Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und in der Schulentwicklung, ausgehend von Mathematik

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von
Max Leppmeier
aus Geisenfeld

1. Gutachter: Prof. Dr. Volker Ulm
2. Gutachter: Prof. Dr. Dr. h.c. Albrecht Beutelspacher

Tag der Einreichung: 12.07.2018
Tag des Kolloquiums: 29.11.2018

Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und in der Schulentwicklung, ausgehend von Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die vorliegende Abhandlung ist geschrieben für Lernende.
Denn es geht um ihre Person, um ihre Bildung, um ihre bestmögliche Begabungsentwicklung, um ihre Freude an der Mathematik.

Mathematische Begabungsförderung steht im Zentrum dieser Arbeit. Sie ist aufgebaut auf dem aktuellen pädagogischen Ansatz einer personorientierten Begabungsförderung. Es geht daher um eine bestmögliche Entfaltung und Entwicklung der in der lernenden Person verankerten mathematischen Begabung.

Im ersten Kapitel wird der aktuelle Stand der Pädagogik einer personorientierten Begabungsförderung nach Weigand in ihrer Relevanz und in ihrer Inspirationskraft für mathematische Begabungsförderung zusammengefasst. Da es nicht um eine Vermessung oder Diagnose, sondern um eine Entfaltung von Begabung geht, werden grundlegende Begabungsentwicklungstheorien nach Gagné, Gardner, sowie Renzulli, Mönks, Heller und Perleth vorgestellt. Die Frage „Was ist mathematische Begabung?“ wird anhand des Modells nach Ulm beantwortet und im Ansatz von Hilton in Bezug zur Frage nach einer mathematischen Bildung gesetzt. Der Unterricht als institutioneller Rahmen für Begabungsförderung führt zur Frage nach den wirkungsvollsten didaktischen Prinzipien für einen begabungsfördernden Mathematikunterricht. Es werden das Prinzip der Elementarisierung auf der Basis des Bildungsbegriffs nach Klafki, das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip nach Wagenschein und das Prinzip des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf mit Blick auf ihre Wirksamkeit für Begabungsentfaltung dargestellt. Auch die Rolle eines emotionalen Prinzips Freude kommt zur Sprache. Diese Gedanken bilden die pädagogisch-didaktische Grundlage einer personorientierten Förderung mathematischer Begabungen.

Im zweiten Kapitel werden Unterrichtskonzepte zur personorientierten Begabungsförderung erarbeitet.

Einen reichen mathematischen Fundus stellt die Thematik der Kugelpackungen dar. Sie wird im Rahmen des Enrichment-Ansatzes unter Anwendung der erarbeiteten didaktischen Prinzipien in verschiedene Unterrichtskonzepte (Pluskurs, Additum, Akademiekonzept) transformiert. Die Darstellung der Unterrichtskonzepte erfolgt mit Hilfe von Kernideen auf der Basis der begabungsstiftenden mathematischen Bildungsgegenstände. Denn Kernideen verdeutlichen das Potential personorientierter Begabungsförderung; sie bilden die Brücke vom Lernenden über den Lehrenden zum Bildungsgegenstand aller. Entdeckungen von Gauß und Lagrange, von zeitgenössischen Mathematikern wie L. Fejes Toth und Wills kommen zur Sprache. Die zu erarbeitenden Unterrichtskonzepte können keine Kopiervorlagen für Arbeitsblätter oder andere Unterrichtsmaterialien sein, denn die jeweilige Lernsituation muss sich personorientiert entwickeln. Ergänzend wird unterrichtsbegleitendes, projektgebundenes Enrichment (Facharbeiten, Wettbewerbsarbeiten) betrachtet und eine Evaluation langjähriger Talententwicklungsprozesse vorgenommen.
Auch aus dem Themenkomplex um Hilberts drittes Problem lassen sich erfolgversprechende Unterrichtskonzepte zur mathematischen Begabungsförderung nach dem Enrichment-Ansatz ableiten. Sie münden in der Frage, warum sich ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nicht in drei kongruente Pyramiden zerlegen lässt, und in der elementarisierten Antwort darauf. Die Beobachtungen aus der didaktischen Aufbereitung der Zerlegungsungleichheit von volumengleichen Körpern und der wesentlichen Rolle der beteiligten Kantenwinkel eröffnen darüber hinaus weitere Perspektiven für die Thematik der Kugelpackungen. Aus dem Vergleich zweier unterschiedlicher Unterrichtskonzepte zur Zerlegungsungleichheit von Würfel und Tetraeder können Erkenntnisse über unterschiedliche Ebenen der Elementarisierung gewonnen werden.
Wie nah am Curriculum kann personorientierte Begabungsförderung gelingen? Eine exemplarische Antwort auf diese Frage wird in einem Analysis-Konzept in zwei Strängen gesucht, aber auch in einem curricularen Unterrichtskonzept zum Thema Unendlichkeit. Es wird – wiederum exemplarisch – ein Geometrie-Konzept in zwei Strängen untersucht, und es werden Fensterkonzepte im gymnasialen Anfangsunterricht betrachtet. Stets wird die besondere Begabungswirksamkeit dieser Unterrichtskonzepte auf der Grundlage der im

ersten Kapitel herausgearbeiteten Erkenntnisse analysiert und teilweise in Bezug zu aktueller didaktischer Lehrmeinung nach Grafrath et. al. und Weigand et. al. gesetzt.

Im dritten Kapitel wird die Schule als institutioneller Rahmen für personorientierte Förderung mathematischer Begabungen thematisiert. Was kann Schule für gelingende mathematische Begabungsförderung tun? Welche Impulse erhält Schule aus einer gelingenden Begabungsförderung? Der gesellschaftliche Auftrag an eine begabungsgerechte Schule wird in seiner Relevanz für die Symbiose aus Begabungsförderung und Schulentwicklung betrachtet. Es werden Auswirkungen einer personorientierten mathematischen Begabungsförderung auf wesentliche Felder der Schulentwicklung wie Organisationsentwicklung, Personalentwicklung und Unterrichtsentwicklung untersucht. Dabei wird insbesondere auf Positionen von Hattie eingegangen. Mit einem Ausblick auf die Symbiose von mathematischem Denken und Tun und gesellschaftlicher Entwicklung, die in einer Alphabetisierung der Mathematik gelingen kann, endet die Abhandlung.

Sie ist nicht zuletzt geschrieben für Lehrende. Denn es kommt auf ihre Haltung gegenüber der mathematischen Begabung, der mathematischen Neugierde und dem mathematischen Interesse der Lernenden an. Ihre Möglichkeiten für gelingende Begabungsförderungsprozesse sind unerschöpflich.

Herrn Prof. Dr. Ulm danke ich an dieser Stelle für sein Vertrauen und seine in jeder Hinsicht äußerst kompetente Betreuung. Ebenso möchte ich allen Personen danken, die die Erstellung dieser Arbeit begleitet und unterstützt haben.

2 Personorientierte Förderung mathematischer Begabungen

Im vorliegenden Kapitel werden die pädagogischen und didaktischen Grundlagen für Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und zur personorientierten Begabungsförderung in der Schulentwicklung, ausgehend von der Mathematik, gelegt.
Der erste Abschnitt beschäftigt sich fachunabhängig mit dem Begabungsbegriff und den Möglichkeiten einer personorientierten Begabungsförderung. Die Prämisse lautet: Personen sind nicht nur begabt, man kann sie sogar „begaben" (2.1.1). Ein Schlüssel dazu ist der Ansatz des personorientierten Lehrens und Lernens (2.1.2), der nur auf dem Fundament einer wertegeleiteten, personorientierten Schulentwicklung gedeihen kann (2.1.3).
Der zweite Abschnitt behandelt die Frage nach der spezifischen mathematischen Begabung und ihrem Entwicklungspotenzial. Begabungsentwicklungstheorien stehen am Beginn (2.2.1). Vorgestellt werden ein fachbezogenes Modell für mathematische Begabung (2.2.2) und ein persönlich formuliertes, verallgemeinerbares Ziel für mathematische Bildungsprozesse (2.2.3). Auf dieser Basis werden wesentliche didaktische Prinzipien für einen personorientierten, begabungsfördernden Mathematikunterricht begründet (2.2.4). Schließlich wird auf die Bedeutung der Freude für gelingende mathematische Begabungsförderung eingegangen (2.2.5).

2.1 Personorientierte Begabungsförderung – aktueller Stand

Der Wert von Begabung ist seit alters her unbestritten. Die Suche nach dem Weg der richtigen Begabtenförderung ist so alt wie die Frage nach der richtigen Bildung und Erziehung.

Personorientierte Begabungsförderung lenkt den Fokus von der Fachwissenschaft und richtet ihn primär auf die Begabung der lernenden Person, sekundär auf die lehrende Person, tertiär auf die das Lernumfeld gestaltenden Personen.

Denn „von der Person des Kindes als Subjekt seiner Bildungsbiografie, von der Persönlichkeitsbildung als Ziel von Bildungsprozessen wird gerade in der Hochbegabtenförderung zu selten gesprochen.“[1]

Im Rahmen des von der EU geförderten Sokrates-Programms „Lebenslanges Lernen“ entstand aus einem Comenius-Projekt die Initiative „eVOCATIOn“, die sich selbst folgendermaßen definiert:

> *„Grundlage ist eine personorientierte Pädagogik, in der es darum geht, die einzelnen Schüler/innen in ihren individuellen Potenzialen sowie als Subjekte ihrer eigenen Bildungs- und Begabungsprozesse wahrzunehmen, zu begleiten und zu unterrichten. Die personorientierte Pädagogik sieht Schüler/innen nicht nur als Individuen, sondern als Partner, die für ihre Lernprozesse, für ihre Bildungswege und für ihr soziales Handeln auch selbst verantwortlich sind. ... Dieser Anspruch einer personorientierten Pädagogik gelingt nur, wenn die Lehrenden zugleich Lernende sind.“ (Weigand, et al., 2017)*

Die Aufarbeitung des Erfahrungswissens der am Projekt beteiligten Schulen für die schulpädagogische Theorie erfolgte profund in (Weigand, et al., 2014). Dieses exzellente Kompendium bildet das pädagogische Fundament der vorliegenden Arbeit. Es konzentriert sich auf die drei Kernbereiche *Personen „begaben“*, *Personorientiertes Lehren und Lernen* und *Personorientierte Schulentwicklung*. Mit Blick auf ihre Relevanz für die mathematische Begabungsförderung an einem Gymnasium und Auswirkungen für die Schulentwicklung werden hier die für ein

[1] Dr. Ingmar Ahl, Vorstand der Karg-Stiftung, zitiert nach (Weigand, et al., 2014, S.10)

Verständnis der folgenden Kapitel wesentlichen Begriffe und Gedankengänge aus (Weigand, et al., 2014) exzerpiert und zusammengefasst.

Die dort vorgenommene pädagogische Begründung einer personorientierten Begabtenförderung benennt Prämissen und führt in die Schulpraxis ein, sie stellt das begabte Kind in den Mittelpunkt. „Und das nutzt hochbegabten wie allen Kindern und Jugendlichen!“ (Weigand, et al., 2017)

2.1.1 Personen „begaben“

Die Formulierung der Überschrift zeigt schon, dass es nicht um ein bloßes Akzeptieren von fachlichem Begabtsein einer Person geht, sondern um eine aktive Zuwendung an die begabte Person, um ein aktives „Begaben“, das sich zwischen den extremen Ausprägungen eines Begabtwerdens und eines Sichbegabens abspielt. Nach einer grundlegenden Klärung der Begriffe Person und Begabung im Sinne von (Weigand, et al., 2014) erfolgt eine Betrachtung der Begriffe Begabung und Hochbegabung. Schließlich geht es um den Ort des Begabungsprozesses: die Schule und das allgemeine Lernumfeld.

2.1.1.1 Person und Begabung

Wir stellen die Person des Schülers als die zu begabende Person in den Ursprung der Betrachtungen.
Die anthropologische Frage nach dem Menschen ist eine Grundfrage der Erziehung und Bildung und damit der Pädagogik und Didaktik. Während der Begriff des Menschen in der Hauptsache deskriptiv verwendet wird, zielt der Personbegriff[2] auf eine subjektive und eine normative Ebene. Für die nachfolgenden Überlegungen soll von einer jüdisch-christlich-antiken Philosophie, nach der jeder Mensch Person ist, und der Auffassung der

---

[2] von lat. per-sonare - durch-tönen,
bzw. lat. per-sona - Maske (des Schauspielers im Theaterstück)

Menschenrechte, nach der jede Person Anspruch auf Anerkennung ihrer personalen Würde (4.1.1.1) hat, ausgegangen werden.

Aus der anthropologischen Frage leitet sich die teleologische Frage nach Richtung und Ziel von Erziehungs- und Bildungsprozessen her, die eine Grundfrage der Pädagogik ist. Sie impliziert die Frage nach Richtung und Ziel von Begabungsprozessen, die personorientiert betrachtet werden soll.

Den Menschen vom Prinzip her als Person zu denken, bedeutet, ihn in seiner personalen Würde mit Freiheit, Sprache und Vernunft auszustatten in dem Auftrag, diese im Laufe seines Lebens zur Entfaltung zu bringen. Diese Kernidee findet sich bei vielen pädagogischen Klassikern (Herder, Kant, Herbart, Humboldt) wieder. Wilhelm von Humboldt formuliert dies in seinem Fragment „Theorie der Bildung des Menschen“ so:

> *„Dem Begriff der Menschheit in unserer Person, sowohl während der Zeit unseres Lebens, als auch noch über dasselbe hinaus, durch die Spuren des lebendigen Wirkens, das wir zurücklassen, einen so großen Inhalt, als möglich, zu verschaffen. ... Diese Aufgabe löst sich allein durch die Verknüpfung unseres Ichs mit der Welt zu der allgemeinsten, regesten und freiesten Wechselwirkung.“ (Weigand, et al., 2014 S. 28)*

Die Dialektik des Personwerdungsprozesses nach Humboldt (4.1.1.5) als Bildungsprozess über das gesamte Leben lässt sich auf die den Bildungsprozess mitkonstituierenden Begabungsprozesse herunterbrechen.

Person zu sein bedeutet demnach nicht nur ein Prinzip von Geburt an, sondern einen sich über die Lebensspanne und in seiner Wirksamkeit noch über den Tod hinaus erstreckenden Prozess.

Eine weitere Annahme ergänzt das Personsein und Personwerden des sich bildenden Menschen:

> *„Die Annahme, dass das Personsein des Menschen prinzipiell die Autorschaft über den Verlauf des eigenen Lebens bedeutet, und davon auszugehen ist, dass sich die Begabungsentfaltung und –gestaltung als ein Prozess über die gesamte Lebenszeit erstreckt, beinhaltet sowohl eine individuelle Dimension als auch eine gesellschaftliche. ... Personales Leben heißt, sein Leben selbst in die Hand zu nehmen, es eigenständig und verantwortlich zu gestalten ... Zum anderen haben die Gesellschaft und ihre Institutionen im Sinne der „Fürsorge“ und Solidarität auch für die Bedingungen und Voraussetzungen zu sorgen, die dem Einzelnen ein derartiges Leben in Freiheit und Selbstbestimmung ermöglichen.“ (Weigand, et al., 2014 S. 29)*

Damit kommt zunächst noch abstrakt, jedoch schon klar erkennbar die Relationalität der Person und des sozialen Umfeldes zum Ausdruck (2.1.1.3). Für Lehrpersonen bedeutet dies, dass sie in einer auf gegenseitiger Anerkennung, auf Argumentation und Dialog angewiesenen Beziehung zu den Lernenden stehen (ebd.). Relationalität bedeutet darüber hinaus noch radikaler und vieldimensionaler das Verhältnis zu und mit sich selbst, zu dem und den Anderen, zur Gesellschaft, zum Lerninhalt, zur Welt und am Ende zum Absoluten (2.2.3, 2.2.5).

Aufbauend auf diesen Grundannahmen zum Personbegriff kann die „Person" das Fundament einer pädagogischen Begabungstheorie bilden. Sie kann für den Bildungsprozess und die Begabungsprozesse, für die Gestaltung von Unterricht (3) ebenso wie für die Gestaltung von Schule als Institution (4) grundlegend und leitend sein.

> *„Eine Schule, die sich auf das Personprinzip stützt, verpflichtet sich zur Unterstützung der personalen Mündigkeit, sie organisiert die Erziehungs- und Bildungsprozesse in der Art, dass sie den Heranwachsenden ermöglichen, vielfältige Erfahrungen zu machen, sich Wissen anzueignen und kritisch zu reflektieren, sich intensiv mit Fragen und Problemen auseinanderzusetzen und gestaltend tätig zu werden." (Weigand, et al., 2014 S. 31)*

Eine Pädagogik, die auf dem Personprinzip gründet, ist immun gegen jede Art von Fremdbestimmung (2.1.3.2). Sie hilft Lernenden und Lehrenden, sich gegenüber sachfremden, auch modernistischen Einflussnahmen zu behaupten und stets nach pädagogischen Prinzipien zu entscheiden und zu handeln. Das Personprinzip ist insbesondere in der Begabtenförderung ein wertvoller Maßstab, um pädagogisch begründete Entscheidungen und Maßnahmen treffen zu können (2.1.2., 2.2.4, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.2.3.1, 3.3.2.1, 3.4.1.1, 3.4.1.3, 3.4.2.1, 3.4.2.5) Weigand weist darauf hin, dass mit einem kritisch-konstruktiven Blick Theorie und Praxis im konkreten Handeln und Entscheiden vermittelt werden können.

> *„Die Akteure einer „Schule der Person" müssen ihre pädagogischen Entscheidungen und Handlungen immer wieder neu verantworten und argumentativ vertreten. Dabei wäre es ein Irrtum zu meinen, konkretes Tun könne linear aus einer vorhandenen wissenschaftlichen Theorie abgeleitet werden. Ebenso wenig können Modelle, die an der einen Schule gut funktionieren, auf eine andere Schule unverändert*

> *übertragen werden. Vielmehr kommt es darauf an, sich am Prinzip Person zu orientieren, um in der spezifischen Situation angemessen entscheiden und handeln zu können.“ (Weigand, et al., 2014 S. 32)*

Diese Ausschärfung zeigt, dass das Personprinzip eine stete Herausforderung an alle Akteure darstellt (2.1.2, 2.1.3.2). Weiterhin gilt das für Schulen Gesagte auch für den Unterricht und Unterrichtskonzepte (3).
Es ist empirisch erwiesen, dass sich an Schulen, an denen das Personprinzip ernst genommen wird, die somit von einem gemeinsamen pädagogischen Ethos geprägt sind, Schüler und Lehrkräfte wohler fühlen und bessere Leistungen erzielen (Weigand, et al., 2014 S. 32) (2.2.5).

Bislang wurde der Begriff der Begabungsprozesse teils synonym zu Bildungsprozessen, teils im Sinne von Bildung konstituierenden Prozessen verwendet. An dieser Stelle soll der für die vorliegende Arbeit zentrale Begriff der Begabung auf den Personbegriff zurückgeführt werden. Es stellt sich auch die Frage, welche Folgerungen sich aus dem Personbegriff für Begabungsprozesse ergeben.
Jede Person verfügt anthropologisch betrachtet über eine eigene, personbezogen unterschiedlich ausgeprägte Begabung[3], die als „Gabe“ ein Potential darstellt (2.2.1.1, 2.2.1.2). Zur in der Person verankerten Begabung tritt als Zweites die Anregung von außen, die „Welt“ im Sinne Humboldts; sie ist in seiner bildungstheoretischen Auffassung auch anthropologisch fundiert. Als Drittes kommt hinzu der soziale Kontext.
Ebenso wie der Humboldtsche Bildungsprozess läuft der Begabungsprozess dialektisch ab. Begabungen entfalten sich zwischen den Potenzialen der begabten Person und den Anregungen von außen in einem Prozess der Wechselwirkung zwischen individuellem Habitus und sozialem Umfeld (2.2.1.3, 2.2.2). Dieser Prozess verläuft in Kindheit und Jugend besonders intensiv, ist aber auf ein ganzes Leben hin angelegt.
Mit Blick auf den sozialen Kontext ist hervorzuheben, dass zu den in der Person begründeten Potenzialen eine günstige familiäre und schulische Lern- und

[3] Hier wird in pädagogischer Hinsicht der Einfachheit halber von einer Begabung gesprochen. Die nachfolgenden Betrachtungen stellen keine Einschränkung der Ausdifferenzierung in mehrere Begabungen dar.

Bildungsumgebung, eine individuelle Förderung und Herausforderung und eine personale Begleitung treten muss, damit sich das Begabungspotenzial entfalten kann (2.2.1.1, 2.2.1.3, 2.2.4.3, 2.2.5).
Schließlich verlaufen Begabungsprozesse nicht linear, sondern dynamisch. Die einmal entfalteten Potenziale können sich je nach Art und Intensität der Anregungen und Anforderungen sowie der Bildungsumgebung weiterentwickeln und aktiv vom Einzelnen gestaltet werden oder auch verkümmern (2.2.1.1, 2.2.1.3, 2.1.3.2, 2.1.3.3).
Aus der im Personprinzip begründeten Autorschaft über den Bildungsverlauf des eigenen Lebens lässt sich ein weiterer Aspekt einer pädagogischen Begabungstheorie ableiten. Wenn die begabte Person Subjekt des Bildungsprozesses und damit des Begabungsprozesses ist, dann müssen einerseits die entsprechenden Begabungsentfaltungsbedingungen für die Heranwachsenden geschaffen werden und andererseits erwächst daraus eine Verantwortung, die von den Kindern und Jugendlichen nach und nach angenommen werden soll (2.1.2, 2.1.3, 2.1.3.2).

Der Ort des schulischen Begabungsprozesses ist der Unterricht. Nimmt man das Personprinzip ernst, bedeutet dies einen Paradigmenwechsel im Unterricht: Abkehr vom Fach, Hinwendung zur Person des Schülers.
Weigand stellt klar:

> *„Die fachlichen Aspekte, die Ermöglichung von Einsichten und Erkenntnissen, von gelingenden Lehr-/Lernprozessen, ein anregender und fordernder Unterricht behalten ihre Wichtigkeit, sie sind für die Begabungsförderung geradezu zentral. Aber sie sind nicht Selbstzweck, sondern haben Dienstfunktion. Und demzufolge sind sie immer in Beziehung zu den Besonderheiten und Potenzialen des Einzelnen zu sehen." (Weigand, et al., 2014 S. 34f.)*

und sie fährt fort:

> *„Insofern kann Begabungsförderung nicht vom (bestehenden) System Schule her gedacht werden, nicht von den Standards, von Lehr- oder Bildungsplänen, von Lehr-/Lernprozessen und auch nicht von der Didaktik und Methodik her, sondern von den Potenzialen der einzelnen Schülerinnen und Schüler. Das einzelne Kind, der Jugendliche, … werden … zum Prinzip der Begabungs- und Begabtenförderung." (Weigand, et al., 2014 S. 35)*

Diese Prämissen stellen hohe Erwartungen an Lehrkräfte, die berufen sind, Schülerbegabungen zu entfalten; sie bedeuten aber auch eine Herausforderung für Schüler, Eltern und Administration (2.1.3, 4.2.3). Sie betreffen die Schulentwicklung, fordern gar „die Etablierung einer neuen Schulkultur“ (Weigand, et al., 2014 S. 36) (2.1.1.3, 4). Die letzte Verantwortung für ein Gelingen von Bildungs- und Begabungsprozessen für alle trägt die Gesellschaft (2.1.3.2, 4.1).

2.1.1.2 Begabung versus Hochbegabung

Der Begriff der Hochbegabung ist eher in der Psychologie angesiedelt, während der Begriff der Begabung vornehmlich der Pädagogik zugeordnet wird.
Hochbegabung basiert auf dem Konzept des Intelligenzquotienten. Sie ist das Ergebnis einer wissenschaftlichen Testung, die den Ansprüchen der Objektivität, der Reliabilität und Validität genügen muss. Als hochbegabt gilt, wer einen IQ von 130 oder mehr aufweist und damit zu den besten 2 Prozent der Vergleichsgruppe gehört. Dieser Aspekt ist mehrfach von Ulm aufgearbeitet worden (Ulm, 2009) (Ulm, 2018). An einem Gymnasium, eine selektive Auswahl bei einer Übertrittsquote von 30% zu Grunde gelegt, bedeutet dies, dass ein Jahrgang von 100 Schülern im statistischen Mittel 6 bis 7 hochbegabte Schüler aufweist.
Gagné differenziert Hochbegabung weiter aus. Er unterscheidet fünf Level der Hochbegabung (Abbildung 1). Legt man den Maßstab einer milden Hochbegabung an, so befinden sich in einem Referenzjahrgang durchschnittlich 30 bis 35 mild hochbegabte Schüler.

Level	Label	Ratio in General Population	IQ Equivalents
5	Extremely	1:100,000	165
4	Exceptionally	1:10,000	155
3	Highly	1:1,000	145
2	Moderately	1:100	135
1	Mildly	1:10	120

Abbildung 1 Niveaus von Hochbegabung, entnommen aus (Gagné, 2007 S. 97)

Unter der Annahme, dass ein IQ-Test zur Hälfte eher mathematische Fähigkeiten und zur anderen Hälfte eher nichtmathematische Fähigkeiten testet und am Ende ein Mittelwert gebildet wird, müsste man in dem obigen Bild von 2% Hochbegabten auch noch 2% mathematisch Hochbegabte unter den nicht allgemein Hochbegabten in den Blick nehmen.
Zusammenfassend zeigen beide Betrachtungen, dass ein empirischer Maßstab mit Blick auf Hochbegabung im Allgemeinen und mit Blick auf mathematische Hochbegabung im Besonderen sehr relativ ist und als alleiniger Maßstab keinesfalls zu belastbaren Schlussfolgerungen für die Förderung mathematischer Hochbegabung führen kann.

Weigand spricht von der Unmöglichkeit der Vermessung von Begabung (Weigand, et al., 2014 S. 38). Diese Position wird so auch in vorherrschenden Begabungsmodellen vertreten (Gagné, 2007) (Gardner, 2011) (Mönks, 1992) (Renzulli, et al., 2001) (Perleth, 2010).[4] Eine wissenschaftliche Fundierung des Begabungsbegriffes ist auf sehr unterschiedliche Weise möglich und geschieht in der Regel immer mit Blick auf das Ziel der jeweiligen Untersuchungen (Hörner, 2011) (Renger, 2009) (Schick, 2007).
Die pädagogische Fundierung der Begabung gelingt in einer philosophisch-hermeneutischen Perspektive leicht. Wie in 2.1.1.1 ausgeführt, konstituieren Begabunsgprozesse den Bildungsprozess der sich bildenden Person. Weder der Personbegriff noch der in der Person verankerte Bildungsbegriff kennen eine analoge Unterscheidung von Begabung versus Hochbegabung, so dass in dieser Weise aus dem Personprinzip eine solche Unterscheidung nicht abgeleitet werden kann.

> *„Dementsprechend kann es auch bei der Frage der Begabtenförderung nie nur um die Diagnostizierung von Potenzialen auf der einen und um ergebnisorientierte „effiziente“ Maßnahmen zur Förderung einzelner*

---

[4] „Diese Überlegungen führen auch dazu, im pädagogischen Feld weitgehend Abstand von einer punktuellen psychologischen Diagnostik zu nehmen und stattdessen die Aufmerksamkeit, Beobachtungs- und Reflexionsfähigkeit der Lehrkraft gegenüber dem Schüler und der Schülerin im Sinne einer pädagogischen Prozessdiagnostik zu stärken, aber auch die Reflexionsfähigkeit der Schülerin und des Schülers gegenüber sich selbst aufzubauen.“ (Weigand, et al., 2014 S. 44)

Fähigkeiten auf der anderen Seite gehen, sondern um die Ermöglichung umfassender und auf ein Leben hin angelegter Lern- und Bildungsprozesse." (Weigand, et al., 2014 S. 42)

Der Bildungsprozess enthält grundlegende Aspekte, die so auch für die Entfaltung und Förderung von Begabungen zutreffen:

- *„Bildungs- und Begabungsprozesse sind inhalts- und themengebunden. ...*

Ob ... die Beschäftigung mit einem Thema zu einer bildenden Erfahrung und für Begabungspotenziale wirksam wird, hängt davon ab, inwieweit sie für den Einzelnen bedeutsam wird und sie/er aktiv damit umgeht. ...

- *Bildung und die Entfaltung von Begabungen beinhalten die Auseinandersetzung mit Dingen und Gegenständen sowie den sozialen Austausch, den Dialog. ...*
- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat ein reflexives Moment. ...*

Die Reflexion ist ... bedeutsam für ... die Schülerin und den Schüler. Sie trägt dazu bei, sich das, womit sie sich beschäftigen und was sie lernen, bewusst zu machen und zu verstehen, sich anzueignen und auch bewusst damit umzugehen.

- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat letztlich eine ethische Dimension. ..." (Weigand, et al., 2014 S. 42f.)*

Diese Aspekte werden so auch in einem begabungsfördernden Unterricht und einer begabungsfördernden Schulentwicklung ihren Niederschlag finden (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3, 3, 3.2.3.1, 3.4.2, 4).

Festzuhalten ist ferner, dass Begabung immer auch als soziokulturelles Konstrukt (Gardner, 2011) und als Ergebnis einer Zuschreibung zu sehen ist. Dies trifft insbesondere auch auf den mathematischen Begabungsbegriff zu (2.2.2, 2.2.3). Im indischen Kulturkreis wird mathematische Begabung zuerst zahlentheoretisch akzentuiert, während sie in Deutschland in ihrer algebraischen, geometrischen, analytischen und stochastischen Akzentuierung gesehen wird. Nicht zuletzt erfolgt die Zuschreibung mathematischer Begabung auch im historischen Kontext. Sie ist in der Gegenwart anders ausgeprägt als in der Antike (2.2.3).

Mit Blick auf Schulentwicklungsprozesse ist festzustellen, dass Begabungsförderung zuallererst bedeutet, das Potenzial aller Schüler auszuschöpfen (2.1.1.1). Bleiben besondere Fähigkeiten einer Person unerkannt oder werden sie auf Dauer ignoriert, so sind nicht nur deren individuelle Entwicklungsmöglichkeiten gefährdet, sondern es kann auch zu Verhaltensauffälligkeiten oder störendem Verhalten kommen.

> *„Hochbegabte Kinder können auf diese Weise zu Analysatoren bzw. Katalysatoren eines Schulsystems werden, das nicht oder zu wenig in der Lage ist, sich den divergierenden Voraussetzungen, Fähigkeiten und Interessen von Kindern anzupassen bzw. pädagogische Antworten auf die Unterschiedlichkeit von Kindern zu finden." (Weigand, et al., 2014 S. 46)*

Der Wunsch der begabten Kinder und ihrer Eltern hinsichtlich des Umgangs mit (Hoch)Begabung im schulischen Kontext wird unmissverständlich geäußert: Weder Kinder noch ihre Eltern wollen eine Zuschreibung einer Hochbegabung. Sie wünschen sich einen „Unterricht, der nicht langweilt, sondern sie fordert, der interessant ist und Spaß macht" (ebd.). Kinder wollen anerkannt sein, „dazugehören und nicht ausgeschlossen sein" (ebd.). Kurzum: „Man wünscht sich, dass die Kinder ihr Potenzial ausschöpfen, egal wo dieses Potenzial anfängt oder endet." (ebd.) Diesem Wunsch in einem begabungsfördernden Mathematikunterricht gerecht zu werden, stellt eine besondere Herausforderung an alle beteiligten Personen dar (2.1.1.5, 2.2.1.1).

2.1.1.3 Personorientierte Schulkultur

Die Schule ist als Bildungsinstitution zugleich auch wesentlicher Teil der Relationalität zwischen der zu begabenden Person und der zu begreifenden Welt. Eine Schule, die personorientierte Begabungsförderung unterstützen möchte, stellt den lernenden Schüler vor den zu vermittelnden Stoff (2.1.1.1).

