Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 1 - Funktionen –

Sascha Kurz Jörg Rambau

12. August 2010

Lösung Aufgabe 1.1.

a) *Falls der Nenner Null wird, ist der Term nicht definiert. Für* $c, o, s \neq 0$ *gilt* $\frac{(c^3 o^4)^2 \cdot s^6}{(s \cdot c)^5 \cdot o^7} = \frac{c^6 o^8 s^6}{s^5 c^5 o^7} = cos.$

b) *Der Term ist immer definiert und es gilt* $\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}+\frac{3}{2}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{9}{4}} = \frac{11}{27}.$

c) *(Bemerkung:* e^{z^3} *entspricht* $e^{(z^3)}$ *und nicht* $(e^z)^3$*.) Falls der Nenner Null wird, ist der Term nicht definiert. Es muss also* $z \neq 0$ *gelten.* $\ln x$ *ist nur für* $x > 0$ *definiert. Da* e^{z^3} *für alle* $z \in \mathbb{R}$ *größer als Null ist, muss* $t > 0$ *gelten. Für* $z \neq 0, t > 0$ *gilt somit*

$$\frac{\ln\left(\frac{e^{z^3}}{t}\right) + \ln t}{z^2} = \frac{z^3 - \ln t + \ln t}{z^2} = z.$$

d) *Der Term ist immer definiert und es gilt* $27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}.$

e) *Die Funktionen Sinus und Kosinus sind für ganz* $\mathbb{R}$ *definiert.* $w^{-4} + 1 = 0$ *ist äquivalent zu* $w^4 = -1$ *– eine Gleichung, die in den reellen Zahlen keine Lösung besitzt. Somit gibt es keine Definitionslücken durch den Nenner* $w^{-4} + 1$*. Der Ausdruck* w^{-4} *dagegen existiert nur für* $w \neq 0$*. Der gesamte Term lässt sich wie folgt vereinfachen:*

$$\begin{aligned}
\frac{\ln\left(\frac{(\sin w + \cos w)^2 + (\sin w - \cos w)^2}{2}\right)}{\cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{w^{-4}+1}\right)\right)} &= \frac{\ln\left(\sin^2 w + \cos^2 w\right)}{\cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{w^{-4}+1}\right)\right)} \\
&= \frac{\ln(1)}{\cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{w^{-4}+1}\right)\right)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*. Im letzten Schritt muss man noch beachten, dass der Nenner nicht Null wird. Hierzu stellt sich zunächst die Frage, wann* $\cos(x) = 0$ *gilt. Dies tritt z. B. bei* $90°$ *und* $270°$ *bzw.* $\frac{\pi}{2}$ *und* $\frac{3\pi}{2}$ *auf. Da* $\cos$ *mit Periode* 2π *periodisch ist, ist* $\cos(x) = 0$ *äquivalent zu* $x \in \left\{\frac{2z-1}{2}\pi \mid z \in \mathbb{Z}\right\}$*. Also stellt sich die Frage: für welche* $w \neq 0$ *gilt*

$$\sin\left(\frac{\pi}{w^{-4}+1}\right) \in \left\{\frac{2z-1}{2}\pi \mid z \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\ldots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}.$$

Hierzu bemerken wir, dass die Sinusfunktion nur Werte zwischen minus eins und eins annimmt. Da $\frac{2z-1}{2}\pi < -1$ *für* $z \leq 0$ *und* $\frac{2z-1}{2}\pi > 1$ *für* $z \geq 1$ *gilt, existiert kein* w*, so dass* $\cos\left(\sin\left(\frac{\pi}{w^{-4}+1}\right)\right) = 0$ *gilt. Für* $w \neq 0$ *ist somit der komplette Ausgangsterm definiert.*

Lösung Aufgabe 1.2.

1. *Berücksichtigt man die Pauschale von 600 Euro, so lautet die Funktion für die zu zahlende Steuer in Abhängigkeit des Erwerbserlöses:*
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 8\,265, \\ \left\lfloor \frac{7\,931 \lfloor x \rfloor^2 + 28\,916\,432 \lfloor x \rfloor - 780\,602\,697\,024}{1\,000\,000\,000} \right\rfloor & : \quad 8\,265 \leq x < 13\,340, \\ \left\lfloor \frac{13\,289 \lfloor x \rfloor^2 + 847\,976\,058 \lfloor x \rfloor - 8\,595\,650\,068\,831}{5\,000\,000\,000} \right\rfloor & : \quad 13\,340 \leq x < 52\,752, \\ \left\lfloor \frac{45 \lfloor x \rfloor - 911\,500}{100} \right\rfloor & : \quad x \geq 52\,752. \end{cases}$$

2. *Verwendet man die Wertetabelle*
$$\begin{aligned} &f(0) = 0, \quad f(8\,264) = 0, \quad f(8\,270) = 0, \quad f(8\,271) = 1, \\ &f(10\,000) = 301, \quad f(12\,000) = 708, \quad f(13\,340) = 1\,016, \\ &f(20\,000) = 2\,735, \quad f(30\,000) = 5\,760, \quad f(40\,000) = 9\,317, \\ &f(52\,751) = 14\,622, \quad f(60\,000) = 17\,885, \quad f(70\,000) = 22\,385, \\ &f(80\,000) = 26\,885, \quad f(90\,000) = 31\,385, \quad f(100\,000) = 35\,885, \end{aligned}$$
so ergibt sich die Zeichnung in Abbildung 1.1.

3. *Besonders einfach erkennt man, dass alle Werte x aus* $[0, 8265)$ *bzw.* $[-\infty, 8265)$ *zu einem Funktionswert $f(x) = 0$ führen. Mit etwas Mühe prüft man nach, dass f monoton steigend ist bzw. vertraut darauf, dass der Gesetzgeber dies sichergestellt hat. (Andernfalls hätte bestimmt irgendjemand diese Steuerungerechtigkeit bemerkt und sich darüber beschwert.) Wegen* $f(8270) = 0$ *und* $f(8271) = 1$ *lautet das Urbild von* 0*:* $[0, 8271)$ *bzw.* $[-\infty, 8271)$.

4. *Es ist Geschmackssache, ob man auch negative Erwerbserlöse zulassen möchte. Sowohl die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als auch die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_0^+$ wären sinnvolle Wahlen für den Definitionsbereich. Wenn man es ganz genau nimmt, dürften nur ganze Centbeträge zugelassen werden. Hier könnte man* $\left\{ \frac{z}{100} \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$ *oder* $\left\{ \frac{z}{100} \mid z \in \mathbb{N}_0 \right\}$ *verwenden.*

   Durch das in der Funktion enthaltene Abrunden, nimmt f nur ganze Zahlen an. Überprüft man, dass $f(x) \geq 0$ und $f(x+1) \geq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so ergibt sich der Wertebereich $\mathbb{N}_0$.

5. *Setzen wir die Gleichung* $\frac{45x - 911\,500}{100} = 0{,}40x = \frac{40x}{100}$ *an, so ergibt sich* $x = 182\,300$ *als Lösung. Hieraus schließen wir, dass man ab Erwerbserlösen von* $182\,300$ *Euro einen realen Steuersatz von mindestens* 40 *% bezahlt.*

   Streng genommen müssten wir die Einflüsse des Abrundens und die Monotonie von $\frac{f(x)}{x}$ *etwas genauer überprüfen.*

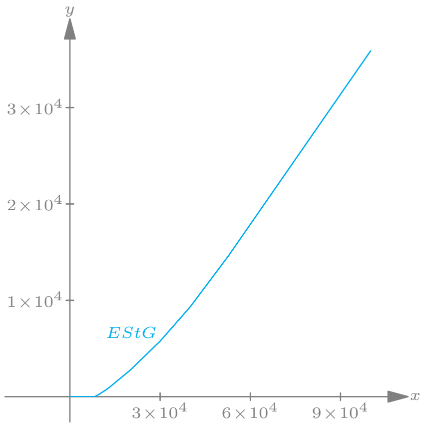


Abb. 1.1: Steuerfunktion aus Aufgabe 1.2.

Lösung Aufgabe 1.3.

a.1) $(g \circ f)(x) = (3x-2)^3 + 4(3x-2) - 3 = 27x^3 - 54x^2 + 48x - 19$

a.2) $(f \circ g)(x) = 3(x^3 + 4x - 3) - 2 = 3x^3 + 12x - 11$

b.1) $(g \circ f)(x) = \ln\left((e^x+1)^2\right) \overset{e^x+1>0}{=} 2\ln(e^x+1)$

b.2) $(f \circ g)(x) = e^{\ln\left((x+1)^2\right)} = (x+1)^2$

Lösung Aufgabe 1.4.

1. *Ist L der Lohn vor den Lohnveränderungen, so ergibt sich*

$$L \cdot (1-0{,}20) \cdot (1+0{,}21) = 0{,}968L$$

als Lohn nach einer 20 %-tigen Lohnkürzung und einer anschließenden Lohnerhöhung um 21 %. Beträgt die anschließende Lohnerhöhung dagegen 22 %, so lautet der resultierende Lohn zum März 2010:

$$L \cdot (1-0{,}20) \cdot (1+0{,}22) = 0{,}976L.$$

Also sollte der Betriebsratsvorsitzende nicht zustimmen.

2. *Falls der Vorschlag der Geschäftsführung durchgesetzt wird, verringert sich der Lohn der Angestellten um* $1 - 0{,}968 = 0{,}032 = 3{,}2$ *%.*

3. $L\cdot(1-0{,}20)\cdot(1+p)=L \quad\Leftrightarrow\quad 0{,}8+0{,}8p=1 \quad\Leftrightarrow\quad p=0{,}25$
   Der Betriebsratsvorsitzende sollte eine Lohnerhöhung von $p=0{,}25=25$ % zum März 2010 fordern, damit die Angestellten längerfristig nicht schlechter dastehen.

Lösung Aufgabe 1.5.

1. *Da z. B. Fiat drei Zulieferer hat, kann es keine Funktion f geben, die einen Automobilkonzern auf einen Zulieferer abbildet.*

2. *Setze z. B. Definitionsmenge $D=\{B,A,C\}$, Wertemenge $W=\{N,V\}$ und definiere $f: D\to W$ durch $f(B)=N$, $f(A)=V$ und $f(C)=N$. Hierbei sind A, B, C, N und V Platzhalter für irgendwelche Objekte, z. B. natürliche Zahlen: $A=1$, $B=2$, $C=3$, $N=17$, $V=24$.*

Lösung Aufgabe 1.6. *Lösen wir $(u,v)=f(x,y)$ nach (x,y) auf, erhalten wir:*

$$\begin{aligned}
&\left|\begin{array}{rcl} u &=& 1+2x+3y \\ v &=& 2+3x-2y \end{array}\right| \\
\Leftrightarrow\ &\left|\begin{array}{rcl} 2u+3v &=& 8+13x \\ 3u-2v &=& -1+13y \end{array}\right| \\
\Leftrightarrow\ &\left|\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2u+3v-8}{13} \\ y &=& \frac{3u-2v+1}{13} \end{array}\right|
\end{aligned}$$

Die Umkehrabbildung lautet somit $f^{-1}(u,v)=\left(\frac{2u+3v-8}{13},\frac{3u-2v+1}{13}\right)$.

Lösung Aufgabe 1.7.

a) $y=5x+3 \Leftrightarrow x=\frac{y-3}{5}$. *Die letzte Gleichung gibt an, wie man aus dem $y-$Wert (d. h. aus dem Funktionswert von f an der Stelle x) auf den Wert x selbst zurückschließen kann. Nach Vertauschen von x und y ergibt sich die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion: $y=\frac{x-3}{5}$. Also:*

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \frac{x-3}{5}.$$

b) $y = 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{4} \overset{x \in \mathbb{R}_0^+}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{\frac{y}{4}} = \frac{\sqrt{y}}{2}$. *Somit gilt:*

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

c) $y = 2e^{3x} \Leftrightarrow e^{3x} = \frac{y}{2}$. *Anwenden der* $\ln -$*Funktion auf beide Seiten ergibt:* $3x = \ln \frac{y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{y}{2}}{3}$. *Damit erhalten wir:*

$$f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln \frac{x}{2}}{3}.$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto 2n$ *ist formal nicht umkehrbar, da* f *nicht surjektiv ist (die ungeraden natürlichen Zahlen fehlen im Bild von* f*) und es somit keine Umkehrfunktion* $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *geben kann, die auf ganz* $\mathbb{N}$ *definiert ist. Schränkt man den Bildbereich von* f *allerdings auf* $Bild(f)$*, also die geraden natürlichen Zahlen (die wir mit* $2\mathbb{N}$ *bezeichnen), ein, so ist die Funktion* $\bar{f} : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}, n \mapsto 2n$ *tatsächlich eine Bijektion und hat die Umkehrfunktion* $\bar{f}^{-1} : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}, m \mapsto \frac{m}{2}$. *Es kann also eine Bijektion zwischen einer unendlichen Menge und einer echten Teilmenge dieser Menge geben, was bei endlichen Mengen nicht möglich ist.*

Lösung Aufgabe 1.8. *Ansatz:* $A(x) = ax^2 + bx + c$. *Einsetzen von* $A(0) = 0$, $A(5) = 55$ *und* $A(15) = 465$ *führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:*

$$0a + 0b + c = 0 \tag{1.1}$$
$$25a + 5b + c = 55 \tag{1.2}$$
$$225a + 15b + c = 465 \tag{1.3}$$

Gleichung (1.1) liefert $c = 0$. *(1.3)- 2·(1.2) und* $c = 0$ *liefert* $a = 2$. *Einsetzen in Gleichung (1.2) ergibt* $b = 1$. *Somit gilt für die Angebotsfunktion:*

$$A(x) = 2x^2 + x.$$

Lösung Aufgabe 1.9. *Das Guthaben auf einem vergessenen Sparkonto wächst wegen Zinseszinseffekten exponentiell an und der Preis von Schweinefleisch verhält sich zyklisch (Ausschlussverfahren).*

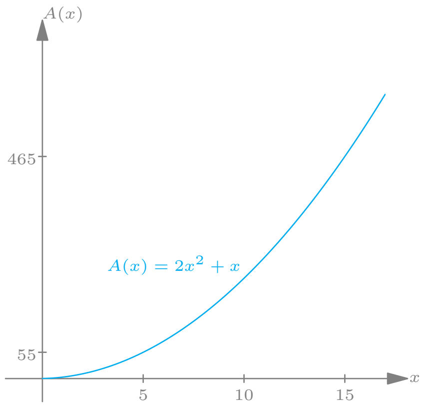


Abb. 1.2: Angebotsfunktion aus Aufgabe 1.8.

Nicht wesentlich aber interessant: Schweinezyklus (auch Schweinebauchzyklus) ist ein Begriff aus der Wirtschaftswissenschaft und bezeichnet eine periodische Schwankung auf der Angebotsseite, wie sie exemplarisch ursprünglich auf dem Markt für Schweinefleisch nachgewiesen wurde. Der Begriff wird im übertragenen Sinne für ähnliche Vorgänge zum Beispiel auf bestimmten Arbeitsmärkten gebraucht: Hohe Gehälter führen zu einer steigenden Zahl von Studienanfängern, die dann nach mehreren Jahren gleichzeitig auf den Arbeitsmarkt drängen. Die schlechteren Jobaussichten schrecken sodann neue mögliche Studienanfänger ab. Eine theoretische Erklärung für den Schweinezyklus versucht das Spinnwebtheorem (Cobweb-Theorem) zu geben.

Lösung Aufgabe 1.10.

1. *Der Gewinn berechnet sich aus Erlöse minus Kosten, was zu*

   $$G(t) = 5 \cdot x(t) - 10000 - 10000 \cdot t = 250000 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1t}\right) - 10000 - 10000 \cdot t$$

   für $t > 0$ führt.

2. *Da der durchschnittliche Gewinn pro Tag, in Abhängigkeit der Laufdauer der Werbekampagne, durch die Funktion $\frac{G(x)}{x}$ gegeben ist, erhalten wir einen durchschnittlichen Tagesgewinn von:*

   $$\frac{G(20)}{20} \approx 308{,}31.$$

Hier könnte man diskutieren, dass sich der Absatz $x(t)$ *auf eine fixe Anzahl* T *von Tagen verteilt, die nicht der Laufdauer* t *der Werbekampagne entspricht. Somit müsste man stattdessen* $\frac{G(t)}{T}$ *bzw. konkret* $\frac{G(20)}{T}$ *betrachten, wobei allerdings ein geeigneter Wert für* T *(aus der Praxis) zu ermitteln wäre.*

3. *Verzichtet die Nappy GmbH vollständig auf die Werbekampagne, so fallen natürlich auch keine Fixkosten an. Da* $x(0)=0$ *gilt, wird allerdings in diesem Fall auch nichts abgesetzt, so dass ein Gewinn von* 0 *GE entsteht.*

   Hier könnte man diskutieren, dass wir vertraglich zur Zahlung von mindestens einem Teil der Fixkosten der Werbekampagne verpflichtet sein könnten.

4. *Da* $x(t)$ *monoton steigend ist, erhält man die theoretische Absatzhöchstmenge, indem man* $\lim_{t\to\infty} x(t)$ *berechnet. Da* $\lim_{t\to\infty} e^{-0{,}1t} = 0$ *gilt, ergibt sich eine theoretische Absatzhöchstmenge von* 50 000 *ME.*

5. *Exakt bzw. analytisch kann man die Nullstelle von* $G(t)$ *leider nicht ausrechnen. Mit irgendeinem Näherungsverfahren (z. B. Intervallschachtelung) bestimmt man aber leicht, dass die Nullstelle, wegen der Monotonie der Funktion, zwischen* $t=20$ *und* $t=21$ *liegen muss, da* $G(20)\approx 6166{,}18$ *und* $G(21)=-614{,}11$ *gilt.*

   Manche Computeralgebrasysteme, wie z. B. `Maple`*, geben eine geschlossene Lösung von* $G(t)=0$ *unter Verwendung der Funktion* `LambertW` *an. Hierbei ist* `LambertW` *als Umkehrfunktion von* xe^x *definiert, die man allerdings ebenfalls nur numerisch auswerten kann. Dieser „Taschenspielertrick“ löst also das eigentliche Problem nicht, dass man die Nullstelle von* $G(t)$ *nur numerisch auswerten kann. Weitere Informationen zur Funktion* `LambertW` *finden sich beispielsweise unter*

   http://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche_W-Funktion.

   Natürlich können Computeralgebrasysteme alle Nullstellen von $G(t)$ *numerisch mit beliebiger Genauigkeit bestimmen. Es gibt genau zwei:* $t_1 \approx 0{,}7074019505$ *und* $t_2 \approx 20{,}91131997$*. Die Funktion* $G(t)$ *nimmt also (nach ein paar Zusatzüberlegungen) im Intervall* $[t_1, t_2]$ *nicht-negative und in den Intervallen* $[0, t_1)$ *und* (t_2, ∞) *negative Werte an. Natürlich muss man sich in der Praxis fragen, mit welcher Genauigkeit so eine Nullstelle bestimmt werden muss, da es bei einer möglichen Umsetzung praktische Einschränkungen gibt.*

   Bei dieser Aufgabe kann man sich kreativ austoben, um die Position der Nullstelle einzugrenzen. Aus Aufgabenteil 4. wissen wir beispielsweise, dass die Absatzhöchstmenge 50 000 *ME beträgt. Mit dem maximalen Umsatz von* 250 000 *GE können wir uns die Fixkosten in Höhe von* 10 000 *GE und* *maximal* 24 *Tagessätze zu je* 10 000 *GE leisten. D. h., dass für* $t \geq 24$ *auf jeden Fall* $G(t) \leq 0$ *gelten muss. Durch Nullsetzen der ersten Ableitung von* $G(t)$ *können wir feststellen, dass* $G(t)$ *bei* $t = 10\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 9{,}162907319$ *einen Hochpunkt besitzt. Die für uns interessante Nullstelle von* $G(t)$ *muss also irgendwo zwischen* 9,16 *und* 24 *liegen. ...*

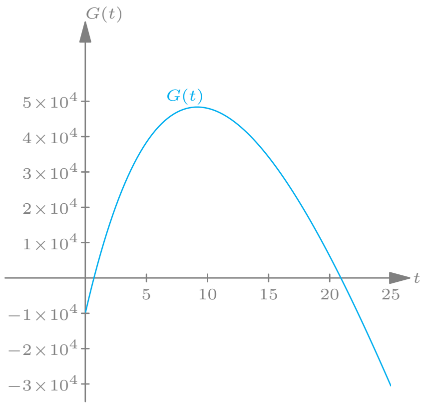


Abb. 1.3: Gewinnfunktion $G(t)$ aus Aufgabe 1.10.

