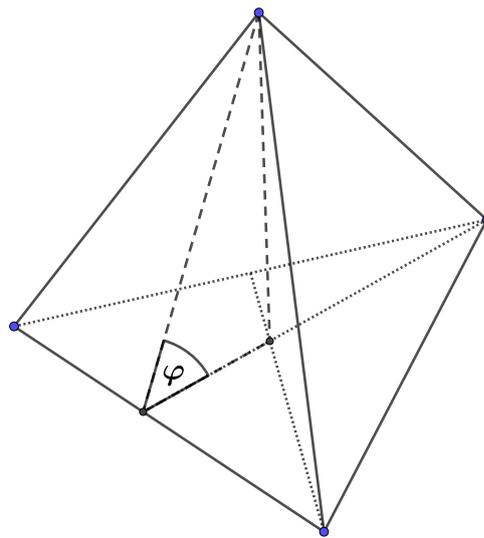


Der Tetraederkantenwinkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

Elementarisierung am Einheitskreis



Dr. Max Leppmeier

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik

Universität Bayreuth

max.leppmeier@uni-bayreuth.de

Tag der Einreichung: 28.3.2019

1 Einleitung

Jedes Kind kennt die Sechstheilung eines Kreises mit dem Zirkel. Es kennt auch den Moment der Frage, ob sechs aneinandergereihte Kreissehnen exakt zum Ausgangspunkt führen oder nur ungefähr.

Wir betrachten im vorliegenden Aufsatz die Aneinanderreihung der Sehnen eines Tetraederkantenwinkels und die Frage, ob eine endliche Zahl aneinandergereihter Kreissehnen wieder zum Ausgangspunkt führen kann oder nicht.

Diese Frage ist bedeutsam für die Lösung des dritten Hilbert'schen Problems und für die Frage der Zerlegungsgleichheit von Polyedern: Sie bildet den algebraischen Kern der Zerlegungsungleichheit von regulärem Tetraeder und Würfel (Hilbert, 1900) (Dehn, 1900) (Aigner, et al., 2000) (Wittmann, 2012) (Aigner, et al., 2015).

Aigner und Ziegler nahmen den Tetraederkantenwinkel als besondere irrationale Zahl in ihr Buch der „perfekten Beweise“ auf (Aigner, et al., 2000 S. 33f.) (Aigner, et al., 2015 S. 56f.).

Wir führen hier zwei unterschiedliche Elementarisierungszugänge zur Betrachtung von $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ aus: einen mit Hilfe eines Additionstheorems, das bis zu einer Strahlensatzfigur elementarisiert werden kann, und einen anderen mit Hilfe der Gauß'schen Zahlenebene und der allgemeinen binomischen Formel. Außerdem gelingt eine elementare Verallgemeinerung der in (ebd.) angegebenen Formel von $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ auf $\arccos\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right)$.

2 Die geometrische Bedeutung von $\arccos\frac{1}{3}$

Die Einteilung eines Kreises in sechs gleiche Sektoren mit Zirkel und Lineal ist Teil der Elementargeometrie: Eine Kreissehne, die mit der Länge des Radius übereinstimmt, bildet zugleich die Seite eines gleichseitigen Dreiecks. Aus der Innenwinkelsumme und der Symmetrie des gleichseitigen Dreiecks folgt für den Mittelpunktswinkel der Kreissehne $\mu = 60^\circ$. Sechs Kreissehnen ergeben daher exakt 360° und eine perfekte Kreisteilung.

Es liegt nahe, den Tetraederkantenwinkel φ (Abbildung 1) ähnlich zu behandeln. Eine Tetraederkante definiert die Drehachse. Die gegenüberliegende Kante bildet dann auch hier eine Kreissehne, die in der mittelsenkrechten Ebene zur Drehkante liegt. Der Tetraederkantenwinkel wird zum Mittelpunktswinkel.

Den Tetraederkantenwinkel (vgl. Titelbild) erhält man durch eine elementargeometrische Überlegung. Im Stützdreieck zum Kantenwinkel ist der Höhenfußpunkt des Tetraeders zugleich der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden der Grundfläche. Die Ankathete ist also $\frac{1}{3}$ der Hypotenuse. Damit haben wir $\varphi = \arccos\frac{1}{3} \approx 70,5288^\circ$.

Wir wenden uns wieder der Drehwinkelsituation (Abbildung 1) zu. Die Projektion eines regulären Tetraeders in die mittelsenkrechte Ebene zur Drehkante ergibt ein gleichschenkliges

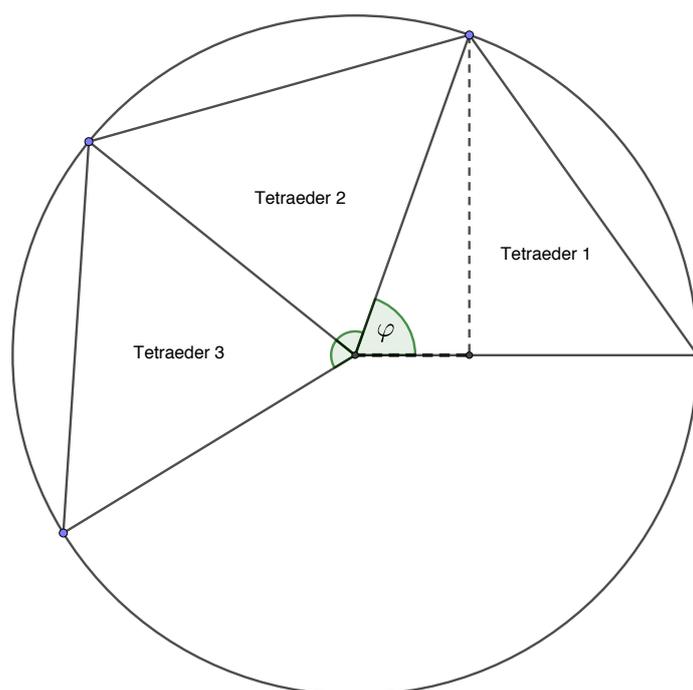


Abbildung 1 Tetraederkantenwinkel als Mittelpunktswinkel

Dreieck: Die Basis ist die Kantenlänge des Tetraeders, die Schenkellänge die Höhe im gleichseitigen Dreieck, dessen Seitenlänge mit der Kantenlänge des Tetraeders identisch ist.

