im Bereich  $2\tau_\eta$  bis  $10\tau_\eta$  relative Skalierungsexponenten bestimmt werden. Innerhalb der recht hohen Fehler stimmen die Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen sowohl der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen als auch der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Geschwindigkeitskomponenten mit den Werten des makroskopisch isotropen MHD-Falls überein.

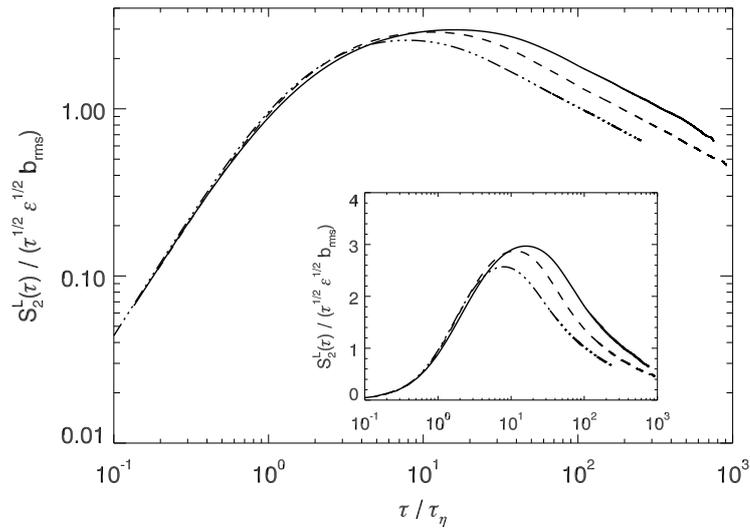
Auf längeren Zeitskalen sind die Strukturfunktionen in  $\mathbf{B}_0$ -senkrechter Richtung weit- aus intermittenter als in  $\mathbf{B}_0$ -paralleler wie man aus ihrer logarithmischen Steigung entnehmen kann (siehe Abbildung 6.18). In den Eulerschen Strukturfunktionen findet man ebenfalls eine stärkere Intermittenz in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Richtung als in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen [94].



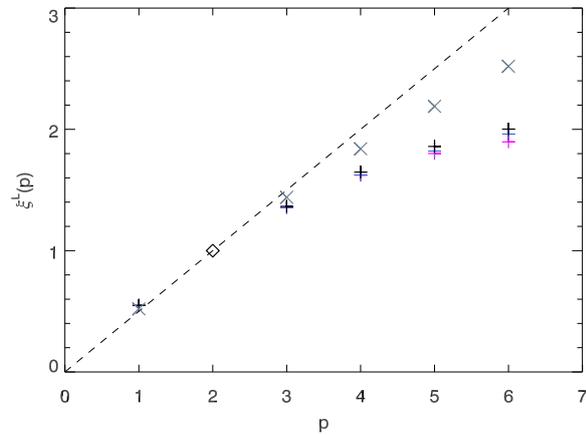
**Abbildung 6.18** Lagrangesche Strukturfunktionen zweiter (durchgezogene Linie), vierter (gestrichelte Linie) und sechster Ordnung (Punkt-Strich-Linie) im dreidimensionalen MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld bei Antrieb durch Modeneinfrieren. Die schwarzen Linien zeigen die Strukturfunktionen der Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum mittleren Magnetfeld, die grauen Linien parallel dazu. Der eingesetzte Graph zeigt die logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen nach der Zeit. Daten aus Simulation B5FRZ1024N3.

### Zweidimensionaler Fall

Auch im zweidimensionalen Fall ist in der Strukturfunktion zweiter Ordnung kein deutlicher Skalierungsbereich beobachtbar (siehe Abbildung 6.19). Jedoch scheint sich auf kurzen Zeitskalen ein annähernd universelles Verhalten einzustellen. Die gemessenen Exponenten sind sehr schwach von der Reynoldszahl abhängig, nur für Strukturfunktionen höherer Ordnung ist eine Abweichung bemerkbar (siehe Abbildung 6.20). Die gemessenen Exponenten zeigen eine höhere Intermittenz als im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall. Dies stimmt mit den Eulerschen Ergebnissen überein. Im zweidimensionalen MHD-Fall zeigen die turbulenten Felder ebenfalls eine stärkere Intermittenz als im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall [94, 100].



**Abbildung 6.19** Kompensierte Strukturfunktion zweiter Ordnung im MHD-Fall bei verschiedenen Reynoldszahlen. Linienstile wie in Abbildung 6.13. Eingesetzter Graph: Lineare statt logarithmische  $y$ -Achse.



**Abbildung 6.20** Relative Skalierungsexponenten im zweidimensionalen MHD-Fall bei verschiedenen Reynoldszahlen (Symbol +). Symbolfarbe schwarz: Simulation 2DFCEHXZ4096, blau: Simulation 2DFCEHXZ2048, magenta: Simulation 2DFCEHXZ1024. Graue Kreuze: Werte im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall (siehe auch Abbildung 6.17). Die gestrichelte Linie deutet die im nicht-intermittenten Fall erwartete lineare Skalierung an.

# 7 Zwei-Teilchen-Statistik

Während die Einzelteilchenstatistik beschreibt, wie sich der Schwerpunkt eines Flüssigkeitstropfens von seinem Ausgangspunkt entfernt, kann man mit Hilfe der Betrachtung der relativen Bewegung mehrerer Testteilchen die statistischen Eigenschaften der Verformung eines solchen Tropfens durch die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen beschreiben[9]. Die Zwei-Teilchen-Statistik beschreibt hierbei die Ausbreitung eines Tropfens bezüglich seines Schwerpunkts, also die Vermischung mit der umgebenden Flüssigkeit. Um komplexere Formveränderungen eines Tropfens wie etwa eine Streckung zu beschreiben, ist die Betrachtung der relativen Bewegung von Teilchenensembles von drei, vier oder mehr Teilchen nötig. Die relative Dispersion von Teilchen ist in vielen Situationen von Bedeutung, da sie unmittelbar mit den Vermischungseigenschaften turbulenter Strömungen verknüpft ist. So kann z. B. die Ausbreitung einer Rauchwolke in der Atmosphäre oder von Verunreinigungen in Flüssen und Ozeanen mit Hilfe der relativen Dispersion beschrieben werden.

Da die relative Bewegung zweier Teilchen im Wesentlichen durch turbulente Eddies bestimmt wird, deren Ausdehnung ungefähr von der Größenordnung des Teilchenabstands ist, ist die Zwei-Teilchen-Statistik in mancher Hinsicht der Eulerschen Flüssigkeitsbeschreibung näher als die Einzelteilchen-Statistik.

Im ersten Teil des Kapitels werden die Eigenschaften der relativen Dispersion, d. h. der Zunahme des Abstands zweier Teilchen beschrieben. Im zweiten Teil dieses Kapitels wird dann durch die Betrachtung der Relativgeschwindigkeit auf die dem Dispersionsprozess unterliegende Dynamik eingegangen.

Im Navier-Stokes-Fall wurde das gleiche Verhalten gefunden wie in ähnlichen direkten numerischen Simulationen [14, 68, 138]. Auf einen Vergleich mit diesen Simulationen wird daher im Folgenden weitgehend verzichtet (siehe hierzu [32]).

Die relative Dispersion wird im dreidimensionalen Fall vor allem an Hand der Simulationen NVFOU512N3, B0FOU512N3, B5REFOU512N3 und B5FRZ512N3 besprochen, da sich diese Simulationen wegen der ähnlichen Höhe der Reynoldszahlen am besten vergleichen lassen.

## 7.1 Relative Dispersion

Bei der Zwei-Teilchen- oder auch Paar-Statistik betrachtet man die relative Bewegung zweier Testteilchen. Der Abstandsvektor eines Teilchenpaares ist über

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) = \mathbf{X}_1(t, \mathbf{X}_{0,1}) - \mathbf{X}_2(t, \mathbf{X}_{0,2})$$

definiert. In homogener Turbulenz hängen die statistischen Eigenschaften der relativen Dispersion nur vom Abstandsvektor und nicht vom der absoluten Position, d. h. dem Schwerpunkt, eines Teilchenpaares ab.

Im Folgenden werden Teilchenpaare des gleichen Anfangsabstands  $R_0 = |\mathbf{R}_0|$  betrachtet. In den Simulationen wurden jeweils mehrere Teilchengruppen mit unterschiedlichen Anfangsabständen verfolgt (siehe Anhang C). Die Richtung des Anfangsabstandsvektors hat in statistisch isotroper Turbulenz keinen Einfluss auf die statistischen Eigenschaften der relativen Dispersion.

Über die Zeitabhängigkeit des mittleren quadratischen Abstands der Teilchenpaare lassen sich mit Hilfe der Betrachtung der sogenannten Dispersions-Effizienz<sup>1</sup>

$$Y(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle = \langle \mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0) \int_0^t \mathbf{U}(\tau, \mathbf{R}_0) d\tau \rangle \quad (7.1)$$

einige Aussagen machen [9, 23, 35]. Hierbei ist

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X}_{0,1}) - \mathbf{V}(t, \mathbf{X}_{0,2}) \quad (7.2)$$

die Relativgeschwindigkeit der beiden Teilchen eines Paares.

Die Zeitskala, auf der die Relativgeschwindigkeit eines Teilchenpaares zu seiner Anfangs-Relativgeschwindigkeit korreliert bleibt, kann über die Wirbelzeit eines Wirbels der Ausdehnung  $R_0$  abgeschätzt werden [9]. Mit Hilfe einer Dimensionsanalyse ergibt sich (siehe Anhang E)

$$t_B = \begin{cases} \epsilon^{-1/3} R_0^{2/3}, & \text{für } E(k) \sim k^{-5/3}, \\ (\epsilon b_{\text{rms}})^{-1/4} R_0^{3/4}, & \text{für } E(k) \sim k^{-3/2}. \end{cases}$$

Die Zeitskala  $t_B$  wird im hydrodynamischen Fall als *Batchelor-Zeitskala* bezeichnet.

Auf sehr kurzen Zeitskalen  $t \ll t_B$  ist die Relativgeschwindigkeit der Teilchen ungefähr konstant. Man kann daher das Integral in Gleichung (7.1) zu

$$\int_0^t \mathbf{U}(\tau, \mathbf{R}_0) d\tau \approx \mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0) t$$

abschätzen. Es folgt damit [112]

$$Y(t) = \langle (\mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0))^2 \rangle t = \begin{cases} \left[ S_2^{E,\parallel}(R_0) + 2S_2^{E,\perp}(R_0) \right] t, & \text{im 3D-Fall,} \\ \left[ S_2^{E,\parallel}(R_0) + S_2^{E,\perp}(R_0) \right] t, & \text{im 2D-Fall,} \end{cases} \quad \text{für } t \ll t_B.$$

Hierbei bezeichnen  $S_2^{E,\parallel}$  und  $S_2^{E,\perp}$  die longitudinale und die transversale Strukturfunktion zweiter Ordnung des Geschwindigkeitsfeldes. Aus der zeitlichen Integration von  $Y(t)$  folgt, dass die mittlere quadratische relative Dispersion auf kurzen Zeitskalen quadratisch mit der Zeit ansteigt

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle \sim t^2 \quad \text{für } t \ll t_B.$$

Für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand  $R_0$  im Inertialgebiet folgen aus den verschiedenen Phänomenologien Skalierungsgesetze für die longitudinale Strukturfunktion zweiter Ordnung (siehe Kapitel 2.2). Es ist daher im statistisch isotropen Fall möglich, den Vorfaktor genauer anzugeben (siehe Anhang E)

<sup>1</sup>Diese Größe entspricht ungefähr einem Dispersions-Koeffizienten.

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle = \begin{cases} \frac{11}{3} C_2 (\varepsilon R_0)^{2/3} t^2, & \text{im 3D-Fall mit } E(k) \sim k^{-5/3}, \\ \frac{7}{2} C_2 (\varepsilon b_{\text{rms}} R_0)^{1/2} t^2, & \text{im 3D-Fall mit } E(k) \sim k^{-3/2}, \\ \frac{5}{2} C_2 (\varepsilon b_{\text{rms}} R_0)^{1/2} t^2, & \text{im 2D-Fall mit } E(k) \sim k^{-3/2}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Hierbei ist  $C_2$  jeweils der im Skalierungsgesetz der longitudinalen Eulerschen Strukturfunktion zweiter Ordnung des Geschwindigkeitsfeldes erscheinende Vorfaktor. Im Grenzfall hoher Reynoldszahlen soll  $C_2$  nach der Kolmogorov-Phänomenologie eine universelle Konstante sein [51]. Der experimentell gemessene Wert von  $C_2$  in hydrodynamischer Turbulenz beträgt  $C_2 = 2.13 \pm 0.22$  [118]. Da in den MHD-Phänomenologien die Strukturfunktionen der Elsässer-Felder und nicht des Geschwindigkeitsfeldes betrachtet werden, ist  $C_2$  in diesen Modellen nicht notwendigerweise eine universelle Konstante. Im Navier-Stokes-Fall ist der Zusammenhang (7.3) unter dem Namen *Batchelor-Gesetz* bekannt<sup>2</sup>.

Auf sehr langen Zeitskalen, nachdem die Relativgeschwindigkeit vollständig von ihrem Anfangswert dekorreliert ist, ergibt sich mit

$$Y(t) = \left\langle \int_0^t \mathbf{U}(\tau, \mathbf{R}_0) \mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0) d\tau \right\rangle \approx \text{const.} \quad \text{für } t \gg t_B$$

eine diffusive Zeitabhängigkeit

$$\langle (R(t))^2 \rangle \sim t \quad \text{für } t \gg t_B.$$

Eine Abhängigkeit vom Anfangsabstand ist nicht mehr vorhanden.

Für Teilchenpaare mit Anfangsabständen im Inertialbereich lässt sich mit Hilfe einer dimensionsanalytischen Abschätzung noch ein weiteres Regime für den Zeitbereich  $t_B \ll t \ll T_E$  vorhersagen. Man geht davon aus, dass der Abstandsvektor der Teilchen von ihrem Anfangsabstandsvektor dekorreliert ist, d.h. die Richtung des Abstandsvektors  $\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0)$  hängt nicht mehr von der Richtung des Anfangsabstandsvektors  $\mathbf{R}_0$  ab. Gleichzeitig soll jedoch der Abstand der Teilchen immer noch im Inertialgebiet liegen  $\eta \ll |\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0)| \ll L_E$ .

$$Y = \langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0) \mathbf{U}(t, \mathbf{R}_0) \rangle \approx \langle U_{\parallel}(t, \mathbf{R}_0) | \mathbf{R} | \rangle$$

Indem man die Separationsgeschwindigkeit eines Teilchenpaares mit Abstand  $R$  über die Eulersche longitudinale Strukturfunktion zweiter Ordnung abschätzt, gelangt man zur folgenden dimensionsanalytischen Relation [35]

$$Y(R) \sim [S_2^{E, \parallel}(R)]^{1/2} R.$$

Geht man nun von einer  $k^{-5/3}$ -Skalierung des Spektrums der kinetischen Energie aus, so ergibt sich

$$Y(R) \sim R^{4/3} \quad \rightarrow \quad \frac{dR^2}{dt} \sim (R^2)^{2/3} \quad \rightarrow \quad R^2 \sim t^3.$$

<sup>2</sup>Es handelt sich hierbei jedoch nicht exakt um den ursprünglich von Batchelor vorgeschlagenen Zusammenhang [9], da Batchelor bei seiner Herleitung eine nicht zutreffende Näherung verwendet hat (siehe hierzu [98, 32]).

Da die statistischen Eigenschaften des Inertialbereiches nach Kolmogorov allein durch den Parameter  $\epsilon$  charakterisiert werden, erhält man

$$\langle R(t)^2 \rangle = g\epsilon t^3, \quad (7.4)$$

das *Richardson-(Obukhov-)Gesetz* mit der *Richardson-Konstante*  $g$  [109, 112]<sup>3</sup>.

Im MHD-Fall kommt auch eine Skalierung des Energiespektrums mit  $k^{-3/2}$  in Frage, es ergibt dann ein anderes Skalierungsgesetz.

$$Y(R) \sim R^{5/4} \quad \rightarrow \quad \frac{dR^2}{dt} \sim (R^2)^{5/8} \quad \rightarrow \quad R^2 \sim t^{8/3}$$

Wenn man davon ausgeht, dass die statistischen Eigenschaften des Inertialgebietes in diesem Fall von  $b_{\text{rms}}$  und  $\epsilon$  charakterisiert werden, so folgt

$$\langle R(t)^2 \rangle = g_{\text{IK}}(\epsilon b_{\text{rms}})^{2/3} t^{8/3}. \quad (7.5)$$

In numerischen Simulationen mit periodischen Randbedingungen ist eine vollständige Dekorrelation der beiden Teilchen eines Paares voneinander nicht möglich. Der maximale tatsächliche Abstand eines Teilchenpaares voneinander beträgt  $\sqrt{3}\pi$ , die Hälfte der Raumdialektone des Simulationsvolumens  $(2\pi)^3$ . Dies muss bedacht werden, auch wenn das Simulationsvolumen bei der Verfolgung der Testteilchen formal als unendlich fortgesetzt behandelt wird.

In experimentellen Messungen gibt es andere Einflüsse durch die Randbedingungen. In der Regel ist das Messvolumen, in dem die Bewegung der Teilchen verfolgt werden kann, und in dem eine annähernd statistisch isotrope turbulente Strömung vorliegt, recht klein [23]. Dies kann dazu führen, dass die Statistik auf längeren Zeitskalen einseitig durch langsame Teilchen bzw. durch sich langsam voneinander entfernende Teilchenpaare dominiert wird, wodurch die Skalierungsgesetze verfälscht werden können [131].

Insbesondere das Richardson-Gesetz ist schwer zu beobachten, da es sowohl in Experimenten als auch in numerischen Simulationen schwierig ist, die obengenannten Voraussetzungen, nämlich sehr hohe Reynoldszahlen und lange Verfolgungszeiten, zu erfüllen.

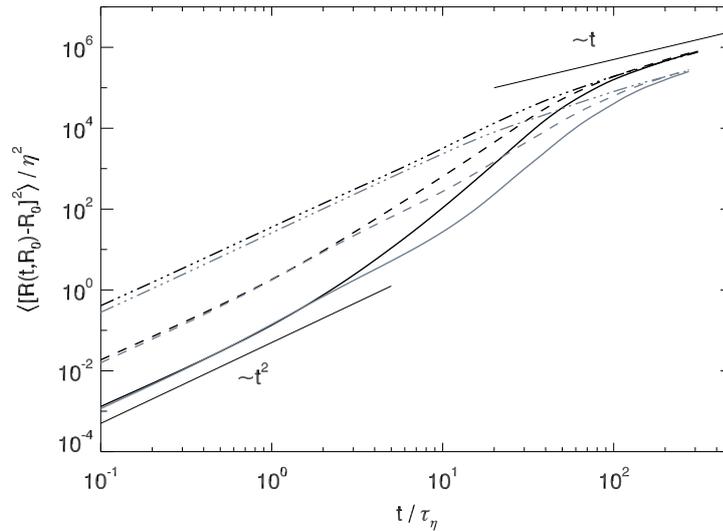
### 7.1.1 Makroskopisch isotroper Navier-Stokes- und MHD-Fall

Im makroskopisch isotropen Fall stellt sich sowohl im Navier-Stokes- als auch im MHD-Fall das erwartete ballistische Verhalten auf kurzen bzw. das diffusive Verhalten auf langen Zeitskalen ein (siehe Abbildung 7.1).

#### Batchelor-Gesetz

Für Anfangsabstände im Inertialgebiet (hier:  $R_0 = 16\Delta x, 64\Delta x$  in den Simulationen mit Auflösung  $512^3$ , bzw.  $R_0 = 16\Delta x, 32\Delta x, 64\Delta x, 128\Delta x$  in den Simulationen mit Auflösung

<sup>3</sup>Ein Dispersionsverhalten mit  $t^\alpha$  und  $\alpha > 2$  wird als anomale Dispersion bezeichnet. Es ergibt sich dadurch, dass die mittlere Relativgeschwindigkeit der Teilchen mit dem Teilchenabstand steigt, bis der Abstand von der Größe der integralen Längenskala ist [60].



**Abbildung 7.1** Zeitlicher Verlauf der relativen Dispersion im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände ( $R_0 \approx 1\Delta x$  (durchgezogene Linien),  $R_0 \approx 4\Delta x$  (gestrichelte Linien) und  $R_0 \approx 64\Delta x$  (Strich-Punkt-Linien)). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

$1024^3$ ) erwartet man auf kurzen Zeitskalen eine Zeitabhängigkeit nach dem Batchelor-Gesetz (7.3). Kompensiert man die relative Dispersion mit  $R_0^{2/3} t^2$ , so fallen die entsprechenden Kurven auf kurzen Zeitskalen fast zusammen. Das exakte Batchelor-Gesetz einschließlich der Vorfaktoren  $\frac{11}{3} C_2 \epsilon^{2/3}$ , welches man im Navier-Stokes-Fall erwartet, wird jedoch nicht reproduziert. In einem Experiment [23, 98] wurde eine gute Übereinstimmung der relativen Dispersion auf kleinen Skalen mit dem Batchelor-Gesetz gefunden. In den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulation wurden jedoch nur weit niedrigere Reynoldszahlen erreicht. Bei niedrigen Reynoldszahlen ist der Skalierungsbereich der Eulerschen Strukturfunktionen sehr klein, und für die Konstante  $C_2$  ergeben sich im Allgemeinen niedrigere Werte [142]. Ein wesentlicher Unterschied der numerischen Simulationen zum Experiment besteht auch darin, dass im Experiment die Startzeitpunkte der Teilchen über einen langen Zeitraum verteilt sind, während in der numerischen Simulation alle Teilchenpaare den gleichen Startzeitpunkt haben<sup>4</sup>. Die Verwendung eines einzigen Startzustandes führt zu einer stärkeren Abweichung von der geforderten statistischen Isotropie. Nachdem keine numerische Arbeit gefunden werden konnte, in der der Vorfaktor des Batchelor-Gesetzes untersucht wird, ist ein Vergleich mit unabhängigen numerischen Simulationen nicht möglich.

<sup>4</sup>Eine Initialisierung der Teilchenpaare zu unterschiedlichen Zeitpunkten wäre mit einem hohen Implementationsaufwand verbunden und würde längere Simulationsdauern nach sich ziehen.

### Richardson-Gesetz

Für große Anfangsabstände sieht man einen kontinuierlichen Übergang von der ballistischen zur diffusiven Skalierung. Dagegen zeichnet sich bei den kürzeren Anfangsabständen ein weiteres Regime mit einem steileren Anstieg als  $t^2$  ab. Der Kurvenverlauf fällt hierbei umso steiler aus, je kleiner der Anfangsabstand ist. Einen klaren Skalierungsbereich kann man jedoch für keinen der Anfangsabstände beobachten. Im MHD-Fall verlaufen die Kurven in diesem Zeitbereich (ca.  $10\tau_\eta \leq t \leq 100\tau_\eta$ ) im Vergleich zum Navier-Stokes-Fall etwas flacher und der Übergang vom ballistischen Bereich stellt sich erst später ein. Dies ist eine Folge der Ausrichtung am lokalen mittleren Magnetfeld (siehe unten).

Für eine Messung des Richardson-Gesetzes, das in diesem Zeitbereich erwartet wird, sind die erreichten Reynoldszahlen zu klein. Selbst in experimentellen Messungen bei sehr viel höheren Reynoldszahlen ( $\mathcal{O}(5 \cdot 10^4)$ ) konnte eine universelle Richardson-Skalierung nicht gefunden werden [134]. Eine Skalierung mit  $t^3$  würde noch am besten zu dem Anfangsabstand  $R_0 = 1\Delta x$  passen. Die aus den kompensierten Kurven  $\langle R(t)^2 \rangle / (\epsilon^K t^3)$  bestimmten Wert für die Richardson-Konstante betragen im Navier-Stokes-Fall  $g = 0.26 \pm 0.02$  (Simulation NVFOU512N3) bzw.  $g = 0.31 \pm 0.02$  (Simulation NVFOU1024N3) und  $g = 0.048 \pm 0.002$  (Simulation B0FOU512N3) bzw.  $g = 0.046 \pm 0.002$  (Simulation B0FOU1024N3) im MHD-Fall<sup>5</sup>. Die Werte im Navier-Stokes-Fall sind von der gleichen Größenordnung wie in anderen numerischen Simulationen gemessene Werte [14, 138]. Als Abschätzung für den tatsächlichen Wert der Richardson-Konstante sind diese Werte aus oben genannten Gründen jedoch ungeeignet. Interessant ist jedoch, dass die gemessenen Werte im MHD-Fall deutlich niedriger ist als im Navier-Stokes-Fall. Dies könnte dadurch verursacht sein, dass die Ausbreitung der Teilchen im MHD-Fall durch den Ausrichtungseffekt des Magnetfelds stark eingeschränkt ist.

### Ausrichtung am lokalen mittleren Magnetfeld

Die langsamere relative Dispersion im MHD-Fall ist eine Folge der Anisotropie der Relativgeschwindigkeit bezüglich des lokalen mittleren Magnetfelds (siehe Abschnitt 7.2.1). Diese Anisotropie hat auch Auswirkungen auf die Richtung des Abstandsvektors bezüglich des lokalen mittleren Magnetfelds. Als Näherung für das lokale mittlere Magnetfeld, dem ein Teilchenpaar ausgesetzt ist, wird

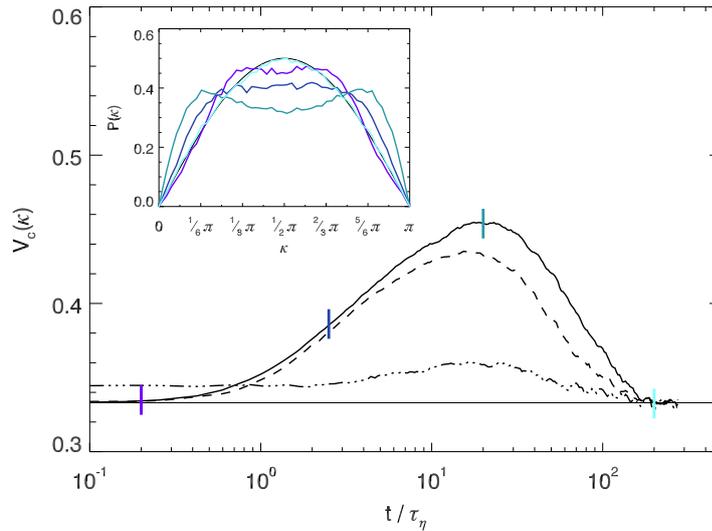
$$\bar{\mathbf{B}}(t) = \frac{1}{2} [\mathbf{B}(\mathbf{X}_1, t) + \mathbf{B}(\mathbf{X}_2, t)] \quad (7.6)$$

verwendet. Diese Näherung ist im makroskopisch isotropen MHD-Fall nur sinnvoll, falls der Abstand der beiden Teilchen kleiner als die integralen Längenskalen ist.

Die Abstandsvektoren der Teilchenpaare neigen dazu, sich zunehmend entlang des Magnetfelds auszurichten. Dies kann man an der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Winkelvarianz (Definition siehe Anhang F) des Winkels  $\kappa(t) = \angle(\mathbf{R}(t), \bar{\mathbf{B}}(t))$  beobachten (siehe Abbildung 7.2).

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  sind die Abstandsvektoren der Teilchenpaare bezüglich des lokalen mittleren Magnetfelds annähernd isotrop verteilt. Ein perfekt isotrope Verteilung wird

<sup>5</sup>Um die Werte für den Navier-Stokes- und den MHD-Fall direkt vergleichen zu können, wurde im MHD-Fall mit  $\epsilon^K$  statt  $\epsilon$  kompensiert.



**Abbildung 7.2** Winkelvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\kappa = \angle(\mathbf{R}, \overline{\mathbf{B}})$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.1). Im eingesetzten Graph wird  $P(\kappa)$  für den Anfangsabstand  $R_0 \approx 1\Delta x$  zu verschiedenen Zeitpunkten dargestellt. Die Zeitpunkte werden im Hauptgraph mit den entsprechenden Farben angezeigt. Die dünne schwarze Linie entspricht einer isotropen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.

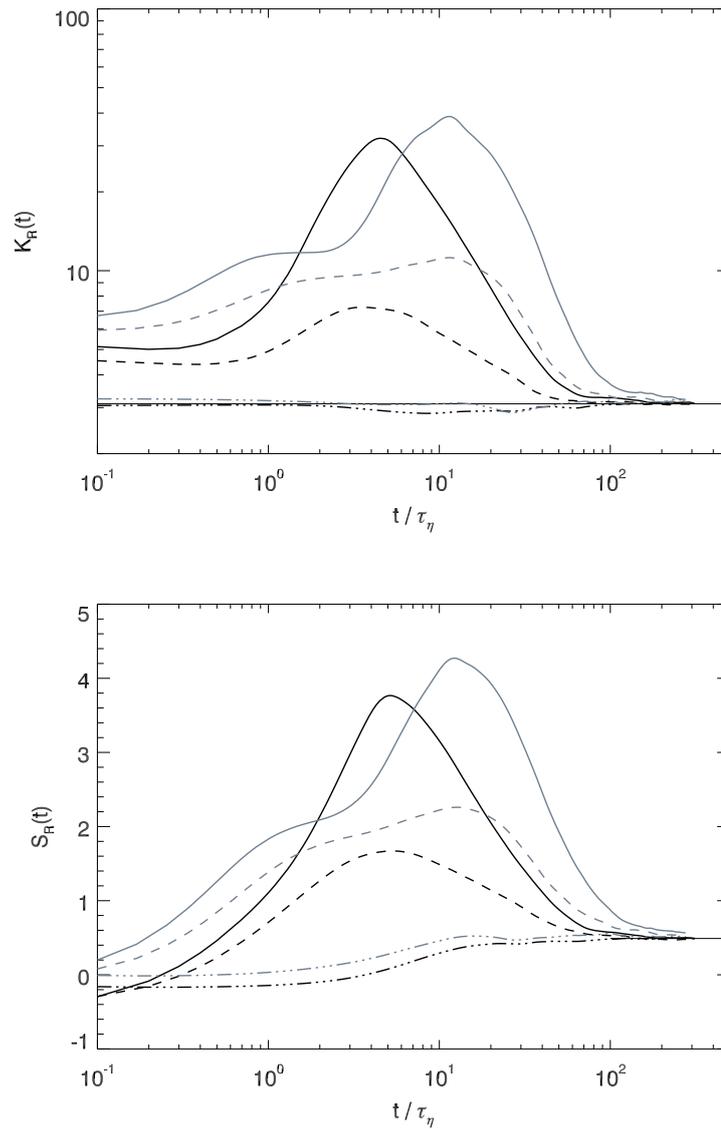
nicht erreicht, da das System nur im zeitlichen Mittel annähernd statistisch isotrop ist. Die Winkelvarianz der Verteilung nimmt mit der Zeit zu, bis bei etwa  $20\tau_\eta$  ein Maximum erreicht ist. Danach setzt eine Umkehr der Entwicklung zu einer isotropen Verteilung hin ein, die bei  $t \approx 200\tau_\eta$  abgeschlossen ist. Mit zunehmenden Anfangsabstand ist das Maximum der Winkelvarianz weniger stark ausgeprägt.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenabstände

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenabstände  $P(R)$  entspricht zum Zeitpunkt  $t = 0$  einer  $\delta$ -Funktion um  $R = R_0$ . Auf sehr langen Zeitskalen folgt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $P(R^2)$  ungefähr einer  $\chi^2$ -Verteilung mit drei Freiheitsgraden. Dies ergibt sich aus der Annahme, dass die Komponenten des Abstandsvektors auf langen Zeitskalen normalverteilt sind [138]. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $P(R)$  ergibt sich damit

$$P(R) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{3^{3/2} R^2}{\langle R^2 \rangle^{3/2}} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{R^2}{\langle R^2 \rangle}\right), \quad \text{für } t \gg \tau_\eta. \quad (7.7)$$

Anhand der Flachheit und der Schiefe von  $P(R)$  lässt sich die zeitliche Entwicklung von  $P(R)$  untersuchen (siehe Abbildung 7.3). Die Flachheit von  $P(R)$  ist auf kurzen Zeitskalen annähernd konstant. Ihre Werte sind hierbei im MHD-Fall höher. Dies ist durch die stärkere räumliche Intermittenz des Geschwindigkeitsfeldes im MHD-Fall im Vergleich zum



**Abbildung 7.3** Zeitlicher Verlauf der Flachheit (oben) und der Schiefe (unten) der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(R)$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände. Linienstile wie in Abbildung 7.1. Die dünnen Hilfslinien zeigen die entsprechenden Werte für die Verteilung (7.7) von ungefähr 3.1 bzw. 0.49 an. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

Navier-Stokes-Fall [19] bedingt. Nachdem auf kurzen Zeitskalen die Relativgeschwindigkeit und auch der Teilchenabstand annähernd konstant sind, sind die kleinen Änderungen des Teilchenabstands ein unmittelbares Abbild der räumlichen statistischen Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes.

Für kurze Anfangsabstände kommt es ab ca.  $1\tau_\eta$  zu einem Anstieg der Flachheit im Navier-Stokes-Fall, bis bei  $t \approx 5\tau_\eta$  ein Maximum erreicht ist. Die durch das Geschwindigkeitsfeld vorgegebene „Anfangsintermittenz“ verstärkt sich gleichsam selbst. Der Abstand der Teilchenpaare, die eine hohe Anfangsrelativgeschwindigkeit haben, wächst schneller, und damit nimmt auch ihre Relativgeschwindigkeit in der Regel zu. Dies hat eine noch schnellere Zunahme des Abstands dieser Teilchenpaare zur Folge. Mit zunehmendem Abstand der Teilchen nimmt die Intermittenz des Geschwindigkeitsfeldes ab, und Unterschiede in der Relativgeschwindigkeit werden durch zeitliche Mittelung vermindert. Der Wert der Flachheit sinkt daher auf großen Zeitskalen auf den Wert der Flachheit der Verteilung (7.7) von ungefähr 3.1 ab.