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 2 - Lineare Algebra –

Sascha Kurz Jörg Rambau

14. Januar 2011

Lösung Aufgabe 2.1.

a) AB *existiert nicht, denn die Anzahl der Spalten von Matrix* A *stimmt nicht mit der Anzahl der Zeilen von Matrix* B *überein.*

b) $A^T B$ *existiert nicht, denn die Anzahl der Spalten von* A^T *(dies entspricht der Anzahl der Zeilen von Matrix A) stimmt nicht mit der Anzahl der Zeilen von* B *überein.*

c)

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} -1\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 2 & -1\cdot 0+3\cdot -1+2\cdot 1 & -1\cdot 1+3\cdot 1+2\cdot 0 \\ 4\cdot 2+1\cdot 3+5\cdot 2 & 4\cdot 0+1\cdot -1+5\cdot 1 & 4\cdot 1+1\cdot 1+5\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ 21 & 4 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} -1\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 2 & -1\cdot 1+3\cdot 0+2\cdot 2 \\ 4\cdot 0+1\cdot 1+5\cdot 2 & 4\cdot 1+1\cdot 0+5\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 11 & 14 \end{pmatrix} \\
3BC &= \begin{pmatrix} 3\cdot 7 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 11 & 3\cdot 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 \\ 33 & 42 \end{pmatrix} \\
D^2 &= \begin{pmatrix} 2\cdot 2-1\cdot 1 & 2\cdot -1-1\cdot 0 \\ 1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot -1+0\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
2D^2 &= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 & 2\cdot -2 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\
3BC+2D^2 &= \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 37 & 40 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e) DC *existiert nicht, denn die Anzahl der Spalten von Matrix* D *stimmt nicht mit der Anzahl der Zeilen von Matrix* C *überein.*

f)

$$
CD = \begin{pmatrix} 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot -1+1\cdot 0 \\ 1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot -1+0\cdot 0 \\ 2\cdot 2+2\cdot 1 & 2\cdot -1+2\cdot 0 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

g)

$$EF = (-1\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 2)=(11)=11$$

h)

$$\begin{aligned} FE &= \begin{pmatrix} 2\cdot -1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \\ 3\cdot -1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \\ 2\cdot -1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ -3 & 9 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} G^2 &= \begin{pmatrix} -1\cdot -1+1\cdot -1 & -1\cdot 1+1\cdot 1 \\ -1\cdot -1+1\cdot -1 & -1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

j)

$$AF= \;=\; \begin{pmatrix} 2\cdot 2+0\cdot 3+1\cdot 2 \\ 3\cdot 2-1\cdot 3+1\cdot 2 \\ 2\cdot 2+1\cdot 3+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

k) $G^3 = G^2\cdot G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

l) *E^2 existiert nicht, da E keine quadratische Matrix (d. h. die Anzahl der Zeilen stimmt nicht mit der Anzahl der Spalten überein) ist.*

Lösung Aufgabe 2.2.

1. *Fasst man die Nachfragemengen zu einem Vektor zusammen,ergibt sich:*
   $N = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 300 \end{pmatrix}^T$
   Der Vektor B der benötigten Baugruppen ergibt sich durch Multiplikation

der rechten Tabelle aus der Aufgabenstellung mit dem Nachfragevektor N:

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot N = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3900 \\ 1700 \\ 1800 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

2. (a) *Der Bedarfsvektor X der benötigten Einzelteile ergibt sich durch Multiplikation der linken Tabelle aus der Aufgabenstellung mit dem Vektor B der benötigten Baugruppen:*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3900 \\ 1700 \\ 1800 \\ 1800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14400 \\ 20600 \\ 31200 \\ 16500 \\ 12700 \\ 21800 \end{pmatrix}$$

(b) *Die Matrix C, die angibt aus wievielen und welchen Einzelteilen die Enderzeugnisse bestehen, ergibt sich als Produkt der beiden Tabellen aus der Aufgabenstellung:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 23 \\ 42 & 23 & 19 \\ 34 & 24 & 62 \\ 32 & 18 & 17 \\ 19 & 13 & 19 \\ 33 & 23 & 32 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 2.3.

1. *Misst man den Gewinn in Vielfachen von 100 000 €, so ergeben sich aus dem Text folgende Gleichungen:*

$$\begin{array}{rcccccc} w & = & p_1 \cdot 5 & + & p_2 \cdot 3 & + & p_3 \cdot 2 \\ g & = & p_1 \cdot 4 & + & p_2 \cdot 2 & + & p_3 \cdot 1 \\ n & = & p_1 \cdot 9 & + & p_2 \cdot 3 & + & p_3 \cdot 0 \end{array}$$

Hieraus läßt sich unmittelbar die gesuchte Matrix ablesen:

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} w \\ g \\ n \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

2. *Die Bewertung $b(v)$ kann man als Produkt eines Zeilenvektors mit dem Vektor v darstellen:*

$$b(v) = \begin{pmatrix} b_w & b_g & b_n \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} b_w & b_g & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w \\ g \\ n \end{pmatrix}.$$

Bezeichnen wir die Bewertungsfunktionen der drei Fahrer mit b_{GG}, b_{NN} und b_{WW}, so gilt also:

$$\begin{array}{rcl} b_{GG} & = & \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \\ b_{NN} & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \end{pmatrix} \cdot v \\ b_{WW} & = & \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot v \end{array}$$

Das suggeriert bereits rein optisch die Verwendung einer weiteren Matrix: Setzen wir

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & -10 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix},$$

so ergibt das Produkt $N \cdot v$ den Vektor $\begin{pmatrix} b_{GG} \\ b_{NN} \\ b_{WW} \end{pmatrix}$. Setzt man noch das Ergebnis aus (1.) ein, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} b_{GG} \\ b_{NN} \\ b_{WW} \end{pmatrix} = N \cdot M \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung sagt uns, wie wir aus einem „Platzierungsvektor“ $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ einen Vektor mit den zugehörigen Bewertungen der drei Fahrer berechnen können, nämlich durch Linksmultiplikation mit $N \cdot M$. Möchte man nun, wie in der Aufgabe gefordert, diese Berechnung gleichzeitig für drei verschiedene Ausgangsvektoren anstellen, so kann man sie einfach nebeneinander in eine dreispaltige Matrix schreiben und diese dann mit $N \cdot M$ multiplizieren. Heraus kommt eine Matrix, die in der $j-$ten Spalte den Ergebnisvektor zum $j-$ten Ausgangsvektor enthält (das Multiplizieren einer mehrspaltigen Matrix X von rechts mit einer Matrix Y ist also das Gleiche wie Multiplizieren der einzelnen Spalten von X mit Y und anschließendes Nebeneinanderschreiben der Ergebnisvektoren in der entsprechenden Reihenfolge). Das in der Aufgabe gesuchte Matrixprodukt ist dann

$$(N \cdot M) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

was nach Berechnung von $N \cdot M$ als

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 45 & 23 & 12 \\ -81 & -25 & 3 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix}$$

die Ergebnismatrix

$$\begin{pmatrix} 45 & 23 & 12 \\ -81 & -25 & 3 \\ 25 & 25 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 127 & 160 & 72 \\ -122 & -206 & 18 \\ 150 & 150 & 150 \end{pmatrix}$$

ergibt. Sie enthält in der ersten Zeile die Werte von Gernot Geldgeil, in der zweiten die von Norbert Neidermeider und in der dritten die von Werner Wurstig. Norbert Neidermeider bewertet also z. B. den Saisonausgang e_3 leicht positiv (18)*, während ihm das Abschneiden bei e_1* (−122) *bzw. e_2* (−206) *gar nicht zusagt.*

Lösung Aufgabe 2.4. *Wir setzen* $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.*
Dies führt zum linearen Gleichungssystem $\left| \begin{array}{rcl} 2a+b & = & 1 \\ 3a+b & = & 0 \end{array} \right|$ *mit der eindeutigen Lösung $a = -1$, $b = 3$.*

Es gilt also, $-\mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Analog erhalten wir $\mathbf{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \mathbf{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \end{pmatrix}$ *und* $-\mathbf{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbf{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 2.5.

a) *Um zu testen, ob n Vektoren $V_1, \ldots, V_n$ linear unabhängig oder linear abhängig sind, untersucht man das lineare Gleichhungssystem*

$$x_1 \cdot V_1 + \ldots + x_n \cdot V_n = 0.$$

Besitzt es nur die triviale Lösung $x_1 = \ldots = x_n = 0$, so sind die Vektoren $V_1, \ldots, V_n$ linear unabhängig. In unserem Fall ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{ccccccc} & - & 2x_2 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right|.$$

Der ersten Gleichung entnehmen wir $x_2 = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung führt zu $x_3 = 0$. Setzen wir $x_2 = x_3 = 0$ in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir $x_1 = 0$. Somit sind die drei Ausgangsvektoren linear unabhängig.

b) *Nein, denn mehr als n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ sind immer linear abhängig. (Hier haben wir fünf Vektoren im $\mathbb{R}^4$.)*

c) *Nein, eine Menge, in der der Nullvektor enthalten ist, kann nicht linear unabhängig sein.*

Lösung Aufgabe 2.6. *Die möglichen Mischungen von Sanden, welche die Silica Quarzsand AG mischen kann, lassen sich durch*

$$S = \lambda_1 \cdot S_1 + \lambda_2 \cdot S_2 + \lambda_3 \cdot S_3$$

mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ beschreiben. Ignorieren wir die Beschränkung, dass die λ_i nichtnegativ sein müssen, erst mal, können wir das Problem als ein lineares Gleichungssystem umformulieren:

$$\text{K1:} \left|\begin{array}{ccccccc} 7 & = & 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \\ 7 & = & 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ 3 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}\right|$$

$$\text{K2:} \left|\begin{array}{ccccccc} 1 & = & 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \\ 1 & = & 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ 1 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}\right|$$

$$\text{K3:} \left|\begin{array}{ccccccc} 2 & = & 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \\ \frac{3}{2} & = & 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ 1 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}\right|$$

$$\text{K4:} \left|\begin{array}{ccccccc} \frac{18}{5} & = & 3\lambda_1 & + & 5\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \\ 2 & = & 4\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ 2 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}\right|$$

Nach Anwenden des Gaußalgorithmus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{3-t}{2}\cdot S_1 + \frac{1-t}{2}\cdot S_2 + t\cdot S_3,\\
K_2 &\quad \textit{kann nicht gemischt werden,}\\
K_3 &= \frac{1-2t}{4}\cdot S_1 + \frac{1-2t}{4}\cdot S_2 + t\cdot S_3,\\
K_4 &= \frac{2-5t}{10}\cdot S_1 + \frac{6-5t}{10}\cdot S_2 + t\cdot S_3.
\end{aligned}$$

Damit die Koeffizienten nicht negativ werden, müssen beim Kundenwunsch K_1 *die Ungleichungen* $t \le 3$, $t \le 1$ *und* $t \ge 0$ *erfüllt sein. Dies lässt sich vereinfachen zu* $0 \le t \le 1$. *Als Kosten für* K_1 *erhalten wir*

$$\frac{3-t}{2}\cdot\frac{8\cdot 50\,€}{17} + \frac{1-t}{2}\cdot\frac{10\cdot 60\,€}{17} + t\cdot\frac{9\cdot 40\,€}{17} = \frac{(900-140t)\,€}{17}.$$

Dies ist eine lineare Funktion in t. *Maxima und Minima werden also an den Intervallenden von* $t \in [0,1]$ *angenommen. Für den Kundenwunsch* K_1 *wird das Minimum bei* $t = 1$ *mit Kosten von* $\frac{760}{17}\,€ \approx 44{,}71$ *Euro pro Tonne.*

Für die Kosten von Kundenwunsch K_2 *erhalten wir*

$$\frac{1-2t}{4}\cdot\frac{8\cdot 50\,€}{17} + \frac{1-2t}{4}\cdot\frac{10\cdot 60\,€}{17} + t\cdot\frac{9\cdot 40\,€}{17} = \frac{(250-140t)\,€}{17},$$

wobei $0 \le t \le \frac{1}{2}$. *Die minimalen Kosten von* $\frac{180}{17}\,€ \approx 10{,}59$ *Euro pro Tonne werden bei* $t = \frac{1}{2}$ *angenommen.*

Für die Kosten von Kundenwunsch K_3 *erhalten wir*

$$\frac{2-5t}{10}\cdot\frac{8\cdot 50\,€}{17} + \frac{6-5t}{10}\cdot\frac{10\cdot 60\,€}{17} + t\cdot\frac{9\cdot 40\,€}{17} = \frac{(440-140t)\,€}{17},$$

wobei $0 \le t \le \frac{2}{5}$. *Die minimalen Kosten von* $\frac{384}{17}\,€ \approx 22{,}59$ *Euro pro Tonne werden bei* $t = \frac{2}{5}$ *angenommen.*

Lösung Aufgabe 2.7.

1. $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -7 & 5 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\\ x_7 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 17\\ -4\\ 13 \end{pmatrix}}_{b}$$

2. *spezielle Lösung:* $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}^T$

3. *Der Kern der Matrix A ist die Menge aller Spaltenvektoren X mit $AX = 0$. Da das lineare Gleichungssystem bereits in normierter Zeilenstufenform gegeben ist, kann man die Nicht-Basisspalten leicht in eine Basis von $AX = 0$ umwandeln:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4. $$x \in \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -7 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
   $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$

5. $dim(Kern(A)) = Anzahl\ Nicht\text{-}Basis\ Spalten = 4.$

6. $Rang(A) = Anzahl\ Basis\ Spalten = 3.$

Lösung Aufgabe 2.8.

a) $$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2 \| Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \| Z_3 + Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 \| Z_3 - 3Z_2 \\ Z_4 \| Z_4 - 2Z_2}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \overset{Z_4 \| Z_4 - \frac{1}{3} Z_3}{\rightsquigarrow} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}} \overset{Z_3 \| \frac{1}{21} Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_2 \| Z_2 + 4Z_3 \\ Z_1 \| Z_1 - 2Z_3}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \| Z_1 - 3Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \| \frac{1}{4} Z_1}{\rightsquigarrow} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

b) $\overset{Z_1 \rightleftarrows Z_2}{\rightsquigarrow}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 \| Z_3 - 2Z_1 \\ Z_4 \| Z_4 + Z_1 \\ Z_5 \| Z_5 - 2Z_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_3 \| Z_3 - 6Z_2 \\ Z_4 \| Z_4 + 3Z_2}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_4 \| Z_4 + \frac{1}{2} Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}} \overset{\substack{Z_1 \| Z_1 - Z_5 \\ Z_2 \| Z_2 + Z_5 \\ Z_3 \| Z_3 - 4Z_5 \\ Z_4 \| Z_4 - Z_5}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 \| Z_1 - \frac{1}{6} Z_4 \\ Z_3 \| Z_3 - \frac{2}{3} Z_4 \\ Z_4 \| \frac{1}{3} Z_4}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1\|Z_1+\frac{1}{3}Z_3 \\ Z_3\|\frac{1}{6}Z_3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1\|Z_1+Z_2 \\ Z_2\|-Z_2}}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_1\|\frac{1}{2}Z_1}{\rightsquigarrow} \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Lösung Aufgabe 2.9.

a)
$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2\|Z_2-2Z_1 \\ Z_3\|Z_3-Z_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & 4 \end{array}\right) \overset{Z_3\|3Z_3-7Z_2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1\|Z_1+3Z_3 \\ Z_2\|Z_2-2Z_3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2\|-\frac{Z_2}{3} \\ Z_3\|-Z_3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{Z_1\|Z_1-4Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \vec{x} = (3;-2;2)^T$$

b)
$$\left|\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2\|Z_2-Z_1 \\ Z_3\|Z_3-Z_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_3\|Z_3-Z_2\\ Z_4\|Z_4-Z_2}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{Z_4\|Z_4-2Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1\|Z_1-\frac{Z_4}{3}\\ Z_3\|Z_3+\frac{Z_4}{3}\\ Z4\|\frac{Z_4}{3}}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1\|Z_1-Z_3\\ Z_2\|Z_2+Z_3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{3}(-2;7;4;1)^T$$

c)
$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 7x_3 & = & 6 \end{array}\right| \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & 6 \end{array}\right) \overset{Z_1\leftrightarrows Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2\|Z_2-3Z_1\\ Z_3\|Z_3-2Z_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & 14 & -22 & -17 \\ 0 & 7 & -11 & -10 \end{array}\right) \overset{Z_3\|2Z_3-Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 7 & 6 \\ 0 & 14 & -22 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \textit{unlösbar}$$

Lösung Aufgabe 2.10.

1. *Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems lautet*

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -c & b & 7 \\ c & 0 & -a & 5 \\ -b & a & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Mit Hilfe des Gaußalgorithmus formt man sie in Zeilen-Stufen-Form um:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} bc & 0 & -ab & 5b \\ 0 & -ac & ab & 7a \\ 0 & 0 & 0 & 7a+5b+2c \end{array}\right).$$

Wegen der letzten Zeile kann das Gleichungssystem nur lösbar sein, wenn $7a+5b+2c=0$ *gilt. Gilt nun diese Gleichung, so beträgt wegen* $a,b,c\neq 0$ *der sowohl Rang der Koeffizientenmatrix als auch der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix jeweils zwei. Da beide Matrizen denselben Rang haben, ist das Gleichungssystem dann immer lösbar.*

2. *Das Gleichungssystemhat drei Variable. Für den Fall, bei dem das Gleichungssystem lösbar ist, ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix zwei. Da der Rang kleiner als die Anzahl der Variablen ist, handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem und es existiert keine eindeutige Lösung für den Gleichgewichtspreisvektor.*

Lösung Aufgabe 2.11.

1. *Richtig. Gibt es mehr als eine Lösung, so muss der Kern der Matrix, die die linke Seite des Gleichungssystems beschreibt, mindestens Dimension* 1 *haben; als nicht-trivialer Vektorraum über den reellen Zahlen enthält er damit unendlich viele Elemente. Da man die Lösungsmenge des Gleichungssystems erhält, indem man zu jedem Vektor des Kerns eine (fest gewählte) spezielle Lösung des Systems addiert, ist also auch die Lösungsmenge unendlich.*

2.
   - *Falsch. Ist* $m<n$ *und* A *die* $m\times n-$*Nullmatrix sowie* $B\in\mathbb{R}^m$ *nicht der Nullvektor, dann ist das System* $AX=B$ *mit* $X\in\mathbb{R}^n$ *natürlich unlösbar, obwohl mehr Variablen als Gleichungen vorliegen. Dieses Beispiel beantwortet auch gleich den dritten Punkt.*
   - *Falsch. Für* $m<n$ *hat eine* $m\times n-$*Matrix* A *immer Rang* $\leq m$*, deshalb ist* $dim(Kern(A))\geq 1$. *Abhängig von der rechten Seite ist das System also entweder unlösbar oder besitzt unendlich viele Lösungen.*
   - *Richtig, siehe ersten Punkt.*

3.
   - *Falsch. Lösungen des Gleichungssystems ergeben sich aus einer speziellen Lösung* X_s *für die rechte Seite plus den Lösungen des homogenen Systems, sprich dem Kern der Matrix auf der linken Seite. Wenn nun die Matrix trivialen Kern hat (d. h.* $Kern(A)=\{\vec{0}\}$*), dann bleibt von der Lösungsmenge* $\mathbb{L}=X_s+Kern(A)$ *nur noch* $\mathbb{L}=X_s$ *übrig. Deshalb kann es in diesem Fall zu jeder rechten Seite maximal eine Lösung geben (ggf. auch keine, dann gibt es eben* X_s *schon gar nicht), aber niemals unendlich viele. Natürlich hat nicht bei jedem Gleichungssystem die zugehörige Matrix trivialen Kern. Hier reicht aber ein Gegenbeispiel, weil in der Behauptung steht, dass man bei jedem Gleichungssystem die rechte Seite so modifizieren kann, dass unendlich viele Lösungen existieren.*

- *Richtig. Ist A die Matrix zur linken Seite des Gleichungssystems, so muss für die rechte Seite B nur eine beliebige Linearkombination der Spalten von A eingesetzt werden und das Gleichungssystem $AX = B$ ist lösbar.*
- *Falsch. Ist A eine $n \times n-$Matrix von vollem Rang, so gibt es für jede beliebige rechte Seite B genau eine Lösung – wie im ersten Punkt reicht an dieser Stelle ein Gegenbeispiel, weil sich die Behauptung auf alle Gleichungssysteme bezog.*

Lösung Aufgabe 2.12.

1. *Richtig. Hat man für die Vektoren aus M eine nichttriviale Linearkombination zum Nullvektor gefunden, so erhält man ganz einfach eine solche für M', indem man die Koeffizienten für die Elemente aus M übernimmt und bei den restlichen Elementen aus $M' \setminus M$ Null setzt.*

2. *Falsch. Ein Gegenbeispiel ist durch die Menge*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben. Wie man leicht nachrechnet, ist kein Vektor Vielfaches eines anderen Vektors aus dieser Menge, d. h. alle drei Zweierteilmengen sind jeweils linear unabhängig. Anhand der Rechnung

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & -6 & 1 \\ -4 & 25 & -7 \end{pmatrix} \overset{Z_1 \rightleftarrows Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -4 & 25 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_2 \| Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \| Z_3 + 2Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & 13 & -5 \end{pmatrix} \overset{Z_3 \| Z_3 - Z_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kann man die lineare Abhängigkeit der Menge aus allen drei Vektoren feststellen. (Die dritte Spalte ist eine Nichtbasisspalte, deshalb sind die Vektoren linear abhängig.)

3. *Richtig. Aus der linearen Abhängigkeit von v_1 und v_2 folgt die Existenz einer Linearkombination $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 = 0$, wobei mindestens einer der beiden Koeffizienten ungleich Null ist. Da aber v_1 und v_2 nicht der Nullvektor sind, müssen beide Koeffizienten ungleich Null sein (sonst würde, falls etwa $\lambda_2 = 0$ ist, folgen: $\lambda_1 \cdot v_1 = \vec{0}$ und daraus, weil $v_1 \neq \vec{0}$, dass $\lambda_1 = 0$ gilt, im Widerspruch*

dazu, dass nicht beide Koeffizienten Null sind). Dann kann man einfach auflösen:

$v_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot v_1$ *und* $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2$.

v_1 *ist dann also auch lineares Vielfaches von* v_2.