Ist die Basis 1, so ist die Schenkellänge $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Wenn wir im Bild des Einheitskreises bleiben wollen, empfiehlt sich eine Umskalierung: Dann ist die Schenkellänge 1 und die Basis $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Zusammenfassend haben wir am Einheitskreis als Mittelpunktswinkel $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5288^\circ$ und als Sehnenlänge $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Die elementare Leitfrage lautet: Erreicht man nach der lückenlosen Aneinanderreihung endlich vieler Tetraeder bzw. Kreisbögen mit Mittelpunktswinkel φ wieder den Ausgangspunkt (in der Vorstellung dürfen dabei die Tetraeder nach einem Umlauf einander durchdringen) – oder nicht.

Dabei ist klar, dass dies bei einem Mittelpunktswinkel von 70° problemlos ginge. Mit 36 Tetraedern hätte man genau 7 Umläufe und wäre exakt wieder am Ausgangspunkt: $36 \cdot 70^\circ = 7 \cdot 360^\circ$.

Selbst bei einem Mittelpunktswinkel von $70,5^\circ$ ginge dies problemlos; man bräuchte nur einen etwas längeren Atem. 720 aneinanderliegende Tetraeder ergäben 141 Umläufe, da $720 \cdot 70,5^\circ = 141 \cdot 360^\circ$. Wir erkennen, dass dieses Argument natürlich für jedes rationale Winkelmaß in Grad funktioniert.

Die geometrische Leitfrage ist daher: Ist das Gradmaß des Tetraederkantenwinkels rational? bzw. Ist das Bogenmaß des Tetraederkantenwinkels ein rationales Vielfaches von π ? bzw. Ist $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ eine rationale Zahl?

3 Ein elementarer Beweis der Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$

Eine Elementarisierung des Beweises der Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ kann auf mehreren Wegen gelingen.

Als Basis für unsere Betrachtungen dient der Buchbeweis in (Aigner, et al., 2000).

3.1 Der Buchbeweis

Wir geben hier den eleganten und allgemeinen Beweis aus „Proofs from the Book“ wieder (Aigner, et al., 2000 S. 33f.).

Satz. Für jede ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ ist die Zahl $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ irrational.

Beweis. Wir betrachten den Winkel $\varphi_n := \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ im Intervall $0 \leq \varphi_n \leq \pi$.

Er ist definiert durch $\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

I. Dann gibt es für das k -fache ($k > 0$) des Winkels φ_n immer ein A_k , das ganzzahlig und nicht durch n teilbar ist, so dass gilt:

$$\cos k \varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k}$$

Dies sehen wir folgendermaßen: Mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

erhalten wir für $\alpha = (k + 1)\varphi$ und $\beta = (k - 1)\varphi$ die Rekursionsformel

$$\cos(k + 1) \varphi = 2 \cos \varphi \cos k \varphi - \cos(k - 1) \varphi.$$

Vollständige Induktion mit $A_0 = 1$ und $A_1 = 1$ ergibt mit der Formel für $\cos k \varphi_n$

$$\cos(k + 1) \varphi_n = 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{A_k}{\sqrt{n}^k} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}}$$

$$\cos(k + 1) \varphi_n = \frac{2 A_k - n A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}.$$

Wir erhalten

$$A_{k+1} = 2 A_k - n A_{k-1}.$$

Da $n \geq 3$ und A_k nicht durch n teilbar ist, ist auch A_{k+1} nicht durch n teilbar.

II. Wir nehmen nun an, dass $\frac{1}{\pi} \varphi_n$ rational ist. Also gibt es natürliche Zahlen $k, l > 0$, so dass

$$\text{gilt:} \quad \frac{1}{\pi} \varphi_n = \frac{l}{k}$$

Der Zusammenhang $k \varphi_n = l \pi$ führt zu

$$\cos k \varphi_n = \cos l \pi$$

und damit zu

$$\frac{A_k}{\sqrt{n}^k} = \pm 1$$

$$A_k = \pm \sqrt{n}^k.$$

Für $k \geq 2$ gilt $n \mid \sqrt{n}^k$ und damit auch $n \mid A_k$, was im Widerspruch zu I. steht.

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. ■

3.2 Ein geometrischer Zugang

Auf einem ersten Elementarisierungspfad betrachten wir den Winkel $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,5288^\circ$ und seine Vielfachen $k\varphi$ ($k > 0$) am Einheitskreis.