Hackl stellt fest:

> *„Die Orientierung an den Personen und deren Lern- und Bildungsprozessen als dem grundlegenden Paradigma einer personorientierten Schulkultur hat die Kraft, die bisher gängigen Orientierungen der Schule nach und nach zu verändern. Veränderungsprozesse auf dieser Ebene der Schule gehen eher von*

> *Einstellungs- und Haltungsveränderungen[5], die eine an den Personen orientierte Wertsetzung repräsentieren, als von einer weiteren Optimierung methodischer Praktiken oder strukturellen Setzungen aus." (Weigand, et al., 2014 S. 48f.)*

Hackl strukturiert eine personorientierte Schulkultur in drei konzentrischen Sphären (Prinzipien, Werte, Haltungen), in deren Mittelpunkt die lernende Person mit ihren Begabungen steht (Abbildung 2). Er leitet ausgehend vom Personbegriff mit den charakteristischen Merkmalen (auch: *Prinzipien*) Würde, Relationalität, Autorschaft, Prozess (2.1.1.1) vier zentrale *Werte* für das schulische Lernen ab (Weigand, et al., 2014 S. 49):

Die Individualität der Person mit ihrer Einmaligkeit, mit ihrem Recht auf Eigenheit und letztlich mit ihrer Würde (2.1.1.1, 4.1.1.1) begründet den Wert des *Eigensinns* (auch: *Selbstbestimmung*, *Autonomie*).
Die Relationalität der Person, insbesondere das Eingebundensein in den sozialen Kontext, begründet den Wert der *Beteiligung* oder *Partizipation* (2.1.2.2., 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.2, 3.1.6.4, 3.2.3.1, 3.3, 3.3.2, 3.4, 4.1.2, 4.2, 4.3).
Die Autorschaft für den der Person eigenen Bildungsprozess begründet den Wert der *Verantwortung* (2.1.2.2, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.7, 4.1.1.1, 4.1.1.3, 4.2.2.1).
Die Prozessgestaltung der Begabungsförderung begründet den Wert der *Leistung* (2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2).
Diese vier aus dem Personbegriff abgeleiteten Werte stehen in einem inneren Zusammenhang. Jede Überbetonung eines Wertes kann das Wertegefüge aus dem Gleichgewicht bringen und letztendlich zu einer Entwertung des Wertes führen.

Haltungen spielen nicht nur in (Hattie, 2017) (Hattie, et al., 2018) eine bedeutende Rolle, sie gelten im Ansatz der personorientierten Schule als Treppenaufgänge zu den Werten. Entsprechend sieht Hackl vier mit den Werten korrespondierende Haltungen (Weigand, et al., 2014 S. 54ff.).

[5] vgl. auch (Hattie, 2017) (Hattie, et al., 2018)

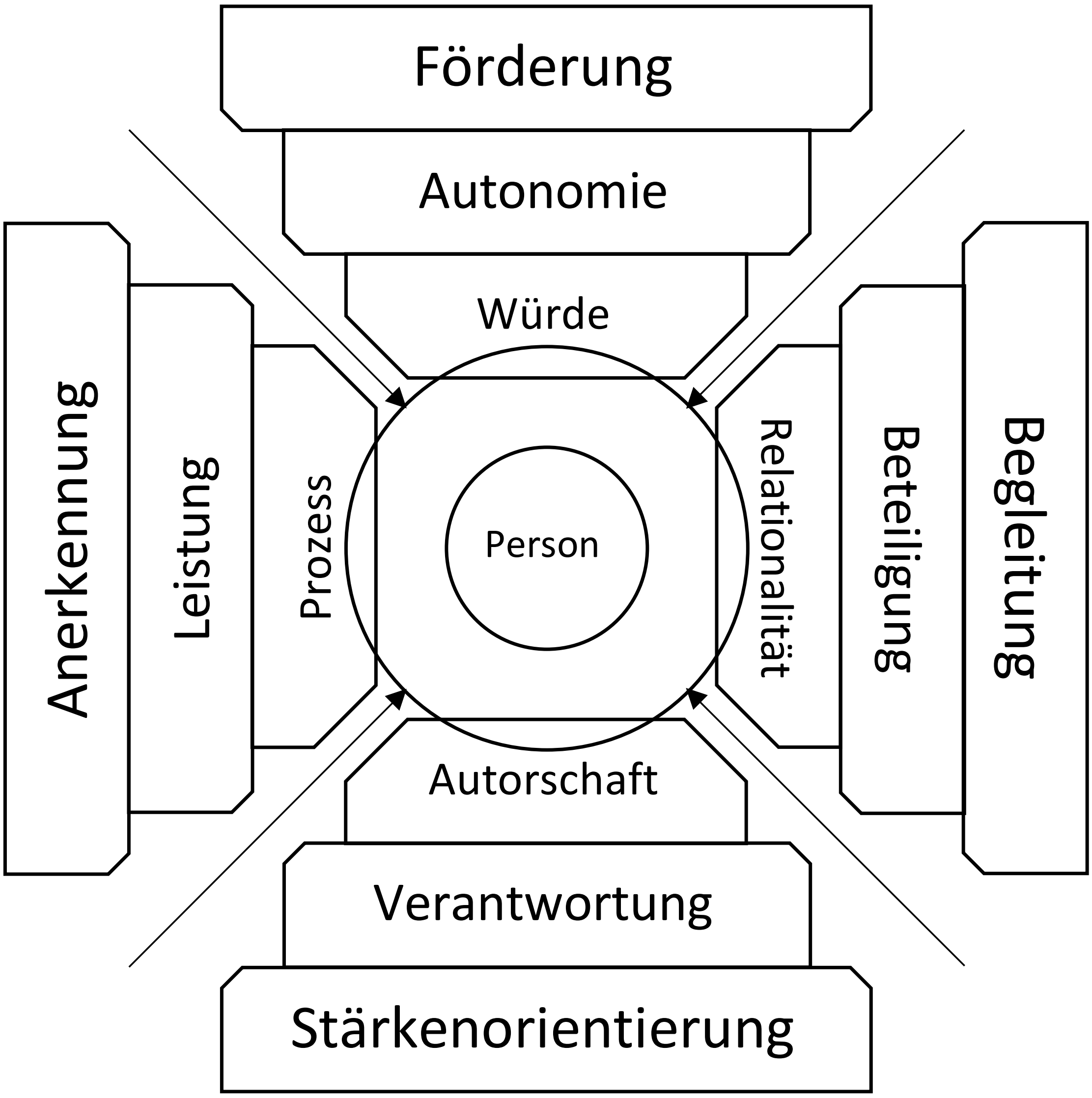


Abbildung 2 Personorientierte Schulkultur (Haltungen, Werte, Prinzipien) nach Hackl

Die Haltung der *Förderung* der zu begabenden Person unterstützt sie in ihrer Selbstbestimmtheit und in der Einmaligkeit ihres eigenen Bildungsprozesses. Auf dem Personbegriff aufbauend erhält der Förderbegriff so eine sehr grundsätzliche Bedeutung. Eine personale Förderung nimmt die Begabungspotenziale und die Kompetenzen in den Blick (2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3, 4). Dies sind Eigenschaften, Interessen, Optionen, Kenntnisse, Fähigkeiten, etc. Eine soziale Förderung unterstützt die Relationalität (2.1.1.1, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.2.4.3, 4) und fördert Dialog, Kooperation, Teamfähigkeit, Engagement etc. Die fachliche Förderung

unterstützt die Ausbildung der fachlichen und methodischen Kompetenzen (2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 3). Dazu gehört die Vernetzung des Wissens, die Vertiefung der Kompetenzen, die Domänenbildung, der kritische Umgang mit Wissen neben der fachlichen Förderung und der Ausgleichsförderung von Defiziten.
Jegliche Förderung von Begabungen hat auf der Basis des Personbegriffs sehr weitreichende und sehr tiefgehende Auswirkungen: Sie unterstützt im Bewusstsein um die Einmaligkeit der Person die Autonomie des lernenden Schülers und prägt die Individualität und Würde der sich bildenden Person.
Die Haltung der *Stärkenorientierung* begründet eine Pädagogik der Herausforderung, des Zutrauens und der Unterstützung ebenso wie eine kritische Feedbackkultur (2.1.1.2, 2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.3, 2.2, 3, 4). Sie stellt ein Gegengewicht zur oft dominanten Defizitkultur dar, unterstützt den Wert der Verantwortung des lernenden Schülers und prägt die Autorschaft des Bildungsprozesses.
Eine Haltung der *Anerkennung und Achtsamkeit* ist das pädagogische Fundament für den Wert der Leistung (2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.1.2.6, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 3.1.6.4). Erfolgreiches Lernen ist „wesentlich auch ein Ergebnis der anerkennenden Beziehungen zwischen den Lehrpersonen und den Schülerinnen und Schülern sowie der Schülerinnen und Schüler untereinander“ (Weigand, et al., 2014 S. 54ff.). Eine Haltung der Anerkennung schließt Kritik und Bewertung, Korrektur und Benotung ein. Achtsamkeit ist eng mit der Haltung der Anerkennung verbunden. Sie stellt wieder den lernenden Schüler, die Begabungsförderung der sich bildenden Person ins Zentrum und erfordert ein hohes Maß an fachlicher und pädagogisch-didaktischer Kompetenz. Achtsamkeit nimmt auch die Mitschüler in den Blick.

> *„Gerechtigkeit meint hier im Rahmen des Möglichen, die Einzigartigkeit des Einzelnen wahrzunehmen und zu achten und die Unterschiedlichkeit der Vielen zu respektieren und zu fördern.“ (Weigand, et al., 2014 S. 56)*

Hackl nennt die (selbst-)gestaltete Umgebung einer Schule, die Kreativität der Schulgemeinschaft, den Stil des Umgangs miteinander, das „deutende Ritual“ als Ebenen einer Schule der Person.

Die Haltung der *Begleitung* unterstützt den Wert der Beteiligung und die Personwerdung im relationalen Kontext (2.1.1.1, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.5, 3, 4). Sie kann in verschiedenen Modellen realisiert werden (Mentoring, Coaching, etc.). Es ist unstrittig, dass personale Begleitung und Orientierung ein zentraler Aspekt einer personorientierten Schulkultur sind.

Personorientierte Schulkultur zeigt sich in Offenheit und Aufgeschlossenheit, in Neugierde und Kreativität, nicht in Anweisung und Normiertheit (2.1.3.2, 3.1.4, 3.1.7, 3.2.3.1, 4.2.1). Sie konstituiert Schule als Ort eines persongebundenen Bildungsprozesses, als „Erfahrungsraum … menschlicher Entwicklungen und individueller Gestaltungen“ (Weigand, et al., 2014 S. 57).

2.1.1.4 Ein ökologisches Begabungsmodell

Die Relationalität zwischen der sich bildenden Person und der Welt (2.1.1.1) verortet Müller-Oppliger nicht in der Schule als konkretem Lernraum (2.1.1.3), sondern in einem allgemeinen Lernumfeld. In seinem ökologischen Begabungsmodell „wird dem Individuum eine selbstbewusste Position zugestanden und zugemutet als unverfügbare, eigenständige und eigenverantwortlich entscheidende Persönlichkeit, die zu ihrer Umwelt in Beziehungen tritt“ (Weigand, et al., 2014 S. 68) (2.2.1.3).

Es werden vier Ebenen unterschieden.
In einer ersten Ebene werden auf der Basis einer ökologischen Entwicklungstheorie nach Bronfenbrenner der Eigensinn (Autonomie, 2.1.1.1, 2.1.1.3), die Selbstsorge und die Selbststeuerung der sich bildenden Person gesehen. In einer zweiten Ebene kommt das Selbstkonzept als Schlüssel zur Hochleistung zum Tragen, auf das auch die co-kognitiven Fähigkeiten von Renzulli Bezug nehmen (Renzulli, et al., 2001) (Renzulli, 1978) (2.2.1.3). Von zentraler Bedeutung sind hier (2.1.2.2, 2.1.2.3, 3.1.4):

- *„Optimismus (mit den Subkategorien: hope; positive feelings from hard work),*
- *Mut (mit den Subkategorien: psychological / intellectual independence; moral convictions),*

- *Hingabe an ein Thema bzw. Fach (mit den Subkategorien: absorption; passion)*
- *Sensibilität für menschliche Belange (mit den Subkategorien: insight; empathy),*
- *Körperliche und geistige Energie (mit den Subkategorien: charisma; curiousity)*
- *… Zukunftsvision und das Gefühl, eine Bestimmung zu haben (mit den Subkategorien: sense of power to change things; sense of direction; persuit of goals)" (Weigand, et al., 2014 S. 72)*

In einer dritten Ebene nennt Müller-Oppliger fünf Faktoren für begabungsfördernde Lernprozesse (2.1.3.3, 2.2.1.1, 2.2.2, 3.1.4, 3.1.6.4):

Emotionen und Vertrauen als Grundlage gelingender Lernprozesse

Volition und Selbstwirksamkeit als Aspekte der Motivation

Kognition und Anschlussfähigkeit

Aktion und Performanz

Reflexion und Selbststeuerung (Weigand, et al., 2014 S. 73 ff.)

Die letzten drei Faktoren sind wesentliche Gelingensfaktoren in der Umsetzung von begabungsfördernden Unterrichtskonzepten (2.2.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3).
In einer vierten Ebene unterscheidet Müller-Oppliger Begabung und Leistung in drei Leistungsdimensionen (2.2.2, 3.1.4, (Hattie, et al., 2018)):

- *„sachbezogene Exzellenz; fachliche Hochleistung und Performanz*
- *selbstverantwortliche, reflektierende Persönlichkeit mit wertebezogenem Bewusstsein über die eigenen Möglichkeiten, das eigene Handeln und dessen Effekte*
- *soziale Hochleistung, Leistungen zugunsten der Gemeinschaft / Gesellschaft und altruistische Übernahme von Verantwortung" (Weigand, et al., 2014 S. 75)*

Das skizzierte ökologische Begabungsmodell ist pädagogisch verankert, nimmt Begabungsförderung und Bedingungsfaktoren von begabungsfördernden Lernprozessen und Bildungsstrukturen in den Blick (2.2.1.1, 2.2.1.2). Es enthält wichtige Gesichtspunkte zur Begabungsentwicklung aus der Lern- und Expertiseforschung für eine individualisierte und sozial wertgelenkte Begabungsförderung (2.2.1.3).

Gerade das Selbstkonzept (2.1.3.3, 3.1.4, 3.1.5, 4.2.1) ist eine wichtige Förderinstanz zur Begabungsförderung. Die „Selbsteinschätzung der eigenen Fähigkeiten und Möglichkeiten, verbunden mit den co-kognitiven Einstellungen und Fähigkeiten der Person, sind von entscheidender Bedeutung für deren Ausbildung von (Hoch)Begabungen oder Nichtausgestaltung“ (Weigand, et al., 2014 S. 94). Daraus leitet sich der Auftrag an die Bildungsinstitutionen ab, „diese wichtigen Schlüsselkompetenzen auszubilden, damit die Lernenden ein positives Selbst- und Leistungskonzept aufbauen können, das auch über die Schulzeit hinaus als Fähigkeit und Wille zu lebenslanger Selbstgestaltung und verantwortungsbewusster Mitgestaltung einer gemeinsamen Gesellschaft Bestand hat“ (ebd.) (2.2.1.1, 2.2.2, 2.2.3, 3.1.6.4, 3.1.7).

2.1.1.5 Begabungsförderung als Herausforderung für die Lehrenden

Lehrkräfte begleiten den Bildungsprozess und die Begabungsprozesse der Schüler (2.1.1.1). Pointiert stellt Schmid fest:

> *„Ob sich in einer Zeit, in der das Prinzip des ´learning by doing´ in praktisch allen Lebensbereichen zum Gemeingut geworden ist, just die Institution Schule mit einem ´learning by being taught´ zufrieden geben darf, sollte zum Nachdenken anregen.“ (Weigand, et al., 2014 S. 97)*

Es ist unbestritten, dass für einen gelingenden Begabungsprozess der Lehrperson eine Schlüsselrolle zukommt (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.2, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 3, 4). Die Metastudie von Hattie beschäftigt sich mit den Effekten der Lehrpersonen auf das Lehren (Hattie, 2017) (Hattie, et al., 2018) (4.2.3.2, 4.2.4). Jeder Vergleich der Lehrperson, ob als „Wegweiser“ oder „Türöffner“ oder „Garant jener Freiheit, die aneignendes Lernen und Persönlichkeitsbildung wesentlich ausmacht“ (Weigand, et al., 2014 S. 96), muss hinken. Das Prinzip „eVOCATIOn“ weist den Weg:

> *„Statt (sei es auch noch so behutsam und in einem individualisierten Verfahren) ´an der Hand geführt´ zu werden, werden die Lernenden dazu ´aufgerufen´ (lat.´vocare´), selbst aus der eigenen Beengtheit herauszutreten und ihr eigenes – selbstgewähltes aber auch selbstverantwortetes! – Ziel (freilich mit der notwendigen Unterstützung) anzusteuern.“ (Weigand, et al., 2014 S. 97)*

Dies ist der Auftrag an die Lehrperson. Nicht zusehen, sondern aufbereiten, begleiten, reflektieren, … stets mit Blick auf den sich bildenden Schüler und die Begabungsprozesse.

Schmid unterscheidet drei Förderebenen:
Angebotsebene: Lernförderung durch Differenzierung. Hier begegnen wir einem fundamentalen pädagogisch-didaktischen Prinzip, das am Anfang der Berücksichtigung der Heterogenität der Lernenden steht (2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.3.3, 2.2.4, 3.1.4, 3.1.6.1, 3.3.1.1). Die Individualisierung (2.1.2.3) als Pendant leitet über auf die
Erlebnisebene: Fokusverschiebung vom Angebot auf den individuellen Lernenden. Hier geht es nicht nur um das Begreifen, sondern um die Qualität des persönlichen Begabungsprozesses, um die subjektive Wahrnehmung des Lernerlebnisses (2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.1.5, 3.1.6.3). Leitfrage für die Lehrperson muss sein:

> *„Wie muss das von mir Angebotene von den Lernenden erlebt werden, damit sie aus eigenem Antrieb ihr individuelles Potential im Rahmen der ihnen zur Verfügung stehenden Kapazität voll ausschöpfen?" (Weigand, et al., 2014 S. 98)*

Noch bedeutsamer als die in der Qualität des Lernerlebnisses begründete Motivation und wesentlich bedeutsamer als die Effektivität des Lernprozesses ist die dritte Ebene.
Ebene der Persönlichkeitsentwicklung: Von der Individualisierung (2.1.2.3) zur Personorientierung. Hier geht es um den Kern der sich bildenden und zu begabenden Person (2.1.1.1). Ziel ist die personale Exzellenz (2.1.1.4) des Lernenden. Kennzeichen sind: kreatives Mitdenken, kritisches Querdenken, ethisches Vordenken (Weigand, et al., 2014 S. 98) (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.6.4). Eine Begabungsförderung in diesen drei Ebenen korrespondiert in drei Leistungsformen: kognitive Leistung (Wissen und daraus resultierendes Können), individuelle Leistung (in Relation zur individuellen Begabung, Begabungsausschöpfung), personale Leistung (innovative Gestaltung des erworbenen Wissens, Persönlichkeitsentfaltung) (Weigand, et al., 2014 S. 98) (2.2.1, 2.2.1.3, 2.2.2).

Ausgehend von den Zielen dieses Förderauftrags an die Lehrperson ergänzt Schmid die klassischen Aufgaben Wissensvermittlung und Bewertung von Wissen um folgende zu einem „effizienten und kreativen Selbstlernen“ hinführende *Aufgaben*: „Neugierde erhalten, Fragen entwickeln, Wissen generieren, Lernende beraten, Lernergebnisse (zum Teil in Absprache mit den Lernenden) bewerten“ (Weigand, et al., 2014 S. 99) (3.1.4, 3.1.6.2)
Die Prioritäten verschieben sich „von der (vermeintlich) bewährten Konzentration auf die Optimierung des Lehrens (d. h. dem Primat der Inhalte und Methoden) zu einer Fokussierung auf die Persönlichkeitsbildung der Lernenden“ (Weigand, et al., 2014 S. 99). Ziel der Lehrperson ist,

> *„durch einen Prozess lebensgestaltenden Lernens in den ihr anvertrauten Heranwachsenden jene personale Exzellenz wachsen zu lassen, die diese in die Lage versetzt, Gelerntes für sich zu deuten, einzuordnen, zu bewerten und zu einer sinn- und wertvollen Gestaltung zunächst des eigenen Lebens zu nutzen, um dann in der Folge auch der Gesellschaft als Gestalter zur Verfügung zu stehen“ (ebd.).*

Die Lehrperson wird zum „Coach“ für den Lernenden auf seinem Weg zum Erwerb von „Humankompetenz“ (F. Weinert, ebd.) (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.2, 2.2.1.1, 2.2.3, 3.1.6.4, 4.1).
Im Sinne Hatties wird die Lehrkraft bei diesem Auftrag unterstützt von einer Haltung der Achtsamkeit und einer Haltung der produktiven Fehlerkultur (Hattie, et al., 2018) (2.1.1.1, 2.1.1.3, 4.2.3).

Die Lehrkraft muss sich einlassen auf die Haltung einer begabungsfördernden Lehrperson. Die Ressource ist die eigene Persönlichkeit, die eigene Haltung dem Lernenden gegenüber, eine sich zu eigen gemachte Pädagogik der personorientierten Begabungsförderung. Dies ist eine Pädagogik des Zutrauens und Zumutens, des Förderns und Entfaltens, nicht eine Pädagogik der Vermittlung, Bewertung und Selektion (2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3, 3.1.6.2, 4, 4.2.1).
„Die Haltung einzelner Lehrpersonen wird damit zum Auslöser und Katalysator von ´Schulentwicklung durch Begabungsförderung´“ (Weigand, et al., 2014 S. 102).
Schmid nennt als förderliche strukturelle Bedingungen (2.1.1.3, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3, 2.1.3.1, 2.1.3.3, 4):

- Akzeptanz der aktiven Mitbestimmung der Lernenden über Lerninhalte, Lernverfahren, Lernmittel und Beurteilungskriterien („Contracting“)
- gelebte, institutionalisierte Feedbackkultur
- Angebot der freien Wahl zur Einbringung geforderter Leistungen („Assignments“)
- Einladung zum „Abschalten“ bei redundanten Pflichtangeboten („Drehtürmodell“, „Pull-out“-Verfahren)
- Freiräume für Aktivitäten, individuelle Interessen und Begabungen einzelner Lernender (ebd.)

Zusammenfassend stellt Schmid fest, dass nach einem personalen Verständnis Schulqualität und Begabungsförderung „nicht eine Frage von Systemen und Strukturen“, sondern von „Personen, deren Rollenbildern und Haltungen“ ist (Weigand, et al., 2014 S. 103). Die Lehrenden sind die Katalysatoren einer personorientierten Begabungsförderung (4.2, 4.2.3).

2.1.2 Personorientiertes Lehren und Lernen

Thema dieses Abschnitts ist die Ausgestaltung einer vom Personprinzip her gedachten Praxis des Lehrens und Lernens. Die Einmaligkeit der sich bildenden Person (2.1.1, 2.1.1.1, 2.1.1.3) und der Unterricht in heterogenen Gruppen sind wesentliche Anforderungen an die Thematik (2.1.1.5). „Dabei werden keine völlig neuen Lehr- und Lernformen oder Methoden dargestellt, vielmehr wird gezeigt, wie durchaus bekannte und gängige Formen ‚lernwirksamen Unterrichts’ (Helmke 2012, Hattie 2013, Hattie 2014, Florio-Hansen 2014) aus der Perspektive der Personorientierung eine qualitativ andere, nämlich begabungsgestaltende und persönlichkeitsbildende Ausrichtung erhalten.“ (Weigand, et al., 2014 S. 105)

2.1.2.1 Der Mehrwert personorientierten Lehrens und Lernens

Der grundsätzliche Wert von Bildung und Begabung ist unbestritten, ebenso der Wert einer personorientierten Begabungsförderung, wie dies in 2.1.1 hergeleitet wurde.

Wenn nun keine neuen Lehrformen, Lernformen, Methoden etc. zu erwarten sind, ist der Mehrwert personorientierten Lehrens und Lernens anders zu begründen.

> *„Im Kern geht es beim personorientierten Lernen in der Abgrenzung zur individualisierenden Methodik vor allem um den Prozess der subjektiven Auseinandersetzung mit den Inhalten auf einem für den Einzelnen höchstmöglichen Lernniveau.“ (Weigand, et al., 2014 S. 110)*

Es wird der Versuch unternommen, auf der Grundlage der personalen Prinzipien Würde/Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess und Relationalität (2.1.1.1, 2.1.1.3, Abbildung 2 S.16) dem Lernen eine Sinndimension zu geben. Die individuelle Auseinandersetzung mit selbstgewählten Fragen und Themen soll zu einer Verständnistiefe führen, die eine wertgeleitete Integration des Lerngegenstandes in die Person des Lernenden zulässt (2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.1.1.3, 2.1.3.1).

Mit Blick auf die Schule bedeutet dies, dass es vorrangig nicht mehr darum geht, „im Leistungsnormrahmen einer Schule erfolgreiche Leistungsträger hervorzubringen“ (ebd.).

> *„Unterricht und Schule erhalten gegenüber dem bisherigen Selbstverständnis eine veränderte Bedeutung. Sie werden zu anregenden Räumen des Lebens und der Auseinandersetzung mit dem Gelernten über das Gelernte hinaus mit sich selbst. … In diesem Sinne können sie zu prägenden Lernräumen der Entfaltung und Selbstgestaltung der Persönlichkeit und der Mitgestaltung der Umwelt werden. Wissen und Persönlichkeitsgestaltung sind zwei aufeinander bezogene Größen dieses Bildungsverständnisses.“ (Weigand, et al., 2014 S. 111)*

2.1.2.2 Lehr- und Lernformen der Begabungsförderung

Müller-Oppliger sieht einen gesellschaftlichen Inklusionsauftrag für Begabungsförderung und begründet auf der Basis verschiedener neuer Ergebnisse der Integrationsforschung seinen grundsätzlichen Vorzug einer integrativen gegenüber einer separativen Begabungsförderung.

> *„Die Integrationsforschung zeigt eindrücklich auf, dass nicht die eine oder andere Form spezieller Förderung für alle die richtige ist, sondern dass integrative und ergänzende, separative Förderelemente ihre Bedeutung haben und es wesentlich vom Erleben und der Selbstwahrnehmung der Lernenden und vom sozialen Lernklima abhängt, ob das jeweilige Lernsetting das für sie förderlichste ist. ... Die Polarisierung zwischen integrativen und separativen Formen der Lernorganisation wird deshalb abgelöst von einem umfassenderen Verständnis von differenziertem Lernen aller Schüler/innen in der ungeteilten Lerngemeinschaft in Schulen der Inklusion." (Weigand, et al., 2014 S. 130)*

Müller-Oppliger legt Wert auf ein „Kerncurriculum und ergänzende Bildungsangebote für Schüler/innen mit besonderen Bedürfnissen, was (potenzielle) Hochleistende mit einschließt („Schoolwide Enrichment Model" von Renzulli/Reis 1997)" (ebd.). Insbesondere „ermöglicht eine inklusive Lernstruktur nebst gemeinsamen auch individuelle Lernpfade, die sich in ihrer Entwicklung immer wieder begegnen und gegenseitig anerkennen" (ebd.) (2.1.2.6, 2.1.3.3, 3, 3.1.5, 3.1.6.3, 4.1, 4.2.1).

Müller-Oppliger sieht *fünf Bereiche einer Didaktik der Begabungsförderung*:
Die *Identifikation* bezeichnet das Erkennen von Begabungspotenzialen (2.1.3.3, 3.1.4, 3.1.6.1, 3.3.1.1). Dies schließt den Willen und die Kompetenz des Bildungssystems (4.1) und der Lehrenden (4.2.3) ein, Begabungspotenziale Einzelner zu erkennen und zu fördern (2.1.1.2, 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3).
Initiation und Faszination bezeichnet das Eröffnen von Interessen.
Dies gelingt auf der Basis forschender und Interesse weckender Aktivitäten (2.2.4.2, 2.2.4.3, 3), aber auch durch die Begegnung mit vorbildhaften Persönlichkeiten (3.1.4, 4.2.2.2, 4.2.2.3). Von Bedeutung ist insbesondere das Erschließen von Perspektiven über das Kerncurriculum und den Regelunterricht hinaus (3).
Innere Differenzierung ist ein klassisches didaktisches Prinzip und kann beispielsweise durch stärkendifferenzierende Lernarrangements innerhalb des regulären Unterrichts gelingen (3.1.6.2, 3.1.6.3, 3.3, 3.4).
Äußere Differenzierung ist ebenfalls ein klassisches didaktisches Prinzip und kann durch flexibilisierte Lern- und Ausbildungsstrukturen erfolgen, die eine

erweiterte Auseinandersetzung auch mit extracurricularen Bildungsinhalten ermöglichen (3.1.6.1, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2, 3.3.2).
Eine *Anerkennungskultur* gewährleistet, dass personbezogene, anerkennenswerte Leistungen wahrgenommen und gewürdigt werden (2.1.1.3, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.2.1.2, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 4.1, 4.2.2.1).
(Weigand, et al., 2014 S. 131)

Nachdrücklich weist Müller-Oppliger darauf hin, dass entsprechende Lern- und Bildungssettings (4.2.1) nötig sind, um Begabungspotenziale zu entdecken und diese in hohe Leistung zu transformieren.

> *„Dies wiederum ist nicht möglich, wenn sich die Lehr- und Ausbildungsorganisation lediglich an der Erfüllung normativer und curricular vorgegebener Leistungsnormen orientiert und keine Möglichkeiten bestehen, dass Kinder oder Jugendliche außerordentliche Interessen, kreative und eigene Denkprozesse, hohes Engagement oder besondere Fähigkeiten in spezifischen Leistungsbereichen entfalten oder zeigen können.“ (Weigand, et al., 2014 S. 132)*

Als Methode der Wahl sieht Müller-Oppliger *begabungsfördernde Lernarrangements im Regelunterricht* (Weigand, et al., 2014 S. 132ff.). Unbestritten ist „ein spezieller Fokus auf kognitiv anspruchsvolle Aufgabenstellungen, die … Möglichkeiten vertiefter und weiterführender Lernprozesse für überdurchschnittlich begabte Schüler eröffnen und vorhandene Begabungspotenziale zum Ausdruck bringen“ (ebd.). Müller-Oppliger formuliert Leitvorstellungen und Leitfragen für die Entwicklung differenzierender Lernaufgaben.

- *Kognitive Anschlussfähigkeit*
  Ermöglichen Lernaufgaben und Themen den Anschluss an heterogenes Vorwissen und unterschiedliche Begabungen? (2.1.1.5, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3)
- *Heterogenität der Lerngruppe vs. Monotonie der Lehre*
  Gelingt es, die Lerninhalte so aufzubereiten, dass alle Lernenden trotz heterogenen Vorwissens und unterschiedlicher Interessen mit den Lernaufgaben angesprochen werden? (2.1.1.5, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.6.2, 3.3, 3.4)

- *Multimodalität*
  Weisen die Lernaufgaben unterschiedliche Zugangsweisen und Bearbeitungsmöglichkeiten durch unterschiedliche Lerntypen auf, mit denen die Lernenden ihre Kompetenzen aufzeigen können? (2.1.1.5, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3)
- *Methodenkompetenz*
  Beinhaltet der Unterricht konkrete Anleitungen zum Aufbau von Methodenkompetenz? Wird dies mit dem Lernenden besprochen? (2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 3.1.6.3, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 3.3.2, 3.4.2)
- *Aufgabenverpflichtung und Selbstregulierung*
  Werden Aspekte positiven Lern- und Arbeitsverhaltens wie Einsatzbereitschaft, Zuverlässigkeit, Sorgfalt usw. wahrgenommen, gefordert, gefördert, besprochen, wertgeschätzt? (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.3.1, 4.2.3)
- *Selbstlernfähigkeiten fördern/entwickeln*
  Erhalten die Lernenden persönliche Rückmeldungen zu ihren Lernfähigkeiten und Lernstrategien und diesbezügliche Verbesserungshinweise? (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 3.3.1, 3.4.1)
- *Selbstwirksamkeit, soziale Beachtung*
  Gibt es Lernanlässe im Unterricht, dass Lernende ihr fachliches Können zeigen dürfen? Dürfen sie stolz darauf sein? (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.2.1.3, 2.2.5, 3.1.6.3, 4.1, 4.2.2.1, 4.2.2.3, 4.2.4)
- *Selbstvertrauen, personale Kompetenzen*
  Gibt es Lernanlässe im Unterricht, dass Lernende in ihren co-kognitiven Kompetenzen wie Selbstvertrauen, Mut, Optimismus, Hingabe an ein Thema, Sensibilität, Empathie, Zukunftsvision, Gefühl, eine Bestimmung zu haben, usw. gestärkt werden? (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.2.1.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.3.2, 3.4.2)
- *Sozialkompetenz, Mitverantwortungsbewusstsein*
  Wird kooperatives Lernen gezielt angeleitet? Werden Zusammenarbeit und gegenseitige Unterstützung angeleitet, besprochen, entwickelt? (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 4.2.2.3)

- *Selbstreflexion, Selbstbewusstsein, Selbstverantwortung*
  Werden mit den Lernenden deren Lerneinstellungen und Lernstrategien besprochen? Werden die Lernenden angeleitet, Lerneinstellungen, Lernfähigkeiten und Lernstrategien systematisch zu reflektieren, eigene Lernziele zu formulieren? Werden die Lernenden ermutigt, Verantwortung zu übernehmen? (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 4.1, 4.2)

(Weigand, et al., 2014 S. 134f.)

Unterricht, der sich an den erarbeiteten didaktischen Prinzipien für einen begabungsfördernden Unterricht und an den methodischen Prinzipien differenzierender Lernaufgaben orientiert (3), benötigt begabungsfördernde Schulstrukturen, wie sie etwa durch SEM (2.1.3.3) verwirklicht werden und die eingebettet sind in einen fruchtbaren Schulentwicklungsprozess (4), um seine volle begabungsfördernde Kraft zu entfalten[6].