4. *Richtig. Nach Definition sind Vektoren genau dann linear abhängig, wenn sie sich auf nichttriviale Weise (d. h. mit Koeffizienten, von denen nicht alle Null sind) zum Nullvektor kombinieren lassen. Dementsprechend lösen wir jeweils das Gleichungssystem* $AX = 0$ *(wobei* A *die Matrix ist, deren Spalten gerade alle angegebenen Vektoren sind) und sehen, ob andere Lösungen als* $X = \vec{0}$ *existieren. Dazu genügt es,* A *in Zeilenstufenform zu bringen. Wenn sich dann herausstellt, das* A *Nichtbasisspalten hat, so sind die Vektoren linear abhängig, andernfalls linear unabhängig.*

5. *Falsch. Zwar folgt aus dem Vorhandensein einer nichttrivialen Linearkombination* $\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = \vec{0}$*, dass man jeden Vektor* v_i*, dessen Koeffizient* $\lambda_i \neq 0$ *ist, durch die anderen ausdrücken kann (*$-\lambda_i \cdot v_i$ *auf die rechte Seite bringen und durch* $-\lambda_i$ *teilen), aber es ist nicht garantiert, dass* <u>*alle*</u> *Koeffizienten ungleich Null sind. Die Aussage wäre also richtig, wenn das Wort „jeder“ durch „mindestens ein“ ersetzt wird.*

6. *Richtig. Denn* $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$*, für jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$*, also insbesondere auch für jedes von Null verschiedene* λ.

Lösung Aufgabe 2.13.

1. *Richtig – da in der Zeilenstufenform von* A *bei jeder Basisspalte ein Sprung um eine Zeile nach unten erfolgt und* A *insgesamt nur* m *Zeilen besitzt, können maximal* m *Spalten Basisspalten sein. Bei den (mindestens)* $n - m$ *anderen Spalten muss es sich dann also um Nichtbasisspalten handeln.*

2. *Falsch – die* $m \times n-$*Nullmatrix (d. h. alle Einträge sind Null) hat beispielsweise nur Nichtbasisspalten, unabhängig davon, ob* $m > n$ *ist oder nicht.*

3. *Ebenso falsch. Wieder ist die* $m \times n-$*Nullmatrix ein einfaches Gegenbeispiel. Sie hat keine einzige Basisspalte und wieder spielt* $m > n$ *dabei keinerlei Rolle.*

4. *Richtig. Hierzu stellen wir folgende Überlegung an: Mit* $\overline{B}$ *bezeichnen wir die betreffende Nichtbasisspalte von* A *und mit* $\overline{A}$ *die Matrix der Basispalten links von Nichtbasisspalte* $\overline{B}$*. Das Gleichungssystem* $\overline{A}X = \overline{B}$ *besitzt somit* $\overline{B}$ *als einzige Nichtbasisspalte und ist damit eindeutig lösbar.*

5. *Richtig – durch den Spaltendreher haben einfach die Variablennamen x_i und x_j ihre Rolle getauscht, d. h. x_i ist jetzt der Koeffizient zu der ehemals $j-$ten Spalte von A und umgekehrt.*

Lösung Aufgabe 2.14. *Bezeichnen wir den kalkulierten Preis für ein Pfund Kaffee der besseren Sorte mit a und den kalkulierten Preis für ein Pfund Kaffee der schlechteren Sorte mit b, so gilt*

$$\left| \begin{array}{rcl} 48a+32b & = & (48+32)\cdot 9{,}20 \\ 32a+48b & = & (48+32)\cdot 8{,}80 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{rcl} 3a+2b & = & 46 \\ 2a+3b & = & 44 \end{array} \right|.$$

Auflösen ergibt $a=10$ und $b=8$. Somit kostet die neue Mischung $\frac{20a+20b}{20+20}=9$ € pro Pfund.

Lösung Aufgabe 2.15. *Setzen wir*

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 8 & 20 & 8 \\ 48 & 36 & 12 & 8 \\ 48 & 48 & 48 & 56 \\ 0 & 8 & 20 & 28 \end{pmatrix},$$

so ist der gesuchte Produktionsvektor P die Lösung des LGS

$$A\cdot P = \begin{pmatrix} b \\ k \\ z \\ m \end{pmatrix}.$$

Falls A invertierbar ist, dann ist P also gerade $A^{-1}\cdot \begin{pmatrix} b \\ k \\ z \\ m \end{pmatrix}$. Daher versuchen wir die Inverse zu berechnen (falls sie nicht existiert, würde sich dies in der Rechnung dadurch zeigen, dass links vom Strich eine Nichtbasisspalte auftritt):

$$(A\,|\,E^4) = \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 4 & 8 & 20 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 36 & 12 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 48 & 48 & 48 & 56 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 20 & 28 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2\|Z_2-12Z_1 \\ Z_3\|Z_3-12Z_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 8 & 20 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & -228 & -88 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & -192 & -40 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 20 & 28 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_2 \leftrightarrows Z_4 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 8 & 20 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 20 & 28 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -48 & -192 & -40 & -12 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -60 & -228 & -88 & -12 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_3 \| Z_3 + 6Z_2 \\ Z_4 \| Z_4 + \frac{15}{2} Z_2 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 8 & 20 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 20 & 28 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -72 & 128 & -12 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -78 & 122 & -12 & 1 & 0 & \frac{15}{2} \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_1 \| \frac{1}{4} Z_1 \\ Z_2 \| \frac{1}{8} Z_2 \\ Z_4 \| Z_4 - \frac{13}{12} Z_3 \\ Z_3 \| -\frac{1}{72} Z_3 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{9} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{50}{3} & 1 & 1 & -\frac{13}{12} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_4 \| -\frac{3}{50} Z_4 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 2 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{9} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{72} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & \frac{13}{200} & -\frac{3}{50} \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_1 \| Z_1 - 2Z_4 \\ Z_2 \| Z_2 - \frac{7}{2} Z_4 \\ Z_3 \| Z_3 + \frac{16}{9} Z_4 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 5 & 0 & \frac{37}{100} & \frac{3}{25} & -\frac{13}{100} & \frac{3}{25} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{21}{100} & \frac{21}{100} & -\frac{91}{400} & \frac{67}{200} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{50} & -\frac{8}{75} & \frac{61}{600} & -\frac{19}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & \frac{13}{200} & -\frac{3}{50} \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_1 \| Z_1 - 5Z_3 \\ Z_2 \| Z_2 - \frac{5}{2} Z_3 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{7}{100} & \frac{49}{75} & -\frac{383}{600} & \frac{107}{100} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{50} & \frac{143}{300} & -\frac{289}{600} & \frac{81}{100} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{50} & -\frac{8}{75} & \frac{61}{600} & -\frac{19}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & \frac{13}{200} & -\frac{3}{50} \end{array}\right) \begin{array}{c} Z_1 \| Z_1 - 2Z_2 \\ \rightsquigarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{13}{40} & -\frac{11}{20} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{50} & \frac{143}{300} & -\frac{289}{600} & \frac{81}{100} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{50} & -\frac{8}{75} & \frac{61}{600} & -\frac{19}{100} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & \frac{13}{200} & -\frac{3}{50} \end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow$ *A^{-1} existiert und ist gegeben durch*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{13}{40} & -\frac{11}{20} \\ \frac{3}{50} & \frac{143}{300} & -\frac{289}{600} & \frac{81}{100} \\ \frac{3}{50} & -\frac{8}{75} & \frac{61}{600} & -\frac{19}{100} \\ -\frac{3}{50} & -\frac{3}{50} & \frac{13}{200} & -\frac{3}{50} \end{pmatrix}$$

Die Lösung $P = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b \\ k \\ z \\ m \end{pmatrix}$ *kann in der Praxis fast nie eins-zu-eins umgesetzt werden:*

Erstens sind die Komponenten von P in der Regel nicht ganzzahlig, sprich, es müssten z. B. halbe Schokoladen produziert werden. Hier kann man sich noch dadurch behelfen, dass man immer auf die nächstkleinere ganze Zahl abrundet, denn der dadurch verbleibende Überschuß an Lagerbestand wird im Allgemeinen zu vernachlässigen sein. Viel schwerer wiegt, dass P auch negative Komponenten enthalten kann – was in der Praxis bedeuten würde, dass man die entsprechende Zahl an Tafeln von dieser Sorte einschmelzen statt produzieren müsste, damit die Rechnung aufgeht.

Lösung Aufgabe 2.16.

A) *Bei einer* 3×3*-Matrix kann man beispielsweise die Sarrus-Regel anwenden:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 7 + 3\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot 0 - 3\cdot(-1)\cdot 7 = 62.$$

B) *Mit Hilfe von Zeilenoperationen tranformieren wir Matrix B zu einer oberen Dreiecksmatrix. Vertauschen der ersten und dritten Zeile liefert:*

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 6 \\ -5 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ -5 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Die Zeilenoperationen $Z_2 || Z_2 + 5Z_1$, $Z_3 || Z_3 - 3Z_1$ *und anschließendes Vertauschen der zweiten und vierten Zeile führen zu:*

$$\det(B) = (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & 42 \\ 0 & 4 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -18 \\ 0 & -6 & 7 & 42 \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe der Zeilenoperationen $Z_3 || Z_3 - 4Z_2$, $Z_4 || Z_4 + 6Z_2$ *und* $Z_4 || 16Z_4 + 31Z_3$ *ergibt sich:*

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -22 \\ 0 & 0 & 31 & 48 \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 86 \end{vmatrix}$$

Da sich die Determinante dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonale entspricht, erhalten wir:

$$\det(B) = \frac{1}{16} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-16) \cdot 86 = -86$$

C) *Da die erste und vierte Zeile von C identisch sind, sind diese beiden Zeilen linear abhängig und es gilt* $\det(C) = 0$.

Lösung Aufgabe 2.17.

A) *Nicht invertierbar, da A keine quadratische Matrix ist.*

B) *Invertierbar, da* $\det(B) = 4 \neq 0$.

C) *Nicht invertierbar, da C keine quadratische Matrix ist.*

D) *Nicht invertierbar, da* $\det(D) = 0$.

E) *Nicht invertierbar, da* $\det(E) = 0$.

F) *Invertierbar, da* $\det(F) = -26 \neq 0$.

G) *Nicht invertierbar, da G keine quadratische Matrix ist.*

H) *Nicht invertierbar, da H keine quadratische Matrix ist.*

Lösung Aufgabe 2.18.

1. *Wir berechnen die Inverse von A wie gewöhnlich:*

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_2 \| Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \| Z_3 + Z_1}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z_3 \| Z_3 - \frac{7}{11} Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{11} & \frac{39}{11} & -\frac{7}{11} & 1 \end{array}\right) \overset{Z_3 \| 11 Z_3}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 39 & -7 & 11 \end{array}\right) \overset{\substack{Z_1 \| Z_1 + Z_3 \\ Z_2 \| Z_2 - 3Z_3}}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 40 & -7 & 11 \\ 0 & 11 & 0 & -121 & 22 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 39 & -7 & 11 \end{array}\right) \overset{Z_2 || \frac{1}{11} Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 40 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 39 & -7 & 11 \end{array}\right) \overset{Z_1 || Z_1 + 2Z_2}{\rightsquigarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 18 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 39 & -7 & 11 \end{array}\right)$$

Also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -3 & 5 \\ -11 & 2 & -3 \\ 39 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

2. *Linksmultiplikation von N' mit A^{-1} ergibt die ursprüngliche Nachricht, denn $A^{-1} \cdot N' = A^{-1} \cdot A \cdot N = (A^{-1} \cdot A) \cdot N = I_3 \cdot N = N$.*

3. *Einschließlich des Leerzeichens gibt es 27 Möglichkeiten für ein einzelnes Zeichen, für jede Komponente einer dreizeiligen Spalte können diese unabhängig voneinander gewählt werden. Deshalb können in N $27^3 = 19683$ verschiedene Spalten auftreten. Die Spalten von N' sind gerade deren Bilder unter der Linksmultiplikation mit A, also gibt es hier dieselbe Zahl von Möglichkeiten (auch wenn die Spalten in N' anders aussehen als in N). Ein statistischer Ansatz würde ausnutzen, dass die Häufigkeit des Auftretens eines Buchstaben in einem Text nicht für jeden Buchstaben gleich ist. Im Deutschen tritt zum Beispiel das 'E/e' mit Abstand am häufigsten auf, etwa 12,9% aller Zeichen (inkl. Satzzeichen) sind ein solches. Am seltensten kommt das 'Q/q' vor, nämlich nur bei etwa jedem zweitausendsten Zeichen. Geht man davon aus, dass die Verteilung der Buchstaben auf eine Spalte in N stochastisch unabhängig erfolgt (was in sehr guter Näherung gegeben sein dürfte), so ist die mittlere relative Häufigkeit, mit der der Vektor*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

aus den Buchstabennummern b_1, b_2 und b_3 in der Nachricht N auftaucht, gerade

$$H(b_1) \cdot H(b_2) \cdot H(b_3),$$

wobei $H(b_i)$ die relative Häufigkeit des b_i-ten Buchstabens in Texten der *jeweiligen Sprache ist. Der Vektor*

$$\begin{pmatrix} E \\ E \\ E \end{pmatrix}$$

wird also in einer langen Nachricht aus deutschem Text extrem viel häufiger (nämlich etwa 17 *Millionen mal öfter) auftauchen als der Vektor*

$$\begin{pmatrix} Q \\ Q \\ Q \end{pmatrix}.$$

Wertet nun ein Angreifer die Häufigkeit des Auftretens bestimmter Vektoren in der abgefangenen, verschlüsselten Nachricht N' aus, so kann er damit Rückschlüsse ziehen, was das Urbild dieses Vektors in N einmal war. Hat er (im Falle einer 3×3-Matrix A) drei linear unabhängige Vektoren u', v' und w' mit den zugehörigen Urbildern u, v und w identifiziert, kann er durch simples Lösen dreier linearer Gleichungssysteme auf die Zeilen von A zurückschließen: Für die erste Zeile a_{1*} von A gilt dann z. B.

$$a_{1*} \cdot \underbrace{(u\,|\,v\,|\,w)}_{3\times 3-Matrix} = \underbrace{(u'_1\,|\,v'_1\,|\,w'_1)}_{3-komp.\ Zeilenvektor} \quad ,$$

bei den anderen Zeilen ist es entsprechend.

4. *Kommen in einer Spalte von N zwei Leerzeichen und ein durch die Zahl i codierter Buchstabe vor, so ist der zugehörige Vektor v' in der Nachricht N' an dieser Stelle das i-fache einer Spalte von A. Insbesondere teilt i also den größten gemeinsamen Teiler (ggT) der Komponenten von v'. Sucht der Angreifer also gezielt nach Spalten in N' mit großem ggT der Komponenten, so hat er eine sehr gute Chance, dass es sich hier um ein Vielfaches einer Spalte von A handelt. Mit etwas Herumprobieren dürfte dann in der Regel eine vollständige Entschlüsselung möglich sein.*

5. *Eine Bemerkung vorneweg. In dieser Teilaufgabe soll es um das Entschlüsseln einer geheimen Nachricht gehen. Im Allgemeinen ist so etwas keine leichte Aufgabe. Man munkelt, dass der amerikanische Geheimdienst der weltweit größte Arbeitgeber für Mathematiker ist. Und zum Zeitung lesen werden sie bestimmt nicht (zumindest nicht alle) bezahlt … Auch der deutsche Nachrichtendienst BND beschäftigt ein paar Mathematiker, die sich u. a. mit solchen Fragestellungen beschäftigen. Also verzweifeln Sie bitte nicht, wenn Sie diese Teilaufgabe nicht rausbekommen haben.*

   Schauen wir uns noch mal das Ausgangsbeipiel an, um eine Idee für einen möglichen Angriff zu bekommen. Zuächst stellen wir jetzt, dass die zwei *letzten Spalten der ursprünglichen Nachricht, wegen der Leerzeichen, sehr einfach sind. Reduziert auf diese letzen beiden Spalten lautet die Rechnung*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 20 \\ 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{pmatrix} -40 & 20 \\ 60 & 80 \\ 180 & -20 \end{pmatrix}}_{N'}.$$

Wir stellen fest, dass die Zahlen in der verschlüsselten Nachricht alle eine Null am Ende besitzen, sie sind also alle durch zehn teilbar. Ist das Zufall? Berechnen wir nun einfach mal zu jeder Spalte die größte Zahl, die alle drei Einträge des Spaltenvektors teilt (das ist der sogenannte ggT). In unserem Beispiel ergibt sich für beide Spalten ein ggT von 20. *Teilen wir nun die Spalten durch ihren jeweiligen ggT, so erhalten wir*

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Überraschenderweise erhalten wir zwei Spaltenvektoren der Verschlüsselungsmatrix A. Ok – die Reihenfolge passt noch nicht, aber immerhin ein Anfang. Was passiert nun, wenn Zeichen, die nicht das Leerzeichen sind, mehrfach in einer Spalte der ursprünglichen Nachricht vorkommen? Probieren wir es einfach mal aus

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 19 & 15 & 17 \\ 19 & 0 & 17 \\ 0 & 15 & 17 \end{pmatrix}}_{N} = \underbrace{\begin{pmatrix} -19 & 0 & -34 \\ 133 & 45 & 102 \\ 152 & 30 & 187 \end{pmatrix}}_{N'}.$$

Die ggT's der drei Spalten von N' lauten jeweils 19, 15 *und* 17. *Teilt man nun die Einträge in den Spaltenvektoren durch ihre jeweiligen ggT's, so erhält man*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Hier muss man sich schon etwas mehr anstrengen, um Informationen über die Spalten der Verschlüsselungsmatrix A zu erhalten. Die erste Spalte ist die Summe der ersten beiden Spalten von A (in der Nachricht sind die ersten beiden Zeichen ungleich dem Leerzeichen). Entsprechend ist die zweite Spalte die Summer der ersten und der dritten Spalte von A. Die dritte Spalte ergibt sich aus der Summe aller drei Spalten von A.

Finden wir also in der verschlüsselten Nachricht Spalten mit einem großen ggT, so können wir Rückschlüsse über die Spalten der Verschlüsselungsmatrix

A ziehen, wenn wir davon ausgehen, dass in der Ausgangsnachricht in der entsprechenden Spalten bis auf das Leerzeichen nur ein Zeichen, eventuell mehrfach verwendet wurde.

Schauen wir uns dies also bei unserer verschlüsselten Nachricht einmal an. Als Spalten mit großen ggT's identifizieren wir die Spalten 3, 9, 12, 18 *und* 22, *jeweils mit ggT's von* 8, 5, 5, 22 *und* 14. *Nach dem Teilen der entsprechenden Spalten der verschlüsselten Nachricht durch ihre jeweiligen ggT's ergeben sich die Spalten*

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 14 & 5 & 5 \\ 6 & -7 & -15 & -7 & 5 \\ -1 & 3 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da die Spalte $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}^T$ *gleich zwei Mal vorkommt, vermuten wir einfach mal, dass sie einer Spalte von A entspricht. Nun versuchen wir die linearen Abhängigkeiten dieser Spalte mit den möglichen Paaren der übrig gebliebenen Spalten zu bestimmen. Es gilt*

$$0 \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Die Mengen

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \quad \textit{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

sind dagegen linear unabhängig. Wir versuchen nun mal anzunehmen, dass einer der Spaltenvektoren daher kommt, dass ein Zeichen und zwei Leerzeichen verschlüsselt wurden und ein anderer daher kommt, dass zwei Mal das selbe Zeichen und ein Leerzeichen verschlüsselt wurden. Einer der Vektoren muss sich also als Summe von einem anderen bekannten Vektor und einem unbekannten Vektor darstellen lassen. Als Kandidaten erhalten wir

$$\begin{aligned} k_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ k_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ k_3 &= \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}, \textit{und} \end{aligned}$$

$$k_4 \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Versuchen wir also die resultierenden Matrizen zu invertieren:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ -7 & -1 & 6 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -3 & -35 \\ -11 & 2 & 23 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & 5 \\ -7 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 17 & -3 & -35 \\ 29 & -5 & -60 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 5 \\ -7 & -20 & 5 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -70 & 12 & 145 \\ 29 & -5 & 60 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 14 \\ -7 & 20 & -15 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -70 & 12 & 145 \\ -11 & 2 & 23 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix}$$

Wenden wir nun unsere vier Kandidaten für die Entschlüsselungsmatrix A^{-1} auf die ersten drei Spalten der verschlüsselten Nachricht an, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 17 & -3 & -35 \\ -11 & 2 & 23 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 151 & 130 & -8 \\ -133 & -35 & 48 \\ 84 & 66 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 5 & 0 \\ 5 & 18 & 0 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -3 & -35 \\ 29 & -5 & -60 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 151 & 130 & -8 \\ -133 & -35 & 48 \\ 84 & 66 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 5 & 0 \\ 4 & -15 & 8 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -70 & 12 & 145 \\ 29 & -5 & 60 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 151 & 130 & -8 \\ -133 & -35 & 48 \\ 84 & 66 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 50 & -24 \\ 4 & -15 & 8 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -70 & 12 & 145 \\ -11 & 2 & 23 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 151 & 130 & -8 \\ -133 & -35 & 48 \\ 84 & 66 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 50 & -24 \\ 5 & 18 & 0 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Da die potentielle entschlüsselte Nachricht bei den letzen drei Kandidaten negative Zahlen bzw. Zahlen größer als 26 *enthält, scheiden die zugehörigen Matrizen aus. (Wir möchten hier bemerken, dass ein Vertauschen von Vektoren in der Kandidatenmatrix zu einer entsprechenden Spaltenvertausch in der inversen Matrix und einer Zeilenvertauschung in der entschlüsselten Nachricht führt. Wir brauchen also nicht alle sechs Reihenfolgen einzeln zu untersuchen.) Wenden wir nun das Inverse der ersten Kandidaten-Matrix* *auf unsere verschlüsselte Nachricht an, so erhalten wir*

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 17 & -3 & -35 \\ -11 & 2 & 23 \\ 18 & -3 & -37 \end{pmatrix} \cdot \\
&\begin{pmatrix} 151 & 130 & -8 & 160 & 84 & 156 & 11 & 175 & 25 & 92 & 205 & 70 & 120 & 76 & 48 & 81 & 103 & 110 & 139 & 113 & 21 & 70 \\ -133 & -35 & 48 & -113 & 31 & -33 & 109 & -54 & -35 & -103 & -142 & -75 & -94 & -5 & -33 & 11 & 12 & -154 & -83 & -2 & 49 & 70 \\ 84 & 66 & -8 & 87 & 38 & 78 & -4 & 89 & 15 & 53 & 111 & 40 & 66 & 37 & 26 & 38 & 49 & 66 & 74 & 55 & 6 & 28 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 26 & 5 & 0 & 14 & 5 & 21 & 0 & 22 & 5 & 18 & 26 & 15 & 12 & 12 & 5 & 14 & 0 & 22 & 22 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 18 & 0 & 15 & 12 & 12 & 5 & 14 & 0 & 1 & 14 & 0 & 10 & 5 & 4 & 5 & 18 & 0 & 7 & 18 & 5 & 14 \\ 9 & 3 & 8 & 0 & 13 & 21 & 19 & 19 & 0 & 4 & 9 & 5 & 0 & 14 & 1 & 19 & 5 & 0 & 13 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Übersetzen wir die Zahlen in Buchstaben, so ergibt sich

$$
\begin{pmatrix} Z & E & \_ & N & E & U & \_ & V & E & R & Z & O & L & L & E & N & \_ & V & V & B & \_ & \_ \\ E & R & \_ & O & L & L & E & N & \_ & A & N & \_ & J & E & D & E & R & \_ & G & R & E & N \\ I & C & H & \_ & M & U & S & S & \_ & D & I & E & \_ & N & A & S & E & \_ & M & E & I & N \end{pmatrix}.
$$

Das sieht schon ein bißchen wie deutsche Sprache aus – wie haben also (fast) richtig "geraten". Sortieren wir nun noch auf (zumindest für einen Deutsch sprechenden Menschen) recht offensichtliche Art und Weise die Zeilen und passen, die Verschlüsselungsmatrix an, so erhalten wir

$$
A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 6 & -1 & -7 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -35 & -3 & 17 \\ 23 & 2 & -11 \\ -37 & -3 & 18 \end{pmatrix}, \text{ und } N =
$$

$$
\begin{pmatrix} I & C & H & \_ & M & U & S & S & \_ & D & I & E & \_ & N & A & S & E & \_ & M & E & I & N \\ E & R & \_ & O & L & L & E & N & \_ & A & N & \_ & J & E & D & E & R & \_ & G & R & E & N \\ Z & E & \_ & N & E & U & \_ & V & E & R & Z & O & L & L & E & N & \_ & V & V & B & \_ & \_ \end{pmatrix}.
$$

Das ganze ist ein Zitat aus einem Sketch von Loriot (Vicco von Bülow).