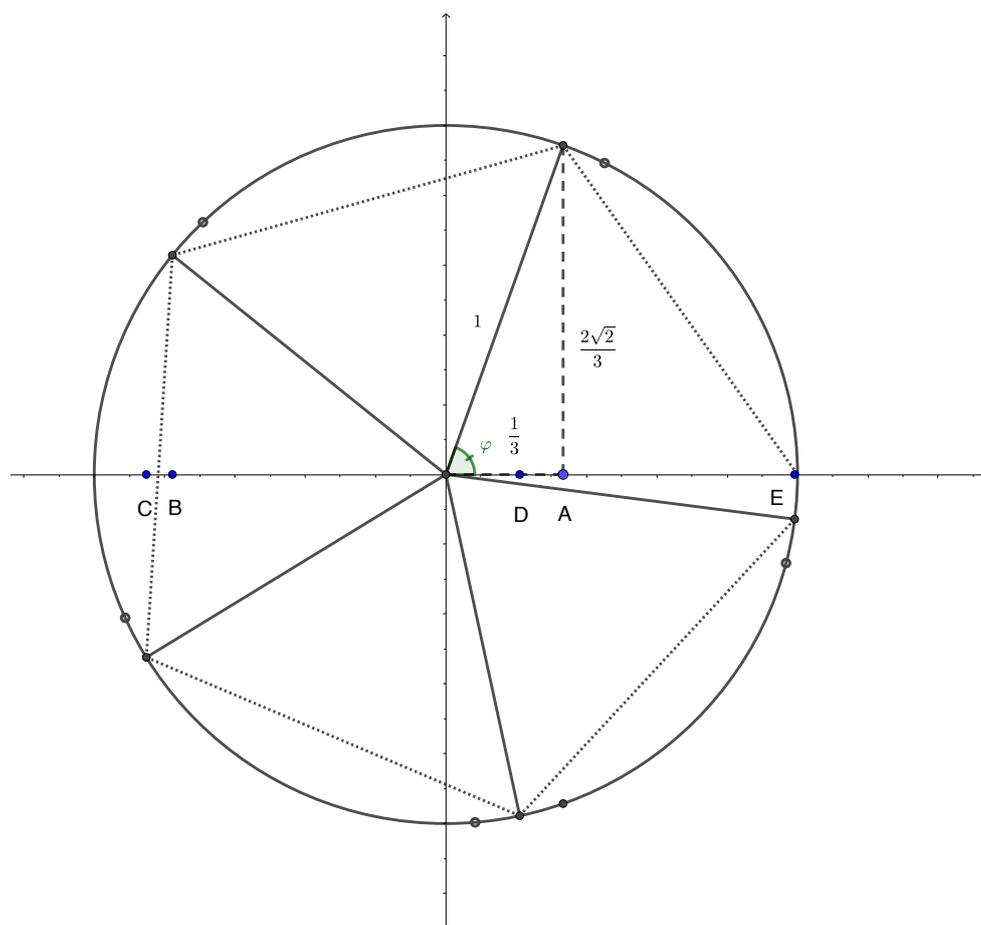


Abbildung 2 Situation am Einheitskreis

3.2.1 Experimentelle Betrachtung (Heuristik)

In einem weiteren Projektionsschritt projizieren wir den Einheitskreis (und den Tetraederkantenwinkel) auf die Abszisse. Dann lautet die Leitfrage: Ist der Kosinuswert von $k\varphi$ irgendwann (wieder) exakt 1?

Dazu betrachten wir die Kosinuswerte in der Zeichnung auf experimentelle Weise:

Am Ausgangspunkt ist er für $k = 0$ genau 1.

Nach einem Schritt ist er für $k = 1$ genau $l(OA) = \cos \varphi = \frac{1}{3}$.

Nach zwei Schritten ist er für $k = 2$ genau $l(OB) = \cos 2\varphi = \dots = -\frac{7}{9}$

Nach drei Schritten ist er für $k = 3$ genau $l(OC) = \cos 3\varphi = \dots = -\frac{23}{27}$

Usw.

Das Spiel der Kosinuswerte ist in Abbildung 2 für den ersten Umlauf eingetragen ((1,0), A, B, C, D, E), für den zweiten Umlauf ist es nur noch auf dem Einheitskreis durch die nicht gefüllten Punkte angedeutet. Wieder ist die entscheidende Frage: Landet man nach endlich vielen Umläufen exakt wieder am Ausgangspunkt (1,0)?

3.2.2 Ein geometrisch-experimenteller Beweis

Wir beginnen wie im Buchbeweis mit einer Betrachtung der Additionstheoreme für den Kosinus. Das entscheidende Additionstheorem ist

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Seine Anwendung ergibt mit $\alpha = \varphi$ und $\beta = k \varphi$

$$\cos((k + 1)\varphi) = 2 \cos \varphi \cos k\varphi - \cos((k - 1)\varphi),$$

einen Rekursionsansatz, den wir wieder experimentell erschließen.

$$\cos(0) = 1$$

$$\cos(\varphi) = \cos \varphi$$

$$\cos(2\varphi) = 2 (\cos \varphi)^2 - 1$$

$$\cos(3\varphi) = 2 \cos \varphi (2 (\cos \varphi)^2 - 1) - \cos \varphi$$

$$\cos(4\varphi) = 2 \cos \varphi (2 \cos \varphi (2 (\cos \varphi)^2 - 1) - \cos \varphi) - 2 (\cos \varphi)^2 - 1$$

Wir erkennen spätestens hier, wie das Spiel läuft.

$$\cos(4\varphi) = 2 \cos \varphi T_3(\cos \varphi) - T_2(\cos \varphi),$$

wobei $T_3(\cos \varphi)$ bzw. $T_2(\cos \varphi)$ ganzzahlige Polynomterme vom Grad 3 bzw. 2 mit Leitkoeffizient 2^2 bzw. 2 in $\cos \varphi$ sind.

Es gilt noch mehr:

$$\cos(4\varphi) = T_4(\cos \varphi),$$

wobei $T_4(\cos \varphi)$ ein ganzzahliges Polynom vom Grad 4 mit Leitkoeffizient 2^3 in $\cos \varphi$ ist.

Wir vermuten das folgende Lemma, das wir durch vollständige Induktion zeigen können.

Lemma. Es gilt für natürliche Zahlen $k > 0$ und einen beliebigen Winkel φ :

$$\cos((k + 1)\varphi) = 2 \cos \varphi T_k(\cos \varphi) - T_{k-1}(\cos \varphi)$$

und somit

$$\cos((k + 1)\varphi) = T_{k+1}(\cos \varphi)$$

Dabei bezeichnet T_k ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient 2^{k-1} .

Beweis. Mit vollständiger Induktion über k gelingt der Beweis des Lemmas. ■

Die Polynome T_k sind auch bekannt als sog. Tschebyschev-Polynome.

Damit können wir uns wieder dem Hauptproblem zuwenden. Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen.

(1) Wir wissen, dass für den betrachteten Tetraederkantenwinkel $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ gilt.

Das war Voraussetzung.

(2) Wir wissen, dass für Vielfache des Tetraederkantenwinkels gilt:

$$\cos((k+1)\varphi) = 2 \cdot \frac{1}{3} T_k\left(\frac{1}{3}\right) - T_{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

bzw.

$$\cos((k+1)\varphi) = T_{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

Dabei haben die Polynome T_{k+1} den Leitkoeffizienten 2^k .

Dies ist der Inhalt des Lemmas.