2.1.2.3 Individualisierung und Personalisierung als Förderprinzipien

Die Heterogenität einer Lerngruppe begründet das didaktisch-methodische Prinzip der Differenzierung (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.3.3, 2.2.4).
Wechselt der Blick von der Vielheit der Lernenden zum Individuum, so wechselt der methodische Ansatz von der Differenzierung zur Individualisierung. Das Individuum lässt sich anthropologisch, theologisch, philosophisch, etc. definieren. Der einzelne Mensch ist ein Produkt von Natur und Gesellschaft, aber auch ein Produkt seiner selbst (2.1.1.1).
Im Lernprozess nimmt das Individuum eine zentrale Position ein:

- Das Individuum bringt dem Lerngegenstand Aufmerksamkeit entgegen.

[6] Das Pendant zum differenzierenden, begabungsfördernden Unterricht ist ein sog. 7-G-Unterricht (für alle Lernenden des *g*leichen Alters zur *g*leichen Zeit die *g*leichen Inhalte, mit den *g*leichen Lernmethoden, die *g*leichen Lernziele mit der Unterstellung, dass sie im zeitlichen Gleichtakt *g*leiche Leistungen in *g*leicher Ausdrucksweise auszuweisen imstande seien) (Weigand, et al., 2014, S.116).

- Das Individuum entscheidet über die Bedeutung des Lerngegenstands.
- Das Individuum gelangt zu Einsichten und Überzeugungen.

Kennzeichen eines individualisierenden Unterrichts sind entsprechend: Selbstbestimmung, Selbsttätigkeit, Selbstorganisation, Selbstbewertung (2.1.1.1, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.2.1.1, 4.1).
(Weigand, et al., 2014 S. 138)
In einer Extremposition führt das Prinzip der Individualisierung zu der Ansicht, dass man einen Menschen nichts lehren, sondern ihn nur unterstützen könne, den Lerngegenstand für sich zu entdecken (2.1.2.6, 2.2.4.2, 3.1.6.3, 4.2.2.1).

Hackl nennt folgende Aspekte von Individualisierung als Pädagogischem Prinzip:

- Lerngruppen sind nur temporäre Organisationsformen (2.1.3.3, 4.2).
- Individualisierung führt zu einer Pädagogisierung der Schule (2.1.3, 4).
- Individualisierung führt zu einer hohen Differenzierung der Lernabläufe (Lerndauer, Lernformen, Lernintensität, Sozialformen, Evaluation und Prüfungsleistung, Domänenbildung und Interessen, Partizipation) (2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3).

(Weigand, et al., 2014 S. 140)

Individualisierung bleibt jedoch stets auf einer phänomenologischen Ebene stehen, so dass profundere Analysen erst durch die personale Komponente, die den jeweils individuellen Eigenschaften der Person einen tieferen Sinn und eine tiefere Bedeutung geben, möglich sind (2.1.1.1, 2.1.1.3). Individuell gestaltete Lernprozesse entfalten ihre Begabungswirksamkeit und ihre Bildungswirksamkeit erst durch das personale Konzept einer personorientierten Begabungsförderung (2.1.1.1, 2.1.1.4, 4.1).

Hackl nennt vier Stufen einer (personalisierten) Aneignungsdidaktik von Wissen:

- Beziehung zum Thema
- Wissens- und Kompetenzerwerb
- Beschäftigung mit dem erworbenen Wissen, Vernetzung
- Gestaltung und Performanz

(Weigand, et al., 2014 S. 143f.)

Auf der letzten „Stufe der personorientierten Didaktik wird die Bedeutung der Person in einem Lernprozess unmittelbar erfahrbar. Wissen wird seiner Fremdfunktion (Prüfungswissen) entzogen. Es … dient als Grundlage von Erkenntnissen oder auch der ästhetischen Erfahrung.“ (ebd.) (2.2.33, 4.2.2.2, 4.2.2.3)
In jeder der vier Phasen vollzieht sich eine andere Qualität der Adaption und des Beziehungsgeschehens zwischen dem Lernenden und dem Wissen. Hackl spricht in diesem Zusammenhang von einer Topografie personorientierten Lernens und weist darauf hin, dass die „Qualitätsdimension der Begabungsförderung (Weite und Tiefe – Lenkung und Autonomie – Elementarisierung und Komplexität – Pflicht und Hingabe) in den verschiedenen Lernfeldern unterschiedliche Intensitätsgrade erreichen kann.“ (ebd.) (3.1, 3.2, 3.3, 3.4)

Die beiden Prinzipien Individualisierung und Personalisierung lässt Hackl in einem Prinzip Förderung münden (Weigand, et al., 2014 S. 146ff.) (2.1.1.3, 2.2, 3).

2.1.2.4 Didaktische Prinzipien der Personorientierung

Während die Prinzipien der inneren Differenzierung (2.1.2.2) und der Individualisierung (2.1.2.3) allgemeine didaktisch-methodische Prinzipien eines guten Unterrichts darstellen, die in der Heterogenität und in der Individualität der Lernenden verortet sind, lassen sich aus der Personorientierung weitere didaktische Prinzipien für einen begabungsfördernden Unterricht ableiten.
Hackl nennt als zentrale Prinzipien *Aneignung* (reflektiertes Lernen) und *Autonomie* (selbstgestaltetes Lernen), daneben die flankierenden Prinzipien *Dialog* (dialogisches Lernen) und *Sozialität* (soziales Lernen) sowie *Lernsinn* (sinnorientiertes Lernen) und *Performanz* (gestaltendes Lernen). (Weigand, et al., 2014 S. 150ff.)

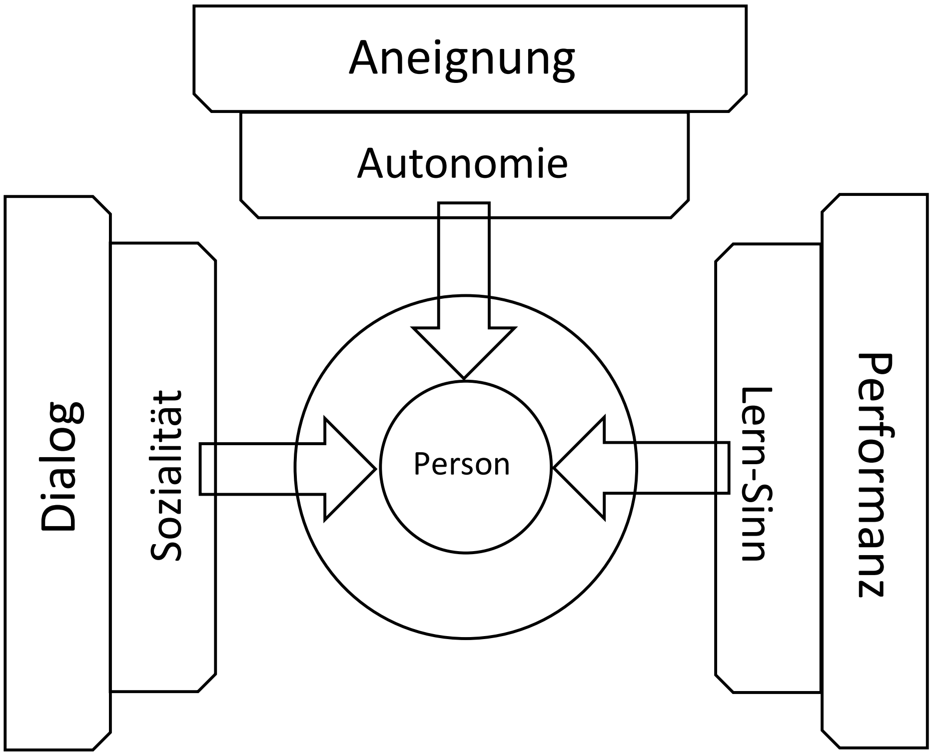


Abbildung 3 Personorientierte Didaktik nach Hackl

Im Prinzip der *Aneignung* erkennt man den Personbegriff wieder, den zu fördernden Bildungsprozess und die zu entwickelnden Begabungsprozesse (2.1.1). Die sich bildende Person macht sich im Humboldtschen Sinn den Lerngegenstand zu eigen (2.1.1.1). Durch die Aneignung von Kenntnissen und die Ausprägung einer materialen Bildung erfolgt auch die Schulung der inneren Erkenntniskraft und die Ausprägung einer formalen Bildung (2.2.4.1).
Im Prinzip der *Autonomie* erkennt man die Autorschaft der sich bildenden Person wieder (2.1.1). Der Lernende kann (mit)entscheiden, was, wie und wozu er lernt. Nur so kann er den Bildungsprozess mit größtmöglicher Intensität (mit)gestalten. Autonomie erfordert flankierende Prozesse wie Mentoring oder Coaching (2.1.2.6).
Im Prinzip des *Dialogs* ist wiederum der Humboldtsche Dialog zwischen der sich bildenden Person und der Welt erkennbar (2.1.1). Das dialogische Verhältnis zwischen dem Lernenden und dem Lerngegenstand ist ein weites Feld. Es schließt auch die co-kognitiven Fähigkeiten des Lernenden mit ein (2.1.1.4, 2.1.2.2). Das dialogische Prinzip stellt eine fundamentale Ergänzung des monologischen

Prinzips der Individualisierung dar, das in seiner Eindimensionalität an der Komplexität der Welt und der Wirklichkeit letztendlich scheitern würde (2.2.4.3). In dem Moment, in dem die Aneignung eines Lerngegenstandes reflexiv wird, berühren sich die Prinzipien Dialog und Aneignung (2.1.1). An der Schule findet sich das dialogische Prinzip in unterschiedlichem Kontext: im Dialog zwischen Lehrendem und Lernendem, der eine personorientierte Schule konstituiert (2.2.4.2, 2.2.4.3), in der Feedbackpraxis (2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 4.2.2.3), die Begabungsentfaltung optimieren kann, in der dialogischen Partizipation, ohne die Schulentwicklung nicht möglich ist (2.1.1.3, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 4.1, 4.2).

Im Prinzip der *Sozialität* kommt die Auffassung zum Ausdruck, dass Begabung im Ursprung einer begabten Person immer auch eine Gabe an die Gesellschaft ist (2.1.1). Jede Begabung erhält auf diese Weise eine soziale Dimension. Begabungsförderung bzw. Lernen kann somit als sozialer Prozess verstanden werden. Sozialität umfasst noch einen zweiten Aspekt, Partizipation (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.3, 4). Die Lernenden werden eingebunden in einen Gestaltungsprozess größtmöglicher Lernqualität und bestmöglicher Lernbedingungen. Contracting oder Assignment können Partizipation unterstützen (2.1.1.5, 2.1.2.5, 3.1.4).

Das Prinzip des *Lernsinns* ist klar (2.1.1). Der römische Philosoph Seneca beklagte sich mit dem Ausspruch „Non vitae, sed scholae discimus“ über eine (nicht nur im antiken Rom) nicht erkennbare personorientierte, schulische Begabungsförderung. Strebt man diese jedoch an, ist die Frage nach dem Sinn und der Bedeutung, nach den ethischen und philosophischen Fragen der Wissensaneignung wenigstens exemplarisch zu beantworten. Erst ein Begabungsprozess, der der Frage nach dem Sinn nicht ausweicht, kann in einen Bildungsprozess münden (2.1.1.3, 2.1.1.5, 2.1.3.2, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5).

Das Prinzip der *Performanz* ist ein Begleiter des Prinzips des Lernsinns (2.1.1). Bildung ist nicht nur eine „innere Bezogenheit, insofern die Bedeutung von Wissen für den Lernenden ins Bewusstsein gehoben wird“ (Weigand, et al., 2014 S. 159). Bildung ist eine „Fähigkeit, Umwelt auf der Grundlage von Wissen und Können zu gestalten“ (ebd.). Das bildungskonstituierende, angeeignete Wissen

nimmt Gestalt[7] an, es bahnt sich den Weg zurück von der gebildeten, begabten Person in die Welt (2.1.3.2, 2.2.1.1, 3.1.6.4, 4.1, 4.2, 4.2.2.1, 4.2.2.3). Hier berühren sich beide Prinzipien der Aneignung und Performanz.
Diese sechs didaktischen Prinzipien können als Kompass für die Entwicklung und Umsetzung von begabungsfördernden Unterrichtskonzepten dienen, sie werden in 2.2.4 um fachdidaktisch wirksame Prinzipien ergänzt (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 2.2, 3, 4.1).

2.1.2.5 Methoden begabungsfördernden und personorientierten Lernens

Schmid betont für die Praxis des begabungsfördernden und personorientierten Lernens den Wert der pädagogischen Haltung und stellt diesen grundsätzlich über die Struktur und die Methode (Weigand, et al., 2014 S. 160) (Hattie, et al., 2018) (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.3, 4).
Vom differenzierten Lernprozess über das individuelle Lernerlebnis zur Person des Lernenden, d. h. mit fortschreitender Personorientierung, wandert der Fokus von der Ebene der Strukturen und Methoden auf die Ebene der Beziehungen und Haltungen; dies bewirkt eine Akzentverschiebung vom Fokus auf das Lehren und Unterrichten zur Person des Lernenden und der Bildungswirksamkeit der Begabungsförderung (ebd.) (2.1.1.5, 2.1.2.3). Strukturen und Methoden entfalten daher mit Blick auf eine personorientierte Begabungsförderung ihre volle Wirksamkeit nur, wenn sie von entsprechenden Haltungen und Werten getragen sind (2.1.3, 4).

Schmid entwickelte ausgehend von diesen Prämissen ein reichhaltiges methodisches Cluster der Begabungsförderung. Viele der in Abbildung 4 enthaltenen Methoden sind näher beschrieben in (Weigand, et al., 2014 S. 163ff.). Ihre jeweilige Bedeutung für die Begabungsförderung im Mathematikunterricht muss stets im Zusammenhang mit den zu begabenden Personen (2.1.1) und auch mit den für die Mathematik spezifischen Bildungsgegenständen gesehen werden (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4).

[7] vgl. Gestaltpädagogik

	Formen	Beziehung zur Lehrperson	Lernformen im Unterricht	Strukturen in der Schulorganisation
Klassische Begabungsförderung	**Grouping**		Leistungsgruppe Enrichmentcluster	Modulares Kurssystem Pullout-Gruppen
	Enrichment (intern)	Tutoring	Additum Vertiefungsgruppe Wettbewerbe	Themenwochen Ateliertage SEM-Konzept
	Enrichment (extern)		Expertenprojekt	Praktika, Forschungs- und Praxispartnerschaften Expertencolloquien oder -vorträge
	Akzeleration		Compacting Lernzeit-Reduzierung	Drehtürmodell Partielles Überspringen, Überspringen Frühstudium
Individualisierung	**Selbst-organisiertes Lernen**	Assignment	Freies Lernen Selbstlernzeit x-1 Methode Multipler Unterricht	Wahl: Vertiefungsfach, Kurskombination (z. B. Lab-Betrieb) Wahlpflicht: Semesterarbeit, Vertiefungsfach, individueller Schwerpunkt
Personorientierte Begabungsförderung	**Beteiligung Partizipation**	Lern-vereinbarung	Contracting	Schulform
	Reflexion Dialog	Persönlicher Bericht	Feedbackkultur Lerntagebuch, Portfolio Ich-Du-Wir-Didaktik	Tutoring / Mentoring /Coaching Personale Kompetenz Individuelles Zeugnis
	Sinn-Lernen Gestaltung von Wissen	Zielgespräch	Komplexes Lernen Anwendungsprinzip Ästhetische Gestaltung	Präsentationsformen Publikationen Auszeichnungsversammlungen
	Mehrdi-mensionale Leistung	Persönliche Leistungs-bewertung	Lernprozess-Bewertung Positive Leistungs-bewertung	Zertifikate Begleitzeugnis

Abbildung 4 Methodencluster nach Schmid (Weigand, et al., 2014 S. 161f.)

2.1.2.6 Portfolio und Coaching

Das Instrumentarium des Portfolios ist hilfreich für das Erkennen von Begabungspotenzialen, zur Unterstützung selbstbestimmten, sich aneignenden Lernens, für die Reflexion von Lern-, Begabungs- und Bildungsprozessen und nicht zuletzt als Grundlage für Beratungsgespräche (2.1.1, 2.1.1.5, 2.1.2.4, 2.1.3.1). Im Dialog zwischen Lernendem und Lehrendem können Leistungen und Lernstile, aber auch Lerneinstellungen und Widerstände erfasst und professionell begleitet werden (2.1.2.4, 2.2.4.3). Stets bilden die Fähigkeiten und Stärken der Schüler den Ausgangspunkt für selbstwirksames Lernen und das eigene Bildungskonzept (2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.2.3, 4.1.2).

Die Inhalte von Portfolios umfassen verschiedene Aspekte:

- Lern- und Interessenprofil des Lernenden („Ich“-Buch)
- Sammlung von Leistungen („Container“)
- Lernjournal („Reflexionstagebuch“)
- Logbuch („Fahrtenschreiber“ der Lernwege)

(Weigand, et al., 2014 S. 204)
Im Bereich der Metakognition weist Müller-Oppliger auf drei Ebenen hin: den sachlich-fachlichen Aspekt des Gelernten (kriteriale Ebene), die eingesetzten Lerntechniken und Lernstrategien (prozedurale Ebene), die entwickelten Lerneinstellungen und Lernhaltungen (personale Ebene) (Weigand, et al., 2014 S. 199, 205) (2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.1.2.3).

> *„Erfahrungen mit dem Aufbau von Reflexion bei Schülerinnen und Schülern, Lehramtsstudierenden und Lehrpersonen in der Weiterbildung haben gezeigt, dass Selbstreflexion über mehrere Stufen hinweg erarbeitet und eingeübt werden muss.“ (Weigand, et al., 2014 S. 209)*

Gerade auch im Mathematikunterricht nimmt die Reflexion einen eher untergeordneten bis verschwindenden Anteil im Unterrichtsgeschehen ein. Sie ist im Rahmen der in Kapitel 3 vorgestellten Unterrichtskonzepte möglich (3.1, 3.2, 3.3, 3.4).
Im Reflexionsarrangement unterscheidet man drei Ausprägungen des Portfolio-Ansatzes (Lernjournal, Entwicklungsportfolio, Lernberatung): Lernende führen das Lernjournal; es enthält die Reflexion zu Lernwegen und Lernprozessen sowie

individuelle Lernziele. Als Teil des Entwicklungsportfolios erfasst es die Spuren des Lernens und zeichnet Lernpfade nach. Lernende organisieren so selbst ihre Entwicklungsportfolios. Lehrende und Lernende treten auf dieser Basis in dialogischen Gesprächen in einen Ausbildungsdiskurs, der die Lernberatung konstituiert.
Kurzum: Im personorientierten Ansatz entfaltet sich Begabung und man reflektiert und schreibt und spricht darüber, was eine weitere, intensivere Begabungsförderung ermöglicht.

Coaching verfolgt einen ähnlichen Ansatz. Anders als beim Portfolio werden Lernziele, Lernerlebnisse und Lernpfade nicht verschriftlicht. Vielmehr stehen der Bildungsprozess und die Reflexivität des Begabungsprozesses in der personalen Begegnung mit dem Coach im Zentrum (2.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.5).
Wustinger weist darauf hin, dass Coaching als politisches Ziel in der Europäischen Union als „lifelong guidance" neben „lifelong learning" formuliert ist; Coaching ist gesellschaftlich anerkannt als „entschleunigter Zeit-Raum", in den „Personen in ihren schwierigen beruflichen Situationen … aus dem Hamsterrad aussteigen und von außen darauf blicken. Sie können überprüfen, was sie tun, warum sie es tun, wie sie es tun, was sie stattdessen tun könnten, und ob für sie Einsatz und Benefit noch in einem akzeptablen Verhältnis stehen." (Wustinger, 2014) (4.1, 4.2.3)
Die Übertragung in den schulischen Kontext ist umfassender als nur bei schwierigen Situationen im Begabungsförderungsprozess.
Pädagogisches Coaching fördert bereits das Lernen von Reflexionsprozessen (3.4.2, 3.4.1, 3.3.2, 3.3.1, 3.2.3, 3.1.6.1). Durch das Peergroup-Coaching wird gelernt, dass kein Experte für Zeit- und Ressourcenmanagement erforderlich ist, um den eigenen Umgang mit Zeit und Ressourcen zu überprüfen.

> *„Was als Unterstützung dienlich ist, sind der wertschätzende und respektvolle Außenblick und interessiertes, lösungsorientiertes Nachfragen statt einer Menge guter Tipps." (Wustinger, 2014 S. 213)*

Peergroup-Coaching schult damit eine Haltung des „Einander-Ressource-Seins".
Wustinger benennt als konkrete Bedingungen für Coaching in der Schule:

- In der Schülergruppe coachen Schüler einander. Sie stellen unterstützende Fragen und vergleichen ihre Erfahrungen miteinander.
- Jede Problembeschreibung wird immer wieder auf die Frage nach Ressourcen und Lösungsansätzen umgeleitet.
- Es werden nach Möglichkeit keine Ratschläge erteilt, sondern Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler verstärkt.

(Wustinger, 2014 S. 215)

Auf diese Weise kann Coaching personorientierte Begabungs- und Bildungsprozesse wirksam unterstützen. Aus Sicht der Lehrkraft ist es beispielsweise in der Begleitung von Facharbeiten / Seminararbeiten oder aber auch in der Begleitung intensiver fachlicher Begabungsprozesse ein die Schüler befähigendes Instrumentarium. (3.1.5, 3.1.6.3, 4.2.2.1, 4.2.2.3)

2.1.3 Personorientierte Schulentwicklung

Es ist unbestritten, dass die Schule der Ort ist, an dem der gesellschaftliche Bildungsauftrag für die Heranwachsenden Gestalt annimmt (4.1). Dies trifft insbesondere auch auf die Begabungsförderung am Gymnasium zu, die regelmäßig im Fokus der Schulentwicklung steht (4.2).

Selbst an Schulen mit Hochbegabtenklassen geht es nicht allein um die Förderung Hochbegabter, sondern um die Förderung besonderer Begabungen und letztlich um die Begabungen aller Kinder und Jugendlichen (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.1, 4.1.1.5).

> *„Denn wenn Begabungen im Sinne von Potenzialen jedem Menschen zugesprochen werden und sie als eine der kostbarsten Ressourcen jeder Gesellschaft betrachtet werden können, so trifft dies nicht nur auf einige wenige zu, sondern auf alle, und ihre Förderung muss ein besonderes Anliegen jeder schulischen Arbeit sein." (Weigand, et al., 2014 S. 226)*

2.1.3.1 Werteorientierte Schulentwicklung

Schulentwicklung umfasst grundsätzlich die drei Themenbereiche Organisationsentwicklung, Unterrichtsentwicklung und Personalentwicklung (4, 4.2.3, 4.2.4). Hackl stellt fest, dass sich in der Vergangenheit „die Entwicklung an der Peripherie des Systems Schule vor allem um systemische Faktoren oder um einzelne Problemfelder, aber nicht um die Lernenden selbst“ (Weigand, et al., 2014 S. 229) drehte. Im Unterschied zu einer systemisch gedachten Schulentwicklungstheorie geht eine personorientierte Schulentwicklung (4.1) vom Ansatz einer personalen Bildung aus, wie sie in 2.1.1 entwickelt wurde.
Die mit dem Personbegriff verbundenen Werte Autonomie, Verantwortung, Leistung (Aneignung), Partizipation (Beteiligung) (2.1.1.3, Abbildung 2 S.16) sind daher wegweisend für eine werteorientierte Schulentwicklung.
Schulentwicklung wird in der Auffassung Hackls neben den o.g. Themen ergänzt um den vierten Themenbereich der Personwerte (2.1.1.1, 2.1.1.3). Da dieser Bereich nicht grundsätzlich homogen von der Gesamtgesellschaft akzeptiert ist, Werte „nicht verordnet und angeordnet“ (Weigand, et al., 2014 S. 231) werden können, kann die gemeinsame Wertebasis nur in einem Diskurs geklärt und als entwickeltes Werteprofil einer Schule und damit dem schulgebundenen Entwicklungsprozess zugrunde gelegt werden (2.1.3.2, 2.2.3, 4.1). Hackl sieht in diesem Wertedefinitionsprozess die demokratische Legitimation einer Steuergruppe, die „die permanente Ausrichtung der Einzelprozesse auf das Gesamtziel (Werte) der Schule im Auge hat“ (ebd.).
Eine schulkulturelle Werteerziehung findet in drei Schritten statt: Wertefindung, Vereinbarung und Implementierung, Reflexion und Evaluation. Sie ist nicht nur eine Frage der Schulidentität (4), sondern auch eine Frage der Lernstimulation und damit auch der fachübergreifenden und fachbezogenen Begabungsförderung (2.1, 2.2, 2.2.4). Eine Schule macht sich durch einen Wertefindungsprozess „wertvoll“, der alle Akteure solidarisch „verpflichtet, die verabredeten Werte durch ihren persönlichen und individuellen Ausdruck ins Erleben, ins Handeln, und ins Ritual der Schule zu bringen“ (Weigand, et al., 2014 S. 232) (2.1.1.5, 4.2, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3).

Schulentwicklung kann „von unten“ und „von oben“ gelingen. Im ersten Fall beruht sie auf der Veränderungsinitiative Einzelner und betrifft deren Wirkungskreis (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4). Sie entwickelt sich aus der Verantwortung (2.1.1.5, 2.1.3.2) und dem Mut der Initiatoren (2.1.2.2) und ist damit grundsätzlich Ausdruck eines personalen Bildungsprozesses (2.1.1). „Die Unterstützung einer experimentellen Kultur durch die Schulleitung kann zu einem hohen Engagement verschiedener Lehrpersonen … führen“ (Weigand, et al., 2014 S. 233) (4.2), wenn darauf geachtet wird, dass sich kein Wildwuchs der Entwicklungen einstellt. Diese wären dann durch eine Schulentwicklung „von oben“ zu korrigieren.

Teams bilden das personale Rückgrat einer Schulentwicklung. Dies setzt die Einsicht voraus, dass Gruppen mehr leisten können als der Einzelne es vermag. Hackl nennt in (Weigand, et al., 2014 S. 234ff.) Gelingensbedingungen für den Einsatz von Teams in der Schulentwicklung.
Teams verkörpern grundsätzlich auch die personale Wertebasis (Autonomie, Verantwortung, Aneignung, Partizipation), die eine wesentliche Grundlage dieser Ausführungen bildet (2.1.1, 2.1.1.3).

Die Werteetablierung an der Schule findet auf der Grundlage von Partizipation statt, ebenso wie die Werteimplementierung an einer Schule auf der Grundlage von Partizipation stattfindet. Dies erfordert eine partizipative Führungskultur. Sie zeigt sich in den folgenden Dimensionen:

- „Visionen kommunizieren und Prozesse einleiten
- Herausforderungen schaffen, neue Ideen formulieren
- Individuelle Förderungen und Unterstützung vorhalten
- Konsens über Ziele erreichen
- Vorbild sein, d. h. Vorleben wichtiger Werthaltungen
- Schulkultur pflegen, die vom Geist der Zusammenarbeit geprägt ist
- Prozesse und Strukturen für gemeinsame Entscheidungen schaffen“ (Weigand, et al., 2014 S. 237)

In den Bereich der Partizipation fällt auch die Entscheidungsfreiheit der einzelnen Lehrperson, in welcher Weise und in welchem Umfang sie beispielsweise in der Begabungsförderung tätig sein möchte (4.1.1.1, 4.2.1).

> *„Die Wahlfreiheit gehört erfahrungsgemäß zu den stärksten Stimulatoren einer aktiven Teilnahme am Entwicklungsprozess einer Schule und ist zudem eine Voraussetzung für die Ermöglichung eines weithin eigengestalteten Lernprozesses bei den Lernenden." (Weigand, et al., 2014 S. 237)*

Partizipation benötigt Strukturen und Gremien, in denen sie praktiziert werden kann als Ausdruck des autonomen Lernens (3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.4, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3), des verantworteten Lernens (2.1.3.2, 2.2.3, 2.2.4, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6, 3.1.6.4, 3.2.3, 3.3, 3.3.2, 3.4, 4.1.1.5, 4.2) und des Eigensinn-Gemeinsinn-Gedankens (2.1.1, 2.1.3.2, 2.2.1.2, 2.2.4.3, 3.1.6.4, 4.1, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3) einer personorientierten Pädagogik.

Anders als Teams und Gremien greifen Netzwerke über die Schule hinaus. Sie nehmen Partnerschulen, externe Partner, Hochschulen und die Administration in den Blick. Hackl nennt als „wesentliche Impulse für die eigene Entwicklung … Exkursionen und Begegnungen, … Schüler- und Lehreraustausch mit Partnerschulen der Begabungsförderung, … Hospitationen und Supervisionen als „critical friend", … gemeinsame Schulprojekte und Begegnungen bei Tagungen und Kongressen" (Weigand, et al., 2014 S. 240) (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.2, 3.1.6.3, 3.1.7, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3). Netzwerke sind für ihn „personale Entwicklungsagentur" (ebd.) für eigene Ideen und Visionen.

2.1.3.2 Verantwortung als Leitidee

War Verantwortung im vorhergehenden Abschnitt nur einer von vier aus dem Personbegriff abgeleiteten Werte (2.1.1.3), postuliert Maulbetsch „gelebte Verantwortung" (Maulbetsch, 2014) als zentrale Voraussetzung für gelingende Bildungs-, Begabungs- und Lernprozesse wie auch für gelingende personorientierte Schulentwicklung: Verantwortung für sich, für andere, für das Gemeinsame (4.1, 4.2).
Auch Maulbetsch leitet Verantwortung aus dem Personbegriff und der damit implizierten Autorschaft jedes einzelnen Menschen für sein eigenes Leben ab (2.1.1). Verantwortung geschieht vor dem Prinzip der „Entfaltung der Potenziale

jedes einzelnen Schülers“ als entscheidendem „Bezugspunkt für Schulentwicklung“ (Maulbetsch, 2014 S. 244) (2.1.1, 2.2.1.1, 3, 4.1).
Verantwortung kann eine Orientierungshilfe für Lehrerhandeln darstellen, wenn herkömmliche Kompetenzmodelle zu kurz greifen, weil sie keine allgemein anerkannten Maßstäbe für konkretes Handeln in pädagogischen Situationen anbieten (2.2.3, 3). Professionelles Lehrerhandeln kann sich nicht auf Handlungsrezepte stützen, sondern fundiert wesentlich in der Persönlichkeit des Lehrenden (2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.2.4, 2.2.3, 2.2.5, 3, 4.2.3). Sie bestimmt nach Roth die „Grundhaltung gegenüber seiner beruflichen Tätigkeit und gegenüber den Lernenden“ (Maulbetsch, 2014 S. 245). Damit ist die Persönlichkeit und mit ihr die Verantwortungsbereitschaft und die Verantwortungsfähigkeit der Lehrperson entscheidend für gelingende Bildungs- und Begabungsprozesse (4.1.1.5).
Die inhaltliche Offenheit von Verantwortung lässt sich in drei Ebenen beschreiben. Die *zeitliche* Dimension bringt zum Ausdruck, dass die Lehrkraft verantwortlich ist in einem prospektiven Sinn für das planbare, pädagogische Handeln mit Bezug auf den Lernenden und den Lerngegenstand, in einem retrospektiven Sinn für den mitgestalteten Begabungsentfaltungsprozess im Lernenden (2.1.1.5, 2.1.3.3, 3.1.6, 3.3, 3.4.1.3, 3.4.2). Die *relationale* Verantwortung umfasst im Sinne eines mehrdimensionalen Verantwortungsbegriffs das *Verantwortungssubjekt*, den *Verantwortungsinhalt* und die *Verantwortungsinstanz* (2.2, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.2, 3.2.3.2, 3.2.3.3 , 3.2.5, 3.3.1.1, 3.3.1.2, 3.3.1.3, 3.3.2.1, 3.3.2.2, 3.4.1, 3.4.2, 4.1). Verantwortungsvolles Handeln ist durch Freiheit und Pflicht bestimmt und orientiert sich an Normen und Werten. Damit hat sie auch eine *ethische* Dimension (2.1.1, 2.2, 4.1). Der Verantwortungsbegriff stellt hohe Anforderungen an die Lehrkraft. Er impliziert, dass jede Lehrperson „für das eigene Handeln die jeweiligen Ansprüche der drei möglichen Verantwortungsebenen durch Abwägen ausgleicht und eigenständig in jeder Handlungssituation eine neue Präferenz festlegt“ (Maulbetsch, 2014 S. 247). Sie ist in Verantwortungsdialogen zu legitimieren und gegebenenfalls zu korrigieren.