Lösung Aufgabe 2.19. *Transponieren von Matrix A liefert*

$$
A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},
$$

so dass sich als Matrixprodukt

$$
A^T A = \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}
$$

ergibt. Wegen $\det\left(A^T A\right) = \begin{vmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9$ *liefert Einsetzen von* $vol(K) = 3$ *das Endergebnis*

$$
vol_2(f_A(K)) = \sqrt{9} \cdot 3 = 9.
$$

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 3 - Lineare Optimierung –

Sascha Kurz Jörg Rambau

18. August 2010

Lösung Aufgabe 3.1. *Da es sich um ein homogenes Gut handelt, können wir entscheiden, von welchen Depots jeder Kunde beliefert wird. Wir führen als Variablen* $x_{i,j}$*, mit* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*, ein, die angegeben, wieviel Einheiten des Gutes von Depot* i *zu Kunde* j *transportiert werden.*

Aus Optimierungsziel identifizieren wir die Minimierung der Transportkosten, die sich als Summe der Kosten für jede Strecke ergibt, siehe (3.1).

Betrachten wir nun die Nebenbedingungen. Aus jedem Lager kann nur soviel ausgeliefert werden, wie vorrätig ist. Die Summe der daraus ausgelieferten Einheiten kann den Lagerbestand nicht überschreiten: (3.2). Die Lieferverpflichtungen müssen alle mindestens erfüllt werden: (3.3). Wobei die „≤“, je nach Interpretation, auch durch „=“ ersetzt werden könnten. Sämtliche transportierten Mengen müssen nicht-negativ sein: (3.4). Je nachdem ob die zu tranportierenden Einheiten teilbar bzw. unteilbar sind, muss evtl. noch die Ganzzahligkeit der Lösung gefordert werden (Ganzzahlige Optimierung).

Als lineares Programm erhalten wir somit:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}\cdot x_{i,j}\right) \qquad \textit{unter den Nebenbedingungen} \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \ge b_j, \quad j = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

$$x_{i,j} \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

Lösung Aufgabe 3.2. *Wir können entscheiden, wieviele Einheiten Soljanka in den Sorten A bzw. B produziert werden. Die Anzahl produzierter Einheiten von Soljanka A bezeichnen wir mit* x_A *und die Anzahl produzierter Einheiten von Soljanka B mit* x_B*. Mit den Angaben aus der Aufgabenstellung folgt:*

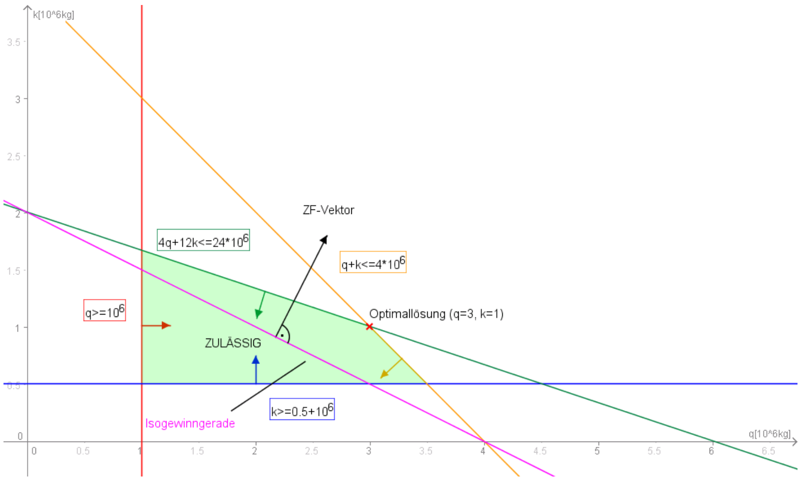
$$\begin{aligned}
\max(5x_A + 4x_B) & \quad \textit{unter den Nebenbedingungen} \\
2x_A + 3x_B &\le 12\,000 \\
4x_A + x_B &\le 16\,000 \\
x_A + x_B &\le 4\,300 \\
x_A &\ge 0 \\
x_B &\ge 0
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3.3.

1. *Hier treten nur zwei Variablen auf, nämlich q (monatlich produzierte Menge an Quark in kg) und k (monatliche Menge Käse in kg). Das lineare Programm (Zielfunktion in Euro) lautet:*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 0.1q & + & 0.2k & & \\ \textit{s. d.} & 4q & + & 12k & \leq & 24\cdot 10^6 \\ & q & + & k & \leq & 4\cdot 10^6 \\ & q & & & \geq & 1\cdot 10^6 \\ & & & k & \geq & 0.5\cdot 10^6 \end{array}$$

2. ***Skizze:***



3. *Der Grafik entnimmt man durch weitestmögliches Verschieben der Isogewinngeraden in Richtung des Zielfunktionsvektors, dass der eingezeichnete Punkt mit den Koordinaten $(3,1)$ zur Optimallösung gehört. Dieser entspricht aufgrund der Skalierung der Lösung $q = 3\cdot 10^6$, $k = 1\cdot 10^6$. Folgerung: Die Fabrik sollte monatlich 3000 Tonnen Quark und 1000 Tonnen Käse produzieren, um ihren Profit zu maximieren.*

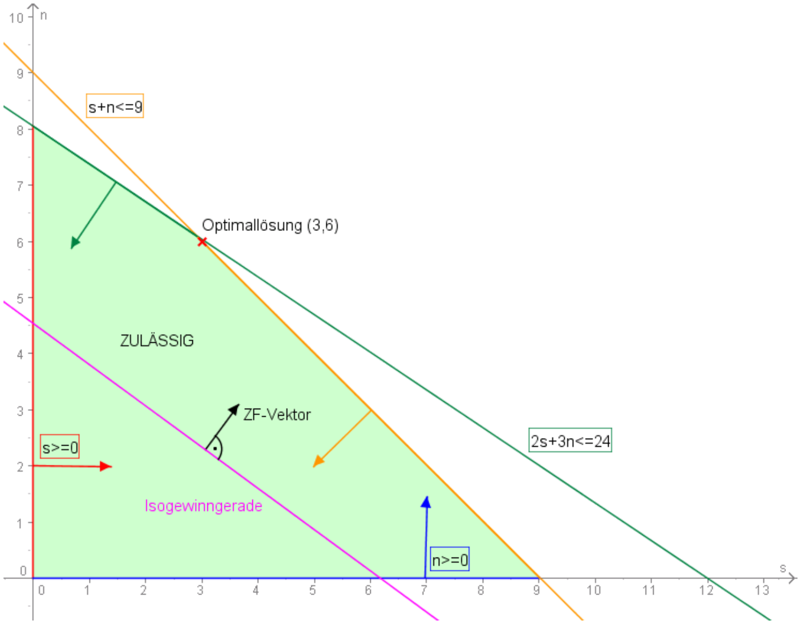
Lösung Aufgabe 3.4.

1. *Wir haben es nur mit zwei Variablen zu tun, nämlich s (Zahl der Stunden in Sonntagsarbeit) und n (Stunden in Nachtarbeit). Das lineare Programm (Zusatzverdienst in Euro) lautet:*

$$
\begin{array}{lrcrcr}
\max & 3s & + & 4n & & \\
s.\,d. & s & + & n & \le & 9 \\
& 2s & + & 3n & \le & 24
\end{array}
$$

mit $s,\, n \geq 0$.

2. ***Skizze:***



3. *Aus der Grafik folgt: Durch weitestmögliches Verschieben der Isogewinngeraden in Richtung des Zielfunktionsvektors gelangt man zum eingezeichneten optimalen Punkt mit den Koordinaten* $(3,6)$*. Folgerung: Der Arbeitnehmer sollte pro Woche* 3 *Stunden Sonntags- und* 6 *Stunden Nachtarbeit übernehmen.*

Lösung Aufgabe 3.5. *Bei dieser Aufgabe gestaltet sich das identifizieren von geeigneten Variablen etwas schwieriger. Generell sollte man sich fragen, was man entscheiden kann. In unserem Fall können wir entscheiden auf welche Art und Weise die Papierrollen zerschnitten werden. Mit etwas Nachdenken kommt man darauf, dass es nicht wirklich wichtig ist, wie genau die Rollen geschnitten werden, sondern nur wieviele Rollen der drei benötigten Breiten auf einer Papierrolle enthalten sind. Es gibt nur eine endliche Menge von solchen Schnittmustern, wobei wir uns zudem noch auf diejenigen beschränken können, die weniger als 25 cm*

Rest übrig lassen. Wir führen für jedes der möglichen Schnittmuster eine Variable ein, die angibt, wie viele Rollen nach diesem Muster zerschnitten werden:

Variable	*Muster*	*Rest*
x_1	$4 \times 25\ cm$	$5\ cm$
x_2	$3 \times 25\ cm,\ 1 \times 30\ cm$	$0\ cm$
x_3	$3 \times 30\ cm$	$15\ cm$
x_4	$3 \times 35\ cm$	$0\ cm$
x_5	$2 \times 25\ cm,\ 1 \times 35\ cm$	$20\ cm$
x_6	$2 \times 30\ cm,\ 1 \times 35\ cm$	$10\ cm$
x_7	$2 \times 30\ cm,\ 1 \times 25\ cm$	$20\ cm$
x_8	$2 \times 35\ cm,\ 1 \times 30\ cm$	$5\ cm$
x_9	$2 \times 35\ cm,\ 1 \times 25\ cm$	$10\ cm$
x_{10}	$1 \times 35\ cm,\ 1 \times 30\ cm,\ 1 \times 25\ cm$	$15\ cm$

Dann lautet das LP:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 + & x_6 + & x_7 + & x_8 + & x_9 + & x_{10} & \\
\textit{s. d.} & 4x_1 + & 3x_2 + & & & + 2x_5 & & + \ x_7 & & + \ x_9 + & x_{10} & \geq 100 \\
& & x_2 + & 3x_3 & & & + 2x_6 + & 2x_7 + & x_8 & & + x_{10} & \geq 125 \\
& & & & 3x_4 + & x_5 + & x_6 & & + 2x_8 + & 2x_9 + & x_{10} & \geq \ 80
\end{array}$$

mit $x_i \geq 0$.

Die Optimallösung zum Optimalwert $z = 90\frac{5}{9}$ *lautet* $x_2 = 33\frac{1}{3}$, $x_3 = 30\frac{5}{9}$ *und* $x_4 = 26\frac{2}{3}$, *die restlichen* x_i *sind Null. Um die Modellierung noch praxisnäher zu machen, müsste man Ganzzahligkeit der Variablen fordern. Eine Optimallösung hierfür wäre* $x_2 = 33$, $x_3 = 30$, $x_4 = 26$, $x_7 = 1$, $x_9 = 1$, *Rest Null; es würden also* 91 *Rollen benötigt. Allerdings ist das Lösen eines solchen* ganzzahligen *linearen Programms deutlich schwieriger als das eines „normalen“ LP. In der Praxis kann man sich hier bei einigermaßen „großen“ Zahlen in der Lösung durch einfaches Aufrunden behelfen, wodurch die Zulässigkeit erhalten bleibt und der Zielfunktionswert nur etwas schlechter wird. Hier erhielte man dann* $x_2 = 34$, $x_3 = 31$ *und* $x_4 = 27$, *bräuchte also mit* 92 *Rollen eine mehr als bei der Optimallösung.*

Lösung Aufgabe 3.6. Initialisierung:

Um die Ungleichungen in Gleichungen umzuwandeln werden die Schlupf-Variablen

s_1, s_2, s_3, s_4 folgendermaßen eingeführt:

$$\begin{array}{lcccccccc} s_1 & = & 3 & - & x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 \\ s_2 & = & 2 & + & x_1 & & & - & 3x_3 \\ s_3 & = & 4 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 \\ s_4 & = & 2 & - & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 \end{array}$$

mit $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$.

Um mit dem Simplex – Algorithmus beginnen zu können benötigen wir noch einen zulässigen Punkt als Startpunkt. Dieser wird gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und $s_1 = 3, s_2 = 2, s_3 = 4, s_4 = 2$. Der Wert unserer Zielfunktion ist 0. Dementsprechend haben wir einen zulässigen Punkt mit dazugehörigem Zielfunktionswert. Offen ist nur noch, ob andere zulässige Punkte einen höheren Zielfunktionswert liefern.

1.Iteration : *Wir betrachten unsere Zielfunktion:*

$$z(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

Hierbei fällt auf, dass die Erhöhung einer beliebigen Original-Variable x_1, x_2, x_3 den Wert der Zielfunktion verbessert. Dementsprechend können wir eine beliebige dieser Variablen erhöhen, wobei die Nebenbedingungen nicht verletzt werden dürfen.

Wähle x_1: Aus den Nebenbedingungen ergibt sich $x_1 \leq 3, x_1 \leq 2, x_1 \geq -2, x_1 \leq 1$. Der kleinste dieser Werte ist 1. Für diesen Wert von x_1 wird x_7=0 - für höhere Werte von x_1 wird die letzte Nebenbedingung folglich verletzt. Dementsprechend muss x_1 auf 1 gesetzt werden. Damit ergibt sich ein neuer zulässiger Punkt:
$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, s_1 = 2, s_2 = 3, s_3 = 2, s_4 = 0$, und $z(x_1, x_2, x_3) = 5$.

Nun wird die Funktion in Abhängigkeit von s_4 betrachtet. Für x_1 ergibt sich folgende neue Nebenbedingung. $x_1 = 1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}s_4$
Dieser Wert wird nun in die anderen Nebenbedingungen eingesetzt. x_1 wird in den übrigen Nebenbedingungen durch x_2, x_3 und s_4 substituiert. Es ergeben sich folgende neue Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lcccccccc} x_1 & = & 1 & - & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}s_4 \\ s_1 & = & 2 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}s_4 \\ s_2 & = & 3 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & - & \frac{1}{2}s_4 \\ s_3 & = & 2 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & s_4 \end{array}$$

2.Iteration : *Unsere Zielfunktion lässt sich nun folgendermaßen darstellen:*

$$z(x_2, x_3, s_4) = 5 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{11}{2}x_3 - \frac{5}{2}s_4$$

Die einzige Variable mit positiven Koeffizienten ist x_3. Diese sollte also erhöht werden. Hierbei darf die Erhöhung wieder nur so weit gehen, wie keine der Nebenbedingungen verletzt wird. Die Schranken für x_3 sind: $x_3 \geq -2, x_3 \leq \frac{4}{3}, x_3 \leq \frac{6}{5}, x_3 \leq \frac{2}{3}$.

Die schärftste dieser Grenzen ist $\frac{2}{3}$*, für welchen* $x_6 = 0$ *gilt. Damit ergibt sich als neuer zulässiger Punkt* $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{2}{3}, s_1 = 1, s_2 = \frac{4}{3}, s_3 = 0, s_4 = 0$*, damit ist* $z(x_2, x_3, s_4) = \frac{26}{3}$ *mit folgenden Nebenbedingungen:*

$$\begin{array}{rclllllll} x_3 & = & \frac{2}{3} & + & \frac{4}{3}x_2 & + & \frac{1}{3}s_4 & - & \frac{1}{3}s_3 \\ x_1 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{5}{6}x_2 & - & \frac{1}{3}s_4 & - & \frac{1}{6}s_3 \\ s_1 & = & 1 & - & \frac{7}{2}x_2 & & & + & \frac{1}{2}s_3 \\ s_2 & = & \frac{4}{3} & - & \frac{29}{6}x_2 & - & \frac{4}{3}s_4 & + & \frac{5}{6}s_3 \end{array}$$

3.Iteration :
Unsere Zielfunktion lässt sich nun folgendermaßen darstellen:

$$z(x_2, s_3, s_4) = \frac{26}{3} + \frac{29}{6}x_2 - \frac{2}{3}s_4 - \frac{11}{6}s_3$$

Die einzige Variable mit positiven Koeffizienten ist x_2*. Diese sollte also erhöht werden. Die schärfste Grenze für* x_2 *liefert die Nebenbedingung für* s_2 *mit* $x_2 \leq \frac{8}{29}$*. Damit ergibt sich als neuer zulässiger Punkt* $x_1 = \frac{32}{29}, x_2 = \frac{8}{29}, x_3 = \frac{30}{29}, s_1 = \frac{1}{29}, s_2 = 0, s_3 = 0, s_4 = 0$ *damit ist* $z(x_2, s_3, s_4) = 10$ *mit folgenden Nebenbedingungen:*

$$\begin{array}{rclllllll} x_2 & = & \frac{8}{29} & - & \frac{8}{29}s_4 & + & \frac{5}{29}s_3 & - & \frac{6}{29}s_2 \\ x_3 & = & \frac{30}{29} & - & \frac{1}{29}s_4 & - & \frac{3}{29}s_3 & - & \frac{8}{29}s_2 \\ x_1 & = & \frac{32}{29} & - & \frac{3}{29}s_4 & - & \frac{9}{29}s_3 & + & \frac{5}{29}s_2 \\ s_1 & = & \frac{1}{29} & + & \frac{28}{29}s_4 & - & \frac{3}{29}s_3 & + & \frac{21}{29}s_2 \end{array}$$

4.Iteration :
Unsere Zielfunktion lässt sich nun folgendermaßen darstellen:

$$z(s_2, s_3, s_4) = 10 - 2s_4 - s_3 - s_2$$

Eine Erhöhung dieser Variablen, würde in einer Verschlechterung der Zielfunktion resultieren. Das optimale Ergebnis ist 10 mit folgender Variablenbelegung

$$\mathbf{x_1} = \mathbf{\frac{32}{29}}, \mathbf{x_2} = \mathbf{\frac{8}{29}}, \mathbf{x_3} = \mathbf{\frac{30}{29}}, \qquad s_1 = \frac{1}{29}, s_2 = 0, s_3 = 0, s_4 = 0.$$

Durch Verwendung der Tableauschreibweise kann etwas Schreibarbeit gespart werden. Das Starttableau lautet wie folgt:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	*RS*	*EQ*
s_1	1	3	1	1	0	0	0	0	3	
s_2	−1	0	3	0	1	0	0	0	2	
s_3	2	−1	2	0	0	1	0	0	4	
s_4	2	3	−1	0	0	0	1	0	2	
z	5	5	3	0	0	0	0	−1	0	

Als Pivotspalte wählen wir die erste Spalte. Alternativ hätten wir auch die zweite oder dritte Spalte wählen können.

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS	EQ
s_1	1	3	1	1	0	0	0	0	3	3
s_2	−1	0	3	0	1	0	0	0	2	−2
s_3	2	−1	2	0	0	1	0	0	4	2
s_4	2	3	−1	0	0	0	1	0	2	1
z	5	5	3	0	0	0	0	−1	0	

Der kleinste nicht-negative Engpassquotient befindet sich in der vierten Zeile und wir führen Basisaustausch mit s_4 und x_1 durch.