Im MHD-Fall verhält sich der zeitliche Verlauf der Flachheit in groben Zügen ähnlich. Auffallender Unterschied ist das Plateau, das man in der Entwicklung zwischen  $1\tau_\eta$  bis  $3\tau_\eta$  beobachten kann. Diese Verzögerung hängt mit der Ausrichtung des Abstandsvektors am lokalen mittleren Magnetfeld in diesem Zeitbereich zusammen (siehe Abschnitt 7.2.1). Durch dieses Plateau wird der weitere Verlauf der Flachheit gegenüber dem Navier-Stokes-Fall zu späteren Zeitpunkten verschoben. Das Maximum der Flachheit liegt höher als im Navier-Stokes-Fall, was wahrscheinlich eine Folge der stärkeren Intermittenz der turbulenten Felder im MHD-Fall ist. Die Schiefe von  $P(R)$  zeigt einen prinzipiell ähnlichen Verlauf wie die Flachheit. Auf kurzen Zeitskalen nimmt die Schiefe im Navier-Stokes-Fall negative Werte an, was eine Folge der negativen Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Inkremente des Geschwindigkeitsfeldes  $P(\delta v)$  ( $S_{\delta v} \approx -0.5$ ) auf kleinen Skalen ist [119, 138]. Im MHD-Fall weist dagegen  $P(\delta v)$  auf kleinen Skalen eine weit schwächer ausgeprägte Schiefe ( $S_{\delta v} \approx -0.2$ ) auf [33].

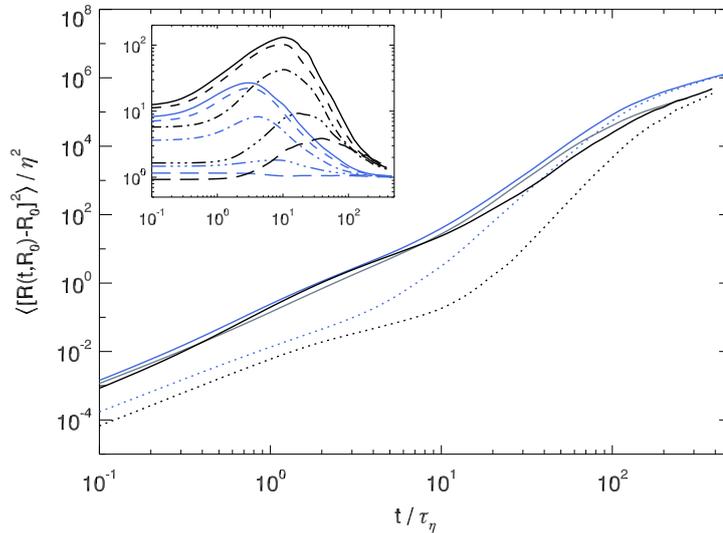
Für große Anfangsabstände zeigen die Flachheit und die Schiefe nur eine schwache Zeitabhängigkeit, da die Inkremente des Geschwindigkeitsfeldes auf großen Skalen annähernd normalverteilt sind.

### 7.1.2 Einfluss des mittleren Magnetfeldes

Betrachtet man MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes, so muss wegen der durch das mittlere Magnetfeld hervorgerufenen Anisotropie nicht nur der Absolutwert, sondern auch die Richtung des Anfangsabstandsvektors berücksichtigt werden. Die gewählte Anfangsanordnung der Teilchenpaare (siehe Kapitel 3.2.4) erlaubt es, zwischen Teilchenpaaren mit Anfangsabstandsvektoren parallel und senkrecht zum mittleren Magnetfeld klar zu unterscheiden. In der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld und in der Richtung parallel dazu unterscheiden sich die charakteristischen Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes, die sich in dem Verhalten der Teilchenpaare widerspiegeln (siehe Tabelle 7.1).

	$xy$ -Ebene ( $\perp \mathbf{B}_0$ )	$z$ -Richtung ( $\parallel \mathbf{B}_0$ )
Fluktuationen	auf allen Längenskalen	auf großen Längenskalen
Korrelationslänge	kurz	lang
Korrelationszeiten $T_0, T_L$	kurz	lang
Eulersche Strukturfunktionen	stark intermittent [94]	schwach intermittent [94]

**Tabelle 7.1** Eigenschaften anisotroper MHD-Turbulenz in der Ebene senkrecht und in der Richtung parallel zum mittleren Magnetfeld.



**Abbildung 7.4** Zeitlicher Verlauf der relativen Dispersion im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld für Teilchenpaare mit Anfangsabstand senkrecht (durchgezogene Linien) bzw. parallel zum mittleren Magnetfeld (gepunktete Linien), bei einem Anfangsabstand von  $1\Delta x$ , für den stochastischen Antrieb (schwarze Linien) und den Antrieb mit Modeneinfrieren (blaue Linien). Zum Vergleich: makroskopisch isotroper MHD-Fall (graue Linie). Eingesetzter Graph: Verhältnis der relativen Dispersion der Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  zur relativen Dispersion der Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  für verschiedene Anfangsabstände. Von oben nach unten:  $R_0 = 1\Delta x, 4\Delta x, 16\Delta x, 64\Delta x$  und  $128\Delta x$ . Daten aus den Simulationen B0FOU512N3, B5REFOU512N3 und B5FRZ512N3.

### Absolute relative Dispersion

Auf kurzen Zeitskalen erfahren Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  im Mittel stärkere Geschwindigkeitsfluktuationen als Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ . Dies ist dadurch bedingt, dass die  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes auf kleinen Skalen relativ zum makroskopisch isotropen Fall stark gedämpft sind (siehe Kapitel 5.2). Dementsprechend läuft die relative Dispersion von Teilchenpaaren mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  erheblich langsamer ab, während die relative Dispersion der Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  ungefähr den gleichen Verlauf zeigt wie im makroskopisch isotropen MHD-Fall (siehe Abbildung 7.4). Auch die Streckung der Eddies entlang des mittleren Magnetfelds, die mit der Anisotropie des Eulerschen Energiespektrums zusammenhängt, führt dazu, dass sich Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  auf kurzen Zeitskalen sehr viel langsamer voneinander entfernen (siehe Anhang D). Erst nach sehr langer Zeit  $t \gg 100\tau_\eta$  nähert sich der Wert der relativen Dispersion der Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  dem Wert für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  an.

Mit zunehmendem Anfangsabstand nimmt die Anisotropie in der relativen Dispersion ab (siehe Abbildung 7.4, eingesetzter Graph), da auf großen Längenskalen mehr  $\mathbf{B}_0$ -parallele Geschwindigkeitsfluktuationen vorhanden sind. Die Anisotropie der relativen Dispersion ist in der Simulation mit stochastischem Antrieb stärker ausgeprägt und dauert auch länger an als bei Verwendung des Antriebs durch Modeneinfrieren. Auf die Hintergründe dieses unterschiedlichen Verhaltens wird bei der Besprechung der Relativgeschwindigkeit eingegangen.

Auf sehr kurzen Zeitskalen kann man in der Simulation mit stochastischem Antrieb Ansätze einer anomalen Diffusion für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  beobachten. Die mittlere quadratische Dispersion zeigt eine Skalierung mit ungefähr  $t^{2.1}$ . Eine mögliche Ursache für dieses Verhalten könnte die starke Ausrichtung der Strömung durch das mittlere Magnetfeld sein.

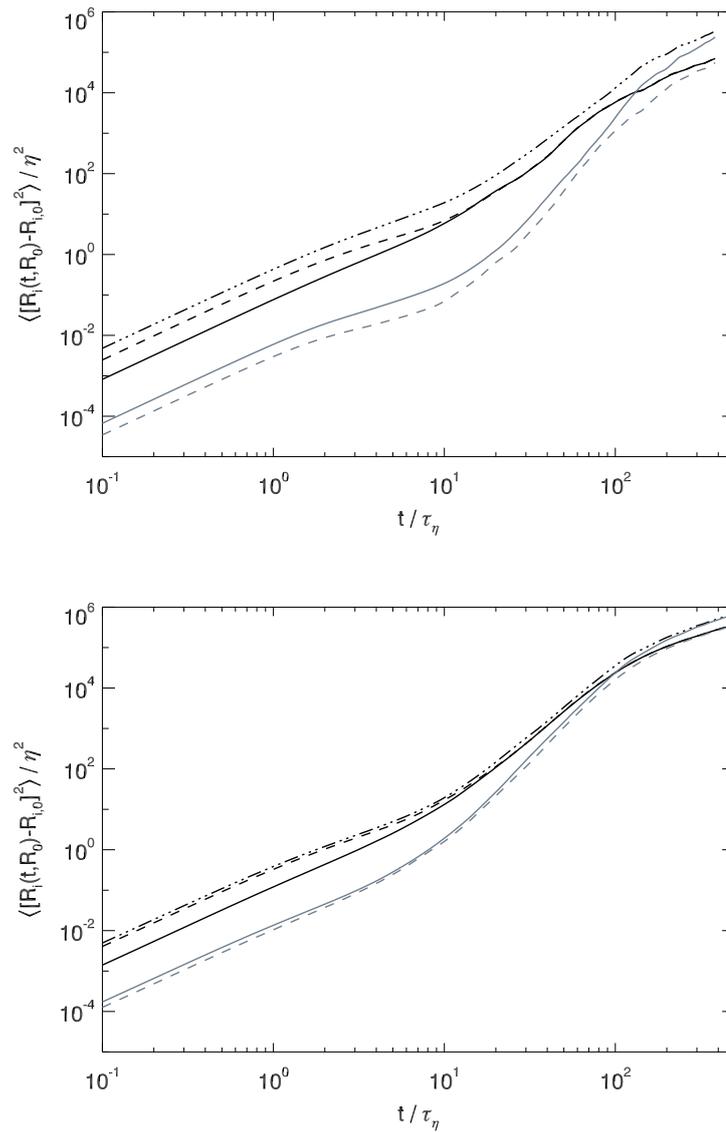
### Komponenten der relativen Dispersion

Der Zeitverlauf der Komponenten der relativen Dispersion (siehe Abbildung 7.5) zeigt, dass sich die Teilchen eines Paares bevorzugt entlang des mittleren Magnetfelds voneinander entfernen. Dies gilt sowohl für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  als auch für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ . Ein solches Verhalten mag auf den ersten Blick überraschen, denn die Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes treten bevorzugt in der Ebene senkrecht zum Magnetfeld auf. Jedoch sorgt die lange Korrelationszeit der  $z$ -Komponente der Teilchengeschwindigkeit (siehe Kapitel 6.1.2) dafür, dass auch die  $z$ -Komponente der Relativgeschwindigkeit  $U_z$  lange zu ihrem Ausgangswert korreliert bleibt. Weiterhin sind die Fluktuationen der  $z$ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auch auf kleinen Längenskalen etwas stärker als die der  $x$ - und  $y$ -Komponenten. Dies kann man aus den eindimensionalen transversalen Spektren des Geschwindigkeitsfeldes in der  $xy$ -Ebene entnehmen

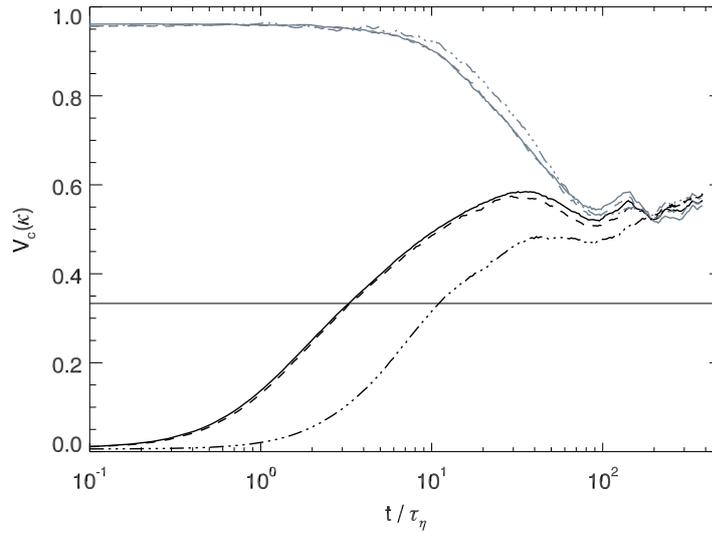
$$\mathcal{E}_{ij}^K(k) = \int d\mathbf{k}' \delta(|k'_j| - k) |v_i(\mathbf{k}')|^2, \quad i \neq j, i \in \{x, y, z\}, j \in \{x, y\}. \quad (7.8)$$

Auch die Elongation der Eddies begünstigt eine relative Dispersion in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung (siehe Anhang D).

Beim Antrieb mit Modeneinfrieren ist der Unterschied zwischen der relativen Dispersion parallel und senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$  zwar auch vorhanden, aber deutlich schwächer ausgeprägt.



**Abbildung 7.5** Zeitlicher Verlauf der Komponenten der relativen Dispersion im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  (schwarze Linien) und für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  (graue Linien) bei einem Anfangsabstand von  $1\Delta x$ . Durchgezogene Linien: Komponente der relativen Dispersion parallel zu  $\mathbf{R}_0$ , gestrichelte Linien: Komponente der relativen Dispersion senkrecht zu  $\mathbf{R}_0$  und  $\mathbf{B}_0$ , Strich-Punkt-Linien: Komponente der relativen Dispersion parallel zu  $\mathbf{B}_0$  (nur für  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ). Oben: Daten aus Simulation B5REFOU512N3; unten: Daten aus Simulation B5FRZ512N3.



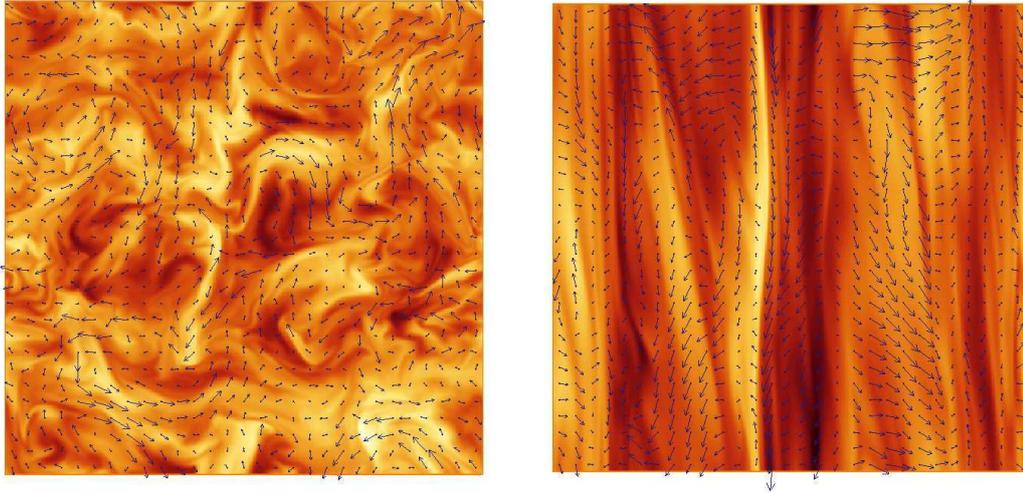
**Abbildung 7.6** Winkelvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\kappa = \angle(\mathbf{R}, \overline{\mathbf{B}})$  im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.2). Schwarze Linien:  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ; graue Linien  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ . Die dünne schwarze Linie zeigt den Wert der Winkelvarianz für eine isotrope Verteilung. Daten aus der Simulation B5REFOU512N3.

Dies ist wahrscheinlich eine Konsequenz der Tatsache, dass sich die Korrelationszeiten der Komponenten der Teilchengeschwindigkeit in  $\mathbf{B}_0$ -paralleler und -senkrechter Richtung nur geringfügig unterscheiden, und auch der Unterschied zwischen den Fluktuationen der  $z$ - und den  $x, y$ -Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes nicht so stark ausgeprägt ist.

Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  entfernen sich in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$  bevorzugt senkrecht zum Abstandsvektor voneinander. Dieser Effekt ist auch im makroskopisch isotropen Navier-Stokes- bzw. MHD-Fall beobachtbar. Er wird dadurch verursacht, dass die Teilchenpaare zum Zeitpunkt  $t = 0$  in der Regel eine endliche Transversal-Relativgeschwindigkeit besitzen (siehe Abschnitt 7.2, Anhang D).

### Streamer-Bild

Insgesamt beobachtet man den gleichen Ausrichtungsprozess entlang des mittleren Magnetfelds wie im makroskopisch isotropen MHD-Fall, nur in deutlich stärkerer Form, da ein starkes mittleres Magnetfeld auch zu einer makroskopischen Anisotropie der Strömung führt (siehe Abbildung 7.6). Das beobachtete Verhalten kann man in einem einfachen Streamer-Bild zusammenfassen (siehe hierzu Abbildung 7.7). In  $\mathbf{B}_0$ -paralleler Richtung beobachtet man eine annähernd laminare Scherströmung, die (stark vereinfacht) in Streifen parallel und antiparallel zu  $\mathbf{B}_0$  verläuft. Teilchen, die in verschiedenen Strömungsstreifen liegen ( $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ), entfernen sich schnell voneinander, sie werden entlang des mittleren Magnetfelds auseinander gerissen. Dagegen bleiben Teilchen, die sich im gleichen Strömungsstreifen befinden ( $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ ), lange benachbart. Sie entfernen sich erst dann schnell voneinander, wenn sie sich in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Richtung genug voneinander wegbewegt



**Abbildung 7.7** Projektion der Geschwindigkeitsfeldes (blaue Vektorpfeile) auf eine Ebene senkrecht (links) bzw. parallel (rechts) zum mittleren Magnetfeld in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starkem mittleren Magnetfelds. Im Hintergrund: Absolutbetrag des Magnetfelds auf Schnitten durch das Simulationsvolumen; Farben wie in Abbildung 5.6. Daten aus der Simulation B5REFOU512N3.

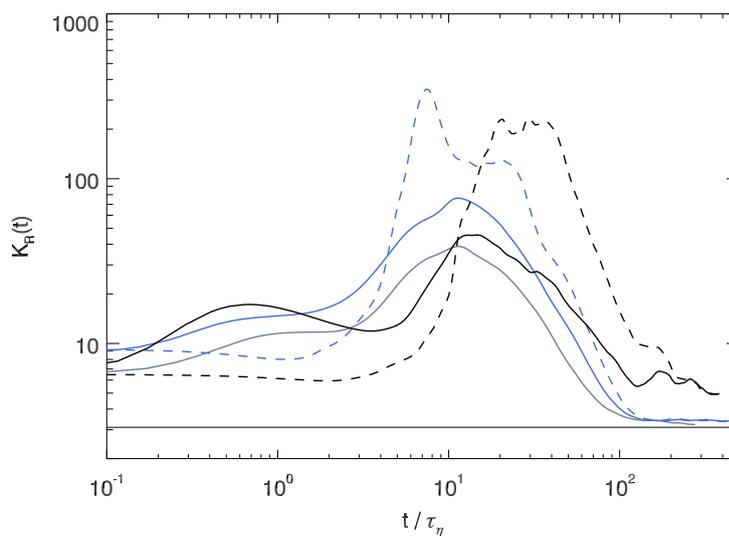
haben, um in unterschiedlichen Strömungsstreifen zu liegen. Ein ähnliches Verhalten beobachtet man auch in konvektiver Turbulenz, wo die turbulente Strömung durch einen Temperaturgradienten beeinflusst wird [114], und Bereiche mit kalter, absinkender Flüssigkeit neben Bereichen mit heißer, aufsteigender Flüssigkeit liegen.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenabstände

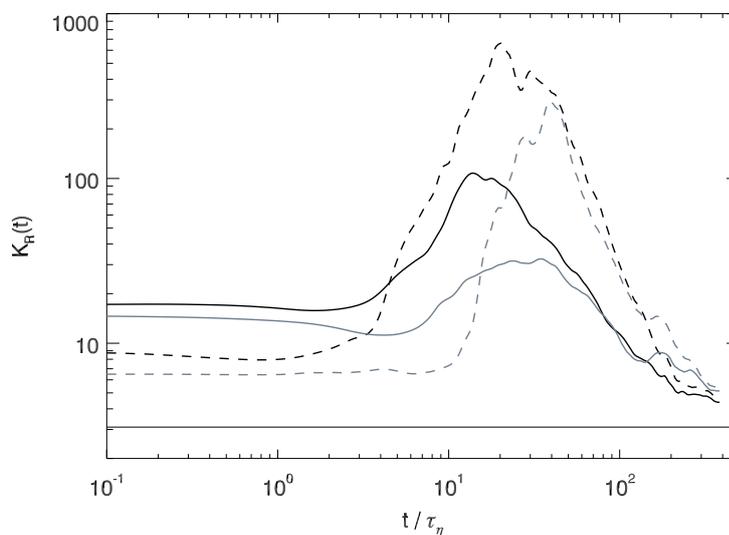
Die Formveränderungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenabstände in der Zeit sollen hier an Hand des zeitlichen Verlaufs der Flachheit dieser Verteilung diskutiert werden. Das mittlere Magnetfeld wirkt sich auf den Zeitverlauf der Schiefe in entsprechender Weise aus, d. h. die Absolutwerte und der Zeitpunkt der maximalen Schiefe hängen in ähnlicher Weise von der Richtung bezüglich des mittleren Magnetfeldes ab. Wie im makroskopisch isotropen Fall nehmen die Maximalwerte der Flachheit und Schiefe mit zunehmendem Anfangsabstand ab.

In anisotroper MHD-Turbulenz sind die turbulenten Felder in  $\mathbf{B}_0$ -senkrechter Richtung sehr viel intermittenter als in  $\mathbf{B}_0$ -paralleler [94]. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Teilchenabstands  $P(R)$  bzw. seiner Komponenten  $P(|R_i|)$  lässt dies erwarten, dass  $P(R)$  für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  stärker intermittenter ist, und dass  $P(|R_i|)$  für die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Komponenten höhere Werte der Flachheit aufweist als für die  $\mathbf{B}_0$ -parallele [51]. Auf kurzen Zeitskalen werden diese Erwartungen im Wesentlichen erfüllt (siehe Abbildungen 7.8 und 7.9). Auf längeren Zeitskalen (ab ca.  $5\tau_\eta$  bzw.  $10\tau_\eta$ ) beobachtet man jedoch ein umgekehrtes Verhalten: höhere Werte der Flachheit von  $P(R)$  für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ , und stärkere Intermittenz der Verteilung  $P(|R_z|)$  im Vergleich zu  $P(|R_{x,y}|)$ .

Diese Umkehr des Verhaltens kann man verstehen, wenn man bedenkt, dass die Sepa-



**Abbildung 7.8** Zeitlicher Verlauf der Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung des absoluten Teilchenabstands  $P(R)$  im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Durchgezogene Linien:  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ; gestrichelte Linien:  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ , Farben wie in Abbildung 7.4. Daten aus den Simulationen B0FOU512N3, B5REFOU512N3 und B5FRZ512N3.



**Abbildung 7.9** Zeitlicher Verlauf der Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung verschiedener Komponenten des Teilchenabstands  $P(|R_i|)$  im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Schwarze Linien:  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ; graue Linien:  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ ; durchgezogene Linien: Komponente senkrecht zu  $\mathbf{R}_0$  und  $\mathbf{B}_0$ ; gestrichelte Linien: Komponente parallel zu  $\mathbf{B}_0$ . Daten aus der Simulation B5FRZ512N3.

ration der Teilchen eines Paares bevorzugt in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung erfolgt, jedoch von den  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes getrieben wird. Die Relativgeschwindigkeit und damit auch die Separationsgeschwindigkeit eines Teilchenpaares wird durch die  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen dominiert. Ein Teilchenpaar, das in  $z$ -Richtung auseinander gerissen wird, mag zwar einen hohen absoluten Abstand haben. Seine  $\mathbf{B}_0$ -senkrechter Abstand ist im Mittel jedoch sehr viel kleiner, so dass seine Relativgeschwindigkeit von den stark intermittenten kleinskaligen Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Ebene dominiert bleibt.

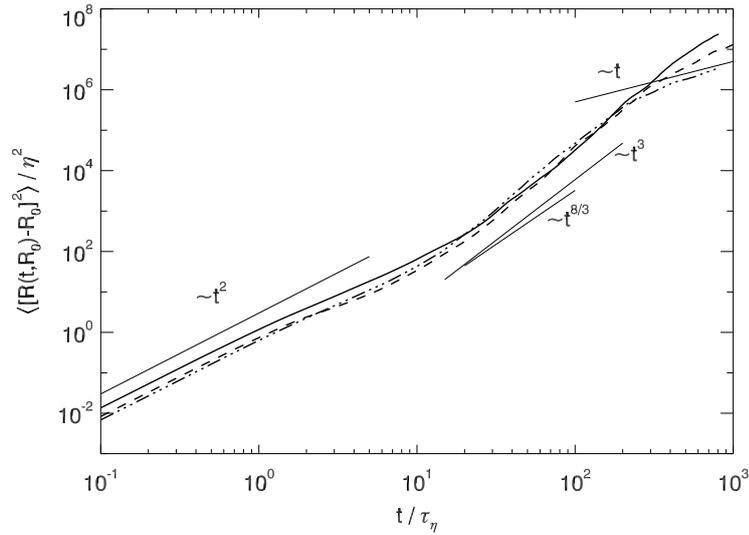
Für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  ist diese Entwicklung verzögert, da für diese Teilchenpaare eine effiziente Separation erst dann möglich ist, wenn sie aus der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung ausgelenkt werden. Da für eine solche Auslenkung Fluktuationen der  $x$ - bzw.  $y$ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung nötig sind, die aber auf kleinen Längenskalen kaum vorhanden sind, dauert dieser Auslenkungsprozess einige Zeit (vergleiche Abbildung 7.6). Zunächst werden nur wenige Teilchenpaare aus der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung ausgelenkt, weshalb der mittlere Teilchenabstand klein bleibt. Die ausgelenkten Teilchenpaare werden jedoch durch die starken  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Fluktuationen in der  $z$ -Richtung (und in geringerem Maße auch in der  $xy$ -Ebene) auseinandergetrieben, wodurch ihr Abstand rasch zunimmt. Deswegen nimmt die Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  im weiteren Verlauf die höchsten Werte an. Nachdem ein großer Anteil der Teilchenpaare die sehr starke Ausrichtung am mittleren Magnetfeld verloren hat, nehmen Flachheit und Schiefe von  $P(R)$  wieder ab.

### 7.1.3 Zweidimensionaler Fall

Bei der Untersuchung von MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds stellt sich die Frage, ob man den zweidimensionalen MHD-Fall als Grenzfall für ein unendlich starkes mittleres Magnetfeld ( $B_0 \rightarrow \infty$ ) sehen kann. In Bezug auf die relative Dispersion von Teilchenpaaren ist diese Ansicht nicht richtig. Denn der oben beschriebene Ausrichtungsprozess entlang des mittleren Magnetfelds kann in zweidimensionaler MHD-Turbulenz naturgemäß nicht parallel zu  $\mathbf{B}_0$  erfolgen, da die  $z$ -Richtung nicht vorhanden ist. Der zweidimensionale MHD-Fall entspricht im Hinblick auf die Lagrangesche Statistik also eher dem dreidimensionalen, *makroskopisch isotropen* MHD-Fall.

#### Batchelor-Gesetz

In der relativen Dispersion (siehe Abbildung 7.10) beobachtet man auf kurzen Skalen wie im dreidimensionalen Fall eine ballistische Zeitabhängigkeit. Kompensiert man die Kurven für die beiden größten Anfangsabstände ( $64\Delta x$  und  $256\Delta x$ ), die von den gewählten Anfangsabständen am ehesten dem Inertialbereich zuzuordnen sind, mit  $(\epsilon b_{\text{rms}} R_0)^{1/2} t^2$ , so fallen die beiden Kurven fast zusammen. Auch die Reynoldszahl-Abhängigkeit verschwindet fast völlig. Verwendet man dagegen  $(\epsilon R_0)^{2/3} t^2$  zur Kompensation der Kurven, so ist dies nicht der Fall. Das mit Hilfe der Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie hergeleitete Analogon zum Batchelor-Gesetz (Gleichung 7.3) im zweidimensionalen MHD-Fall scheint also zuzutreffen.



**Abbildung 7.10** Zeitlicher Verlauf der relativen Dispersion im zweidimensionalen MHD-Fall für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand von  $1\Delta x$  für verschiedene Reynoldszahlen; durchgezogene Linie: Simulation 2DFCEHXZ4096, gestrichelte Linie: Simulation 2DFCEHXZ2048, Strich-Punkt-Linie: Simulation 2DFCEHXZ1024. Die dünnen schwarzen Linien deuten verschiedene Skalierungsgesetze an.

### Richardson-Gesetz

Im Zeitbereich  $20\tau_\eta$  bis  $200\tau_\eta$  deutet sich ein zweiter Skalierungsbereich an. Die zeitliche Dauer dieses Skalierungsbereiches nimmt mit der Reynoldszahl zu. Die relative Dispersion gehorcht hier annähernd einem  $t^3$ -Gesetz. Eine Unterscheidung zwischen einer  $t^3$ - und  $t^{8/3}$ -Skalierung ist jedoch innerhalb der Fehler nicht möglich. Ein eindeutiger Wert für die Richardson-Konstante kann ebenfalls nicht angegeben werden, da der Kurvenverlauf im Skalierungsbereich eine Abhängigkeit sowohl von der Größe des Anfangsabstandes als auch (in schwächerem Maße) von der Reynolds-Zahl zeigt. Weiterhin erschweren die relativ starken zeitlichen Schwankungen der Energie und der Energiedissipationsrate, die durch die geringere Anzahl der angetriebenen Moden bedingt sind, die Bestimmung der Richardson-Konstante. Für den kürzesten Anfangsabstand ergeben sich Werte von  $g \approx 0.013 \pm 0.002$  bzw.  $g_{IK} \approx 0.007 \pm 0.002$ .

Auf sehr langen Zeitskalen sieht man für die niedrigste untersuchte Reynoldszahl einen Übergang zum diffusiven Verhalten. Im Falle der Simulationen bei höheren Reynoldszahlen wären deutlich längere Simulationsdauern (gemessen in Vielfachen von  $\tau_\eta$ ) erforderlich, um den Übergang ins diffusive Regime zu beobachten, da das Verhältnis  $T_0/\tau_\eta$  mit der Reynoldszahl zunimmt (siehe Kapitel 5).

### Wahrscheinlichkeitsverteilung der Teilchenabstände

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung zeigt im Wesentlichen die gleiche Zeitabhängigkeit wie im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall. Auf kurzen Zeitskalen ist sie

intermittenter, was eine Folge der stärkeren Intermittenz des Geschwindigkeitsfeldes in zweidimensionaler MHD-Turbulenz ist [94, 100]. Die Maximalwerte der Flachheit und Schiefe nehmen mit der Reynoldszahl zu. Eine solche Reynoldszahl-Abhängigkeit wird auch in hydrodynamischer Turbulenz beobachtet [138].

## 7.2 Relativgeschwindigkeit

Die Relativgeschwindigkeit eines Teilchenpaares lässt sich in einen longitudinalen  $U_{\parallel}$  und einen transversalen  $U_{\perp}$  Anteil bezüglich des Abstandsvektors aufteilen.

$$\mathbf{U} = U_{\parallel} \frac{\mathbf{R}}{R} + \mathbf{U}_{\perp}$$

Die longitudinale Relativgeschwindigkeit bestimmt die Veränderung des Paarabstands, während die transversale Relativgeschwindigkeit die Richtungsänderung des Abstandsvektors reguliert. Die Separationsgeschwindigkeit  $\langle U_{\parallel} \rangle$  ist ein Maß für die mittlere Zunahme des Teilchenabstands.

### 7.2.1 Ausrichtungsprozesse

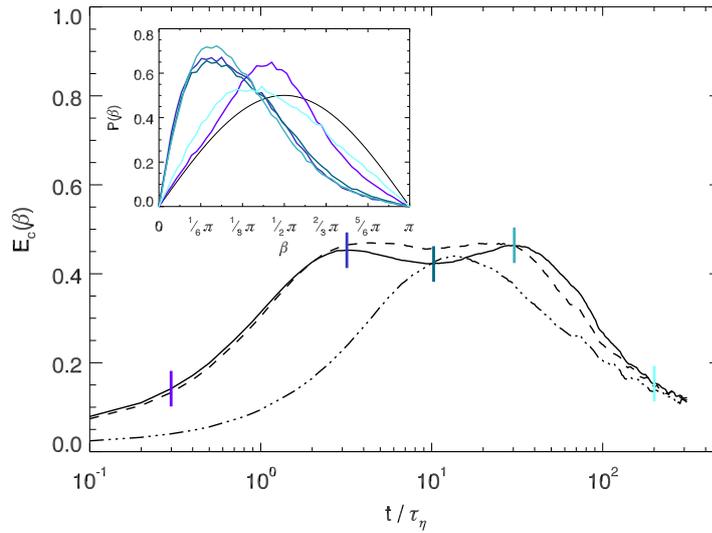
Die Zeitabhängigkeit der Relativgeschwindigkeit (und damit auch der relativen Dispersion) kann man im Rahmen mehrerer Ausrichtungsprozesse verstehen. Am einfachsten ist die Situation im Navier-Stokes-Fall.