Die professionelle, praktische Verantwortungskompetenz für Lehrerhandeln sieht Maulbetsch in vier Ebenen:

- „Intrapersonale Ebene (Verantwortung für sich selbst)

- Interpersonelle Ebene (soziale Verantwortung für andere)
- Intragruppale Ebene (Verantwortung für das Lernen im Unterricht)
- Institutionell-organisationale Ebene (Verantwortung für Schulgestaltung und –entwicklung)“ (Maulbetsch, 2014 S. 248)

Verantwortungskompetenz begreift Maulbetsch im Gegensatz zu herkömmlichen Kompetenzmodellen als Metakompetenzmodell, das eine Lehrkraft in die Lage versetzt, selbst umfassend Verantwortung zu übernehmen und damit begabungsfördernd tätig zu sein (4.2.3).

Verantwortete Schulentwicklung überträgt die Verantwortung auf alle im schulischen Kontext handelnden Personen (4.1). Maulbetsch postuliert, dass Verantwortung auf allen Ebenen nur in einer bestmöglichen Organisation einer Schule realisiert werden kann (Maulbetsch, 2014 S. 249). Hier wiederum legt die Autorin Wert auf die Realisierung einer lernenden Organisation, wie sie durch ein Zusammenwirken von „Vision und Motivation“ (z. B. Leitbildentwicklung), eine „Infrastruktur der Innovation“ (z. B. Einrichtung einer Steuergruppe oder einer erweiterten Schulleitung) und „Innovationsstrategien und Verfahren“ (z. B. Evaluation) umgesetzt werden kann.
Im Bereich einer verantworteten Schulentwicklung sieht Maulbetsch ferner emotionale Aspekte einer Organisationsentwicklung, den Aspekt der Implementierungsbrücke, die Rolle von Lehrpersonen als Betroffene und als Anwender von Innovationen (4).

2.1.3.3 Das „Schoolwide Enrichment Model“ (SEM)

Das „Schoolwide Enrichment Model“ (SEM) für inklusive Begabungs- und Begabtenförderung nach Renzulli und Reis (Renzulli, et al., 2001) (Renzulli, 2012) ist weltweit anerkannt. Es stellt ein detailliertes Konzept dar, auf dessen Basis jede Schule flexibel ein eigenes Programm unter Berücksichtigung der eigenen Ressourcen, der eigenen Schulentwicklungsdynamik, der Stärken der Lehrkräfte sowie der Begabungspotenziale der Schüler entwickeln kann (4). Das SEM respektiert die gewachsenen Schulstrukturen und ist auf alle Schulstufen in allen Schularten anwendbar.

Das SEM hat neben der Erforschung von Begabung (2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.2) und Hochleistung (2.2.2) das Ziel, den Schulen „erfolgreiche und erprobte Praktiken zur Verfügung zu stellen, die so aufeinander abgestimmt sind, dass sie beides ermöglichen: ‚Highend learning' für Hochbegabte, ebenso wie ein integratives Modell breiter Begabungsförderung aller im Sinn von ‚a rising tide lifts all the ships' " (Weigand, et al., 2014 S. 253).

> *„Mit Blick auf ... schulische und gesellschaftliche Praktika scheinen zwei unterschiedliche Formen von Begabung die Wahrnehmungen zu prägen: Schulische Begabung und Hochleistung (‚Schoolhouse Giftedness') und kreativ-produktive Begabung im an die Schule anschließenden (Berufs-)Leben (‚Creative-productive Giftedness')." (ebd.)*

Offensichtlich scheint die erste Art für Lehrpersonen leicht in guten Noten und guten Schulleistungen diagnostizierbar zu sein. Sie sind ausschließlich Resultat von Begabungsfaktoren (2.2.2). Die zweite Art umfasst erweiterte Fähigkeiten: Die Anwendung von prozeduralem Wissen, unabhängiges und vernetztes Denken in komplexen Problemlöse- oder Gestaltungszusammenhängen (2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 2.2.5, 3, 4.2.2).

> *„Diese Form der Begabung kann sich in der Schule nur in entsprechend offenen und diese Fähigkeiten evozierenden Lernarrangements entwickeln und zeigen." (Weigand, et al., 2014 S. 254)*

Das SEM versucht, diese künstliche Trennung möglichst aufzulösen. Dazu dienen die Wahrnehmung intrinsischer Interessen der Schüler mit ihren Bezügen zu außerschulischen Begabungsdomänen (2.1.1.4, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3) und die gezielte Förderung von Persönlichkeitskompetenzen, die beruflichen Erfolg wesentlich mitbedingen (2.2.1.1, 2.2.1.3).

Es ist „unbestritten, dass zwar jeder Klassenunterricht möglichst individualisierend und begabungsfördernd sein soll, dass aber auch der differenzierteste allgemeine Klassenunterricht nicht vermag, spezifische Begabungspotenziale fachlich genügend anspruchsvoll zu fördern" (Weigand, et al., 2014 S. 255). Müller-Oppliger sieht vier *Fördermaßnahmen*:

- „mehrdimensionale Identifikation besonderer Begabungspotenziale über gezeigte Schulleistungen hinaus und unter Berücksichtigung dessen, dass

Begabungen sich zu unterschiedlichen Zeitpunkten und in unterschiedlichen Situationen mehr oder weniger zeigen“ (Weigand, et al., 2014 S. 254f.) (2.2.2, 3.1.5, 3.1.6.3, 4.2.2.1, 4.2.2.3)

- „Curriculum-Modifikationen im Sinne von Lehrplanstraffung (Compacting) für Schüler, die etwas bereits können und weniger Übungszeit benötigen; entsprechende Vertiefungsangebote und anregende Herausforderungen innerhalb der Lehrplaninhalte für die durch die Komprimierung frei werdende Lernzeit“ (ebd.) (3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2)
- „zusätzliche Lehr- und Lernangebote (Enrichment) über den regulären und normativen Lehrplan hinaus für Interessierte und Begabte“ (ebd.) (3)
- „das ‚Total Talent Portfolio’ als Dossier individualisierter Leistungsnachweise, das sowohl eine qualifizierende wie auch eine die Lernwege steuernde Funktion einnimmt“ (ebd.). (2.1.2.6, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7)

Orte der Begabungsförderung nach SEM sind die Stammklasse und die Enrichmentgruppe, die in einem inklusiven Ansatz an der gleichen Schule existieren (3). Daneben gibt es Orte mit spezieller Förderung, wie Teilnahme an Förderprogrammen und Wettbewerben, Sommerakademien, Frühstudium, Forschungspraktika, etc. (3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.6.2, 4.2.2)

Methoden der Begabungsförderung nach SEM sind nach Müller-Oppliger (Weigand, et al., 2014 S. 257ff.):

- Lehrplanstraffung (Curriculum Compacting) (3.3.1, 3.4.1)
- Parallelcurriculum mit den Schwerpunkten Vernetzung (Curriculum of Connections), Anwendung (Curriculum of Practice), Identität (Curriculum of Identity) (3.3.1, 3.4.1, 3.1.6.2)
  Insbesondere im letzten Schwerpunkt ist ein unmittelbarer Bezug zur personorientierten Begabungsförderung erkennbar.
- Enrichmentprogramme nach dem Triad-Modell (Abbildung 5)
  Type I: Generelle explorative und Interessen weckende Aktivitäten (3.1.6.1, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2)
  Type II: Aufbau von Methodenkompetenzen, Lernstrategien und Praktiken (3.1, 3.2, 3.3, 3.4)

Type III: Individuelle Freiarbeit oder Gruppenprojekte (3.1.5, 3.1.7, 4.2.2.1, 4.2.2.3)

- Talentportfolio (2.1.2.6, 3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.6.4)

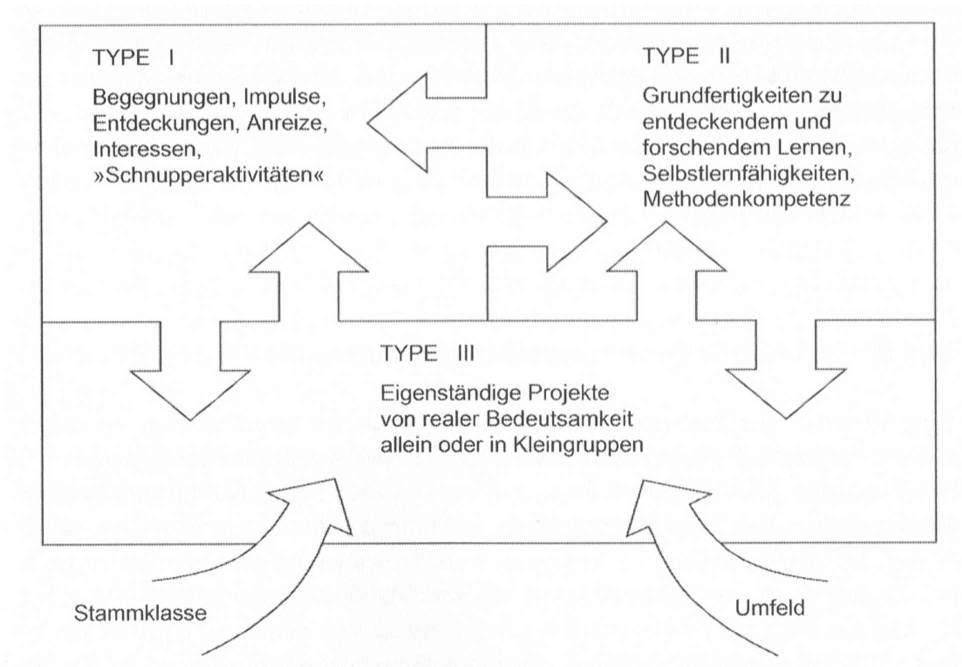


Abbildung 5 Triad-Modell, entnommen aus (Weigand et. al. 2014, S. 259)

Die *Identifikation* der Schüler für Programme spezieller Begabtenförderung nach SEM geht davon aus, dass ca. 15% aller Schüler im Begabungspool einer Schule zusätzlich gefördert werden sollen (2.1.1.2). Begabungen zu erkennen ist als Begabungsdiagnostik eine pädagogische Kernaufgabe (Bardy, 2007) (BMBF, 2017) (BMBF, 2016) (Heller, 2004) (ISB, 2011) (Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung, 2012) (Landesschulamt und Lehrkräfteakademie, 2013) (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, 2011).

Die Identifikation sollte daher grundsätzlich durch Lehrpersonen und nicht allein auf der Basis von Schulleistungstests erfolgen (2.1.1.4, 2.1.1.5), verschiedene Nominationsmöglichkeiten wie auch eine Interessenssignalisierung der Schüler zulassen und Eltern und Schülern eine Orientierung geben (2.2.1, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 4).

Das „Drehtürmodell“ (Weigand, et al., 2014 S. 264) kann eine Lösung für die Identifikation förderungswürdiger Begabungen darstellen.

In Ergänzung des SEM stellt Müller-Oppliger (Weigand, et al., 2014 S. 266ff.) fünf *lernpsychologische Aspekte* der Begabungsförderung zusammen (2.1.1.4):

- Emotion als Basis der Begabungsentfaltung

> *„Emotionale Sicherheit ist für viele Begabte eine Grundvoraussetzung, ihre Begabungspotenziale positiv zu realisieren.“ (Weigand, et al., 2014 S. 268)*

  Freude als grundlegende Emotion wird in 2.2.5 noch näher betrachtet.

- Motivation und Volition

  Hier liegen Querbezüge, basierend auf Selbstkonzept und Selbstwirksamkeit, zur Autorschaft des eigenen Bildungsprozesses vor (2.2.1.1, 2.2.1.3, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3).

- Kognition: Anschlussfähigkeit und „High Order Thinking“

  Dies impliziert einen sehr anspruchsvollen Auftrag an Unterrichtsentwicklung (3) und Schulentwicklung (4).

> *„Für die Unterrichtsentwicklung bedeutet dies, einerseits Lernarrangements zu entwickeln, die vermögen, Schüler/innen auf unterschiedlichsten Lernniveaus, von Lernschwächeren bis Hochbegabten, anzusprechen und andererseits Lerndialoge zu inszenieren, in denen gegenseitiges Lernen voneinander ... als Lernprinzip wirksam werden kann.“ (Weigand, et al., 2014 S. 269)*

  Pointiert formuliert: „…whatever curriculum challenge the teacher offers, it must incorporate Higher Order Thinking Skills (HOTS) not More of the Same (MOTS) “ (ebd.)

  Kognition erreicht unterschiedliche Taxonomiestufen:

  Erinnern, Wissen
  Verstehen, Erfassen
  Anwenden, Übertragen
  Analysieren
  Evaluieren
  Kreieren

  (Anderson/Krathwohl 2001, zitiert nach (Weigand, et al., 2014 S. 270)) (3.1, 3.2, 3.3, 3.4)

- Hochleistung zeigt sich in Aktionen (3.1.5, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3).
- Reflexion: Aufbau von Selbstbewusstsein und Selbststeuerung Emotionen, Motivation, Kognition, Aktion münden in Reflexion (2.2.2, 2.2.3, 3.3.2, 3.4.2.2, 4.2.2.3).

> *„Aus diesem Grund erscheint eine differenzierte und auf Weiterentwicklung angelegte Reflexion als bedeutsamste Schaltstelle für die Steuerung und Selbstgestaltung eigener Potenziale und Begabungen.“ (Weigand, et al., 2014 S. 271)*

Am Ende dieser Betrachtungen, Analysen und Herleitungen soll eine Reflexion dieses Abschnitts als Metareflexion zur Thematik Schulentwicklung unter dem Aspekt der Metadifferenzierung stehen:

> *„In den Schulentwicklungsprojekten mit den Schulen ergänzen sich jeweils die beiden Ebenen der äußeren Differenzierung (Flexibilisierung der Strukturen, den Regelunterricht ergänzende Förderangebote und Lernbegleitung/Mentorate), die wir als Choreografie inklusiver Begabungsförderung einer Schule bezeichnen, mit der Unterrichtsentwicklung der inneren Differenzierung für einen begabungsdifferenzierenden Unterricht.“ (Weigand, et al., 2014 S. 272)*

Sie bildet eine Brücke zu personorientierten, begabungsfördernden Unterrichtskonzepten im Mathematikunterricht (3).

2.2 Mathematische Begabung

Der Wert der Mathematik als Wissenschaft ist unbestritten. Sie hat sich seit der Prähistorie als gemeinsame Kulturleistung der Menschheit entwickelt.
Mathematische Begabung ist von Person zu Person unterschiedlich ausgeprägt. Im Gegensatz zu anderen Begabungsformen gilt das öffentliche Bekenntnis zu einer eigenen defizitären mathematischen Begabung gelegentlich als en vogue (Beutelspacher, 1996). Dies deutet auf ein weit verbreitetes Missverständnis von mathematischer Begabung hin. Sie wird in der Öffentlichkeit oftmals nur in extremen Begabungsformen wie prozeduralen arithmetischen Techniken oder Mnemotechniken für Zahlendarstellungen wahrgenommen.
Als Resultat des vorangegangenen Kapitels muss jedoch gelten: Jede Person ist mathematisch begabt.
Während der anthropologische Ansatz über die Pädagogik zur Didaktik und zu einer deskriptiven Auffassung mathematischer Begabung führt (2.1), sieht der psychologisch-somatische Ansatz diese als Ausdruck hochkomplexer neurologischer Prozesse und führt so zu einer Innensicht jeder im Personprinzip begründeten mathematischen Begabung. Ebenfalls der Psychologie entstammen die in 2.2.1 vorzustellenden (Hoch)Begabungsförderungsmodelle. Sie nehmen die Relationalität der zu begabenden Person als Schlüssel für Begabungsförderung in den Blick (2.1.1.1).
Ulm fasst die Erkenntnisse aus Psychologie und Didaktik zusammen zu einem differenzierten Modell für mathematische Begabung (2.2.2).
Mit Hilton umreißt ein Fachwissenschaftler – exemplarisch für viele andere – in leidenschaftlicher und zeitlos gültiger Weise das Thema „Mathematische Bildung“ als Ziel mathematischer Begabung (2.2.3).
Schließlich wird versucht, didaktische Prinzipien für die Förderung mathematischer Begabungsprozesse zu begründen (2.2.4). Nicht zuletzt ist Freude eine wesentliche Gelingensbedingung für mathematisches Denken und die Förderung mathematischer Begabung (2.2.5).

2.2.1 Allgemeine Begabungstheorien

Mit Blick auf ihre Relevanz für die Förderung mathematischer Begabungen werden im Folgenden drei weltweit anerkannte Begabungstheorien aus der Psychologie vorgestellt.
Der kanadische Psychologe Gagné unterscheidet zwischen „giftedness“ und „talent“ und sieht „giftedness“ als Begabtsein (vgl. Begriff der „Gabe“ in 2.1.1.1) als Urgrund der Begabung und Ansatzpunkt für Begabungsförderungsprozesse (2.2.1.1, 2.1.1.2). Der US-amerikanische Psychologe Gardner spricht von multiplen Intelligenzen, die er empirisch belegbar in unterschiedlichen Gehirnregionen lokalisiert (2.2.1.2). Individuell unterschiedlich ausgeprägte mathematische Begabungen haben somatisch unterschiedliche Verankerungen. Daher legt dies den Schluss nahe, in der Pluralform von mathematischen Begabungen zu sprechen.
Die (Hoch)Begabungsförderungsmodelle von Heller und Perleth nehmen die Relationalität der zu begabenden Person, ihre co-kognitiven Faktoren und die Umwelt wieder in den Blick (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5). Sie münden in sehr differenzierten, fächerübergreifend anwendbaren Konstrukten (2.2.1.3).

2.2.1.1 Talentförderung im Sinne von Gagné

Gagné verfolgt einen psychologischen Ansatz, um Begabungsförderung zu erklären. Er geht aus von den beiden Grundbegriffen „giftedness“ und „talent“. In einem personorientierten Ansatz würde man diese Begriffe, wie eingangs aufgezeigt, als ein ursprünglich in der Person verankertes „Begabtsein“ und eine in der Person zu entwickelnde oder entwickelte „Begabung“ übersetzen (2.1.1.1). In der deutschsprachigen Übersetzung findet man jedoch die Übersetzung „Begabung“ und „Talent“ (Gagné, 2010). Entscheidend für das Verständnis ist, dass beide Begriffe den Begabungsentwicklungsprozess, hier: „Talententwicklungsprozess“, zwischen zwei Stufen beschreiben. Im Folgenden wird daher die Begrifflichkeit aus (Gagné, 2010) verwendet.
Gagné definiert beide Begriffe folgendermaßen:

> *„Begabung bezeichnet den Besitz und die Anwendung von außerordentlichen, natürlichen Anlagen in mindestens einem*

Fähigkeitsbereich, und zwar in einem Ausmaß, dass das Individuum mindestens zu den obersten 10%[8] seiner Altersgruppe zu rechnen ist.

Talent kennzeichnet die herausragende Beherrschung von systematisch entwickelten Fähigkeiten, sogenannten Kompetenzen (Wissen und Können), auf mindestens einem Gebiet menschlicher Tätigkeit, und zwar in einem Ausmaß, dass das Individuum mindestens zu den obersten 10%[9] der in diesem Bereich Tätigen oder tätig Gewesenen in seiner Altersgruppe zu rechnen ist." (Gagné, 2010 S. 14)

Begabung, Talententwicklungsprozess und Talent bilden die Basis des „Differentiated Model of Giftedness and Talent" (DMGT, Abbildung 6).

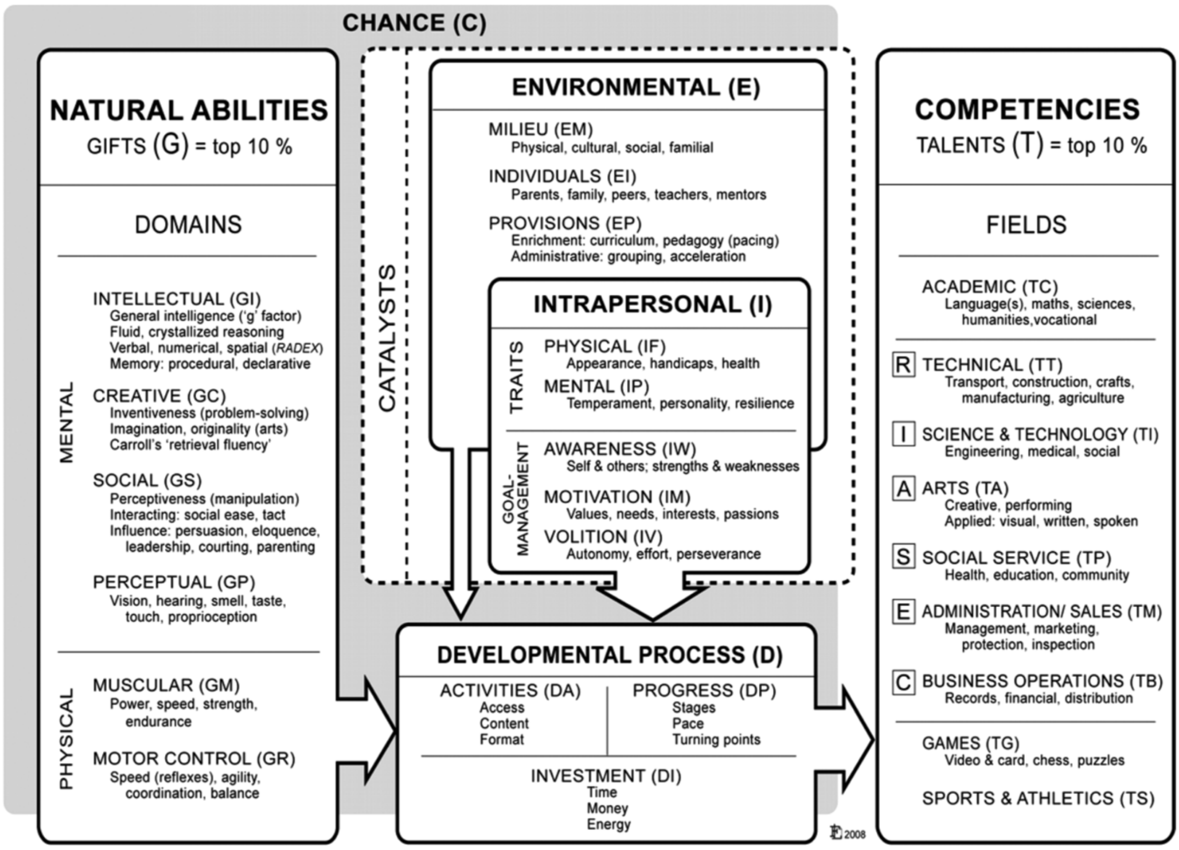


Abbildung 6 DMGT nach Gagné, aus (Gagné, 2010 S. 83)

Unter Begabungen versteht Gagné natürliche Fähigkeiten von mentaler und von physischer Ausprägung. Sie lassen sich leicht auf mathematische Begabungen

[8] Die Normierung von Begabung in dem Sinne, dass man bezogen auf eine Vergleichsgruppe zu den 10% Besserleistern gehört, ist willkürlich und wurde bereits in 2.1.1.2 erörtert.

[9] s.o.

übertragen. Im Bereich der intellektuellen Begabung (GI, Abbildung 6) lassen sich eine allgemein mathematische Begabung, ein mathematisch kristallisiertes Denken, eine mathematisch-sprachliche, eine mathematisch-arithmetische, eine mathematisch-räumliche Begabung, ein mathematisch-prozedurales und ein mathematisch-deklaratives Gedächtnis definieren (2.2.2, 3). Aber auch im Bereich der motorischen Begabung (GR) lassen sich mathematische Ausprägungen beispielsweise im Bereich geometrischer Konstruktionen festmachen. Gagné legt Wert darauf, dass natürliche Fähigkeiten nicht angeboren sind, sondern sich über die gesamte Lebensspanne entwickeln. Dieser Ansatz einer genetischen Fundierung der Talententwicklung wird ausführlich in (Gagné, 2015) in Form eines weiteren Modells, des „Development Model for Natural Abilities“ (DMNA) dargestellt und erläutert.

Am Ende des Talententwicklungsprozesses, der weit über die Schule hinausweist (3.1.6.4), stehen bei Gagné neun Talente, die neun Berufsfeldern[10] entsprechen. Mathematische Begabungsentwicklungspfade können hier in ganz unterschiedliche Talente münden, so dass von einem entwicklungspsychologischen Zielpunkt aus gedacht die Übertragung auf mathematische Talententwicklungsprozesse nicht so leicht gelingt.[11]

Allgemeine Aspekte des Talententwicklungsprozesses (D) haben für die schulische Begabungsförderung hingegen wieder hohe Relevanz. Aktivitäten (DA), Aufwand (DI) und Fortschritt (DP) sind wichtige Parameter (2.1.3.3, 3, 4). Der Einfluss der Entwicklungskatalysatoren (E, I) ist enorm wichtig (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.1.3, 2.2.3, 2.2.4, 3, 4). Hier ergeben sich vielfältige Anknüpfungspunkte zu den in Abschnitt 2.1 abgeleiteten Ausführungen. Bemerkenswert ist die Auffassung einer maßgeblichen Filterfunktion, die die intrapersonalen Bereiche (I) für die Umwelt-Katalysatoren haben (2.1.1.5, 2.1.2, 2.2.4, 4.1, 4.2).

> *„Der Hauptteil der Umwelt-Stimuli muss zuerst durch die individuellen Bedürfnisse, Interessen und Persönlichkeitsmerkmale des Einzelnen*

---

[10] vgl. RIASEC-Modell für berufsbezogene Klassifikation von Persönlichkeitstypen nach John Hollands (Realistic, Investigative, Artistic, Social, Enterprising, Conventional)

[11] Hier liegt auch ein wesentlicher Unterschied zum personorientierten Entwicklungsansatz über die Lebensspanne und darüber hinaus vor (vgl. 2.1.1).

> *gefiltert werden. Talentierte suchen sich laufend aus, welche Stimuli sie jeweils gerade zulassen." (Gagné, 2010 S. 17)*

Hier sind wir wieder im Zentrum der zu begabenden Person (2.1.1.1).
Und natürlich ist Talententwicklung eine Chance (C), kein Zufall[12]. Um mit Atkinson zu sprechen, der formulierte, „dass alle menschlichen Leistungen zwei entscheidenden Zufällen zugeschrieben werden können: dem Zufall der Geburt und dem Zufall der Familienverhältnisse" (Gagné, 2010 S. 18), ist mit Blick auf das Thema zu formulieren, dass alle mathematischen Leistungen drei entscheidenden Zufällen zugeschrieben werden können: dem Zufall der Geburt, dem Zufall der Familienverhältnisse und dem Zufall des Mathematikunterrichts. Dessen Gestaltung ist jedoch kein Zufall, sondern eine Chance (2.2.4, 3, 4).
Gagné selbst zieht das Resümee, dass „die Talentwerdung das Ergebnis einer komplexen Choreographie zwischen den vier kausalen Bausteinen ist, eine Choreographie, die für jedes Individuum einzigartig abläuft" (Gagné, 2010 S. 19) (2.1.1.4, 2.1.2.3). Damit stellt das DMGT ein psychologisches Fundament für personorientierte Begabungsförderung (2.1) bereit.

Anstelle methodisch-didaktischer Prinzipien für Begabungsförderung (2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.2.4) formuliert Gagné zehn Gebote für akademische Talententwicklung.

„I. - Thou Shalt Distinguish ... Horizontally! ...
II. - Thou Shalt Discriminate ... Vertically! ...
III. - Thou Shalt Identify ... Multicomponently! ...
IV. - Thou Shalt Select ... Armsopenly! ...
V. - Thou Shalt Intervene ... Earliestly! ...
VI. - Thou Shalt Condens ... Foremostly! ...
VII. - Thou Shalt Accelerate ... Asneededly! ...
VIII. - Thou Shalt Enrich ... Relevantly! ...
IX. - Thou Shalt Group ... Fulltimely! ...

[12] Wiederum konnotiert hier eine wörtliche Übersetzung chance – Zufall nicht richtig.

X. - Thou Shalt Dream … Eyeswideopenly! " (Gagné, 2007)[13]

Und auf die Frage, wann man mit mathematischer Begabungsförderung beginnen solle, würde er bestimmt auch Sherlock Holmes bemühen: „Pre-elementary, my dear Watson!" (ebd.) (2.1.1.1, 2.1.1.4, 2.1.2.6, 3.4.2.2, 4.1, 4.1.1.5)

2.2.1.2 Die Idee der multiplen Intelligenzen nach Gardner

Wie Gagné (2.2.1.1) sieht auch Gardner weder eine einheitliche Intelligenz noch eine einheitliche Begabung. Er verankert seine Betrachtungen ebenfalls in letzter Konsequenz somatisch, in dem er aus Ausfallerscheinungen des Gehirns bei Schlaganfallpatienten Rückschlüsse auf lokale und funktionale Ausprägungen der Intelligenz zieht. Gardner verortet seine Betrachtungen zugleich personal (2.1.1.1), indem er immer auch je eine außergewöhnliche Persönlichkeit in exemplarischer Weise als Inhaber einer Intelligenz vorstellt (Gardner, 2011) (Gardner, 1993).
Bereits 1993 spricht Gardner von der Notwendigkeit einer „individual-centered-school" (Gardner, 1993 S. 6f.) gegenüber einer „uniform-school" (ebd.) und begründet auf diese Weise die Notwendigkeit einer personorientierten Schule (2.1.1.3, 2.1.3, 2.2.3, 2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 4.1). Er tut dies im Gleichtakt mit der Aufweichung eines einheitlichen IQ-Faktors (2.1.1.2) und der Proklamation eines Konzepts der multiplen Intelligenzen.

Im Folgenden werden die deskriptiven, somatischen und personalen Ausprägungen der multiplen Intelligenzen nach Gardner überblicksweise dargestellt.
Kennzeichen von Intelligenz sind die Fähigkeit, Probleme zu lösen, (‚problem-solving skill'), die Einbettung des Ergebnisses in einen kulturellen Hintergrund (‚creation of a cultural product') und eine biologische Fundierung (‚biological origin') (Gardner, 1993 S. 9f.).

---

[13] Diese Quelle steht auch unter http://nationdeceived.org zur Verfügung. Den „Ausführungsbestimmungen" der o.g. „Zehn Gebote" können viele praktische Unterrichtshinweise entnommen werden.

Musikalische Intelligenz repräsentiert Yehudi Menuhin; sie ist hauptsächlich in der rechten Gehirnhälfte lokalisiert (Gardner, 1993 S. 12f.).
Körperlich-kinästhetische Intelligenz zeigt sich in Babe Ruth; sie ist im Motorkortex, sowie in der dem sich bewegenden Körperteil gegenüberliegenden Großhirnhälfte lokalisiert (Gardner, 1993 S. 13f.).
Logisch-mathematische Intelligenz verkörpert Barbara McClintock[14]. Die sprachlichen Bereiche in den Frontotemporallappen sind wichtiger für logisches Schlussfolgern, die visuell-räumlichen Bereiche in den beidseitigen Parietofrontallappen wichtiger für numerische Berechnungen.
Anhand eines „Eureka, I have it!" – Erlebnisses macht Gardner zwei essenzielle Fakten für logisch-mathematische Intelligenz fest: Der Prozess des Problemlösens läuft oft bemerkenswert schnell ab. Logisch-mathematische Intelligenz hat eine nicht-verbale Natur. Das „Aha" – Erlebnis ist oft intuitiv und nicht vorhersehbar (2.1.2.6, 3.1.5, 3.1.6.3).
Gardner weist darauf hin, dass einerseits logisch-mathematische Denkprozesse eine wesentliche Basis für IQ-Tests und den allgemeinen Intelligenzbegriff darstellen und sehr intensiv untersucht worden sind, dass jedoch die Mechanismen, die zur Lösung einer logisch-mathematischen Aufgabe führen, noch nicht vollständig verstanden sind und es immer mysteriöse Lösungssprünge geben wird.
In einem personorientierten Ansatz einer mathematischen Begabungsförderung wird man dieses letzte Geheimnis logisch-mathematischer Denkprozesse immer im Urgrund der Person des Lernenden belassen und im Bewusstsein dieses „Mysteriums" den Blick mehr auf Denkförderangebote lenken (Gardner, 1993 S. 15f.) (2.1.1, 2.1.1.4, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 2.2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4, 3, 4.1, 4.2, 4.3).
Sprachliche Intelligenz zeigt sich in T.S. Eliot und ist mehrheitlich in der linken Großhirnhemisphäre angesiedelt (Gardner, 1993 S. 16f.) (2.2.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 3.3.2, 3.4.2.2, 3.4.2.3, 3.4.2.4, 4.2.2.2, 4.2.2.3, 4.3).
Für *räumliche Intelligenz* benennt Gardner keinen Repräsentanten, sie ist in der rechten Gehirnhälfte in den hinteren Regionen des Kortex lokalisiert (Gardner, 1993 S. 17f.) (2.2.2, 3.1, 3.2, 3.4.2.3, 3.4.2.4, 4.2.2.3).

