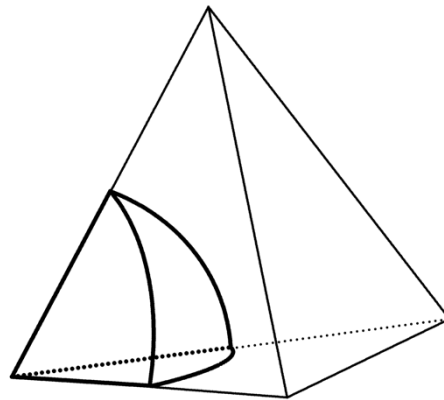


# **Das dritte Hilbert'sche Problem und die Dehn-Invariante**

**Eine Elementarisierung  
mit Hilfe von Kugeldreiecken**



Dr. Max Leppmeier  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Universität Bayreuth  
max.leppmeier@uni-bayreuth.de  
Tag der Einreichung: 14.3.2019



# 1 Einleitung

Das dritte Hilbert'sche Problem hat eine interessante Ideengeschichte (Gauss, et al., 1927) (Hilbert, 1900) (Dehn, 1900) (Dehn, 1902) (Sydler, 1965) (Jessen, 1968) (Gruber, 2007) (Aigner, et al., 2000) (Benko, 2007) (Wittmann, 2012) (Aigner, et al., 2015) (Ciesielska, 2018).

Es ist bekannt, dass Dehn als Schüler Hilberts dieses Problem noch vor Veröffentlichung der Liste der Hilbert'schen Probleme bereits gelöst hatte und es sich unter diesem Aspekt auf den ersten Platz katapultierte; noch wesentlich interessanter ist der weit zu spannende Bogen von den historischen Anfängen bis zu den aktuellen Elementarisierungsansätzen: Gerling formulierte in seinem Briefwechsel mit Gauß die nachvollziehbare Vermutung, dass sich schon Euklid darüber den Kopf zerbrochen haben mag. Er spitzte im Austausch mit Gauß die Fragestellung zu (1845). Gauß legte die Thematik mit einem launigen Kommentar früher zur Seite (17.4.1844) als Gerling (16.6.1845). Hilbert hob die Frage wieder aufs Tableau (1900). Dehn holte sich das Problem, bevor es dort lag, und löste es (1900).

Das Ergebnis: Ein Würfel und ein volumengleiches reguläres Tetraeder sind nicht zerlegungsgleich.

Mit anderen Worten: Es gibt keine endliche Zerlegung eines Würfels in ein Sortiment aus Polyedern, aus dem man ein reguläres Tetraeder aufbauen kann und umgekehrt.

Sydler gelang später der Beweis der nicht minder faszinierenden Umkehrung (Sydler, 1965).

Sein Ergebnis: Wenn zwei Polyeder volumengleich sind und in ihren Dehn-Invarianten übereinstimmen, sind sie zerlegungsgleich.

Hadwiger und Jessen leisteten zwischendurch wesentliche Beiträge zum leichteren Verständnis des Beweises von Sydler (Jessen, 1968) (Gruber, 2007).

Aigner/Ziegler nahmen das dritte Hilbert'sche Problem in ihr Buch der „perfekten Beweise“ auf (Aigner, et al., 2000). Ein solch „perfekter Beweis“ geht anfangs auf Boltianski zurück (Aigner, et al., 2000 S. 39ff.), später gründet er auf Ideen

Benkos und Bricards (Aigner, et al., 2015 S. 71ff.). Benkos Ansatz inspirierte Wittmann zu einer weiteren interessanten Elementarisierung, in der „die Darstellung reeller Zahlen durch unendliche Dezimalbrüche die entscheidende Rolle“ spielt (Wittmann, 2012 S. 46).

Hier wird nach einem historischen Überblick über den Briefwechsel zwischen Gauß und Gerling (2.1) und einer kurzen Einführung in die Thematik entlang des Dehn-Hadwiger'schen Gedankengangs (2.2) eine geometrisch-anschauliche Elementarisierung der Dehn-Invariante mit Hilfe von Kugeldreiecken (3.1) vorgestellt.

Anhand der L-Invariante (3.2), die die Summe der Flächen der Kugeldreiecke an den Ecken eines Polyeders beschreibt, wird die Zerlegung von Polyedern untersucht (3.3, 3.4, 3.5, 3.6) und die Bricard'sche Bedingung (3.9) hergeleitet. Auf diesem Weg kann sowohl gezeigt werden, dass Würfel und reguläres Tetraeder nicht zerlegungsgleich sind (3.7), als auch, dass die Tetraeder TI und TII, die in ihrer Grundfläche und in ihrer Höhe übereinstimmen, nicht zerlegungsgleich sind (3.8). So gelingt nicht nur eine Elementarisierung der Dehn-Invariante durch die L-Invariante, sondern eine elementare Formulierung des Satzes von Dehn-Hadwiger mit Hilfe der Bricard'schen Bedingung und zugleich eine elementargeometrische Herleitung der Bricard'schen Bedingung.

In der vorliegenden Arbeit wird damit auch eine elementare Zusammenführung der beiden unterschiedlichen Buchbeweise (Aigner, et al., 2000 S. 39ff.) (Aigner, et al., 2015 S. 71ff.) erreicht.

## 2 Thematischer Überblick

Der in 2.1 ausgeführte historische Überblick ist für das mathematische Verständnis des folgenden Gedankengangs nicht unbedingt erforderlich; das in 2.2 vorgestellte Konzept von Dehn-Hadwiger bildet hingegen die Grundlage für die vorliegende Elementarisierung.

### 2.1 Historie

Am Anfang des dritten Hilbert'schen Problems steht aus elementarmathematischer Sicht die Volumenformel für die Pyramide (Schmitt, et al., 1991 S. 62). In diesem Kontext bleiben zwei naheliegende Fragen oft unbeantwortet: „Warum benötigt man zur Erklärung des Faktors  $\frac{1}{3}$  das Prinzip von Cavalieri?“ und „Warum sind die drei Zerlegungstetraeder eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nicht kongruent?“ (Kirchgraber, 2016) (Roth, 2018) (Schmitt, et al., 1991) (Leppmeier, 2018). Darauf bezieht sich der folgende Auszug aus dem Briefwechsel zwischen dem Göttinger Mathematik-Professor Gerling und C.F. Gauß (Hartshorne, 2000 S. 230) (Aigner, et al., 2015 S. 72) (Ciesielska, 2018).

„... Ein anderer, freilich auch elementarer Gegenstand, der in meiner Vorlesung über Trigonometrie vorkommt, hat mir auch viel Vergnügen gemacht. Seitdem ... 1813 ..., ist mir das desiderium<sup>1</sup> geblieben, daß mir eigentlich eine scharfe Definition oder ein scharfes Kriterium der Symmetrie<sup>2</sup> fehlte, im Gegensatz gegen die Kongruenz ...“ (Brief Nr. 339 von Gerling an Gauß, 26.2.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 669).

„... Ihre Bemerkungen über Symmetrie<sup>3</sup> und Kongruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desiderieren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als wahrgenommene Tatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist und füglich höheren Wesen zukommen könnte. Um aber aus der Höhe wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, daß die Gleichheit der Volumina körperlicher, bloß symmetrischer, aber nicht kongruenter Gebilde, sich nur die Exhaustionsmethode<sup>4</sup> und nicht eben so elementar demonstrieren läßt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area

---

<sup>1</sup> Anliegen

<sup>2</sup> Hier verwendet für „Volumengleichheit“ oder „Gleichheit in Grundfläche und Höhe“.

<sup>3</sup> dito

<sup>4</sup> Prinzip von Cavalieri

des sphärischen Dreiecks gezeigt haben...“ (Brief Nr. 341 von Gauß an Gerling, 8.4.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 676).

„... Ich sehe ferner aus Ihrem Brief, daß Hr. Eisenstein mich falsch berichtet oder selbst im Irrtum gewesen ist, da der Legendreschen Art das Wesentliche fehlt, nämlich die Vermeidung der Exhaustionsmethode: davon allein war die Rede. Wenn Sie sich aber bei Legendres Art, die Exhaustionsmethode anzuwenden, auf Ihren Lorenz, § 330, beziehen, so bedaure ich, diesen jetzt nicht nachlesen zu können: mein Exemplar hat mein Sohn vor mehreren Jahren einmal mitgenommen und mir nicht wiedergegeben...“ (Brief Nr. 347 von Gauß an Gerling, 30.7.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 707).

„...Das neulich erwähnte Desiderium rücksichtlich der Exhaustionsmethode („Lorenz §330“) besteht darin, daß ich den Satz: Pyramiden sind gleich, wenn die Grundfläche und Höhe gleich sind, nicht beweisen kann, als indem ich der Grundfläche parallele, gleichabstehende Ebenen durch beide lege, innere und äußere Prismen konstruiere und dann bemerke, daß die Prismensummen beiderseits übereinstimmen, während doch die Summe der inwendigen und auswendigen sich einander und also auch den Pyramiden beiderseits unendlich nähern lassen, da sie nur um das größte äußere Prisma differieren, welches mit seiner Höhe unendlich klein werden kann.- Wenn es gelänge, diesen Satz unabhängig von der Exhaustionsmethode zu beweisen, oder auch den Satz, daß die Pyramide  $1/3$  des Prismas ist, so würde ich die Exhaustionsmethode bei eckigen Körpern gar nicht mehr nötig haben, und nur die runden dadurch auf die eckigen zurückführen...“ (Brief Nr. 348 von Gerling an Gauß, 12.9.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 710).