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS	EQ	
s_1	1	3	1	1	0	0	0	0	3	3	$\left(Z_1 \| Z_1 - \frac{1}{2}Z_4\right)$
s_2	−1	0	3	0	1	0	0	0	2	−2	$\left(Z_2 \| Z_2 + \frac{1}{2}Z_4\right)$
s_3	2	−1	2	0	0	1	0	0	4	2	$(Z_3 \| Z_3 - Z_4)$
s_4	2	3	−1	0	0	0	1	0	2	1	$\left(Z_5 \| \frac{1}{2}Z_4\right)$
z	5	5	3	0	0	0	0	−1	0		$\left(Z_5 \| Z_5 - \frac{5}{2}Z_4\right)$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS
s_1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	2
s_2	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	3
s_3	0	−4	3	0	0	1	−1	0	2
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1
z	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	0	0	0	$-\frac{5}{2}$	−1	−5

Pivotspalte: 3., Pivotzeile: 3.

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS
s_1	0	$\frac{21}{6}$	0	1	0	$-\frac{3}{6}$	$\frac{0}{6}$	0	$\frac{6}{6}$
s_2	0	$\frac{29}{6}$	0	0	1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{8}{6}$	0	$\frac{8}{6}$
x_3	0	$-\frac{8}{6}$	1	0	0	$\frac{2}{6}$	$-\frac{2}{6}$	0	$\frac{4}{6}$
x_1	1	$\frac{5}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	0	$\frac{8}{6}$
z	0	$\frac{29}{6}$	0	0	0	$-\frac{11}{6}$	$-\frac{4}{6}$	−1	$-\frac{52}{6}$

Pivotspalte: 2., Pivotzeile: 2.

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS
s_1	0	0	0	1	$-\frac{21}{29}$	$\frac{3}{29}$	$-\frac{28}{29}$	0	$\frac{1}{29}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{6}{29}$	$-\frac{5}{29}$	$\frac{8}{29}$	0	$\frac{8}{29}$
x_3	0	0	1	0	$\frac{8}{29}$	$\frac{3}{29}$	$\frac{1}{29}$	0	$\frac{30}{29}$
x_1	1	0	0	0	$-\frac{5}{29}$	$\frac{9}{29}$	$\frac{3}{29}$	0	$\frac{32}{29}$
z	0	0	0	0	$-\frac{29}{29}$	$-\frac{29}{29}$	$-\frac{58}{29}$	-1	-10

Der optimale Zielfunktionswert ist 10 *mit folgender Variablenbelegung*

$$\mathbf{x_1} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{29}}, \mathbf{x_2} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{29}}, \mathbf{x_3} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{29}}, \qquad x_4 = \frac{1}{29}, x_5 = 0, x_6 = 0, x_7 = 0.$$

Lösung Aufgabe 3.7. *Nach Einführung von Schlupfvariablen s_1, s_2, s_3 erhalten wir das Tableau*

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS
s_1	3	0	2	-4	1	0	0	0	6
s_2	1	10	5	5	0	1	0	0	2
s_3	4	6	-4	0	0	0	1	0	4
z	6	4	1	2	0	0	0	-1	0

In der Zielfunktion hat die Variable x_1 den höchsten Koeffizienten; die strengste Begrenzung für die Erhöhung von x_1 liefert die Zeile zur Basisvariable s_3. Deshalb wird x_1 die neue Basisvariable für die dritte Zeile. Die Umformungsschritte lauten: $Z_3||\frac{1}{4}Z_3$ und dann $Z_1||Z_1 - 3z_3$, $2_2||Z_2 - Z_3$, $Z_4||Z_4 - 6Z_3$. Das ergibt das neue Tableau

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	RS
s_1	0	$-\frac{9}{2}$	5	-4	1	0	$-\frac{3}{4}$	0	3
s_2	0	$\frac{17}{2}$	6	5	0	1	$-\frac{1}{4}$	0	1
x_1	1	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	1
z	0	-5	7	2	0	0	$-\frac{3}{2}$	-1	-6

Der höchste vorkommende positive Koeffizient, 7, gehört zu x_3. Die Begrenzung wird am schnellsten in Zeile 2 *erreicht, also verlässt s_2 die Basis. Die Umformungen* *sind $Z_2 || \frac{1}{6} Z_2$ und dann $Z_1 || Z_1 - 5Z_2$, $Z_3 || Z_3 + Z_2$, $Z_4 || Z_4 - 7Z_2$. Damit erhalten wir das Tableau*

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	z	*RS*
s_1	0	$-\frac{139}{12}$	0	$-\frac{49}{6}$	1	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{13}{24}$	0	$\frac{13}{6}$
x_3	0	$\frac{17}{12}$	1	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{24}$	0	$\frac{1}{6}$
x_1	1	$\frac{35}{12}$	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	0	$\frac{7}{6}$
z	0	$-\frac{179}{12}$	0	$-\frac{23}{6}$	0	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{29}{24}$	-1	$-\frac{43}{6}$

Dieses Tableau ist optimal, denn in der z-Zeile gibt es keine positiven Koeffizienten mehr. Wir lesen als Optimallösung ab: $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{6}$, der zugehörige Optimalwert ist $\frac{43}{6}$.

Das duale Programm lautet:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & 6y_1 & + & 2y_2 & + & 4y_3 & & \\ \textit{s. d.} & 3y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \geq & 6 \\ & & & 10y_2 & + & 6y_3 & \geq & 4 \\ & 2y_1 & + & 5y_2 & - & 4y_3 & \geq & 1 \\ & -4y_1 & + & 5y_2 & & & \geq & 2 \end{array}$$

mit $y_1, y_2, y_3 \geq 0$.

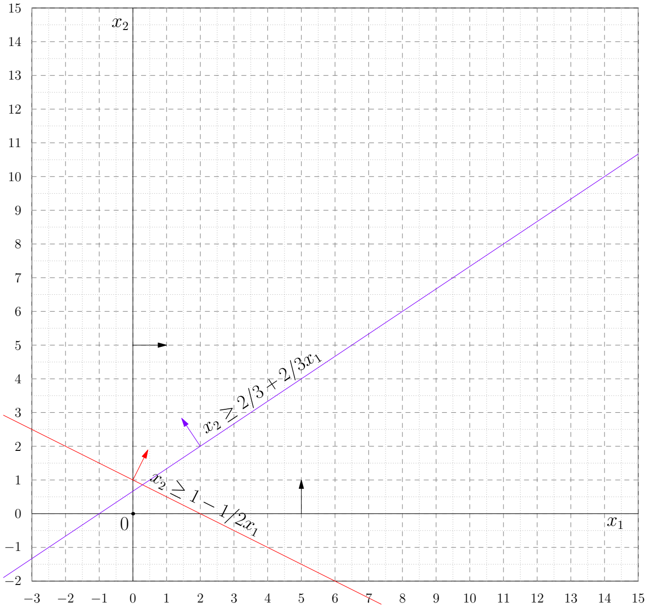
Lösung Aufgabe 3.8. *Prinzipielles Vorgehen: Jede Ungleichung wandelt man zunächst einmal in eine Gleichung um, die dann geometrisch jeweils einer Gerade entspricht. In Teilaufgabe a) haben wir dann die 4 Geraden $x_1 + 2x_2 = 2$, $2x_1 - 3x_2 = -2$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$.*

Um die Geraden zu zeichnen können wir sie zum Beispiel nach x_2 auflösen, sofern dies möglich ist. Für die ersten beiden Geraden ergibt sich nach Umstellung $x_2 = 1 - \frac{1}{2}x_1$ bzw. $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}x_2$. Eine andere Möglichkeit ist, zwei Punkte auf der Gerade zu bestimmen (z. B. durch Nullsetzen jeweils einer der Variablen) und durch diese beiden Punkte eine Linie zu ziehen. Die Gleichungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ entsprechen den beiden Koordinatenachsen.

Nachdem man die Geraden gezeihnet hat, muss zu jeder Ungleichung noch der zugehörige Halbebene (die Seite der Geraden in der die zulässigen Punkte liegen) bestimmt werden. Hierzu setzt man z. B. den Punkt $(0,0)$ ein und testet, ob er die Ungleichung erfüllt oder verletzt. ***Achtung:*** *Man kann dies nicht direkt am Ungleichungszeichen ablesen. (Eine Multiplikation der Ungleichung mit -1 würde das Ungleichheitszeichen z. B. umdrehen.)*

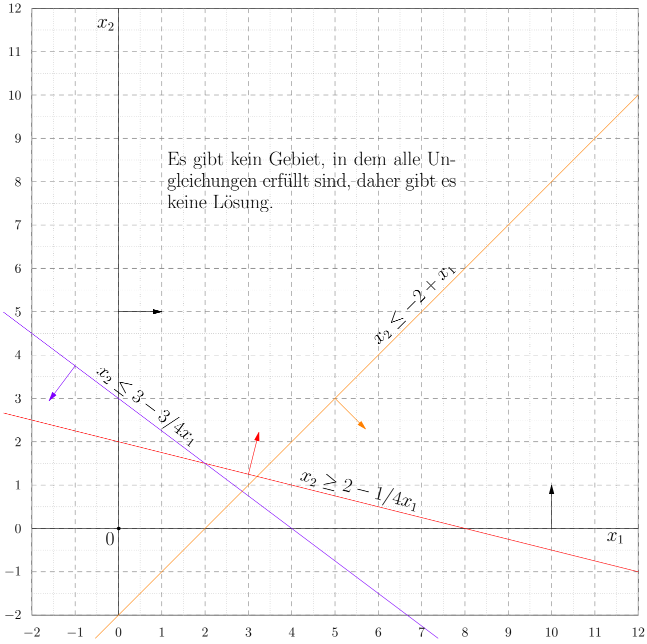
Mit ASYMPTOTE *(⇝ http://asymptote.sourceforge.net) erstellte Zeichnungen (für interaktives Zeichnen empfiehlt sich* GEONEXT *(⇝ http://geonext.uni-bayreuth.de/)):*

a)



x_2
x_1
0
$x_2 \geq 2/3 + 2/3x_1$
$x_2 \geq 1 - 1/2x_1$

b)



x_2
x_1
0
Es gibt kein Gebiet, in dem alle Ungleichungen erfüllt sind, daher gibt es keine Lösung.
$x_2 \leq -2 + x_1$
$x_2 \leq 3 - 3/4x_1$
$x_2 \geq 2 - 1/4x_1$

Lösung Aufgabe 3.9. *Man kann die in der Formel enthaltenen Vektoren und Matrizen beispielsweise wie folgt identifizieren: Da die Variablen $x_1, x_2 \geq 0$ sind und y unbeschränkt ist, muss $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$, $Y = \begin{pmatrix} y \end{pmatrix}$ gelten. Den entsprechenden Koeffizienten in der Zielfunktion entnehmen wir $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}^T$, $D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$. Durch die Unterscheidung in zwei Gleichungen und eine Ungleichung können wir die anderen Matrizen und Vektoren zu $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 20 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ bestimmen.*

Einsetzen in die angegebene Formel liefert folgendes duale Programm:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\min & 20u & + & 10v_1 & + & 15v_2 & & \\
\textit{s. d.} & u & & & + & 2v_2 & \geq & 3 \\
& -5u & + & 6v_1 & + & 3v_2 & \geq & 4 \\
& 4u & - & v_1 & & & = & 2 \\
& u & \geq & 0 & & & &
\end{array}
$$

Lösung Aufgabe 3.10. *Das Lineare Programm*

$$
\begin{array}{rcl}
\min(35x_1 + 15x_2 + 14x_3) & & \qquad \textit{unter den Nebenbedingungen} \\
11x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \geq & 1 \\
5x_2 + 7x_3 & \geq & 1 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

lässt sich umschreiben zu

$$
\begin{array}{rrcl}
(-1)\cdot & \max(-35x_1 - 15x_2 - 14x_3) & & \qquad \textit{unter den Nebenbedingungen} \\
& -11x_1 - 3x_2 - 2x_3 & \leq & -1 \\
& -5x_2 - 7x_3 & \leq & -1 \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Als Starttableau erhalten wir

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	*RS*
s_1	−11	−3	−2	1	0	0	−1
s_2	0	−5	−7	0	1	0	−1
z	−35	−15	−14	0	0	−1	0

welches einer nicht-zulässigen Ecke (negative Werte von Basisvariablen) entspricht.

Da z. B. Basisvarable s_1 negativ ist, wollen wir s_1 aus der Basis entfernen. Betrachten wir nun die Quotienten der Nichtbasisvariablen x_1, x_2, x_3 aus Zielfunktionszeile und der Zeile von Basisvariable s_1:

$$\underbrace{\frac{-35}{-11}}_{x_1}, \underbrace{\frac{-15}{-3}}_{x_2}, \underbrace{\frac{-14}{-2}}_{x_3}$$

Da der kleinste Wert bei Nichtbasisvariable x_1 angenommen wird, bringen wir x_1 in die Basis. Dies führt zu folgendem Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	RS
x_1	1	$\frac{3}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$	0	0	$\frac{1}{11}$
s_2	0	-5	-7	0	1	0	-1
z	0	$-\frac{60}{11}$	$-\frac{84}{11}$	$-\frac{35}{11}$	0	-1	$\frac{35}{11}$

Nun besitzt noch Basisvariable s_2 einen negativen Wert. Die zugehörigen Quotienten der Nichtbasisvariablen lauten

$$\underbrace{\frac{12}{11}}_{x_2}, \underbrace{\frac{12}{11}}_{x_3}, \underbrace{-}_{s_1}.$$

Wir können uns also für x_2 oder x_3 entscheiden; bringen wir x_2 in die Basis, erhalten wir:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	z	RS
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{3}{55}$	0	$\frac{2}{55}$
x_2	0	1	$\frac{7}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
z	0	0	0	$-\frac{35}{11}$	$-\frac{12}{11}$	-1	$\frac{47}{11}$

Als optimale Basislösung erhalten wir somit $x_1 = \frac{2}{55}$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ mit einem Zielfunktionswert von $-\frac{47}{11}$. Unser Ausgangsproblem besitzt also eben diese Optimallösung mit einem Zielfunktionswert von $\frac{47}{11}$.

Lösung Aufgabe 3.11.

1. *Falsch. Auch Schlupfvariablen können in der Optimalbasis auftreten. Im Beispiel aus Aufgabe* 3.7 *ist im Endtableau die Schlupfvariable s_1 eine Basisvariable mit dem Wert $\frac{13}{6}$.*

2. *Richtig. Setzt man alle anderen Variablen auf Null, so erhält man eine zulässige Lösung, wenn man die betroffene Variable nur ausreichend groß macht (denn nach Voraussetzung kommt sie in allen Ungleichungen mit negativem Koeffizienten vor, irgendwann ist also dann die linke Seite überall kleiner als die festbleibende rechte Seite). Erhöht man die Variable dann immer weiter, so bleibt man zulässig, der Zielfunktionswert steigt aber linear mit an. Auf diese Weise kann man ihn beliebig groß machen.*

3. *Falsch. Ein einfaches Gegenbeispiel ist etwa das LP*

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & 2x_1 & - & x_2 & & \\ \textit{s. d.} & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \leq & 1 \\ \multicolumn{6}{l}{\textit{mit } x_1, x_2 \geq 0.} \end{array}$$

   Offensichtlich ist x_2 in der Optimallösung $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ eine Basisvariable.

4. *Falsch. Ist das LP unbeschränkt (vergleiche Punkt (b)), so gibt es durchaus zulässige Lösungen; eine Optimallösung kann jedoch nicht existieren, denn sie ergäbe einen endlichen Zielfunktionswert, der dann wieder durch eine andere Lösung übertroffen werden könnte. Damit wäre die Lösung dann aber doch nicht optimal. Die Suche nach einer Optimallösung ist hier vergleichbar mit der Suche nach der „größten natürlichen Zahl", die es ja auch nicht gibt.*

5. *Richtig. Zunächst überlegt man sich, dass die Belegung aller Variablen mit Null eine zulässige Lösung mit dem Zielfunktionswert 0 ist.*
   Nach Einführung von Schlupfvariablen erhält man dann ein Tableau, bei dem in der Zielfunktionszeile bei den Originalvariablen (also den Nichtschlupfvariablen) nur echt positive Koeffizienten stehen. Wählt man sich eine beliebige der Originalvariablen x_i aus, so verbessert Anheben von x_i den Zielfunktionswert über Null. Dass x_i auch wirklich um einen Betrag größer Null angehoben werden kann, folgt, weil auf der rechten Seite B nur Zahlen echt größer Null stehen.
   Die Beschränktheit des Problems ergibt sich daraus, dass A auch nur Einträge größer Null enthält. Damit gibt es für jede Variable x_i eine obere Schranke, oberhalb derer die Ungleichungen auf jeden Fall verletzt wären, weil das Produkt der Variablen mit ihrem Koeffizienten die rechte Seite überstiege; die anderen Variablen können dies nicht kompensieren, denn sie sind nichtnegativ und gehen in die Ungleichungen ebenfalls mit positiven Koeffizienten ein, vergrößern die linke Seite also höchstens zusätzlich.
   Also ist das Problem beschränkt mit einem Zielfunktionswert echt größer Null.

6. *Richtig. Hat man ein Minimierungsproblem vorliegen, so kann man daraus einfach ein äquivalentes Maximierungsproblem machen, indem man die*

Koeffizienten der Zielfunktion mit -1 *multipliziert und anschließend maximiert; den am Schluss erreichten Zielfunktionswert muss man dann wieder mit* -1 *multiplizieren, um den des ursprünglichen Problems zu erhalten.*
Gleichungen der Form $a^T x = b_i$ *in den Nebenbedingungen können jeweils ersetzt werden durch die zwei Ungleichungen* $a^T x \leq b_i$ *und* $a^T x \geq b_i$.
Eine Ungleichung $a^T x \geq b_i$ *wiederum kann durch Multiplikation beider Seiten mit* -1 *transformiert werden in* $-a^T x \leq -b_i$.
Bliebe noch die Frage, wie man die Nichtnegativität der Variablen erzwingen kann: Ist x_j *eine nicht vorzeichenbeschränkte Variable, so kann man sich* x_j *zerlegt vorstellen in zwei nichtnegative Variablen:* $x_j = x_j^+ - x_j^-$, *wobei* $x_j^+, x_j^- \geq 0$. *Der Zielfunktionskoeffizient von* x_j^+ *ist dann der von* x_j, *der von* x_j^- *der gleiche mit umgedrehtem Vorzeichen. Dasselbe gilt für die Koeffizienten von* x_j^+ *bzw.* x_j^- *in der Matrix auf der linken Seite. Eine Belegung von* x_j *kann dann zwar auf verschiedene Weisen durch* $x_j^+ - x_j^-$ *dargestellt werden, das macht jedoch nichts, weil man trotzdem eindeutig zurückschließen kann auf* x_j *(Die Zerlegung würde eindeutig, wenn man verlangt, dass mindestens eine der beiden Variablen* x_j^+ *bzw.* x_j^- *Null ist, was sich aber nicht ohne weiteres modellieren läßt).*

7. *Richtig. Wäre das duale LP zulässig, so gäbe es dort einen zulässigen Punkt* Y *mit dem zugehörigen Zielfunktionswert* $Y^T B$. *Der Satz über schwache Dualität besagt dann, dass der Zielfunktionswert zu jedem zu"lässigen Punkt* X *im primalen Problem höchstens diesen Wert hat:* $C^T X \leq Y^T B$. *Insbesondere könnte das primale Problem dann nicht unbeschränkt sein, ein Widerspruch zur Annahme. Um ihn aufzulösen, müssen wir die Annahme, das duale LP sei zulässig, verwerfen, womit die Behauptung folgt.*

8. *Falsch. Das wäre die Umkehrung des vorangehenden Satzes, die jedoch mit einem einfachen Gegenbeispiel widerlegt werden kann. Das LP*

$$\begin{array}{llcccr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ \textit{s. d.} & x_1 & & & \leq & -1 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \\ \multicolumn{6}{l}{\textit{mit } x_1, x_2 \geq 0} \end{array}$$

ist offensichtlich unzulässig ($x_1 \geq 0$ *und* $x_1 \leq -1$ *schließen sich aus), genauso wie das duale LP*

$$\begin{array}{llccrr} \min & -y_1 & + & y_2 & & \\ \textit{s. d.} & y_1 & & & \geq & 1 \\ & & & -y_2 & \geq & 1 \\ \multicolumn{6}{l}{\textit{mit } y_1, y_2 \geq 0,} \end{array}$$

hier widersprechen sich $y_2 \geq 0$ *und* $-y_2 \geq 1$*. Also kann bei Unzulässigkeit des dualen Problems das primale* ***entweder*** *unbeschränkt* ***oder*** *unzulässig sein.*

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 4 - Differentialrechnung in einer Variablen –

Sascha Kurz Jörg Rambau

18. August 2010

Lösung Aufgabe 4.1. *[-4mm]*

1.

$$s_0 = 1, \quad s_1 = 2\cdot 1 + 1 = 3, \quad s_2 = 2\cdot 3 + 1 = 7, \quad s_3 = 2\cdot 7 + 1 = 15,$$

$$s_4 = 2\cdot 15 + 1 = 31, \quad s_5 = 2\cdot 31 + 1 = 63.$$

Besitzt die Folge einen Grenzwert?