[14] Nobelpreis für Medizin 1983

Die *interpersonale Intelligenz* konnte Anne Sullivan in einem repräsentativen Fall ideal entwickeln; sie ist in den Frontallappen lokalisiert (Gardner, 1993 S. 18ff.) (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.5, 3.1.6.3, 3.3.2, 3.4.2.2, 4.2.2.2, 4.2.2.3, 4.3).
Die *intrapersonale Intelligenz* zeigt sich in Virginia Woolf; sie ist ebenfalls in den Frontallappen lokalisiert (Gardner, 1993 S. 21f.) (2.1.1.1, 2.1.2.6, 3.1.6.3, 4.2.2.1, 4.2.2.3, 4.3).

Das Modell der multiplen Intelligenzen ist nicht absolut abgeschlossen. So erörtert Gardner eine *naturalistische Intelligenz*, um Darwin zu erklären, oder eine spirituelle Intelligenz bzw. eine Intelligenz der großen Fragen. Insbesondere letztere wird jedoch stark bestritten (Perleth, 2007).
Entscheidend ist, dass die unterschiedlichen Intelligenzen in einer Person konzertieren. Im Besonderen bedeutet das Konzept der multiplen Intelligenzen für die Förderung mathematischer Begabungen, dass diese in unterschiedlichen Intelligenzen und auch in unterschiedlichen Gehirnarealen verortet werden können (2.2.2). Für die Lehrperson leitet sich als Ziel ab, dass man die unterschiedlichen Intelligenzen in der lernenden Person, um im Bild zu bleiben, zu einem möglichst harmonischen Konzert anregt (ebd.). Insofern unterstützt das Konzept der multiplen Intelligenzen die Prämissen einer personorientierten Förderung (2.1) in idealer Weise.
Gardner warnt:

> *„A person with high mathematical intelligence might use her abilities to carry out important experiments in physics or create powerful new geometric proofs; but she might waste these abilities in playing the lottery all day or multiplying ten-digit numbers in her head." (Gardner, 1993 S. 30)*

Gardner sieht drei Typen, an denen die Gesellschaft krankt, die er „Westist", „Testist" und „Bestist" (ebd.) nennt. Der „Westist" stützt sich in einem sokratischen Verständnis allein auf logisch-rationales Denken und übersieht die anderen Intelligenzen (2.1.2.3, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.1.3.3, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.1.6.3, 3.4.1, 4.2.2.3). Der „Testist" gründet menschliche Talente auf Tests. Gardner folgert daraus, dass Psychologen Menschen nicht so sehr in Rangfolgen abbilden, sondern ihnen helfen sollten, sich zu entwickeln (2.1.1.2, 2.1.1.5, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.1.1, 2.2.1.3, 2.2.2, 2.2.4, 3, 4). Der „Bestist" sieht nur einen, meist den logisch-

mathematischen Zugang zu einem Problem, und übersieht die anderen Lösungsansätze (2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.6.3, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2.4, 4.1.1.5, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3).
Entsprechend findet man auch in der Begabungsförderung diese drei Typen. Sie können nicht Ziel einer personorientierten Begabungsförderung sein.

Stattdessen formuliert Gardner ein sehr weitgestecktes Ziel,

> *„If we can mobilize the spectrum of human abilities, not only will people feel better about themselves and more competent; it is even possible that they will also feel more engaged and better able to join the rest of the world community in working for the broader good.“ (Gardner, 1993 S. 31)*

das unbestritten als Ziel eines personorientierten Bildungsprozess dienen kann (2.1.1, 2.1.3, 2.1.3.2, 2.2.3, 2.2.5, 3.1.6.4, 4, 4.1.1.2, 4.1.1.3, 4.2.2.1, 4.2.2.3).

2.2.1.3 Die Begabungsmodelle nach Renzulli, Mönks, Heller, Perleth

Während die Begabungs- und Intelligenzmodelle nach Gagné (2.2.1.1) und Gardner (2.2.1.2) nicht primär für die schulische Begabungsförderung entwickelt wurden, auch wenn beide klar Position für Schulentwicklungsprozesse bezogen, sind die folgenden Modelle mit Blick auf schulische Notwendigkeiten entstanden.

Renzulli entwickelte 1978 ein leicht verständliches und zugleich inspirierendes Drei-Ringe-Modell für Begabung, das im schulischen Kontext anwendbar und mit den empirischen Ergebnissen verträglich ist (Renzulli, 1978) (Renzulli, 2012). Eine überdurchschnittliche Begabung (2.1.1.2) liegt vor, wenn die Schnittmenge aus überdurchschnittlichen intellektuellen Fähigkeiten, Aufgabenzuwendung[15] und Kreativität nichtleer ist.

[15] manchmal auch: Engagement und Motivation

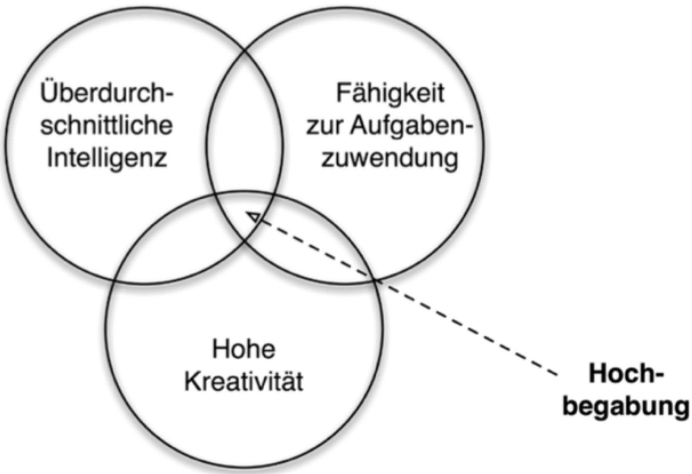


Abbildung 7 Drei-Ringe-Modell nach Renzulli, aus (ISB, 2011 S. 19)

Renzulli erreichte mit diesem elementaren Ansatz drei Ziele:

> *„First, it is derived from the best available research studies dealing with characteristics of gifted and talented individuals. Second, it provides guidance for the selection ... And finally, the definition provides direction for programming practices that will capitalize upon the characteristics that bring gifted youngsters to our attention as learners with special needs." (Renzulli, 1978 S. 261)*

In einer ersten Weiterentwicklung dieses Modells betrachtete Mönks das personale Umfeld eines überdurchschnittlich begabten Schülers. Er bezog Schule, Familie und Peers in die Überlegungen mit ein. Es entstand als interaktives Modell das Triadische Interdependenzmodell der Hochbegabung (Mönks, 1992).

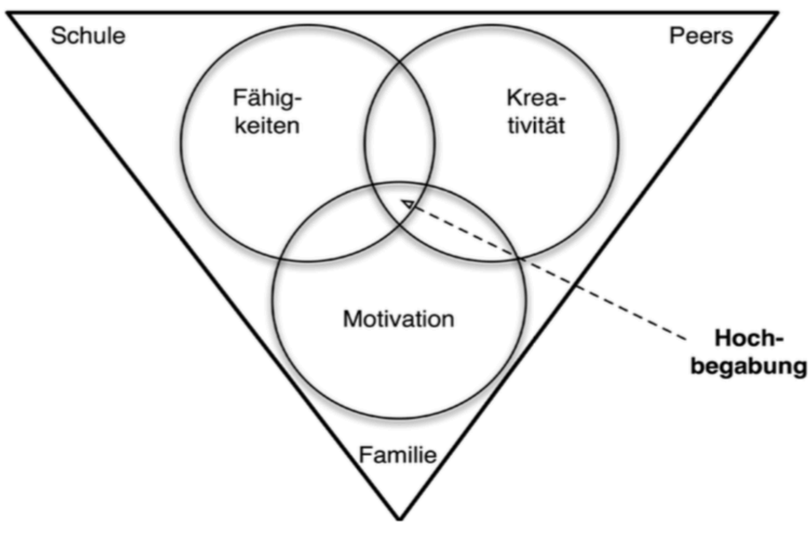


Abbildung 8 Triadisches Interdependenzmodell nach Mönks, aus (ISB, 2011 S. 20)

Mönks stellt fest:

> *„Das richtige Zusammentreffen von individuellen Anlagen und Bedürfnissen mit verständnisvoller und förderlicher Umwelt ist für die Entwicklung von entscheidender Bedeutung." (Mönks, 1992 S. 18)*

Mit Blick auf die konkrete Begabtenförderung definiert Mönks (hoch)begabte Schüler als „diejenigen Schüler, die *mehr* Lernstoff in *kürzerer Zeit* verarbeiten können und auch wollen" und leitet davon ab, dass „alle Fördermaßnahmen … darauf ab[zielen], begabten Schülern, … eine größere Breite und Tiefe des Lernstoffangebots zu vermitteln (Enrichment-Ansatz) und – falls dies nicht hinreichend ist – das Überspringen von einer oder mehreren Klassen zu ermöglichen (Akzelerationsansatz)" (Mönks, 1992 S. 21) (2.1.1.4, 2.1.2, 2.1.3.3, 2.2.3, 2.2.4, 3, 4.1, 4.2).

Heller entwickelte auf der Basis umfangreicher Studien ein noch weiter ausdifferenziertes Modell für Hochbegabung (Heller, 2013) (Heller, 2004) (Heller, 1976) (Heller, 1989) (Heller, et al., 2008).

Wie Gagné sieht auch er einen dynamischen Prozess der Entwicklung von Begabungsfaktoren, die jedoch bei Heller in schulischer Hochleistung mündet.

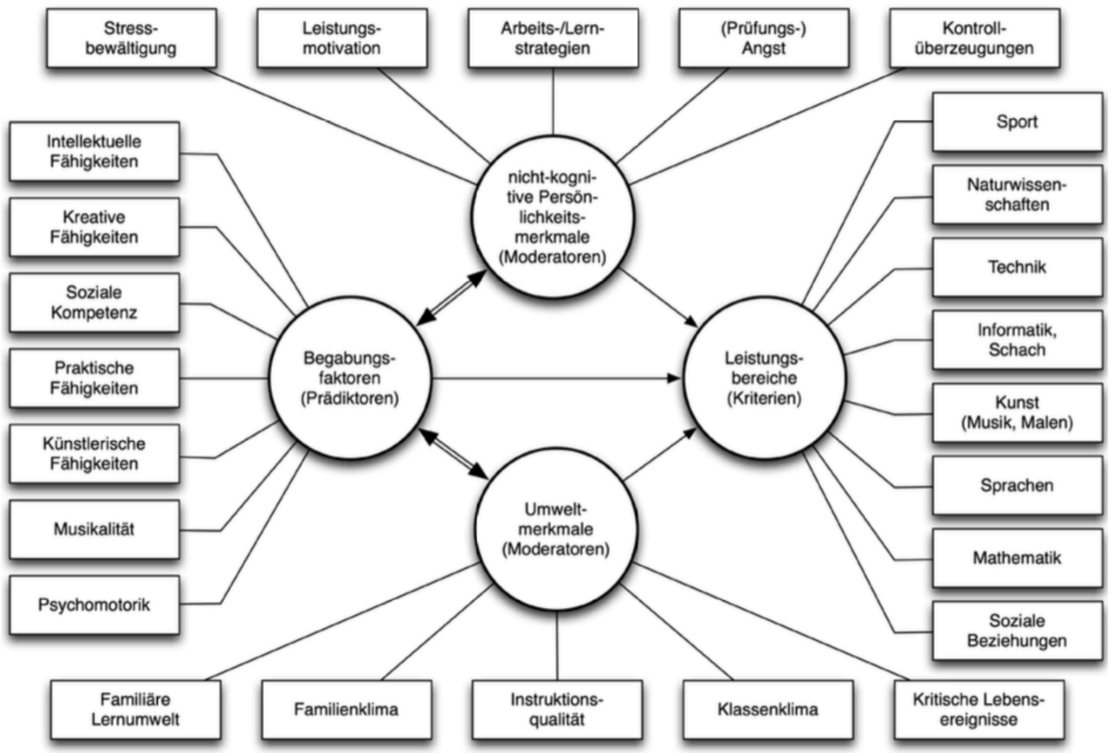


Abbildung 9 Münchener Hochbegabungsmodell nach Heller, aus (ISB, 2011 S. 22)

Eine wesentliche Moderatorenrolle spielen hier nichtkognitive Persönlichkeitsmerkmale und Umweltmerkmale (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.5, 3, 0).

Mit Perleth gerät ein weiterer, wichtiger Aspekt der Begabungsförderung ins Blickfeld: Maßgebliche Vertreter der Expertiseforschung leugnen „die Bedeutung von Intelligenz und Begabung für die Leistungsentwicklung zum Teil radikal“ (Perleth, 2012 S. 4). Es ist deren Auffassung, dass „lediglich motivationale Variablen und Interessen“ eine „prognostische Bedeutung“ haben (Perleth, 2012 S. 5). Perleth integriert die Impulse der Expertiseforschung in eine Weiterentwicklung des Münchener Hochbegabungsmodells zu einem dynamischen (Hoch)Begabungsmodell.

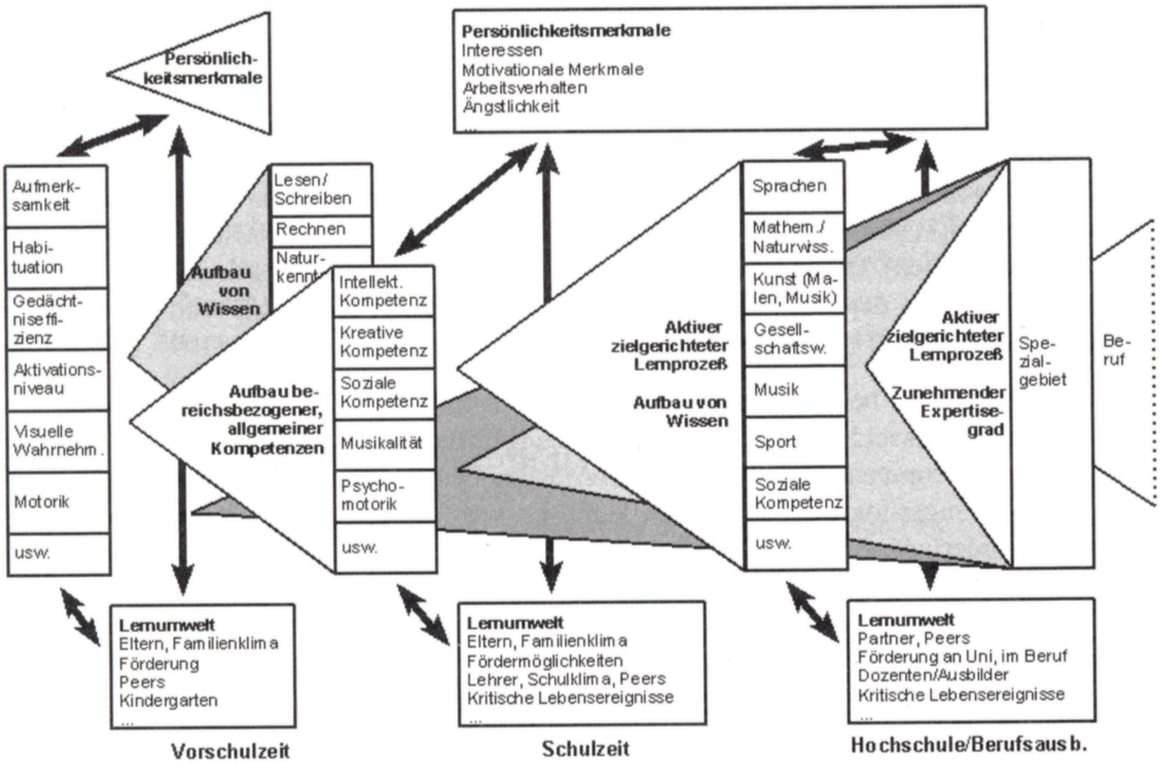


Abbildung 10 Dynamisches Hochbegabungsmodell, aus (Perleth, 2007 S. 170)

Perleth leitet folgende Folgerungen für den Unterricht von (hoch)begabten Schülern ab:

- *„Die **höheren Fähigkeiten** und **Kompetenzen** sowie das **breitere Vorwissen** hochbegabter Kinder und Jugendlicher müssen* *berücksichtigt und infolgedessen höhere Anforderungsniveaus für diese Zielgruppe gesetzt werden.*

- *Die Gestaltung des Unterrichts muss das höhere* ***Lerntempo*** *Hochbegabter berücksichtigen.*
- *Der Wunsch vieler hochbegabter Kinder und Jugendlicher nach höherer* ***Selbststeuerung*** *beim Lernen muss berücksichtigt werden.*
- *Hochbegabten Kindern und Jugendlichen müssen unter Umständen größere Räume für Aktivitäten (auch außerhalb der Klasse) gewährt werden." (Perleth, 2012 S. 7)*

Als Fördermöglichkeiten für (hoch)begabte Kinder und Jugendliche nennt Perleth Akzelerationsmaßnahmen, extracurriculares Enrichment, Mischformen aus Akzeleration und Enrichment, Beratungsangebote und Mentorenprogramme (Perleth, 2012 S. 8) (2.1.1.4, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.3, 3, 4). Er fasst zusammen, dass generell „Methoden des selbstgesteuerten, entdeckenden Lernens für Hochbegabte in einem möglichst individualisierten Unterricht, der flexibel auf die Bedürfnisse der Kinder eingeht, als förderlich angesehen" werden (Perleth, 2010 S. 7).

2.2.2 Ein fachbezogenes Modell für mathematische Begabung

Die allgemeinen Modellierungen zum Begabungsbegriff sind mit Blick auf die Mathematik und ihre Didaktik weiter auszudifferenzieren.
Ulm entwickelte ausgehend von dem „Augsburger Modell für mathematische Begabung" (Ulm, 2009) ein vielschichtiges „Modell für mathematische Begabung" (Ulm, 2018), das auf folgenden Prämissen aufbaut: Es ist *bereichsspezifisch*, denn es nimmt die Spezifika der Mathematik in den Blick (2.2.3). Es ist *komplex*, denn es berücksichtigt die Komplexität der Fachwissenschaft und des Lernens und Denkens (2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3). Es ist *dynamisch*, denn mathematische Begabung, mathematisches Talent und mathematische Leistung werden als individuelle, entwickelbare Eigenschaften

der lernenden Person zugrunde gelegt (2.2.1.1, 2.2.1.3, 3, 4). Es ist *pädagogisch-didaktisch relevant*, denn das Modell soll einen Orientierungsrahmen abstecken für die Diagnose mathematischer Begabung, für die Förderung mathematisch begabter Schüler, für die Konzeption und Ausgestaltung des Mathematikunterrichts, nicht zuletzt für eine begabungsfördernde Schulentwicklung (2.1.3.3, 2.2.4, 3, 4).
Der mathematischem Handeln zugrundeliegende Begriff des mathematischen Denkens wird in drei Dimensionen aufgefächert.

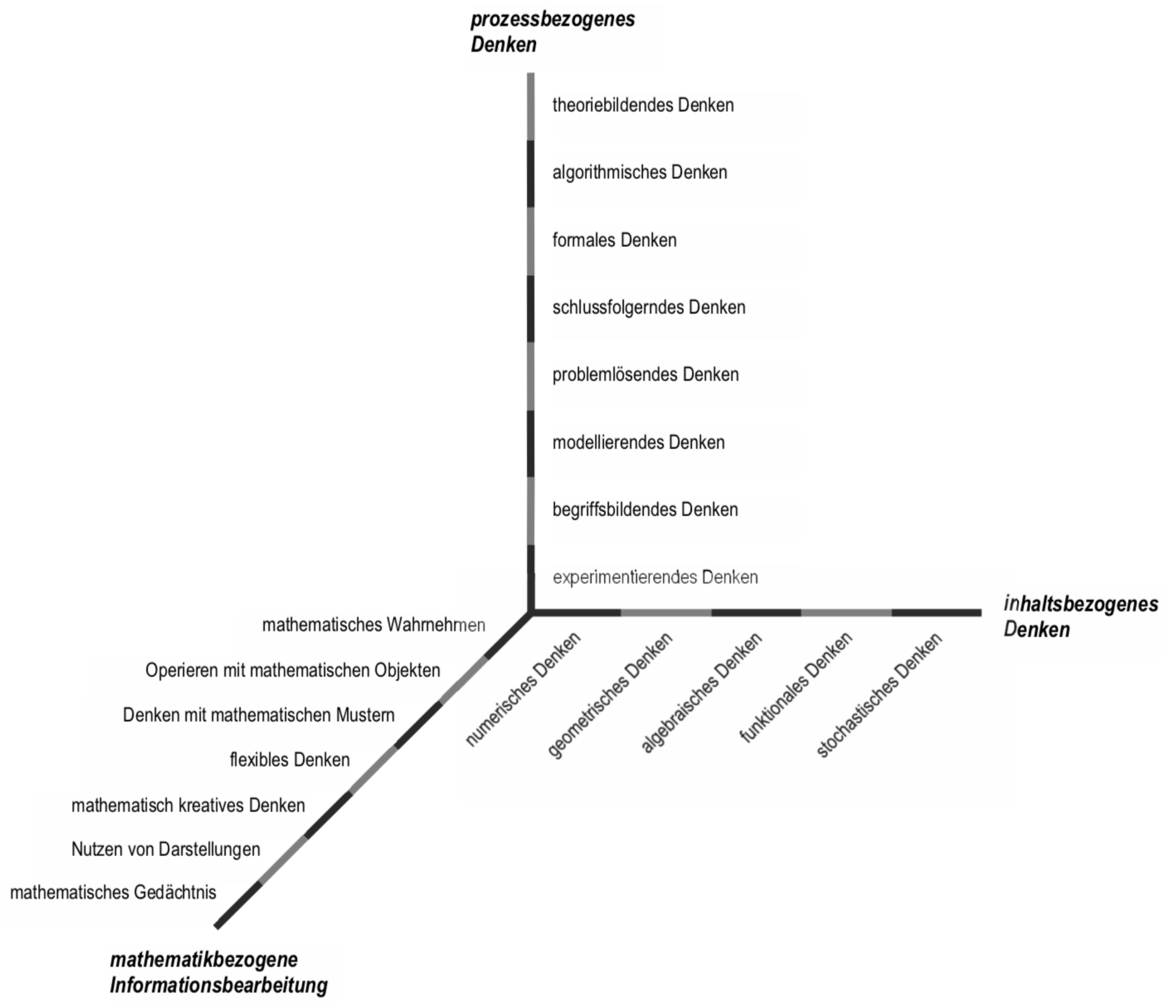


Abbildung 11 Facetten mathematischen Denkens, aus (Ulm, 2018 S. 6)

Mathematisches Denken hat mathematische Inhalte zum Gegenstand, es ist *inhaltsbezogen*. Ulm unterscheidet numerisches Denken (Vorstellung von Zahlen entwickeln und anwenden, verschiedene Zahlvorstellungen anwenden, …), geometrisches Denken (Vorstellung von geometrischen Figuren und Körpern bilden und anwenden, räumliche Konfigurationen und ebene Projektionen reflexiv verstehen und anwenden, räumlich sehen und räumlich denken, …), algebraisches Denken (Rechengesetze entdecken und anwenden, Variablen, Terme, Gleichungen verstehen und anwenden, …), funktionales Denken (funktionale Zusammenhänge modellieren, Darstellungsarten von Funktionen adäquat anwenden, …) und stochastisches Denken (Zufall mit Wahrscheinlichkeiten erfassen, kombinatorische Situationen verstehen, …). Diese Aspekte inhaltsbezogenen mathematischen Denkens sind nicht unabhängig voneinander. Beispielsweise gelingt eine adäquate Erfassung der Wahrscheinlichkeit nur auf der Basis eines geeigneten Zahlbegriffs. Umgekehrt erweitert die Normiertheit der Wahrscheinlichkeit die Vorstellung der Darstellbarkeit der Zahl 1. Ebenso wenig existiert eine Anordnung oder gar formale Verknüpfung dieser Unteraspekte.

Mathematisches Denken hat mathematische Prozesse zum Gegenstand, es ist *prozessbezogen*. Ulm unterscheidet experimentierendes Denken, begriffsbildendes Denken, modellierendes Denken, problemlösendes Denken, schlussfolgerndes Denken, formales Denken, algorithmisches Denken und theoriebildendes Denken. Konkrete Beispiele können (Ulm, 2018) entnommen werden. Wieder ist zu konstatieren, dass die Prozesse nicht unabhängig voneinander sind und sie auch nicht in einem logischen Verhältnis zueinander stehen.

Mathematisches Denken umfasst neben Inhalten und Prozessen auch das Wahrnehmen, das Verarbeiten, das Speichern und das Abrufen mathematikbezogener Informationen, es hat *mathematikbezogene Informationsverarbeitung* zum Gegenstand. Ulm unterscheidet die Aspekte mathematisches Wahrnehmen (z. B. „in mathematikhaltigen Situationen Besonderes und Interessantes erkennen"), Operieren mit mathematischen Objekten (z. B. „räumliche Körper schneiden, zerlegen oder zusammensetzen"), Denken mit mathematischen Mustern (z. B. „konkrete Situationen abstrahieren"), flexibles Denken (z. B. „Repräsentationsebenen wechseln enaktiv, ikonisch, verbal, mathematisch-symbolisch"), mathematisch-kreatives Denken (z. B. „zu einer mathematischen Situation Ideen und Assoziationen produzieren – auch auf der Basis von Intuition"), Nutzung von Darstellungen (z. B. „mit anderen über Mathematik schriftlich und mündlich kommunizieren"), mathematisches Gedächtnis (z. B. „Wissen flexibel und situationsgerecht abrufen"). Weitere

Beispiele zu den einzelnen Bereichen können (Ulm, 2018) entnommen werden. Die artikulierten Denkbereiche sind wieder keinesfalls disjunkt, sondern sind in ihrem Beziehungsgeflecht zu sehen und befruchten gerade in ihrer Wechselwirkung mathematisches Denken (2.2.1.2, 2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3, 4.2.2).

In einer Zusammenschau fällt auf, dass die drei Dimensionen mathematischen Denkens von Dimension zu Dimension eine höhere Komplexität zum Ausdruck bringen. Allein die Begrifflichkeit legt erheblich an Komplexität zu[16].

Die Betrachtung des aufgeweiteten Spektrums mathematischen Denkens gibt dem Begleiter und Trainer, dem Anerkennenden und Beurteilenden ein ausdifferenziertes Instrumentarium für personorientierte Begabungsförderung in die Hand (2.1.1.5, 2.1.2, 2.1.3.2, 2.1.3.3, 2.2.3, 2.2.4, 3, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4).

Mathematische Begabung ist nach Ulm „das individuelle Potential zu mathematischem Denken“ (Ulm, 2018 S. 8). Diese Auffassung lehnt sich eng an die Begabungskonzepte von (Gagné, 2015) (Gardner, 2011), (Heller, 2004) (Perleth, 2010) und die allgemeine Begriffsbildung in der Psychologie an. Im Rückgriff auf den Begriff des mathematischen Denkens konstatiert Ulm: „Hohe mathematische Begabung zeichnet sich dadurch aus, dass das Denkpotential in vielen Facetten deutlich überdurchschnittlich ausgeprägt ist“ (Ulm, 2018 S. 8) (2.1.1.2).

Auf diesem Begabungsbegriff kann eine differenzierte, personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht ansetzen, deren primäres Ziel die Herausbildung mathematischer Fähigkeiten darstellt. Wiederum im Rückgriff auf den Begriff des mathematischen Denkens legt Ulm fest: „Mathematische Fähigkeiten bezeichnen Fähigkeiten zu mathematischem Denken. … Sie entwickeln sich durch die Beschäftigung mit Mathematik auf der Basis mathematischer Begabung … und unter dem Einfluss einer Vielfalt von Persönlichkeits- und Umweltmerkmalen“ (Ulm, 2018 S. 8) (2.2.1.1, 2.2.1.3, 2.2.3, 3, 4).

In Anlehnung an das Münchener Hochbegabungsmodell von (Heller, 2004) formuliert Ulm ein Modell für die Entwicklung mathematischer Begabung, das

[16] Nicht zu beantworten ist die Frage nach mathematischem Denken in einer vierten Dimension.

den Einfluss allgemeiner Persönlichkeitsmerkmale und den Einfluss von Umweltmerkmalen auf die Begabungsförderung (2.2.1.3) berücksichtigt.

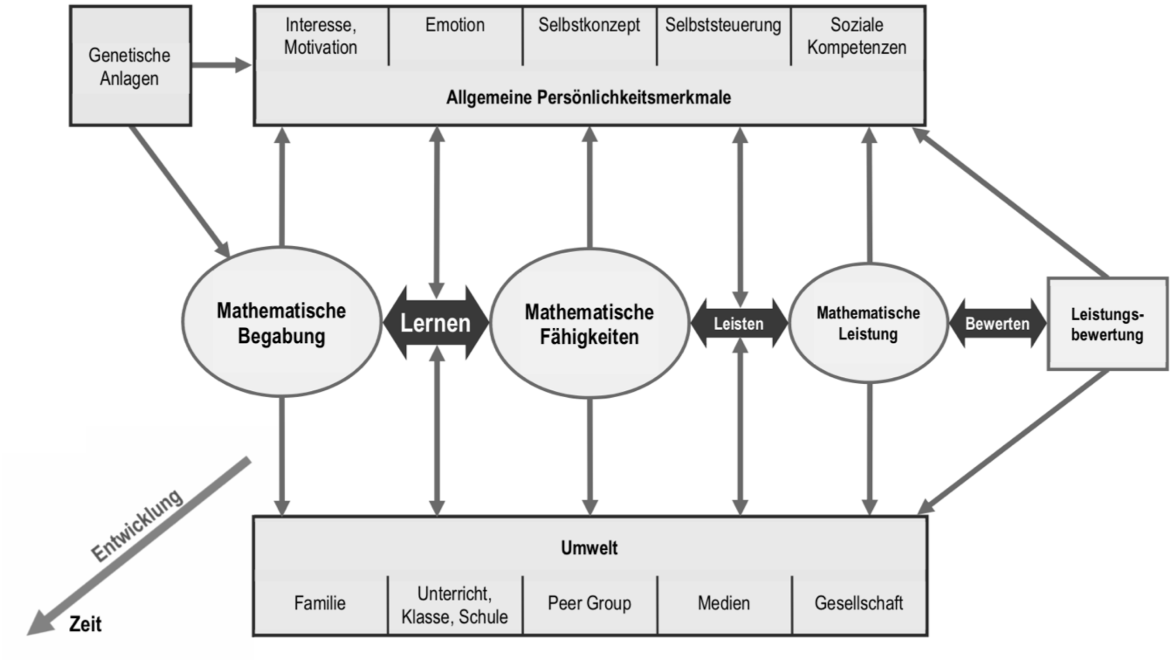


Abbildung 12 Begabung, Fähigkeiten, Leistung, aus (Ulm, 2018 S. 9)

Auch der Begriff Mathematische Leistung wird von Ulm zurückgeführt auf „geäußerte Ergebnisse mathematischen Denkens“ (Ulm, 2018 S. 9). Das weite Feld der Leistungsbewertung ist nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Mit Blick auf das Ziel der personorientierten Begabungsförderung ist jedoch festzustellen, dass unabhängig vom Formalisierungsgrad der Leistungsbewertung in der jeweiligen Lernsituation stets eine Rückmeldung über die gezeigte Leistung erfolgen sollte, die nicht zuletzt im gezeigten Begabungsmodell einen positiven Einfluss auf die Persönlichkeitsmerkmale des Lernenden, konkret auf Arbeits- und Lernstrategien, auf Motivation und Interesse, auf Kontrollüberzeugungen aufweisen (2.1.1.3, 2.1.2.4, 2.1.3.1, 2.1.3.2).
Wesentlich für Ulm ist der Aspekt der Dynamik von Begabung und Fähigkeiten, wie sie von Gagné oder Perleth betont werden (2.2.1). Auch das Modell zur „Entwicklung mathematischer Expertise“ von (Fritzlar, 2013) stellt die Dynamik in der Entwicklung von mathematischen Begabungen und mathematischen Fähigkeiten heraus. Dies mündet in dem Appell, dass „die Schule und die weitere Umwelt von Kindern und Jugendlichen … eine erhebliche Verantwortung dafür“

(Ulm, 2018 S. 10) tragen, „ihren Einfluss auf die Begabungs- und Fähigkeitsentwicklung möglichst verantwortungsvoll wahrzunehmen und den Einzelnen hierbei möglichst optimal zu fördern“ (ebd.) (4.1).
In der Betrachtung das Spannungsfeldes von Anlagen, Umweltmerkmalen und persönlicher Freiheit kommt Ulm mit Weinert zu folgendem Schluss: „Von der Anlage-Umwelt-Forschung aus betrachtet ist die Welt voller Spielräume für die geistige Entwicklung sehr unterschiedlich begabter Individuen (Ulm, 2018 S. 11).“ Den Grund sieht Weinert darin, „dass etwa 50 Prozent der geistigen Unterschiede zwischen Menschen genetisch determiniert sind, ungefähr ein Viertel durch die kollektive Umwelt und ein weiteres Viertel durch die individuelle, zum Teil selbstgeschaffene Umwelt erklärbar sind“ (ebd.) (2.2.1.1).