„...Legt man durch die Diagonale  $1.5^5$  eines beliebigen Parallelepiped, dessen Inhalt = P, die Ebenen 1.2.5; 1.3.5; 1.4.5; 1.6.5; 1.7.5; 1.8.5, so zerfällt dasselbe in 6 Pyramiden, von denen je zwei und zwei einander symmetrisch sind:

$$A = 1.2.3.5 \text{ symmetr. mit } A' = 5.6.7.1$$

$$B = 1.3.4.5 \text{ symmetr. mit } B' = 5.7.8.1$$

$$C = 1.4.6.5 \text{ symmetr. mit } C' = 5.8.2.1$$

B+C bilden eine vierseitige Pyramide  $3.4.6.5.1 = p$ , und es ist:

$$A + p = 1/2 P$$

$$A' + p = 1/2 P, \quad \text{also } A = A'$$

Für jede beliebige dreiseitige Pyramide A läßt sich nun ein Parallelepiped P finden, und so zerteilen, atqui ergo.

Es käme nun noch darauf an, zu beweisen, daß  $A = B = C$ ; das hat sich aber, alles seit 3 Wochen darauf verwandten Grübelns ungeachtet, noch nicht erreichen lassen. Gelänge dies noch, so wäre der Satz Lorenz § 330 unnötig und somit die Exhaustion aus der geradlinigen Geometrie ganz verbannt...“ (Brief Nr. 349 von Gerling an Gauß, 18.1.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 713f.).

„...Viel Zeit habe ich überdies an den bewußten stereometrischen Lehrsatz verwendet, ohne bisher so glücklich gewesen zu sein, den Schlüssel zu der Schwierigkeit zu finden. Hessel hat sich ebenfalls damit abgegeben und wir haben von Zeit zu Zeit unsere meletemata<sup>6</sup> verglichen. Die Sache scheint aber sehr viel tiefer zu liegen, als ich früher vermutete und mag vielleicht dem Euclid schon Kopfbrechen gemacht haben. – Doch

<sup>5</sup> Die Eckpunkte sind mit 1, 2, ..., 8 bezeichnet, die Strecken mit den Endpunkten 1 und 2 als 1.2 usw.

<sup>6</sup> Studien

aber sagt mir ein dunkles Gefühl, daß hier noch irgendein Lehrsatz verborgen liegen muß, der, wenn er einmal gefunden ist, durch seine Einfachheit vielleicht überrascht...“ (Brief Nr. 350 von Gerling an Gauß, 11.3.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 714f.).

„...Seit jener Zeit, richtiger seit den Weihnachtsferien, habe ich einen großen Teil meiner Zeit darauf verwendet, zu versuchen, ob ich nun vollends die Exhaustionsmethode aus der Elementarmathematik dadurch fortschaffen könnte, daß ich den Satz: Pyramiden sind gleich<sup>7</sup> bei gleicher Grundfläche und Höhe, unabhängig bewiese. Alle diese Versuche sind aber leider vergeblich gewesen; und ist mir nur das dabei merkwürdig erschienen, daß alle, auch die verschiedenst angefangenen immer endlich darauf zurückkommen, zu beweisen: daß 2 dreiseitige Pyramiden gleich groß sind, wenn in ihnen ein Dreieck ABC kongruent und eine Kante in jeder (AD und AE) durch einen Punkt A desselben beiderseits gleich. Einen direkten Beweis dafür zu finden, hat mir aber auf keine Weise gelingen wollen<sup>8</sup>; so dass ich endlich mich definitiv habe entschließen müssen, die darauf verwendete Zeit verloren zu geben und meinen Lorenz ohne diese gewünschte Verbesserung fertig zu machen, womit ich jetzt beschäftigt bin...“ (Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 716).

Gerling ließ damit nach eineinhalb Jahren seine Beschäftigung mit der Thematik ruhen. Auf die vielfältigen Aspekte seines Probierens wird in (Leppmeier, 2018) eingegangen.

Gauß ahnte im Gegensatz zu Gerling die Schwierigkeiten schon viel früher.

„...Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloß symmetrischer, nicht zugleich kongruenter Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, daß man sagt ...<sup>9</sup>

Mein Bedauern muß ich nun, da jener Satz<sup>10</sup> nicht mehr davon getroffen ist, auf die anderen Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch<sup>11</sup> von der Exhaustionsmethode abhängig sind, wie Euclid XII,5. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich aber nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen...“ (Brief Nr. 343 von Gauß an Gerling, 17.4.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 686).

Ein gutes halbes Jahrhundert später formuliert Hilbert:

„Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauss spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome)

<sup>7</sup> hier verwendet für „zerlegungsgleich“

<sup>8</sup> vgl. Hilbert: „... Unmöglichkeitsbeweis...“ (Hilbert, 1900 S. 266f.)

<sup>9</sup> Die folgenden Ausführungen beziehen sich nicht auf das dritte Hilbertsche Problem im engeren Sinn, sondern auf die Zerlegung achsensymmetrischer Tetraeder in kongruente Teiltetraeder, die Gerling gelungen ist (Ciesielska, 2018).

<sup>10</sup> dito

<sup>11</sup> auch noch

abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden; auch ist es Gerling gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist.“ (Hilbert, 1900 S. 266f.)

In historisch-genetischer Weise wird meist das etwas einfachere Problem gelöst, zu zeigen, dass Würfel und reguläres Tetraeder mit gleichen Volumina nicht zerlegungsgleich sind (Dehn, 1900) (Benko, 2007) (Wittmann, 2012) (Kirchgraber, 2016). Wir gehen in dieser Arbeit auf beide Fragestellungen ein:

- (1) Sind Würfel und reguläres Tetraeder zerlegungsgleich?
- (2) Gibt es zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die nicht zerlegungsgleich sind?

Die Beantwortung der Frage „Warum sind die drei Zerlegungstetraeder eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nicht kongruent?“ findet man in (Leppmeier, 2018).

## 2.2 Dehn-Invariante und Satz von Dehn-Hadwiger

Wir skizzieren zunächst die Ideen nach Dehn und Hadwiger, wie sie in „Proofs from the Book“ (Aigner, et al., 2000) dargestellt und in (Leppmeier, 2018) didaktisch aufbereitet sind. Entsprechende Beweise findet man in (Aigner, et al., 2000) (Leppmeier, 2018), aber auch in (Dehn, 1900) (Dehn, 1902) (Jessen, 1968) (Sydler, 1965).

Der vorgestellte „Buchbeweis“ ist (Aigner, et al., 2000 S. 39ff.) entnommen. Wir beginnen mit dem zentralen Begriff der Dehn-Invariante eines Polyeders, die wir anhand der Definition exemplarisch betrachten.

### **Definition (Dehn-Invariante):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$ .



Für jede Kante  $k$  bezeichne  $l(k)$  die Länge der Kante  $k$  und  $\alpha(k)$  den **Kantenwinkel**<sup>12</sup> zu  $k$ , d. h. den Winkel zwischen den beiden an  $k$  angrenzenden Flächen.

Die Menge aller Kantenwinkel von  $P$  einschließlich  $\pi$  sei  $\mathbf{M}_P$ .

Für eine beliebige, reelle Obermenge  $\mathbf{M}$  zu  $\mathbf{M}_P$  sei  $V(\mathbf{M})$  die Menge aller Linearkombinationen von Zahlen aus  $\mathbf{M}$  mit rationalen Koeffizienten und die Funktion  $f$  eine beliebige  $\mathbb{Q}$ -lineare Funktion  $f:V(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{Q}$ , die die Bedingung  $f(\pi) = 0$  erfüllt.

Dann heißt der Term  $m_f(k) := l(k) \cdot f(\alpha(k))$  Masse der Kante  $k$  (bzgl.  $f$ ) und

$$D_f(P) := \sum_{k \in P} m_f(k)$$

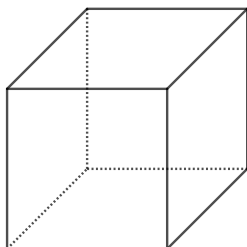
**Dehn-Invariante von  $P$  (bezüglich  $f$ ).**

Die Dehn-Invariante ist eine „Massensumme“ in der Weise, dass unter „Masse“ das Produkt aus Länge und bewertetem Kantenwinkel einer Kante zu verstehen ist. Eine wesentliche Rolle spielen dabei nur zu  $\pi$  irrationale Kantenwinkel.

### *Dehn-Invariante eines Würfels*

Man überzeugt sich leicht, dass die Dehn-Invariante eines Würfels  $W$  verschwindet.

Da jeder Kantenwinkel  $90^\circ$ , also  $\frac{\pi}{2}$  ist, ist  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f(\pi) = 0$ . Damit verschwindet jeder einzelne Kantenbeitrag. Wir haben



$$D_f(W) = 0.$$

Abbildung 1 Dehn-Invariante eines Würfels

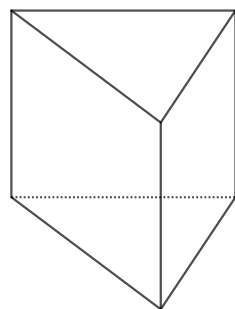
<sup>12</sup> In der Literatur findet man dafür auch den Begriff „Diederwinkel“ (Aigner, et al., 2015) (Wittmann, 2012).

### *Dehn-Invariante eines Prismas*

Ebenso leicht überzeugt man sich, dass die Dehn-Invariante eines geraden Prismas  $Pr$  verschwindet.