- *Betrachte z.B. $s'_n = 2^n$. Wir behaupten $s_n \geq s'_n$. Es gilt $s_1 = 3 \geq 2 = 2^1 = s'_1$ und für $n > 1$ gilt $s_n = 2s_{n-1} + 1 \geq 2s'_{n-1} \geq 2\cdot 2^{n-1} = 2^n = s'_n$. Da die Folge (s'_n) unbeschränkt wächst, gilt dies auch für die Folge (s_n). Sie konvergiert somit nicht und besitzt keinen Grenzwert.*
- *Man kann es auch etwas einfacher sehen. Aus den ersten paar Folgengliedern kann man aus den Bauch heraus schon vermuten, dass die Folge (s_n) unbeschränkt wächst, also gegen $+\infty$ geht, falls $n \to \infty$. Wie kann man es nun begründen? Man sieht sofort, dass (s_n) nur positive Zahlen enthält. Wenn man nun die Folge (s_n) mit der Folge (s''_n) vergleicht, wobei $s''_0 = 1$ und $s''_n = s''_{n-1} + 1$ gelten soll, so sieht man $s_n \geq s''_n$. Wenn man nun bei der Folge (s''_n) in jedem Schritt 1 dazu addiert ist klar, dass es keinen Grenzwert gibt.*
- *Eine dritte Möglichkeit zu zeigen, dass es keinen Grenzwert gibt, ist s_n explizit auszurechnen. Es gilt*

  $$s_n = 2^{n+1} - 1.$$

  Hieran kann man sofort sehen, dass die Folge (s_n) nicht konvergiert und keinen Grenzwert besitzt.

2. (a) $a_n = \frac{2n^2+4n}{3n^2+n} = \frac{n^2\cdot\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n^2\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot\left(2+\frac{4}{n}\right)}{n^2\cdot\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{4}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$

   (b) $b_n = \frac{7n^3+4n^2-4n-11}{3n^2-2n+1} = \frac{n^3\cdot\left(7+\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}-\frac{11}{n^3}\right)}{n^2\cdot\left(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot 7}{n^2\cdot 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7n}{3} = \infty$ *die Folge konvergiert folglich nicht und es existiert kein Grenzwert.*

   (c) $c_n = \frac{1^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}$
   $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$

Lösung Aufgabe 4.2.

(a) *explizit:* $a_n = (-1)^n \cdot 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$
rekursiv: $a_1 = -2$, $a_{n+1} = -2 \cdot a_n$
die Folge divergiert

(b) *explizit:* $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$
rekursiv: $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot b_n$
die Folge konvergiert gegen Null

(c) *explizit:* $c_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$
rekursiv: $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + n + 1$
die Folge divergiert gegen ∞

(d) *explizit:* $d_n = \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n+1}{n} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$
bzw. ohne Fallunterscheidung: $d_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}$
rekursiv: Aus der Formel ohne Fallunterscheidung ermitteln wir den Quotienten
$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(-1)^{n+1}}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}} = \frac{\left(\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(-1)^n}\right)^{-1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{(-1)^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^{(-1)^n}} = \left(\left(\frac{n+2}{n}\right)^{(-1)^n}\right)^{-1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{(-1)^{n+1}}$
Also rekursiv: $d_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{(-1)^{n+1}} \cdot d_n$

Die Folge konvergiert gegen 1.

Lösung Aufgabe 4.3. *Beginnen wir damit die ersten Werte der Folge auszurechnen:* $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{8}{9} = 0{,}\overline{8}$, $x_2 = \frac{755}{864} \approx 0{,}873842593$, $x_3 = \frac{645359723}{738752400} \approx 0{,}873580543$, $x_4 \approx 0{,}873580465, \ldots$

Es sieht also ziemlich stark danach aus, dass diese Folge konvergiert.

Nehmen wir zunächst ein Mal an, dass die Folge konvergieren würde. Für sehr große n *müsste dann* $x_{n+1} \approx x_n$ *gelten. Setzen wir* $x = x_n = x_{n+1}$ *in die Rekursionsgleichung ein, so erhalten wir*

$$x = x - \frac{x}{3} + \frac{2}{9x^2}.$$

Dies lässt sich umformen zu $x^3 = \frac{2}{3}$. *Falls ein Grenzwert existiert, so lautet dieser somit* $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Zusatzbemerkungen: *Die rekursive Folge stellt also eine Möglichkeit dar mit einem Näherungsverfahren die dritte Wurzel aus $\frac{2}{3}$ zu ziehen.*

Etwas allgemeiner steht das Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen einer Funktion $f(x)$ dahinter. Wählt man x_0 nahe einer potentiellen Nullstelle von $f(x)$, so konvergiert die rekursiv definierte Folge

$$x_{n+1} = x - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

meist gegen eine Nullstelle x_n von $f(x)$. Für $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}$ ergibt sich beispielsweise unsere Rekursionsgleichung.

Lösung Aufgabe 4.4.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, *die Reihe konvergiert somit nicht und besitzt keinen Grenzwert.*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} 2i = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \infty$, *die Reihe konvergiert somit nicht und besitzt keinen Grenzwert.*
Einfacher kann man dies zeigen, indem man $\sum\limits_{i=1}^{n} 2i > \sum\limits_{i=1}^{n} 1$ betrachtet und die vorherige Teilaufgabe benutzt.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} 3 \cdot 2^{2i} \cdot 5^{1-i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 3 \cdot 5 \cdot 4^i \cdot 5^{-i} = 15 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^i = 15 \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 15 \cdot 5 = 75.$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} 2 \cdot 7^i \cdot 5^{3-i} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 2 \cdot 5^3 \cdot 7^i \cdot 5^{-i} = 250 \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^i = \infty$, *da $\frac{7}{5} \geq 1$. Somit konvergiert die Reihe nicht und besitzt deswegen keinen Grenzwert.*

Lösung Aufgabe 4.5. *Um die beiden Alternativen vergleichen zu können berechnen wir die insgesamt bezahlten Geldbeträge. Bei der monatlichen Zahlungsweise müssen wir insgesamt* $130\,€ \cdot 12 = 1\,560\,€$ *bezahlen.*

Bei der einmaligen Zahlungsweise müssen wir zum Jahresbeginn $1\,560\,€ \cdot (1 - 0{,}04) = 1\,497{,}60\,€$ *bezahlen. Unser Finanzierungsbedarf im i-ten Monat beträgt nun* $1\,497{,}60\,€ - i \cdot 130\,€$, *da wir ja jeden Monat* $130\,€$ *aus der Haushaltskasse* *nehmen können. Wenn wir nur den Geldbetrag aufnehmen, den wir wirklich brauchen, müssen wir*

$$\sum_{i=1}^{11}(1497{,}6-130i)\cdot\left(\frac{0{,}06}{12}\right)=\left(1497{,}6\cdot 11-130\cdot\frac{11\cdot 12}{2}\right)\cdot\left(\frac{0{,}06}{12}\right)=39{,}47\,€$$

Zinsen im Jahr zahlen. (Im Dezember haben wir einen negativen Finanzierungsbedarf und leider können wir in den meisten Fällen nicht davon ausgehen, dass bei einer Bank der Kreditzins genauso hoch wie der Guthabenzins ist. Falls wir aber dennoch eine solch freundliche Bank erwischt hätten, müssten wir nur 39,16 *EUR Zinsen zahlen.)*

Insgesamt haben wir also $1\,497{,}60\,€ + 39{,}47\,€ = 1\,537{,}07\,€$ *gezahlt und somit* $1\,560\,€ - 1\,537{,}07\,€ = 22{,}93\,€$ *gespart. Bereuen tun wir also unsere Entscheidung ganz bestimmt nicht.*

Sparfüchse sind herzlich dazu eingeladen das Ganze mit EXCEL *oder ähnlicher Computersoftware mal unter etwas realistischeren Bedingungen durchzukalkulieren. (Die Kreditzinsen muss man z.B. monatlich zahlen.) Als Praxistip kann man die ungefähre Faustregel angeben, dass eine Jahreszahlung immer günstiger ist, falls der Rabattzinssatz mindestens die Hälfte des Kreditzinssatzes beträgt.*

Lösung Aufgabe 4.6. *[[-4mm]*

1. $f_j(t)=b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$

2. *Stetige Verzinsung entsteht, wenn man die Abrechnungsintervalle beliebig klein macht und auch jeweils die Zinseszinsen berücksichtigt. Bei Unterteilung des Jahres in* n *Intervalle beträgt der Vermehrungsfaktor pro Jahr* $\left(1+\frac{p}{100\cdot n}\right)^n$. *Hiervon betrachten wir den Grenzwert, wenn* n *beliebig groß wird:*
   $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{p}{100\cdot n}\right)^n \overset{n:=k\cdot\frac{p}{100}}{=} \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{100\cdot k\cdot\frac{p}{100}}\right)^{k\cdot\frac{p}{100}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k\cdot\frac{p}{100}} = \left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{\frac{p}{100}} = e^{\frac{p}{100}}$

   Also: $f_s(t)=b\cdot e^{\frac{p}{100}\cdot t}$

3. *Für* t *muss gelten:*
   $f_s(t)=2\cdot f_j(t)\Leftrightarrow b\cdot e^{\frac{p}{100}\cdot t}=2\cdot b\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t \Leftrightarrow e^{\frac{p}{100}\cdot t}=2\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$.

   Anwenden des ln *auf beide Seiten ergibt:*
   $\frac{p}{100}\cdot t=\ln 2+t\cdot\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)\Leftrightarrow t=\frac{\ln 2}{\left(\frac{p}{100}-\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)\right)}$.

Einsetzen von $p = 4$ *ergibt dann:* $t \approx 889.5$. *Es dauert also fast* 900 *Jahre, bis die „Ungenauigkeit“ bei nichtstetiger Verzinsung einen Unterschied um den Faktor* 2 *bewirkt.*

4. *Die Zinsen nach einem Jahr betragen bei stetiger Verzinsung* $b \cdot \left(\exp\left(\frac{p_s}{100}\right) - 1\right)$ *und bei jährlicher Verzinsung* $b \cdot \frac{p_j}{100}$. *Gleichsetzen liefert* $\exp\left(\frac{p_s}{100}\right) = 1 + \frac{p_j}{100}$, *was man zu* $p_s = 100 \cdot \ln\left(1 + \frac{p_j}{100}\right)$ *umformen kann. Beispielsweise entsprechen* 4 *% jährlicher Verzinsung ungefähr* 3,92 *% stetiger Verzinsung.*

Lösung Aufgabe 4.7.

a) $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} 2^x = 2 = |1+1| = f(1)$ *und*

$f(3) = |3+1| = 4 \neq 3^3 - 2\cdot 3 = \lim\limits_{x\to 3, x>3} x^3 - 2x = \lim\limits_{x\to 3, x>3} f(x)$ *also ist* $f(x)$ *nicht stetig*

b) $g(-1) = |-1-3| = 4 = (-1-1)^2 = \lim\limits_{x\to -1, x>-1} (x-1)^2 = \lim\limits_{x\to -1, x>-1} g(x)$ *und*

$\lim\limits_{x\to 1, x<1} g(x) = \lim\limits_{x\to 1, x<1} (x-1)^2 = 0 = \sin(\pi) = g(1)$ *also ist* $g(x)$ *stetig*

Lösung Aufgabe 4.8. *Verdient man jährlich 20 000 € und erhält eine Gehaltserhöhung von 600 €, so muss man jährlich* $St(20\,600) - St(20\,000) = 3496{,}7264 - 3200 = 296{,}7264$ *[€] mehr Lohnsteuer zahlen. Durchschnittlich sind dies*

$$\frac{St(20\,600) - St(20\,000)}{20\,600 - 20\,000} \approx 0{,}49 \text{ €}.$$

Bei einem Jahresgehalt von 30 000 € sind es

$$\frac{St(30\,600) - St(30\,000)}{30\,600 - 30\,000} = 0{,}25 \text{ €}.$$

Lösung Aufgabe 4.9. *Würde der Betrieb, ausgehend von 2 produzierten Einheiten, seine Produktion um eine Einheit Erhöhen, so würden seine Kosten um* $\Delta_K(2) = 4\cdot 2 + 3 = 11$ *GE steigen. Seine Erlöse dagegen würden um* $\Delta_E(x) = 27 - 2\cdot 2 = 23$ *GE steigen. Somit lohnt sich eine Produktionssteigerung.*

Allgemein lohnt sich eine Produktionssteigerung, ausgehend von einer Produktion von x, genau dann, wenn $\Delta_K(x) < \Delta_E(x)$ gilt. Im Falle von $\Delta_K(x) > \Delta_E(x)$ sollten wir die Produktion verringern. Die optimale Produktionsmenge erfüllt also

$$\Delta_K(x) = \Delta_E(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 3 = 27 - 2x.$$

Auflösen nach x liefert $x = 4$ als optimale Produktionsmenge.

Bemerkung: *Die Fixkosten und die Erlöse bei Nichtverkauf haben bei dieser Betrachtung keinerlei Einfluss gehabt. Ihre Kenntnis war also für die Optimierung nicht notwendig. Mit Ihrer Kenntnis könnten wir allerdings auch die Kosten- und die Erlösfunktion bestimmen:*

$$K(x) = 2x^2 + x + 1 \qquad \textit{und} \qquad E(x) = 28x - x^2.$$

(Kontrolle durch Einsetzen in die Definition von $\Delta_K(x)$ und $\Delta_E(x)$.)

Lösung Aufgabe 4.10.

(a) $\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}(x) = 0{,}5 \cdot 64(4x^7 - 3x^5)^{63} \cdot (28x^6 - 15x^4) = 32(4x^7 - 3x^5)^{63} \cdot (28x^6 - 15x^4)$

(b) $\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}u}(u) = e^{-2u} \cdot (-2) = -2e^{-2u}$

(c) Falls $n \neq 0$ gilt $\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x}(x) = nx^{n-1}e^{-nx} + x^n e^{-nx} \cdot (-n) = n(x^{n-1} - x^n)e^{-nx}$

Für $n = 0$ gilt $f_3(x) = 1$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x}(x) = 0$

Also in jedem Fall $\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x}(x) = n(x^{n-1} - x^n)e^{-nx}$. *Aber Vorsicht ist die Mutter der Porzellankiste.*

(d) $\frac{\mathrm{d}f_4}{\mathrm{d}t}(t) = 5 \cdot \frac{1}{\ln(t)} \frac{1}{t} = \frac{5}{t\ln(t)}$

(e) $\frac{\mathrm{d}f_5}{\mathrm{d}I}(I) = \frac{1}{3}(2I)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot e^{-I^2} + \sqrt[3]{2I}\, e^{-I^2} \cdot (-2I) = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{4I^2}} - 2I\sqrt[3]{2I}\right) e^{-I^2}$

(f) $f_6(s) = \frac{(s+1)^2}{s^2-1} = \frac{(s+1)(s+1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s+1}{s-1} = 1 + \frac{2}{s-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}s}(s) = -\frac{2}{(s-1)^2}$

oder mit Quotientenregel

$\frac{\mathrm{d}f_6}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{2(s+1)\cdot(s^2-1)-(s+1)^2\cdot 2s}{(s^2-1)^2} = \frac{-4s-2s^2-2}{(s^2-1)^2} = \frac{-2(s+1)^2}{(s+1)^2(s-1)^2} = -\frac{2}{(s-1)^2}$

(g) $\frac{\mathrm{d}f_7}{\mathrm{d}x}(x) = \cos(\ln(x)) \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

(h) $\frac{\mathrm{d}f_8}{\mathrm{d}y}(y) = x^3 - \sin(y)$

(i) $f_9(x) = \tan(x) + \pi = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \pi \quad \Rightarrow$

$\frac{\mathrm{d}f_9}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2 x} + 0 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (= 1 + \tan^2 x)$

Lösung Aufgabe 4.11. ***Grenzwerte:***

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{x+15}{2} + \tfrac{48}{x-5} = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x+15}{2} + \tfrac{48}{x-5} = +\infty$$

Polstellen:

$f(x)$ hat eine Polstelle bei $x = 5$.

Nullstellen:

$$0 = f(x) = \tfrac{x+15}{2} + \tfrac{48}{x-5} = \tfrac{x^2+10x+21}{2(x-5)} = \tfrac{(x+3)(x+7)}{2(x-5)} \quad \Leftrightarrow \quad x = -3, -7$$

lokale Extrema:

$$\tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{48}{(x-5)^2}$$
$$\tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{x^2-10x-71}{(x-5)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10x - 71 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x = -\tfrac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-10}{2}\right)^2 - (-71)} \Leftrightarrow \quad x = 5 \pm 4\sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ *mögliche Extremwerte liegen bei $x_1 = 5 + 4\sqrt{6}$ und $x_2 = 5 - 4\sqrt{6}$*

$$\tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \tfrac{96}{(x-5)^3}$$

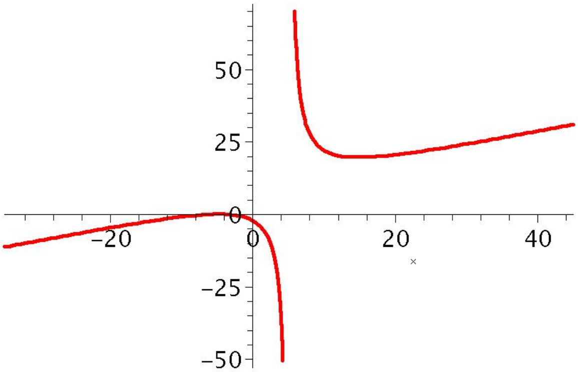
$\tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_1) = \tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(5+4\sqrt{6}) = \tfrac{96}{(4\sqrt{6})^3} > 0 \Rightarrow$ *$f(x)$ nimmt bei $5+4\sqrt{6}$ ein Minimum an.*

$\tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2) = \tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(5-4\sqrt{6}) = \tfrac{96}{(-4\sqrt{6})^3} < 0 \Rightarrow$ *$f(x)$ nimmt bei $5-4\sqrt{6}$ ein Maximum an.*

Wendepunkte:

Da $0 = \tfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = \tfrac{96}{(x-5)^3}$ keine Lösungen besitzt, gibt es keine Wendepunkte.

Verlauf:



Lösung Aufgabe 4.12.

1. $f'(x) = -5 \cdot 3(x+1)^2 = -15(x+1)^2$
   $\epsilon_f(x) = f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} = -15(x+1)^2 \cdot \frac{x}{-5(x+1)^3} \overset{x \neq -1}{=} \frac{3x}{x+1}$

2. $g'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot e^{2x^2} \cdot 4x - e^{2x^2} \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x e^{2x^2}(2x^2+1)}{(x^2+1)^2}$
   $\epsilon_g(x) = g'(x) \cdot \frac{x}{g(x)} = \frac{2x e^{2x^2}(2x^2+1)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x(x^2+1)}{e^{2x^2}} = \frac{4x^4+2x^2}{x^2+1}$

3. $h'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin x) = -2\frac{\sin x}{\cos x}$
   $\epsilon_h(x) = h'(x) \cdot \frac{x}{h(x)} = -2\frac{\sin x}{\cos x} \frac{x}{\ln(\cos^2(x))} \overset{x \neq 0}{=} -\frac{2x \sin x}{\ln(\cos^2(x)) \cos x}$

Lösung Aufgabe 4.13. *Wir suchen zunächst kritische Punkte:*
$g'(p) = 10^5\left(\frac{6}{p^3} - \frac{1}{p^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{6}{p^3} - \frac{1}{p^2} = 0 \overset{\cdot p^3\,(p \neq 0)}{\Leftrightarrow} 6 - p = 0 \Leftrightarrow p = 6.$

Der einzige kritische Punkt liegt also bei $p = 6$. *Das globale Maximum wird entweder hier oder am Rand (*$p = 3$ *bzw.* $p = 100$*) angenommen (Satz vom Maximum und Minimum). Wir setzen ein:*

$g(6) = 10^5\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{36}\right) = \frac{10^5}{12} \approx 8333$
$g(3) = 0$
$g(100) = 10^5\left(\frac{1}{100} - \frac{3}{10^4}\right) = 970$

Damit gilt: $g(3) < g(6)$, $g(6) > g(100)$ *und deshalb nimmt die Funktion* g *ihr globales Maximum bei* $p = 6$ *an.*

Lösung Aufgabe 4.14.

1. $f'(x) = 27x^8 + 14x^6 + 40x^4 + 1 > 0$ *auf dem ganzen Intervall* $[-20, 20]$ *(denn es treten nur gerade Potenzen von* x *auf)*
   $\Rightarrow f$ *ist streng monoton steigend auf* $[-20, 20]$
   $\Rightarrow f$ *nimmt das Minimum am linken Rand (*$x = -20$*) und das Maximum am rechten Rand (*$x = 20$*) des Definitionsbereichs an.*

2. $g'(x) = -\overbrace{\frac{1}{e^{(x^2)}+1}}^{>0} \cdot \overbrace{e^{(x^2)}}^{>0} \cdot \overbrace{2x}^{>0\,(x \geq 3)} < 0$ *für alle* x *aus* $[3, 17]$
   $\Rightarrow g$ *ist streng monoton fallend auf* $[3, 17]$
   $\Rightarrow g$ *nimmt das Maximum am linken Rand (*$x = 3$*) und das Minimum am rechten Rand (*$x = 17$*) des Definitionsbereichs an.*

Lösung Aufgabe 4.15. *Bezeichnet $s(t)$ die Kilometermarke, bei der sich das Auto zum Zeitpunkt t befand, und ist $t = 0$ der Moment, in dem die erste Aufnahme gemacht wurde, so kennt man s an folgenden drei Punkten: $s(0s) = 234$ km, $s(60s) = 237$ km und $s(90s) = 238.75$ km.*

Die Ableitung von s zur Zeit t ist gerade die Geschwindigkeit des Wagens in diesem Moment. Da die Geschwindigkeit als stetige Funktion angenommen werden kann (getreu dem Motto: „natura non facit saltus" = „Die Natur macht keine Sprünge"), können wir hier den Mittelwertsatz anwenden. Er besagt, dass die Ableitung einer auf einem Intervall $[x_1, x_2]$ differenzierbaren Funktion f irgendwo zwischen den Punkten x_1 und x_2 den Wert $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ annimmt. In der Aufgabe folgt damit aus den ersten beiden Messpunkten:

Irgendwo im Intervall $[0s, 60s]$ fuhr das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit $\frac{237\ km-234\ km}{60\ s-0\ s} = \frac{3\ km}{60\ s} = \frac{3\ km}{60s} \cdot \frac{3600\ s}{h} = 180\frac{km}{h}$.
Aus dem zweiten und dritten Messpunkt ergibt sich:

Irgendwo im Intervall $[60s, 90s]$ fuhr das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit $\frac{238.75\ km-237\ km}{90\ s-60\ s} = \frac{1.75\ km}{30\ s} = \frac{1.75\ km}{30\ s} \cdot \frac{3600\ s}{h} = 210\frac{km}{h}$.