Zusammenfassend kann man mit Blick auf die personorientierte Begabungsförderung im Fach Mathematik festhalten, dass ein inhärenter Auftrag an Lernende und Lehrende formuliert wurde, die unterschiedlichen mathematischen Begabungen zu sehen, zu entdecken und zu entwickeln (2.1.1.5). Das Modell des mathematischen Denkens und das Modell der mathematischen Begabungsentwicklung lenkt den Blick auf ein breites Spektrum möglicher Entwicklungsfaktoren (2.1.1.4, 2.2.1). Der Auftrag ergeht im gleichen Ausmaß an die familiäre, gesellschaftliche und administrative Umwelt, die Gelingensfaktoren für die Entfaltung mathematischer Begabungen positiv zu beeinflussen (4.1). Bewusst wurde keine Grenze zwischen mathematischer Begabung und mathematischer Hochbegabung gezogen (2.1.1.2). Denn jeder Lernende ist aufgerufen, sein Begabungspotential zu entdecken und zu entwickeln (2.1.1, 3, 4.2.1). Und jeder Lehrende ist aufgerufen, das Begabungspotential seiner Schüler zu entdecken und zu entwickeln (2.1.2, 3, 4.2.3). Denn unterschiedliche Einzelbegabungen können einander sowohl intrapersonal als auch interpersonal befruchten (2.2.1.2, 3, 4).

2.2.3 Mathematische Bildung

Bildung und Erziehung sind Kernthemen der Pädagogik, aber auch des politischen Handelns. Der Begriff der mathematischen Bildung erhält seine Ausformung über die Fachwissenschaft (Bruder, et al., 2015) (Behrends, et al., 2008) (Beutelspacher, 1996) .
Auf die Frage „Was ist Mathematik?“ weist Freudenthal darauf hin, dass sich die „Definition von Mathematik … verändert: ‚Jede Generation und jeder scharfsinnige Mathematiker innerhalb einer Generation formuliert eine Definition, die seinen Fähigkeiten und Einsichten entspricht.‘ “ (Bardy, 2007 S. 26). Aus diesem Grund soll hier weder der Versuch unternommen werden, Mathematik zu definieren noch mathematische Bildung begrifflich festzulegen.
Vielmehr soll exemplarisch für viele mögliche Definitionen eine in vielfältiger Hinsicht allgemeingültige und darüber hinaus leidenschaftliche Sichtweise eines Fachwissenschaftlers vorgestellt werden. Dies geschieht vor dem Hintergrund, dass jede personorientierte Begabungsförderung in Mathematik in mathematische Bildung mündet (2.1.1.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.3).

In seinem Aufsatz „The Mathematical Component of a Good Education“ formuliert Peter Hilton als Prämisse: „The main thesis of this article is that mathematics is, like music, worth doing for its own sake“ (Hilton, 1991 S. 145). Er kritisiert, dass die Nützlichkeit der Mathematik, die unbestritten sei, die kulturellen Aspekte der Mathematik verberge und verkleide. Und er konstatiert: „Nobody asks, after listening to a Beethoven symphony, ‚What is the use of that?‘“ (ebd.)
Hilton kritisiert den folgenden Missstand: „The first serious error is the confusion of education with training.“ (ebd.), und weiterhin: „students, and their parents, believe that mathematics education should consist exclusively of the acquisition of a set of skills which prove useful in their later careers; so the skills must be learnt, that is, committed to memory, and no real understanding need occur. … What we can predict is that those skills will change and that the student will need to understand and not merely to remember. … A genuine education enables one to acquire, for oneself, the skills one happens, at a given stage of one´s life, to

need. A training, on its own, contributes almost nothing to education and produces distressingly ephemeral advantages“ (Hilton, 1991 S. 146).
Jede Mathematiklehrkraft weiß, dass Übung nötig ist. Auch jeder Pianist und jeder Komponist weiß dies. Hilton kritisiert ein zweckloses Üben ohne tiefere, bildungsstiftende Einsicht (2.2.1.2). Unverkennbar ist der unausgesprochene Personenbezug der mathematischen Bildung (2.1.1.1). Für gelingende, überdauernde, wertvolle Bildung nimmt Hilton die Schüler, die Eltern und die Lehrkräfte in die Pflicht (4.1).
Weiter kritisiert er: „The usefulness of mathematics leads to other, related abuses. Since mathematics is useful its acquisition must be tested“ (Hilton, 1991 S. 146) (2.2.1.2). Diese Formulierung ist sehr pointiert. Man könnte erwidern: Schulleben und Leben hält Tests bereit und ein gebildeter Mensch muss Tests nicht fürchten. Hilton löst die Spannung auf. „They provide no opportunity for the student to explain his or her answer and treat all ‘wrong’ answers as equally wrong.“ (Hilton, 1991 S. 146). Diese Feststellung aus dem Jahr 1991 bringt wiederum personorientierte Begabungsförderung zum Ausdruck, sie fordert auf zu dialogischem Lernen, wie es erst später wissenschaftlich ausgearbeitet wurde (Ruf, et al., 2014), und zu einer personorientierten Fehlerkultur (2.1.1.5, 2.2.4.3, 4.2.1).
Als Drittes kritisiert Hilton „… the study of mathematics starts with the teaching of arithmetic, a horrible, wretched subject, far removed from real mathematics, but perceived to be useful. So vast numbers of intelligent people become ‘mathematics avoiders’ although they have never met mathematics. … ‘mathophobia’, ‘math clinics’, ‘math anxiety’ … Arithmetics is the cholesterol of elementary education, clogging the arteries of learning“ (Hilton, 1991 S. 146f.). Diese stark zugespitzte Kritik trifft so sicherlich auf deutsche Schulen nicht zu. Gleichwohl stellt sie eine Aufforderung dar, im gymnasialen Anfangsunterricht von Beginn an alle Facetten mathematischen Denkens in den Blick zu nehmen, um eine hohe Aufgeschlossenheit für mathematische Bildung sicherzustellen (3, 3.4.2, 3.4.1, 4.1).
Die Bestandsaufnahme der damals aktuellen Bildungssituation im Fach Mathematik schließt Hilton mit dem Ziel: „Thus, to some, it must seem absurd to liken mathematics to music as an art to be savoured and enjoyed even in one´s leisure time. Yet that is how it should appear and could appear if it were playing

its proper role in our (otherwise) civilized society. Just as an appreciation of music is a hallmark of the educated person, so should be an appreciation of mathematics" (Hilton, 1991 S. 146f.). Bildung kann nur gelingen in einer Atmosphäre der Wertschätzung und Anerkennung (2.1.3.1, 3, 4.2.1, 4.2.3.2). Dies hat auch Beutelspacher im Blick, wenn er sich mit der These „In Mathe war ich immer schlecht …" (Beutelspacher, 1996) auseinandersetzt.

Damit kommt Hilton in seinem Aufsatz zu der Frage einer gebildeten Person. „There is, we claim, a valid and valuable concept of an educated person" (Hilton, 1991 S. 147). Dieses Bildungskonzept wird nicht näher ausgeführt. In einem tour d´horizon legt Hilton noch einmal Wert darauf, dass im antiken Griechenland dieses eine hohe Wertschätzung für Mathematik und insbesondere Geometrie einschloss. Er zitiert C.P. Snow in der Auffassung von „The Two Cultures", dass der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik Bildungsgut sein müsse und kommt zu folgendem Schluss: „The proneness, to which we have already drawn attention, to confuse education with training has led, at least in the English-speaking world, to marked down-grading of the study of arts and the humanities, and to the emerge of the dangerous illusion that a modern industrial society should encourage applied science at the expense of pure science" (Hilton, 1991 S. 148f.). Hilton geht hier aus gutem Grund nicht ins Detail, sondern legt Wert auf entsprechende Haltungen, die ein in der Kultur verankertes Bildungsverständnis begründen (2.1.1.3, 2.1.3.1, 3, 4.1, 4.1.1.5, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4).
Eine gebildete Person beschreibt er folgendermaßen: „Such a person should, of course, have all the traditional qualifications. In addition such a person must bestride 'The Two Cultures' understanding both are vital to the individual and to the society. … it is my special case that mathematics is common to the 'two cultures', and the educated person should appreciate it" (Hilton, 1991 S. 148f.).
In einem gleitenden Übergang untersucht Hilton die Frage „What is Mathematics?" und formuliert als Antwort: „… the educated person must understand what mathematics is – but not in the sense of a dictionary definition. Such a person must have an appreciation of mathematical reasoning and of the role of mathematics in the evolution and development of human society. Such an appreciation requires one to understand something of what mathematicians do – this would provide a much better working description of what mathematics is, in

practice, than any dictionary could be expected to provide" (Hilton, 1991 S. 150) (3, 3.1.2, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.3.1, 3.4.1, 3.4.2, 4, 4.1, 4.2.3, 4.2.4).
Eine gebildete Person zeichnet sich aus durch Wertschätzung für mathematisches Denken, Verständnis für die Bedeutung der Mathematik in Geschichte und Kultur der Menschheit. Sie versteht, was Mathematiker tun und was Mathematik ist (2.1, 2.2, 2.2.4, 2.2.5, 3, 4). Dies ist nach Hilton die mathematische Komponente einer guten Bildung und zugleich fachbezogenes Bildungsziel einer personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht (3).

Konsequent stellt Hilton fest: „Genuine mathematics, … its methods and its concepts, by contrast with soulless calculation, constitute one of the finest expressions of the human spirit" (Hilton, 1991 S. 151). Im Begabungsmodell nach Ulm (2.2.2) sind genau diese wertvollen und schönen Facetten mathematischen Denkens aufgefächert, von denen Hilton in seiner Gesamtheit spricht. Während Ulm in einem aussagekräftigen fachdidaktischen Modell diese Facetten als Ausdruck des menschlichen Geistes und mit dem Ziel der Begabungsentwicklung darstellt, spannt Hilton den Bogen weiter vom menschlichen Geist bis zur Fachwissenschaft mit dem Ziel einer durch Mathematik konstituierten Bildung (2.1.1.1, 3).

Ausführungen zur Entwicklung des Faches fasst Hilton zusammen als „Mathematics … has its own internal dynamic, powerful and subtle. … mathematics moves forward not under the stimulus of science but under the stimulus of its own recent advances" (Hilton, 1991 S. 151), ehe er zu dem Schluss kommt, dass Wertschätzung für Mathematik nicht nur eine Komponente, sondern eine Säule im Bildungskonzept eines zivilisierten Menschen darstellt. Ein klarer Auftrag an die Gesellschaft, an die Schule, an den Fachunterricht, eine klare Erwartung an alle beteiligten Personen (2.1.1, 3, 4).
Mit einer Vision beendet Hilton seine Ausführungen: „I long for the day when, indeed mathematics will be appreciated and enjoyed by educated laymen as an art and also respected as the mainstay of science. It has been so in the past, but it is not so now. Is it too optimistic to hope it might be so again?" (Hilton, 1991 S. 154)

2.2.4 Didaktische Prinzipien eines begabungsfördernden Unterrichts

So wie es keine niedergeschriebene Pädagogik der personorientierten Begabungsförderung gibt, da es nicht um eine fundamental neue Pädagogik, sondern um eine Pädagogik im Lichte der personorientierten Begabungsförderung geht (2.1.2), kann es keine imperativen Unterrichtsprinzipien für einen personorientierten, begabungsfördernden Mathematikunterricht geben. Vielmehr geht es darum, den Kanon der empirischen Unterrichtsprinzipien im Fokus der personorientierten Begabungsförderung zu betrachten.
In 2.1.2.3 wurden aus dem Personbegriff die Prinzipien der *Individualisierung* und der *Personalisierung* hergeleitet und in ein Prinzip *Förderung* übergeführt.
Aus der Heterogenität einer Mehrzahl von Personen folgt unmittelbar das Prinzip der *Differenzierung*.
In 2.1.2.4 wurden weitere, *sekundäre Prinzipien* aus dem Personprinzip gefolgert: Die Prinzipien der *Aneignung* und der *Autonomie* gründen auf der Relationalität zwischen lernender Person und Lerngegenstand. Die Prinzipen *Dialog* und *Sozialität* basieren auf der Relationalität zwischen lernender Person und lehrender Person bzw. mitlernender Person. Die Prinzipien *Lernsinn* und *Performanz* drücken die Relationalität zum Absoluten aus.

Im Folgenden werden erfolgversprechende *didaktische Prinzipien* im Wechselspiel zwischen fachwissenschaftlichem Bildungsanspruch und personorientierter Begabungsförderung dargestellt und begründet. Das abstrakte Prinzip des Lernsinns erfährt im Prinzip der *Elementarisierung* (2.2.4.1) und im *genetisch-sokratisch-exemplarischen Prinzip* (2.2.4.2) eine deutliche Konkretisierung mit Blick auf den Lerngegenstand. Hingegen bewirkt das *Prinzip des dialogischen Lernens* (2.2.4.3) eine Ausweitung nach allen Seiten und eine konsequente Personalisierung.

2.2.4.1 Der Begriff des Elementaren bei Klafki

Die Bildungstheorie Klafkis gilt als „der letzte bedeutende Bestimmungsversuch bildungstheoretischer Didaktik“ (Reich, 1977 S. 31).
Seine Grundaussage lautet:

> *„Bildung nennen wir jenes Phänomen, an dem wir – im eigenen Erleben oder im Verstehen anderer Menschen – unmittelbar der Einheit eines objektiven (materialen) und eines subjektiven (formalen) Momentes innewerden. Der Versuch, die erlebte Einheit der Bildung sprachlich auszudrücken, kann nur mit Hilfe dialektisch verschränkter Formulierungen gelingen: Bildung ist Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen – das ist der objektive oder materiale Aspekt; aber das heißt zugleich: Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit – das ist der subjektive oder formale Aspekt zugleich im ‚funktionalen' wie im ‚methodischen' Sinne“ (Klafki, 1963, zitiert nach (Reich, 1977 S. 54))*

Auch wenn Klafki eine andere Begrifflichkeit verwendet, so ist im *subjektiven und formalen* Aspekt die Person erkennbar in ihrem Bildungsprozess. Entsprechend wird im *objektiven und materialen* Aspekt der Bildungsinhalt, der Lerngegenstand, die Welt im Sinne Humboldts sichtbar (3.1.1, 3.1.2, 3.1.7, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1).
Der Bildungsprozess ist reflexiv. Er entwickelt sich einerseits im „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (Klafki, 1963, zitiert nach (Reich, 1977 S. 54)) und andererseits „als Aufgehen allgemeiner Einsichten, Erlebnisse, Erfahrungen auf der Seite des Subjekts“ (ebd.). Indem sich die zu begabende Person *das Kategoriale* aneignet, wird das Kategoriale in der Person Wirklichkeit. „Jeder erkannte oder erlebte Sachverhalt auf der objektiven Seite löst im Zögling nicht nur eine subjektive, ‚formale' Kraft aus oder ist Übungsmaterial solcher subjektiven Kräfte oder formal verstandener Methoden, sondern er ist – in einem übertragenen Sinne – selbst Kraft, insofern – und nur insofern – er ein Stück Wirklichkeit einschließt und zugänglich macht.“ (ebd.)

> *„Bildung ist* ***kategoriale Bildung*** *in dem Doppelsinn, daß sich dem Menschen eine Wirklichkeit ‚kategorial' erschlossen hat und daß eben damit er selbst – dank der selbstvollzogenen ‚kategorialen' Einsichten, Erfahrungen, Erlebnisse – für diese Wirklichkeit erschlossen worden ist.“ (ebd.)*

Die Person, Klafki spricht von Subjekt, vom Zögling, steht „an sich“ und „für sich“ im Mittelpunkt der Überlegungen (2.1.1.1).
Klafki nennt als zentrale Kategorien *das Exemplarische*, *das Typische*, *das Repräsentative* und *das Elementare* (Klafki, 1963, zitiert nach Reich, 1977 S. 53f.).

Aus meiner Sicht vermittelt das Elementare zwischen der in der Person verankerten, subjektiven formalen Bildung und der in der Fachwissenschaft verankerten, objektiven materialen Bildung. Das Elementare ist ein wesentliches Moment des Verstehens, des Erklärens, des Durchdringens.
Nach dem von Gardner beschriebenen Moment des Heureka (2.2.1.2) folgt die Formulierung mit Hilfe des Elementaren (3).
Schließlich greift die Lehrperson an der Schaltstelle des Elementaren in den fachlichen Begabungsprozess ein sowohl mit der Perspektive des Lernenden als auch mit der Perspektive der begabungsstiftenden Fachwissenschaft.

Hinzu kommt, dass das Elementare in Bezug auf mathematische Inhalte oder Kategorien steigerbar und damit nahezu unerschöpflich ist (3.2.5). Es geht nicht um ein Simplifizieren, um ein Vereinfachen, um ein nur mit einfachen Worten Sagen, sondern um einen in jeder Situation begabungsadäqaten Anschluss an die Fachwissenschaft (2.1.1.5, 2.1.2.2, 3.1.3, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2). Hierin unterscheidet sich die Anwendung in der Mathematik wesentlich von anderen Disziplinen. Beispielsweise ist die Suche nach elementaren Wahrheiten in der Religionsdidaktik[17] nicht in diesem Sinne steigerbar.

Elementarisierung ist daher ein wesentliches didaktisches Prinzip eines personorientierten, begabungsfördernden Mathematikunterrichts. Eine personorientierte Elementarisierung stellt eine tragfähige Basis für eine begabungsfördernde Entdeckung der Mathematik dar (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.3, 3).

[17] vgl. für die Religionspädagogik z. B. Schnitzler, M.: Elementarisierung – Bedeutung eines Unterrichtsprinzips, Neukirchen-Vluyn 2008

2.2.4.2 Genetisch-exemplarisch-sokratisches Prinzip nach Wagenschein

Man findet wenig im eigentlichen Sinn wissenschaftliche Literatur von Wagenschein. Er nahm wohl das Exemplarische in seinem Credo so ernst, dass er stets sofort ohne große Umschweife oder theoretische Abstraktionen exemplarisch wurde.

Das *genetische Prinzip* führt Wagenschein auf Freudenthal und Wittenberg zurück, die er folgendermaßen zitiert:

> *„Eine Entdeckung wird am wirksamsten durch ihren nicht-rezeptiven Nachvollzug verstanden und behalten; durch eine, sei es auch nur bescheidene ‚Wiederentdeckung'." (Wagenschein, o.J. S. 2)*

Er formuliert als Prämisse:

> *„Seit Euklid haben so scheint es, die Entdecker eine Scheu zu sagen, ‚wie sie darauf gekommen sind'. Sie zeigen sich lieber als Sieger denn als Sucher. So haben sie es schwer, gute Lehrer zu werden. Sie deduzieren gern, denn da kann, wenn alles stimmt, keiner widersprechen und jeder ‚kann folgen'. Er wird nur gefragt ‚Kommen Sie mit?', und nicht ‚Fällt Ihnen zu dem Problem etwas ein?' Er gewöhnt sich ab zu fragen: ‚Wie sind Sie darauf gekommen?'" (ebd.)*

Es geht also um „Wieder-Entdeckung" (ebd.).
Damit steht die lernende Person mit ihrer Neugierde, mit ihren kognitiven und nicht-kognitiven Persönlichkeitsmerkmalen (2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.1.2.5) im Mittelpunkt dieses Prinzips, ebenso der Lerngegenstand und das Entdecken, das Enthüllen, das Erspüren, das Durchschauen als ursprünglichste Form des Lernprozesses (3.1.3, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3.2, 3.3.1.1, 3.3.2.2, 3.4.1.1, 3.4.1.3, 3.4.2.1).

Tiefer geht das *sokratische Prinzip*. Wagenschein lässt Nelson sprechen:

> *„Seine (des Sokrates) pädagogische Größe liegt darin, dass er, ... die Schüler auf diesen Weg des Selbstdenkens weist und durch den Austausch der Gedanken eine Kontrolle einführt, die der Selbstverblendung entgegenwirkt. ... hier hängt alles von der Kunst ab, die Schüler von Anfang an auf sich zu stellen, sie das Selbstgehen zu lehren, ohne dass sie dadurch allein gehen, und diese Selbstständigkeit so zu entwickeln, dass sie eines Tages das Alleingehen wagen dürfen,*

> *weil sie die Obacht des Lehrers durch die eigene Obacht ersetzen.“ (Wagenschein, o.J. S. 6)*

Für die Mathematik formuliert Wagenschein:

> *„Das Ziel, von dem hier die Rede ist, ist nicht das Aufgabenlösen des Mathematikers und auch nicht das des Amateurs ... Ich denke an den künftigen Laien und sein Anrecht, an einigen Beispielen zu durchschauen, was es in der Geometrie heißt, aus dem Seltsamen das Selbstverständliche zu machen. Natürlich ist das ein Teilziel auch für den späteren Mathematiker.“ (ebd.)*

Wieder steht die lernende Person mit ihrem Begabungsprozess und letztendlich ihrem Bildungsprozess im Zentrum des Geschehens (2.2.2, 2.2.3, 3.1.3, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3.2, 3.2.3.1, 3.3.1.1, 3.3.2.1, 3.4.1.1, 3.4.2). Das Prinzip des Lern-Sinns (2.1.2.4) wird durch das sokratische Prinzip im Zusammenspiel mit den Strukturen und Inhalten der Mathematik als Fachwissenschaft ideal unterstützt. Das sokratische Prinzip fordert Lernende und Lehrende mehr als das genetische Prinzip.

Das *exemplarische Prinzip* hat eine einfache Begründung. Lernen kann nur am Einzelfall gelingen, nicht am Ganzen, nicht am Absoluten. Schwieriger ist die Frage nach der Auswahl der guten Beispiele. Der Lernende wird geführt von der Neugierde, aber auch von anderen Katalysatoren und nicht zuletzt von der „Chance“ im Sinne Gagnés (2.2.1.1). Der Lehrende lässt sich leiten von seiner fachlichen Begabung und seinem Einblick ins Wesentliche der Fachwissenschaft (2.1.1.5, 3.1.3, 3.1.6.3, 3.2.2, 3.2.3.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2, 4.2.2.2, 4.2.2.3).
Die Literatur Wagenscheins lebt von der exemplarischen Auswahl seiner Beispiele, die keinesfalls trivial sind.
Als Ziel des exemplarischen Prinzips fordert Wagenschein:

> *„... es ist nötig, dass der Schüler nicht nur als Intellekt, sondern als ganzer Mensch vom Gegenstand angeredet und auch erreicht, ja betroffen wird. Nur dann kann er spüren oder gar bewusst machen, dass die ‚Disziplin' des Faches auch ihn selber, den Menschen einschränkt; wodurch allein er eben den bestimmten fachlichen Aspekt der Wirklichkeit zu Gesicht bekommt, von dem er sich nun reflexiv zu distanzieren lernt.“ (Wagenschein, 1988 S. 215)*

Hier begegnen uns die personorientierten Prinzipien der Aneignung und der Autonomie, aber auch das Prinzip der Selbstreflexion (2.1).

Aus einer Definition Wagenscheins folgt eine klare Prämisse für personorientierte Begabungsförderung:

> *„Man kann das exemplarische Lehren ... so definieren: Es erschließt einen ‚Gegenstand' (der immer etwas Komplexes und Aufforderndes haben muss) im Sinne einer bestimmten ‚Disziplin'. Die mit dieser Eröffnung notwendig verbundene Einschränkung – des Gegenstandes wie des Erschließenden – soll dabei spürbar oder gar bewusst werden. Das Thema soll auf diese Weise also ‚ausstrahlen' nach zwei Seiten hin: auf das* ***Ganze der ‚geistigen Welt'*** *und auf das* ***Ganze der Person des Lernenden****." (Wagenschein, 1988 S. 215)*

Hier berühren sich die Denkansätze Wagenscheins und Klafkis: Es ist der objektive und materiale Aspekt von Bildung auf der einen Seite erkennbar, der subjektive und formale Aspekt auf der anderen Seite (2.2.4.2).

Wagenschein nennt als Gelingensbedingungen für exemplarisches Lernen:

- „die Ursprünglichkeit des Denkens, das in der Arbeitsgruppe in Fluss kommt
- eine andere Art der ‚Aufmerksamkeit' als die, die wir in der Schule heute fast immer mit diesem Wort bezeichnen[18]
- die Ungesichertheit des Lehrgangs" (Wagenschein, 1988 S. 221)

Sie erscheinen in verschiedenen methodischen Vorschlägen (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.1.3.3, 2.2.3, 3, 4.1, 4.1.1.2, 4.1.1.3, 4.1.1.5, 4.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3).

Zusammenfassend wird in der vorliegenden Arbeit aufgrund der fachwissenschaftlich begründeten Steigerung der Einzelprinzipien weniger von einem genetisch-exemplarisch-sokratischen Prinzip im ursprünglichen Sinne Wagenscheins, sondern in anderer Reihung von einem *genetisch-sokratisch-exemplarischen Prinzip* gesprochen.

Das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip stellt ein sehr bereicherndes, inspirierendes didaktisches Prinzip dar, das insbesondere zu den personorientierten didaktischen Prinzipien Aneignung, Autonomie, Lernsinn und Performanz (2.1.2.4) eine fachliche Brücke schlägt.

[18] „Erwartende Aufmerksamkeit und Einwurzelung" (Wagenschein, 1988 S. 222)

2.2.4.3 Kernidee im dialogischen Lernen nach Gallin und Ruf

Das Prinzip des Dialogs (2.1.2.4) wird im dialogischen Lernen und in der Didaktik der Kernidee nochmals konkreter: Während Klafki die Notwendigkeit der Verschränkung von formaler Bildung und kategorialer Bildung in einer sehr abstrakten Weise fordert (2.2.4.1) und Wagenschein eine Brücke in Form des genetisch-exemplarisch-sokratischen Lernens formuliert (2.2.4.2), untersuchten Gallin und Ruf in einem zweijährigen Projekt „Lernen auf eigenen Wegen" die konkrete, sprachgebundene und nur im Dialog zwischen lernender Person und lehrender Person gelingende Umsetzung.

Gallin und Ruf unterscheiden wie Wagenschein (2.2.4.2) zwischen einer „Sprache des Verstehens" und einer „Sprache des Verstandenen" (Ruf, et al., 2014 S. 25 Bd.1).

In der Sprache des Verstehens

> *„artikulieren die Lehrenden und Lernenden ihre Sicht der Dinge, tauschen ihre Geschichten über ihre Begegnungen mit dem Stoff aus und erarbeiten einen tragfähigen Konsens: ICH MACHE DAS SO! WIE MACHST DU ES? DAS MACHEN WIR AB. Zwischen den Polen ICH und DU werden auf diese Weise neue Dimensionen der Beweglichkeit aufgespannt, die einen Spielraum für das interaktive Verarbeiten erlebter und erzählter Erfahrungen eröffnen und reguläre Rezeptions- und Produktionsmuster als mögliche Standorte ins Auge fassen, wo sich die Gesprächspartner in einem ausgehandelten WIR treffen können." (ebd.)*

Dagegen ist die Sprache des Verstandenen

> *„ökonomisch und effizient. Als Richtschnur für das Lernen ist sie mörderisch. Ein Unterricht, der sich darauf beschränkt, sie zu vermitteln und einzuüben, produziert reihenweise Schädigungen und überlässt die Bildung dem Zufall." (Ruf, et al., 2014 S. 26 Bd.1)*

Gallin und Ruf personalisieren in einer absoluten Auffassung die Bildungsgegenstände der Fachwissenschaft, das Kategoriale im Bildungsverständnis von Klafki als „WIR".

Die Personorientierung erreicht in diesem Ansatz ein größtmögliches Maximum. Schüler, Lehrer und Bildungsgegenstand sind im Kern personalisiert (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.3).

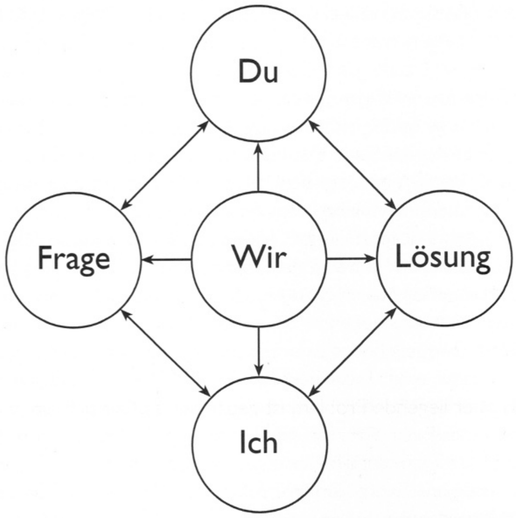


Abbildung 13 Dialogisches Lernen nach Gallin und Ruf, aus (Ruf, et al., 2014 S. 26 Bd.1)

In paradigmatischer Weise formulieren Gallin und Ruf (Abbildung 13):

> *„Sollen reguläre Aktionen in den horizontalen Hauptdimensionen des Fachs als Teil eines gemeinsamen Wir erlebt und verstanden werden, müssen sie eingebettet sein in einen divergierenden Austausch unter Menschen, die sich beim gemeinsamen Forschen und Lernen im vertikalen Spielraum der Interaktionen bewegen." (ebd.)*

Die Aneignung des Bildungsgegenstandes verstehen Gallin und Ruf als „*reguläre Aktionen*". Im „Regulären" erkennen wir das „Kategoriale" im Sinne Klafkis (2.2.4.1) wieder. Die „regulären Aktionen" sind eine Folge der „*singulären Aktionen*" der einzelnen, auf eigenen Wegen lernenden Personen.

Der „*divergierende Austausch*" zwischen Lernenden und Lehrenden findet nach Gallin und Ruf in einer fortgesetzten Schwingungsbewegung statt (Abbildung 14). Sie unterscheiden vier Instrumente des dialogischen Unterrichts: *Kernidee*, *Auftrag*, *Reisetagebuch*, *Rückmeldung*.

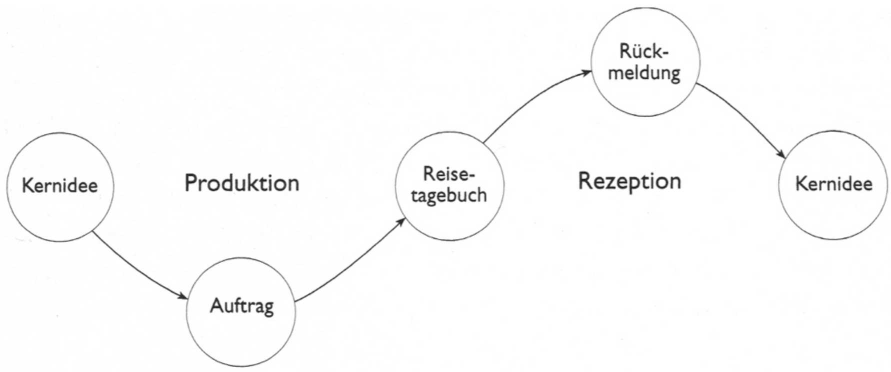


Abbildung 14 Vier Instrumente des dialogischen Lernens, aus (Ruf, et al., 2014 S. 11 Bd.2)

Für alle Stationen des dialogischen Unterrichts wird eine *Grundhaltung des Erzählens* postuliert. Am Beginn steht die *Kernidee*. Wenn Lehrkräfte aufgefordert sind, Kernideen zu generieren, sind sie zum Erzählen aufgefordert. „Sie sollen den Stoff, den sie im Unterricht behandeln wollen, anderen Menschen erzählend ausbreiten, sie sollen über ihre eigenen Erlebnisse und Erfahrungen mit dem Stoff berichten und sie sollen verständlich machen, wo für sie der Witz der Sache liegt" (Ruf, et al., 2014 S. 13 Bd.2). Der Auftrag ist eine Aufforderung an die Lernenden, „nun ihrerseits über ihre authentischen Begegnungen mit dem Stoff zu erzählen" (ebd.). Dies geschieht schriftlich im Reisetagebuch. Hier erzählen die Lernenden, „was sich auf ihrem Lernweg gerade abspielt" (ebd). In persönlichen Rückmeldungen formulieren die Lernpartner, „wie die oft rudimentären Lerngeschichten bei ihnen angekommen sind und was für Fragen und Ideen sie bei ihnen ausgelöst haben" (ebd.). Daraus können dann wieder neue Kernideen und neue Aufträge generiert werden. Auf diese Weise wird Lernen erfahrbar als „gemeinsam gewirkter Teil einer unendlichen Geschichte" (ebd.).
Mit Blick auf die personorientierte Begabungsförderung werden hier wesentliche Aspekte herausgearbeitet. Begabungsförderung ist ein Prozess im Spannungsfeld zwischen dem Ich des Lernenden und dem Du des Lehrenden (vertikale Dimension) sowie im Spannungsfeld zwischen Kernidee und Auftrag, ergänzt um Reisetagebuch und Rückmeldung (horizontale Dimension) (2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.4.1, 2.2.4.2, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.3, 3.2.3.3, 3.3.1.2, 3.3.2.2, 3.4.1.1, 3.4.2.1, 3.4.2.5). Das Medium der Begabungsentwicklung ist stets die Sprache und der Dialog.