#### Navier-Stokes-Fall

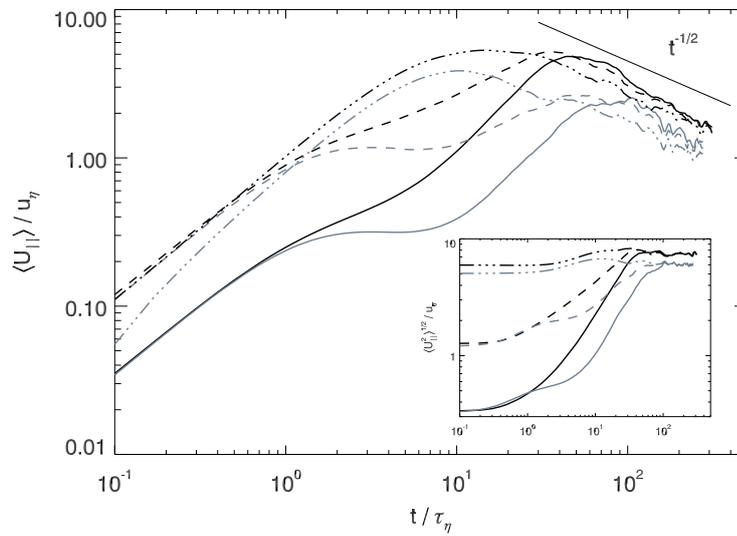
Die mittlere quadratische Relativgeschwindigkeit der Teilchenpaare nimmt zu, sofern ihr Abstand wächst und von der Größenordnung der inertialen oder dissipativen Längenskalen ist. Dies folgt daraus, dass das eindimensionale Energiespektrum für diesen Skalenbereich eine mit  $\ell^{\alpha}$ ,  $\alpha > 1$  zunehmende Funktion ist [111]. Auf großen Längenskalen ist das Spektrum der Geschwindigkeitsfluktuationen dagegen weitgehend flach, oder es fällt sogar ab. Hat der mittlere Abstand der Teilchenpaare die Größenordnung der integralen Längenskalen erreicht, so nimmt  $\langle U^2 \rangle^{1/2}$  einen ungefähr konstanten Wert an.

Der longitudinale und der transversale Anteil der Relativgeschwindigkeit können sich aus zwei Gründen ändern: Wegen der Zu- oder Abnahme der absoluten Relativgeschwindigkeit, oder weil sich die Ausrichtung des Abstandsvektors bezüglich der Relativgeschwindigkeit ändert. Der Zeitverlauf des Winkelmittelwertes des Winkels  $\beta(t) = \angle(\mathbf{R}(t), \mathbf{U}(t))$  (siehe Abbildung 7.11) zeigt, dass sich der Abstandsvektor auf kurzen Zeitskalen zunehmend entlang der Relativgeschwindigkeit ausrichtet (siehe auch [138]). Deswegen wächst die Separationsgeschwindigkeit auf kurzen Zeitskalen sehr stark (siehe Abbildung 7.12), die mittlere quadratische Transversalgeschwindigkeit der Teilchenpaare  $\langle U_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$  (siehe Abbildung 7.13) sinkt dagegen. Sobald der Ausrichtungsprozess abgeschlossen ist, schwächt sich das Wachstum der Separationsgeschwindigkeit ab, da der geometrische Effekt für ihre Zunahme entfällt. Gleichzeitig beginnt  $\langle U_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$  in Folge des Wachstums von  $\langle U^2 \rangle^{1/2}$  zuzunehmen, da der geometrische Effekt für die Abnahme nicht mehr vorhanden ist.

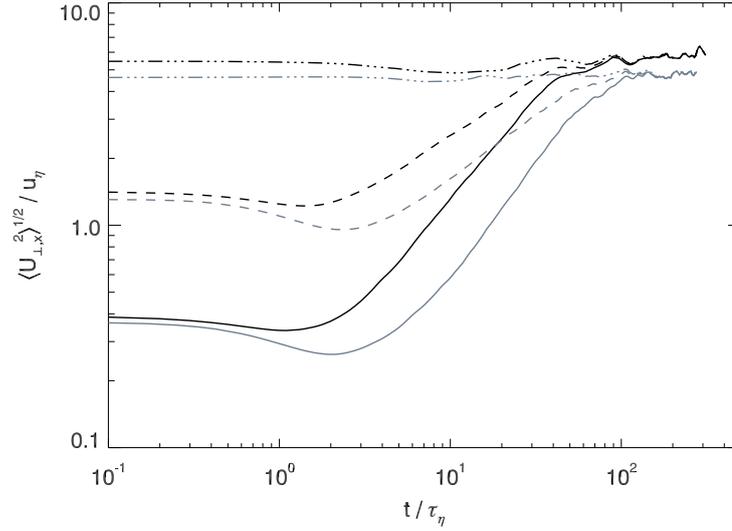
Der Abstandsvektor bleibt für kurze Anfangsabstände über einen recht langen Zeitraum ( $2\tau_{\eta}$  bis  $30\tau_{\eta}$ ) entlang der Relativgeschwindigkeit ausgerichtet. Erreicht der mittlere



**Abbildung 7.11** Winkelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\beta = \angle(\mathbf{R}, \mathbf{U})$  im dreidimensionalen Navier-Stokes-Fall für verschiedene Anfangsabstände. Farben und Linienstile wie in Abbildung 7.2. Daten aus der Simulation NVFOU512N3.



**Abbildung 7.12** Zeitlicher Verlauf der Separationsgeschwindigkeit bzw. der mittleren quadratischen longitudinalen Relativgeschwindigkeit (eingesetzter Graph) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.1). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 7.13** Zeitlicher Verlauf des quadratischen Mittelwerts der transversalen Relativgeschwindigkeit ( $x$ -Komponente) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.1). Für die  $y$ - und  $z$ -Komponenten der transversalen Relativgeschwindigkeit wird ein ähnliches Verhalten beobachtet. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

re Teilchenabstand die integralen Längenskalen, so wird die Richtung des Abstandsvektors zunehmend unabhängig von der Relativgeschwindigkeit. Die mittlere quadratische Transversalgeschwindigkeit nimmt einen ungefähr konstanten Wert an. Die Separationsgeschwindigkeit sinkt dagegen, wie auch aus der folgenden Abschätzung folgt:

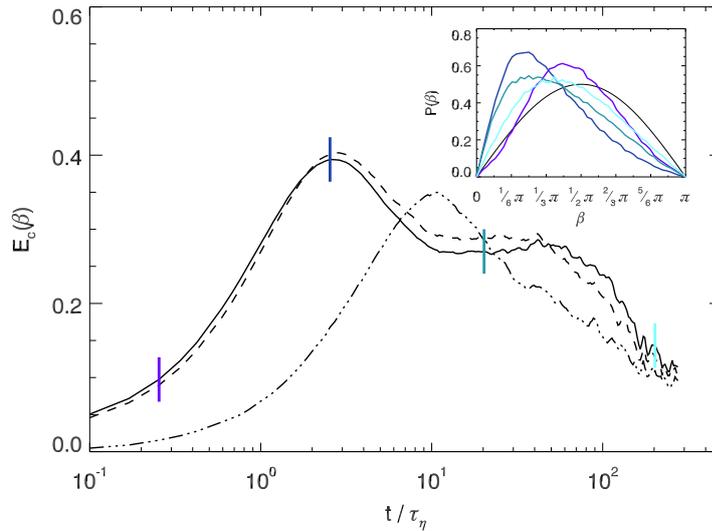
$$\frac{d}{dt} \langle R(t)^2 \rangle = 2 \langle \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{U}(t) \rangle = \langle |\mathbf{R}(t)| U_{\parallel}(t) \rangle$$

$$\langle R(t)^2 \rangle \sim t \quad \text{für } t \gg t_B \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle R(t)^2 \rangle = \text{const.} \quad \text{und} \quad \langle |\mathbf{R}(t)| \rangle \sim t^{1/2}$$

$$\langle U(t)^2 \rangle = \text{const.} \quad \text{für } R \geq L_0 \quad \Rightarrow \quad \langle U_{\parallel}(t) \rangle \sim t^{-1/2}. \quad (7.9)$$

Tatsächlich nimmt die Separationsgeschwindigkeit auf langen Zeitskalen ab etwa  $50\tau_\eta$  ab. Sie fällt etwas jedoch steiler ab, als einer  $t^{-1/2}$ -Skalierung entsprechen würde. Dies könnte dadurch bedingt sein, dass die Teilchen eines Paares wegen der verwendeten periodischen Randbedingungen nicht vollständig unabhängig voneinander werden können.

Bei sehr großen Anfangsabständen, die von der Größenordnung der integralen Längenskalen sind, entfällt das mittlere Regime des Wachstums der Relativgeschwindigkeit durch die Zunahme des Paarabstandes. Die Ausrichtung des Abstandsvektors nimmt, nachdem das Maximum erreicht ist, gleich wieder ab. Aufgrund des längeren Anfangsabstandes läuft die Ausrichtung des Teilchenabstandsvektors an der Relativgeschwindigkeit langsamer ab.



**Abbildung 7.14** Winkelmittelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\beta = \angle(\mathbf{R}, \mathbf{U})$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall für verschiedene Anfangsabstände. Farben und Linienstile wie in Abbildung 7.2. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.

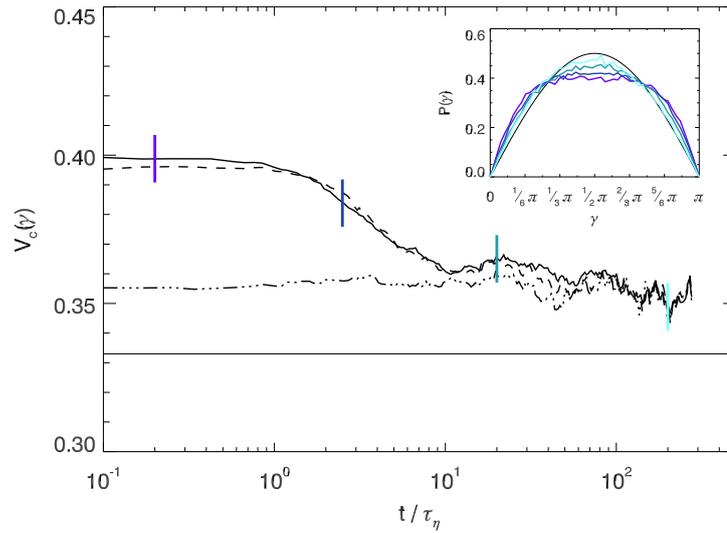
### Makroskopisch isotroper MHD-Fall

Auf kurzen Zeitskalen verhält sich die Relativgeschwindigkeit fast genauso wie im Navier-Stokes-Fall. Man beobachtet, dass der Abstandsvektor zunehmend entlang der Relativgeschwindigkeit ausgerichtet wird (siehe Abbildung 7.14). Jedoch kehrt sich dieser Ausrichtungsprozess für kurze Anfangsabstände schon ab etwa  $2\tau_\eta$  um. Die Ausrichtung des Abstandsvektors entlang der Relativgeschwindigkeit geht zurück, um ab etwa  $10\tau_\eta$  einen konstanten Wert anzunehmen. Auf langen Zeitskalen (ab etwa  $50\tau_\eta$ ) kommt es wie im Navier-Stokes-Fall zu einer weiteren Abnahme der Ausrichtung zu einer isotropen Verteilung hin.

Der Rückgang der Ausrichtung im Zeitintervall  $2\tau_\eta$  bis  $10\tau_\eta$  hat zur Folge, dass die Separationsgeschwindigkeit in diesem Zeitraum nicht mehr zunimmt, sondern sogar leicht abnimmt. Erst nachdem  $E(\beta)$  einen ungefähr konstanten Wert angenommen hat, steigt die Separationsgeschwindigkeit wieder. Im Zeitintervall  $2\tau_\eta$  bis etwa  $10\tau_\eta$  ist jedoch auch die Transversalgeschwindigkeit deutlich niedriger als im Navier-Stokes-Fall. Sie nimmt also nicht, wie man zunächst erwarten sollte, durch den Rückgang der Ausrichtung zu.

Ursache für dieses Verhalten ist die lokale Anisotropie des Geschwindigkeitsfeldes bezüglich des lokalen mittleren Magnetfeldes. An Hand der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\gamma = \angle(\mathbf{U}, \overline{\mathbf{B}})$  (siehe Abbildung 7.15) kann man beobachten, dass die Relativgeschwindigkeit der Teilchen bevorzugt parallel oder antiparallel zum lokalen mittleren Magnetfeld angeordnet ist. Dies hat zur Folge, dass der Abstandsvektor der Teilchen entlang des mittleren Magnetfeldes ausgerichtet wird. Nachdem Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes bevorzugt in der Ebene senkrecht zum lokalen mittleren Magnetfeld auftreten<sup>6</sup>,

<sup>6</sup>Auf kleinen Zeit- und Längenskalen kann man makroskopisch isotrope MHD-Turbulenz wie MHD-



**Abbildung 7.15** Winkelvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\gamma = \angle(\mathbf{U}, \overline{\mathbf{B}})$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen MHD-Fall für verschiedene Anfangsabstände. Farben und Linienstile wie in Abbildung 7.6. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.

hat dieser Ausrichtungsprozess eine Abnahme sowohl der transversalen als auch der longitudinalen Relativgeschwindigkeit zur Folge. Nachdem die absolute Relativgeschwindigkeit jedoch gleichzeitig noch auf Grund der Zunahme des Teilchenabstands wächst, sieht man effektiv nur eine schwache Abnahme der Separations- und der transversalen Relativgeschwindigkeit und eine langsamere Zunahme der longitudinalen Relativgeschwindigkeit im Vergleich zum Navier-Stokes-Fall.

Im MHD-Fall wirken auf den Abstandsvektor der Teilchen also zwei konkurrierende Ausrichtungsprozesse. Die Ausrichtung entlang der Relativgeschwindigkeit wie im Navier-Stokes-Fall und zusätzlich die Ausrichtung entlang des lokalen mittleren Magnetfeldes. Der zweite Ausrichtungsprozess setzt sich gegenüber dem ersten durch, weil sich das lokale mittlere Magnetfeld, das im Wesentlichen durch Magnetfeldfluktuationen der integralen Längenskalen bestimmt wird, auf sehr viel längeren Zeitskalen entwickelt als die Relativgeschwindigkeit, deren Zeitskala vom Teilchenabstand abhängt ( $T \sim R/U(R)$ ).

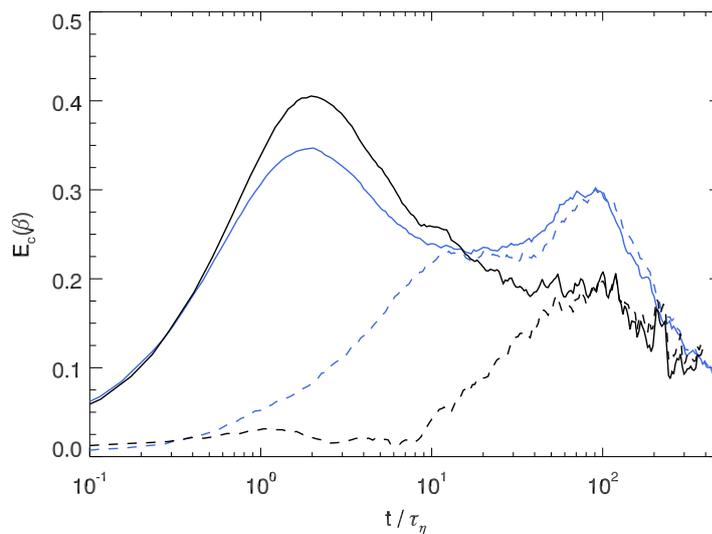
### MHD-Fall unter Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes

Im Folgenden werden zuerst die Ergebnisse bei Verwendung des stochastischen Antriebs diskutiert. Anschließend werden die Unterschiede, die sich bei der Verwendung des Antriebs durch Modeneinfrieren einstellen, besprochen.

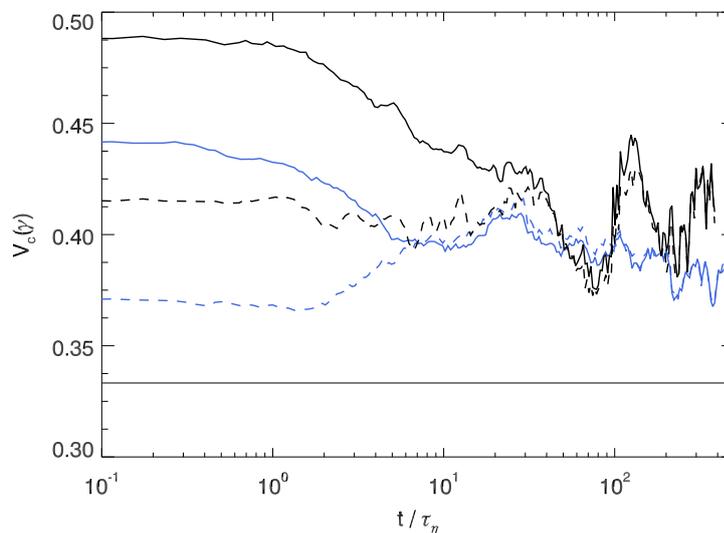
Für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  beobachtet man ein ähnliches Verhalten wie im makroskopisch isotropen MHD-Fall. Die Anisotropie der Relativgeschwindigkeit bezüglich des lokalen mittleren Magnetfeldes ist noch stärker ausgeprägt (siehe Abbildung 7.17).

---

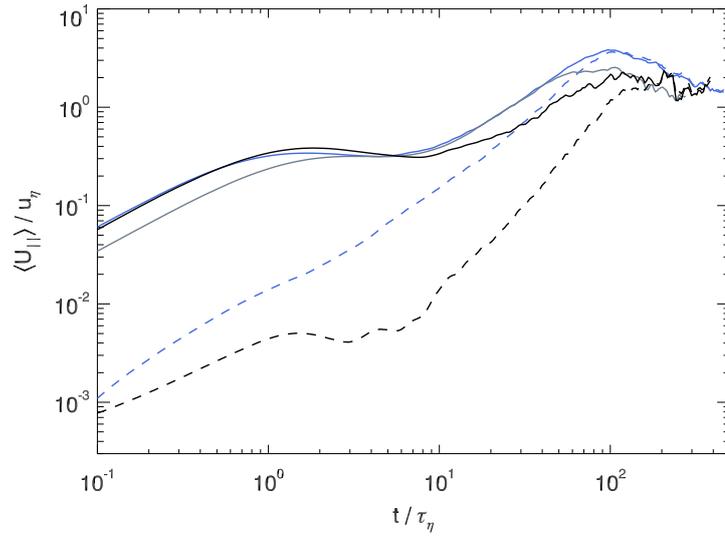
Turbulenz unter dem Einfluss eines mittleren Magnetfeldes beschreiben. Das mittlere Magnetfeld wird hierbei durch die großskaligen, langsam variierenden Magnetfeldfluktuationen erzeugt.



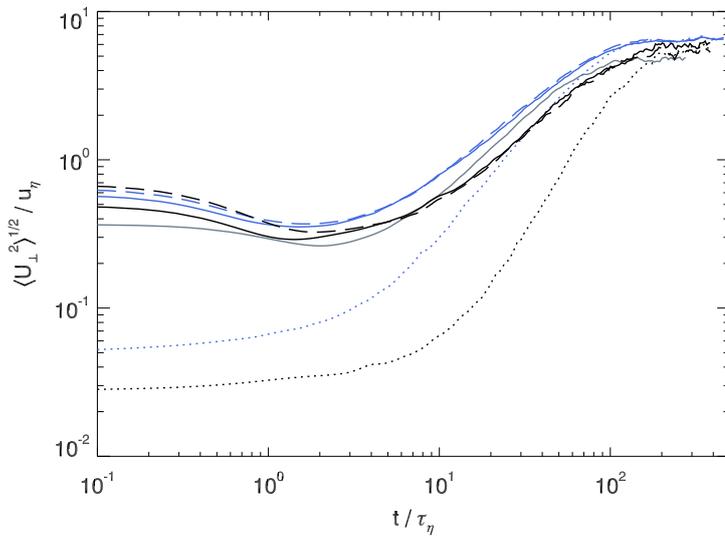
**Abbildung 7.16** Winkelwert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\beta = \angle(\mathbf{R}, \mathbf{U})$  in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Durchgezogene Linien:  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ ; gestrichelte Linien  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ . Schwarze Linien: Simulation B5REFOU512N3, blaue Linien: B5FRZ512N3.



**Abbildung 7.17** Winkelvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\gamma = \angle(\mathbf{U}, \overline{\mathbf{B}})$  in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand von  $1\Delta x$ . Liniestile wie in Abbildung 7.16. Die dünne schwarze Linie zeigt den Wert der Winkelvarianz für eine isotrope Verteilung.



**Abbildung 7.18** Zeitlicher Verlauf der Separationsgeschwindigkeit in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Linienstile wie in Abbildung 7.16. Zum Vergleich:  $\langle U_{\parallel} \rangle$  im makroskopisch isotropen Fall (graue Linie, Simulation B0FOU512N3).



**Abbildung 7.19** Zeitlicher Verlauf des quadratischen Mittelwerts verschiedener Komponenten der transversalen Relativgeschwindigkeit in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$ :  $\mathbf{U}_{\perp} \times (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}_0} \times \hat{\mathbf{e}}_z)$  (durchgezogene Linien),  $U_{\perp,z}$  (gestrichelte Linien); Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ :  $\frac{1}{2}(U_{\perp,x} + U_{\perp,y})$  (gepunktete Linien). Daten aus der Simulationen B5REFOU512N3 (schwarze Linien) und B5FRZ512N3 (blaue Linien). Zum Vergleich:  $\langle U_{\perp,x}^2 \rangle^{1/2}$  im makroskopisch isotropen Fall (graue Linie, Simulation B0FOU512N3).

Auf kurzen Zeitskalen ist die Separationsgeschwindigkeit etwas höher als im makroskopisch isotropen Fall (siehe Abbildung 7.18). Der Abstandsvektor richtet sich bis etwa  $1\tau_\eta$  schneller entlang der Relativgeschwindigkeit aus (siehe Abbildung 7.16).

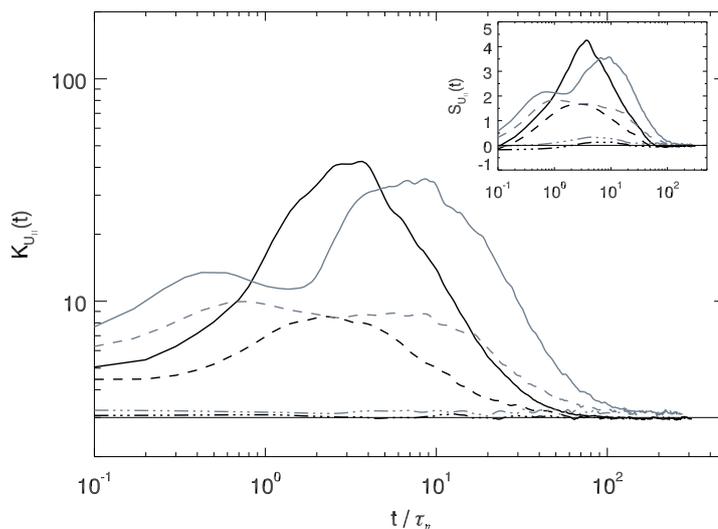
Für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  ist dagegen die Separationsgeschwindigkeit auf kurzen Zeitskalen um fast zwei Größenordnungen kleiner. Der Abstandsvektor hat sich bis etwa  $10\tau_\eta$  fast gar nicht entlang der Relativgeschwindigkeit ausgerichtet. Auch die transversale Relativgeschwindigkeit, die den Abstandsvektor aus seiner  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung auslenken könnte, ist extrem gering (siehe Abbildung 7.19). Erst nachdem die Ausrichtung des Abstandsvektors entlang der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung abzunehmen beginnt, wachsen die Werte der Relativgeschwindigkeit an. In der Separationsgeschwindigkeit kann man zwischen  $1\tau_\eta$  und  $20\tau_\eta$  einige Fluktuationen beobachten. Diese lassen sich auf großskalige Alfvén-Wellen zurückführen, die sich entlang des mittleren Magnetfelds ausbreiten. Alfvén-Wellen kann man nur für Teilchenpaare mit  $\mathbf{R} \parallel \mathbf{B}_0$  gut beobachten, da sie auf die Relativgeschwindigkeit von Teilchenpaaren mit  $\mathbf{R} \perp \mathbf{B}_0$  keine unmittelbare Auswirkung haben.

Auffälligster Unterschied in der Simulation mit dem Antrieb durch Modeneinfrieren ist die abermalige Ausrichtung des Abstandsvektors entlang der Relativgeschwindigkeit um  $100\tau_\eta$  (siehe Abbildung 7.16). Auf großen Skalen ist bei dieser Form des Antriebs das Geschwindigkeitsfeld in der Zeit konstant. Wegen der unendlichen Korrelationszeit des Geschwindigkeitsfeldes dominiert deshalb auf großen Skalen wieder der Ausrichtungsprozess an der Relativgeschwindigkeit, bevor die Dekorrelation des Abstandsvektors von der Relativgeschwindigkeit eintritt. Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  verlieren früher ihre starke Bindung an das mittlere Magnetfeld als in der Simulation mit dem stochastischen Antrieb. Dies ist wahrscheinlich ebenfalls eine Folge der Tatsache, dass auf großen Skalen die Eddy-Turnover-Zeit des Geschwindigkeitsfeldes in allen drei Raumrichtungen gleich groß (nämlich unendlich) ist. In der Simulation mit stochastischem Antrieb ist dagegen die Entwicklungszeit des Geschwindigkeitsfeldes auch auf großen Skalen in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung deutlich länger als in der Richtung senkrecht dazu.

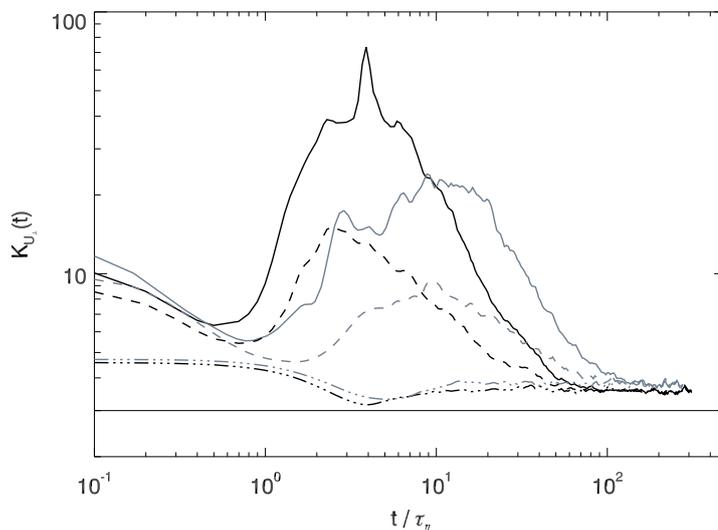
### 7.2.2 Wahrscheinlichkeitsverteilung der Relativgeschwindigkeit

Wie bereits bei der Besprechung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Paarabstands diskutiert wurde, hat die Anisotropie der Relativgeschwindigkeit auch Auswirkungen auf die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der transversalen und longitudinalen Relativgeschwindigkeit. Die Flachheit und Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilung der longitudinalen Relativgeschwindigkeit  $P(U_\parallel)$  (siehe Abbildungen 7.20 und 7.22) zeigen im Wesentlichen den gleichen Verlauf wie im Falle der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Paarabstandes  $P(R)$ . Die Zu- und Abnahme des Teilchenabstands ist unmittelbar mit  $U_\parallel$  verbunden.

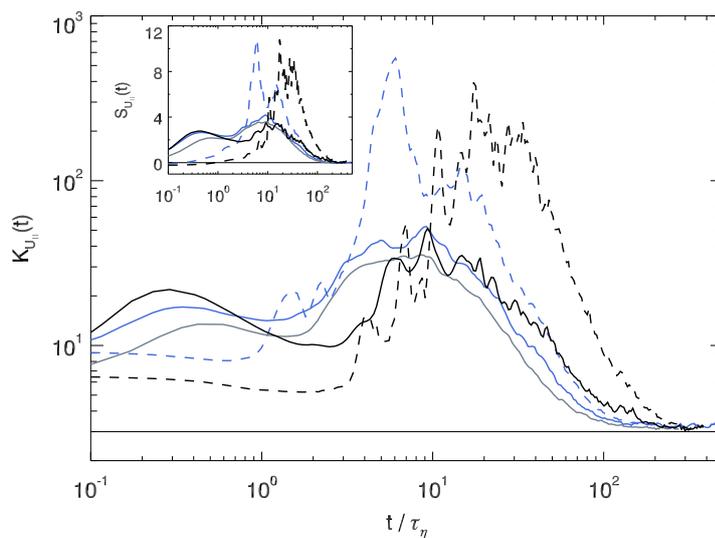
Die Flachheit von  $P(U_\perp)$  (siehe Abbildungen 7.21 und 7.23) nimmt auf kleinen Zeitskalen höhere Werte als für die longitudinale Relativgeschwindigkeit an. Dies kann man auf die räumlichen Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes zurückführen, denn auch für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der transversalen Inkremente des Geschwindigkeitsfeldes findet man auf kleinen Längenskalen höhere Werte der Flachheit als für die longitudinalen [57]. Bis etwa  $1\tau_\eta$  sinkt die Flachheit von  $P(U_\perp)$  stark ab. Dies ist durch die Ausrichtung des Abstandsvektors entlang der Relativgeschwindigkeit verursacht. Teil-



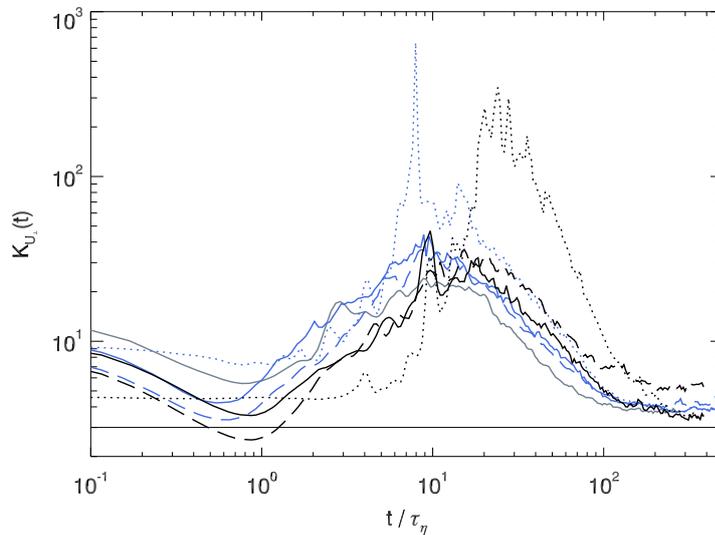
**Abbildung 7.20** Zeitlicher Verlauf der Flachheit und der Schiefe (eingesetzter Graph) der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(U_{\parallel})$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.1). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



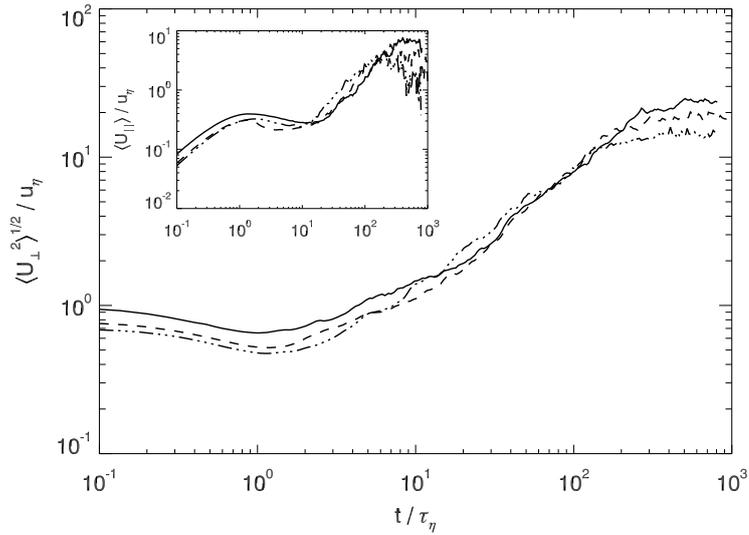
**Abbildung 7.21** Zeitlicher Verlauf der Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(U_{\perp,x})$  im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarz) und MHD-Fall (grau) für verschiedene Anfangsabstände (Linienstile wie in Abbildung 7.1). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 7.22** Zeitlicher Verlauf der Flachheit und der Schiefe (eingesetzter Graph) der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(U_{||})$  in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Linienstile wie in Abbildung 7.16. Zum Vergleich: makroskopisch isotroper Fall (graue Linie, Simulation B0FOU512N3).



**Abbildung 7.23** Zeitlicher Verlauf der Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P(U_{\perp,i})$  in MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds für Teilchenpaare mit Anfangsabstand  $1\Delta x$ . Linienstile wie in Abbildung 7.19.



**Abbildung 7.24** Zeitlicher Verlauf der mittleren quadratischen transversalen Relativgeschwindigkeit bzw. der Separationsgeschwindigkeit (eingesetzter Graph) im zweidimensionalen MHD-Fall für Teilchenpaare mit einem Anfangsabstand von  $1\Delta x$  für verschiedene Reynoldszahlen; durchgezogene Linie: Simulation 2DFCEHXZ4096, gestrichelte Linie: Simulation 2DFCEHXZ2048, Strich-Punkt-Linie: Simulation 2DFCEHXZ1024.

chenpaare mit einer hohen transversalen Relativgeschwindigkeit werden am schnellsten am Abstandsvektor ausgerichtet, wodurch ihre transversale Relativgeschwindigkeit sinkt. Die exponentiellen Flügel, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung der transversalen Relativgeschwindigkeit zum Startzeitpunkt aufweist, werden dadurch auf kurzen Zeitskalen „abgebaut“. Ab etwa  $1\tau_{\eta}$  steigt die Flachheit von  $P(U_{\perp})$  wieder, was auf das intermittente Wachstum des Teilchenabstandes zurückzuführen ist. Der weitere Verlauf der Flachheit folgt dem Verhalten der Flachheit von  $P(R)$ .