Hier können wir schon die Lösung erahnen. Wenn φ ein rationales Vielfaches von π ist, ist es auch ein rationales Vielfaches von 2π . Jedenfalls gibt es ein $k > 0$, so dass $(k+1)\varphi$ ein Vielfaches von 2π ist.

Die linke Seite ergibt dann 1 (dies wurde schon thematisiert, vgl. Abbildung 1).

Die rechte Seite ist ein besonderer Term aus dem Grundbaustein $\frac{1}{3}$, der jedoch nie 1 ergeben kann.

Das zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis:

Wir nehmen das Gegenteil an:

$$2 \cdot \frac{1}{3} T_k\left(\frac{1}{3}\right) - T_{k-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Wir multiplizieren mit $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$

und erhalten mit gewissen ganzen Zahlen $z_k, z_{k-1} \in \mathbb{Z}$

$$2 \cdot T_k(1) + z_k - 3^2 \cdot (T_{k-1}(1) + z_{k-1}) = 3^{k+1}.$$

Hier ist nach Konstruktion der T_k zum einen $T_{k-1}(1)$ ganzzahlig (und nicht durch 3 teilbar) und zum anderen insbesondere $T_k(1)$ ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar. Die linke Seite der Gleichung ist also nicht durch 3 teilbar, die rechte Seite schon: Ein Widerspruch.

Wir fassen zusammen. Es gilt der

Satz. Die Zahl $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ ist irrational.

Beweis. Wir haben uns bereits überlegt, dass $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ genau dann irrational ist, wenn die Abszisse einer endlichen Summe aus Tetraederkantenwinkeln exakt 1 ergibt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\cos(n\varphi) = 1$ gilt.

Da wir oben gezeigt haben, dass dies wegen des Additionstheorems, der Rekursion, der Beschaffenheit der Tschebyschev-Polynome und der Teilbarkeitsregeln nicht eintreten kann, folgt die Behauptung. ■

3.2.3 Interpretation des geometrisch-experimentellen Beweises

Wir diskutieren das Ergebnis:

(1) Es bedeutet anschaulich, dass man nach dem in der Abbildung 2 gezeichneten „Kreistanz“ nie mehr am Ausgangspunkt ankommt.

Die punktiert gezeichnete Sehnenlänge ist $\frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,1547$.

Die Linkskomponente ist $\frac{2}{3}$, die Hochkomponente ist $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Im Bild des Tanzes ergäbe das die Schrittfolge.

Das Tanzparkett würde nie abgenutzt werden, da selbst bei einem unendlich lang dauernden Tanz jeder Punkt maximal einmal berührt werden würde.

(2) Wir sehen auch den algebraischen Grund dafür, dass wir nie mehr am Ausgangspunkt ankommen können.

Wir würden dazu eine Ergänzung der Ausgangsordinate von $\frac{1}{3}$ um $\frac{2}{3}$ auf 1 benötigen. Mit jedem Schritt nimmt jedoch der Nenner um eine Potenz zu. Im zweiten Schritt haben wir $\frac{x}{9}$, im dritten Schritt haben wir $\frac{y}{27}$, im vierten Schritt haben wir $\frac{z}{81}$ usw. (Dies ist eine Folge der nichtlinearen Additionseigenschaft des Kosinus, die wir oben betrachtet haben. Wenn man noch genauer hinsieht, liegt der Grund dafür in den komplexen Strahlensatzfiguren, die den Additionstheoremen zugrunde liegen, vgl. 3.2.5. Sie erzeugen gerade das quadratische Moment in den Additionstheoremen, das hier so schön erlebbar wird.) Das bedeutet, dass x ein Vielfaches von 3, y ein Vielfaches von 9, z ein Vielfaches von 27 sein müsste.

Dies wird jedoch durch den Leitkoeffizienten 2 der Tschebyschev-Polynome T_k gerade verhindert.

Im zweiten Schritt haben wir

$$\cos(2\varphi) = 2 (\cos \varphi)^2 - 1 = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = 2 \frac{1}{9} - 1 \neq \frac{6}{9},$$

da ja gerade $2 - 9$ nie ein Vielfaches von 3 und damit nie 6 ergeben kann.

Im dritten Schritt haben wir

$$\begin{aligned} \cos(3\varphi) &= 2 \cos \varphi (2 ((\cos \varphi)^2 - 1) - \cos \varphi) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (\dots) - \frac{1}{3} \\ &\neq \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

da $2 \cdot (\dots) - 1$ ebenfalls nie 2 ergeben kann.

Im vierten Schritt haben wir

$$\begin{aligned} \cos(4\varphi) &= 2 \cos \varphi (2 \cos \varphi (2 ((\cos \varphi)^2 - 1) - \cos \varphi) - 2 (\cos \varphi)^2 - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{3}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \neq \frac{54}{81}, \end{aligned}$$

da der Leitkoeffizient $2 \cdot 2 \cdot 2$ nicht durch drei teilbar ist, obwohl er diese Eigenschaft besitzen müsste, was man sieht, wenn man die letzte Zeile mit $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ durchmultipliziert.

Nun kann man die Betrachtung natürlich vereinfachen, indem man nach dem ersten Schritt nicht den Rest auf 1 betrachtet, sondern vom Ausgangspunkt aus das Ergebnis anvisiert. Das haben wir im Beweis getan.

Wir haben auch die Ungültigkeit der unendlich vielen Äquivalenzen nach dem folgenden Bildungsgesetz

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\neq 1 \\ 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 &\neq 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{3} &\neq 1 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\right) - \frac{1}{3}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 &\neq 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

gezeigt.

Damit sind wir am arithmetischen Urgrund der Ausgangsfragestellung und der Interpretation angelangt. Dies ist zugleich das elementare Geheimnis des „Buchbeweises“ für die Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$.

(3) Auch eine Betrachtung der in Abbildung 2 auftretenden Zahlen ist sehr interessant. Eingangs wurde erwähnt, dass eine Sehnenlänge von 1 zu einem regulären Sechseck und zu einer perfekten Kreisteilung führt. Auch eine Sehnenlänge von $\sqrt{2}$ führt zu einem regulären Viereck (Quadrat) und wieder zu einer perfekten Kreisteilung. Dagegen erlaubt eine Sehnenlänge von $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ keine Kreisteilung mehr. Der gleiche Sachverhalt gilt aus Ähnlichkeitsgründen auch für eine Sehnenlänge von $\sqrt{3}$. Wir sehen hier sehr schön einen Zugang zur algebraischen Frage der Kreisteilung im Zusammenhang mit einer Winkelinterpretation von \sqrt{n} .