Für die Kantenwinkel, die  $90^\circ$  betragen, gilt das soeben Gesagte.

Wir betrachten ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine dreieckige Grundfläche mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann gilt für die drei anderen Kantenwinkel die Innenwinkelsumme des Dreiecks und somit  $f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = f(\alpha + \beta + \gamma) = f(\pi) = 0$ , also

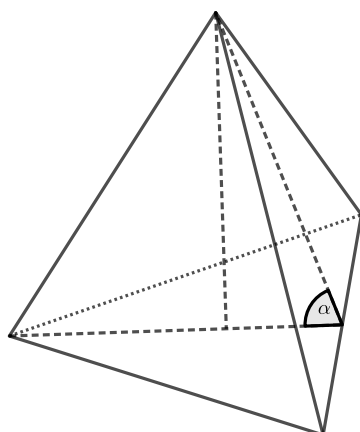


$$D_f(Pr) = 0.$$

Abbildung 2 *Dehn-Invariante eines Prismas*

### *Dehn-Invariante eines regulären Tetraeders*

Die Behandlung der Dehn-Invariante eines regulären Tetraeders  $T_{III}$  ist anspruchsvoller.



Zur Berechnung des Kantenwinkels  $\alpha$  betrachtet man das Stützdreieck und berücksichtigt, dass der Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt. Er teilt die Seitenhalbierende, die auch Höhe ist, im Verhältnis 1:2. Das ergibt

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Abbildung 3 *Dehn-Invariante eines regulären Tetraeders*

Unter Berücksichtigung der Irrationalität<sup>13</sup> von  $\frac{\alpha}{\pi}$  bzw.  $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$  (Aigner, et al., 2000 S. 33f.) (Benko, 2007 S. 669) (Wittmann, 2012 S. 50) sind  $\alpha$  und  $\pi$  in  $\mathbb{Q}$  linear unabhängig, so dass es eine Funktion  $f$  mit

$$f(\pi) = 0, \quad f\left(\arccos \frac{1}{3}\right) := 1$$

gibt. Damit erhält man (die Kantenlänge wird der Einfachheit halber 1 gesetzt):

$$D_f(TIII) = 6 \cdot f(\alpha) = 6$$

In (Aigner, et al., 2000) (Leppmeier, 2018) findet man weitere Beispiele, etwa für Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, aber unterschiedlicher Dehn-Invariante (sog. Tetraeder  $TI$  und  $TII$ , vgl. auch 3.8). In (Leppmeier, 2018) werden zudem die Zerlegungstetraeder eines Fundamentalparallelotops eines fcc-Gitters betrachtet ( $TIII$  und sog. Tetraeder  $TIV$ ).

Ergänzend sei angemerkt, dass für ein Polyeder die Summe der Produkte aus Kantenwinkel und Kantenlänge  $\sum_{k \in P} \alpha(k) \cdot l(k)$  in der Sprache der Differentialgeometrie die mittlere Krümmung des Polyeders beschreibt und einen wesentlichen Teil der Formel von Steiner darstellt. Für die tetraedrische Konfiguration ist sie in (Leppmeier, 1997 S. 112f.) berechnet und illustriert.

Wir kommen zurück zur Dehn-Invariante. Ihr Verhalten bei Polyeder-Zerlegungen beschreibt das folgende Lemma.

**Lemma 1 (Additivität der Dehn-Invarianten der Teilpolyeder):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$  und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Gegeben seien ferner  $M_P$  und ein  $M$ , das auch alle Kantenwinkel aller Teilpolyeder enthalte. Es sei

$$V(M) = \left\{ \sum_i q_i \alpha_i : \alpha_i \in M, q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

Dann gilt für jede  $\mathbb{Q}$ -lineare Funktion  $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ :

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \dots + D_f(P_n)$$

**Beweis.** Der Beweis ist ausgeführt in (Aigner, et al., 2000) oder in (Leppmeier, 2018).

<sup>13</sup> Zu dieser Thematik ist eine eigene Elementarisierung in Vorbereitung.

Hier sehen wir eine wesentliche Invarianz-Eigenschaft der Dehn-Invariante eines Polyeders (vgl. Brief Nr. 341 von Gauß an Gerling, 8.4.1844, und Brief Nr. 347 von Gauß an Gerling, 30.7.1844): Sie ist unabhängig von der Zerlegung in Teilpolyeder. Eine vergleichbare Invarianz-Eigenschaft gilt bekannterweise auch für das Volumen eines Polyeders.

Möchte man zwei verschiedene Polyederzerlegungen vergleichen, benötigt man das folgende Lemma.

**Lemma 2 (Erweiterbarkeit von  $f$  auf Oberräume):**

Für jede reelle Obermenge  $M'$  zu  $M$  ist  $V(M')$  ein Obervektorraum zu  $V(M)$ . Ebenso kann eine  $\mathbb{Q}$ -lineare Funktion  $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  zu einer  $\mathbb{Q}$ -linearen Funktion  $f': V(M') \rightarrow \mathbb{Q}$  erweitert werden, so dass  $f'(m) = f(m)$  für alle  $m \in M$  gilt.

**Beweis.** Der Beweis ist ausgeführt in (ebd.).

Mit diesen Hilfsmitteln kann man auf der Basis der folgenden Definition den entscheidenden Satz von Dehn-Hadwiger zeigen.

**Definition.** Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  heißen **zerlegungsgleich**, wenn es je eine Zerlegung für  $P$  und für  $Q$  gibt mit  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ , so dass  $P_i$  kongruent ist zu  $Q_i$  für alle  $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$ .

**Satz (Dehn-Hadwiger).** Es seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder mit Kantenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ . Die reelle Menge  $M$  enthalte alle genannten Kantenwinkel und  $\pi$ .

Wenn  $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$  eine beliebige  $\mathbb{Q}$ -lineare Funktion mit  $f(\pi) = 0$  ist, so dass

$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

dann sind  $P$  und  $Q$  nicht zerlegungsgleich.

**Beweis.** Der Beweis ist ausgeführt in (ebd.).

Im Rückblick auf die erläuterten Beispiele erkennen wir, dass die Dehn-Invarianten eines Würfels und eines volumengleichen regulären Tetraeders verschieden sind und daher beide Polyeder nicht zerlegungsgleich sein können.

So ist das dritte Hilbert'sche Problem in einem weiteren Sinne gelöst (vgl. 2.1, Frage 1).

Auf der Basis des Satzes von Dehn-Hadwiger lassen sich auch zwei Tetraeder mit gleicher Fläche und gleicher Höhe angeben, die nicht zerlegungsgleich sind (vgl. Abschnitt 3.8): Dies ergibt dann die Lösung des dritten Hilbert'schen Problems im engeren Sinne (vgl. 2.1, Frage 2).

### 3 Eine Elementarisierung mit dem Kugeldreieck

Es ist leicht einzusehen, dass man in vielen Situationen auf den Beitrag der Kantenlänge zur Dehn-Invariante eines Polyeders verzichten kann. Weiterhin ist es unerheblich, ob man einen jeden Kantenwinkel betrachtet oder das Doppelte eines jeden Kantenwinkels. Die Verdoppelung eines Kantenwinkels ermöglicht nun eine tiefere Elementarisierung mit Hilfe von Kugeldreiecken.

Dazu sind lediglich elementare Kenntnisse über Winkel und Fläche (sphärischer Exzess) eines Kugeldreiecks erforderlich (vgl. (Kern, et al., 1991)).

#### 3.1 Von den Kantenwinkeln zu den Kugeldreiecken

Die Verdoppelung eines Kantenwinkels ermöglicht eine gedankliche Aufspaltung und Verschiebung zu den beiden Ecken einer jeden Kante.

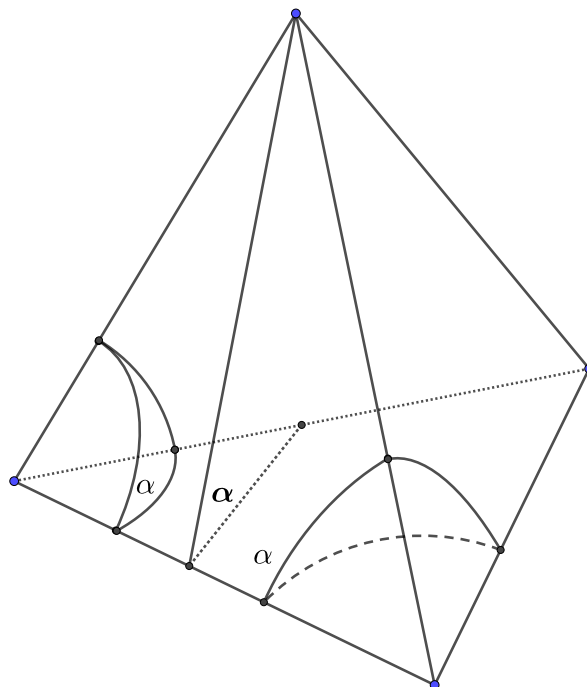


Abbildung 4 Übergang Kantenwinkel - Kugeldreieckswinkel

Die (Bögen der) ehemaligen Kantenwinkel bilden so an jeder Ecke eines Polyeders im „Normalfall“ ein Kugeldreieck, im allgemeinen Fall ein

Kugelvieleck. Die Summe der Kantenwinkel bestimmt den sphärischen Exzess und damit die Fläche des Kugeldreiecks (Kugelvielecks) an der Ecke. Die Summe der Flächen der Kugeldreiecke (Kugelvielecke) stellen somit ein anschauliches und elementares Instrument zur Untersuchung der Zerlegungsgleichheit dar.