### 7.2.3 Zweidimensionaler Fall

Im zweidimensionalen Fall beobachtet man für die Relativgeschwindigkeit der Teilchen im Wesentlichen das gleiche Verhalten wie im makroskopisch isotropen dreidimensionalen MHD-Fall. Bis etwa  $2\tau_{\eta}$  beobachtet man eine Ausrichtung des Abstandsvektors an der Relativgeschwindigkeit, die mit einer Abnahme der transversalen Relativgeschwindigkeit und einer Zunahme der Separationsgeschwindigkeit einhergeht (siehe Abbildung 7.24). Von  $2\tau_{\eta}$  bis etwa  $10\tau_{\eta}$  beobachtet man wie im dreidimensionalen Fall eine Phase zunehmender Dekorrelation zwischen Abstandsvektor und Relativgeschwindigkeit und gleichzeitig eine zunehmende Ausrichtung des Abstandsvektors entlang des lokalen mittleren Magnetfelds. Ab etwa  $10\tau_{\eta}$  verweilt der Winkelmittelwert von  $\beta$  auf einem ungefähr konstanten, positiven Wert. Auf langen Zeitskalen sinkt der Winkelmittelwert von  $\beta$  weiter ab, wobei diese zweite Dekorrelationsphase mit zunehmender Reynoldszahl später einsetzt.

Auch die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der transversalen und longitudina-

len Komponente der Relativgeschwindigkeit zeigt eine ähnliche Zeitabhängigkeit wie im dreidimensionalen MHD-Fall. Die Maximalwerte der Flachheit und Schiefe dieser Verteilungen nehmen mit der Reynoldszahl zu. Insgesamt weisen die Daten im zweidimensionalen Fall sehr viel stärkere Fluktuationen auf. Dies ist eine Folge der Tatsache, dass durch die Reduktion auf zwei Dimensionen die Energie im Inertialbereich auf sehr viel weniger Fouriermoden verteilt ist als im dreidimensionalen Fall. Da zu einer Wellenzahl und damit auch zu der entsprechenden Längenskala über weniger Fouriermoden gemittelt wird, fallen die zeitlichen Schwankungen entsprechend stärker aus.



# 8 Eigenschaften der Teilchentrajektorien

Die intermittente Natur des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes könnte einen zu der Annahme verleiten, dass die Trajektorien der Testteilchen eine fraktale Gestalt haben. Jedoch hat die Messung der Trajektorien in Experimenten (siehe z. B. [90, 73]) und numerischen Simulationen gezeigt, dass die Trajektorien weitgehend glatt sind. Einen besonderen Verlauf zeigen die Trajektorien in der Nähe der charakteristischen Strukturen hoher Intensität des Vortizitätsfeldes, den Wirbelfilamenten und Wirbelschichten. Der Vorteil numerischer Simulationen ist, dass ohne großen Zusatzaufwand entlang der Trajektorien noch weitere Größen wie z. B. die Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes berechnet werden können, die in Experimenten nur schwer zugänglich sind.

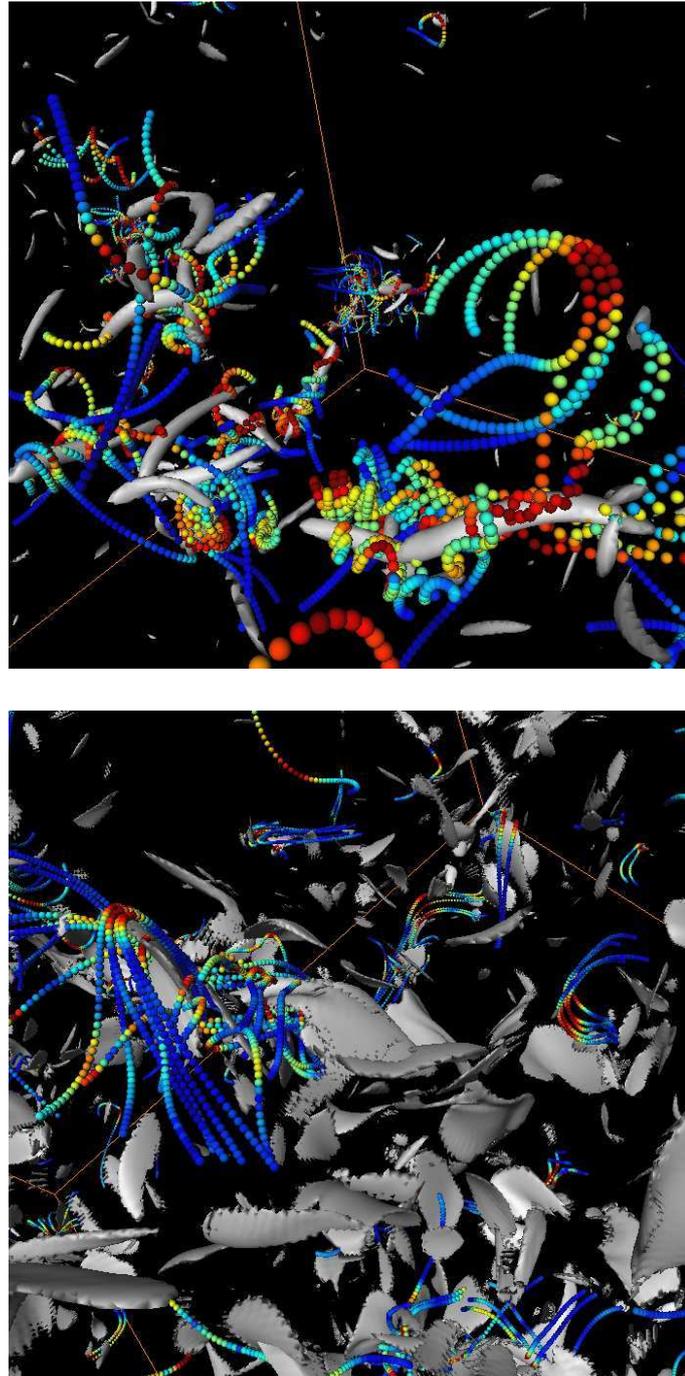
Über Größen wie die Beschleunigung und die Krümmung versucht man, die Trajektorien auch im quantitativen Sinne zu charakterisieren. Dabei ergeben sich jedoch Schwierigkeiten, da auch Eigenschaften der Strömung, die nicht Turbulenz-spezifisch sind, großen Einfluss auf diese Größen haben.

## 8.1 Beispiele für Teilchentrajektorien

Die Geschwindigkeit eines Testteilchens setzt sich aus Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes aller Längen- bzw. Zeitskalen zusammen. Den größten Beitrag liefern die räumlich und zeitlich nur langsam variierenden großskaligen Geschwindigkeitsfluktuationen des integralen Skalenbereiches. Deswegen ändert sich die Geschwindigkeit eines Testteilchens in der Regel relativ langsam, und die Teilchentrajektorien sind weitgehend glatt. An den Orten, wo das Geschwindigkeitsfeld hohe Gradienten aufweist, können die Testteilchen jedoch stark beschleunigt werden. Nicht nur die räumlichen Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes nehmen Einfluss auf die Beschleunigung eines Testteilchens, sondern auch seine Zeitentwicklung. So können auch schnell ablaufende Ereignisse, wie z. B. die Ausbreitung einer Alfvén-Welle entlang eines starken mittleren Magnetfeldes, hohe Teilchenbeschleunigungen und damit auch eine Verformung der Trajektorien zur Folge haben.

Zu den Orten hoher Geschwindigkeitsgradienten gehören die Wirbelfilamente und Wirbelschichten (siehe Kapitel 5.3). In der Nähe dieser Strukturen hoher Wirbelstärke können die Teilchen stark beschleunigt werden und in einer charakteristischen Weise von ihren ansonsten glatten Bahnen abweichen. In Abbildung 8.1 kann man sehen, dass die höchsten Beschleunigungen der Testteilchen vor allem um die Wirbelfilamente und -schichten auftreten. Hohe Geschwindigkeitsgradienten sind auch an Orten hoher Werte der lokalen kinetischen Energiedissipationsrate zu finden. Diese Bereiche fallen jedoch ungefähr mit den Bereichen hoher Wirbelstärke zusammen [92].

Im Folgenden werden einige Trajektorien besprochen, bei denen das charakteristische Verhalten um die Strukturen des Vortizitätsfeldes besonders klar zu Tage tritt. Bei der Auswahl der Beispiel-Trajektorien wurde darauf geachtet, dass man das typische Verhalten besonders deutlich sieht. Da Wirbelfilamente und Wirbelschichten im Allgemeinen nicht



**Abbildung 8.1** Trajektorien hoch beschleunigter Testteilchen. Die Testteilchen erreichen zum Auswahlzeitpunkt  $t_s$  eine Beschleunigung von mehr als  $7\langle A^2 \rangle^{1/2}$  (Navier-Stokes-Fall, links, Simulation NVFOU512N3) bzw.  $4\langle A^2 \rangle^{1/2}$  (makroskopisch isotroper MHD-Fall, rechts, Simulation B0FOU512N3). Die Trajektorien werden jeweils für ein Zeitintervall von ungefähr  $[t_s - 6\tau_\eta, t_s + 6\tau_\eta]$  dargestellt. Die Trajektorienpunkte sind der absoluten Beschleunigung der Teilchen entsprechend eingefärbt (rot: hohe Werte der Beschleunigung; blau: niedrige Werte der Beschleunigung). Ebenfalls dargestellt werden die Wirbelfilamente bzw. Wirbelschichten zum Zeitpunkt  $t_s$  (grau).

isoliert auftreten, kann sich oft auch ein deutlich komplizierteres Verhalten ergeben. In der folgenden Darstellung wird manchmal verkürzt von der Auswirkung der Strukturen des Vortizitätsfeldes auf die Testteilchen gesprochen. Jedoch sind sowohl die Trajektorien der Testteilchen als auch die Wirbelschichten bzw. -filamente keine aktiven Mitspieler, sondern passive Signaturen der Strömungsverhältnisse. Deshalb sollte die anschauliche Darstellung nicht zu wörtlich genommen werden.

Für die Erstellung der Bilder wurde eine Wirbelschicht bzw. ein Wirbelfilament zu einen Zeitpunkt  $t_s$  ausgewählt. Anschließend wurden Teilchen bestimmt, die sich zu diesem Zeitpunkt in der Nähe dieser Schicht befinden. Die Trajektorien dieser Teilchen werden für ein Zeitintervall, das um den Auswahlzeitpunkt zentriert ist, dargestellt. Die Wirbelschichten und -filamente entwickeln sich während dieser Zeit ebenfalls fort. Deswegen weichen die Trajektorien von den Stromlinien um die Strukturen zum Zeitpunkt  $t_s$  ab. Es werden auch nicht alle vorhandenen Trajektorienpunkte im gewählten Zeitintervall dargestellt, sondern nur etwa jeder zweite bis vierte, um die Darstellung übersichtlich zu halten.

Im Navier-Stokes-Fall beobachtet man, dass manche Teilchen um Wirbelfilamente ungefähr spiralförmigen Bahnen folgen [14]. In Abbildung 8.2 ist eine solche Teilchenbahn dargestellt. Die Teilchenbahn geht mit hohen Fluktuationen der Komponenten der Teilchengeschwindigkeit einher, die durch die hohe Zentripetal-Beschleunigung (siehe Abschnitt 8.2.1) verursacht werden. Auch die longitudinale Beschleunigung nimmt beträchtliche Werte an. Jedoch wird bei weitem nicht jedes Teilchen, das in die Nähe eines Wirbelfilaments kommt, wird von diesem „eingefangen“. Viele Teilchen werden in der Nähe eines Wirbelfilaments auch nur etwas abgelenkt (siehe Abbildung 8.3).

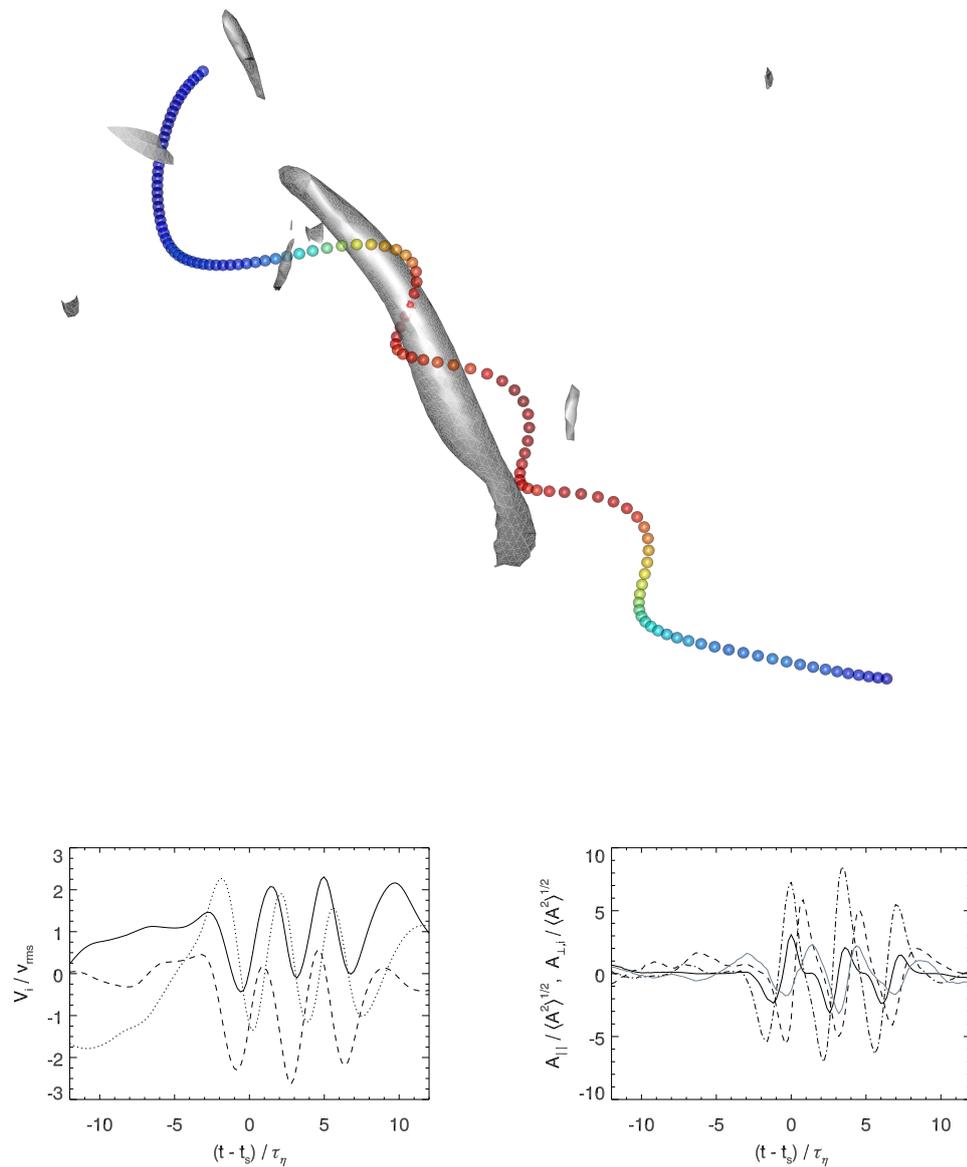
Im makroskopisch isotropen MHD-Fall beobachtet man, dass Teilchen entlang von Wirbelschichten beschleunigt werden (siehe Abbildung 8.4). Hierbei tritt neben einer hohen longitudinalen Beschleunigung auch eine hohe Zentripetal-Beschleunigung auf, weil sich die Testteilchen in der Regel unter einem endlichen Anstellwinkel auf die Schichten zubewegen. Wirbelschichten treten in der Regel nicht allein auf, sondern in Gruppen, die sich um eine Stromschicht legen<sup>1</sup>. Teilchen, die sich im Einflussbereich mehrerer Schichten befinden, zeigen oft sehr scharfe Knicke (siehe Abbildung 8.5).

Im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfeldes sind die Wirbelschichten in Richtung des mittleren Magnetfeldes ausgerichtet. Obwohl sich die Teilchen bevorzugt in der Richtung des mittleren Magnetfeldes ausbreiten, wie man am höheren Wert von  $v_{\parallel, \text{rms}}$  im Vergleich zu  $v_{\perp, \text{rms}}$  ablesen kann (siehe Tabellen 5.1 und 5.2 in Kapitel 5), treten die höchsten Beschleunigungen bevorzugt bei Teilchen auf, die sich in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld bewegen (siehe Abbildung 8.6). Dies lässt sich mit der starken Intermittenz der turbulenten Felder in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld [94] begründen. Hohe Beschleunigungen findet man im anisotropen MHD-Fall nicht nur in der Nähe der Wirbelschichten. Hohe Beschleunigungen können auch durch die großskaligen Alfvén-Wellen hervorgerufen werden, die bei Verwendung des stochastischen Antriebs angeregt werden<sup>2</sup>.

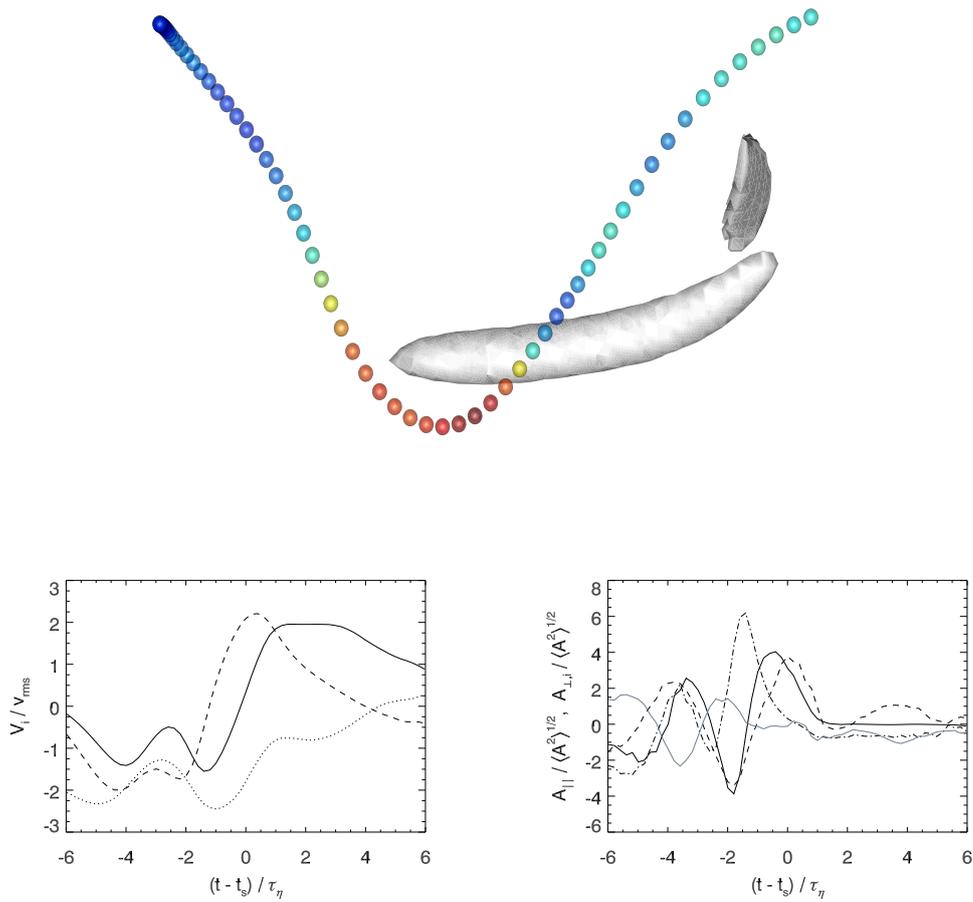
Im zweidimensionalen Fall treten die Ereignisse höchster Beschleunigung in Form von

<sup>1</sup>In einer idealisierten Konfiguration legen sich vier Wirbelschichten quadrupolartig um eine Stromschicht. Diese Reinform findet man jedoch nur in zerfallender Turbulenz [105].

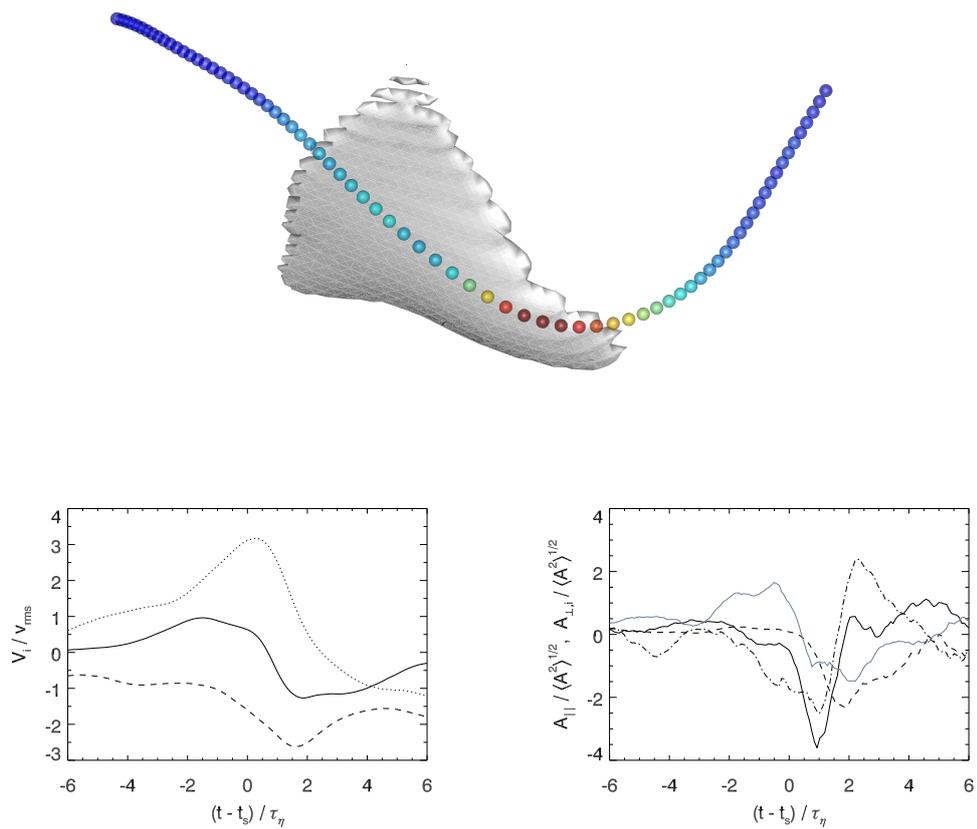
<sup>2</sup>Am Punkt der maximalen Auslenkung durch eine Alfvén-Welle erfährt ein Testteilchen im eindimensionalen Fall eine longitudinale Beschleunigung von  $V_0 \omega_A$  wobei hier  $V_0$  die Amplitude der betreffenden Alfvén-Welle bezeichnet.



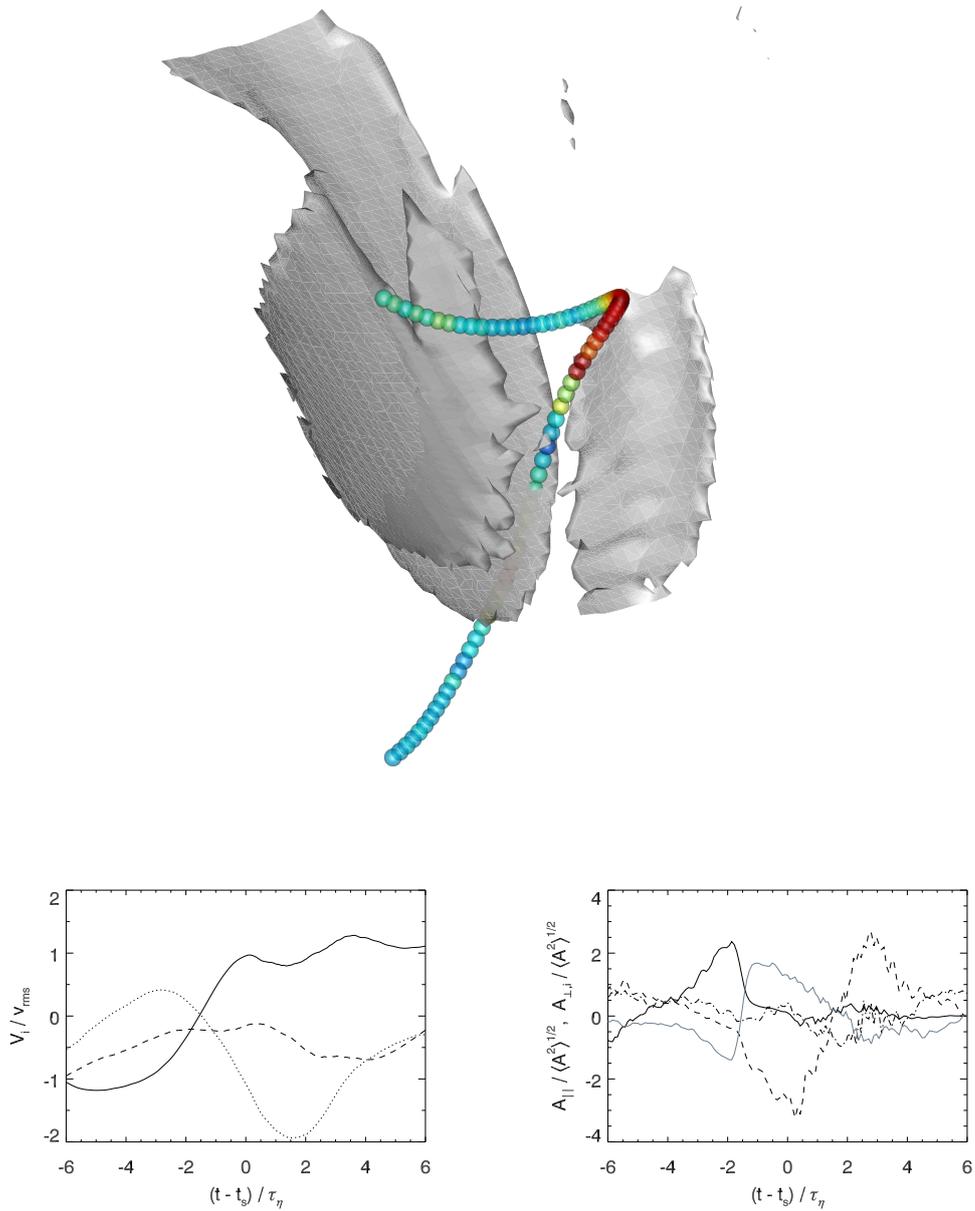
**Abbildung 8.2** Oben: Trajektorie um ein Wirbelfilament (Navier-Stokes-Fall), erstes Beispiel. Die Trajektorie beginnt im Bild oben links. Das Wirbelfilament ist in grauer Farbe dargestellt, die Farben der Trajektorienpunkte: blau für niedrige Werte, rot für hohe Werte der Beschleunigung. Unten rechts: Geschwindigkeit des Teilchens entlang der dargestellten Trajektorie  $V_x$ : durchgezogene Linie,  $V_y$ : gepunktete Linie,  $V_z$ : gestrichelte Linie. Unten links: Longitudinale (graue Linie) und zentripetale (schwarze Linien, Linienstile wie Geschwindigkeit) Komponenten der Beschleunigung entlang der dargestellten Trajektorie. Daten aus der Simulation NVFOU512N3.



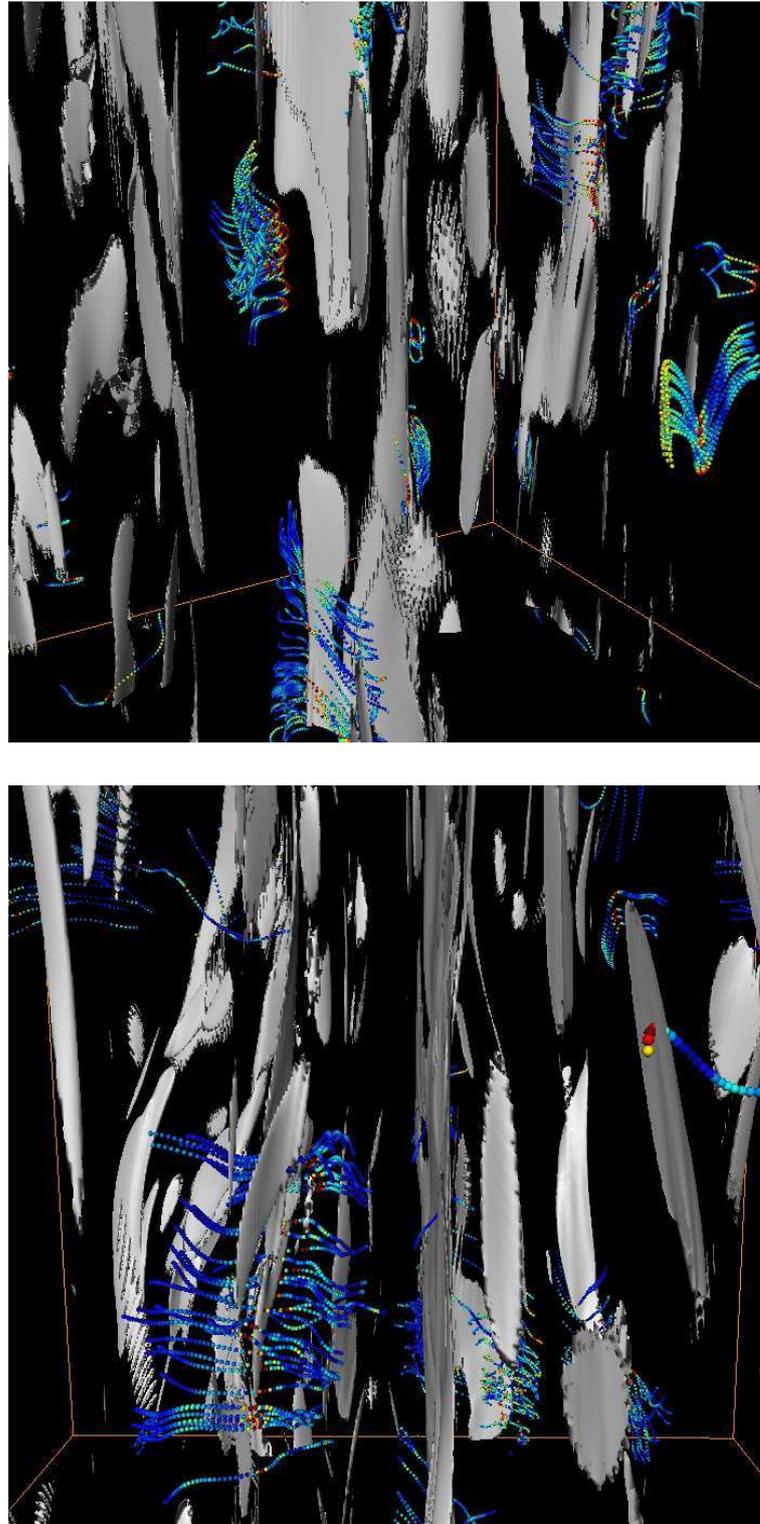
**Abbildung 8.3** Trajektorie um ein Wirbelfilament (Navier-Stokes-Fall), zweites Beispiel. Die Trajektorie beginnt rechts oben. Darstellung wie in Abbildung 8.2. Daten aus der Simulation NVFOU512N3.



**Abbildung 8.4** Trajektorie in der Nähe einer Wirbelschicht (makroskopisch isotroper MHD-Fall), erstes Beispiel. Die Trajektorie beginnt im Bild links oben. Darstellung wie in Abbildung 8.2. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.



**Abbildung 8.5** Trajektorie in der Nähe mehrerer Wirbelschichten (makroskopisch isotroper MHD-Fall), zweites Beispiel. Die Trajektorie beginnt im Bild oben. Darstellung wie in Abbildung 8.2. Daten aus der Simulation B0FOU512N3.



**Abbildung 8.6** Teilchentrajektorien stark beschleunigter Teilchen im anisotropen MHD-Fall bei Verwendung des stochastischen Antriebs (oben, Simulation B5REFOU512N3) bzw. des Antriebs mit Modeneinfrieren (unten, Simulation B5FRZ512N3). Die Testteilchen erreichen zum Zeitpunkt der Darstellung der Wirbelstrukturen  $t_s$  eine Beschleunigung von mehr als  $3\langle A^2 \rangle^{1/2}$  (stochastischer Antrieb) bzw.  $5\langle A^2 \rangle^{1/2}$  (Modeneinfrieren). Die Teilchentrajektorien werden jeweils für das Zeitintervall  $[t_s - 6\tau_\eta, t_s + 6\tau_\eta]$  dargestellt. In der oberen Abbildung oben links ist eine Gruppe von Teilchen sichtbar, die wahrscheinlich durch eine großskalige Alfvén-Welle stark beschleunigt werden. Farben wie in Abbildung 8.1.

Beschleunigung entlang der Trajektorie und in Form von Knicken in der Trajektorie auf. Ereignisse hoher Beschleunigung häufen sich an Orten hoher Wirbelstärke, treten aber nicht nur dort auf.

### Zusammenhang zwischen Teilchentrajektorien und Strukturfunktionen

Wie bereits in Kapitel 6.3 dargestellt wurde, zeigen die Lagrangeschen Strukturfunktionen im MHD-Fall eine schwächere Intermittenz als im Navier-Stokes-Fall. Ein genau umgekehrtes Verhalten beobachtet man für die Eulerschen Strukturfunktionen. Hier weisen die Strukturfunktionen im MHD-Fall eine höhere Intermittenz auf als im Navier-Stokes-Fall. Die höhere Intermittenz der turbulenten Felder im MHD-Fall wird im Rahmen eines She-Levêque-Modells durch die höhere Dimensionalität der Strukturen des Wirbel- und Stromdichtefeldes<sup>3</sup> begründet [93]. Deshalb liegt es nahe, auch die Unterschiede der Lagrangeschen Strukturfunktionen auf die unterschiedliche Form der Strukturen des Vortizitätsfeldes im Navier-Stokes- und MHD-Fall zurückzuführen.