(4) Das reguläre Fünfeck würde den Kreis auch schließen. Der Mittelpunktswinkel wäre hier 72° . Die Betrachtung der Seitenlänge überlassen wir dem Leser. Sie führt zur Thematik des Goldenen Schnittes.

3.2.4 Verallgemeinerung für $\arccos \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$

En passant begründen wir nun noch, dass man den für $\arccos \frac{1}{3}$ vorgestellten Beweis weiter verallgemeinern kann. Eine erste Verallgemeinerung auf $\frac{1}{\sqrt{n}}$ für n ungerade und $n \geq 3$ kann man dem oben vorgestellten Buchbeweis entnehmen.

Eine weitere Verallgemeinerung auf Zahlen der Bauart $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ für n ungerade und $n > 1, m < n$ und teilerfremd zu n können wir folgendermaßen begründen:

Man erhält dann

$$\begin{aligned} \cos k \varphi_n &= \frac{A_k \sqrt{m}}{\sqrt{n}^k} \\ A_{k+1} &= 2 m A_k - n A_{k-1} \end{aligned}$$

Diese Formeln gelten für beliebiges k .

Für gerades k vereinfachen sie sich zu den in 3.1 genannten:

$$\cos k \varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n^k}}$$

$$A_{k+1} = 2 A_k - n A_{k-1}.$$

3.2.5 Elementarisierung des verwendeten Additionstheorems

Wir zeigen einen elementaren Beweis des verwendeten Additionstheorems:

Satz. Für zwei Winkel α und β gilt:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

Beweis. Auf dem Einheitskreis mit Ursprung 0 liegen die Punkte $P(\cos \alpha; \sin \alpha)$ und die Punkte S und T mit $\angle POS = \angle TOP = \beta$.

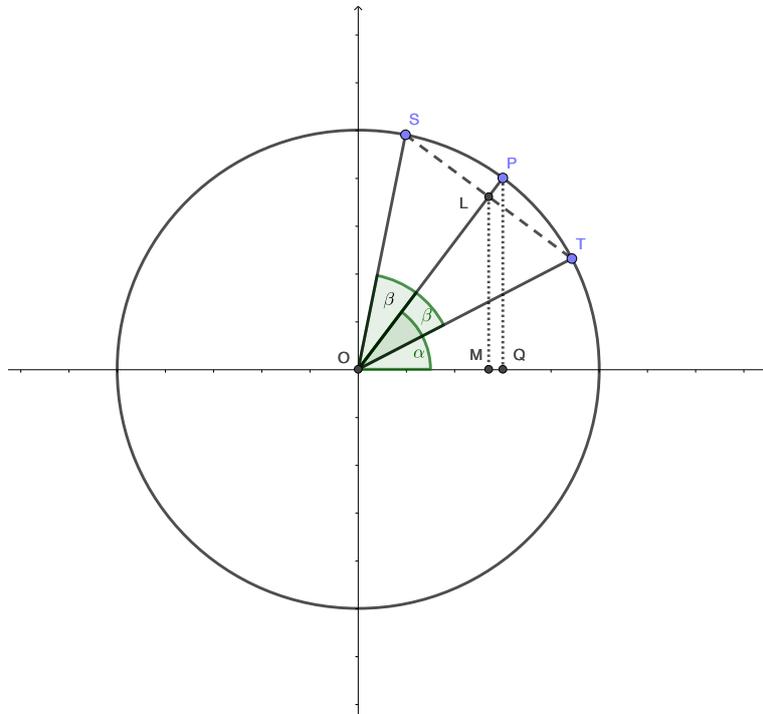


Abbildung 3 Additionstheorem und Strahlensatz

Es sei L Schnittpunkt von OP und ST . Dann sind die Dreiecke ΔLOS und ΔTOL nach SWS kongruent. Daher ist L die Mitte von S und T und hat die Koordinaten

$$L \left(\frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}; \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2} \right)$$

Außerdem ist $\angle SLO = \angle TOL$ und wegen $\angle SLT = 180^\circ$ sogar $\angle SLO = \angle TOL = 90^\circ$. Damit ist auch das Dreieck ΔLOS rechtwinklig mit Hypotenuse 1, es ist also $|OL| = \cos \beta$.

Eine zentrische Streckung von P an O mit dem Streckungsfaktor $|OL| = \cos \beta$ führt $P(\cos \alpha; \sin \alpha)$ in $L(\cos \beta \cdot \cos \alpha; \cos \beta \cdot \sin \alpha)$ über.

Ein Vergleich der Abszissen von L ergibt

$$\frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} = \cos \beta \cdot \cos \alpha,$$

also die Behauptung. ■

Damit benötigt man für eine elementare Beantwortung der Frage nach der Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ nur wenige entscheidende Zutaten: die Teilbarkeitsregeln in der Menge der ganzen Zahlen, die zentrische Streckung/den Strahlensatz/die Ähnlichkeit; der Begriff von π ist nicht nötig, nicht einmal die Quadratwurzel von 2 ist nötig, auch kein Sinus oder trigonometrischer Pythagoras oder gar Additionstheoreme in einem weiteren Sinnzusammenhang. Bedenkt man, dass der Höhenfußpunkt eines regulären Tetraeders ebenfalls ohne Hilfe des Satzes von Pythagoras erreicht werden kann (es genügt die Kenntnis des Schnittpunktes der Seitenhalbierenden eines Dreiecks und ein Symmetrieargument), ist der in diesem Abschnitt (3.2) aufgezeigte, elementarisierte Gedankengang bereits für interessierte Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe 1 grundsätzlich nachvollziehbar.

3.3 Ein algebraischer Zugang

Wir verwenden im Folgenden die Auffassung der Ebene als Gauß'sche Zahlenebene und machen Gebrauch von den komplexen Zahlen am Einheitskreis.