Aufschlussreich ist ein Vergleich mit der ebenen Situation eines Polygons. Hier haben wir den komfortablen Erhaltungssatz der Innenwinkelsumme im Dreieck. Er führt zu einem Erhaltungssatz für die Innenwinkelsumme von Polygonen: Sie ist bekanntlich  $0 \bmod \pi$ .

In der räumlichen Situation von Polyedern haben wir erst für Parallelotope einen vergleichbaren Erhaltungssatz: In der Theorie der Kugelgitterpackungen kann man zeigen, dass in einem Fundamentalparallelotop genau eine Kugel gepackt ist (Conway, et al., 1999) (Leppmeier, 1997): Das bedeutet hier, dass die Summe der Kugelvielecksflächen an den Ecken eine ganze Kugeloberfläche ergibt. Damit haben wir für Parallelotope auch eine invariante räumliche Innenwinkelsumme.

Für Tetraeder gilt dies im Allgemeinen jedoch nicht.

### 3.2 L-Invariante als elementare Dehn-Invariante

Wir führen in Analogie zur Dehn-Invariante die Summe der „Raumwinkel“ – ausgedrückt durch die Fläche resp. den sphärischen Exzess des zugeordneten Kugeldreiecks – an den Ecken eines Polyeders als L-Invariante ein. Der Fokus verschiebt sich so von den Kanten zu den Ecken und damit von den Kantenwinkeln zu den Kugeldreiecken an den Ecken.

**Definition (L-Invariante):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$ . Für jede Kante  $k$  bezeichne  $\alpha(k)$  den **Kantenwinkel zu  $k$** , d. h. den Winkel zwischen den beiden an  $k$  angrenzenden Flächen. Für jede Ecke  $e$  bezeichne  $K_e$  die Menge der Kanten, die  $e$  enthalten. Dann heißt

$$\varepsilon_e := \sum_{k \in K_e} \alpha(k) - (|K_e| - 2) \cdot \pi$$

**sphärischer Exzess an der Ecke  $e$  und**

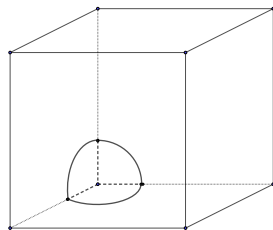
$$L(P) := \sum_{e \in P} \varepsilon_e$$

### L-Invariante von P.

Wir betrachten wiederum die in 2.2 untersuchten Beispiele.

#### L-Invariante eines Würfels $W$

Wir erhalten an jeder Ecke  $e$  den sphärischen Exzess



$$\varepsilon_e = 3 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

Abbildung 5 L-Invariante eines Würfels

und damit für die L-Invariante

$$L(W) = \sum_{e \in W} \varepsilon_e = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi.$$

Die sphärischen Exzesse an den acht Ecken ergeben also genau eine Kugel(oberfläche). Das verwundert nicht weiter, denn in einem gedanklichen Puzzlespiel lassen sich die acht Kugelsektoren an den Ecken zu einer Kugel zusammenlegen.

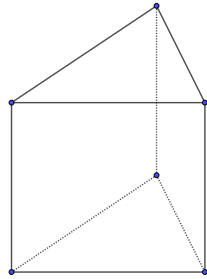
Dieses Ergebnis ist auch konsistent mit grundlegenden Aussagen aus der Kristallografie. Die primitive Einheitszelle einer einfach-kubischen Packung enthält genau eine Kugel<sup>14</sup>.

<sup>14</sup> Diese Beobachtung steht im Einklang mit grundsätzlichen Aussagen aus der Theorie der Kugelpackungen (Conway, et al., 1999) (Leppmeier, 1997).



### *L-Invariante eines Prismas $Pr$ mit dreieckiger Grundfläche*

Wir legen die Innenwinkel des Dreiecks als  $\alpha, \beta, \gamma$  fest und erhalten an einer Ecke  $e$  als sphärischen Exzess



$$\varepsilon_e = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha - \pi = \alpha$$

$$\text{bzw. } \varepsilon_e = \beta$$

$$\text{bzw. } \varepsilon_e = \gamma.$$

Abbildung 6 *L-Invariante eines Prismas*

Für die L-Invariante ergibt sich mit der Innenwinkelsumme im Dreieck

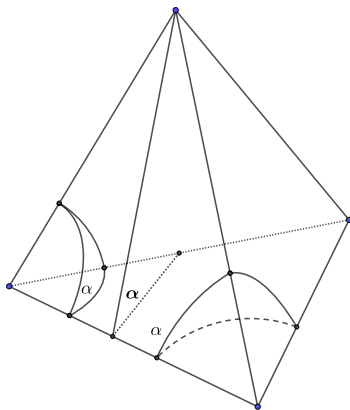
$$L(Pr) = \sum_{e \in Pr} \varepsilon_e = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\pi.$$

Die sphärischen Exzesse an den sechs Ecken ergeben genau eine Halbkugel(oberfläche).

Dies ist in sich konsistent, da man ein dreiseitiges Prisma durch ein dazu kongruentes Prisma zu einem Parallelotop ergänzen kann, das wieder genau eine Kugel enthält.

### *L-Invariante eines regulären Tetraeders $TIII$*

Wir erhalten als sphärischen Exzess an einer beliebigen Ecke  $e$



$$\varepsilon_e = 3 \cdot \alpha - \pi$$

$$\varepsilon_e = 3 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi$$

Abbildung 7 *L-Invariante eines Tetraeders*

und für die L-Invariante

$$L(TIII) = \sum_{e \in TIII} \varepsilon_e = 4 \cdot \left( 3 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi \right) = 12 \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - 4\pi.$$

Wir erkennen hier, dass in algebraischer Hinsicht die  $\mathbb{Q}$ -lineare Unabhängigkeit von  $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  und  $\pi$  eine weitere Vereinfachung nicht zulässt (vgl. 2.2).

Nach der Betrachtung einiger exemplarischer L-Invarianten beweisen wir nun die entsprechenden Aussagen entlang des oben vorgestellten Dehn-Hadwiger'schen Gedankengangs.

### 3.3 Unterschiedliche Arten von Zerlegungen

Wir beginnen mit einer natürlichen Unterscheidung von Zerlegungen. Es liegt auf der Hand, dass es Zerlegungen gibt, die keine neuen Polyederecken generieren, ebenso wie es Zerlegungen gibt, die neue Ecken im Inneren (oder auf einer Facette oder auf einer Kante) des Ausgangspolyeders erzeugen.

**Definition:** Gegeben sei ein Polyeder  $P$  und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Eine **Zerlegung** heißt **einfach**, wenn jede Ecke eines Teilpolyeders auch Ecke des Polyeders ist:  $e \in P_i \implies e \in P$

Eine Zerlegung heißt **ziemlich einfach**, wenn keine Ecke eines Teilpolyeders  $P_i$  im Inneren einer Kante des Polyeders  $P$  liegt.

Beispielsweise gibt es eine Zerlegung eines Würfels in sechs bis auf Spiegelung kongruente Tetraeder; sie heißen Tetraeder TI oder Roger's simplex oder pieh-nao (Abbildung 8) (Cromwell, 1964) (Leppmeier, 2018).

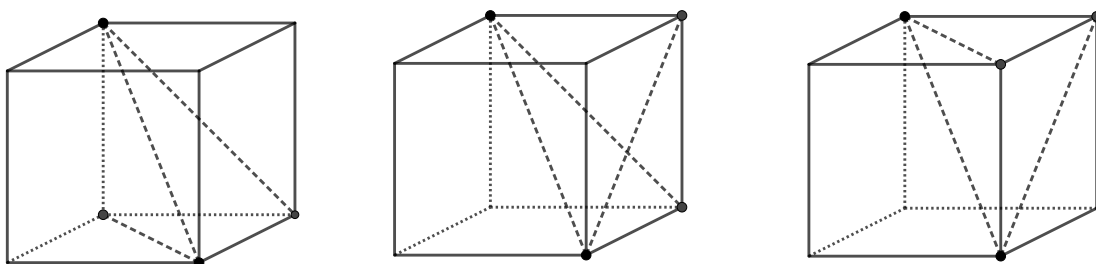


Abbildung 8 Einfache Zerlegung eines Würfels in Tetraeder TI (pieh-nao)

In Abbildung 8 sind drei Tetraeder TI in sukzessiver Abfolge gezeichnet, sie ergeben einen halben Würfel. Alle drei Tetraeder TI haben außerdem eine Raumdiagonale des Würfels gemeinsam.

Wir sehen, dass die Zerlegung eines Würfels in sechs Tetraeder TI eine einfache Zerlegung ist.

Auch die Zerlegung eines Prismas mit dreieckiger Grundfläche in drei Zerlegungstetraeder ist ein Beispiel für eine einfache Zerlegung.

Die Zerlegung eines Würfels in sechs kongruente Pyramiden mit gemeinsamer Spitze im Schnittpunkt der Raumdiagonalen ist dagegen keine einfache, sondern nur noch eine ziemlich einfache Zerlegung (Abbildung 9).