Die Methodik des Erzählens garantiert nach Gallin und Ruf die Würde des Menschen (Ruf, et al., 2014 S. 166ff. Bd.1). Sie berührt den Kern der Person und den Kern einer personorientierten Begabungsförderung. Ausgehend von der Beobachtung, dass das „Reguläre als Ort der Verständigung und des gemeinsamen Wir … sich für den, der einer Erklärung nicht zu folgen vermag, in eine undurchschaubare Macht, der er sich nur noch beugen oder widersetzen kann" (Ruf, et al., 2014 S. 166 Bd.1), verwandelt, folgern Gallin und Ruf:

> *„In einem Unterricht, der aufs Erklären setzt, ist die Würde der Person nicht geschützt. Weder Geduld noch Freundlichkeit können sicherstellen, dass das Erklärte Einsicht schafft und nicht bloß als Zwang erduldet wird.*

> *Die Alternative zum Erklären ist das ERZÄHLEN. Wer erzählt, appelliert nicht einseitig an die konvergierende Vernunft; er spricht den Menschen in seiner Ganzheit an und offeriert ihm einen geschützten Bereich, in dem er seine rationalen und emotionalen Kräfte frei spielen lassen kann." (Ruf, et al., 2014 S. 167 Bd.1)*

Gallin und Ruf stützen ihre Ansicht wesentlich auf die Pädagogik Schillers, der in seinen Briefen *Über die ästhetische Erziehung* eine dualistische Konstitution des Menschen begründet. Es sind dies die beiden antagonistischen Kräfte des unbestechlichen Bewusstseins und des unvertilgbaren Gefühls (ebd.)[19]. Nur wenn die zu begabende Person beiden Kräften ihren je spezifischen Raum lässt und situationsadäquat die eine in den Dienst der anderen stellt, kann sie sich als Mensch entfalten.

Im freien Spiel zwischen unvertilgbarem Gefühl und unbestechlichem Bewusstsein findet der Mensch zu sich selbst. Im dialogischen Lernen nach Gallin und Ruf entwickelt sich die Begabung zwischen Divergenz, dem Beschreiten eigener persönlicher Lernwege, und Konvergenz, der Abstimmung dieser Lernwege mit dem Allgemeinen. Kernidee und Auftrag unterstützen als methodische Mittel die Divergenz, mithin das unvertilgbare Gefühl, wohingegen Reisetagebuch und Rückmeldung in Konvergenz münden, das unbestechliche Bewusstsein erzeugen.

Zusammenfassend gilt:

> *„Weil das Herz vor dem Kopf, das Mannigfaltige vor der Einheit, das Singuläre vor dem Regulären agiert, hat das Erzählen Vorrang vor dem Erklären." (Ruf, et al., 2014 S. 171 Bd.1)*

Der Kernidee kommt in methodischer Hinsicht eine Mittlerrolle zu. Sie generiert sich aus dem unbestechlichem Bewusstsein im Schillerschen Sinne, aus dem Kategorialen (2.2.4.1) im Klafkischen Sinne, aus der Fach- und

---

[19] „Einheit fordert zwar die Vernunft, die Natur aber Mannigfaltigkeit, und von beiden Legislationen wird der Mensch in Anspruch genommen. Das Gesetz der ersteren ist ihm durch ein unbestechliches Bewusstsein, das Gesetz der andern durch ein unvertilgbares Gefühl eingeprägt. Daher wird es jederzeit von einer noch mangelhaften Bildung zeugen, wenn der sittliche Charakter nur mit Aufopferung des natürlichen sich behaupten kann" (Friedrich Schiller: Über die ästhetische Erziehung des Menschen, zitiert nach Ruf, et al., 2014 S. 167 Bd.1)

Bildungskompetenz der Lehrperson und sie zielt auf das unvertilgbare Gefühl, das Formale (ebd.), die zu begabende Person ab (2.1.2.3, 2.1.3.1, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2, 4.1.2, 4.2.4).

Gallin und Ruf nennen als Voraussetzung für das Finden und Formulieren von Kernideen „eine im Personzentrum verankerte Sehweise“ (Ruf, et al., 2014 S. 17 Bd.2). Kernideen lenken die „Aufmerksamkeit auf etwas, was fundamentaler ist als jeder fachliche Lehrsatz und jede technische Fertigkeit: auf tief in der Person verankerte Haltungen und Grundentscheidungen, die letztlich über Erfolg oder Misserfolg in einem Fachgebiet entscheiden.“[20]

> *„Wenn die Lehrkraft ihren Schülerinnen und Schülern erzählt, wie der aktuelle Stoff im Zentrum ihrer Person verankert ist, macht sie exemplarisch vor, wie man die eigenen Triebkräfte ermittelt und wie man sie in den Dienst einer Sache stellen kann.“ (ebd.)*

Mit Blick auf die *vertikale Dimension* des dialogischen Lernens (Abbildung 13) sind drei Merkmale zu unterscheiden:

> *„Biographischer Aspekt (Ich)*
>
> *Eine Kernidee ist eine persönlich gefärbte und pointiert formulierte Aussage über einen komplexen Sachverhalt, die meinem Gesprächspartner ohne Umschweife klar macht, was für mich der Witz der Sache ist.*
>
> *Wirkungsaspekt (Du)*
>
> *Kernideen fordern das Gegenüber heraus, sein eigenes Verhältnis zum Stoff zu klären und die persönlichen Triebkräfte zu aktivieren. Sie offerieren Sicherheit und Orientierung, ohne die Eigentätigkeit einzuschränken.*
>
> *Sachaspekt (Wir)*
>
> *Kernideen sind der Auftakt zum Lernen auf eigenen Wegen. Sie fangen ganze Stoffgebiete in vagen Umrissen ein, rücken eine provozierende Eigenheit in den Vordergrund und laden zu einem partnerschaftlichen Dialog ein.“ (Ruf, et al., 2014 S. 29 Bd.2)*

[20] Die Betonung der Haltung für gelingende Bildungsprozesse findet sich auch bei (Hattie, 2017) (4.2.3.2, 4.2.4).

Eine Didaktik der Kernideen nimmt die *horizontale Dimension* des dialogischen Lernens (Abbildung 13) in den Blick.

> *„Kernideen sind das Instrument, mit denen eine Verbindung zwischen den Fragen der Lernenden und den Antworten der Fachgebiete hergestellt werden soll. Zündet eine Kernidee, ist der Weg ins Fachgebiet frei: Jetzt sind fachliche Antworten willkommen, weil sie zu persönlichen Fragen passen." (Ruf, et al., 2014 S. 36 Bd.2)*

Dialogisches Lernen eröffnet dem Lernenden die Gelegenheit, den Sinn der Mathematik zu erfahren (2.2.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.6.3, 3.1.7, 3.2.3, 3.3, 3.4, 4.1.1.5, 4.1.2, 4.2.2, 4.3). Dialogisches Lernen gibt die Möglichkeit, „Halt in sich selber zu finden" (Ruf, et al., 2014 S. 292), was Descartes in seinem berühmten „cogito, ergo sum" zum Ausdruck bringt (2.1.1).

Zusammenfassend können Kernideen im Sinne des dialogischen Lernens eine personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht auf einer sehr konkreten Ebene unterstützen (3.1, 3.2, 3.3, 3.4). Fächerübergreifend kann dialogisches Lernen in allen Facetten eine begabungsfördernde Schulentwicklung tragen (4.1, 4.2, 4.3).

2.2.5 Die Bedeutung der Freude an der Mathematik

In der Auffassung des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf soll die Kernidee den „Witz an einer Sache" freilegen (2.2.4.3). Allein dieser Aspekt weist bereits auf die fundamentale Bedeutung der Freude am „Mathematik-Treiben" (ebd.) für die Förderung mathematischer Begabung hin.

> *„Wenn Sie, meine Damen und Herren, gern einen Gedanken verfolgen, Freude an einer zündenden Idee haben, ein Aha-Erlebnis geniessen – dann sind Sie in der Mathematik richtig." (Kirchgraber, 2016 S. 31)*

Mit diesem Worten beginnt Urs Kirchgraber eine aktuelle populärwissenschaftliche Publikation. Sie soll Anlass sein für eine intensivere Betrachtung des Begriffs der Freude.

Eine mathematische Definition von Freude ist unmöglich, eine einfache begriffliche Definition von Freude schwierig[21]. Wer keine Freude erlebt hat, dem kann nicht erklärt werden, was Freude ist. Um mit Spranger zu sprechen, ist Freude „etwas, was hinausgreift aus dem nur subjektiven Geist in den Bereich des objektiven Geistes“ (Igerl, et al., 1989 S. 9). Freude stellt sich ein nach einem Brückenschlag der beiden Schillerschen Antipoden unvertilgbares Gefühl und unbestechliches Bewusstsein (2.2.4.3).
Igerl formuliert:

> *„Freude ist der Kern jeder Seinserziehung. Sie ist die Grundstimmung des Lebens. In der Freude erlebt der Mensch ein Mehr seiner Persönlichkeit. ... Damit kann sie zu einem starken Antrieb werden, die persönlichen Fähigkeiten weiterzuentwickeln und zu vervollkommnen und darf deshalb nach einem Wort von Goethe als ‚Mutter aller Tugenden‘ gelten.“ (Igerl, et al., 1989 S. 75)*

Igerl stellt damit die Freude in den Blickwinkel der Persönlichkeitsentwicklung und, differenzierter betrachtet, in das Fundamentum für personorientierte Begabungsförderung (2.1.1, 2.1.1.4, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.2, 2.2.1.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3, 4). Dies meint er auch, wenn er Freude zugleich als „Gabe und Aufgabe“ (Igerl, et al., 1989 S. 81) sieht und damit dem Begabungsbegriff in etymologischer Weise sehr nahe kommt. Hermann Hesse gestaltet diesen zentralen Aspekt der Freude aus:

> *„Der Mensch, so wie ihn Gott gedacht und wie die Dichtung und Weisheit der Völker ihn manche tausend Jahre verstanden hat, ist geschaffen mit einer Fähigkeit sich zu freuen an Dingen, auch wenn sie ihm nichts nutzen, mit einem Organ für das Schöne. An der Freude des Menschen am Schönen haben stets Geist und Sinn in gleichem Maße teil, und solange Menschen fähig sind, sich mitten in den Drangsalen und Gefährdungen des Lebens solcher Dinge zu freuen: eines Farbenspiels in der Natur oder im gemalten Bilde, eines Anrufes in den Stimmen der Stürme und des Meeres oder einer von Menschen gemachten Musik, solange ihnen hinter der Oberfläche der Interessen und Nöte die Welt als Ganzes sichtbar und fühlbar werden kann, worin vom Kopfdrehen einer spielenden jungen Katze bis zum Variationsspiel einer Sonate, vom rührenden Blick eines Hundes bis zur Tragödie eines*

[21] Vgl. Lao-tse: „Wenn die Begriffe nicht stimmen, stimmen die Worte nicht, kommen die Werke nicht zustande, gedeihen Moral und Kunst nicht. Trifft die Justiz nicht, so weiß die Natur nicht wohin Hand und Fuß setzen. Darum sorge man dafür, daß in den Worten alles in Ordnung ist. Das ist es, worauf es ankommt.“ zitiert nach (Igerl, et al., 1989 S. 9)

> *Dichters ein Zusammenhang, ein tausendfältiger Reichtum an Beziehungen, Entsprechungen. Analogien und Spiegelungen besteht, aus deren ewig fließender Sprache den Hörern Freude und Weisheit, Spaß und Rührung zuteil wird – solange wird der Mensch seinen Fragwürdigkeiten immer wieder Herr werden und seinem Dasein immer wieder Sinn zuschreiben können, denn der ‚Sinn' ist ja eben jene Einheit des Vielfältigen, oder doch jene Fähigkeit des Geistes, den Wirrwarr der Welt als Einheit und Harmonie zu ahnen." (Hesse H., Ausgewählte Gedichte, zitiert nach ebd.)*

Ersetzt man in dieser gelungenen Ausführung die Worte ‚einer von Menschen gemachten Musik' durch ‚einer von Menschen gemachten Mathematik', ‚Variationsspiel einer Sonate' durch ‚Variationsspiel einer Beweisführung' und ‚Tragödie eines Dichters' durch ‚Theorie eines Mathematikers', erhält die Freude ein mathematisches Antlitz oder die Mathematik ein freudvolles Antlitz (3.1, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.2, 3.3, 3.3.1.1, 3.3.2.1, 3.4, 3.4.1.3, 3.4.2.2, 3.4.2.5, 4.1.1.5, 4.2, 4.2.2.3, 4.3). Ferner können ohne Anstrengung Querverbindungen zu den Grundbegriffen des dialogischen Lernens (2.2.4.3) gezogen werden.

Auf die Frage, ob Freude erlernbar ist, weisen (Igerl, et al., 1989) darauf hin, dass dies über Begeisterung gelingen kann: „Geistige Arbeit und geistiges Erleben müssen getragen und erfüllt sein von dem, was allein des Geistige wirklich lebendig erschließen kann: von der Be-geisterung. Durch sie tritt der Mensch ins Reich des Geistes und durch sie wird die geistige Sache wirklich lebendig und fruchtbar." (Igerl, et al., 1989 S. 87) Der Lehrperson mit ihrer Haltung kommt eine entscheidende Rolle dabei zu, sie lockt und betreut die Begeisterung (Igerl, et al., 1989 S. 88) (Hattie, 2017). So kann in einer fruchtbaren Atmosphäre der geistige Mensch aus sich heraus und an sich selbst wachsen, die in ihm liegende Begabung entfalten und gedeihen lassen (2.1.1, 2.2.3, 2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3, 4).

Die Pädagogik der Freude ist alt. Didaktische Überlegungen, die auch nach hundert Jahren nichts an Aktualität eingebüßt haben, findet man etwa bei Georg Kerschensteiner oder Paul Georg Münch (Igerl, et al., 1989 S. 98f.).
Igerl, Seibert und Zöpfl weisen auf die Bedeutung des pädagogischen Freiraums und einer freien personalen Begegnung zwischen Schülern untereinander sowie zwischen Schülern und Lehrkräften hin (Igerl, et al., 1989 S. 146) und bestätigen

auf diese Weise die Relevanz einer personorientierten Begabungsförderung (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.3.1, 3, 4).

Wie sieht Kirchgraber die Freude an einer „zündenden Idee“?
Er stellt einen Beweis für die Zerlegungsgleichheit der beiden Kathetenquadrate zum Hypotenusenquadrat (Satz von Pythagoras) vor, arbeitet die „zündende Idee“ und ihre Einbettung in den Gedankengang heraus (2.2.4.3). Daran anknüpfend beschäftigt er sich mit den Fragen der Volumengleichheit und der Zerlegungsgleichheit im Raum (Hilberts drittes Problem) - und nennt deren verblüffende Lösung (3.2). Die Betrachtung schließt mit einer Anwendung des Satzes von Pythagoras in der Navigation, konkret beim GPS-Signal (Kirchgraber, 2016 S. 31ff.) (4.3).
Mit den Worten Hesses ist Kirchgraber eine schöne mathematische Sonate gelungen. Die Freude des Menschen am Schönen, an der Geist und Sinn in gleichem Maße teilhaben, wird erlebbar und verstehbar.

3 Unterrichtskonzepte zur personorientierten Begabungsförderung

Auf der Basis der allgemeinen Überlegungen aus Kapitel 0 werden konkrete Unterrichtskonzepte zur personorientierten Begabungsförderung im (vorwiegend) gymnasialen Mathematikunterricht erarbeitet bzw. dargestellt und untersucht.

Im ersten Abschnitt werden umfangreiche Unterrichtserfahrungen zur Thematik der Kugelpackungen für eine personorientierte Begabungsförderung erschlossen. Nach einem fachwissenschaftlichen Überblick über den Bildungsgegenstand (3.1.1) erfolgt die didaktische Analyse (3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5), die in der Darstellung unterschiedlich ausgeprägter Unterrichtskonzepte im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (3.1.6, 3.1.7) mündet. Selbst eine Langzeit-Evaluation der Talententwicklung geförderter Schüler war möglich (3.1.6.4).

Im zweiten Abschnitt wird ein Unterrichtskonzept zum dritten Hilbertschen Problem erarbeitet. Wiederum wird nach einem fachwissenschaftlichen Überblick (3.2.2), der schöne Ergebnisse zur schulischen Pyramidenformel (3.2.2.7) und zu Kugelpackungen (3.2.2.8) enthält, und der didaktischen Analyse (3.2.3) das Unterrichtskonzept dargestellt und mit einem alternativen Unterrichtskonzept (3.2.4) verglichen. So ergeben sich Rückschlüsse über unterschiedliche Ebenen der Elementarisierung (3.2.5).

Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit Unterrichtskonzepten zum Anfangsunterricht in Analysis (3.3.1) und zum Aktual-Unendlichen (3.3.2), die in den weiten Bezugsrahmen zwischen Enrichment und Akzeleration eingeordnet werden können. Sie werden unter dem Blickwinkel einer adäquaten mathematischen Begabungsförderung für möglichst viele Gymnasiasten betrachtet.

Dies trifft auch auf die Unterrichtskonzepte für die Unterstufe zu, die im vierten Abschnitt behandelt werden. Personorientierte Begabungsförderung wird hier exemplarisch für den allgemeinen curricularen Geometrieunterricht (3.4.1) und in Fensterkonzepten für den gymnasialen Anfangsunterricht (3.4.2) erschlossen.

Stets bilden Kernideen ein probates Mittel zur Darstellung der jeweiligen Unterrichtskonzepte.

3.1 Kugelpackungen im Mathematikunterricht – Enrichment

Die Mathematik bietet als Fachwissenschaft ein reiches Spektrum an Themen, die sich für eine personorientierte Förderung mathematischer Begabungen im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (SEM, 2.1.3.3) eignen.
Dies gilt grundsätzlich für alle curricularen Themen des gymnasialen Mathematikunterrichts, die insgesamt vielfältige Ansatzpunkte für eine inhaltliche Erweiterung und Vertiefung bieten. Denkbar sind jedoch auch nichtcurriculare Themen wie Codierungstheorie, Knotentheorie, Zahlentheorie, Fraktale Geometrie, Maßtheorie, Entropie etc. Eine intensive didaktische und pädagogische Auseinandersetzung mit der Thematik der Kugelpackungen führte zu den folgenden Unterrichtskonzepten, die in exemplarischer Weise (2.2.4.2) für viele nichtcurriculare Themen die große Bandbreite an Möglichkeiten für eine personorientierte Begabungsförderung im Rahmen des Enrichment-Ansatzes aufzeigen können.

3.1.1 Kugelpackungen in „a Nutshell“[22]

Die Thematik der Kugelpackungen stellt unbestritten einen mathematischen Bildungsgegentand dar (Gruber, et al., 1993) (Beutelspacher, et al., 1997) (Zong, 1999) (Hales, 2005) (Szpiro, 2011) (Hales, 2015) (Aigner, et al., 2016). Er ist Teil des „Regulären“ in der Auffassung des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf (2.2.4.3), Teil des „Kategorialen“ im Bildungsverständnis nach Klafki (2.2.4.1), Teil der „Welt“ im Bildungsverständnis nach Humboldt (2.1.1.1).
Kugelpackungen kommen aus der Geometrie heraus und entfalten gerade im Wechselspiel mit algebraischen Methoden und in der „Veranschaulichung das Abstrakten“ ihren besonderen Reiz.

[22] Der Begriff ist in Anlehnung an „Multiple Intelligences: In a Nutshell“ (Gardner, 1993) gewählt.

Es gibt schöne Zusammenfassungen der Thematik, z. B. in (Henk, et al., 2000) oder in (Beutelspacher, 1996). Im Folgenden wird versucht, für einen thematischen Überblick wesentliche Puzzleteile aus (Leppmeier, 1997) zu einer „Nutshell“ zusammenzufügen.

Im gymnasialen Bildungsprozess kommen Schüler oftmals im Rahmen des Chemieunterrichts mit Kugelgitterpackungen als Darstellung für Ionengitter und Erklärung für Eigenschaften von Salzkristallen in Berührung. Dort wird auch die Begrifflichkeit der kubischen Packungen, der einfach-kubischen Packung, der raumzentriert-kubischen Packung und der flächenzentriert-kubischen Packung (fcc) eingeführt und in der Regel mitgeteilt, dass die fcc-Packung zusammen mit der hexagonal-dichtesten Packung (hcp) eine dichteste Packung sei. Mathematisch relevant ist eine saubere begriffliche Ausschärfung.

In einem ersten Komplex ist die Frage interessant, wie man unendlich viele Kugeln in einer regelmäßigen Anordnung möglichst dicht packt. Bei der Lösung des ebenen Problems begegnet man Lagrange, bei der Beantwortung der räumlichen Fragestellung Gauß.
Als regelmäßige Struktur wird eine Gitterstruktur zugrunde gelegt (hier erscheint das erste Puzzleteil):

Definition 2.3 Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Für jedes $j = 1, \ldots, n$ gelte:

$$a_j \neq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i a_i \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Dann heißt

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} n_i a_i \;\middle|\; n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

ein *n-dimensionales Gitter* und $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine *Basis*.

aus (Leppmeier, 1997 S. 10)

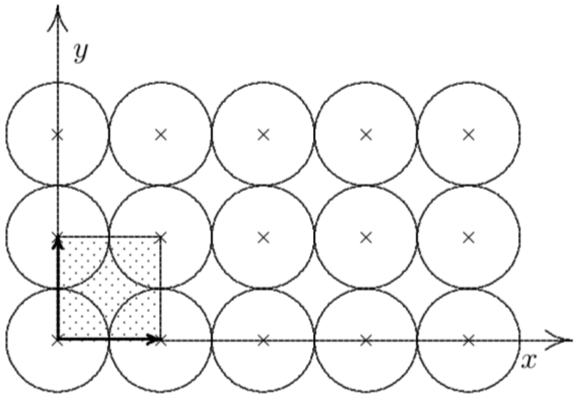
Auf dieser Basis gelingt die Definition einer infiniten Kugelgitterpackung:

Definition 2.8 Gegeben seien eine n-dimensionale, offene[16] Einheitskugel B^n und ein n-dimensionales Gitter G.
Für alle Gittervektoren $g \in G$ sei $B^n_g = B^n + g$ die um g verschobene Kopie von B^n.

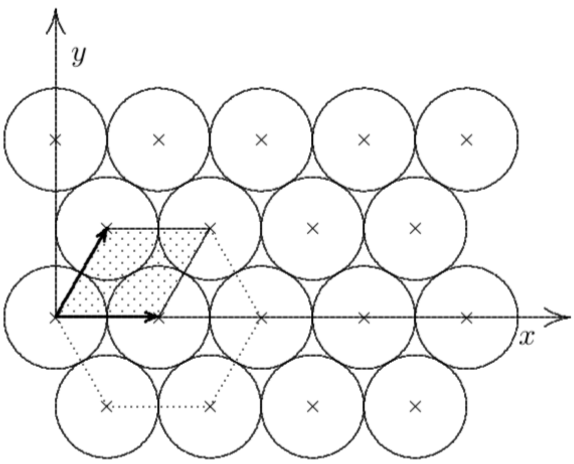
Falls je zwei verschiedene B_g^n und B_h^n $(g, h \in G)$ disjunkt sind (d. h. $B_g^n \cap B_h^n = \emptyset$ für $g \neq h$), heißt das Tupel $\mathrm{GP}(B^n, G)$ eine *(n-dimensionale) infinite Kugelgitterpackung.*

aus (Leppmeier, 1997 S. 38)

Eine Illustration des ebenen Falls zeigen die folgenden beiden Abbildungen.



quadratische Kreisgitterpackung



hexagonale Kreisgitterpackung

aus (Leppmeier, 1997 S. 39)

Die Packungsdichte lässt sich auf dieser Basis definieren als Quotient aus Kugelvolumen und Volumen des durch die Gitterbasis aufgespannten Fundamentalparallelotops.
So lassen sich die beiden wichtigsten Ergebnisse über Kugelgitterpackungen formulieren:

Satz 2.13 (dichteste Kreisgitterpackung, Lagrange 1773): *Unter allen Kreisgitterpackungen besitzt allein diejenige mit hexagonalem Gitter die maximale Packungsdichte*

$$\delta_{max} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 51)

Satz 2.14 (dichteste Kugelgitterpackung, Gauß 1831): *Unter allen Kugelgitterpackungen im $\mathbb{R}^3$ besitzt nur diejenige Packung mit flächenzentriert-kubischem Gitter G_{fcc}*

$$(Basis \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\})$$

die maximale Packungsdichte $\delta_{max} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

aus (Leppmeier, 1997 S. 57)

Der Beweis, der in 3.1.3 noch näher betrachtet wird, gelingt mit algebraischen Methoden. Die Linearformen der Packungsdichten sind zu minimieren und die Nachweise für die Minima zu erbringen. Sie stellen die mathematische Quintessenz dieses Themenkomplexes dar.

Bis zur Dimension $n = 8$ kennt man die weiteren maximalen Packungsdichten und die dazugehörigen Gitter. Der Beweis für Dimension 8 gelang erst kürzlich (Viazovska, 2016).

In der Ebene ($n = 2$) kann man auf die Voraussetzung einer regelmäßigen Gitteranordnung verzichten (Thue 1910). Einen elementaren Beweis[23] findet man in (Chang, et al., 2010).

Im Raum kann man ebenfalls auf die Voraussetzung einer regelmäßigen Anordnung verzichten. Diese sog. Kepler-Vermutung[24] wurde von Hales 1998 (Hales, 2005) bewiesen, einen aktuellen Überblick findet man in (Hales, 2015) oder in (Szpiro, 2011).

Im Gegensatz zu infiniten Packungen steht bei finiten Packungen die Frage nach einer sinnvollen Definition für die Packungsdichte und für die Abgrenzung der Packung gegen die Umgebung im Vordergrund. Die Einführung eines Randes mit variabler Dicke durch Wills führte hier zu erstaunlichen Ergebnissen.

---

[23] Dieser Beweis enthält eine kleine Lücke. Aus der Linearform zur Packungsdichte wird ein minimales Dreieck mit 60°-Winkel abgeleitet und übersehen, dass auch ein Dreieck mit 120°-Winkel entstehen kann. Da das zweite Dreieck ebenfalls zum gleichen hexagonalen Gitter führt, wirkt sich dies nicht weiter aus. Dies hat damit zu tun, dass es für das Fundamentalparallelogramm eines hexagonalen Gitters grundsätzlich zwei Zerlegungen in Teildreiecke gibt.

[24] Sie wird auch als Kepler-Hilbert-Problem bezeichnet.

Finite Kugelpackung und Packungsdichte lassen sich in natürlicher Weise definieren:

Definition 3.1 Sei B^n die offene Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. Sei $C_N = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ eine Menge von N Ortsvektoren im $\mathbb{R}^n$. Für jeden Ortsvektor $c_i \in C_N$ $(1 \leq i \leq N)$ sei $B_i = B^n + c_i$ die um c_i verschobene Kopie von B^n.
Falls je zwei verschiedene B_i und B_j $(1 \leq i < j \leq N)$ disjunkt sind, heißt die Menge

$$\mathrm{P}(B^n, C_N) = \{\, B_i \mid 1 \leq i \leq N \,\}$$

eine *finite Kugelpackung*.

aus (Leppmeier, 1997 S. 86)

Definition 3.2 Sei $\mathrm{P}(B^n, C_N)$ eine finite Kugelpackung. Dann heißt

$$\mathrm{d}(B^n, C_N) = \frac{N \cdot \mathrm{Vol}(B^n)}{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{conv}(B^n + C_N)\big)}$$

die zugehörige *finite Kugelpackungsdichte*.

aus (Leppmeier, 1997 S. 87)

Die ebene Situation verhält sich so, wie man dies intuitiv vermuten würde. Eine hexagonale Anordnung der Kreise weist unabhängig von deren Anzahl stets die größtmögliche Packungsdichte auf.
Die räumliche Situation hält dagegen eine handfeste Überraschung bereit. Für kleine Anzahlen von Kugeln sind lineare Anordnungen („Stangen von Tennisbällen“) dichter als ebene oder räumliche Anordnungen („Netze von Orangen“). Ab einer Anzahl von 56 kehrt sich das Packungsverhalten um, räumliche Anordnungen („Cluster“) sind dann dichter als lineare Anordnungen („Wurst“). Man spricht von der Wurstkatastrophe.

Satz 3.7 (Wurstkatastrophe[6] im $\mathbb{R}^3$, Gandini und Wills 1992): *Im 3-dimensionalen Raum gibt es zu jeder Stückzahl $N \geq 56$ außer $N = 57$, 58, 63 und 64 eine Clusterpackung $\mathrm{P}\big(B^3, C_N\big)$, die dichter ist als die Wurstpackung $\mathrm{P}\big(B^3, S_N\big)$:*

$$\mathrm{d}\big(B^3, C_N\big) > \mathrm{d}\big(B^3, S_N\big).$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 121)

Im vierdimensionalen Raum ist die Situation vergleichbar: Bei einer fünfstelligen Stückzahl tritt nochmals eine Wurstkatastrophe ein.
Die fünfdimensionale Situation hält dagegen wieder eine Überraschung bereit. Die lineare Anordnung ist stets die dichteste Anordnung. Man spricht von der Wurstvermutung.

Satz 3.9 (Wurstvermutung, Betke, Henk und Wills 1994–1997): *Im* $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 42$*) ist für jede Stückzahl* N *die Wurstpackung* $\mathrm{P}(B^n, S_N)$ *dichter als irgendeine Clusterpackung* $\mathrm{P}(B^n, C_N)$*:*

$$\mathrm{d}(B^n, S_N) > \mathrm{d}(B^n, C_N).$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 126)

In den Dimensionen 5 bis 42 ist die Wurstvermutung noch nicht bewiesen.
Eine Variation des Randes von finiten Kugelpackungen führt zu Containerpackungen und zu den ebenfalls historisch interessanten Fragestellungen des Kissing-Number-Problems[25].

Die Auffassung, dass zwischen der linearen Konfiguration und der Clusterkonfiguration eine Art Phasenübergang vorliegt, führt zum Ansatz einer variablen Randdicke und zur Definition der parametrischen Dichte:

Definition 4.1 Sei $\mathrm{P}(B^n, C_N)$ eine finite Kugelpackung. Dann heißt

$$\mathrm{d}(B^n, C_N, \varrho) = \frac{N \cdot \mathrm{Vol}(B^n)}{\mathrm{Vol}\big(\mathrm{conv}(\varrho B^n + C_N)\big)}$$

die dazugehörige *Dichtefunktion mit Randparameter* ϱ oder die *parametrische Dichte*.

aus (Leppmeier, 1997 S. 145)

Man überlegt sich folgerichtig, dass nun der Randparameter diesen Phasenübergang kontrolliert.

Satz 4.2 (Parameterinduzierte Wurstkatastrophe): *Zu jeder Stückzahl* N *von Kugeln* B^n *gibt es einen Randparameter* ϱ_0*, so daß für mindestens eine Clusterkonfiguration* C_N*, deren Dichtefunktion* $\mathrm{d}(B^n, C_N, \varrho)$ *größer ist als die Dichtefunktion* $\mathrm{d}(B^n, S_N, \varrho)$ *der Wurstpackung, wenn nur* $\varrho > \varrho_0$ *erfüllt ist:*

$$\mathrm{d}(B^n, C_N, \varrho) > \mathrm{d}(B^n, S_N, \varrho) \qquad \textit{für } \varrho > \varrho_0.$$

Gilt Gleichheit an der Stelle $\varrho = \varrho_0$*, so folgt daraus*

$$\mathrm{d}(B^n, C_N, \varrho) < \mathrm{d}(B^n, S_N, \varrho) \qquad \textit{für } \varrho < \varrho_0.$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 150)

An dieser Stelle kann man maximale Packungsdichten in Abhängigkeit des Randparameters betrachten[26], die jedoch mit Blick auf das Thema der vorliegenden Arbeit wenig ergiebig sind.

---

[25] Man findet in der Literatur auch die Bezeichnung Newton-Gregory-Problem.
[26] z. B. Satz 4.7 in (Leppmeier, 1997)

Goldoberflächen im Licht der Kugelpackungen sind in mehrfacher Hinsicht interessant. Sie können mit Hilfe der Rastertunnelmikroskopie in atomarer Auflösung sichtbar gemacht werden. Ist der fcc-Kristall von Gold in einer sog. (111)–Richtung geschnitten, liegen die Atome in hexagonaler Anordnung an der Oberfläche.