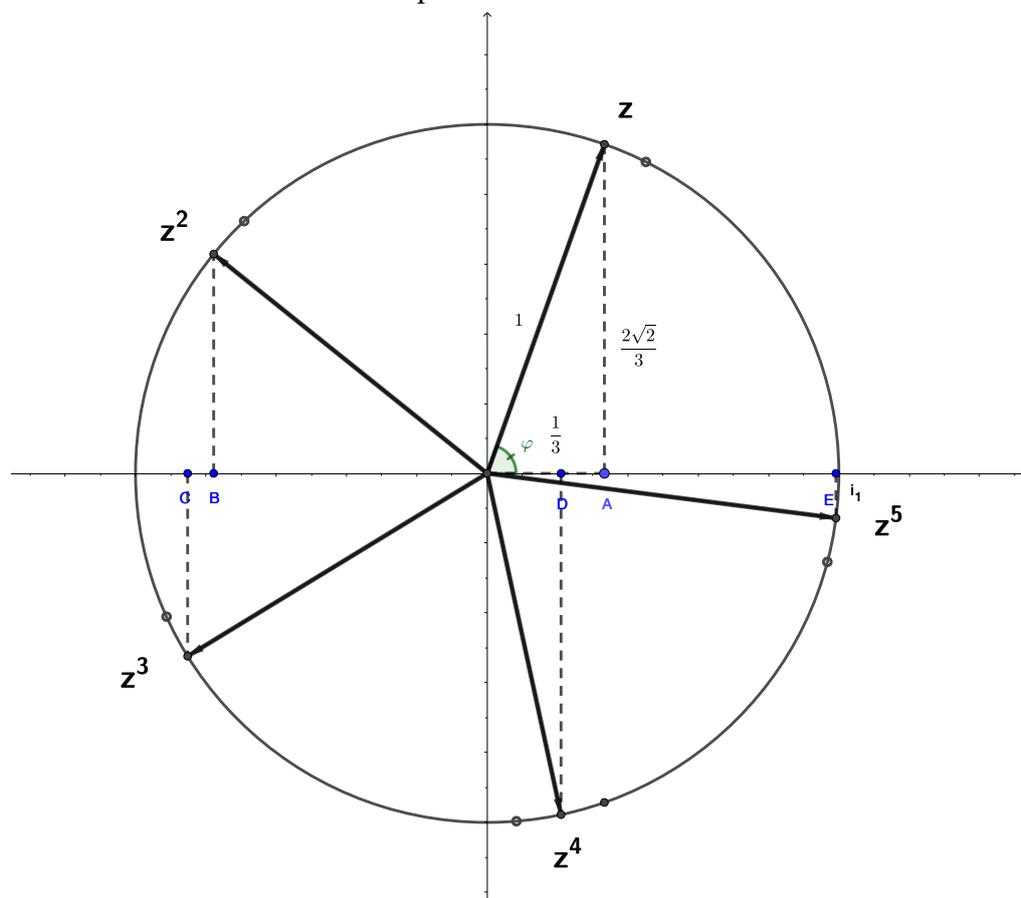


Abbildung 4 Situation in der Gauß'schen Zahlenebene

3.3.1 Experimentelle Betrachtung – Heuristik

Dem Winkel $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$ können wir die komplexe Zahl

$$z = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

zuordnen. Den Vielfachen $n \varphi$ ($n > 1$) ordnen wir die Potenzen z^n zu:

$$z^2 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{8}{9} + \frac{4\sqrt{2}}{9}i$$

$$z^3 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \dots i$$

$$z^4 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^4 + \dots i$$

Wir verwenden im weiteren Verlauf die allgemeine binomische Formel.

3.3.2 Ein algebraisch-binomischer Beweis

Allgemein gilt mit Blick auf den Realteil von z^n :

$$z^n = \left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^n = \sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^k \cdot i^k + \dots i$$

Wir ziehen $\frac{1}{3}$ aus der Summe und erhalten

$$z^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2})^k \cdot i^k + \dots i.$$

Wenn nun $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$ ein rationales Vielfaches von π ist, dann gibt es ein n , so dass $n\varphi$ ein Vielfaches von 2π ist.

Das bedeutet $z^n = 1$.

Das bedeutet wiederum

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2})^k \cdot i^k = 1,$$

also

$$\sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2})^k \cdot i^k = 3^n.$$

Wir analysieren die Summe

$$\sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2})^k \cdot i^k.$$

Ein erster Blick gilt den Binomialkoeffizienten, die sich mit dem Pascalschen Dreieck elementar ermitteln lassen.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \\
 & 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
 1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1
 \end{array}$$

usw.

Wir sehen, dass gilt:

$$\sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Dies verwundert nicht, da ja bekanntlich

$$\sum_k \binom{n}{k} 1 \cdot 1 = 2^n$$

ist und wir durch die Betrachtung der geraden Koeffizienten genau die Hälfte dieser Summe abgreifen.

Ein zweiter Blick gilt den Summanden

$$(2\sqrt{2} \cdot i)^k$$

Hier sehen wir, dass sich die Folge

$$1, -8, 64, \dots$$

ergibt. Alle Folgenglieder sind $\equiv 1 \pmod{3}$. Diese wichtige Eigenschaft halten wir fest.

Lemma. Es gilt für k gerade, $k > 0$

$$(2\sqrt{2} \cdot i)^k \equiv 1 \pmod{3}.$$

Beweis. Für $k = 2$ gilt:

$$(2\sqrt{2} \cdot i)^2 = 8 \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{3}$$

Nun lässt sich für beliebiges gerades k die Potenz $(2\sqrt{2} \cdot i)^k$ als Produkt aus den Faktoren $(2\sqrt{2} \cdot i)^2$ darstellen und wir erhalten mit den Regeln der Restklassenmultiplikation

$$(2\sqrt{2} \cdot i)^k \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \pmod{3},$$

also die Behauptung. ■

Wir sind damit am Ziel und können das Ergebnis formulieren.