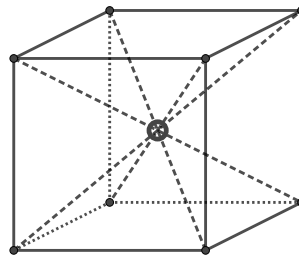


Abbildung 9 Ziemlich einfache Zerlegung eines Würfels in Pyramiden

Hier entsteht durch die Zerlegung eine neue Ecke im Inneren des Würfels. Wir erkennen, dass die sechs zugehörigen Kugeldreiecke an der jeweiligen Pyramidenspitze genau eine Vollkugel ergeben. Außerdem verstehen wir hier schon ein grundlegendes Prinzip einer ziemlich einfachen Zerlegung: Zusätzliche Ecken im Inneren des Ausgangspolyeders generieren immer eine Vollkugel um die jeweilige Ecke (vgl. Abbildung 10).

Vorstellbar ist bei einer ziemlich einfachen Zerlegung grundsätzlich auch eine zusätzliche Ecke auf einer Fläche. In diesem Fall entsteht eine Halbkugel um diese Ecke (vgl. Abbildung 11).

Diese Beobachtung erhält im nächsten Abschnitt eine entscheidende Bedeutung.

### 3.4 Verhalten der L-Invariante bei Zerlegungen

In Abhängigkeit von der Art der Polyeder-Zerlegung haben wir unterschiedlich starke Invarianzen der L-Invariante.

Wir beginnen mit der stärksten Invarianz.

**Lemma 1 (Additivität und starke Invarianz der L-Invariante):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$  und eine einfache Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Dann gilt:

$$L(P) = L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n)$$

**Beweis.** Wir betrachten eine Ecke  $e$  des Polyeders  $P$  und das von den dazugehörigen Kantenwinkeln bestimmte Kugelvieleck mit der Oberfläche  $\varepsilon_e$ .

Wir betrachten die Teilpolyeder  $P_{e_i}$  mit der gemeinsamen Ecke  $e$ .

Diese erzeugen an der Ecke  $e$  auf natürliche Weise eine Zerlegung des Kugelvielecks mit Oberfläche  $\varepsilon_e$  in die Teilkugelvielecke mit Oberfläche  $\varepsilon_{e_i}$ .

Mit der Definition für  $L(P)$  haben wir also:

$$L(P) = \sum_{e \in P} \varepsilon_e = \sum_{e \in P} \sum_i \varepsilon_{e_i}$$

Ebenfalls gemäß der Definition haben wir:

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) = \sum_{e_1 \in P_1} \varepsilon_{e_1} + \sum_{e_2 \in P_2} \varepsilon_{e_2} + \dots + \sum_{e_n \in P_n} \varepsilon_{e_n} = \sum_i \sum_{e_i \in P_i} \varepsilon_{e_i}$$

Wir gruppieren die Summe mit Blick auf die betrachtete Ecke  $e$  um und erhalten

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) = \sum_{e \in P} \sum_i \varepsilon_{e_i} .$$

Das ist die Behauptung. ■

Die Invarianz wird etwas schwächer, wenn eine zusätzliche Ecke im Inneren oder auf einer Facette entsteht. Dann gilt

**Lemma 2 (Ziemlich starke Invarianz der L-Invariante):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$  und eine ziemlich einfache Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

Dann gilt:

$$L(P) + n_\pi \cdot \pi = L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n)$$

Dabei ist  $n_\pi$  die Summe aus der doppelten Anzahl der Ecken auf den Facetten von  $P$  und der vierfachen Anzahl der Ecken im Inneren von  $P$ .

**Beweis.** Der Beweis wird wie für Lemma 1 geführt. Es ist zu berücksichtigen, dass eine zusätzliche Ecke auf einer Facette von  $P$  zu einer Halbkugel mit Oberfläche  $2\pi$  und eine zusätzliche Ecke im Inneren von  $P$  zu einer Vollkugel mit Oberfläche  $4\pi$  führt. ■

Die Invarianz wird noch einmal schwächer, wenn zusätzliche Ecken auf den Kanten zugelassen werden.

**Lemma 3 (Schwache Invarianz der L-Invariante):**

Gegeben sei ein Polyeder  $P$  und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Für jede Kante  $k \in P$  sei  $\alpha(k)$  der dazu gehörige Kantenwinkel.

Dann gilt:

$$L(P) \equiv \sum_{k \in P} 2 \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}$$

Und es gibt gerade Zahlen  $m_k \in 2\mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}$$

**Beweis.** Die erste Aussage ist anschaulich klar und ergibt sich folgendermaßen aus der Definition:

Es ist

$$L(P) = \sum_{e \in P} \varepsilon_e = \sum_{e \in P} \sum_{k \in K_e} \alpha(k) - (|K_e| - 2) \cdot \pi$$

und damit

$$L(P) \equiv \sum_{e \in P} \sum_{k \in K_e} \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Da jede Kante zu zwei Ecken gehört, haben wir

$$L(P) \equiv \sum_{k \in P} 2 \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}.$$

Die zweite Aussage können wir folgendermaßen zeigen: Die Zerlegung des Polyeders  $P$  in die Teilpolyeder  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ergibt zu den Ecken  $e$  von  $P$  noch

weitere Ecken; wir nennen sie Zerlegungsecken. Hinsichtlich ihrer Lage unterscheiden wir drei Fälle.

1. Fall. Die Zerlegungsecke  $e'$  liegt im Inneren von  $P$  (Abbildung 10).

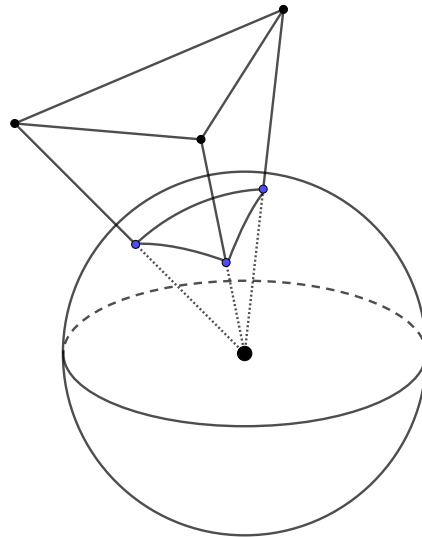


Abbildung 10 Zerlegungsecke im Inneren

Dann ergeben die Kugelvielecke eine Kugel mit Mittelpunkt  $e'$ .

Die Oberfläche ist  $4\pi$ . Der Beitrag ist *mod*  $\pi$  nicht zu berücksichtigen.

2. Fall. Die Zerlegungsecke  $e''$  liegt auf einer Begrenzungsfläche (Facette) von  $P$ , jedoch nicht auf einer Kante (Abbildung 11).

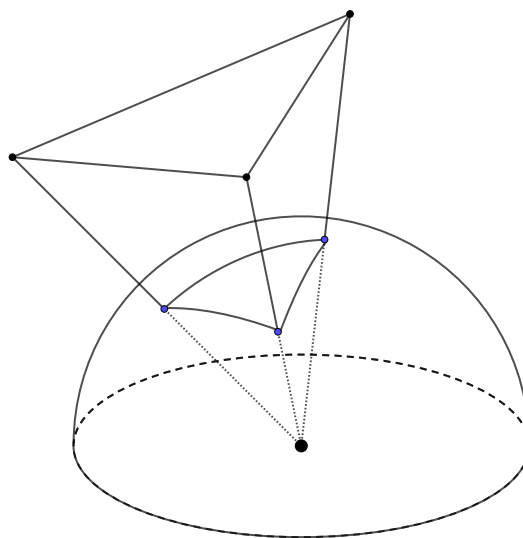


Abbildung 11 Zerlegungsecke auf Facette

Dann ergeben die Kugelvielecke eine Halbkugelkugel mit Mittelpunkt  $e''$ .

Die Oberfläche ist  $2\pi$ . Der Beitrag kann *mod*  $\pi$  vernachlässigt werden.

3. Fall. Die Zerlegungsecke  $e'''$  liegt im Inneren einer Kante  $k$  von  $P$  (Abbildung 12).

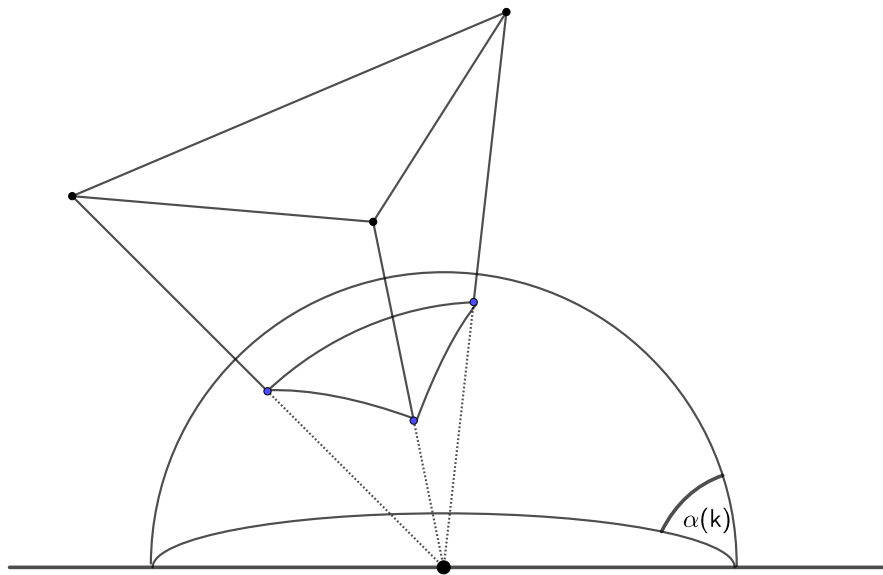


Abbildung 12 Zerlegungsecke auf Kante

Hier ergeben die Kugelvierecke zur Ecke  $e'''$  gerade ein Kugelzweieck.