Also fuhr der Fahrer mit Sicherheit zumindest für den Bruchteil einer Sekunde mit einer Geschwindigkeit von $210\frac{km}{h}$, er muss sich also für eine Geschwindigkeitsüberschreitung um $80\frac{km}{h}$ verantworten.

Lösung Aufgabe 4.16.

1. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow L_{f_1}(x) = f(1) + (x-1)\cdot f'(1) = 1 + \frac{(x-1)}{2} = \frac{x+1}{2}$
2. $g'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow L_{g_e}(x) = g(e) + g'(e)\cdot(x-e) = 1 + \frac{x-e}{e} = \frac{x}{e}$
3. $h'(x) = 2\sin x \cos x \Rightarrow L_{h_{\frac{\pi}{4}}} = h(\frac{\pi}{4}) + h'(\frac{\pi}{4})\cdot(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} + 1\cdot(x-\frac{\pi}{4}) = x + \frac{2-\pi}{4}$

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 5 - Differentialrechnung in mehreren Variablen –

Sascha Kurz Jörg Rambau

18. August 2010

Lösung Aufgabe 5.1.

1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \sqrt{y}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}e^x+\sqrt{x}e^x\right)=\sqrt{y}e^x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\sqrt{x}e^x}{2\sqrt{y}}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) &= \cos^2 y\cos x(x^2+y+z^3)+\sin x\cos^2 y\cdot 2x\\ &= \cos^2 y\left(\cos x\left(x^2+y+z^3\right)+2x\sin x\right)\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) &= \sin x\cdot 2\cos y(-\sin y)(x^2+y+z^3)+\sin x\cos^2 y\cdot 1\\ &= -\sin x\cos y\left(2\sin y\left(x^2+y+z^3\right)-\cos y\right)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) &= \begin{pmatrix}12x^2y^2z-yz\\ 3yz^3\end{pmatrix}\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) &= \begin{pmatrix}8x^3yz-xz\\ 3xz^3\end{pmatrix}\\ \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) &= \begin{pmatrix}4x^3y^2-xy\\ 9xyz^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 5.2. *Die partielle Elastizität $\varepsilon_{f,x_i}(X)$ einer Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ an der Stelle X zur Richtung x_i gibt an, um wieviel Prozent sich der Funktionswert gegenüber $f(X)$ verändert, wenn sich die Größe x_i (gegenüber dem Wert von x_i am Punkt X) um ein Prozent erhöht. Ist also z. B $\varepsilon_{f,x_i}(X)=0{,}5$, so bedeutet das, dass sich bei Änderung von x_i um 10 Prozent der Funktionswert f ungefähr um 5 Prozent verändern wird, sofern die anderen Variablen ihren Wert behalten. Berechnet wird $\varepsilon_{f,x_i}(X)$ mit Hilfe der partiellen Ableitung von f nach der Variablen x_i im Punkt X:*

$$\varepsilon_{f,x_i}(X)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(X)\cdot\frac{x_i}{f(X)}\,.$$

Die Skalenelastizität $\lambda_f(X)$ gibt an, um wieviel Prozent sich f ungefähr ändert, wenn sich alle Variablen um ein Prozent erhöhen; sie läßt sich einfach als Summe aller partiellen Elastizitäten berechnen, d. h.

$$\lambda_f(X)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{f,x_i}(X)\,.$$

1. $f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2x_2 - x_3^2$
   $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3) = 6x_1x_2$
   $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2$
   $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3) = -2x_3 \Rightarrow$
   $\varepsilon_{f,x_1}(x_1,x_2,x_3) = \frac{6x_1^2x_2}{3x_1^2x_2-x_3^2}$
   $\varepsilon_{f,x_2}(x_1,x_2,x_3) = \frac{3x_1^2x_2}{3x_1^2x_2-x_3^2}$
   $\varepsilon_{f,x_3}(x_1,x_2,x_3) = \frac{-2x_3^2}{3x_1^2x_2-x_3^2}$
   $\lambda_f(x_1,x_2,x_3) = \frac{9x_1^2x_2-2x_3^2}{3x_1^2x_2-x_3^2}$

2. $g(x_1,x_2) = \ln\left((1+x_1)^2 \cdot e^{x_1+x_2}\right) = \ln\left((1+x_1)^2\right) + \ln(e^{x_1+x_2})$
   $= 2\ln(1+x_1) + x_1 + x_2$
   $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2) = \frac{2}{1+x_1} + 1 = \frac{3+x_1}{1+x_1}$
   $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2) = 1$
   $\varepsilon_{g,x_1}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2+3x_1}{(1+x_1)(2\ln(1+x_1)+x_1+x_2)}$
   $\varepsilon_{g,x_2}(x_1,x_2) = \frac{x_2}{2\ln(1+x_1)+x_1+x_2}$
   $\lambda_g(x_1,x_2) = \frac{x_1^2+3x_1+x_1x_2+x_2}{(1+x_1)(2\ln(1+x_1)+x_1+x_2)}$

3. *Hier gibt es nur eine Variable, die Richtungsableitung nach x ist also die altbekannte Ableitung bei Funktionen in einer Veränderlichen. Die Skalenelastizität fällt dann automatisch mit der „partiellen“ Elastizität zusammen.*
   $h(x) = 5x - 2$
   $\frac{\partial h}{\partial x}(x) = h'(x) = 5$
   $\varepsilon_{h,x}(x) = \lambda_f(x) = \frac{5x}{5x-2}$

Lösung Aufgabe 5.3. $K(p_s,p_w,p_h) = 4000p_s + 100p_w + 1000p_h + 1700$, $p^0 := (p_s^0, p_w^0, p_h^0) = (0.16, 2.00, 0.60)$.

$\frac{\partial K}{\partial p_s}(p_s,p_w,p_h) = 4000$, $\frac{\partial K}{\partial p_w}(p_s,p_w,p_h) = 100$, $\frac{\partial K}{\partial p_h}(p_s,p_w,p_h) = 1000$.

Die partiellen Elastizitäten an der Stelle p^0 lauten:
$\varepsilon_{K,p_s}(p^0) = \frac{\partial K}{\partial p_s}(p^0)\frac{p_s^0}{K(p^0)} = 4000 \cdot \frac{0.16}{3140} \approx 0.204\,.$
$\varepsilon_{K,p_w}(p^0) = \frac{\partial K}{\partial p_w}(p^0)\frac{p_w^0}{K(p^0)} = 100 \cdot \frac{2}{3140} \approx 0.064\,.$
$\varepsilon_{K,p_h}(p^0) = \frac{\partial K}{\partial p_h}(p^0)\frac{p_h^0}{K(p^0)} = 1000 \cdot \frac{0.6}{3140} \approx 0.191\,.$

Die Skalenelastizität $\lambda_K(p^0)$ von K im Punkt p^0 ergibt sich als Summe der drei partiellen Elastizitäten:

$\lambda_K(p^0) = \varepsilon_{K,p_s}(p^0) + \varepsilon_{K,p_w}(p^0) + \varepsilon_{K,p_h}(p^0) \approx 0.204 + 0.064 + 0.191 = 0.459\,.$

1. *Wenn der Preis von Heizöl beim momentanen Preisniveau* p^0 *um* 5% *steigt, so steigt* K *etwa um* $5\% \cdot \varepsilon_{K,p_h}(p^0) \approx 5\% \cdot 0.191 = 0.955\%$.
2. *Wenn der Preis von Strom, Wasser und Heizöl beim momentanen Preisniveau* p^0 *um je* 2% *steigt, so steigt* K *etwa um* $2\% \cdot \lambda_K(p^0) \approx 2\% \cdot 0.459 = 0.918\%$.

Lösung Aufgabe 5.4. *Bemerkung: Anstatt die mehrdimensionale Kettenregel anzuwenden, tut man sich meist leichter alle auftretenden Ableitungen einzeln auszurechnen. Damit muss man nur die eindimensionale Kettenregel (innere mal äußere Ableitung) verwenden.*

a) *Betrachte*

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (r) \longmapsto \sin(r)$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2 + z^2.$$

Wegen

$$f(x,y,z) = \Big(f_1 \circ f_2\Big)(x,y,z) = f_1\Big(f_2(x,y,z)\Big)$$

können wir die Kettenregel anwenden.

$$J_f(x,y,z) = J_{f_1}(r) \circ J_{f_2}(x,y,z) =$$

$$(\cos r) \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(x^2+y^2+z^2)x \\ 2\cos(x^2+y^2+z^2)y \\ 2\cos(x^2+y^2+z^2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}(x,y,z)$$

b) *Betrachte*

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \ln(r_1) + \cos(r_2) \\ \ln(r_2) + \cos(r_1) \end{pmatrix}$$

und

$$g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$g(x,y) = \Big(g_1 \circ g_2\Big)(x,y) = g_1\Big(g_2(x,y)\Big)$$

können wir die Kettenregel anwenden.

$$J_g(x,y) = J_{g_1}(r_1,r_2)\circ J_{g_2}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} & -\sin(r_2) \\ -\sin(r_1) & \frac{1}{r_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1} - 2\sin(r_2)x & \frac{1}{r_1} - 2\sin(r_2)y \\ -\sin(r1) + \frac{2x}{r2} & -\sin(r_1) + \frac{2y}{r_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{x+y} - 2\sin(x^2+y^2)x & \frac{1}{x+y} - 2\sin(x^2+y^2)y \\ -\sin(x+y) + \frac{2x}{x^2+y^2} & -\sin(x+y) + \frac{2y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y)$$

Lösung Aufgabe 5.5.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} x_2\cos x_1 \\ 2x_1x_2x_3x_4^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} \sin x_1 \\ x_1^2x_3x_4^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} -e^{x_4}\sin x_3 \\ x_1^2x_2x_4^3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} \cos x_3 e^{x_4} \\ 3x_1^2x_2x_3x_4^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_f(\pi,2,\tfrac{\pi}{2},1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -e & 0 \\ 2\pi^2 & \frac{\pi^3}{2} & 2\pi^2 & 3\pi^3 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 5.6. *Die allgemeine Approximation lautet:*

$$f(X') \approx f(X) + J_f(X)(X'-X).$$

Setzt man nun die Werte für X *und* X' *ein, so erhält man:*

$$f(3.3,1.9,\frac{\pi}{2},1.1) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \pi^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -e & 0 \\ 2\pi^2 & \frac{\pi^3}{2} & 2\pi^2 & 3\pi^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3.3-\pi \\ -0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.317 \\ 41.885 \end{pmatrix}$$

Bei exakter Rechnung ergibt sich:

$$f(3.3,1.9,\frac{\pi}{2},1.1) \approx \begin{pmatrix} -0.300 \\ 43.259 \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 5.7.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + 2 = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 2y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$$

Da $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin [-1,1]^2$ *werden die globalen Extrema am Rand angenommen:*

$x = 1:\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = -2y + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3,$ *kein Kandidat, da* $3 \notin [-1,1]$.

$x = -1:\quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,y) = -2y + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 1, \quad f(-1,1) = 0$

$y = 1:\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = 2x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2,$ *kein Kandidat, da* $-2 \notin [-1,1]$.

$y = -1:\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,-1) = 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \quad f(0,-1) = -5$

$x = 1, y = 1:\quad f(1,1) = 8$

$x = 1, y = -1:\quad f(1,-1) = -4$

$x = -1, y = 1:\quad f(-1,1) = 0$

$x = -1, y = -1:\quad f(-1,-1) = -4$

In $(0,-1)$ *wird somit das globale Minimum mit* $f(0,-1) = -5$*, und in* $(1,1)$ *das globale Maximum mit* $f(1,1) = 8$ *angenommen.*

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler
– Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 6 - Differenzierbare Optimierung –

Sascha Kurz Jörg Rambau

10. August 2010

Lösung Aufgabe 6.1. *Aus den Daten der Angabe ergibt sich folgende Nebenbedingung (Budgetrestriktion):*

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 9x_2 + 0{,}55x_3 + x_4 - 1600 \le 0.$$

Streng genommen müssen wir die Nichtnegativitätsbedingungen $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ mit berücksichtigen, siehe Beispiel am Ende der Lösung. Die Lagrangefunktion lautet somit:

$$\begin{aligned} L(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\dots,\lambda_5) \quad = \quad & 750x_1 + 2830x_2 + 3x_1x_3 + 7x_2x_4 + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2 + \\ & \lambda_4 x_3 + \lambda_5 x_4 - \lambda_1(x_1 + 9x_2 + 0{,}55x_3 + x_4 - 1600). \end{aligned}$$

Zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\dots,\lambda_5) = 750 + 3x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 &\overset{!}{=} 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\dots,\lambda_5) = 2830 + 7x_4 - 9\lambda_1 + \lambda_3 &\overset{!}{=} 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\dots,\lambda_5) = 3x_1 - 0{,}55\lambda_1 + \lambda_4 &\overset{!}{=} 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_4}(x_1,x_2,x_3,x_4,\lambda_1,\dots,\lambda_5) = 7x_2 - \lambda_1 + \lambda_5 &\overset{!}{=} 0, \\ \lambda_1(x_1 + 9x_2 + 0{,}55x_3 + x_4 - 1600) &\overset{!}{=} 0, \\ \lambda_2 x_1 &\overset{!}{=} 0, \\ \lambda_3 x_2 &\overset{!}{=} 0, \\ \lambda_4 x_3 &\overset{!}{=} 0, \\ \lambda_5 x_4 &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Da sowohl die Nutzenfunktion als auch die Budgetrestriktion monoton steigend in den x_i ist, wissen wir, dass im globalen Nutzenmaximum das Budget vollständig ausgeschöpft wird. Es gilt also $\lambda_1 \neq 0$ und $x_1 + 9x_2 + 0{,}55x_3 + x_4 - 1600 = 0$. Im Falle von $x_1 = x_2 = 0$ ergäbe sich ein Nutzen von 0, so dass wir diese Fälle ebenfalls von unseren Betrachtungen ausschliessen.

Im folgenden spalten wir die letzten vier Gleichungen durch Fallunterscheidungen $\lambda_{i+1} = 0$ oder $x_i = 0$, für $1 \le i \le 4$ auf. In den einzelnen Fällen lösen wir jeweils das enstehende Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußalgorithmus, testen, ob die Lösung zulässig ist, und berechnen den resultierenden Funktionswert der Nutzenfunktion.

(1) $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$*:* $\rightsquigarrow x_3 < 0$*; somit unzulässig*

(2) $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = x_4 = 0$*:* $\rightsquigarrow x_3 < 0$*; somit unzulässig*

(3) $\lambda_2 = \lambda_3 = x_3 = \lambda_5 = 0$: $\rightsquigarrow$ $x_1 = \frac{530}{7}$, $x_2 = \frac{750}{7}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 560$, $\mathbf{u}(\ldots) = \mathbf{780\,000}$

(4) $\lambda_2 = \lambda_3 = x_3 = x_4 = 0$: $\rightsquigarrow$ *es existiert keine Lösung*

(5) $\lambda_2 = x_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0)$: $\rightsquigarrow$ $x_3 < 0$*; somit unzulässig*

(6) $\lambda_2 = x_2 = \lambda_4 = x_4 = 0)$: $\rightsquigarrow$ $x_1 = 868.75$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1329.\overline{54}$, $x_4 = 0$, $\mathbf{u}(\ldots) \approx \mathbf{4\,116\,690}$

(7) $\lambda_2 = x_2 = x_3 = \lambda_5 = 0)$: $\rightsquigarrow$ *es existiert keine Lösung*

(8) $\lambda_2 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$: $\rightsquigarrow$ $x_1 = 1600$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\mathbf{u}(\ldots) = \mathbf{1\,200\,000}$

(9) $x_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$: $\rightsquigarrow$ $x_4 < 0$*; somit unzulässig*

(10) $x_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = x_4 = 0$: $\rightsquigarrow$ *es existiert keine Lösung*

(11) $x_1 = \lambda_3 = x_3 = \lambda_5 = 0$: $\rightsquigarrow$ $x_1 = 0, x_2 \approx 111.3492, x_3 = 0, x_4 = \frac{4185}{7}$, $\mathbf{u}(\ldots) \approx \mathbf{781\,115}$

(12) $x_1 = \lambda_3 = x_3 = x_4 = 0$: $\rightsquigarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1600}{9}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $\mathbf{u}(\ldots) \approx \mathbf{503\,111}$

Durch Vergleich der Zielfunktionswerte in den einzelnen Fällen schliessen wir, dass das globale Nutzenmaximum bei $x_1 = 868.75$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1329.\overline{54}$, $x_4 = 0$ *mit einem Nutzen von ungefähr* $4\,116\,690$ *angenommen wird.*

Achtung: *Die Nichnegativitätsbedingungen können nicht einfach ignoriert werden. Als illustrierendes Beispiel betrachten wir die Nutzenfunktion* $u(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 x_3$ *unter Budgetretriktion* $x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$*. Ignorieren wir die Nichtnegativitätsbedingungen, so ergibt sich als einziger kritischer Punkt* $x_1 = 288$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ *mit einem Nutzen von* 299*. Das globale Nutzenmaximum liegt jedoch bei* $x_1 = 0$, $x_2 = 150$, $x_3 = 150$ *mit einem Nutzen von* $225\,000$.

Falls es die Nichtnegativitätsbedingungen in der Realität nicht gibt, wäre das Optimierungsproblem unbeschränkt: Setzen wir $x_1 = 300$, $x_2 = x$, $x_3 = -x$*, so ist die Budgetrestriktion für alle* $x \in \mathbb{R}$ *erfüllt und führt zu einem unbeschränkten Nutzen von* $300 + x^2$.

Lösung Aufgabe 6.2. *Die Nutzenfunktion lautet*

$$u(Z, W, T, M) = 10 \cdot Z^{0,7} \cdot W^{0,5} \cdot T^3 \cdot M^{0,3}.$$

Als Budgetnebenbedingungen haben wir

$$2Z + W + 0{,}1T + 0{,}5M \leq 25 \quad \Leftrightarrow \quad 2Z + W + 0{,}1T + 0{,}5M - 25 \leq 0$$

für den Platzbedarf und

$$20Z + 5W + 50T + 5M \leq 240 \quad \Leftrightarrow \quad 20Z + 5W + 50T + 5M - 240 \leq 0$$

aufgrund der Beschränkung an die verfügbaren Finanzmittel. Daneben gibt es noch die Nichtnegativitätsbedingungen

$$Z, W, T, M \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -Z, -W, -T, -M \leq 0.$$

Als Lagrangefunktion ergibt sich somit $L(Z, W, T, M, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6) =$

$$\begin{aligned}
&10 \cdot Z^{0,7} \cdot W^{0,5} \cdot T^3 \cdot M^{0,3} - \mu_1(2Z + W + 0{,}1T + 0{,}5M - 25) \\
&-\mu_2(20Z + 5W + 50T + 5M - 240) + \mu_3 Z + \mu_4 W + \mu_5 T + \mu_6 M.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(Z, W, T, M, \mu_1, \ldots, \mu_6)}{\partial Z} &= 7 \cdot Z^{-0,3} \cdot W^{0,5} \cdot T^3 \cdot M^{0,3} + 2\mu_1 + 20\mu_2 + \mu_3 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial L(Z, W, T, M, \mu_1, \ldots, \mu_6)}{\partial W} &= 5 \cdot Z^{0,7} \cdot W^{-0,5} \cdot T^3 \cdot M^{0,3} + \mu_1 + 5\mu_2 + \mu_4 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial L(Z, W, T, M, \mu_1, \ldots, \mu_6)}{\partial T} &= 30 \cdot Z^{0,7} \cdot W^{0,5} \cdot T^2 \cdot M^{0,3} + 0{,}1\mu_1 + 50\mu_2 + \mu_5 \overset{!}{=} 0 \\
\frac{\partial L(Z, W, T, M, \mu_1, \ldots, \mu_6)}{\partial M} &= 3 \cdot Z^{0,7} \cdot W^{0,5} \cdot T^3 \cdot M^{-0,7} + 0{,}5\mu_1 + 5\mu_2 + \mu_6 \overset{!}{=} 0 \\
-\mu_1(2Z + W + 0{,}1T + 0{,}5M - 25) &\overset{!}{=} 0 \\
-\mu_2(20Z + 5W + 50T + 5M - 240) &\overset{!}{=} 0 \\
\mu_3 Z &\overset{!}{=} 0 \\
\mu_4 W &\overset{!}{=} 0 \\
\mu_5 T &\overset{!}{=} 0 \\
\mu_6 M &\overset{!}{=} 0 \\
2Z + W + 0{,}1T + 0{,}5M - 25 &\leq 0 \\
20Z + 5W + 50T + 5M - 240 &\leq 0
\end{aligned}$$

Manche Nebenbedingungen und Fälle können wir „wegdiskutieren“. Wenn eine der Variablen Z*,* W*,* T *oder* M *gleich Null ist, dann würde sich ein Nutzen von Null ergeben. Sicherlich ist es möglich* Z*,* W*,* T *und* M *positiv und hinreichend klein, so dass die Budgetnebenbedingungen erfüllt sind, zu wählen. Das Nutzenmaximum wird also mit Sicherheit größer als Null sein. Folglich gilt* $Z, W, T, M > 0$ *und damit* $\mu_3, \mu_4, \mu_5, \mu_6 = 0$.