Satz. Es gibt keine natürliche Zahl n , so dass gilt:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^n = 1$$

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es eine natürliche Zahl n gibt mit

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^n = 1$$

oder

$$(1 + 2\sqrt{2}i)^n = 3^n.$$

Weiterhin beschränken wir uns auf den Realteil der linken Seite. Wir erhalten unter Verwendung der allgemeinen Binomischen Formel:

$$\sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2} \cdot i)^k = 3^n \quad (*)$$

Wir konzentrieren uns nur auf die Restklassen $\pmod{3}$ und erhalten unter Beachtung des Lemmas:

$$\sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot (2\sqrt{2} \cdot i)^k \equiv \sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \cdot 1 \pmod{3} = \sum_{k, k \text{ gerade}} \binom{n}{k} \pmod{3}$$

Und dies können wir vereinfachen zu

$$2^{n-1} \pmod{3}.$$

Damit ist die linke Seite von (*) nicht durch 3 teilbar, während die rechte Seite trivialerweise durch 3 teilbar ist. Dies ist ein Widerspruch und der Satz bewiesen. ■

3.3.3 Ein algebraisch-rekursiver Beweis

In einem weiteren Zugang können wir Realteil und Imaginärteil von z^n auch rekursiv betrachten.

Wir nähern uns wieder experimentell:

$$3z = 1 + 2\sqrt{2}i$$

$$3^2z^2 = (1 + 2\sqrt{2}i)^2 = (1 + 2\sqrt{2}i) \cdot (1 + 2\sqrt{2}i) = 1 - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2}i$$

$$3^3z^3 = (1 + 2\sqrt{2}i)^3 = (1 - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{2}i)(1 + 2\sqrt{2}i) \\ = 1 - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + (1 - 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2})2\sqrt{2}i + 2 \cdot 2\sqrt{2}i$$

$$3^4z^4 = \dots$$

Wir bezeichnen den Realteil von z^n mit $Re(n)$ und den Imaginärteil von z^n mit $Im(n)$. Dann gilt das

Lemma.

$Re(n)$ ist ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar.

$Im(n)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{2}$, dessen Koeffizient nicht durch 3 teilbar ist.

Beweis. Dies zeigen wir durch Induktion.

Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $n = 1$.

Unter der Annahme, dass die Behauptung für n richtig ist, haben wir für $n + 1$:

$$z^{n+1} = (Re(n) + Im(n)i) \cdot (1 + 2\sqrt{2}i) \\ = Re(n) - Im(n) \cdot 2\sqrt{2} + Im(n)i + Re(n) \cdot 2\sqrt{2}i$$

Damit ist

$$Re(n+1) = Re(n) - Im(n) \cdot 2\sqrt{2}.$$

Nun ist nach Induktionsannahme $Re(n)$ ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar, und es ist auch $Im(n) \cdot 2\sqrt{2}$ das Vierfache eines ganzzahligen Faktors, der nicht durch 3 teilbar ist. Daher ist die Summe ebenfalls ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar. Dies ist der erste Teil der Behauptung.

Ferner ist

$$Im(n+1) = Im(n) + Re(n) \cdot 2\sqrt{2}.$$

Da wiederum nach Induktionsannahme $Im(n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{2}$ ist, dessen Koeffizient nicht durch 3 teilbar ist, haben wir in der Summe ein ganzzahliges Vielfaches von $\sqrt{2}$ mit einem Koeffizienten, der nicht durch 3 teilbar ist. ■

Mit diesen Hilfsmitteln können wir den Satz nun ganz einfach zeigen.

Satz. Es gibt keine natürliche Zahl n , so dass gilt: $\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^n = 1$

Beweis. Wir formulieren einen Widerspruchsbeweis und nehmen das Gegenteil an.

Es gibt ein n , so dass gilt

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i\right)^n = 1$$

Dann gilt

$$(1 + 2\sqrt{2}i)^n = 3^n$$

Nach dem Lemma ist jedoch der Realteil der linken Seite $Re(n)$ ganzzahlig und nicht durch 3 teilbar, was im Widerspruch zur rechten Seite steht. Damit ist der Satz gezeigt. ■

3.3.4 Interpretation

Eine Betrachtung des algebraisch-rekursiven Beweises zeigt ein schönes Déjà-vu im Hinblick auf den Buchbeweis. Die Trennung in Realteil und Imaginärteil lässt dabei sogar eine einstufige Rekursion zu. Umgekehrt sehen wir, dass eine Elementarisierung der Komplexen Zahlen mit Hilfe der Trigonometrie eine zweistufige Rekursion im Reellen erfordert.

Ein Vergleich mit dem algebraisch-binomischen Beweis zeigt, dass sogar auf das Mittel der Rekursion verzichtet werden kann. Denn die Einzelsummanden lassen sich auch elementar mit Hilfe der binomischen Formel ausrechnen. Das Entscheidende vollzieht sich dabei an den geraden Potenzen von $2\sqrt{2}i$; sie haben immer den Rest $1 \pmod{3}$ und gewährleisten mit den Binomialkoeffizienten die beweisentscheidende Nichtteilbarkeit der Summe durch 3.

4 Bedeutung der Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ für das dritte Hilbert'sche Problem

Das dritte Hilbert'sche Problem bezeichnet die grundlegende Fragestellung, ob es zwei Polyeder mit gleichem Volumen gibt, die nicht zerlegungsgleich sind. Nachdem diese Frage lange ungelöst war, gelang Dehn 1900 ein strenger Unmöglichkeitbeweis: Würfel und volumengleiches reguläres Tetraeder sind nicht zerlegungsgleich. Hier spielt die Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ eine wesentliche Rolle.

Zur Einordnung der Thematik und zum besseren Verständnis skizzieren wir hier den wesentlichen Gedankengang für die Nichtzerlegungsgleichheit von Würfel und regulärem Tetraeder, wie er beispielweise in (Leppmeier, 2019) dargestellt ist.

Wir beginnen mit der Definition für die Zerlegungsgleichheit von Polyedern.

Definition. Zwei Polyeder P und Q heißen **zerlegungsgleich**, wenn es je eine Zerlegung für P und für Q gibt mit $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$, so dass P_i kongruent ist zu Q_i für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$.