Die Oberfläche ist  $\frac{\alpha(k)}{2\pi} \cdot 4\pi = 2\alpha(k)$ .

Da auf jeder Kante höchstens endlich viele Ecken vom Typ  $e'''$  liegen können, ist ihr Beitrag  $m_k \cdot \alpha(k)$  ( $m_k \in 2\mathbb{N}$ ). Daraus folgt die Behauptung. ■

Das Lemma 3 wird eine entscheidende Rolle in der Elementarisierung des Satzes von Dehn-Hadwiger spielen.

### 3.5 Unterschiedliche Arten von Zerlegungsgleichheit

Wir betrachten nun die Zerlegungsgleichheit etwas genauer. Auch hier wollen wir analog zur Art der Zerlegung und zur L-Invariante wiederum drei Stufen der Zerlegungsgleichheit unterscheiden, die sich aus den unterschiedlichen Positionen der zusätzlichen Ecken und der Qualität der L-Invarianten ergeben.

#### Definition (Zerlegungsgleichheit).

Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  heißen **zerlegungsgleich** (bzw. **einfach zerlegungsgleich** bzw. **ziemlich einfach zerlegungsgleich**), wenn es je eine Zerlegung (bzw. einfache Zerlegung bzw. ziemlich einfache

Zerlegung) für  $P$  und für  $Q$  gibt mit  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ , so dass  $P_i$  kongruent ist zu  $Q_i$  für alle  $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$ .

Daraus ergeben sich folgende Beobachtungen.

### 3.6 Aussagen über Zerlegungsgleichheit

Entsprechend der jeweiligen Invarianz der L-Invariante können wir die Aussagen über Zerlegungsgleichheit steigern. Wir beginnen mit der einfachsten Situation.

#### **Proposition 1.**

Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  mit verschiedenen L-Invarianten sind nicht einfach zerlegungsgleich.

**Beweis.** Wir nehmen an, dass die beiden Polyeder  $P$  und  $Q$  zwar verschiedene L-Invarianten haben, aber dennoch einfach zerlegungsgleich sind mit den einfachen Zerlegungen  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ . Dann gilt nach Lemma 1 für die L-Invarianten

$$L(P) = L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n)$$

und

$$L(Q) = L(Q_1) + L(Q_2) + \dots + L(Q_n).$$

Aus der paarweisen Kongruenz der  $P_i$  und  $Q_i$  folgt die paarweise Gleichheit der L-Invarianten  $L(P_i) = L(Q_i)$  und damit  $L(P) = L(Q)$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

Ein Würfel und ein volumengleiches, reguläres Tetraeder können nie einfach zerlegungsgleich sein. Das verwundert nicht, zumal in der Ebene ein Quadrat und ein flächengleiches Dreieck auch nicht einfach zerlegungsgleich sind.

Die Aussage bekommt erst einen Gehalt, wenn wir beispielsweise die anderen platonischen Körper betrachten. Auch hier können wir eine wechselseitige, einfache Zerlegungsgleichheit ausschließen.

Wir betrachten nun ziemlich einfache Zerlegungen.



**Proposition 2.**

Zwei Polyeder  $P$  und  $Q$  mit verschiedenen L-Invarianten *mod*  $\pi$  sind nicht ziemlich einfach zerlegungsgleich.

**Beweis.** Den Beweis können wir analog zum Beweis der Proposition 1 unter Verwendung des Lemmas 2 führen. ■

Das Ergebnis ist schon interessanter: Selbst wenn man für die Zerlegungen viele weitere denkbare Ecken im Inneren und auf den Facetten zulässt (also eine ziemlich einfache Zerlegung), gelingt keine gemeinsame, ziemlich einfache Zerlegung für Würfel und reguläres Tetraeder.

Wir spitzen mit Blick auf das dritte Hilbert'sche Problem noch weiter zu.

### 3.7 Würfel und reguläres Tetraeder

Die erste Fragestellung zum dritten Hilbert'schen Problem löst

**Proposition 3.**

Gegeben sind zwei volumengleiche Polyeder  $P$  und  $Q$ .

Wenn alle Kantenwinkel von  $P$  gleich und irrationale Vielfache von  $\pi$  sind, und wenn alle Kantenwinkel von  $Q$  gleich und rationale Vielfache von  $\pi$  sind, dann sind  $P$  und  $Q$  nicht zerlegungsgleich.

**Beweis.** Wir nehmen an, die beiden Polyeder  $P$  und  $Q$  sind zerlegungsgleich mit den Zerlegungen  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ .

Die Kantenwinkel von  $P$  seien  $p\pi$  ( $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ),

die Kantenwinkel von  $Q$  seien  $q\pi$  ( $q \in \mathbb{Q}$ ).

Dann haben wir mit Lemma 3

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot p\pi \pmod{\pi}, \quad m_k \in 2\mathbb{N}$$

und

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \dots + L(Q_n) \equiv \sum_{k \in Q} n_k \cdot q\pi \pmod{\pi}, \quad n_k \in 2\mathbb{N}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot p\pi = \sum_{k \in Q} n_k \cdot q\pi + n_\pi \pi, \quad (n_\pi \in \mathbb{Z})$$

und

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot p = \sum_{k \in Q} n_k \cdot q + n_\pi.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht eine irrationale Zahl, auf der rechten Seite eine rationale Zahl. Im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt die Behauptung. ■

Das ist nun wirklich hochinteressant:

Jede Zerlegung eines regulären Tetraeders führt bei der L-Invariante zusätzlich zum 12-fachen des Kantenwinkels  $p\pi$ , abzüglich  $4\pi$ , außerdem noch zu Vielfachen von  $4\pi$  für innere Punkte, zu Vielfachen von  $2\pi$  für Facetten-Punkte und zu geradzahligem Vielfachen des Kantenwinkels  $p\pi$  für Kantenpunkte. In der Summe bleibt die L-Invariante einer jeden Zerlegung ein irrationales Vielfaches von  $\pi$ .

Dagegen führt jede Zerlegung eines Würfels bei der L-Invariante zusätzlich zum 24-fachen des Kantenwinkels  $\pi/2$ , abzüglich  $8\pi$ , außerdem noch zu Vielfachen von  $4\pi$ ,  $2\pi$ ,  $2 \cdot \pi/2$ . In der Summe bleibt die L-Invariante einer jeden Zerlegung ein rationales Vielfaches von  $\pi$ .

Wir haben damit einen gleichermaßen anschaulichen wie elementaren Beweis für die Nichtzerlegbarkeit von regulärem Tetraeder und volumengleichem Würfel.

Wir steigern die Proposition 3 noch etwas weiter.

### 3.8 Zwei nicht zerlegungsgleiche Tetraeder

Die zweite Fragestellung zum dritten Hilbert'schen Problem und damit das eigentliche dritte Hilbert'sche Problem löst die folgende Proposition.

**Proposition 4.**

Gegeben sind zwei volumengleiche Polyeder  $P$  und  $Q$ .

Wenn das Kantenwinkelsortiment von  $P$  neben rationalen Vielfachen von  $\pi$  nur ein irrationales Vielfaches von  $\pi$  enthält, und wenn alle Kantenwinkel von  $Q$  rationale Vielfache von  $\pi$  sind, dann sind  $P$  und  $Q$  nicht zerlegungsgleich.

**Beweis.** Wir nehmen an, die beiden Polyeder  $P$  und  $Q$  sind zerlegungsgleich mit den Zerlegungen  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ .

Der zu  $\pi$  irrationale Kantenwinkel von  $P$  sei  $\alpha_0 = p\pi$  ( $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ), die zu  $\pi$  rationalen Kantenwinkel von  $P$  seien Vielfache von  $q_p\pi$  ( $q_p \in \mathbb{Q}$ ).

Die Kantenwinkel von  $Q$  seien Vielfache von  $q\pi$  ( $q \in \mathbb{Q}$ ).

Aus Lemma 3 haben wir

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) \equiv \sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}, \quad m_k \in 2\mathbb{N}$$

und

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \dots + L(Q_n) \equiv \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) \pmod{\pi}, \quad n_k \in 2\mathbb{N}$$

und damit für ein  $n_\pi \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k \in P} m_k \cdot \alpha(k) = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi.$$

Unter Berücksichtigung der gegebenen Winkelsortimente erhalten wir

$$m_0 \cdot \alpha_0 + \sum_{k \in P, \frac{\alpha(k)}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} m_k \cdot \alpha(k) = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi, \quad (m_0 \in 2\mathbb{N})$$

$$m_0 \cdot \alpha_0 = \sum_{k \in Q} n_k \cdot \alpha(k) - \sum_{k \in P, \frac{\alpha(k)}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} m_k \cdot \alpha(k) + n_\pi \pi$$

und mit  $n, m \in 2\mathbb{N}$

$$m_0 \cdot p\pi = n \cdot q\pi - m \cdot q_p\pi + n_\pi \pi$$

$$m_0 \cdot p = n \cdot q - m \cdot q_p + n_\pi.$$

Auf der linken Seite der Gleichung steht eine irrationale Zahl, auf der rechten Seite eine rationale Zahl. Im Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt die Behauptung. ■

Dieses Ergebnis ist nicht minder interessant. Wir können nun zwei Tetraeder angeben, die gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, aber nicht zerlegungsgleich sind.