An Hand der Trajektorien um die Wirbelschichten und -filamente kann man sich einige mögliche Ursachen für die stärkere Intermittenz der Lagrangeschen Strukturfunktionen im Navier-Stokes-Fall überlegen. Ein Teilchen, das in den Einflussbereich einer Wirbelschicht gelangt, erfährt im Wesentlichen ein großes Geschwindigkeitsinkrement. Dagegen treten während einer Spiralbahn, die ein Teilchen um ein Wirbelfilament verfolgen kann, mehrere hohe Geschwindigkeitsinkremente auf (ein besonders extremes Beispiel ist z. B. in [15] dargestellt). Eine transversale Beschleunigung der Teilchen, die im Navier-Stokes-Fall bevorzugt auftritt (siehe unten), führt zu hohen Inkrementen in zwei unabhängigen Geschwindigkeitskomponenten, während eine longitudinale Beschleunigung lediglich ein unabhängiges Geschwindigkeitsinkrement verursacht. Im Navier-Stokes-Fall treten also insgesamt mehr extreme Inkremente auf, und die Lagrangeschen Strukturfunktionen sind somit intermittenter.

Ein weiterer möglicher Einflussfaktor könnte auch der Einflussbereich der intermittenten Strukturen sein. Eine Wirbelschicht kann vereinfacht als Fläche, also als eine zweidimensionale Struktur, gesehen werden. Ein Wirbelfilament kann dagegen als Strich oder Faden, also als eine eindimensionale Struktur, gesehen werden. Wie man sich leicht überlegen kann, ist es einfacher, durch einen „Wald“ von zufällig angeordneten Strichen zu gelangen, als ein durch einen Wald von zufällig angeordneten Flächenstückchen. Dass ein Teilchen also von einer Wirbelschicht abgelenkt wird, ist also nichts ausgesprochen Besonderes. Die hohen Geschwindigkeitsinkremente um Wirbelschichten weichen daher nicht so stark vom quadratischen Mittelwert der Geschwindigkeitsinkremente ab. Der Einfang eines Teilchens durch ein Wirbelfilament ist dagegen weniger wahrscheinlich. In Bezug auf den quadratischen Mittelwert treten daher in diesem Fall die hohen Geschwindigkeitsinkremente um die Filamente bei höheren Werten auf.

Beide Erklärungsversuche gehen von sehr stark vereinfachenden Modellvorstellungen aus. So wird bei der ausschließlichen Betrachtung der Einzelereignisse um die Strukturen des Vortizitätsfeldes vernachlässigt, wie häufig diese in der Strömung auftreten. Bei der geometrischen Betrachtung der Wirbelschichten und Wirbelfilamente wird die lokale Ausformung der Strömung und die Lebenszeit dieser Strukturen nicht berücksichtigt. Eine

<sup>3</sup>Schichten werden als zweidimensional, Filamente als eindimensional angesehen.

	$\langle A^2 \rangle^{1/2}$	$\frac{\langle A_z^2 \rangle + \langle A_y^2 \rangle}{2\langle A^2 \rangle}$	$\langle A_z^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$	$\langle A_{\parallel}^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$	$\langle A_{\perp}^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$
$\mathbf{V}$ und $\mathbf{A}$ stat. unabh.			1/3	2/3	
NVFOU512N3	3.3	0.33	0.33	0.24	0.76
NVFOU1024N3	5.0	0.33	0.33	0.25	0.75
B0FOU512N3	2.6	0.33	0.33	0.33	0.67
BOFOU1024N3	3.7	0.33	0.33	0.33	0.66
B5REFOU512N3	2.8	0.32	0.36	0.36	0.64
B5FRZ512N3	3.5	0.29	0.42	0.31	0.69
B5FRZ1024N3	5.5	0.29	0.42	0.33	0.67

**Tabelle 8.1** Komponenten der Beschleunigung im dreidimensionalen MHD-Fall.

genauere Untersuchung des Zusammenhanges zwischen der Lagrangeschen Intermittenz und den Wirbelflächen bzw. Wirbelfilamenten sollte daher beide Aspekte, die einzelnen Ereignisse lokal um individuelle Schichten und Filamente, sowie die Häufigkeit und den tatsächlichen Einflussbereich der Schichten und Filamente in der gesamten Strömung, berücksichtigen.

## 8.2 Analyse

Die Form einer Trajektorie wird im Wesentlichen durch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Testteilchens bestimmt.

### 8.2.1 Beschleunigung

Die Beschleunigung eines Testteilchens kann in einen longitudinalen und einen zentripetalen Anteil bezüglich seiner Geschwindigkeit aufgeteilt werden

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0, t) = A_{\parallel} \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} + \mathbf{A}_{\perp}. \quad (8.1)$$

Der longitudinale Anteil sorgt für eine Zunahme bzw. Abnahme der Teilchengeschwindigkeit. Der zentripetale Anteil verursacht eine Ablenkung von einer geraden Teilchenbahn.

### Mittelwerte

Wenn die Richtung der Beschleunigung unabhängig von der Richtung der Teilchengeschwindigkeit wäre, so sollte sich im dreidimensionalen Fall ein Verhältnis von 2 : 1 für die quadratischen Mittelwerte der zentripetalen und longitudinalen Beschleunigung ergeben, weil auf den zentripetalen Anteil zwei unabhängige Komponenten der Beschleunigung entfallen. In Tabelle 8.1 sind die entsprechenden Werte für die durchgeführten dreidimensionalen Simulationen aufgelistet.

Im Navier-Stokes-Fall ist die transversale Beschleunigung gegenüber der longitudinalen bevorzugt (siehe auch [140]). Dies ist ein Hinweis auf einen höheren Anteil von gekrümmten bzw. spiralförmigen Bahnen. In den verschiedenen untersuchten Konfigurationen dreidimensionaler MHD-Turbulenz verteilt sich die Beschleunigung annähernd im Verhältnis

	$\langle A^2 \rangle^{1/2}$	$\langle A_{\parallel}^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$	$\langle A_{\perp}^2 \rangle / \langle A^2 \rangle$
$\mathbf{V}$ und $\mathbf{A}$ stat. unabhängig (2D)		1/2	1/2
2DFCEHXZ1024	6.9	0.52	0.48
2DFCEHXZ2048	10.2	0.53	0.47
2DFCEHXZ4096	14.6	0.54	0.46

**Tabelle 8.2** Quadratischer Mittelwert wie longitudinaler und transversaler Anteil der Beschleunigung im zweidimensionalen MHD-Fall.

2 : 1 auf den transversalen und longitudinalen Anteil. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, dass im MHD-Fall kaum spiralförmige Bahnen auftreten. Im anisotropen MHD-Fall ist die Komponente der Beschleunigung in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung höher als in den Richtungen senkrecht dazu. Dies lässt sich zum Teil damit erklären, dass auch die Fluktuationen der  $z$ -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auf allen Längenskalen größer ist als die der  $x$  bzw.  $y$ -Komponente.

Aus den Simulationen für den zweidimensionalen MHD-Fall ersieht man, dass der quadratische Mittelwert der Beschleunigung mit der Reynoldszahl zunimmt (siehe Tabelle 8.2). Dies ist eine Folge davon, dass mit zunehmender Reynoldszahl der Inertialbereich zu immer kürzeren Zeit- und Längenskalen erweitert wird. Nachdem die Beschleunigung der Teilchen wesentlich durch die kleinsten turbulenten Eddies bestimmt wird, nimmt sie mit abnehmender Größe der kleinsten Eddies im Mittel zu<sup>4</sup>.

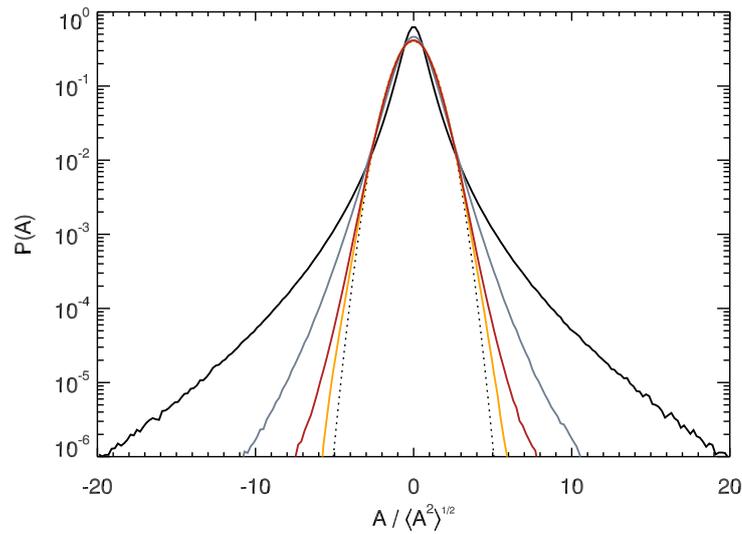
Im zweidimensionalen Fall sollte sich die Beschleunigung, falls sie von der Richtung Geschwindigkeitsvektors unabhängig ist, gleich auf den longitudinalen und zentripetalen Anteil aufteilen. Dies ist auch ungefähr erfüllt.

### Wahrscheinlichkeitsverteilungen

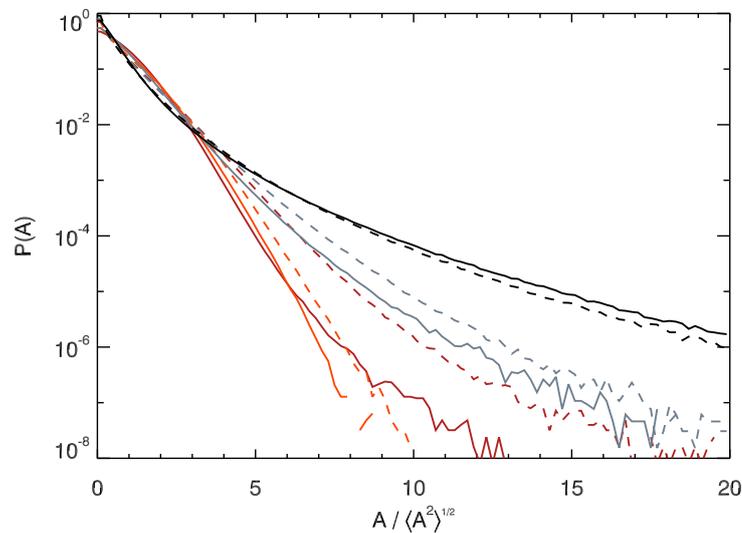
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beschleunigung (siehe Abbildung 8.7) spiegelt die Beobachtungen wieder, die schon bei den Lagrangeschen Strukturfunktionen gemacht wurden (siehe Kapitel 6.3). Im Navier-Stokes-Fall hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung sehr viel ausgeprägtere exponentiell abfallende Flügel als im MHD-Fall, und ist somit weitaus intermittenter. Im anisotropen MHD-Fall ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beschleunigungskomponenten in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld weniger intermittent als im makroskopisch isotropen MHD-Fall, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Beschleunigungskomponente folgt fast einer Normalverteilung.

Betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der longitudinalen und zentripetalen Komponenten der Beschleunigung (siehe Figur 8.8), so beobachtet man, dass im Navier-Stokes-Fall die Wahrscheinlichkeitsverteilung der zentripetalen Beschleunigung etwas intermittenter ist als die der longitudinalen [16]. Der Unterschied ist allerdings sehr schwach. Im MHD-Fall kann man ein umgekehrtes Verhalten beobachten: hier ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der longitudinalen Komponente intermittenter. Am stärksten ausgeprägt ist dieser Unterschied im anisotropen MHD-Fall für die Komponenten der longitudinalen und transversalen Beschleunigung in der Ebene senkrecht zum mittleren Magnetfeld. Dies könnte im Zusammenhang mit Alfvénischen Fluktuationen stehen.

<sup>4</sup>Auch das Verhältnis von  $u_{\eta}$  zu  $\tau_{\eta}$ , das man als „Dissipationbeschleunigungsskala“ ansehen kann, nimmt mit der Reynoldszahl zu.



**Abbildung 8.7** Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beschleunigung (x-Komponente) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes (schwarz) und MHD-Fall (grau). Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beschleunigung im MHD-Fall mit starkem mittleren Magnetfeld: Komponente senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$  (dunkelrot) und Komponente parallel  $\mathbf{B}_0$  (orange). Die dünne gepunktete Linie zeigt eine Normalverteilung an. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3, B0FOU512N3 und B5REFOU512.



**Abbildung 8.8** Wahrscheinlichkeitsverteilung der longitudinalen (gestrichelte Linien) und zentripetalen (durchgezogene Linien) Beschleunigung (x-Komponente) im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes (schwarz) und MHD-Fall (grau). Wahrscheinlichkeitsverteilung der longitudinalen und zentripetalen Beschleunigung im anisotropen MHD-Fall: Komponenten senkrecht zu  $\mathbf{B}_0$  (dunkelrot) und parallel zu  $\mathbf{B}_0$  (orange). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3, B0FOU512N3 und B5REFOU512.

Durch eine Alfvén-Welle, die sich entlang des mittleren Magnetfeldes ausbreitet, wird ein Teilchen in der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Richtung ausgelenkt und erfährt dadurch vor allem eine starke longitudinale Beschleunigung.

Im zweidimensionalen MHD-Fall ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beschleunigung ebenfalls stark intermittent, d. h. sie zeigt stark ausgeprägte exponentiell abfallende Flügel. In der Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zentripetalen und der longitudinalen Komponente der Beschleunigung bestehen nur geringfügige Unterschiede. Mit zunehmender Reynoldszahl nimmt die Intermittenz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu.

### Zeitkorrelation

Die Autokorrelationsfunktion der Komponenten der Beschleunigung zeigt auf kurzen Zeitskalen einen schnellen Abfall, um dann nach einem Nulldurchgang niedrige negative Werte anzunehmen, bis die Autokorrelationsfunktion schließlich auf Null zurückgeht (siehe Abbildungen 6.2 und 6.5, Kapitel 6.1). Dieser zeitliche Verlauf ist im Wesentlichen durch die Tatsache vorgegeben, dass die Komponenten der Beschleunigung eine verschwindende integrale Zeitskala besitzen. Die integrale Zeitskala der Beschleunigungskomponenten verschwindet, da die Beschleunigung als die Zeitableitung einer stationären stochastischen Funktion (nämlich der Teilchengeschwindigkeit) angesehen werden kann [135]. Dies kann man z. B. mit Hilfe der Lagrangeschen Frequenzspektren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung zeigen

$$\begin{aligned} T_{A_i} &= \int_0^\infty \rho_{A_i}(\tau) d\tau = \frac{1}{\langle A_i^2 \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_i^L(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega d\tau = \\ &= \frac{1}{\langle A_i^2 \rangle} \int_0^\infty \int_0^\infty E_i^L(\omega) \omega^2 \cos(\omega\tau) d\tau d\omega = \frac{2\pi}{\langle A_i^2 \rangle} \int_0^\infty \delta(\omega) E_i^L(\omega) \omega^2 d\omega = 0. \end{aligned}$$

Die Zeit des ersten Nulldurchgangs der Autokorrelationsfunktion wird im Folgenden als *Nulldurchgangszeit* bezeichnet. Die Nulldurchgangszeit der Beschleunigung liegt in allen Simulationen um  $\approx 2\tau_\eta$ , im makroskopisch isotropen MHD-Fall ist sie etwas länger, während sie im anisotropen und in den zweidimensionalen MHD-Fällen etwas kürzer ist (siehe Tabelle 8.3). Der Wert der Nulldurchgangszeit ist im Navier-Stokes-Fall von der gleichen Größenordnung wie in Experimenten [90, 129] und anderen numerischen Simulationen [140] gemessene Werte.

Der Absolutbetrag der Beschleunigung bleibt dagegen im Allgemeinen deutlich länger zu seinem Anfangswert korreliert. Die Korrelationszeiten betragen ungefähr die Hälfte bis ein Drittel der entsprechenden Lagrangeschen integralen Zeitskalen (siehe Tabelle 8.3). Die Ursache hierfür ist, dass die Beschleunigung der Teilchen nicht allein den kleinsten turbulenten Eddies verursacht wird, sondern auch von Prozessen beeinflusst wird, die sich auf den integralen Zeitskalen der turbulenten Strömung abspielen [90].

Der makroskopisch isotrope Fall fällt in dieser Hinsicht etwas aus der Reihe, denn hier entspricht die Korrelationszeit des Absolutbetrags der Beschleunigung ungefähr der Nulldurchgangszeit der Beschleunigungskomponenten. Dies könnte eine Folge davon sein, dass im makroskopisch isotropen MHD-Fall das Geschwindigkeitsspektrum einen flacheren Verlauf zeigt (siehe Kapitel 5.2). Auf großen Skalen ist daher - im Vergleich zum

	$T_{ A }^{\text{cor}}/\tau_\eta$	$T_{A_i}^{\text{zc}}/\tau_\eta$
NVFOU512N3	5.6	2.0
NVFOU1024N3	6.8	2.0
B0FOU512N3	2.5	2.5
B0FOU1024N3	3.0	2.8
B5REFOU512N3	5.4	1.9
B5FRZ512N3	4.3	1.2
B5FRZ1024N3	8.7	1.6
2DFCEHXZ1024N3	2.3	1.3
2DFCEHXZ2048N3	3.5	1.3
2DFCEHXZ4096N3	5.9	1.3

**Tabelle 8.3** Nulldurchgangszeit der Komponenten  $T^{\text{zc}}$  und Korrelationszeit  $T^{\text{cor}}$  des Absolutbetrags der Beschleunigung.

Navier-Stokes-Fall und zum anisotropen MHD-Fall - weniger kinetische Energie vorhanden, weshalb die Prozesse des integralen Skalenbereiches einen schwächeren Einfluss auf die Beschleunigung nehmen können.

### 8.2.2 Krümmung

Die Form einer Trajektorie im Raum lässt sich im dreidimensionalen Fall über ihre Krümmung

$$\kappa = \frac{|\mathbf{V} \times \mathbf{A}|}{|\mathbf{V}|^3} \quad (8.2)$$

und ihre Torsion

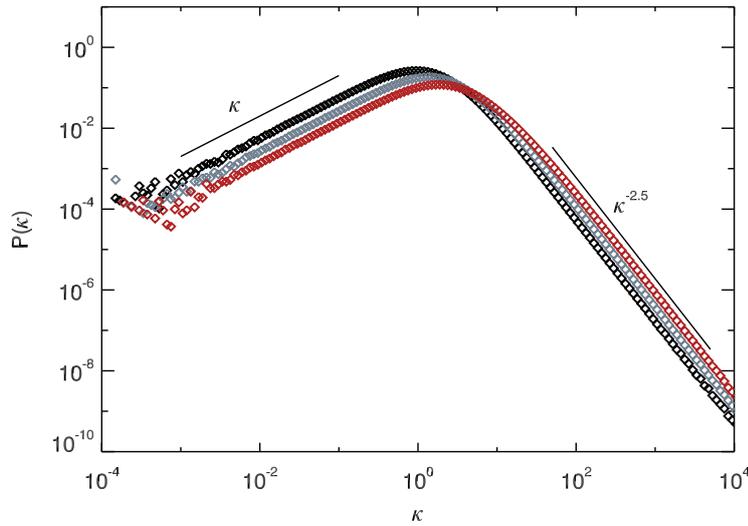
$$\tau_F = \frac{\mathbf{V} \cdot (\mathbf{A} \times \dot{\mathbf{A}})}{(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})^3 \kappa^2} \quad (8.3)$$

parametrisieren (Frenetsche Formeln, siehe z. B. [28, 30]). Der Krümmungsradius einer Kurve im Raum ist gleich dem Inversen der Krümmung  $r_\kappa = 1/\kappa$ .

Für die Berechnung der Torsion ist die Zeitableitung der Beschleunigung  $\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}}$  erforderlich. Diese kann aus dem zeitlichen Verlauf der Beschleunigung nicht mit zufriedenstellender Genauigkeit berechnet werden, da eine zweite numerische Zeit-Differentiation der Geschwindigkeit einen hohen numerischen Fehler zur Folge hat. Deswegen wird die Torsion im Folgenden nicht berücksichtigt.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung wurde im Navier-Stokes-Fall experimentell [133] wie auch numerisch [28] ein charakteristischer Verlauf bei großen und kleinen Werten gefunden. Bei kleinen Werten steigt die Verteilung linear mit ihrem Argument an. Bei großen Werten fällt  $P(\kappa)$  mit  $\kappa^{-5/2}$  ab. Dieses Verhalten wird auch hier für den Navier-Stokes-Fall gefunden (siehe Abbildung 8.9). Interessant ist, dass man denselben qualitativen Kurvenverlauf auch in den dreidimensionalen magnetohydrodynamischen Simulationen beobachten kann. An den Wahrscheinlichkeitsverteilungen kann man



**Abbildung 8.9** Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung im dreidimensionalen, makroskopisch isotropen Navier-Stokes- (schwarze Symbole) und MHD-Fall (graue Symbole), sowie im anisotropen MHD-Fall (dunkelrote Symbole). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3, B0FOU512N3 und B5REFOU512N3.

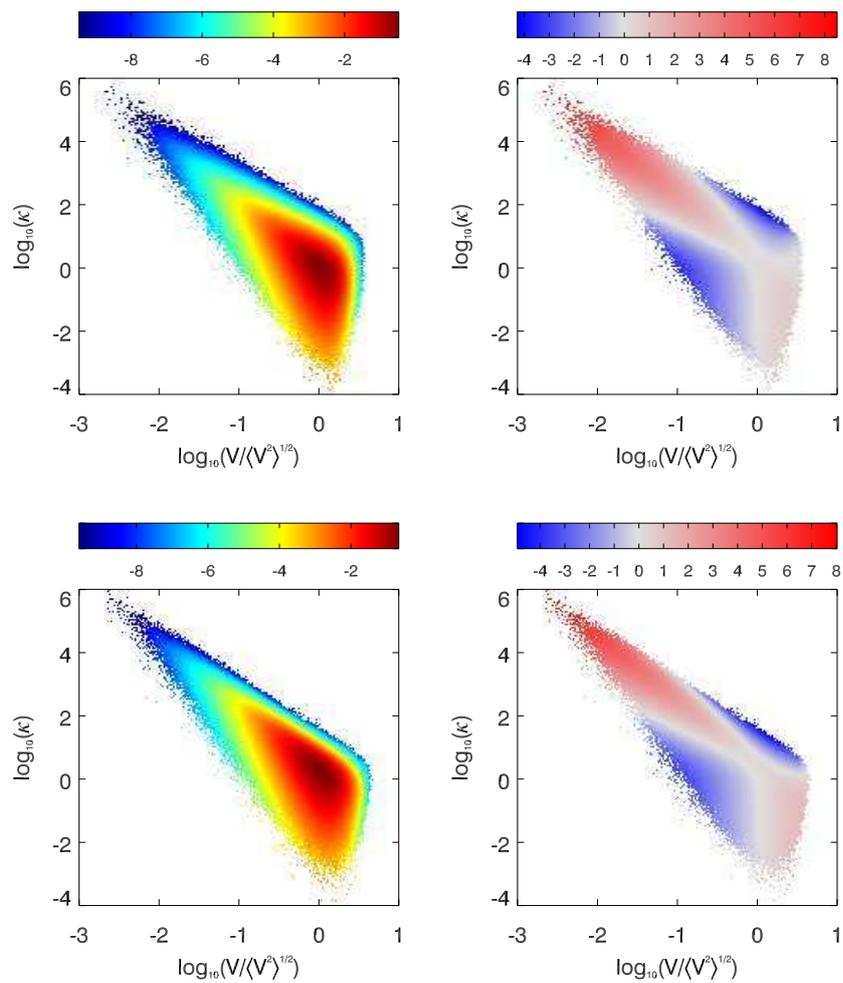
beobachten, dass die Krümmung sehr hohe Werte annehmen kann, die Krümmungsradien entsprechen, die weit kleiner sind als die Dissipationsskala [133].

Der Definition der Krümmung folgend erwartet man, dass hohe Werte der Krümmung mit hohen Werten des Betrags der Zentripetalbeschleunigung und mit niedrigen Werten des Geschwindigkeitsbetrages korreliert sind. Die Korrelation zweier Zufallsvariablen  $u$  und  $w$  kann man z. B. an dem Quotienten

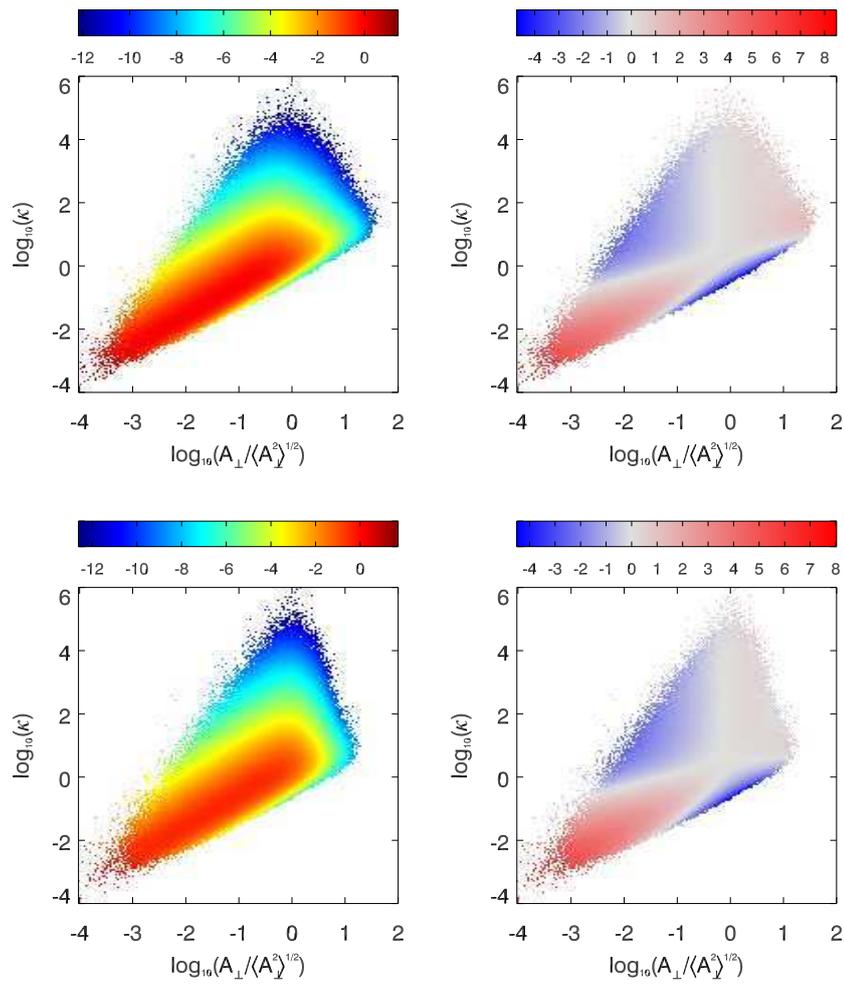
$$Q(u, w) = \log_{10} \left( \frac{P(u, w)}{P(u)P(w)} \right) \tag{8.4}$$

ablesen [133]. Für unabhängige Zufallsvariable  $u$  und  $w$ , d. h.  $P(u, w) = P(u)P(w)$ , ist  $Q(u, w) = 0$ . Positive Werte des Quotienten  $Q(u, w)$  zeigen eine Korrelation von  $u$  und  $w$  an, während negative Werte für eine Antikorrelation stehen.

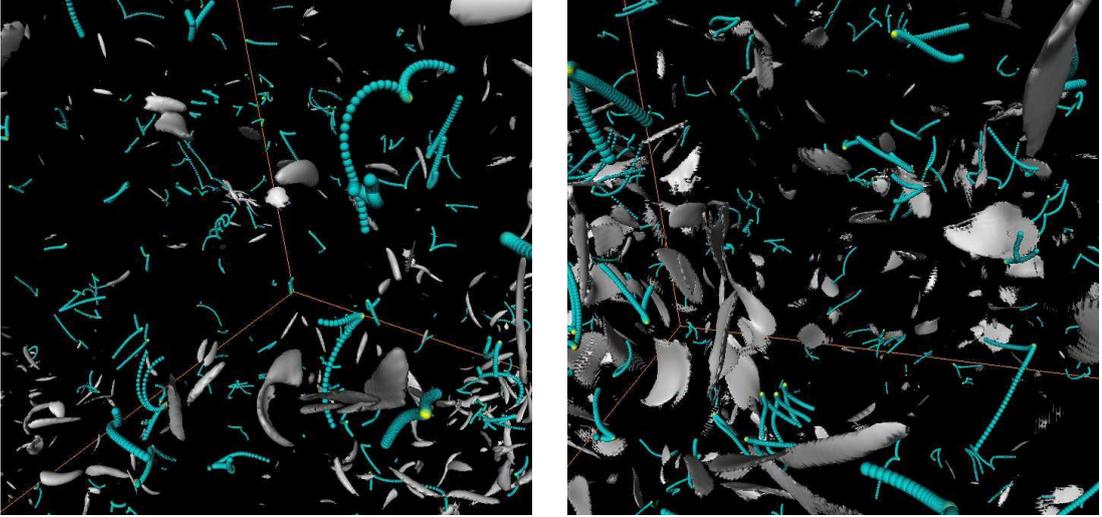
An der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung und dem Wahrscheinlichkeitsquotienten des Betrags der Geschwindigkeit und der Krümmung (siehe Abbildung 8.10) kann man ablesen, dass hohe Werte der Krümmung mit niedrigen Absolutwerten der Geschwindigkeit korreliert sind. Dies trifft sowohl im Navier-Stokes- als auch im MHD-Fall zu. Dagegen sind wider Erwarten hohe Werte der zentripetalen Beschleunigung nur schwach mit hohen Werten der Krümmung korreliert (siehe Abbildung 8.11). Dieses Verhalten lässt sich damit erklären, dass die höchsten Krümmungswerte nicht im Zusammenhang mit den Teilchentrajektorien um Wirbelfilamente oder Schichten stehen, wo hohe Beschleunigungswerte auftreten. Die höchsten Krümmungswerte treten stattdessen dort auf, wo die Geschwindigkeit der Teilchen bei gleichzeitig endlicher Beschleunigung annähernd verschwindet. Dies ist dann der Fall, wenn sich die Strömung an einem Ort umkehrt, d. h.



**Abbildung 8.10**  $\log_{10}(P(\kappa, |V|))$  bzw.  $Q(\kappa, |V|)$  im Navier-Stokes- (oben) und makroskopisch isotropen MHD-Fall (unten). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 8.11**  $\log_{10}(P(\kappa, |A_{\perp}|))$  bzw.  $Q(\kappa, |A_{\perp}|)$  im Navier-Stokes (oben) und makroskopisch isotropen MHD-Fall (unten). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 8.12** Teilchentrajektorien, die zum Zeitpunkt der Auswahl  $t_s$  sehr hohe Werte der Krümmung aufweisen. Die Trajektorien sind der Krümmung entsprechend eingefärbt; türkis entspricht niedrigen Werten der Krümmung, gelb hohen Werten der Krümmung. Linkes Bild: Navier-Stokes-Fall, rechtes Bild: makroskopisch isotroper MHD-Fall.

ein Testteilchen einen kleinen Abschnitt seiner Trajektorie zurückverfolgt [133]. Am Umkehrpunkt verschwindet der Krümmungsradius der Trajektorie annähernd, und die Krümmung nimmt sehr hohe Werte an [133]. Dies kann man tatsächlich beobachten, wenn man die Teilchentrajektorien mit den höchsten Werten der Krümmung betrachtet (siehe Abbildung 8.12). Die hohen Werte der Krümmung treten nur an den Umkehrpunkten der gezeigten Trajektorienabschnitte auf.

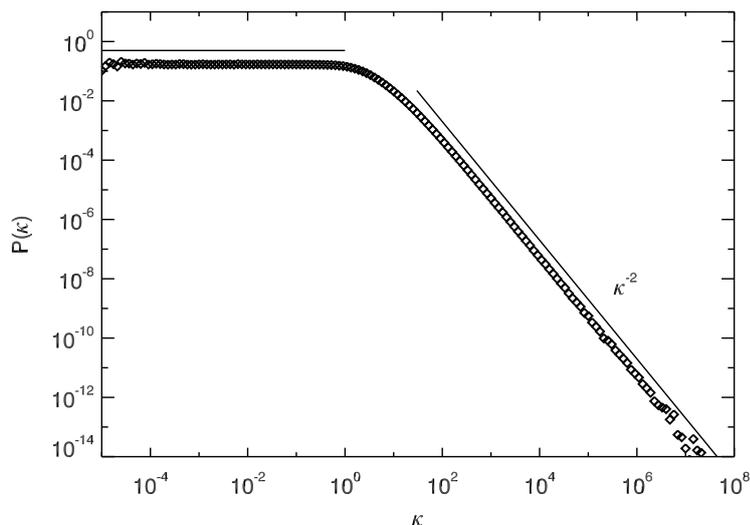
Vor diesem Hintergrund kann man auch das charakteristische Skalierungsverhalten von  $P(\kappa)$  bei kleinen und großen Argumenten im Rahmen eines einfachen Modells begründen, das von *Xu et al.* [133] aufgestellt wurde und im Folgenden erläutert wird. Bei großen Werten sollte die Krümmung wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $V^{-2}$  skalieren ( $\kappa = A_{\perp} V^{-2}$ ). Die Komponenten der Geschwindigkeit sind in statistisch isotroper Turbulenz annähernd normalverteilt und statistisch unabhängig voneinander. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $V^2$  kann daher über eine  $\chi^2$ -Verteilung mit drei Freiheitsgraden genähert werden

$$P_{V^2/\sigma_V^2}(s) = \frac{1}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} s^{1/2} \exp\left(-\frac{s}{2}\right), \quad \text{mit } s = \frac{V^2}{\sigma_V^2}. \quad (8.5)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des inversen Geschwindigkeitsquadrats folgt daraus

$$P_{\sigma_V^2/V^2}(u) = \frac{1}{2^{3/2}\Gamma(3/2)} u^{-5/2} \exp\left(-\frac{1}{2u}\right), \quad \text{mit } u = \frac{\sigma_V^2}{V^2}, \quad (8.6)$$

wobei  $\sigma_V$  die Standardabweichung einer Komponente der Teilchengeschwindigkeit bezeichnet. Im Grenzfall  $u \rightarrow \infty$  skaliert diese Funktion wie  $u^{-5/2}$ . Das Abfallen von  $P(\kappa)$  bei großen Werten lässt sich also im Rahmen eines einfachen Gaußschen statistischen Modells erklären.