Nun kann man eine Zerlegung von P in ein Sortiment aus Teilpolyedern betrachten. Sie enthält neben den Ecken des Ausgangspolyeders P auch noch weitere Zerlegungsecken im Inneren von

P, auf den Facetten (Flächen) von P und im Inneren der Kanten von P. Betrachtet man anstelle der Kantenwinkel der Teilpolyeder das doppelte Maß der Kantenwinkel, kann man stattdessen die Flächen der Kugeldreiecke (Kugelvielecke) an den Ecken der Teilpolyeder untersuchen (ebd.). Sie summieren sich im Inneren auf zu einer Vollkugel, auf den Facetten zu einer Halbkugel und im Inneren einer Kante zu einem Kugelzweieck.

Das bedeutet für ein reguläres Tetraeder, dass man es im Wesentlichen mit endlich vielen Kugelzweiecken in den Tetraederkanten zu tun hat. Ihr Flächeninhalt ist ein ganzzahliges Vielfaches des Tetraederkantenwinkels.

Das bedeutet entsprechend für einen Würfel, dass man es ebenfalls mit endlich vielen Kugelzweiecken in den Würfelkanten zu tun hat. Ihr Flächeninhalt ist ein ganzzahliges Vielfaches eines Würfelkantenwinkels.

In jedem Fall hat man beim Würfel für alle entstehenden Kugelvielecksflächen der Zerlegung ein rationales Vielfaches von π .

Dagegen hat man beim Tetraeder für alle entstehenden Kugelvielecksflächen im Inneren oder auf den Facetten ebenfalls ein rationales Vielfaches von π , jedoch bei den Kugelzweiecksflächen an den Tetraederkanten ein irrationales Vielfaches von π , wenn $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ irrational ist.

Da dies der Fall ist, können Würfel und reguläres Tetraeder nicht zerlegungsgleich sein.

Für den Vergleich zweier beliebiger Polyeder kann man den allgemeinen Satz von Dehn-Hadwiger bzw. die sog. Bricard-Bedingung zeigen.

Satz (Dehn-Hadwiger, „Bricard“-Bedingung).

Es seien P und Q zwei Polyeder mit Kantenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$.

Wenn es keine natürlichen Zahlen m_1, m_2, \dots, m_p und n_1, n_2, \dots, n_q gibt, so dass

$$\sum_i m_i \cdot \alpha_i - \sum_j n_j \cdot \beta_j = n_\pi \pi$$

für ein ganzzahliges n_π gültig ist,

dann sind P und Q nicht zerlegungsgleich.

Wir erkennen, dass die Irrationalität von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ in Verbindung mit der endlichen Anzahl von Zerlegungspolyedern ein sehr starkes Argument für die Nichtzerlegungsgleichheit von Würfel und regulärem Tetraeder darstellt. Auf diese Weise ist die Zahl $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ untrennbar mit dem dritten Hilbert'schen Problem verbunden.

In ähnlicher, noch elementarerer Weise ist $\sqrt{2}$ mit der Inkommensurabilität von Diagonale und Seite eines Quadrates verbunden. Das bedeutet anschaulich: Zwei Menschen mit Schrittlänge 1 bzw. $\sqrt{2}$ werden sich nach einem gemeinsamen Startpunkt nie auf die Füße treten, egal wie schnell oder langsam jeder läuft (die Füße sind in diesem Gedankenspiel als Punkte angenommen). Wir haben in 3.2.3 bereits gesehen, dass man einen Walzer nach dem Schema von $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ beliebig lange tanzen kann, ohne dass sich das Parkett abnutzt. Insofern haben wir hier zwei Paradoxien des Unendlichen, die auf der Irrationalität von Zahlen basieren.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Beutelspacher und Herrn Prof. Dr. Ulm danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen. Herrn Dipl-Math. Dr. Eric Müller danke ich darüber hinaus für die interessanten Beiträge zu den Abschnitten 3.2.4 und 3.2.5.

5 Literaturverzeichnis

- Aigner, Martin und Ziegler, Günter M. 2015.** *Das BUCH der Beweise*. 4. Auflage. Berlin : Springer, 2015.
- . **2000.** *Proofs from the BOOK*. Berlin : Springer, 2000.
- Benko, David. 2007.** A New Approach to Hilbert's Third Problem. *The American Mathematical Monthly*. 2007, Bd. 114, S. 665–676 .
- Conway, J.H. und Sloane, N.J.A. 1999.** *Sphere Packings, Lattices and Groups*. 3. Auflage. New York : Springer, 1999.
- Dehn, Max. 1902.** Über den Rauminhalt. *Mathematische Annalen*. 1902, Bd. 55, S. 465-478.
- . **1900.** Über raumgleiche Polyeder. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*. 1900, Bd. 3, S. 345-354.
- Gauss, Carl Friedrich und Gerling, Christian Ludwig. 1927.** *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*. [Hrsg.] Clemens Schaefer. Berlin : Elsner, 1927.
- Gruber, Peter M. 2007.** *Convex and Discrete Geometry*. Berlin Heidelberg : Springer, 2007.
- Hilbert, David. 1900.** Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*. 1900, Bd. 3, S. 253-297.
- Kirchgraber, Urs. 2016.** Mathematik - das unerkannte Vergnügen. [Online] 2016. [Zitat vom: 27. Januar 2018.] <http://vsmp.ch>.
- Leppmeier, Max. 2019.** *Das dritte Hilbert'sche Problem und die Dehn-Invariante : Eine Elementarisierung mit Hilfe von Kugeldreiecken*. Universitätsbibliothek Bayreuth (EPub). Bayreuth : ePub, 2019.
- . **2018.** *Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und zur Schulentwicklung, ausgehend von der Mathematik*. Universitätsbibliothek Bayreuth (EPub). Bayreuth : ePub, 2018.
- Sydler, J.-P. 1965.** Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comment. Math. Helv.* 1965, Bd. 40, S. 43-80.
- Wittmann, Erich Ch. 2012.** Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. Hilbertschen Problems. *Elem. Math.* 2012, Bd. 67, S. 45 - 50.