### *L-Invariante des Tetraeders TI*

Das erste Tetraeder ist ein Tetraeder TI (auch: Roger's Simplex oder pieh-nao, vgl. Abbildung 8) und der sechste Teil eines Würfels (Leppmeier, 2018).

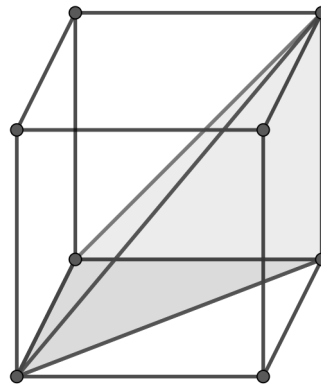


Abbildung 13 *L-Invariante eines Tetraeders TI*

Seine Grundfläche ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, die Höhe über einem  $45^\circ$ -Scheitel bildet zugleich eine weitere Kante.

Das Tetraeder TI hat als Kantenwinkel:  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ . (Die beiden Kantenwinkel  $\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{4}$  sieht man elementar. Den Winkel  $\frac{\pi}{3}$  an der Raumdiagonalen des Würfels erkennt man, wenn man sich vorstellt, dass an der Raumdiagonalen sechs im Wesentlichen kongruente Einzeltetraeder TI aneinanderstoßen und einen Vollwinkel bilden; dies ist in Abbildung 8 gut zu erkennen. Natürlich kann man auch Methoden der Analytischen Geometrie anwenden (Aigner, et al., 2000).)

Die L-Invariante ist

$$L(TI) = 2 \cdot \left( 2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - 4\pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Da ein Würfel aus sechs (bis auf Symmetrie) zueinander kongruenten Tetraedern TI besteht, erhält man dieses Ergebnis unter Berücksichtigung der einfachen Zerlegung und des Lemmas 1 auch als

$$L(TI) = \frac{L(W)}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi.$$

### *L-Invariante des Tetraeders TII*

Das Tetraeder TII entsteht, wenn man im Tetraeder TI die Höhe zum 90°-Scheitel verschiebt (Leppmeier, 2018).

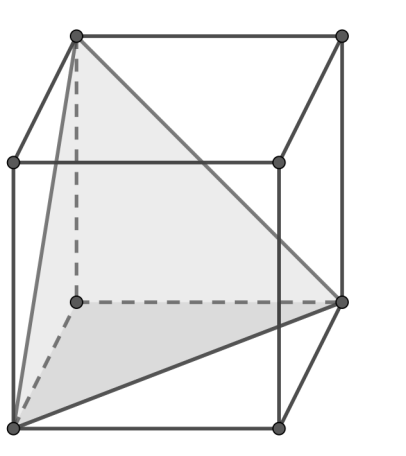


Abbildung 14 *L-Invariante eines Tetraeders TII*

Das Tetraeder TII hat als Kantenwinkel  $\frac{\pi}{2}$  und  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ . (Dazu betrachtet man das Stützdreieck mit Ankathete  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  und Hypotenuse  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ , vgl. (Aigner, et al., 2000).)

Die L-Invariante ist

$$L(TII) = 2 \cdot \left( 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 4\pi.$$

Entscheidend ist hier, dass  $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$  ebenso wie  $\arccos \frac{1}{3}$  ein irrationales Vielfaches von  $\pi$  ist (Aigner, et al., 2000) (Aigner, et al., 2015)<sup>15</sup>.

<sup>15</sup> Vgl. auch M. Leppmeier: Mathematische Begabungsförderung – Konzepte für Unterricht und Schulentwicklung, erscheint demnächst bei Springer Research, Berlin, Fußnote 53 auf S. 142.

Damit erfüllen die Tetraeder TI und TII die Voraussetzungen der Proposition 4. Und die Frage Gerlings (bzw. Gauß') oder Hilberts ist in elementarer Weise beantwortet. Wir verallgemeinern noch weiter mit Blick auf den Satz von Dehn-Hadwiger.

### 3.9 Vereinheitlichung des Satzes von Dehn-Hadwiger und der Bricard-Bedingung

Wir setzen den Gedankengang über die Proposition 4 hinaus fort und formulieren eine elementare Version des Satzes von Dehn-Hadwiger.

**Satz (Dehn-Hadwiger, „Bricard“-Bedingung<sup>16</sup>).**

Es seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder mit Kantenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ .

Wenn es keine natürlichen Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_p$  und  $n_1, n_2, \dots, n_q$  gibt, so dass

$$\sum_i m_i \cdot \alpha_i - \sum_j n_j \cdot \beta_j = n_\pi \pi$$

für ein ganzzahliges  $n_\pi$  gültig ist,  
dann sind  $P$  und  $Q$  nicht zerlegungsgleich.

**Beweis.** Wir führen den Beweis wieder indirekt.

Wir nehmen an, dass  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich sind mit den Zerlegungen  $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$  und  $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ .

Nach Lemma 3 gibt es gerade Zahlen  $m_i, n_j \in 2\mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$L(P_1) + L(P_2) + \dots + L(P_n) \equiv \sum_i m_i \cdot \alpha_i \pmod{\pi}$$

und

$$L(Q_1) + L(Q_2) + \dots + L(Q_n) \equiv \sum_j n_j \cdot \beta_j \pmod{\pi}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

---

<sup>16</sup> Dieser Satz heißt in (Aigner, et al., 2015 S. 75) nicht mehr Dehn-Hadwiger, sondern „Bricard“-Bedingung“. Die Beweisführung erfordert dort ein Perlenlemma und ein Kegel-Lemma, sie wurde bereits in (Wittmann, 2012) elementarisiert.

Diese Formulierung des Satzes von Dehn-Hadwiger in der elementarisierten Version ist hochinteressant: Sie enthält als Voraussetzung die sog. Bricard-Bedingung, die in der historischen Genese des dritten Hilbert'schen Problems auch eine hohe Bedeutung erlangte. Bereits 1896 wurde sie von Bricard angegeben und für einen Beweisversuch der Nichtzerlegbarkeit von regulärem Tetraeder und Würfel verwendet.

Wir erhalten hier die Bricard-Bedingung nicht in einem eigenständigen Elementarisierungsversuch wie bei Benko, Aigner/Ziegler oder Wittmann (Benko, 2007) (Aigner, et al., 2015) (Wittmann, 2012), sondern als kugelgeometrische Interpretation des Ansatzes von Dehn und Hadwiger (Dehn, 1900) (Dehn, 1902) (Sydler, 1965) (Jessen, 1968) (Gruber, 2007). Insofern führt die kugelgeometrische Interpretation mit der L-Invariante beide zunächst getrennten Ansätze zusammen und legt das ihnen zugrundeliegende allgemeinere Prinzip offen.

Insbesondere erhält im dargestellten Gedankengang die Bricard-Bedingung eine geometrisch-anschauliche Elementarisierung mit Hilfe von Kugeldreiecken an den beteiligten Polyederecken.

### *Geometrisch-anschauliche Interpretation*

Der Satz von Dehn-Hadwiger bzw. die Bricard'sche Bedingung lässt sich mit Hilfe der L-Invariante und der Betrachtung der Kugeldreiecke an den Polyederecken anschaulich interpretieren:

Bei der Zerlegung eines Polyeders in Teilpolyeder entstehen im Inneren Vollkugeln, auf einer Facette Halbkugeln und auf einer Kante Kugelzweiecke. Vergleicht man zwei Polyederzerlegungen, spielen die Vollkugeln im Inneren und die Halbkugeln auf den Facetten nur eine untergeordnete Rolle. Vielmehr bestimmen die (endlich vielen) Kugelzweiecke auf den Kanten der Ausgangspolyeder die Frage der Zerlegungsgleichheit. Sie kommt algebraisch in der Bricard'schen Bedingung zum Ausdruck.

Als bestimmende Größe ist dabei die im Vergleich zur Dehn-Invariante einfachere und elementarere L-Invariante als Maß für eine räumliche Innenwinkelsumme der Polyeder und Teilpolyeder vollkommen ausreichend. Sie hält den Blick offen für das entscheidende Spiel rationaler und irrationaler Kantenwinkel. Entscheidend ist dabei die sanfte Invarianzeigenschaft der L-

Invariante für Zerlegungen, die nur begrenzte Modifikationen der jeweils zugrundeliegenden Winkelsumme zulässt: Es werden allenfalls Kantenwinkel vervielfacht.

### *Interpretation der Bricard-Bedingung*

Im Ergebnis lässt sich die Bricard-Bedingung folgendermaßen geometrisch-anschaulich interpretieren: Wenn sich alle Kugelzweiecke, die durch eine Zerlegung an den Kanten des einen Polyeders  $P$  entstehen, und alle Kugelzweiecke, die durch eine Zerlegung an den Kanten des anderen Polyeders  $Q$  entstehen, nicht nur um ein Vielfaches einer Halbkugel unterscheiden, dann sind  $P$  und  $Q$  nicht zerlegungsgleich.

Dies führt uns zu einer abschließenden, positiven Formulierung der Bricard-Bedingung und des Satzes von Dehn-Hadwiger.

## **3.10 Zerlegungsgleichheit von Polyedern**

Wir formulieren die Interpretation der Bricard-Bedingung positiv:

Wenn  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleiche Polyeder sind, dann unterscheiden sich alle Kugelzweiecke, die durch eine Zerlegung an den Kanten des einen Polyeders  $P$  entstehen, und alle Kugelzweiecke, die durch eine Zerlegung an den Kanten des anderen Polyeders  $Q$  entstehen, nur um ein Vielfaches einer Halbkugel.