**Abbildung 8.13** Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung im zweidimensionalen MHD-Fall. Daten aus der Simulation 2DCEHXZ4096N3.

Ebenso kann man das lineare Ansteigen von  $P(\kappa)$  bei kleinen Werten erklären. Aus dem Wahrscheinlichkeitsquotienten  $Q(\kappa, |A_{\perp}|)$  ersieht man (siehe Abbildung 8.11), dass niedrige Werte der Krümmung stark mit niedrigen Werten des Betrags der Zentripetalbeschleunigung korreliert sind, und dass keine Ereignisse niedriger Krümmung bei kleinen Werten des Geschwindigkeitsbetrages auftreten. Es kann also die Annahme gemacht werden, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung bei niedrigen Werten im Wesentlichen von der Zentripetalbeschleunigung bestimmt wird. Nimmt man an, dass die Komponenten der Zentripetalbeschleunigung ebenfalls normalverteilt<sup>5</sup> und statistisch unabhängig voneinander sind, so folgt die Verteilung von  $A_{\perp}^2$  einer  $\chi^2$ -Verteilung mit zwei Freiheitsgraden, da die Zentripetalbeschleunigung zwei unabhängige Komponenten besitzt. Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $|A_{\perp}|$  ergibt sich hiermit

$$P_{|A_{\perp}|/\sigma_{A_{\perp}}}(w) = w \exp(-w^2/2), \quad \text{mit } w = \frac{|A_{\perp}|}{\sigma_{A_{\perp}}}. \quad (8.7)$$

Hierbei ist  $\sigma_{A_{\perp}}$  die Standardabweichung einer der beiden unabhängigen Komponenten der zentripetalen Beschleunigung. Im Grenzfall  $w \rightarrow 0$  steigt diese Funktion linear an, womit das lineare Ansteigen von  $P(\kappa)$  bei kleinen Werten von  $\kappa$  begründet wäre.

### Zweidimensionaler Fall

Im zweidimensionalen Fall zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung ebenfalls einen charakteristischen Verlauf (siehe Abbildung 8.13). Bei kleinen Werten der Krümmung ist sie konstant, während sie bei hohen Werten mit  $\kappa^{-2}$  abfällt. Dieses Skalierungsverhalten kann man ebenfalls im Rahmen des oben beschriebenen Gaußschen

<sup>5</sup>Diese Annahme ist eigentlich nicht gerechtfertigt, nachdem bereits oben gezeigt wurde, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $P(A_{\perp,i})$  stark intermittiert ist.

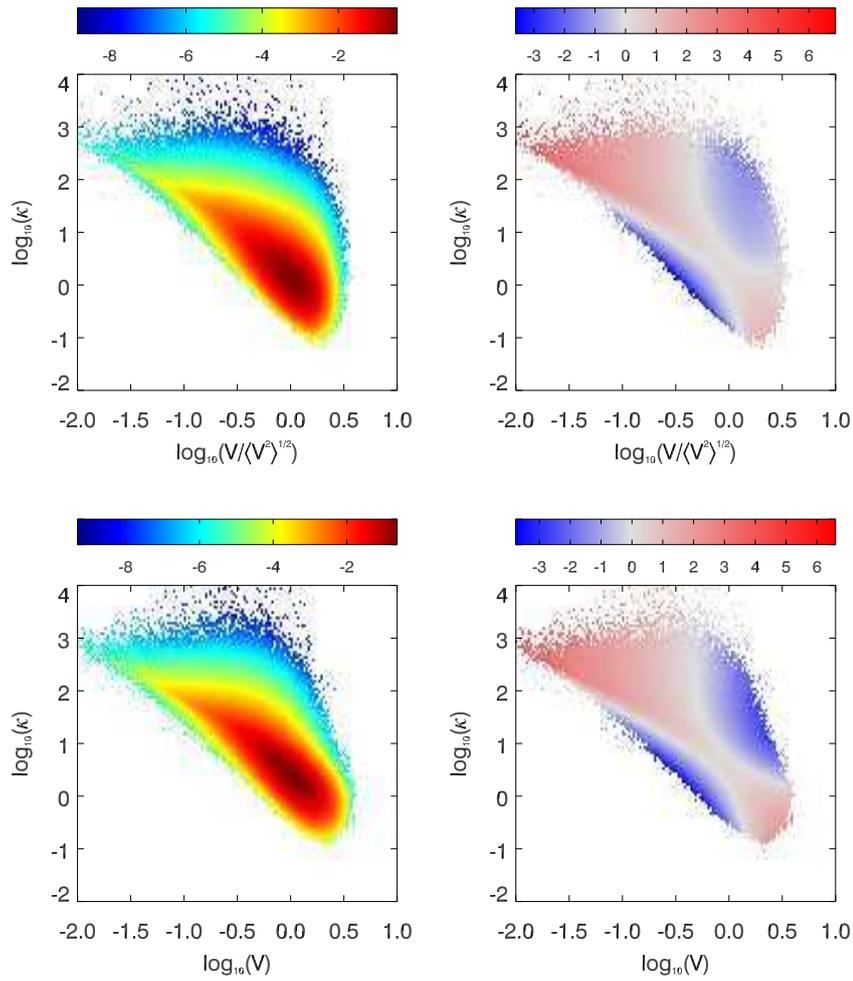
stochastischen Modells erklären, nur muss die Anzahl der Freiheitsgrade der Geschwindigkeit und der Zentripetalbeschleunigung einem zweidimensionalen System entsprechend gewählt werden. In einem Experiment, in dem (quasi-)zweidimensionale hydrodynamische Turbulenz untersucht wurde, wurde der gleiche Verlauf der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung bei großen und kleinen Werten der Krümmung gefunden [97].

### Gefilterte Krümmung

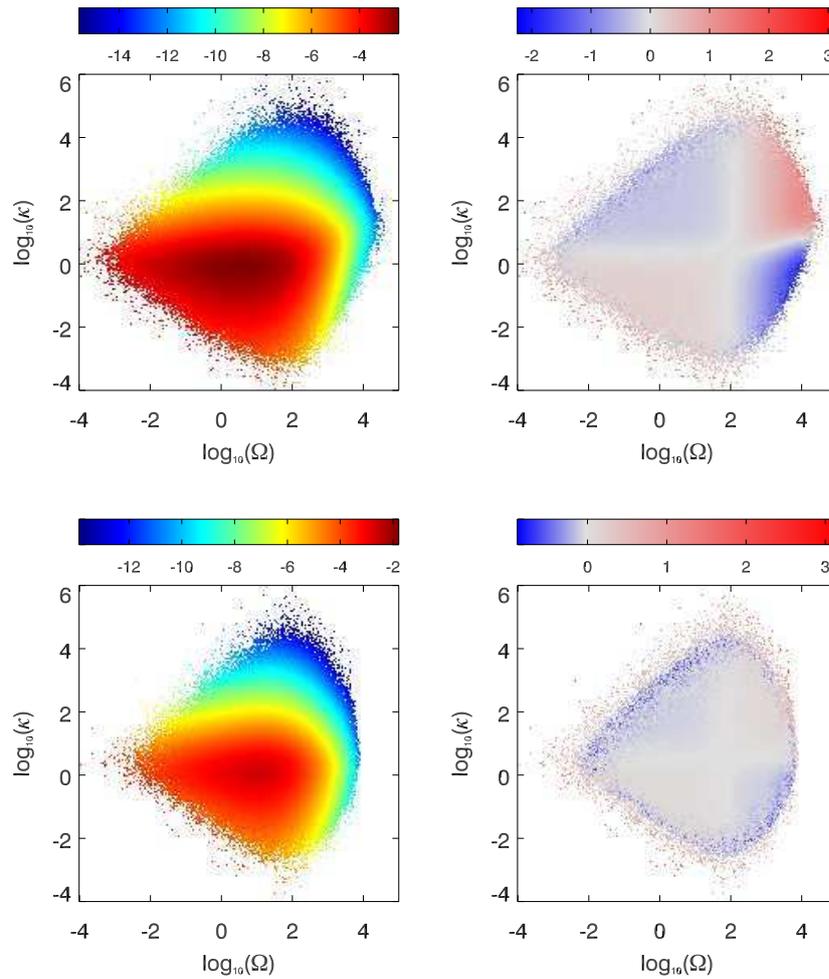
Wie oben erläutert wurde, wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung bei hohen Werten im Wesentlichen von den Strömungsumkehr-Ereignissen bestimmt. Jedoch erhofft man sich von der Krümmung auch Aussagen über die charakteristischen Trajektorien, die man in der turbulenten Systemen findet (siehe oben). Um die Strömungsumkehr-Ereignisse herauszufiltern, mittelt man die Krümmung einer Teilchenbahn über ein bestimmtes Zeitfenster [133]. Anschließend bestimmt man die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser zeitgemittelten Krümmung und einer Referenzgröße wie der Geschwindigkeit oder Beschleunigung. Im Navier-Stokes-Fall bietet sich ein Mittelpunkt-Zeitraum von  $5\tau_\eta$  an, da auf dieser Zeitskala in den Strukturfunktionen der stärkste Effekt des Teilcheneinfangs zu beobachten ist (siehe Kapitel 6.3). Andererseits sollte auf dieser Zeitskala der Einfluss der Strömungsumkehr-Ereignisse bereits vernachlässigbar sein, da diese nur punktuell auftreten.

In der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung der zeitgemittelten Krümmung und der Geschwindigkeit kann man sehen, dass Ereignisse hoher gemittelter Krümmung auch bei mittleren bis hohen Geschwindigkeitswerten auftreten können (siehe Abbildung 8.14). Jedoch findet man weiterhin keine Ereignisse niedriger gemittelter Krümmung bei kleinen Geschwindigkeiten. Dies passt in das Bild der spiralförmigen Einfang-Ereignisse, die man im Navier-Stokes-Fall beobachtet, da diese Teilchenbahnen eine hohe Krümmung bei gleichzeitig durchschnittlichen Geschwindigkeit der Teilchen aufweisen. Ein eindeutiger Hinweis auf eine solche spiralförmige Trajektorienform bei hohen Werten der gemittelten Krümmung ist dies jedoch nicht, denn im MHD-Fall sieht man eine ganz ähnliche Veränderung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung durch die Zeitmittelung der Krümmung.

Eine interessante Beobachtung ist, dass im Navier-Stokes-Fall hohe Werte der Krümmung auch mit hohen Werten der longitudinalen Beschleunigung korreliert sind, obwohl der longitudinale Anteil der Beschleunigung nicht in die Berechnung der Krümmung eingeht. Eine solche Korrelation wird im MHD-Fall nicht gefunden. Eine hohe longitudinale Beschleunigung bei gleichzeitig hoher Krümmung könnte durch ein Mittragen der Wirbelfilamente durch die großen turbulenten Eddies hervorgerufen werden. Ein Teilchen, das einer idealen Spiralbahn um ein Wirbelfilament folgt, hat im Bezugssystem des entsprechenden Wirbelfilaments eine rein transversale Beschleunigung. Im Bezugssystem eines Betrachters, an dem das Wirbelfilament durch die großen Eddies vorbeigetragen wird, kann es aber auch eine longitudinale Beschleunigung haben. Dazu kommt, dass die Wirbelfilamente nicht perfekt gerade sind, sich verformen und in Gruppen auftreten können, so dass eine reine Spiralebewegung nur sehr selten auftritt.



**Abbildung 8.14** Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsquotient der Geschwindigkeit und der gefilterten Krümmung  $\log_{10}(P(\bar{\kappa}, |V|))$  bzw.  $Q(\bar{\kappa}, |V|)$  im Navier-Stokes (oben) und makroskopisch isotropen MHD-Fall (unten). Die Krümmung wurde über einen Zeitraum von  $5\tau_\eta$  gemittelt. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.



**Abbildung 8.15**  $\log_{10}(P(\kappa, \Omega))$  bzw.  $Q(\kappa, \Omega)$  im Navier-Stokes- (oben) und makroskopisch isotropen MHD-Fall (unten). Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

### 8.2.3 Zusammenhang der Trajektorienform mit den Strukturen des Vortizitätsfeldes

In [133] wird die Vermutung geäußert, dass hohe Werte der Krümmung im Zusammenhang mit hohen Werten der Enstrophie  $\Omega = \frac{1}{2}\omega^2$  stehen sollten. Dies legen auch die spiralförmigen Teilchenbahnen, die im Navier-Stokes-Fall um die Wirbelfilamente auftreten, nahe. In der Tat kann man im Navier-Stokes-Fall eine Korrelation hoher Werte der Krümmung mit hohen Werten der Enstrophie feststellen (siehe Abbildung 8.15). Im MHD-Fall dagegen beobachtet man dagegen fast keine Korrelation von Enstrophie und Krümmung. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, dass die Teilchentrajektorien in der Regel entlang der Wirbelschichten beschleunigt werden und daher nicht besonders stark gekrümmt sind. Ein Maß für die Korrelation zweier Zufallsvariable  $u$  und  $w$  kann auch über ihre zentrierten Momente zweiter Ordnung  $s(u, w) = \langle (u - \langle u \rangle)(w - \langle w \rangle) \rangle$  angegeben werden,

	NVFOU512N3	B0FOU512N3
$r(\kappa,  V )$	-0.04	-0.05
$r(\kappa,  A_{\perp} )$	0.02	0.02
$r(\kappa, \Omega)$	0.02	0.002
$r(\Omega,  A_{\perp} )$	0.44	0.20
$r(\Omega,  A_{\parallel} )$	0.33	0.16

**Tabelle 8.4** Korrelationskoeffizienten verschiedener Größen im Navier-Stokes- und makroskopisch isotropen MHD-Fall. Daten aus den Simulationen NVFOU512N3 und B0FOU512N3.

der Korrelationskoeffizient[28]

$$r(u, w) = \frac{s(u, w)}{\sqrt{s(u, u) s(w, w)}}. \quad (8.8)$$

In Tabelle 8.4 sind die Korrelationskoeffizienten verschiedener in diesem Kapitel besprochenen Größen angegeben.

Sowohl im Navier-Stokes- als auch im MHD-Fall sind hohe Werte der Beschleunigung mit hohen Werten der Enstrophie korreliert. Im Navier-Stokes-Fall ist diese Korrelation jedoch stärker ausgeprägt. Eine mögliche Interpretation hierfür ist, dass im Navier-Stokes-Fall aufgrund der Einfangwirkung der Wirbelfilamente die Lagrangesche Intermittenz der Beschleunigung stärker an die (Eulersche) Intermittenz des Geschwindigkeitsfeldes gekoppelt ist. Die im MHD-Fall auftretenden Schichtstrukturen haben keine Einfang- sondern eher eine schwach abstoßende Wirkung, weshalb die Korrelation von hohen Beschleunigungswerten mit hohen Werten der Enstrophie weniger stark ausgeprägt ist.

### 8.2.4 Zusammenfassung

Abschließend kann man sagen, dass in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen Unterschiede zwischen dem Navier-Stokes- und dem MHD-Fall feststellbar sind. Diese Unterschiede sind jedoch nicht sehr stark ausgeprägt. Dies ist dadurch bedingt, dass sich die durchschnittlichen, relativ glatten Trajektorien weitgehend ähnlich sind, und sich nur ausgewählte Extrem-Trajektorien, wie man sie in der Umgebung der Wirbelfilamente und -schichten findet, deutlich voneinander unterscheiden. Um die Unterschiede zwischen den beiden Fällen herauszuarbeiten, ist eine feinere statistische Analyse nötig. Eine solche feinere Analyse könnte z. B. durch die Berücksichtigung der Zeitkorrelation oder unter einer Auswahl spezieller Trajektorien durch Konditionierung und Filterung erfolgen. Eventuell könnten auch lokale Bezugssysteme eingeführt werden, die der lokalen Struktur des Wirbelfeldes folgen.

Bei einer ausführlicheren Analyse der Trajektorienformen sollte auch die Torsion berücksichtigt werden, da eine vollständige Parametrisierung einer Kurve im Raum Krümmung *und* Torsion erfordert. Für die Bestimmung der Torsion wären Simulationen mit noch höherer Auflösung der kleinen Skalen nötig, in denen die Beschleunigung durch Interpolation der rechten Seite der Impulsbilanz der Navier-Stokes- bzw. MHD-Gleichungen (siehe Kapitel 2.1) bestimmt wird. Für die Berechnung der Zeitableitung der Beschleunigung wäre dann nur eine numerische Zeit-Differentiation nötig. Eine so umfangreiche Analyse geht jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus.



## 9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde inkompressible hydrodynamische und magnetohydrodynamische Turbulenz in Hinblick auf ihre universellen statistischen Eigenschaften mit Hilfe direkter numerischer Simulationen untersucht. Während in den meisten Untersuchungen, die sich mit den universellen statistischen Eigenschaften turbulenter Strömungen befassen, der Eulersche Standpunkt eingenommen wird, war das Ziel dieser Arbeit eine Untersuchung der Lagrangeschen statistischen Eigenschaften. Die Lagrangesche Turbulenzstatistik hat im hydrodynamischen Fall in den letzten Jahren durch verbesserte Messmethoden, die eine hoch aufgelöste Verfolgung der Trajektorien von Testteilchen in voll entwickelter Turbulenz ermöglicht haben, an Bedeutung gewonnen<sup>1</sup> [124]. Magnetohydrodynamische Turbulenz wurde jedoch bisher fast ausschließlich im Eulerschen Bezugssystem untersucht.

Zur Bestimmung der Trajektorien passiver Testteilchen wurden in dieser Arbeit die inkompressiblen Navier-Stokes- bzw. MHD-Gleichungen numerisch gelöst, und in den turbulenten Geschwindigkeitsfeldern passive Testteilchen verfolgt. Numerische Simulationen haben den Vorteil, dass man an den Gitterpunkten und entlang der Teilchentrajektorien vollen Zugriff auf die Eigenschaften der turbulenten Felder hat, deren experimentelle Messung zum Teil sehr aufwändig sein kann bzw. mit den bekannten Messmethoden gar nicht möglich ist. Weiterhin ist die Erzeugung voll entwickelter magnetohydrodynamischer Turbulenz unter Laborbedingungen im Rahmen der verfügbaren Mittel nicht möglich. Die direkte numerische Turbulenzsimulation hat jedoch auch einige Nachteile. Die mit der vorhandenen Rechenkapazität erreichbare numerische Auflösung der turbulenten Felder begrenzt die Reynolds- und magnetischen Prandtlzahlen auf Werte, die weit niedriger sind als in den meisten turbulenten Strömungen in der Natur und in technischen Anwendungen. Weiterhin besteht stets die Gefahr der Beeinflussung der Ergebnisse durch numerische Effekte. Deswegen wurde in dieser Arbeit auch der hydrodynamische Fall ausführlich untersucht, da hier in vielen Fällen ein Vergleich mit experimentellen Resultaten möglich ist.

Für die Durchführung der numerischen Simulationen wurde ein bestehendes pseudospektrales Programm zur Lösung der dreidimensionalen MHD-Gleichungen um die Verfolgung passiver Testteilchen erweitert [32]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Teilchenverfolgung vollständig parallelisiert, und weitere Diagnosen wie die Teilchenbeschleunigung und der Gradiententensor des Geschwindigkeitsfeldes entlang der Teilchentrajektorie eingeführt. Weiterhin wurde ein pseudospektrales Programm für die Lösung der zweidimensionalen MHD-Gleichungen erstellt, das ebenfalls die Verfolgung passiver Testteilchen erlaubt.

In dieser Arbeit wurden ausschließlich quasistationäre turbulente Strömungen untersucht, weil hier die explizite Abhängigkeit der statistischen Größen vom Untersuchungs-

---

<sup>1</sup>Eine experimentelle Messung der Trajektorien von passiven Testteilchen in einer magnetohydrodynamischen Strömung wurde bisher noch nicht publiziert. Jedoch werden derzeit in Lyon in dieser Hinsicht Versuche unternommen[99].

zeitpunkt entfällt. Dies erleichtert die Interpretation der Ergebnisse erheblich. Zur Aufrechterhaltung eines quasistationären turbulenten Zustands muss der turbulenten Strömung auf großen Längenskalen Energie durch ein Antriebsverfahren zugeführt werden. Nachdem sich die Geschwindigkeit eines Testteilchens aus Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes aller Längenskalen (und damit auch denen des Antriebsbereiches) zusammensetzt, wurde den Antriebsverfahren besondere Beachtung geschenkt. In der ursprünglichen Version des Simulationsprogrammes war nur eine Antriebsform, das sogenannte Modeneinfrieren, implementiert. Das Simulationsprogramm wurde daher im Rahmen dieser Arbeit um sechs weitere Antriebsformen erweitert, die alle in pseudospektralen numerischen Simulationen hydrodynamischer Turbulenz üblich sind. Da der Untersuchung und dem Vergleich verschiedener Antriebsformen bisher wenig Beachtung geschenkt worden war, wurde im hydrodynamischen Fall ein systematischer Vergleich dieser Antriebsformen durchgeführt. Diese Untersuchung ergab, dass sich die Unterschiede der Antriebsformen im Wesentlichen auf den angetriebenen Modenbereich beschränken.

Bei der Erweiterung der untersuchten Antriebskonzepte auf den magnetohydrodynamischen Fall traten Komplikationen durch die Ausbildung Alfvénischer Zustände und die längere Entwicklungszeit des Magnetfeldes auf. Dies führte zu der Schlussfolgerung, dass im MHD-Fall nicht nur der Energieinhalt des Antriebsbereiches, sondern auch das Verhältnis von kinetischer zu magnetischer Energie und die Kreuzhelizität im Antriebsbereich kontrolliert werden müssen. Zwei Verfahren zur Dämpfung bzw. der Elimination der Kreuzhelizität im Antriebsbereich wurden vorgeschlagen. Im Allgemeinen scheint ein stochastischer Antrieb mit endlicher Zeitkorrelation am geeignetsten zu sein, da er die Aufrechterhaltung eines quasistationären Zustands erlaubt, ohne die zeitliche Entwicklung der Moden des Antriebsbereiches stark einzuschränken. Weiterhin kommt er von den untersuchten Antriebsformen einem natürlichen Prozess zur Turbulenzerzeugung am nächsten. Für manche Untersuchungen wurden in dieser Arbeit jedoch auch andere Antriebsmethoden eingesetzt, z. B. um Nebeneffekte, wie die starke Anregung Alfvénischer Fluktuationen zu vermeiden.

In dieser Arbeit wurden eine Reihe verschiedener Systeme untersucht: hydrodynamische Turbulenz, makroskopisch isotrope MHD-Turbulenz, MHD-Turbulenz unter dem Einfluss eines mittleren Magnetfeldes mit und ohne Alfvénischen Fluktuationen auf großen Längenskalen, sowie zweidimensionale MHD-Turbulenz.

Bei der direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen muss darauf geachtet werden, dass die kleinsten turbulenten Strukturen hinreichend aufgelöst werden. Im anisotropen MHD-Fall war der Autorin kein Auflösungskriterium für die kleinen Skalen bekannt. Deswegen wurde im Rahmen dieser Arbeit eine anisotrope Version eines üblichen Auflösungskriteriums für statistisch isotrope Turbulenz entwickelt, das auf einer richtungsabhängigen Definition der Dissipationsskala aufbaut.

Die Eulerschen Energiespektren der untersuchten Systeme zeigten in fast allen Fällen die erwartete Skalierung. Im anisotropen MHD-Fall wurde jedoch nicht die erwartete  $k_{\perp}^{-3/2}$ -Skalierung [81, 95] des senkrechten Energiespektrums gefunden, sondern eine  $k_{\perp}^{-5/3}$ -Skalierung. Diese Abweichung von veröffentlichten Ergebnissen kann auf die verbesserte Auflösung der kleinen Skalen, die durch das oben genannte Auflösungskriterium vorgegeben wird, zurückgeführt werden. Für die endgültige Klärung dieses Zusammenhangs sind weitere Untersuchungen erforderlich. So sollte durch unabhängige numerische Simulatio-

nen überprüft werden, ob das eingeführte Auflösungskriterium angemessen ist. Weiterhin trat im Zuge dieser Untersuchung die Frage auf, ob die eindimensionalen Energiespektren, die üblicherweise zur Messung des Skalierungsverhaltens herangezogen werden, im anisotropen MHD-Fall überhaupt zur Messung der in dem Rahmen der MHD-Phänomenologien vorhergesagten Skalierungsgesetze geeignet sind [59].

Die Lagrangesche Statistik ist besonders für die Untersuchung der diffusiven und dispersiven Eigenschaften turbulenter Strömungen geeignet. In dieser Arbeit wurde sowohl die absolute Dispersion einzelner Testteilchen als auch die relative Dispersion mehrerer Testteilchen untersucht. Die Untersuchung der absoluten Dispersion ergab keine wesentlichen qualitativen Unterschiede zwischen dem Navier-Stokes- und dem makroskopisch isotropen MHD-Fall. Die absolute Dispersion läuft im MHD-Fall langsamer ab, was wahrscheinlich ein Effekt der Ordnung der Strömung durch das lokale mittlere Magnetfeld ist. Im anisotropen MHD-Fall ist die absolute Dispersion der Teilchen in der Richtung parallel zum mittleren Magnetfeld  $\mathbf{B}_0$  sehr viel schneller als in der Ebene senkrecht dazu. Dies ist eine Folge der langen Korrelationslänge und -zeit des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes in dieser Raumrichtung.

Die dispersiven Eigenschaften der turbulenten Strömungen wurden über die Statistik der relativen Bewegung zweier Testteilchen untersucht. Im Rahmen der Kolmogorov-Phänomenologie sind im hydrodynamischen Fall zwei Skalierungsgesetze für die relative Dispersion, das Batchelor- und das Richardson-Gesetz, bekannt. Die dem Batchelor- und Richardson-Gesetz entsprechenden Zusammenhänge im magnetohydrodynamischen Fall wurden für verschiedene MHD-Phänomenologien hergeleitet. Auf kurzen Zeitskalen folgt die relative Dispersion annähernd dem Batchelor-Gesetz. Das Richardson-Gesetz konnte jedoch in keinem der untersuchten Systeme gefunden werden. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, dass die erreichten Reynoldszahlen zu gering sind.

Mit Hilfe einer Winkelstatistik wurde gezeigt, dass man die Zeitabhängigkeit der relativen Dispersion im Rahmen verschiedener Ausrichtungsprozesse verstehen kann. Zu der Ausrichtung des Abstandsvektors der beiden Teilchen am lokalen Geschwindigkeitsfeld kommt im MHD-Fall die Ausrichtung am lokalen mittleren Magnetfeld hinzu. Der MHD-Fall ist deshalb gegenüber dem Navier-Stokes-Fall durch das wechselnde Vorherrschen dieser beiden Ausrichtungsprozesse gekennzeichnet. Auch der anisotrope MHD-Fall fügt sich in dieses Bild ein. Hier ist der Effekt der Ausrichtung am mittleren Magnetfeld noch verstärkt. Die relative Dispersion erfolgt bevorzugt in der Richtung des mittleren Magnetfelds. Sie wird jedoch von den Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene senkrecht dazu getrieben. Deshalb ist ein endlicher Abstand der beiden Teilchen in dieser Ebene Voraussetzung einer effizienten relativen Dispersion.

Nicht in dieser Arbeit berücksichtigt werden konnte die relative Dispersion von Mehrteilchen-Gruppen von drei oder vier Teilchen, mit denen man die Verformung einer Teilchenwolke durch die turbulente Dispersion genauer studieren kann. Mit Hinblick auf das Problem des turbulenten Dynamos [27], sollte in einer zukünftigen Untersuchung auch die magnetische Prandtl-Zahl variiert, und die Abhängigkeit des turbulenten Diffusionskoeffizienten von der Stärke des mittleren Magnetfelds untersucht werden.

Mit Hilfe der Lagrangeschen Statistik lassen sich auch Einblicke in die phänomenologische Turbulenzbeschreibung gewinnen. Für den magnetohydrodynamischen Fall gibt es noch kein phänomenologisches Modell der turbulenten Energiekaskade, das allgemein anerkannt wäre. An Hand der Skalierung der Lagrangeschen Frequenzspektren kann man

Aussagen über die Relation der in der Energiekaskade relevanten Zeitskalen und damit über die Art des Interaktionsmechanismus' in der Kaskade machen. Im Navier-Stokes-Fall wurde die der Kolmogorov-Phänomenologie entsprechende Skalierung des Lagrangeschen Frequenzspektrums gefunden [90, 141]. Für den MHD-Fall wurden im Rahmen dieser Arbeit die Skalierung der Lagrangeschen Frequenzspektren zum ersten Mal gemessen. Im makroskopisch isotropen MHD-Fall kann man aus der gemessenen Skalierung des Gesamtenergiefrequenzspektrums schließen, dass die Energiekaskade auf einem starken Interaktionsmechanismus aufbauen muss. Dies spricht gegen phänomenologische Modelle des Iroshnikov-Kraichnan-Typs für den makroskopisch isotropen MHD-Fall, da diese auf einem schwachen Interaktionsmechanismus aufbauen. Im MHD-Fall unter dem Einfluss eines starken mittleren Magnetfelds wurde für die Frequenzspektren der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen und -senkrechten Komponenten der turbulenten Fluktuationen ein unterschiedliches Skalierungsverhalten gefunden. Während die Skalierung des Spektrums der  $\mathbf{B}_0$ -senkrechten Komponenten weiterhin auf einen starken Interaktionsmechanismus hinweist, entspricht die Skalierung des Spektrums der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Komponenten einer Energiekaskade mit einem schwachen Interaktionsmechanismus. Dies deutet darauf hin, dass der anisotrope MHD-Fall nicht allein durch eine Phänomenologie mit einem starken Interaktionsmechanismus beschrieben werden kann. Eine vollständiges phänomenologisches Modell magneto-hydrodynamischer Turbulenz sollte also einen schwachen und einen starken Interaktionsmechanismus enthalten. Weiterhin muss eine solche Phänomenologie auch die Stärke des mittleren Magnetfeldes berücksichtigen, und erklären können, warum die Bedeutung des schwachen Interaktionsmechanismus' im anisotropen MHD-Fall zunimmt.

Die Lagrangeschen Strukturfunktionen sind ebenfalls mit der phänomenologischen Beschreibung turbulenter Strömungen verbunden. Im Gegensatz zu den Lagrangeschen Spektren zeigen sie bei den erreichten Reynoldszahlen keinen Skalierungsbereich. Die mit Hilfe der erweiterten Selbstähnlichkeit bestimmten Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen zeigen im Navier-Stokes-Fall eine stärkere Intermittenz, d. h. eine stärkere Abweichung von einem selbstähnlichen Verhalten, als im MHD-Fall. Dies widerspricht einer einfachen Übersetzung von Eulerscher in Lagrangesche Intermittenz [66], denn die Eulerschen Strukturfunktionen zeigen im Navier-Stokes-Fall eine schwächere Intermittenz als im MHD-Fall [19]. An Hand der Teilchentrajektorien kann man sich verschiedene mögliche Begründungen für diese scheinbare Diskrepanz überlegen. In diesem Zusammenhang sind die aktuellen Untersuchungen der Arbeitsgruppen von Prof. Friedrich und Prof. Grauer richtungweisend, die den Zusammenhang von Eulerschen und Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkrementen systematisch untersuchen. Für die lokalen, d. h. vom Messintervall abhängigen, Strukturfunktionsexponenten wurde im Navier-Stokes-Fall ein universeller Verlauf gefunden [6]. Da im MHD-Fall kein sogenannter Teilcheneinfang durch Wirbel-filamente auftritt, zeigen die lokalen Strukturfunktionsexponenten im MHD-Fall einen deutlich einfacheren Verlauf.

In den Teilchentrajektorien findet man im Navier-Stokes- und MHD-Fall charakteristische Unterschiede. Diese Unterschiede beschränken sich jedoch weitgehend auf Extremereignisse, die in der Regel in der Nähe von Strukturen hoher Intensität des Vortizitätsfeldes auftreten. Im Navier-Stokes-Fall findet man spiralartige Trajektorien um Wirbelfilamente, während im MHD-Fall die Teilchen entlang der Wirbelschichten beschleunigt werden, und die Trajektorien in manchen Fällen starke Knicke aufweisen. Die charakteristische Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Krümmung, die im hydrodynamischen Fall

gefunden wurde, tritt auch im MHD-Fall auf. Eine Analyse der Krümmung zeigt, dass es sehr schwierig ist, die Turbulenz-spezifischen Eigenschaften der Teilchentrajektorien von denen zu trennen, die auch in einer einfacheren Strömung auftreten können. Hier sind sowohl im Navier-Stokes- als auch im MHD-Fall genauere Untersuchungen nötig, die unter Berücksichtigung der Torsion und auch der Zeitkorrelation der betrachteten Größen erfolgen könnten.