Weiter können auch nicht gleichzeitig μ_1 *und* μ_2 *Null werden, da sonst aus der ersten Gleichung folgen würde, dass eine der Variablen* Z*,* W*,* T *oder* M *gleich Null ist. Entsprechend folgt* $2\mu_1 + 20\mu_2, \mu_1 + 5\mu_2, 0{,}1\mu_1 + 50\mu_2, 0{,}5\mu_1 + 5\mu_2 \neq 0$.

Vielleicht haben Sie bemerkt, dass die Nutzenfunktion in Z, W, T und M streng monoton steigend ist. Budgets sollten also im Nutzenmaximum ausgenutzt werden. Aber ***Vorsicht****: Bei mehreren Budgetbeschränkungen müssen nicht unbedingt alle Budgets ausgenutzt werden! Alles was man weiß ist, dass* ***mindestens*** *eines im Nutzenmaximum ausgeschöpft wird. (In unserem Fall entspricht dies, dass nicht gleichzeitig μ_1 und μ_2 gleich Null sein können.)*

Bei Nutzenfunktionen vom Cobb-Douglas Typ bietet sich folgendes Vorgehen an: In den ersten vier Gleichungen bringen wir die Lagrangeparameter auf die andere Seite und teilen anschließend jeweils die erste Gleichung durch die zweite, dritte und vierte Gleichung. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{7}{5}\frac{W}{Z} &= \frac{2\mu_1+20\mu_2}{\mu_1+5\mu_2}\\
\frac{7}{30}\frac{T}{Z} &= \frac{2\mu_1+20\mu_2}{0{,}1\mu_1+50\mu_2}\\
\frac{7}{3}\frac{M}{Z} &= \frac{2\mu_1+20\mu_2}{0{,}5\mu_1+5\mu_2}
\end{aligned}$$

Nach kleineren Umstellungen ergibt sich ($\star$):

$$\begin{aligned}
W &= \frac{5}{7}\cdot\frac{2\mu_1+20\mu_2}{\mu_1+5\mu_2}\cdot Z\\
T &= \frac{30}{7}\cdot\frac{2\mu_1+20\mu_2}{0{,}1\mu_1+50\mu_2}\cdot Z\\
M &= \frac{3}{7}\cdot\frac{2\mu_1+20\mu_2}{0{,}5\mu_1+5\mu_2}\cdot Z
\end{aligned}$$

Nun unterscheiden wir ein paar Fälle, je nachdem, ob μ_1 bzw. μ_2 gleich Null oder ungleich Null sind.

(1) $\mu_1=0,\ \mu_2\neq 0$:
Für W, T und M ergibt sich mit ($\star$) und $\mu_1=0$:

$$W=\frac{20}{7}Z,\quad T=\frac{12}{7}Z,\quad M=\frac{12}{7}Z.$$

Setzen wir dies in die sechste Gleichung unseres Ausgangsgleichungssystems ein, so erhalten wir

$$20Z+5\cdot\frac{20}{7}Z+50\cdot\frac{12}{7}Z+5\cdot\frac{12}{7}Z-240=0\quad\Leftrightarrow\quad Z=\frac{28}{15}.$$

Somit gilt $W=\frac{16}{3}$, $T=\frac{16}{5}$ und $M=\frac{16}{5}$. Der Platzverbrauch beträgt $2\cdot\frac{28}{15}+\frac{16}{3}+0{,}1\cdot\frac{16}{5}+0{,}5\cdot\frac{16}{5}=\frac{824}{75}=10{,}98\overline{6}\leq 25$ *und der Finanzbedarf beträgt* $20\,000\cdot\frac{28}{15}+5\,000\cdot\frac{16}{3}+50\,000\cdot\frac{16}{5}+5\,000\cdot\frac{16}{5}=240\,000$. *Diese Lösung ist somit zulässig und führt zu einem Nutzen von ungefähr* **1660,508**.

(2) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$:
Für W, T und M ergibt sich mit ($\star$) und $\mu_2 = 0$:

$$W = \frac{10}{7} Z, \quad T = \frac{600}{7} Z, \quad M = \frac{12}{7} Z.$$

Setzen wir dies in die fünfte Gleichung unseres Ausgangsgleichungssystems ein, so erhalten wir

$$2Z + 1 \cdot \frac{10}{7} Z + 0{,}1 \cdot \frac{600}{7} Z + 0{,}5 \cdot \frac{12}{7} Z - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z = \frac{35}{18}.$$

Somit gilt $W = \frac{25}{9}$, $T = \frac{500}{3}$ *und* $M = \frac{10}{3}$. *Der Platzverbrauch beträgt* $2 \cdot \frac{35}{18} + \frac{25}{9} + 0{,}1 \cdot \frac{500}{3} + 0{,}5 \cdot \frac{10}{3} = 25$ *und der Finanzbedarf beträgt* $20\,000 \cdot \frac{35}{18} + 5\,000 \cdot \frac{25}{9} + 50\,000 \cdot \frac{500}{3} + 5\,000 \cdot \frac{10}{3} > 240\,000$. *Diese Lösung ist somit* ***nicht zulässig***.

(3) $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$:
Wegen $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ *gilt* $2 \cdot Z + W + 0{,}1 \cdot T + 0{,}5 \cdot M - 25 = 0$ *und* $20 \cdot Z + 5 \cdot W + 50 \cdot T + 5 \cdot M - 240 = 0$. *Lösen wir diese beiden Gleichungen nach W auf und setzen sie gleich, so ergibt sich*

$$25 - 2 \cdot Z - 0{,}1 \cdot T - 0{,}5 \cdot M = 48 - 4 \cdot Z - 10 \cdot T - M \quad \Leftrightarrow \quad Z = 11{,}5 - 4{,}95 \cdot T - 0{,}25 \cdot M.$$

Einsetzen von $T = \frac{30}{7} \cdot \frac{2\mu_1 + 20\mu_2}{0{,}1\mu_1 + 50\mu_2} \cdot Z$ *und* $M = \frac{3}{7} \cdot \frac{2\mu_1 + 20\mu_2}{0{,}5\mu_1 + 5\mu_2} \cdot Z$ *liefert nach Auflösen:*

$$Z = \frac{161}{40} \frac{\mu_1 + 500\mu_2}{149\mu_1 + 1735\mu_2}.$$

Setzen wir dies und die nur noch von μ_1 und μ_2 abhängigen Gleichungen für W, T und M in $20Z + 5W + 50T + 5M - 240 = 0$, *so ergibt sich*

$$\frac{575}{4} \frac{121\mu_1^2 + 2306\mu_1\mu_2 + 9000\mu_2^2}{(\mu_1 + 5\mu_2)(149\mu_1 + 1735\mu_2)} = 240.$$

Dies führt direkt zu einer quadratischen Gleichung mit Lösung

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 10 \cdot \left(\frac{-21097 \pm \sqrt{74467177}}{29386} \right) \cdot \mu_2 \\ &\approx -4{,}2427 \cdot \mu_2, \ -10{,}1158 \cdot \mu_2. \end{aligned}$$

Einsetzen in die nur noch von μ_1 und μ_2 abhängigen Gleichungen für Z, W, T und M liefert

$$\begin{aligned} Z &\approx 1{,}8094, \ 8{,}6581 \\ W &\approx 43{,}7133, \ 0{,}1302 \\ T &\approx 0{,}1801, \ -0{,}0175 \end{aligned}$$

$$M \approx 3{,}1017,\ 14{,}8425.$$

Da bei der zweiten Lösung T einen negativen Wert besitzt, ist diese ***nicht zulässig****. Auch die erste Lösung ist* ***unzulässig****, da sie keine der beiden Budgetbeschränkungen erfüllt.*

Insgesamt beträgt das Nutzenmaximum somit **1660,508** *und wird bei*

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{28}}{\mathbf{15}}, \quad \mathbf{W} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}, \quad \mathbf{T} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}} \quad \textit{und} \quad \mathbf{M} = \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{5}}$$

angenommen.

Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler – Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben aus Kapitel 7 - Integralrechnung –

Sascha Kurz Jörg Rambau

12. August 2010

Lösung Aufgabe 7.1.

a) $\int 5x-2\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}x^2-2x+\mathbb{R}$

b) $\int 3\sqrt[3]{4x-3}\,\mathrm{d}x = 3\int(4x-3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int 4(4x-3)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x \overset{y:=4x-3}{=} \frac{3}{4}\int y^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}+\mathbb{R}\right) = \frac{9}{16}y^{\frac{4}{3}}+\mathbb{R} = \frac{9}{16}(4x-3)^{\frac{4}{3}}+\mathbb{R}$

c) $\int -\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+1}\,\mathrm{d}x \overset{\star}{=} \ln\left|(\cos^2 x+1)\right|+\mathbb{R} = \ln(\cos^2 x+1)+\mathbb{R}$ *(⋆ der Zähler ist die Ableitung des Nenners; substituiere $u=\cos(x)^2+1$)*

d) $\int \frac{3}{(2-v)^2}\,\mathrm{d}v = -3\int\frac{-1}{(2-v)^2}\,\mathrm{d}v \overset{w:=2-v}{=} -3\int\frac{1}{w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{3}{w}+c = \frac{3}{2-v}+\mathbb{R}$

Lösung Aufgabe 7.2. *Wir rechnen zunächst ohne Intervallgrenzen und fügen sie dann anschließend wieder hinzu. Zur Abkürzung setzen wir weiter $f' := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $g' := \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ bzw. $\dot{f} := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, $\dot{g} := \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$, so dass die Regel für die partielle Integration*

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

bzw.

$$\int \dot{f}(t)\cdot g(t)\,\mathrm{d}t = f(t)\cdot g(t) - \int f(t)\cdot\dot{g}(t)\,\mathrm{d}t$$

lautet.

a) *Setze* $f'(z)=e^z$, $g(x)=z^2$: $\quad f(x)=e^z$, $g'(z)=2z$

$\Rightarrow \quad \int z^2\cdot e^z\,\mathrm{d}z = z^2e^z - \int 2ze^z\,\mathrm{d}z = z^2e^z-2ze^z+\int 2e^z\,\mathrm{d}z = z^2e^z-2ze^z+2e^z+\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_0^1 z^2\cdot e^z\,\mathrm{d}z = e-2e+2e-2 = e-2$

b) *Setze* $f'(x)=e^{-rx}$, $g(x)=a+bx$: $\quad f(x)=-\frac{1}{r}e^{-rx}$, $g'(x)=b \Rightarrow$

$\int(a+bx)\cdot e^{-rx}\,\mathrm{d}x = -(a+bx)\frac{1}{r}e^{-rx}+\frac{1}{r}\int e^{-rx}\,\mathrm{d}x = -(a+bx)\frac{1}{r}e^{-rx}+\frac{b}{r}(-\frac{1}{r}e^{-rx})+\mathbb{R}$

c) *Setze* $\dot{f}(t)=e^{-0.1t}$, $g(t)=500-40t$: $\quad f(t)=-10e^{-0.1t}$, $\dot{g}(t)=-40$

$\Rightarrow \quad \int(500-40t)e^{-0.1t}\,\mathrm{d}t = -10e^{-0.1t}(500-40t)+10\int e^{-0.1t}(-40)\,\mathrm{d}t+\mathbb{R} =$

$= e^{-0.1t}(400t-1000)+\mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_0^T (500-40t)\cdot e^{-0,1t}\,\mathrm{d}t = e^{-0.1T}(400T-1000)-1000$

Lösung Aufgabe 7.3. *Wir rechnen zunächst ohne Intervallgrenzen und fügen sie dann anschließend wieder hinzu.*

a) *Substituiere* $u = x^8+1$, $\mathrm{d}u = 8x^7\ \mathrm{d}x$*:* $\int \frac{x^7}{x^8+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{8u} =$

$= \frac{1}{8}\ln(u) + \mathbb{R} = \frac{1}{8}\ln(x^8+1) + \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{x^7}{x^8+1}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}\ln(x^8+1)\right]_1^2 = \frac{1}{8}\ln(257) - \frac{1}{8}\ln(2) \approx 0{,}6070$

b) *Substituiere* $u = e^{x^2}+1$, $\mathrm{d}u = 2x\cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x$*:* $\int x\sqrt{e^{x^2}+1}\cdot e^{x^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}\ \mathrm{d}u =$

$= \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + \mathbb{R} = \frac{1}{3}(e^{x^2}+1)^{\frac{3}{2}} + \mathbb{R}$

c) *Substituiere* $u = 2x^2+1$, $\mathrm{d}u = 4x\ \mathrm{d}x$*:* $\int \frac{x\ \mathrm{d}x}{2x^2+1} = \int \frac{1}{4u} = \frac{1}{4}\ln(u) + \mathbb{R} =$

$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+1) + \mathbb{R}$

d) *Substituiere* $u = \cos(x)$, $\mathrm{d}u = -\sin(x)\ \mathrm{d}x$*:* $\int \sin(x)\cdot\cos(x)^2\ \mathrm{d}x =$

$\int -u^2\ \mathrm{d}u = -\frac{u^3}{3} + \mathbb{R} = -\frac{\cos^3(x)}{3} + \mathbb{R}$

$\int\limits_0^\pi \sin(x)\cdot\cos(x)^2\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x)^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{-\cos^3(\pi)+\cos^3(0)}{3} = \frac{2}{3}$

(Achtung: Der Taschenrechner muß auf Bogenmaß (RAD) eingestellt sein, damit man das richtige Ergebnis herausbekommt!)

Lösung Aufgabe 7.4.

a) $\int\limits_{-2}^{2} x^3 - 3x^2 + 1\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x\right]_{-2}^2 = 4 - 8 + 2 - (4 + 8 - 2) = -12$

b) $\int\limits_1^3 2x\sin\left(x^2+1\right)\ \mathrm{d}x \overset{y:=x^2+1}{=} \int\limits_2^{10} \sin y\ \mathrm{d}y = [-\cos y]_2^{10} = -\cos 10 + \cos 2$

c) $\int\limits_{-2}^{4} 2xe^x\ \mathrm{d}x \overset{\textit{part. Integr.}}{=} [2xe^x]_{-2}^4 - \int\limits_{-2}^{4} 2e^x\ \mathrm{d}x = [2xe^x]_{-2}^4 - [2e^x]_{-2}^4 =$
$8e^4 - \left(-4e^{-2}\right) - \left(2e^4 - 2e^{-2}\right) = 6e^4 + 6e^{-2}$

Lösung Aufgabe 7.5.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} 3x+1\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{3} x^2\,\mathrm{d}x + \int_{3}^{8} 4\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3} + [4x]_3^8 \\
&= -6+2+9+32-12 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 7.6.

a) $\int_0^8 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^8 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left[6x^{\frac{1}{3}}\right]_a^8 = \lim_{a\to 0}\left(6\cdot 2 - 6\cdot a^{\frac{1}{3}}\right) = 12$

b) $\int_1^\infty 6z^2 e^{-z^3}\,\mathrm{d}z = \lim_{b\to\infty}\int_1^b 6z^2 e^{-z^3}\,\mathrm{d}z \overset{u:=z^3}{=} \lim_{b\to\infty}\int_1^{b^3} 2e^{-u}\,\mathrm{d}u = \lim_{b\to\infty}[-2e^{-u}]_1^{b^3} =$
$\lim_{b\to\infty}\left(-2e^{-b^3}+2e^{-1}\right) = \frac{2}{e}$

c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \overset{u:=-\frac{1}{x}}{=} \lim_{a\to 0}\int_{-\frac{1}{a}}^{-1} e^u\,\mathrm{d}u = \lim_{a\to 0}[e^u]_{-\frac{1}{a}}^{-1} =$
$\lim_{a\to 0}\left(e^{-1} - e^{-\frac{1}{a}}\right) = \frac{1}{e}$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -1}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to -1}\left[2\sqrt{1+x}\right]_a^1 =$
$\lim_{a\to -1}\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{1+a}\right) = 2\sqrt{2}$

Lösung Aufgabe 7.7.

1. *Es gilt*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{-2} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} \frac{x^2+2x}{4} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{2x-x^2}{4} \,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\lim_{x\to-\infty} [1]_x^{-2}}_{\star} + \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right]_{0}^{2} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} [1]_2^{x}}_{\star} \\
&= 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dies hätte man auch ohne Rechnung sehen können, indem man bemerkt, dass $f(x)$ *symmetrisch zur* y *-Achse ist.*

$\star$*: In der Vorlesung wurde* $\int 0 \,\mathrm{d}x = 1 + \mathbb{R}$ *für das unbestimmte Integral angegeben.* 1 *ist also eine Stammfunktion von* 0*. Unabhängig von den Grenzen ist aber das bestimmte Integral* $\int_a^b 0 \,\mathrm{d}x$ *immer gleich Null.*

2. *Eine (reellwertige) Dichtefunktion ist eine Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) = 1$*. Zunächst müssen wir also* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *nachprüfen. Für* $x < -2$ *bzw.* $x > 2$ *gilt offensichtlich* $f(x) \geq 0$*. Für das Intervall* $[-1,0)$ *ist* $f(x)$ *durch* $\frac{x+2}{4}$ *gegeben. Da diese Funktion streng monoton steigend ist und* $f(-2) = \frac{-2+2}{4} = 0$ *gilt, nimmt* $f(x)$ *in diesem Bereich keine negativen Werte an. Im Intervall* $[0,2]$ *ist* $f(x)$ *durch* $\frac{2-x}{4}$ *gegeben. Diese Funktion ist streng monoton fallend. Somit nimmt* $f(x)$ *auch im Intervall* $[0,2]$*, wegen* $f(2) = \frac{2-2}{4} = 0$*, keine negativen Werte an, und für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $f(x) \geq 0$*. Wegen*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x) &= \int_{-\infty}^{-2} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} \frac{x+2}{4} \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \frac{2-x}{4} \,\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{x\to-\infty} [1]_x^{-2} + \left[\frac{x^2}{8} + \frac{x}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right]_{0}^{2} + \lim_{x\to\infty} [1]_2^{x} \\
&= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

ist $f(x)$ *somit eine Dichtefunktion.*

Lösung Aufgabe 7.8. *Da die Rente in* 40 *Jahren ausbezahlt werden soll, ist* $t_1 = 40[Jahre]$. *Die Auszahlung soll* 20 *Jahre lang erfolgen, d. h.* $t_2 = t_1 + 20 = 40 + 20 = 60[Jahre]$. *Da der Kapitalfluss unabhängig vom genauen Zeitpunkt* 12000 € *pro Jahr betragen soll, ist* $K(t)$ *eine Konstante:*

$$K(t) = c = 12000[\frac{Euro}{Jahr}].$$

Die Verzinsung beträgt $a = \frac{4\%}{[Jahr]}$. *Somit ergibt sich für den Gegenwartswert der Rente*

$$K_0 = \int_{20}^{60} 12000 e^{-\frac{t}{25}}\, \mathrm{d}t = \left[-300000 e^{-\frac{t}{25}}\right]_{20}^{60} = 300000\left(e^{-\frac{4}{5}} - e^{-\frac{12}{5}}\right) \approx 107583{,}30\,.$$

Lösung Aufgabe 7.9. *Integrieren der Grenzkostenfunktion* $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}$ *ergibt*

$$K(x) = \int \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = \int (1{,}5x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x + C.$$

Wegen $K(10) = 372$ *gilt* $C = 32$. *Somit ist die Gesamtkostenfunktion* $K(x)$ *gegeben durch*

$$K(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x + 32$$

und die Stückkostenfunktion $\frac{K(x)}{x}$ *gegeben durch*

$$\frac{K(x)}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 + \frac{32}{x}.$$

Lösung Aufgabe 7.10.

a) $\int\limits_1^2 \int\limits_3^4 (x^2 + 3xy - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_3^4 (x^2 + 3xy - y^2)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y =$

$= \int\limits_1^2 \left(\left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2y}{2} - xy^2\right]_3^4\right)\,\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{74+63y-6y^2}{6}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{148y+63y^2-4y^3}{12}\right]_1^2 = \frac{103}{4}$

b) $\int\int\int (u + uv + v + w + wv)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w =$

$\int\int \left(\int (u + uv + v + w + wv)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w =$

$$= \int \int \left(\frac{u^2}{2} + \frac{u^2 v}{2} + u\,v + u\,w + u\,v\,w + c_1 \right) \mathrm{d}v \; \mathrm{d}w =$$

$$= \int \left(\frac{u^2 v}{2} + \frac{u^2 v^2}{4} + \frac{u\,v^2}{2} + u\,v\,w + \frac{u\,v^2 w}{2} + c_1 v + c_2 \right) \mathrm{d}w =$$

$$\frac{u^2 v\,w}{2} + \frac{u^2 v^2 w}{4} + \frac{u\,v^2 w}{2} + \frac{u\,v\,w^2}{2} + \frac{u\,v^2 w^2}{4} + c_1 v\,w + c_2 w + c_3$$

$$„= \frac{u^2 v\,w}{2} + \frac{u^2 v^2 w}{4} + \frac{u\,v^2 w}{2} + \frac{u\,v\,w^2}{2} + \frac{u\,v^2 w^2}{4} + v\,w\mathbb{R} + w\mathbb{R} + \mathbb{R}“$$

Lösung Aufgabe 7.11. *Das Volumen V berechnet sich durch*

$$V = \pi \int_0^{20} r(h)^2 \, \mathrm{d}h = \pi \int_0^{20} e^{\frac{20-h}{5}} \, \mathrm{d}h = \pi \left[-5e^{\frac{20-h}{5}} \right]_0^{20} = 5\pi \left(e^4 - 1 \right) \approx 842 \; [cm^3] \, .$$