Dies führt uns zum

### **Satz (Zerlegungsgleichheit von Polyedern).**

Es seien  $P$  und  $Q$  zwei Polyeder mit Kantenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  bzw.  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ .

Wenn  $P$  und  $Q$  zerlegungsgleich sind, dann gibt es natürliche Zahlen  $m_1, m_2, \dots, m_p$  und  $n_1, n_2, \dots, n_q$ , so dass

$$\sum_i m_i \cdot \alpha_i - \sum_j n_j \cdot \beta_j = n_\pi \pi$$

für ein ganzzahliges  $n_\pi$  gültig ist.

**Beweis.** Die Aussage des Satzes (Dehn-Hadwiger, Bricard-Bedingung) wurde gemäß „nicht A impliziert nicht B“ in „B impliziert A“ umformuliert. ■



Rückblickend sehen wir, dass Würfel und reguläres Tetraeder TIII ebenso wie die Tetraeder TI und TII die im Satz formulierte, allgemeingültige Bedingung für Zerlegungsgleichheit nicht erfüllen (3.7, 3.8). Damit löst der Satz das dritte Hilbert'sche Problem vollumfänglich.

Wir erkennen, dass eine von Hilbert (2.1) ins Spiel gebrachte Betrachtung der Ergänzungsgleichheit für eine elementare Lösung des dritten Hilbert'schen Problems nicht nötig ist<sup>17</sup>. Schließlich erkennen wir, dass eine Betrachtung der Kantenlängen der Zerlegungspolyeder ebenfalls nicht nötig ist<sup>18</sup>. Darin besteht der Gewinn des vorgestellten Elementarisierungsansatzes.

---

<sup>17</sup> Vgl. hierzu auch die Beweisführungen in (Aigner, et al., 2000) und (Leppmeier, 2018).

<sup>18</sup> Vgl. hierzu auch die Beweisführungen in (Benko, 2007) (Wittmann, 2012) (Aigner, et al., 2015).

## 4 Didaktische Betrachtung

Die Ideengeschichte des dritten Hilbert'schen Problems wurde bereits in der Einleitung dargestellt. Es handelt sich zweifellos um einen mathematischen Bildungsgegenstand und um eine faszinierende Thematik (Hilton, 1991) (Kirchgraber, 2016) (Aigner, et al., 2000) (Aigner, et al., 2015) (Aigner, et al., 2016) (Behrends, et al., 2008) (Beutelspacher, 2003) (Beutelspacher, 2015).

Vielleicht mag sich schon Euklid daran versucht haben; erwiesenermaßen haben sich Gauß, Gerling und Hilbert damit beschäftigt. Bricard war in der Nähe einer Lösung des Problems, Dehn löste es mit zeitgemäßen algebraischen Hilfsmitteln. Es folgten im weiteren Verlauf Umstrukturierungen und Vereinfachungen, ein „Buchbeweis“ und weitere Elementarisierungsversuche.

Wir haben gesehen, dass für ein Verständnis der in 2.2 vorgestellten Dehn-Hadwiger-Lösung Grundkenntnisse in der Linearen Algebra (Lineare Unabhängigkeit, Basisergänzungssatz etc.) nötig sind, für die Benko-Wittmann-Elementarisierung sind immerhin noch zahlentheoretische Kenntnisse (Darstellung von Dezimalbrüchen in Stellenwertsystemen) erforderlich.

Für den in Kapitel 3 aufgezeigten Gedankengang genügt eine elementare Vorstellung von Kugeldreiecken; in einer minimalistischen Sichtweise sind bei einer weitergehenden Elementarisierung von Kugeldreiecken sogar nur Kugelzweiecke, Halbkugeln und Vollkugeln ausreichend. Das beteiligte Wechselspiel zwischen rationalen Zahlen und irrationalen Zahlen kann man vollständig in die Betrachtung von  $\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$  legen. Dazu ist eine eigene Veröffentlichung in Vorbereitung.

Eine detaillierte Betrachtung der Lösungsgeschichte des dritten Hilbert'schen Problems läßt verschiedene Ebenen von Elementarisierung sichtbar werden, die in (Leppmeier, 2018) grundsätzlich thematisiert werden. Eine noch tiefer gehende Analyse führt zur Theorie der kategorialen Bildung nach Klafki als pädagogische Grundlage des Elementarisierens und zum genetisch-exemplarisch-sokratischen Prinzip nach Wagenschein wie auch zum Ansatz des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf als bedeutende didaktische Prinzipien des Elementarisierens (ebd.).

Zusammenfassend eröffnet die dargestellte Thematik einen faszinierenden Blick auf Würfel und Tetraeder und gibt einen Einblick in eine spannende Frage der elementaren Raumgeometrie. Sie eignet sich für begabungsfördernde Unterrichtskonzepte im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (Ulm, 2018) (Weigand, et al., 2014).

## **Danksagung**

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Albrecht Beutelspacher und Herrn Prof. Dr. Ulm danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen.

## 5 Literaturverzeichnis

- Aigner, Martin und Behrends, Ehrhard [Hrsg.]. 2016.** *Alles Mathematik - Von Pythagoras zu Big Data*. 4. Auflage. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2016.
- Aigner, Martin und Ziegler, Günter M. 2015.** *Das BUCH der Beweise*. 4. Auflage. Berlin : Springer, 2015.
- . **2000.** *Proofs from the BOOK*. Berlin : Springer, 2000.
- Behrends, Ehrhard, Gritzmann, Peter und Ziegler, Günter M. 2008.** *Pi und Co. - Kaleidoskop der Mathematik*. Berlin : Springer, 2008.
- Benko, David. 2007.** A New Approach to Hilbert's Third Problem. *The American Mathematical Monthly*. 2007, Bd. 114, S. 665–676 .
- Beutelspacher, Albrecht. 2003.** Mathematik braucht jeder und: Sie kann Spaß machen. *KlettThemendienst - Schule Wissen Bildung*. 2003, Bd. 18, 4.
- . **2015.** *Wie man in eine Seifenblase schlüpft - DIE WELT DER MATHEMATIK IN 100 EXPERIMENTEN*. München : C.H. Beck, 2015.
- Bruder, Regina, et al. [Hrsg.]. 2015.** *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin : Springer, 2015.
- Ciesielska, D. & Ciesielski, K. 2018.** Math. Intelligencer. [Online] 2018. [Zitat vom: 5. Juni 2018.] <https://doi.org/10.1007/s00283-017-9748-4>.
- Conway, J.H. und Sloane, N.J.A. 1999.** *Sphere Packings, Lattices and Groups*. 3. Auflage. New York : Springer, 1999.
- Cromwell, Peter. 1964.** *Polyhedra*. Cambridge : Cambridge University Press, 1964.
- Dehn, Max. 1902.** Über den Rauminhalt. *Mathematische Annalen*. 1902, Bd. 55, S. 465-478.
- . **1900.** Über raumgleiche Polyeder. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*. 1900, Bd. 3, S. 345-354.
- Gauss, Carl Friedrich und Gerling, Christian Ludwig. 1927.** *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*. [Hrsg.] Clemens Schaefer. Berlin : Elsner, 1927.
- Gruber, Peter M. 2007.** *Convex and Discrete Geometry*. Berlin Heidelberg : Springer, 2007.

- Hartshorne, Robin. 2000.** *Geometry: Euclid and Beyond*. New York : Springer, 2000.
- Hilbert, David. 1900.** Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*. 1900, Bd. 3, S. 253-297.
- Hilton, Peter. 1991.** The Mathematical Component of a Good Education. [Hrsg.] P. Hilton, F. Hirzebruch und R. Remmert. *Miscellanea Mathematica*. Berlin : Springer, 1991, S. 145-154.
- Jessen, Borge. 1968.** The Algebra of Polyhedra and the Dehn-Sydler Theorem. *Math. Scand.* 1968, Bd. 22, S. 241-256.
- Kern, Hans und Josef, Rung. 1991.** *Sphärische Trigonometrie*. 3. Auflage. München : bsv, 1991.
- Kirchgraber, Urs. 2016.** Mathematik - das unerkannte Vergnügen. [Online] 2016. [Zitat vom: 27. Januar 2018.] <http://vsmp.ch>.
- Leppmeier, Max. 2018.** *Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und zur Schulentwicklung, ausgehend von der Mathematik*. [Hrsg.] Universitätsbibliothek Bayreuth (EPub). Bayreuth : ePub, 2018.
- . 1997. *Kugelpackungen von Kepler bis heute*. Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1997.
- Roth, Jürgen. 2018.** Prinzip von Cavalieri u.a. [Online] 2018. [Zitat vom: 2. März 2018.] [www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/.../cavalieri\\_dehn\\_pyramidenvolumen.pdf](http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/.../cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf).
- Schmitt, Hans und Wohlfarth, Peter. 1991.** *Mathematikbuch 9G*. 2. Auflage. München : Bayerischer Schulbuch Verlag, 1991.
- Sydler, J.-P. 1965.** Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comment. Math. Helv.* 1965, Bd. 40, S. 43-80.
- Ulm, Volker. 2018.** *Mathematische Begabung - Ein fachbezogenes Modell. Skript zur Vorlesung "Mathematik Lehren und Lernen"*. Bayreuth : s.n., 2018.
- Weigand, Gabriele, et al. 2014.** *Personorientierte Begabungsförderung*. Weinheim : Beltz, 2014.
- Wittmann, Erich Ch. 2012.** Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. Hilbertschen Problems. *Elem. Math.* 2012, Bd. 67, S. 45 - 50.