Die Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen für die Strömungsbeschreibung sind schon seit der Mitte des neunzehnten bzw. zwanzigsten Jahrhunderts bekannt. Dennoch ist trotz intensiver Forschung wenig über turbulente Strömungen bekannt [43]. Die meisten Erkenntnisse, die wir heute über turbulente Strömungen besitzen, sind im Eulerschen Bezugssystem gewonnen worden. Die aufkommende Lagrangesche statistische Untersuchung turbulenter Strömungen kann hier Impulse für neue Erkenntnisse geben, da sie zum Überdenken und Hinterfragen der Konzepte der Eulerschen Turbulenzbeschreibung zwingt, und neue Verbindungen zwischen diesen schaffen kann.



# A Vergleichszahlen der Antriebsmethoden

Es wurden insgesamt sechs Simulationen bei einer Auflösung von  $128^3$  mit jeweils unterschiedlichen Antriebsformen durchgeführt. Die kinematische Viskosität wurde in allen Simulationen zu  $\nu = 1 \cdot 10^{-2}$  gesetzt. Das Geschwindigkeitsfeld wurde im Bereich  $1 \leq |\mathbf{k}| < 3$  angetrieben. Die Antriebsparameter wurden so gewählt, dass sich jeweils ungefähr die gleiche Energiedissipationsrate ergab. Die Korrelationszeit einer Größe wurde gleich der Zeit gesetzt, nach der die Autokorrelation der betreffenden Größe auf  $1/e$  abgefallen war.

Antriebsart	Antriebsparameter	$\epsilon$	$L_{\text{cor}}^{\text{K}}$	$T_{\text{cor}}^{\text{K}}$	$T$	$Re_L$	$E^{\text{f}}$
Ornstein-Uhlenbeck	$T^{\text{f}} = 1,$ $\sigma_{\text{f}}^2 = 1.5 \cdot 10^{-3}$	0.34	1.17	1.42	420	302	0.59
weisses Rauschen	$\sigma_{\text{f}}^2 = 9.45 \cdot 10^{-4}$	0.35	1.13	1.37	440	303	0.61
konstante Amplituden	$ \mathbf{v}  = 0.0962$	0.34	0.94	1.26	480	212	0.43
gleichmäßiger	$c^{\text{f}} = 0.34$	0.34	1.08	1.35	440	265	0.53
beschleunigender	$c^{\text{f}} = 0.34$	0.34	1.31	1.49	400	389	0.73
konstante Energie	$E^{\text{f}}(1) = 0.611,$ $E^{\text{f}}(2) = 0.260$	0.35	1.41	1.52	400	483	0.87

**Tabelle A.1** Überblick über die integralen Zeit-  $T_{\text{cor}}^{\text{K}} = L_{\text{cor}}^{\text{K}}/v_{\text{rms}}$  und Längenskalen  $L_{\text{cor}}^{\text{K}}$  und die Antriebsparameter der Vergleichssimulationen im Navier-Stokes-Fall.  $T$  Simulationsdauer in Vielfachen der integralen Zeitskala,  $Re_{\text{NV}}$ : turbulente Reynoldszahl,  $E^{\text{f}}$ : Energieinhalt der Moden im Antriebsbereich.

X	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	1.01	0.09	0.78	1.31	2.5
$\langle v_x^2 \rangle$	0.67	0.09	0.45	1.03	1.8
$\langle v_y^2 \rangle$	0.67	0.08	0.44	0.94	2.0
$\langle v_z^2 \rangle$	0.68	0.09	0.46	1.01	2.5
$H^{\text{K}}$	-0.003	0.424	-1.12	1.27	3.4
$\epsilon$	0.34	0.03	0.25	0.45	2.2

**Tabelle A.2** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **Ornstein-Uhlenbeck-Antrieb** im Navier-Stokes-Fall.

X	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	1.03	0.08	0.75	1.40	1.9
$\langle v_x^2 \rangle$	0.69	0.09	0.45	1.05	1.5
$\langle v_y^2 \rangle$	0.68	0.08	0.45	1.05	1.6
$\langle v_z^2 \rangle$	0.69	0.09	0.45	1.11	1.9
$H^K$	-0.04	0.34	-1.24	1.18	1.9
$\epsilon$	0.35	0.03	0.26	0.44	2.0

**Tabelle A.3** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **Antrieb mit weißem Rauschen** im Navier-Stokes-Fall.

X	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	0.85	0.06	0.78	0.93	1.5
$\langle v_x^2 \rangle$	0.57	0.03	0.46	0.69	1.7
$\langle v_y^2 \rangle$	0.57	0.03	0.47	0.67	1.6
$\langle v_z^2 \rangle$	0.56	0.03	0.45	0.67	1.5
$H^K$	0.03	0.32	-1.27	0.96	3.8
$\epsilon$	0.34	0.02	0.29	0.41	1.8

**Tabelle A.4** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **Antrieb mit konstanten Amplituden** im Navier-Stokes-Fall.

X	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	0.95	0.02	0.89	1.03	2.9
$\langle v_x^2 \rangle$	0.63	0.05	0.47	0.76	1.8
$\langle v_y^2 \rangle$	0.64	0.05	0.50	0.79	2.0
$\langle v_z^2 \rangle$	0.64	0.05	0.49	0.81	1.8
$H^K$	0.01	0.34	-1.27	1.29	5.9
$\epsilon$	0.34	0.01	0.24	0.48	1.2

**Tabelle A.5** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **gleichmäßigen Antrieb** im Navier-Stokes-Fall.

X	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	1.15	0.06	1.02	1.34	3.8
$\langle v_x^2 \rangle$	0.76	0.099	0.49	1.12	2.8
$\langle v_y^2 \rangle$	0.77	0.103	0.46	1.20	2.9
$\langle v_z^2 \rangle$	0.79	0.126	0.54	1.38	4.6
$H^K$	-0.06	0.46	-1.27	1.29	5.5
$\epsilon$	0.34	0.02	0.24	0.48	1.8

**Tabelle A.6** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **beschleunigenden Antrieb** im Navier-Stokes-Fall.

---

$X$	$\langle X \rangle$	$\sigma_X$	$\min(X)$	$\max(X)$	$T_{\text{cor}}^X$
$E$	1.30	0.03	1.19	1.43	2.1
$\langle v_x^2 \rangle$	0.89	0.13	0.55	1.26	2.9
$\langle v_y^2 \rangle$	0.85	0.12	0.56	1.23	2.9
$\langle v_z^2 \rangle$	0.86	0.12	0.54	1.30	2.7
$H^K$	-0.11	0.58	-1.45	1.37	7.6
$\epsilon$	0.35	0.03	0.26	0.44	2.5

**Tabelle A.7** Mittelwert, Varianz, Schwankungsbereich und Korrelationszeit verschiedener Größen für den **Antrieb mit konstanter Energie** im Navier-Stokes-Fall.



## B Integrale Längenskala

Die integrale Längenskala<sup>1</sup>  $L_{\text{cor}}$  dient der Charakterisierung der größten Eddies in einer turbulenten Strömung. Sie wird im Allgemeinen über die Korrelationslänge der longitudinalen Autokorrelationsfunktion des Geschwindigkeitsfeldes definiert

$$L_{\text{cor}} = \frac{1}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty dr \langle v_p(\mathbf{x})v_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = v_p \mathbf{e}_r + \mathbf{v}_n$$

mit

$$v_{\text{rms}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}E^{\text{K}}} & \text{(3D-Fall)} \\ \sqrt{E^{\text{K}}} & \text{(2D-Fall)}, \end{cases}$$

Im homogenen, isotropen Fall ist es üblich, die integrale Längenskala über das winkelintegrierte Energiespektrum zu berechnen. Im dreidimensionalen Fall ist der Zusammenhang zwischen dem winkelintegrierten Energiespektrum und integraler Längenskala in einigen Lehrbüchern dargestellt (siehe z.B. [10, 43]), jedoch konnte im zweidimensionalen Fall keine entsprechende Literatur gefunden werden. Deswegen wird die Herleitung dieses Zusammenhangs hier ausführlich dargestellt.

### B.1 Zusammenhang zwischen $L_{\text{cor}}$ und $R(r)$

Über die Spur des Korrelationstensors  $R_{ii}(r) = 2R(r)$  der Geschwindigkeit

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle v_i(\mathbf{x})v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

hängen Energiespektrum und longitudinale Korrelationsfunktion zusammen. Der Korrelationstensor ist in einem homogenen, isotropen System ein symmetrischer Tensor zweiter Ordnung, der nur von  $\mathbf{r}$  abhängt. Er lässt sich deshalb folgendermaßen aufteilen

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = F(r)r_i r_j + G(r)\delta_{ij}. \quad (\text{B.1})$$

Infolge der Inkompressibilitätsbedingung ist

$$\frac{\partial}{\partial r_i} R_{ij}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{B.2})$$

Mit Hilfe der Relationen

$$\frac{\partial r}{\partial r_i} = \frac{r_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{und} \quad \frac{\partial r_i r_j}{\partial r_i} = \begin{cases} 4r_j, & \text{(3D-Fall)}, \\ 3r_j, & \text{(2D-Fall)}. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Im Folgenden ist stets die integrale Längenskala des Geschwindigkeitsfeldes gemeint.

folgt dann aus den Gleichungen (B.1) und (B.2)

$$4F(r) + r\partial_r F(r) + r^{-1}\partial_r G(r) = 0 \quad (3\text{D-Fall}), \quad (\text{B.3})$$

$$3F(r) + r\partial_r F(r) + r^{-1}\partial_r G(r) = 0 \quad (2\text{D-Fall}). \quad (\text{B.4})$$

Mit den longitudinalen und transversalen Korrelationsfunktionen

$$f(r) = \frac{\langle v_p(\mathbf{x})v_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{v_{\text{rms}}^2} \quad \text{und} \quad g(r) = \frac{\langle v_n(\mathbf{x})v_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{v_{\text{rms}}^2}$$

lassen sich die Funktionen  $F(r)$  und  $G(r)$  folgendermaßen darstellen

$$G(r) = v_{\text{rms}}^2 g(r), \quad F(r) = \frac{v_{\text{rms}}^2}{r^2} (f(r) - g(r)).$$

Setzt man dies in Gleichungen (B.3) und (B.4) ein, so ergibt sich, dass die transversale Autokorrelationsfunktion  $g(r)$  vollständig durch die longitudinale bestimmt ist

$$g(r) = \begin{cases} f(r) + \frac{1}{2}r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} \left[ f(r) + \frac{\partial}{\partial r}(rf(r)) \right] & (3\text{D-Fall}) \\ f(r) + r\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(rf(r)) & (2\text{D-Fall}). \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für die transversale Längenskala

$$L_{\text{trans}} = \int_0^\infty g(r)dr = \begin{cases} \frac{1}{2}L_{\text{cor}} & (3\text{D-Fall}), \\ 0 & (2\text{D-Fall}). \end{cases}$$

Die Spur des Korrelationstensors

$$R_{ii}(r) = 2R(r) = \begin{cases} v_{\text{rms}}^2(f + 2g) = v_{\text{rms}}^2(2f + \frac{\partial}{\partial r}(rf)) & (3\text{D-Fall}) \\ v_{\text{rms}}^2(f + g) = v_{\text{rms}}^2(f + \frac{\partial}{\partial r}(rf)) & (2\text{D-Fall}) \end{cases}$$

lässt sich also ebenfalls allein durch die longitudinale Autokorrelationsfunktion darstellen. Die integrale Längenskala kann man also auch durch Integration von  $R(r)$  berechnen

$$L_{\text{cor}} = \frac{c}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty R(r)dr \quad \text{mit} \quad c = \begin{cases} 1 & (3\text{D-Fall}), \\ 2 & (2\text{D-Fall}). \end{cases}$$

## B.2 Zusammenhang zwischen $R(r)$ und $E(k)$

Der zweite Schritt der Herleitung betrifft den Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion  $R(r)$  und dem winkelintegrierten Energiespektrum  $E(k)$ .

### B.2.1 Fourier-Transformation radialsymmetrischer Funktionen

Für die Fourier-Transformation radialsymmetrischer Funktionen ergibt sich im dreidimensionalen Fall folgender Zusammenhang (siehe z. B. [43])

$$A(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int a(r)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty r^2 a(r) \frac{\sin(kr)}{kr} dr$$

$$a(r) = \int A(k)e^{ik \cdot r} d^3 \mathbf{k} = 4\pi \int_0^\infty k^2 A(k) \frac{\sin(kr)}{kr} dk.$$

Im zweidimensionalen Fall verwendet man für die Fourier-Transformation radialsymmetrischer Funktionen die sogenannte Hankel-Transformation nullter Ordnung (auch als Fourier-Bessel-Transformation bekannt, siehe z. B. [103])

$$A(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int a(r)e^{-ik \cdot r} d^2 \mathbf{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r a(r) I_0(kr) dr$$

$$a(r) = \int A(k)e^{ik \cdot r} d^2 \mathbf{k} = 2\pi \int_0^\infty k A(k) I_0(kr) dk,$$

wobei  $I_0(kr)$  die Bessel-Funktion der ersten Art von der Ordnung Null ist.

### B.2.2 Wiener-Khinchin-Theorem

Aus dem Wiener-Khinchin-Theorem [51, 77] folgt der Zusammenhang zwischen dem dreidimensionalen bzw. zweidimensionalen Energiespektrum  $E^{3D,2D}(\mathbf{k})$  und dem entsprechenden winkelintegrierten Energiespektrum  $E(k)$

$$E(k) = \begin{cases} 4\pi k^2 E^{3D}(\mathbf{k}) & \text{(3D-Fall),} \\ 2\pi k E^{2D}(\mathbf{k}) & \text{(2D-Fall).} \end{cases}$$

Das zwei- bzw. dreidimensionale Energiespektrum entspricht der Fourier-Transformation der Korrelationsfunktion  $R(r)$

$$R(r) = \int E^{3D}(\mathbf{k}) e^{ik \cdot r} d^3 \mathbf{k}$$

(analog für den zweidimensionalen Fall).

Man erhält also folgende radiale Transformationspaare

$$R(r) \Leftrightarrow \frac{E(k)}{4\pi k^2} \quad \text{3D-Fall,} \quad R(r) \Leftrightarrow \frac{E(k)}{2\pi k} \quad \text{2D-Fall.}$$

### B.2.3 Zusammenhang zwischen $L_{\text{cor}}$ und $E(k)$

Für die integrale Längenskala ergibt sich folglich im dreidimensionalen Fall

$$L_{\text{cor}} = \frac{1}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty R(r) dr = \frac{1}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty 4\pi \int_0^\infty \frac{E(k)}{4\pi k^2} k^2 \frac{\sin(kr)}{kr} dk dr$$

$$= \frac{1}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty E(k) k^{-1} \int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{r} dr dk.$$

Mit

$$\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{r} dr = \frac{\pi}{2}$$

folgt dann

$$L_{\text{cor}} = \frac{\pi}{2v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty E(k) k^{-1} dk.$$

Im zweidimensionalen Fall erhält man analog

$$\begin{aligned} L_{\text{cor}} &= \frac{2}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty R(r) dr = \frac{2}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty 2\pi \int_0^\infty \frac{E(k)}{2\pi k} k I_0(kr) dk dr \\ &= \frac{2}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty E(k) \int_0^\infty \frac{1}{r} I_0(kr) r dr dk. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\int_0^\infty \frac{1}{r} I_0(kr) r dr = \frac{1}{k}$$

ergibt sich für die integrale Längenskala

$$L_{\text{cor}} = \frac{2}{v_{\text{rms}}^2} \int_0^\infty E(k) k^{-1} dk.$$

Bis auf die Vorfaktoren  $\frac{\pi}{2}$  bzw. 2 stimmt die Berechnung der integralen Längenskala im drei- und zweidimensionalen Fall also überein.

# C Anfangs-Anordnung der Lagrangeschen Testteilchen

In allen dreidimensionalen numerischen Simulationen zu einer Auflösung wurde jeweils die gleiche Anzahl Lagrangescher Testteilchen verfolgt. Die Lagrangeschen Testteilchen sind auf verschiedenen Anfangskonfigurationen verteilt. Es handelt sich hierbei um

- einzelne Teilchen für die Einzelteilchenstatistik,
- Tetraden oder Triaden für die Paarstatistik,
- regelmäßige Tetraeder und Dreiecke für die Mehrteilchenstatistik, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht besprochen wird.

Diese elementaren Gruppen sind zum Startzeitpunkt gleichmäßig stochastisch auf das Simulationsvolumen verteilt.

In den dreidimensionalen Simulationen mit einer Auflösung von 512 Gitterpunkten in der  $x$ -Richtung wurden 500000 Einzelteilchen und jeweils 700000 Teilchen, die in Form von Tetraden bzw. Tetraedern angeordnet waren, verfolgt. Die Teilchen der Tetraden- bzw. Tetraeder-Gruppe wurden auf sechs Untergruppen mit verschiedenen Anfangsabständen (bzw. Seitenlängen) verteilt (siehe Tabelle C.1).

In den dreidimensionalen Simulationen mit einer Auflösung von 1024 Gitterpunkten in der  $x$ -Richtung wurden 3200000 Einzelteilchen und 3200000 Teilchen, die in Form von Tetraden bzw. Tetraedern angeordnet waren, verfolgt. Die Teilchen der Tetraden- bzw. Tetraeder-Gruppe wurden ebenfalls auf neun Untergruppen mit verschiedenen Anfangsabständen (bzw. Seitenlängen) verteilt (siehe Tabelle C.2). Hierbei wurden die Anfangsabstände beginnend von  $1\Delta x$  jeweils verdoppelt.

Nachdem innerhalb des Simulationsprogrammes die Position eines Teilchens bezüglich des Simulationsgitters<sup>1</sup> und nicht in Bezug auf das Simulationsvolumen verwendet wird, werden in Simulationen mit einer halbierten Auflösung in  $z$ -Richtung die Abstände in  $z$ -Richtung entsprechend angepasst. Das heißt, gemessen in Einheiten von  $\Delta z$  beträgt der

<sup>1</sup>In diesen lokalen Koordinaten beträgt der Abstand der Gitterpunkte jeweils 1.

Gruppe	1	2	3	4	5	6
Anfangsabstand $R_0$	$0.25\Delta x$	$1\Delta x$	$4\Delta x$	$16\Delta x$	$64\Delta x$	$128\Delta x$
Teilchenanzahl	200000	200000	100000	100000	50000	50000
Anzahl Elementargruppen	50000	50000	25000	25000	12500	12500
Paaranzahl	150000	150000	75000	75000	37500	37500

**Tabelle C.1** Anfangsabstände der Tetraden bzw. Seitenlängen der Tetraeder in den dreidimensionalen Simulationen bei einer Auflösung von 512 Gitterpunkten in  $x$ -Richtung

Gruppe ( $n$ )	1-7	8-9
Anfangsabstand $R_0$	$2^{n-1}1\Delta x$	$2^{n-1}\Delta x$
Teilchenanzahl	400000	200000
Anzahl Elementargruppen	100000	50000
Paaranzahl	300000	150000

**Tabelle C.2** Anfangsabstände der Tetraden bzw. Seitenlängen der Tetraeder in den dreidimensionalen Simulationen bei einer Auflösung von 1024 Gitterpunkten in  $x$ -Richtung

Gruppe	1	2	3	4	5
Anfangsabstand $R_0$	$1\Delta x$	$4\Delta x$	$16\Delta x$	$64\Delta x$	$256\Delta x$
Teilchenanzahl	307200	307200	172800	172800	76800
Anzahl Elementargruppen	102400	102400	57600	57600	25600
Paaranzahl	204800	204800	115200	115200	51200

**Tabelle C.3** Anfangsabstände der Triaden bzw. Seitenlängen der Dreiecke in den zweidimensionalen Simulationen

Paarabstand in dieser Richtung nur die Hälfte. In den auf die Kantenlänge des Simulationsvolumens bezogenen absoluten Einheiten  $R_0/2\pi$  sind die entsprechenden Paarabstände in  $x$ - und  $z$ -Richtung jedoch gleich.

In den zweidimensionalen Simulationen wurden in allen Simulationen jeweils 1036800 Testteilchen in Form von Triaden bzw. Dreiecken verfolgt. Sie sind ebenfalls auf mehrere Untergruppen mit verschiedenen Anfangsabständen oder Seitenlängen verteilt (siehe Tabelle C.3).

# D Einfluss eines einzelnen Eddies auf die relative Dispersion

Auf kurzen Zeitskalen wird die relative Bewegung der beiden Teilchen eines Paares im Wesentlichen durch Eddies, deren Ausdehnung dem Anfangsabstand der Paars  $R_0$  entspricht, bestimmt. Im Folgenden werden einige Aspekte der relativen Dispersion auf kurzen Zeitskalen mit Hilfe eines Modells erläutert, das jedoch die tatsächlichen Verhältnisse stark vereinfacht.

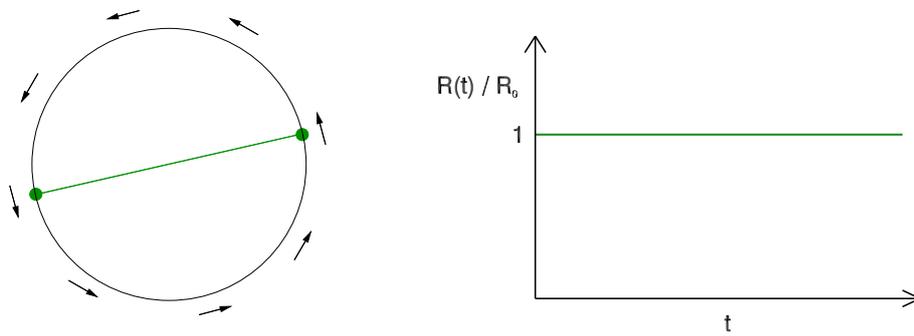
In statistisch isotroper Turbulenz hat das Geschwindigkeitsfeld keine Vorzugsrichtung. In diesem Fall wird ein Eddy im Rahmen dieses stark vereinfachenden Modells als kreisförmiges Gebilde mit Durchmesser  $R_0$  beschrieben (siehe Abbildung D.1). Die Teilchen eines Paares, das von diesem Eddy getragen wird, bewegen sich mit der typischen Geschwindigkeit des Eddies  $v_{R_0}$  entlang seines Umfangs. Es handelt sich hierbei natürlich um eine radikale Vereinfachung der tatsächlichen Gestalt eines turbulenten Eddies. So werden die longitudinalen Inkremente des Geschwindigkeitsfeldes in diesem Modell völlig vernachlässigt. Diese Näherung ist jedoch nicht völlig abwegig: Auf kleinen Längenskalen ( $\ell \ll L_0$ ) sind z. B. die transversalen Strukturfunktionen zweiter Ordnung des Geschwindigkeitsfeldes größer als die longitudinalen, und für die partiellen Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes gilt in statistisch isotroper Turbulenz  $\langle (\partial_i v_j)^2 \rangle = 2 \langle (\partial_i v_i)^2 \rangle$  für  $i \neq j$  (siehe z. B. [102, Seite 194f.]).

Trotz dieser radikalen Vereinfachungen kann man aus diesem Modell etwas über die relative Dispersion auf kurzen Zeitskalen lernen:

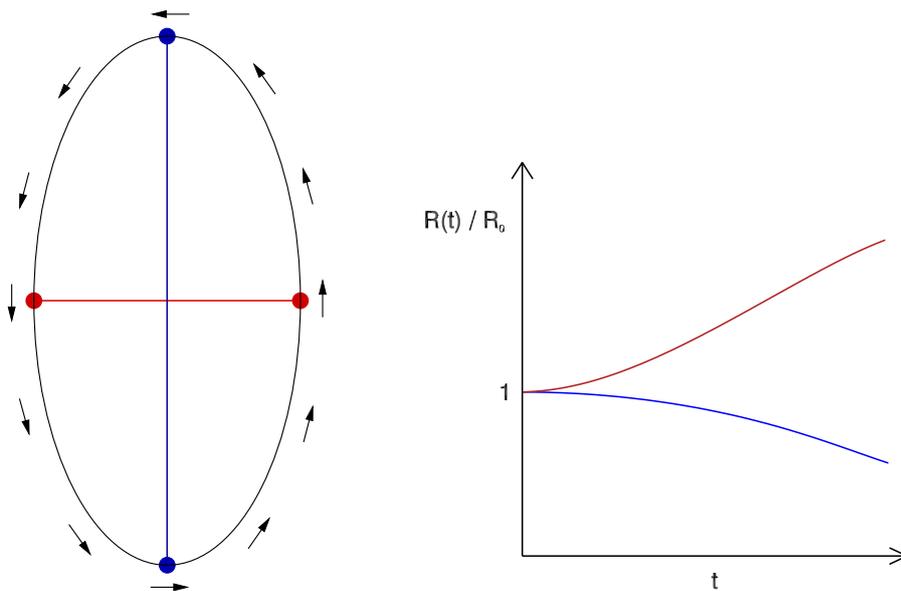
- Die Relativgeschwindigkeit der Teilchen ist rein transversal. Tatsächlich findet man in der turbulenten Dispersion, dass die longitudinale Komponente der Relativgeschwindigkeit  $\langle U_{\parallel}^2 \rangle^{1/2}$  auf kurzen Zeitskalen deutlich kleiner ist als die transversalen Komponenten  $\langle U_{\perp}^2 \rangle^{1/2}$ .
- Der Teilchenabstand nimmt in der  $\mathbf{R}_0$ -senkrechten Richtung zu, während er in der  $\mathbf{R}_0$ -parallelen sinkt. In der turbulenten Dispersion beobachtet man, dass der Teilchenabstand in den  $\mathbf{R}_0$ -senkrechten Richtungen auf kurzen Zeitskalen deutlich schneller zunimmt als in der  $\mathbf{R}_0$ -parallelen. Auf kurzen Zeitskalen nimmt der Teilchenabstand in transversaler Richtung immer zu, es sei denn die transversale Relativgeschwindigkeit ist identisch Null.

Die Zunahme des absoluten Teilchenabstands kann man mit diesem stark vereinfachenden Modell nicht erklären. Dafür müssen die longitudinalen Inkremente des Geschwindigkeitsfeldes, die zeitliche Entwicklung eines Eddies und die Wechselwirkung mehrerer Eddies berücksichtigt werden.

In anisotroper MHD-Turbulenz sind die turbulenten Strukturen in Richtung des Magnetfeldes gestreckt (siehe Kapitel 2.3 und 5.3). Das einfache Eddy-Modell kann entsprechend angepasst werden, indem ein einzelner Eddy nun als Ellipse dargestellt wird, deren



**Abbildung D.1** Minimalmodell eine Eddies in statistisch isotroper Turbulenz (links). Die beiden Testteilchen sind in grüner Farbe angedeutet. Dieses Modell lässt den Absolutabstand des Teilchens unverändert (rechts).



**Abbildung D.2** Minimalmodell eine Eddies in anisotroper Turbulenz (links). Es wird zwischen zwei Anfangskonfigurationen unterschieden:  $R_0$  auf der kleinen (rot) und auf der großen Halbachse (blau). Es ergibt sich jeweils eine unterschiedliche Zeitabhängigkeit des Absolutabstands der Teilchen (rechts).

große Hauptachse parallel zum mittleren Magnetfeld ausgerichtet ist (siehe Abbildung D.2). Es soll abermals betont werden, dass diese Darstellung mit der tatsächlichen Form der turbulenten Strukturen wenig gemeinsam hat. Im Folgenden wird der Einfachheit halber davon ausgegangen, dass sich die Teilchen eines Paares, das von dem betrachteten Eddy getragen wird, sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang seines Ellipsenumfangs bewegen. Dies ist auf kurzen Zeitskalen eine sinnvolle Näherung. Auf längeren Zeitskalen ist das Modell jedoch nicht anwendbar. Es gibt nun zwei ausgezeichnete Grenzfälle, die ein unterschiedliches Verhalten zeigen:

- Für Teilchenpaare, die zum Startzeitpunkt auf der kleinen Halbachse der Ellipse liegen, deren Anfangsabstandsvektor also senkrecht zum mittleren Magnetfeld steht, erwartet man auf kurzen Zeitskalen eine Zunahme des absoluten Teilchenabstands. Der Zuwachs erfolgt in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, dass in anisotroper MHD-Turbulenz die relative Dispersion von Teilchenpaaren mit  $\mathbf{R}_0 \perp \mathbf{B}_0$  auf kurzen Zeitskalen schneller verläuft als im makroskopisch isotropen Fall, und dass der Abstand der Teilchen vor allem in der  $\mathbf{B}_0$ -parallelen Richtung wächst.
- Dagegen nimmt der Abstand der Teilchenpaare, die zum Startzeitpunkt auf der großen Halbachse der Ellipse liegen (also  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ ), in diesem einfachen Modell auf kurzen Zeitskalen langsam ab. In der Tat sieht man in anisotroper MHD-Turbulenz auf kurzen Zeitskalen nur eine sehr langsame Zunahme des Teilchenabstands von Teilchenpaaren mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$ .

Mit Hilfe dieses einfachen Modells kann man also besser verstehen, warum die relative Dispersion auf kurzen Zeitskalen für die Teilchenpaare mit  $\mathbf{R}_0 \parallel \mathbf{B}_0$  so langsam verläuft. Die Zeitentwicklung der Eddies und die Skalenabhängigkeit des Geschwindigkeitsfeldes werden jedoch in diesem Modell völlig vernachlässigt.



# E Batchelor-Gesetz im MHD-Fall

Für die Skalierung der relativen Dispersion im Grenzfall kurzer Zeiten erhält man in homogener, isotroper Turbulenz allgemein (siehe Kapitel 7.1)

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle \approx \begin{cases} [D_{LL}(R_0) + 2D_{NN}(R_0)]t^2 & \text{3D-Fall,} \\ [D_{LL}(R_0) + D_{NN}(R_0)]t^2 & \text{2D-Fall,} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

hierbei bezeichnen  $D_{LL}$  und  $D_{NN}$  jeweils die longitudinale und transversale Strukturfunktion zweiter Ordnung des Eulerschen Geschwindigkeitsfeldes.

Für Teilchenpaare mit Anfangsabständen im Inertialgebiet lässt sich die Abhängigkeit des Proportionalitätsfaktors vom Anfangsabstand angeben. Bei der Herleitung wird folgender Zusammenhang, der auf der Inkompressibilität des Geschwindigkeitsfeldes beruht, verwendet [102]

$$D_{NN}(r) = \begin{cases} D_{LL}(r) + \frac{1}{2}r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r) & \text{3D-Fall,} \\ D_{LL}(r) + r \frac{\partial}{\partial r} D_{LL}(r) & \text{2D-Fall.} \end{cases}$$

## E.1 Kolmogorov- und Goldreich-Sridhar-Phänomenologie

Geht man von einer Skalierung des Energiespektrums mit  $k^{-5/3}$  aus, welche sich in der Kolmogorov- und der Goldreich-Sridhar-Phänomenologie ergibt, so skaliert die longitudinale Strukturfunktion  $D_{LL}(r)$  im Inertialgebiet wie

$$D_{LL}(r) = C_2 \epsilon^{2/3} r^{2/3}. \quad (\text{E.2})$$

Für die transversale Strukturfunktion folgt aus (E.2) und (E.1)

$$D_{NN}(r) = C_2 \epsilon^{2/3} \left[ r^{2/3} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} r^{2/3} \right] = \frac{4}{3} D_{LL}(r).$$

Für die relative Dispersion gelangt man hiermit zu der Relation

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle \approx \frac{11}{3} C_2 (\epsilon R_0)^{2/3} t^2,$$

dem sogenannten Batchelor-Gesetz.

## E.2 Iroshnikov-Kraichnan-Phänomenologie

In der Iroshnikov-Kraichnan-, der Boldyrev- und der Gogoberidze-Phänomenologie skaliert das Energiespektrum mit  $k^{-3/2}$ , dadurch verändert sich auch die Skalierung der Strukturfunktion zweiter Ordnung

$$D_{LL}(r) = C_2 \epsilon^{1/2} b_{\text{rms}} r^{1/2}. \quad (\text{E.3})$$

Im dreidimensionalen Fall ergibt sich für die transversale Strukturfunktion

$$D_{NN}(r) = C_2(\epsilon b_{\text{rms}})^{1/2} \left[ r^{1/2} + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} r^{1/2} \right] = \frac{5}{4} D_{LL}(r).$$

Damit erhält man einen leicht modifizierten Vorfaktor im Skalierungsgesetz der relativen Dispersion auf kurzen Zeitskalen

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle \approx \frac{7}{2} C_2 (\epsilon b_{\text{rms}} R_0)^{1/2} t^2.$$

In zweidimensionaler MHD-Turbulenz findet man eine  $k^{-3/2}$ -Skalierung des Energiespektrums im Inertialgebiet. Man erhält daher für die transversale Strukturfunktion

$$D_{NN}(r) = C_2(\epsilon b_{\text{rms}})^{1/2} \left[ r^{1/2} + r \frac{\partial}{\partial r} r^{1/2} \right] = \frac{3}{2} D_{LL}(r).$$

Daraus folgt für die relative Dispersion auf kurzen Zeitskalen

$$\langle (\mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0) - \mathbf{R}_0)^2 \rangle \approx \frac{5}{2} C_2 (\epsilon b_{\text{rms}} R_0)^{1/2} t^2.$$

Im hydrodynamischen Fall nimmt man an, dass der Vorfaktor  $C_2$  im Grenzfall hoher Reynoldszahlen eine universelle Größe ist. Da im MHD-Fall nicht von einer vollkommen lokalen Energiekaskade ausgegangen werden kann, kann man diese Annahme nicht unmittelbar auf magnetohydrodynamische Turbulenz übertragen.

### E.3 Batchelor-Zeitskala

Die Batchelor-Zeitskala entspricht der Zeitskala auf der die Relativgeschwindigkeit eines Teilchenpaares mit seiner Anfangs-Relativgeschwindigkeit korreliert bleibt [9, 98]. Diese Zeitskala wird über die Eddy-Turnover-Zeit eines Wirbels der Ausdehnung  $\ell \sim R_0$  abgeschätzt. Für  $R_0$  im Inertialgebiet ergibt sich mit den Beziehungen  $\epsilon \sim v_\ell^2 / \tau_{\text{cas}}$  und  $v_\ell \sim \ell / \tau_\ell$  für  $\tau_{\text{cas}} \sim \tau_\ell$  (d. h. Kolmogorov oder Goldreich-Sridhar-Phänomenologie)

$$\epsilon \sim \frac{v_\ell^2}{\tau_\ell} \sim \frac{\ell^2}{\tau_\ell^3} \quad \rightarrow \quad \tau_\ell \sim \epsilon^{-1/3} \ell^{2/3}.$$

Für Phänomenologien mit  $E(k) \sim k^{-3/2}$  erhält man eine leicht modifizierte Relation mit  $\tau_{\text{cas}} \sim b_{\text{rms}} \ell / v_\ell^2$

$$\epsilon \sim \frac{v_\ell^2 \ell}{b_{\text{rms}} \tau_\ell^2} \sim \frac{\ell^3}{b_{\text{rms}} \tau_\ell^4} \quad \rightarrow \quad \tau_\ell \sim (\epsilon b_{\text{rms}})^{-1/4} \ell^{3/4}.$$

# F Winkelstatistik

Um den relativen Dispersionsprozess zu untersuchen, ist es nützlich die Winkel zwischen verschiedenen relativen Größen eines Teilchenpaares, wie zum Beispiel dem Separationsvektor  $\mathbf{R}$  oder der Relativgeschwindigkeit  $\mathbf{U}$  zu betrachten. Eine solche Winkelstatistik wurde zuerst von *Yeung und Borgas* [138] verwendet.

Es wird im Folgenden exemplarisch der Winkel  $\theta$  zwischen zwei Vektoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ , die einem Teilchenpaar zugeordnet sind, betrachtet. Der Winkel  $\theta$  kann Werte im Bereich  $0 \leq \theta \leq \pi$  annehmen (er wird in rad gemessen). Sind die beiden Vektoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$  statistisch unabhängig voneinander, so entspricht die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Winkels  $\theta$  einer sinusförmigen bzw. konstanten Verteilung, wie man sich leicht an Hand der Einheitskugel bzw. des Einheitskreises herleiten kann

$$P(\theta) = \frac{1}{2} \sin(\theta) \quad (3\text{D-Fall}), \quad P(\theta) = \frac{1}{\pi} \quad (2\text{D-Fall}).$$

Die Faktoren ergeben sich durch Normierung von  $\int_0^\pi P(\theta) d\theta$  auf Eins. Eine solche Verteilung wird im Folgenden als statistisch isotrop bezeichnet. Die Isotropie bezieht sich hierbei aber nur auf den Winkel  $\theta$  und nicht auf die Amplituden der Größen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{D}$ .

Um die Abweichungen von einer solchen isotropen Winkelverteilung besser sichtbar zu machen, werden in dieser Arbeit der Winkelmittelwert bzw. die Winkelvarianz eingeführt. Der Winkelmittelwert  $E_c(\theta)$  ist folgendermaßen definiert

$$E_c(\theta) = \int_0^\pi \cos(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (\text{F.1})$$

Der Winkelmittelwert einer statistisch isotropen Verteilung beträgt 0. Statt  $\theta$  wird in Gleichung (F.1)  $\cos(\theta)$  verwendet. Dies hat den Vorteil, dass sich eine Unterscheidung zwischen der Messung der Winkel in Grad und Rad erübrigt. Weiterhin sind Winkelwahrscheinlichkeitsverteilungen im 3D-Fall um 0 und  $\pi$  schlecht aufgelöst, weil in diese Bereiche in der Regel nur wenige Ereignisse fallen. Durch die Verwendung des Kosinus wirken sich die statistischen Fehler nicht so stark aus. Auch ist über den Kosinus die Verbindung zum Skalarprodukt der beiden Vektoren gegeben.

Ein positiver Winkelmittelwert bedeutet, dass  $\mathbf{C}$  bevorzugt parallel zu  $\mathbf{D}$  ausgerichtet ist, ein negativer Winkelmittelwert zeigt eine bevorzugte antiparallele Ausrichtung an. Der Winkelmittelwert kann maximal die Werte 1 für  $P(\theta) = \delta(\theta)$  bzw.  $-1$  für  $P(\theta) = \delta(\theta - \pi)$  annehmen, wobei hier mit  $\delta(x)$  die Diracsche Delta-Funktion bezeichnet wird.

In manchen Fällen ist eine Unterscheidung zwischen paralleler und antiparalleler Ausrichtung nicht sinnvoll oder nicht möglich. Der Winkelmittelwert einer solchen Verteilung ist dann Null. Trotzdem ist es interessant, ob  $\mathbf{C}$  entlang (also parallel oder antiparallel)

oder senkrecht zu  $\mathbf{D}$  ausgerichtet ist. Hierzu wird die Winkelvarianz  $V_c(\theta)$  eingeführt<sup>1</sup>

$$V_c(\theta) = \int_0^\pi \cos^2(\theta) P(\theta) d\theta. \quad (\text{F.2})$$

Im Falle einer isotropen Verteilung ergeben sich die Werte  $1/3$  (3D-Fall) bzw.  $1/2$  (2D-Fall). Steht  $\mathbf{C}$  vorwiegend senkrecht zu  $\mathbf{D}$ , so ist die Winkelvarianz kleiner als im Falle einer isotropen Verteilung. Ist dagegen  $\mathbf{C}$  bevorzugt entlang  $\mathbf{D}$  ausgerichtet, so ergeben sich Werte größer als  $1/3$  bzw.  $1/2$  für die Winkelvarianz. Der Minimalwert der Winkelvarianz ist Null ( $P(\theta) = \delta(\theta - \pi/2)$ ), der Maximalwert der Winkelvarianz beträgt 1 ( $P(\theta) = \frac{1}{2}(\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi))$ ).

---

<sup>1</sup>Die folgende Definition ist nur sinnvoll, wenn  $E_c(\theta) = 0$ . Die Winkelvarianz wird in dieser Arbeit nur für solche Verteilungen verwendet. Für Winkelverteilungen mit einem endlichem Winkelmittelwert  $E_c(\theta) \neq 0$  sollte eine andere Definition verwendet werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Alexakis: *Nonlocal phenomenology for anisotropic magnetohydrodynamic turbulence*. *Astrophysical Journal*, 667:L93–L96, 2007.
- [2] A. Alexakis, B. Bigot, H. Politano, and S. Galtier: *Anisotropic fluxes and nonlocal interactions in magnetohydrodynamic turbulence*. *Physical Review E*, 76:056313, 2007.
- [3] H. Alfvén and C. G. Fälthammar: *Cosmical Electrodynamics*. Oxford University Press, 1963.
- [4] G. Amdahl: *Validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities*. In *AFIPS Conference Proceedings*, volume 30, pages 483–485, 1967.
- [5] A. Arnéodo, C. Baudet, F. Belin, *et al.*: *Structure functions in turbulence, in various flow configurations, at Reynolds number between 30 and 5000, using extended self-similarity*. *Europhysics Letters*, 43(6):411–416, 1996.
- [6] A. Arnéodo, R. Benzi, J. Berg, *et al.*: *Universal intermittent properties of particle trajectories in highly turbulent flows*. *Physical Review Letters*, 100:254504, 2008.
- [7] K. Asamovic, R. Bodik, B. C. Catanzaro, J. J. Gebis, P. Husbands, K. Keutzer, D. A. Patterson, W. L. Plishker, J. Shalf, S. W. Williams, and K. A. Yelick: *The landscape of parallel computing research: A view from Berkeley*. Technical Report UCB/EECS-2006-183, EECS Department, University of California, Berkeley, 2006. <http://www.eecs.berkeley.edu/Pubs/TechRpts/2006/EECS-2006-183.html>.
- [8] C. Basdevant, B. Legras, R. Sadourny, and B. Beland: *A study of barotropic model flows: Intermittency, waves and predictability*. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 38(11):2305, 1981.
- [9] G. K. Batchelor: *The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion*. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 76(328):133–146, 1950.
- [10] G. K. Batchelor: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [11] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripicciono, C. Baudet, F. Massaioli, and S. Succi: *Extended self-similarity in turbulent flows*. *Physical Review E*, 48(1):R29–R32, 1993.

- [12] L. Biferale, E. Bodenschatz, M. Cencini, A. S. Lanotte, N. T. Ouellette, F. Toschi, and H. Xu: *Lagrangian structure functions in turbulence: A quantitative comparison between experiment and direct numerical simulation*. *Physics of Fluids*, 20:065103, 2008.
- [13] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B. J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi: *Multifractal statistics of Lagrangian velocity and acceleration in turbulence*. *Physical Review Letters*, 93(6):4502, 2004.
- [14] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, B. J. Devenish, A. Lanotte, and F. Toschi: *Lagrangian statistics of particle pairs in homogeneous isotropic turbulence*. *Physics of Fluids*, 17:115101, 2005.
- [15] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, and F. Toschi: *Particle trapping in three-dimensional fully developed turbulence*. *Physics of Fluids*, 17:021701, 2005.
- [16] L. Biferale and F. Toschi: *Joint statistics of acceleration and vorticity in fully developed turbulence*. *Journal of Turbulence*, 6(1):1–8, 2006.
- [17] D. Biskamp: *Magnetohydrodynamic Turbulence*. Cambridge University Press, 2003.
- [18] D. Biskamp and W.-C. Müller: *Decay laws for three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. *Physical Review Letters*, 83(11), 1999.
- [19] D. Biskamp and W.-C. Müller: *Scaling properties of three-dimensional isotropic magnetohydrodynamic turbulence*. *Physics of Plasmas*, 7(12), 2000.
- [20] D. Biskamp and E. Schwarz: *On two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. *Physics of Plasmas*, 8(7), 2001.
- [21] G. Boffetta, A. Mazzino, and A. Vulpiani: *Twenty-five years of multifractals in fully developed turbulence: a tribute to Giovanni Paladin*. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:363001, 2008.
- [22] S. Boldyrev: *Spectrum of magnetohydrodynamic turbulence*. *Physical Review Letters*, page 115002, 2006.
- [23] M. Bourgoin, N. T. Ouellette, H. Xu, J. Berg, and E. Bodenschatz: *The role of pair dispersion in turbulent flow*. *Science*, 311:835–383, 2006.
- [24] P. Bradshaw (editor): *Turbulence*, volume 12 of *Topics in Applied Physics*. Springer-Verlag, 1976.
- [25] S. I. Braginskii: *Transport processes in a plasma*. *Reviews of Plasma Physics*, 1:205–311, 1965.
- [26] A. Brandenburg and R. M. Kerr: *Helicity in Hydro and MHD Reconnection*, pages 358–365. Number 571 in *Lecture Notes in Physics*. Springer, 2001.
- [27] A. Brandenburg and K. Subramanian: *Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory*. *Physics Reports*, 417:1–209, 2005.

- [28] W. Braun, F. De Lillo, and B. Eckhardt: *Geometry of particle paths in turbulent flows*. *Journal of Turbulence*, 7(62), 2006.
- [29] U. Bremer: *Direkte und inverse Kaskadenprozesse in getriebener zweidimensionaler MHD-Turbulenz*. Dissertation, Fakultät für Physik der Technischen Universität München, 1994.
- [30] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage, 2001.
- [31] R. Bruno and V. Carbone: *The solar wind as a turbulence laboratory*. *Living Reviews in Solar Physics*, 2(4), 2005. Online Article: cited 18. February 2008.
- [32] A. Busse: *Untersuchung hydrodynamischer und magnetohydrodynamischer Turbulenz mit Lagrangeschen Testteilchen*. Diplomarbeit, Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Bayreuth, 2006.
- [33] A. Busse, W.-C. Müller, H. Homann, and R. Grauer: *Statistics of passive tracers in three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. *Physics of Plasmas*, 14:122303, 2007.
- [34] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quaternioni, and T. A. Zang: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [35] R. Castilla, J. M. Redondo, P. J. Gámez-Montero, and A. Babiano: *Particle dispersion processes in two-dimensional turbulence: a comparison with 2-D kinematic simulation*. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 14:139–151, 2007.
- [36] J. R. Chasnov: *Simulation of the Kolmogorov inertial subrange using an improved subgrid model*. *Physics of Fluids A*, 3:1988, 1991.
- [37] S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, and Z. S. She: *On statistical correlations between velocity increments and locally averaged dissipation in homogeneous turbulence*. *Physics of Fluids A*, 5(2):458–463, 1993.
- [38] L. Chevillard, S. G. Roux, E. Lévêque, N. Mordant, J.-F. Pinton, and A. Arnéodo: *Intermittency of velocity time increments in turbulence*. *Physical Review Letters*, 95(6):064501, 2005.
- [39] J. Cho and E. T. Vishniac: *The anisotropy of magnetohydrodynamic Alfvénic turbulence*. *Astrophysical Journal*, 539:273–282, 2000.
- [40] L. R. Collins and A. Keswani: *Reynolds number scaling of particle clustering in turbulent aerosols*. *New Journal of Physics*, 6:119, 2004.
- [41] S. Corrsin: *Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence*. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:115–119, 1963.
- [42] D. L. Cotrell, G. B. McFadden, and B. J. Alder: *Instability in pipe flow*. *PNAS*, 105(2):428–430, 2008.

- [43] P. A. Davidson: *Turbulence*. Oxford University Press, 2004.
- [44] W. Dobler, N. E. L. Haugen, T. A. Yousef, and A. Brandenburg: *Bottleneck effect in three-dimensional turbulence simulations*. *Physical Review E*, 68(2):6304–6312, 2004.
- [45] W. M. Elsasser: *The hydromagnetic equations*. *Physical Review*, 79(1):183, 1950.
- [46] V. Eswaran and S. B. Pope: *An examination of forcing in direct numerical simulations of turbulence*. *Computers and Fluids*, 16(3):257–278, 1988.
- [47] C. G. Fälthammar and F. S. Mozer: *On the concept of moving magnetic field lines*. *Eos*, 88(15):169–170, 2007.
- [48] M. Farge: *Wavelet transforms and their application to turbulence*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24:395–457, 1992.
- [49] F. N. Frenkiel: *On the statistical theory of turbulent diffusion*. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(6):508–515, 1952.
- [50] M. Frigo and S. G. Johnson. <http://www.fftw.org>.
- [51] U. Frisch: *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996.
- [52] S. Ghosal, T. S. Lund, P. Moin, and K. Akselvoll: *A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows*. *Journal of Fluid Mechanics*, 286:229–255, 1995.
- [53] J. P. Goedbloed and S. Poedts: *Principles of Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [54] G. Gogoberidze: *On the nature of incompressible magnetohydrodynamic turbulence*. *Physics of Plasmas*, 14:022304, 2007.
- [55] G. Gogoberidze: *Persönliche Mitteilung*, 2007.
- [56] P. Goldreich and S. Sridhar: *Toward a theory of interstellar turbulence. II. Strong Alfvénic turbulence*. *Astrophysical Journal*, 438:763–775, 1995.
- [57] T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano: *Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using high-resolution direct numerical simulation*. *Physics of Fluids*, 14(3):1065–1081, 2002.
- [58] T. Grafke, H. Homann, J. Dreher, and R. Grauer: *Numerical simulations of possible finite time singularities in the incompressible Euler equations: comparison of numerical methods*. *Physica D*, 237:1932, 2008.
- [59] R. Grappin: *Persönliche Mitteilung*, 2009.
- [60] S. Grossmann: *Diffusion by turbulence*. *Annalen der Physik*. 7. Folge, 47(7):577–582, 1990.

- [61] S. Grossmann and D. Lohse: *Scale resolved intermittency in turbulence*. Physics of Fluids, 6(2):611–617, 1994.
- [62] J. C. Hill: *Homogeneous turbulent mixing with chemical reaction*. Annual Review of Fluid Mechanics, 8:135–161, 1976.
- [63] J. O. Hinze: *Turbulence*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill, 1975.
- [64] H. Homann: *Lagrangian statistics of turbulent flows in fluids and plasmas*. Dissertation, Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum, 2006.
- [65] H. Homann, J. Dreher, and R. Grauer: *Impact of the floating-point precision and interpolation scheme on the results of DNS of turbulence by pseudo-spectral codes*. Computer Physics Communications, 177:560, 2006.
- [66] H. Homann, R. Grauer, A. Busse, and W.-C. Müller: *Lagrangian statistics of navier-stokes and mhd turbulence*. Journal of Plasma Physics, 73:821, 2007.
- [67] R. S. Iroshnikov: *Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field*. Soviet Astronomy, 7:568, 1964.
- [68] T. Ishihara and Y. Kaneda: *Relative diffusion of a pair of fluid particles in the inertial subrange of turbulence*. Physics of Fluids, 14(11):L69–L72, 2002.
- [69] E. J. Kim: *Mean square displacement in small scale dynamos*. Physics of Plasmas, 7(5):1746–1751, 2000.
- [70] S. P. Kiselev, E. V. Vorozhtsov, and V. M. Fonin: *Foundations of Fluid Mechanics with Applications*. Birkhäuser, 1999.
- [71] R. H. Kraichnan: *Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence*. Physics of Fluids, 8:1365–1387, 1965.
- [72] R. H. Kraichnan and D. Montgomery: *Two-dimensional turbulence*. Reports on Progress in Physics, 43:547–619, 1980.
- [73] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz: *Fluid particle accelerations in fully developed turbulence*. Nature, 409:1017–19, 2001.
- [74] A. G. Lamorgese, D. A. Caughey, and S. B. Pope: *Direct numerical simulation of homogeneous turbulence with hyperviscosity*. Physics of Fluids, 17:015106, 2005.
- [75] L. D. Landau und E. M. Lifschitz: *Hydrodynamik*. Akademie-Verlag, Berlin, 5. Auflage, 1991.
- [76] A. Lanotte: *Persönliche Mitteilung*, November 2007.
- [77] M. Lesieur: *Turbulence in Fluids*, volume 40 of *Fluid Mechanics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2nd edition, 2000.

- [78] R. C. Lien and W. A. D'Asaro: *The Kolmogorov constant for the Lagrangian velocity spectrum and structure function*. *Physics of Fluids*, 14(2):4456–4459, 2002.
- [79] D. Lohse and A. Müller-Groeling: *Bottleneck effects in turbulence: Scaling phenomena in  $r$  versus  $p$  space*. *Physical Review Letters*, 74(10):1747–1750, 1995.
- [80] D. O. Martínez, S. Chen, G. D. Doolen, R. H. Kraichnan, L. P. Wang, and Y. Zhou: *Energy spectrum in the dissipation range of fluid turbulence*. *Journal of Plasma Physics*, 57(1):195–201, 1997.
- [81] J. Mason, F. Cattaneo, and S. Boldyrev: *Numerical measurements of the spectrum in magnetohydrodynamic turbulence*. *Physical Review E*, 77:036403, 2008.
- [82] A. Mazzino and M. Vergassola: *Interference between turbulent and molecular diffusion*. *Europhysics Letters*, 37(8):535–540, 1997.
- [83] W. D. McComb: *The Physics of Fluid Turbulence*, volume 25 of *The Oxford Engineering Science Series*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [84] P. Mestayer: *Local isotropy and anisotropy in a high-Reynolds-number turbulent boundary layer*. *Journal of Fluid Mechanics*, 125:475–503, 1982.
- [85] P. A. Milewski, E. G. Tabak, and E. Vanden-Eijnden: *Resonant wave interaction with random forcing and dissipation*. *Studies in Applied Mathematics*, 108:123–144, 2002.
- [86] P. D. Mininni and A. Pouquet: *Energy spectra stemming from interactions of Alfvén waves and turbulent eddies*. *Physical Review Letters*, 99:254502, 2007.
- [87] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, Ph. Odier, *et al.*: *Generation of a magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium*. *Physical Review Letters*, 98:044502, 2007.
- [88] A. S. Monin and A. M. Yaglom: *Statistical Fluid Mechanics*, volume II. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.
- [89] N. Mordant, J. Delour, E. Lévêque, O. Michel, A. Arnéodo, and J.-F. Pinton: *Lagrangian velocity fluctuations in fully developed turbulence: Scaling, intermittency, and dynamics*. *Journal of Statistical Physics*, 113(5/6):701–717, 2003.
- [90] N. Mordant, E. Lévêque, and J.-F. Pinton: *Experimental and numerical study of the Lagrangian dynamics of high Reynolds turbulence*. *New Journal of Physics*, 6(116), 2004.
- [91] N. Mordant, J.-F. Pinton, and F. Chillà: *Characterization of turbulence in a closed flow*. *Journal de Physique II France*, 7:1729–1742, 1997.
- [92] W.-C. Müller: *Persönliche Mitteilung*.
- [93] W.-C. Müller: *Makroskopische und statistische Eigenschaften dreidimensionaler magnetohydrodynamischer Turbulenz*. Dissertation, Fakultät für Physik der Technischen Universität München, 2000.

- [94] W.-C. Müller, D. Biskamp, and R. Grappin: *Statistical anisotropy of magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review E, 67:066302, 2003.
- [95] W.-C. Müller and R. Grappin: *Spectral energy dynamics in magnetohydrodynamic turbulence*. Physical Review Letters, 95(11):114502, 2005.
- [96] S. Ott and J. Mann: *An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow*. Journal of Fluid Mechanics, 422:207–223, 2000.
- [97] N. T. Ouellette and J. P. Gollub: *Dynamic topology in spatiotemporal chaos*. Physics of Fluids, 20(6):064104, 2008.
- [98] N. T. Ouellette, H. Xu, M. Bourgoïn, and E. Bodenschatz: *An experimental study of turbulent relative dispersion models*. New Journal of Physics, 8:109, 2006.
- [99] J.-F. Pinton: *Persönliche Mitteilung*, 2008.
- [100] H. Politano, A. Pouquet, and V. Carbone: *Determination of anomalous exponents of structure functions in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. Europhysics Letters, 43(5):512–521, 1998.
- [101] S. B. Pope: *Lagrangian pdf methods for turbulent flows*. Annual Review of Fluid Mechanics, 26:23–63, 1994.
- [102] S. B. Pope: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [103] A. D. Poularikas (editor): *The Transforms and Applications Handbook*. CRC Press, 1996.
- [104] A. Pouquet: *On two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 88(1):1–16, 1978.
- [105] A. Pouquet, P. L. Sulem, and M. Meneguzzi: *Influence of velocity-magnetic field correlations on decaying magnetohydrodynamic turbulence with neutral X points*. Physics of Fluids, 31(9):2635–42, 1988.
- [106] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery: *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.
- [107] M. B. Priestley: *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London, 7, 1992.
- [108] L. F. Richardson: *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1922.
- [109] L. F. Richardson: *Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph*. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 110:709–737, 1926.
- [110] R. S. Rogallo and P. Moin: *Numerical simulations of turbulent flows*. Annual Review of Fluid Mechanics, 16:99–137, 1984.

- [111] H. A. Rose and P. L. Sulem: *Fully developed turbulence and statistical mechanics*. Le Journal de Physique, 39(5):441–84, 1978.
- [112] B. Sawford: *Turbulent relative dispersion*. Annual Review of Fluid Mechanics, 33:289–317, 2001.
- [113] A. Schekochihin, S. Cowley, S. Taylor, J. Maron, and J. McWilliams: *Simulations of the small-scale turbulent dynamo*. Astrophysical Journal, 612(1):276–307, 2004.
- [114] J. Schumacher: *Lagrangian dispersion and heat transport in convective turbulence*. Physical Review Letters, 100:134502, 2008.
- [115] R. A. Shaw: *Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds*. Annual Review of Fluid Mechanics, 35:183–227, 2003.
- [116] J. V. Shebalin: *Ideal homogeneous magnetohydrodynamic turbulence in the presence of rotation and a mean magnetic field*. Journal of Plasma Physics, 72(4):507–524, 2006.
- [117] E. D. Siggia and G. S. Patterson: *Intermittency effects in a numerical simulation of stationary three-dimensional turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 86:567–592, 1978.
- [118] K. R. Sreenivasan: *On the universality of the Kolmogorov constant*. Physics of Fluids, 7:2278–2284, 1995.
- [119] K. R. Sreenivasan and R. A. Antonia: *The phenomenology of small-scale turbulence*. Annual Review of Fluid Mechanics, 29:435–72, 1997.
- [120] N. Sullivan, S. Mahalingam, and R. M. Kerr: *Deterministic forcing of homogeneous isotropic turbulence*. Physics of Fluids, 6(4):1612–1614, 1994.
- [121] P. Tabeling: *Two-dimensional turbulence: a physicist approach*. Physics Reports, 362(1):1–62, 2002.
- [122] G. I. Taylor: *Diffusion by continuous movements*. Proceedings of the London Mathematical Society Series 2, 20:196–212, 1920.
- [123] H. Tennekes and J. L. Lumley: *A first course in turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [124] F. Toschi and E. Bodenschatz: *Lagrangian properties of particles in turbulence*. Annual Review of Fluid Mechanics, 41:375–404, 2009.
- [125] M. K. Verma: *Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: recent results*. Physics Reports, 401:229–380, 2004.
- [126] M. K. Verma and D. Donzis: *Energy transfer and bottleneck effect in turbulence*. Journal of Physics A, 40:4401–4412, 2007.
- [127] A. Vincent and M. Meneguzzi: *The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence*. Journal of Fluid Mechanics, 225:1–20, 1991.

- [128] A. Voborev, O. Zikanov, P. A. Davidson, and B. Knaepen: *Anisotropy of magnetohydrodynamic turbulence at low magnetic Reynolds number*. *Physics of Fluids*, 17:125105, 2005.
- [129] G. A. Voth, A. La Porta, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz: *Measurement of particle accelerations in fully developed turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 469:121–160, 2002.
- [130] D. Škandera: *Statistical Properties and Structure of Turbulent Convection*. Dissertation, Fakultät für Physik der Technischen Universität München, 2007.
- [131] H. Xu: *Tracking Lagrangian trajectories in position-velocity space*. *Measurement Science and Technology*, 19:075105, 2008.
- [132] H. Xu, M. Bourgoïn, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz: *High order Lagrangian velocity statistics in turbulence*. *Physical Review Letters*, 96:024503, 2006.
- [133] H. Xu, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz: *Curvature of Lagrangian trajectories in turbulence*. *Physical Review Letters*, 98:050201, 2007.
- [134] H. Xu, N. T. Ouellette, and E. Bodenschatz: *Evolution of geometric structures in intense turbulence*. *New Journal of Physics*, 10:013012, 2008.
- [135] P. K. Yeung: *One- and two-particle Lagrangian acceleration correlations in numerically simulated homogeneous turbulence*. *Physics of Fluids*, 9(10):2981–2990, 1997.
- [136] P. K. Yeung: *Lagrangian characteristics of turbulence and scalar transport in direct numerical simulations*. *Journal of Fluid Mechanics*, 427:241–274, 2001.
- [137] P. K. Yeung: *Lagrangian investigations of turbulence*. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34:115–142, 2002.
- [138] P. K. Yeung and M. S. Borgas: *Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 1. Direct numerical simulations and Reynolds-number dependence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 503:93–124, 2004.
- [139] P. K. Yeung and S. B. Pope: *An algorithm for tracking fluid particles in numerical simulations of homogeneous turbulence*. *Journal of Computational Physics*, 79:373–416, 1988.
- [140] P. K. Yeung, S. B. Pope, E. A. Kurth, and A. G. Lamorgese: *Lagrangian conditional statistics, acceleration and local relative motion in numerically simulated isotropic turbulence*. *Journal of Fluid Mechanics*, 582:399–422, 2007.
- [141] P. K. Yeung, S. B. Pope, and B. L. Sawford: *Reynolds number dependence of Lagrangian statistics in large numerical simulations of isotropic turbulence*. *Journal of Turbulence*, 7(58), 2006.
- [142] P. K. Yeung and Y. Zhou: *On the universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence*. Technical Report ICASE Report No. 97-64, Institute for Computer Applications in Science and Engineering, NASA Langley Research Center, 1997.

- [143] M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, T. Ishihara, and Y. Kaneda: *16.4-Tflops direct numerical simulation of turbulence by a Fourier spectral method on the Earth Simulator*. In *Supercomputing '02: Proceedings of the 2002 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, pages 1–17, Los Alamitos, CA, USA, 2002. IEEE Computer Society Press.
- [144] K. Yoshida and T. Arimitsu: *Inertial-subrange structures of isotropic incompressible magnetohydrodynamic turbulence in the Lagrangian renormalized approximation*. *Physics of Fluids*, 19:045106, 2007.
- [145] O. Zikanov and A. Thess: *Direct numerical simulation as a tool for understanding MHD liquid metal turbulence*. *Applied Mathematical Modelling*, 28:1–13, 2004.

## Liste verwendeter Abkürzungen und Symbole

In dieser Liste sind nicht alle verwendeten Symbole aufgeführt, sondern nur diejenigen, die in mehreren Kapiteln verwendet werden.

<b><i>A</i></b>	Beschleunigung eines Lagrangeschen Testteilchens
<i>A</i>	mittleres magnetisches Potential
<i>a</i>	magnetisches Vektorpotential
<b><i>B</i></b>	Magnetfeld
<b><i>B</i><sub>0</sub></b>	mittleres Magnetfeld
<b><i>b</i></b>	Fluktuationen des Magnetfelds
DA	Phänomenologie von Boldyrev
$\Delta x$	Gitterabstand
<i>E</i>	Gesamtenergie
<i>E</i> <sup>K</sup>	kinetische Energie
<i>E</i> <sup>M</sup>	magnetische Energie
$\varepsilon$	Energiedissipationsrate
$\varepsilon$ <sup>K</sup>	kinetische Energiedissipationsrate
$\varepsilon$ <sup>M</sup>	magnetische Energiedissipationsrate
GG	Phänomenologie von Gogoberidze
GS	Phänomenologie von Goldreich und Sridhar
<b><i>f</i></b>	externe Antriebskraft
<i>H</i> <sup>K</sup>	kinetische Helizität
<i>H</i> <sup>M</sup>	magnetische Helizität
<i>H</i> <sup>X</sup>	Kreuzhelizität
$\eta$	Kolmogorov- oder auch Dissipations-Längenskala
$\eta_{IK}$	Iroshnikov-Kraichnan-Dissipationsskala
IK	Phänomenologie von Iroshnikov und Kraichnan
<b><i>j</i></b>	Stromdichtefeld
<b><i>k</i></b>	Wellenvektor

K41	Phänomenologie von Kolmogorov, 1941
$L_{\text{cor}}^{\text{K}}$	integrale Längenskala, Korrelationslänge des Geschwindigkeitsfelds
$L_{\text{cor}}^{\text{M}}$	Korrelationslänge des Magnetfelds
$L_{\text{E}}$	typische Ausdehnung der größten turbulenten Strukturen
$\lambda$	Resistivität
MHD	Magnetohydrodynamik
$\nu$	kinematische Viskosität
$\text{Pr}_{\text{m}}$	magnetische Prandtl-Zahl
$\mathbf{R}$	Abstandsvektor zweier Testteilchen
Re	Reynoldszahl
$\text{Re}_{\text{NV,MHD}}$	turbulente Reynoldszahl (Navier-Stokes- bzw. MHD-Fall)
$\rho$	Dichte
$T_{\text{cor}}^{\text{K}}$	Integrale Zeitskala, Korrelationszeit des Geschwindigkeitsfelds
$T_{\text{cor}}^{\text{M}}$	Korrelationszeit des Magnetfelds
$T_{\text{E}}$	<i>large eddy turnover time</i> , typische Zeitskala der größten turbulenten Strukturen.
$T^{\text{f}}$	Korrelationszeit des stochastischen Antriebs
$T_{\text{L}}$	Lagrangesche integrale Zeitskala
$\tau_{\text{cas}}$	Kaskadenzeit, Zeitskala auf der ein Eddy innerhalb der turbulenten Energiekaskade zerfällt.
$\tau_{\text{ac}}$	Interaktionszeit, Zeitskala der sich eine einzelne Wechselwirkung innerhalb der turbulenten Energiekaskade abspielt.
$\tau_{\eta}$	Kolmogorov- oder auch Dissipations-Zeitskala
$u_{\eta}$	Kolmogorov-Geschwindigkeit
$\mathbf{V}$	Geschwindigkeit eines Lagrangeschen Testteilchens
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsfeld
$v_{\text{A}}$	Alfvén-Geschwindigkeit
$\boldsymbol{\omega}$	Wirbelstärke- oder auch Vortizitätsfeld
$\mathbf{X}$	Position eines Lagrangeschen Testteilchens
$z^{\pm}$	Elsässer-Felder





# Danksagung

Zum Schluss möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mich während der Erstellung dieser Arbeit begleitet und unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt:

- Wolf-Christian Müller für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit, die unermüdlige Beantwortung von Fragen und zahlreiche Diskussionen.
- Prof. Dr. Walter Zimmermann, der mir die Möglichkeit zur Promotion an der Universität Bayreuth gegeben hat.
- Dr. Bernhard Winkler vom Rechenzentrum der Universität Bayreuth, den Mitarbeitern des Rechenzentrums Garching und des Leibniz-Rechenzentrums für ihre Unterstützung beim Umgang mit verschiedenen Hochleistungsrechnern.
- Den Mitarbeitern der unabhängigen Max-Planck Nachwuchsgruppe und des Bereiches Tokamakphysik am IPP für die angenehme Arbeitsatmosphäre.
- Dan Škandera und Tobias Hertkorn für Beratung in Fragen der Numerik und Programmierung.
- Grigol Gogoberidze, Roland Grappin, Reiner Grauer und Holger Homann für die fruchtbare Zusammenarbeit und zahlreiche Diskussionen.
- Meinen Eltern für ihre Unterstützung und den Rückhalt, den sie mir während dieser Zeit gegeben haben. Ihnen möchte ich diese Arbeit widmen.