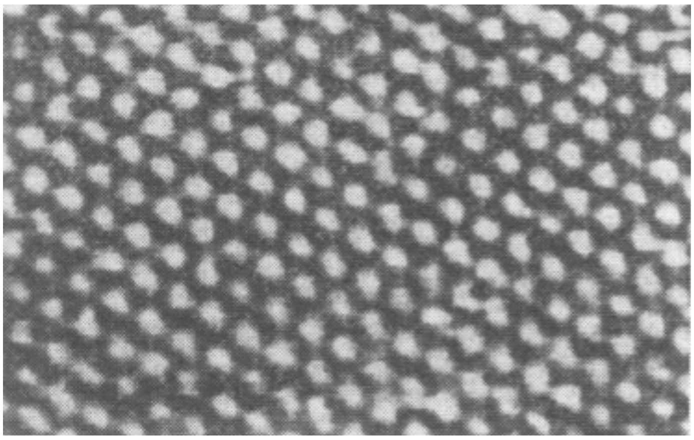


Abbildung 15 Gold(111)-Fläche unrekonstruiert, aus (Leppmeier, 1997 S. 178)

Ist die Goldoberfläche elektrolytbedeckt, kann man im Modell der Kugelpackungen den Randparameter über das angelegte Potential beeinflussen. Auf der Goldoberfläche vollzieht sich ein Phasenübergang von der hexagonalen Anordnung in zugrundeliegender fcc-Struktur (sog. „unrekonstruierte Gold(111)–Fläche") zu einer hexagonalen Anordnung mit quadratischem Anteil in zugrundeliegender, abwechselnder fcc- und hcp-Struktur (sog. „rekonstruierte Gold(111)–Fläche").

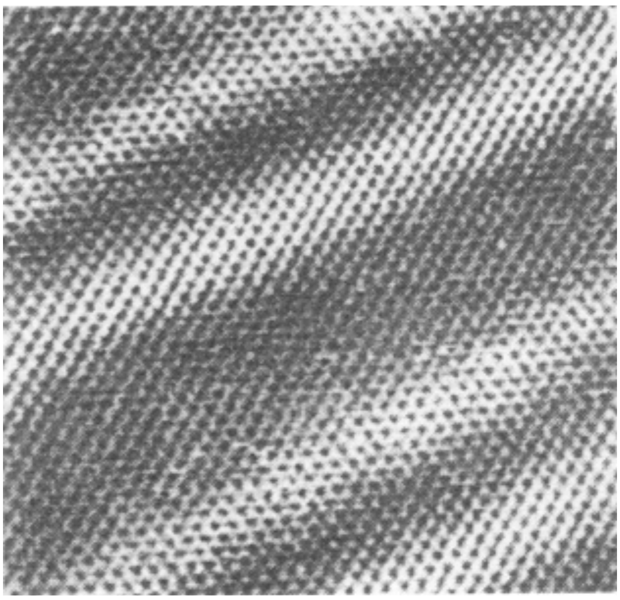


Abbildung 16 Gold(111)-Fläche rekonstruiert, aus (Leppmeier, 1997 S. 179)

Ähnliche Betrachtungen, die tiefer in die Oberflächenphysik und Elektrochemie führen, kann man auch an Gold(110)–Flächen durchführen.

Anstelle einer Textzusammenfassung sollen bildliche Impressionen für die vier wesentlichen Kapitel infinite Kugelgitterpackungen, finite Kugelpackungen, Randfunktion und parametrische Dichte, Rastertunnelmikroskopie und Goldatome stehen.

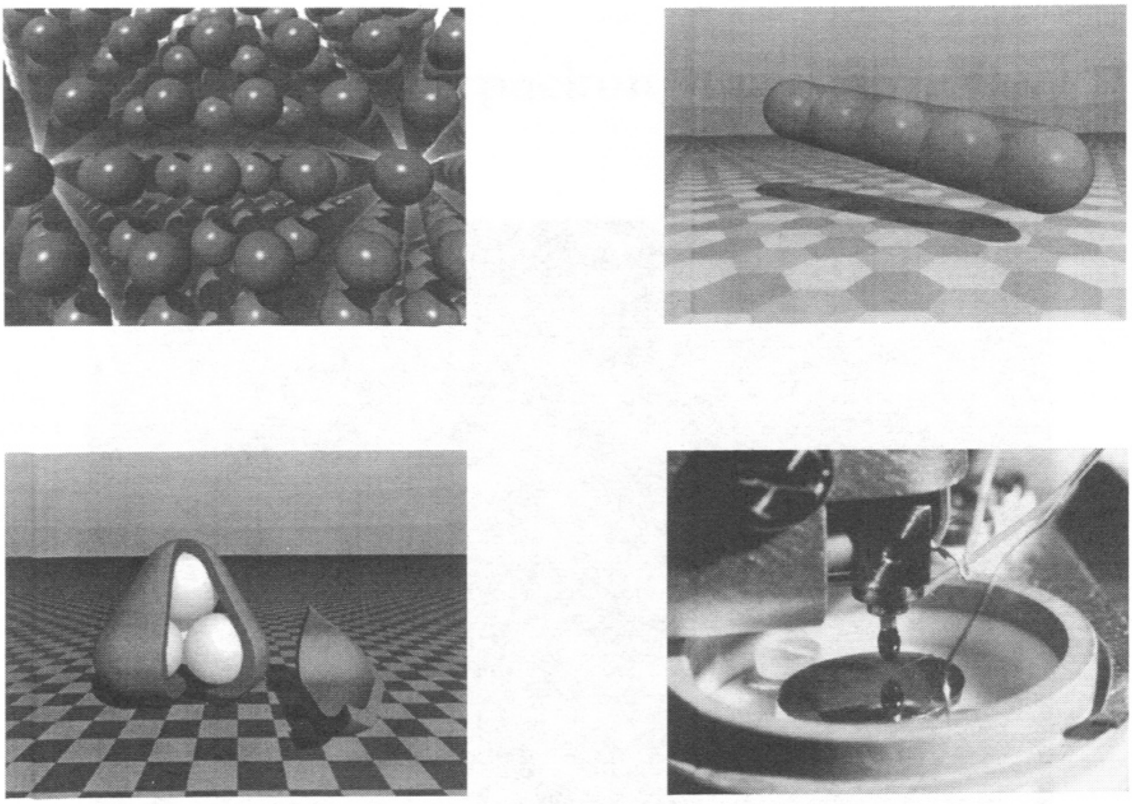


Abbildung 17 Bildliche Impressionen zu Kugelpackungen, aus (Leppmeier, 1997)

Die Betrachtung von Goldoberflächen im Lichte eines Vortrags über Kugelpackungen und Wurstkatastrophen durch Herrn Prof. Dr. Wills im Rahmen des mathematischen Kolloquiums der Ludwig-Maximilians-Universität München 1993 bildete zugleich den Ursprung der intensiven und langen Beschäftigung des Autors mit Kugelpackungen in mathematischer Hinsicht.

3.1.2 Das Kategoriale der Kugelpackungen

Kugelpackungen können als mathematischer Bildungsgegenstand im Sinne von Hilton eine Antwort auf die Frage „What is Mathmatics?“ (2.2.3) geben. Wertschätzung für mathematisches Denken und die Rolle der Mathematik für die kulturelle Entwicklung können spürbar werden. Der historische Kontext reicht von Kepler bis in die aktuelle Mathematik hinein; das Wechselspiel geometrischer und algebraischer, funktionaler und geometrisch-analytischer Methoden kann erlebt, erarbeitet und verstanden werden.
In der Auseinandersetzung mit der Thematik Kugelpackungen kann Bildung im Sinne Klafkis gelingen. „Bildung als Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen“ (2.2.4.1), dieser objektive, materiale Aspekt kann anhand der Ausführungen in 3.1.1 realisiert werden; das Gleiche gilt für „das Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit“ (ebd.), für den subjektiven, formalen Aspekt von Bildung.
Die Sätze von Lagrange und Gauß ermöglichen kategoriale Bildung ebenso wie die Aussagen der Wurstkatastrophe und der Wurstvermutung, aber auch das Konzept der Dichtefunktion und in einer über das Fach hinausweisenden Orientierung eine Betrachtung von atomaren Kristalloberflächen (3.1.1).
Exemplarisch ermöglicht eine entsprechende Elementarisierung des Satzes von Gauß ein sehr tiefes mathematisches Verständnis für die fcc-Packung (ebd., 3.1.3). Sowohl die hexagonale als auch die quadratische Sichtweise lassen sich im algebraischen Formalismus entdecken (3.1.3). Ein Vortasten in höherdimensionale Räume erfolgt durch entsprechende Plausibilitätsbetrachtungen zur Wurstvermutung (3.1.4). Ein Verständnis für die Idee des parametergesteuerten Phasenübergangs zwischen Wurstkonfiguration und Clusterkonfiguration gelingt durch die Dichtefunktion. Das interdisziplinäre Zusammenspiel kann am Goldkristall erlebt werden (3.1.6). Kurzum: Auf dem Fundament der Kugelpackungen kann kategoriale Bildung gelingen „in dem Doppelsinn, dass sich dem Menschen eine Wirklichkeit ‚kategorial‘ erschlossen hat und dass eben damit er selbst – dank der selbstvollzogenen ‚kategorialen‘ Einsichten, Erfahrungen, Erlebnisse – für diese Wirklichkeit erschlossen worden ist“ (2.2.4.1).

Ein reflexiver Bildungsprozess kann sich entwickeln zwischen einem „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (ebd.) und „als Aufgehen allgemeiner Einsichten, Erlebnisse, Erfahrungen auf der Seite des Subjekts" (ebd.). Dies gilt für die Betrachtung einfacher Kreis- oder Kugelkonfigurationen, beispielsweise für leicht entdeckbare Erklärungsschemata wie die bei Kreispackungen eingeschlossene „Luft“, aber auch für nicht unmittelbar beobachtbare Zusammenhänge wie das Vorliegen einer Innenwinkelsumme für ebene Polygone im Zweidimensionalen und das Fehlen eines entsprechenden Pendants für räumliche Polyeder im Dreidimensionalen (3.1.1, 3.2.2).
Die Betrachtung und Kategorisierung jeweils unterschiedlicher Packungskonfigurationen sowie deren Untersuchung in jeweils höheren Dimensionen löst „im Zögling nicht nur eine subjektive, ‚formale‘ Kraft aus, sondern er ist – in einem übertragenen Sinne – selbst Kraft, insofern – und nur insofern – er ein Stück Wirklichkeit einschließt und zugänglich macht“ (2.2.4.1).

Die zentralen Kategorien Klafkis, das Exemplarische, das Typische, das Repräsentative, das Elementare (ebd.) findet man in der Thematik der Kugelpackungen in unterschiedlicher Ausprägung. Das Exemplarische liegt nicht nur in den vielen Beispielen vor, aus denen sich die wesentlichen Aussagen ableiten lassen. Es manifestiert sich auch dadurch, dass man sich über Kugelpackungen die Ebene, den drei- und höherdimensionalen Raum erschließen kann. Das Typische findet man sowohl in kleinen Zusammenhängen bei den einzelnen Packungskonfigurationen als auch in großen Zusammenhängen über die Dimensionen hinweg. Das Repräsentative kommt beim Betrachten in ganz unterschiedlicher Ausprägung und Tiefe zur Geltung. Gleiches gilt für das Elementare. Jedes Kind erkennt die unterschiedlichen Packungsdichten einer quadratischen und einer hexagonalen Packung von Eincentmünzen und kann dies auch mit eigenen Worten artikulieren. Auf einer wesentlich höheren Metaebene stellen nicht zuletzt die in 3.1.1 zusammengestellten Puzzleteile das Elementare der Kugelpackungen dar (2.2.3, 2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.1.3, 3.1.6, 4.3).

3.1.3 Elementarisieren nach dem Wagenscheinschen Prinzip

Die Sätze von Lagrange und Gauß (3.1.1) eignen sich sehr gut für ein Vorgehen nach dem *genetisch-sokratisch-exemplarischen* Prinzip im Sinne Wagenscheins (2.2.4.2).
Die Frage nach der dichtesten Kreispackung ist schnell formuliert. Ein *genetischer* Zugang durch Ausprobieren mit Hilfe gleicher Münzen liegt auf der Hand. Die Schüler können auf dem Tisch experimentieren, die Münzen unter den Overheadprojektor oder die Dokumentenkamera legen.
So kann die „Wieder-Entdeckung" (ebd.) der Aussage von Lagrange gelingen. In der jugendlichen Sprache des Verstehens gesprochen: Die ‚schräge' Anordnung ist dichter als die ‚gerade' Anordnung. Und an diesem Punkt gilt es, die Beobachtung auszuschärfen und die Begriffe zu präzisieren. Im Dialog gelingt nun die Weiterentdeckung. Die genetische Leitfrage lautet „Fällt Ihnen zu dem Problem etwas ein?" (ebd.) und gerade nicht „Kommen Sie mit?" (ebd., 2.2.4.3). Die Entdeckungen purzeln vielleicht in folgender Reihenfolge: Die Kreismittelpunkte bilden ein Gitter. Das Gitter wird aufgespannt von zwei Basisvektoren. Hier bietet sich ein genetischer Exkurs zur Frage der Basis eines Gitters an, der unausgesprochen eine Modellvorstellung für die Basis eines Vektorraums erzeugen kann (3.1.2). Zwei Basisvektoren bilden ein Fundamentalparallelogramm. Und wieder ist Raum für einen genetischen Exkurs, um der Frage „Wie viel Kreis befindet sich in einem Fundamentalparallelogramm?" nachzugehen. „Das Entdecken, das Enthüllen, das Erspüren, das Durchschauen" (2.2.4.2) mündet schließlich in der Feststellung, dass die Frage nach der dichtesten Kreisgitterpackung äquivalent ist zur Frage nach dem kleinsten Fundamentalparallelotop (3.1.2). All dies ist detailliert in (Leppmeier, 1997 S. 7-50) dargestellt.

Zur genetischen Komponente tritt beinahe unbemerkt auch die *sokratische* Komponente. Natürlich „hängt alles von der Kunst ab, die Schüler von Anfang an auf sich zu stellen, sie das Selbstgehen lernen, ohne dass sie dadurch allein gehen, und diese Selbstverständlichkeit so zu entwickeln, dass sie eines Tages das

Alleingehen wagen dürfen“ (2.2.4.2). Am Ende der Entdeckungen ist es selbstverständlich, dass das kleinste Fundamentalparallelotop oder die kleinste Determinante die entscheidende Fragestellung erzeugt (2.2.4.1). Aus dem Seltsamen wird in sokratischer Weise das Selbstverständliche. Wagenschein wäre sehr zufrieden, wenn er formuliert: „Ich denke an den künftigen Laien und sein Anrecht, an einigen Beispielen zu durchschauen, was es in der Geometrie heißt, aus dem Seltsamen das Selbstverständliche zu machen.“ (2.2.4.2) (2.2.3).

Mit der Formulierung der entdeckten Vermutung als Satz über die dichteste Kreisgitterpackung ist die eine Hälfte des Weges zurückgelegt. Die andere Hälfte besteht im noch ausstehenden Beweis des vermuteten Satzes. Für die weitere Betrachtung sind zwei Beweismöglichkeiten, ein elementargeometrischer Beweis und ein geometrisch-analytischer Beweis, wieder als Puzzlestücke aus (Leppmeier, 1997) dargestellt.

Elementargeometrischer Beweis:

Zum Beweis des Satzes 2.13 benötigen wir Teil 1 des folgenden Lemmas (beide Teile benötigen wir im Beweis des Satzes 2.14).

Lemma 2.5 *Sei ΔABC ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c, dem Flächeninhalt F und dem Umkreisradius R. Dann gilt:*

1. $16F^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2$. *(Heronsche Formel)*
2. $16F^2R^2 = b^2c^2a^2$.

Teil 1 des Lemmas gibt also die Abhängigkeit des Flächeninhalts eines Dreiecks von den drei Seiten an.

Beweis des Lemmas 2.5

1. In einem Dreieck gilt mit den üblichen Bezeichnungen für die Fläche

$$F = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bc\sin\alpha, \quad \text{also}$$
$$\sin^2\alpha = \frac{4F^2}{b^2c^2}$$

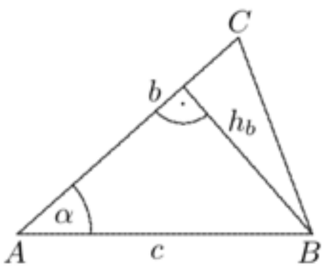


Bild 2.21 Heronsche Formel

Andererseits folgt aus dem Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

und mit dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4b^2c^2}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2).$$

Gleichsetzen ergibt Teil 1 des Lemmas.

aus (Leppmeier, 1997 S. 52)

2. Wir betrachten zunächst den Fall eines spitzwinkligen Dreiecks.
Sei U der Umkreismittelpunkt, l das Lot von U auf a, L der Lotfußpunkt.
Dann gilt nach dem SsW-Satz die Kongruenz der Dreiecke ΔUBL und ΔULC, insbesondere $\overline{CL} = \overline{BL} = \frac{a}{2}$ und $\measuredangle BUL = \measuredangle LUC \quad (*)$.
Ferner ist der Winkel $\measuredangle BUC$ der Mittelpunktswinkel zum Umfangswinkel $\measuredangle BAC$; $\measuredangle BAC = \alpha$, also $\measuredangle BUC = 2\alpha$.
Mit $\measuredangle BUL + \measuredangle LUC = \measuredangle BUC$ folgt aus (*) $\measuredangle BUL = \measuredangle LUC = \alpha$.

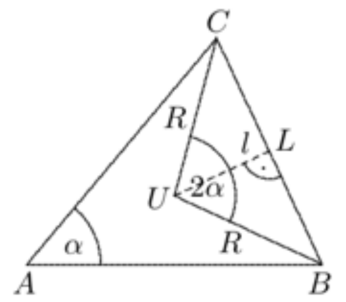


Bild 2.22 Mittelpunktswinkel

Also hat man

$$\sin\alpha = \frac{\frac{1}{2}a}{R} \qquad (\text{z. B. } \Delta UBL).$$

Eingesetzt in die oben hergeleitete Formel $F = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ folgt daraus

$$F = \frac{1}{2}bc\frac{\frac{1}{2}a}{R} = \frac{abc}{4R}$$

und damit Teil 2 des Lemmas (siehe auch Aufgabe 5) für das spitzwinklige Dreieck.
Der Fall des rechtwinkligen Dreiecks ist leicht (vgl. Aufgabe 1a).
Den Fall des stumpfwinkligen Dreiecks, wo U nicht mehr im Innern des Dreiecks liegt, erledigt man nach einer kleinen Zusatzüberlegung analog zum ersten Fall (vgl. Aufgabe 1b). □

Beweis des Satzes 2.13

Sei G ein 2-dimensionales Gitter. Wir konstruieren nun zu diesem Gitter eine besonders schöne Basis, deren Wert wir erst später zu schätzen wissen werden.
Es sei $B = \{(a_1, a_2) \mid \{a_1, a_2\} \text{ Basis von } G \text{ und } |a_1| \leq |a_2|\}$ die Menge der längenmäßig geordneten Basen von G und $B_1 = \{a_1 \mid (a_1, a_2) \in B\}$ die Menge aller ersten, kürzeren Basisvektoren.
Nun gibt es einen kürzesten ersten Basisvektor $c \in B_1$ mit

$$|c| = \min_{a_1 \in B_1} |a_1| \tag{2.1}$$

Zu diesem Vektor c gibt es einen kürzesten zweiten Basisvektor b mit

aus (Leppmeier, 1997 S. 53)

$$|b| = \min_{(c,a_2)\in B} |a_2|. \tag{2.2}$$

Es ist dann $|c| \leq |b|$, und es bildet b zusammen mit c die Basis $\{c, b\}$.
Wir können o. B. d. A. annehmen, daß der Winkel α zwischen c und b spitz ist. Denn mit (c, b) erfüllen auch $(-c, b)$ und $(c, -b)$ die Eigenschaften 2.1 und 2.2 (vgl. Abbildung 2.23).

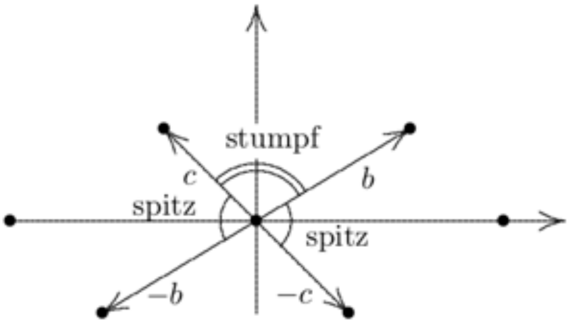


Bild 2.23 Spitzer Winkel zwischen zwei Basisvektoren

Außerdem gilt für den Differenzvektor $a = c - b$ (vgl. Bild 2.24): $|a| \geq |b|$. (Denn sonst wäre (c, a) eine Basis von G mit $|a| < |b|$, was im Widerspruch zur Wahl von b steht.) Diese Eigenschaften der Basis (c, b) spielen im folgenden eine bedeutende Rolle.

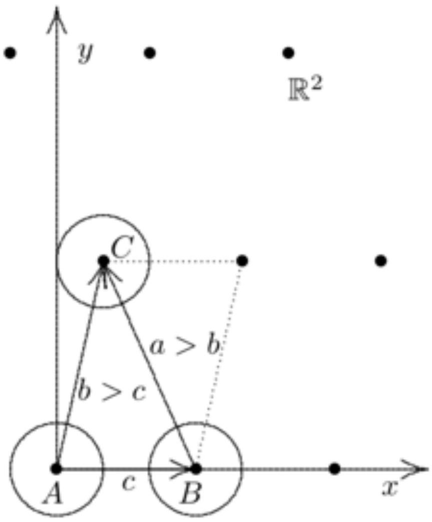


Bild 2.24 Ein zweidimensionales Gitter

Der gemeinsame Fußpunkt und die Spitzen der Basisvektoren c und b bilden ein Dreieck ΔABC, dessen doppelter Flächeninhalt gerade der Fläche des Fundamentalparallelogramms entspricht. Gemäß der Definition der Packungsdichte müssen wir — bei gegebener Kreisfläche — diesen Flächeninhalt minimieren.
Wir bezeichnen das Dreieck gerade so, daß sich die Eigenschaften der Basis (c, b) auf die Seitenlängen a, b und c übertragen:

$$c \leq b \leq a$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 54)

Da die gepackten Einheitskreise außerdem disjunkt sind, ist $2 \leq c$.
Ferner ist nach obigen Überlegungen zur Basis (c, b) der Winkel α spitz:

$$\alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mit dem Kosinussatz folgt daraus

$$a^2 \leq b^2 + c^2.$$

Nach dieser Vorarbeit betrachten wir den Flächeninhalt F des Dreiecks ΔABC, den wir minimieren müssen. Für ihn gilt gemäß dem Lemma

$$16F^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2.$$

Um F zu minimieren, können wir ebensogut $16F^2$ minimieren; dadurch wird die Rechnung einfacher:

$$\begin{aligned} 16F^2 &= -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 \\ &= -a^4 - b^4 + 2a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 - 4c^4 + 3b^2c^2 + a^2c^2 + 3c^4 \\ &= (b^2 + c^2 - a^2)(a^2 - b^2) + c^2(a^2 + 3b^2 - 4c^2) + 3c^4. \end{aligned}$$

Nach den Ungleichungen zu Beginn des Beweises ist

$$b^2 + c^2 - a^2 \geq 0, \quad a^2 - b^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad a^2 + 3b^2 - 4c^2 \geq b^2 + 3b^2 - 4c^2 \geq 0.$$

Also folgt

$$16F^2 \geq 3c^4, \quad \text{also} \quad F \geq \frac{\sqrt{3} \cdot c^2}{4}$$

Daher ist das Volumen des Fundamentalparallelogramms mindestens gleich

$$2F \geq \frac{\sqrt{3}}{2} c^2.$$

Wann gilt Gleichheit? Diese kann in zwei Fällen auftreten:

$$\begin{array}{llcl} \text{1. Fall:} & b^2 + c^2 - a^2 = 0 & \text{und} & a^2 + 3b^2 - 4c^2 = 0 \\ \text{2. Fall:} & a^2 - b^2 \qquad = 0 & \text{und} & a^2 + 3b^2 - 4c^2 = 0 \end{array}$$

Im ersten Fall folgt durch Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite $4(b^2 - c^2) + c^2 = 0$, also ein Widerspruch, da $b \geq c > 0$ ist.
Im zweiten Fall ergibt sich $a = b = c$. Somit ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, und damit ist die Packung hexagonal.

Für $c = 2$ errechnet man $2F = 2\sqrt{3}$, woraus

$$\delta(B^2, G_{hex}) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

folgt. Insgesamt ist also der Satz bewiesen. □

aus (Leppmeier, 1997 S. 55)

Geometrisch-analytischer Beweis (in Anlehnung an Gauß, vgl. S.111):

Beweis des Satzes 2.13

Sei G ein 2-dimensionales Gitter mit Basis $\{a_1, a_2\}$. Wie im elementaren Beweis auf Seite 53 gezeigt, dürfen wir o. B. d. A.

$|a_1|$ als minimal,
$|a_2|$ als nächstminimal (also $|a_2| \geq |a_1|$) und
$\langle a_1, a_2 \rangle$ als nichtnegativ annehmen.

(Dabei bezeichne $|\cdot|$ die Standard-Norm und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.) Die letzte Bedingung ergibt sich sofort aus der durch die Ungleichung von Cauchy-Schwarz fundierten Beziehung zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem Zwischenwinkel der beiden Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\langle a_1, a_2 \rangle}{|a_1| \cdot |a_2|}.$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} |a_1| &=: \sqrt{c} \qquad && (c \in \mathbb{R}^+) \\ |a_2| &=: \sqrt{b} \qquad && (b \in \mathbb{R}^+) \\ \langle a_1, a_2 \rangle &=: a \qquad && (a \in \mathbb{R}_0^+). \end{aligned}$$

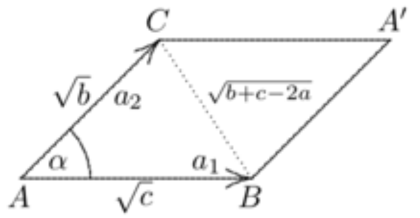


Bild 2.32 Norm und Skalarprodukt in der Ebene

Dann gilt für die Fläche des von a_1 und a_2 aufgespannten Parallelogramms gerade

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}^2(\mathcal{F}(G)) &= |a_1 \times a_2|^2 = \\ &= |a_1|^2 \cdot |a_2|^2 - \langle a_1, a_2 \rangle^2 = \\ &= cb - a^2. \end{aligned}$$ [18]

Dabei bezeichne $\cdot \times \cdot$ das Standard-Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$.
Für die Länge des Differenzvektors $a_2 - a_1$ (Seite BC) gilt

$$\begin{aligned} |a_2 - a_1|^2 &= |a_2|^2 + |a_1|^2 - 2\langle a_1, a_2 \rangle \\ &= b + c - 2a. \end{aligned} \qquad (*)$$

Außerdem ist aufgrund der eingangs getroffenen Einschränkungen

$$|a_2 - a_1| \geq |a_2|$$

und erst recht

$$|a_2 - a_1| \geq |a_1|. \qquad (**)$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 64)

Ziel des Beweises ist es, $\mathrm{Vol}(\mathcal{F}(G))$ unter der Nebenbedingung

$$\begin{aligned} \sqrt{c} \le \sqrt{b} \le |a_2 - a_1| \qquad \text{bzw.} \\ \overline{AB} \le \overline{AC} \le \quad \overline{BC} \end{aligned}$$

zu minimieren.
Dazu stellen wir fest, daß nach (**) gilt:

$$|a_2 - a_1|^2 \ge |a_2|^2,$$

woraus man nach (*) sofort folgert

$$a \le \frac{c}{2}.$$

Setzt man dies in die Flächenformel ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung von $b \ge c$:

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{F}(G))^2 = cb - a \cdot a \ge c \cdot c - \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{3}{4}c^2$$

Gleichheit gilt dabei nur für $b = c$ und $a = \frac{c}{2}\left(= \frac{b}{2}\right)$, also für $b = c$ und $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, woraus die Behauptung des Satzes folgt. $\square$

aus (Leppmeier, 1997 S. 65)

In der Betrachtung der beiden Beweise erkennt man die Grenzen des genetisch-sokratischen Prinzips. Weder der elementare Beweis noch der analytische Beweis können auf dem Wege des entdeckenden Lernens vom Lernenden selbst erarbeitet werden. Es besteht in der Tat leicht die Gefahr, dass sich der Lehrende als „Sieger" (2.2.4.2) (Wagenschein, o.J. S. 2) zeigt, der „deduziert" (ebd.), dem „keiner widerspricht" (ebd.) und dem jeder folgt. Damit wäre nichts gewonnen außer innere Ablehnung oder gar Frustration (2.1.1.5, 4.1).
Die Leitfragen des genetisch-sokratischen Lernens sind hier: „Wo ist die Geometrie in der Algebra verborgen? Wo liegen die Teilantworten auf die Frage nach der dichtesten Kreisgitterpackung?"
Wir betrachten zunächst den elementaren Beweis: Das Herzstück ist der Ausdruck für den Flächeninhalt des Fundamentalparallelotops $2F$ bzw. der Einfachheit halber und ohne Auswirkungen auf die Monotonie $16F^2$. Die Zerlegung der Linearform erfolgt mit Zielblick wie bei einer quadratischen Ergänzung. Das erwünschte Minimum ist $3c^4$, die beiden nichtnegativen Summanden verschwinden im Idealfall. Im ersten Korrektursummanden $(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2)$ erkennt man immer noch die Rivalität zwischen hexagonalem Gitter für $a=b$ und quadratischem Gitter für $b^2+c^2-a^2=0$, die der zweite Korrektursummand $a^2+3b^2-4c^2$ jedoch klar mit $a=b$ (und sodann $b=c$) entscheidet.

Dies ist im Dialog mit den Lernenden herauszuarbeiten. So kann das Kategoriale im elementaren Beweis bzw. in der Idee nach Lagrange herausgeschält werden und zum Fundamentalen im Lernenden verwandelt werden (2.2.4.1, 2.2.4.3).
Auf diese Art kann ein genetisch-sokratisches Lernen in einer anderen Ebene gelingen. Es entwickelt sich aus einem intensiven a-posteriori-Betrachten.
Die Begabung der lernenden Person wird auf besondere Weise angesprochen, berührt und entfaltet. Die Werte für personorientierte Begabungsförderung Eigensinn, Beteiligung, Verantwortung, Leistung (2.1.1.3) finden sich in diesem sehr fordernden Prozess wieder. Am Ende eines solchen Begabungsförderungsprozesses steht eine Person, die es, wenn der Zeitpunkt gekommen ist, Lagrange nachtun wird (2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.2.1.1, 2.2.3, 3.1.6.4, 4.1.1.5).

Eine weitere Ebene des genetisch-sokratischen Lernens zeigt sich im Vergleich des elementaren Beweises mit dem analytischen Beweis nach Gauß[27]. Dieser greift nicht auf die Formel von Heron zurück, sondern bleibt ganz und gar in der analytischen Geometrie mit Vektorprodukt und Skalarprodukt. Durch geschickt definierte Variablen tritt die ganze Ästhetik der Minimumssuche hervor. Dies geschieht auf den ersten Blick in einer Sprache des Verstandenen, nicht des Verstehens (2.2.4.3.). Ein a-posteriori-Betrachten ergänzt diese Sprache des Verstandenen jedoch wiederum um eine Verstehenskomponente.

Auf dem Weg des genetisch-sokratischen Prinzips ist es nur folgerichtig, den Schritt aus der Ebene in den Raum zu machen. Die Situation wird nicht nur um eine Dimension reicher, sondern insgesamt komplexer. In der Ebene ist die Situation experimentell leicht zugänglich und mit der Intuition absolut verträglich. Die mathematische Herausforderung und der mathematische Bildungsgehalt bestehen hier in einer sauberen Erfassung der Begriffe und der Begründungen sowie im Wechselspiel zwischen geometrisch leicht Verstehbarem und algebraisch durchaus Anspruchsvollem. Im Raum ist die geometrische Erfassung nicht mehr alltäglich. Dass quadratische Kugelstapel und hexagonale Kugelstapel zu gleichen Konfigurationen führen, ist nicht für jeden ad hoc nachvollziehbar und nicht für jeden in seiner inneren Vorstellung klar. Auch die Äquivalenz von Basen, die ein gleiches Gitter erzeugen, ist keineswegs mehr trivial. Dies lässt insgesamt eine komplexere Beweissituation erwarten.
Für die weitere Betrachtung sind wieder zwei Beweismöglichkeiten, ein elementarer Beweis und ein analytischer Beweis, als Puzzlestücke aus (Leppmeier, 1997) entnommen.

[27] Strenggenommen wurde hier der Beweis von Gauß für die dichteste Kugelgitterpackung in die ebene Situation der Kreisgitterpackung übertragen.

Elementargeometrischer Beweis:

Satz 2.14 (dichteste Kugelgitterpackung, Gauß 1831): *Unter allen Kugelgitterpackungen im $\mathbb{R}^3$ besitzt nur diejenige Packung mit flächenzentriert-kubischem Gitter G_{fcc}*

$$\textit{(Basis } \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \textit{)}$$

die maximale Packungsdichte $\delta_{max} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Der Satz besagt damit, daß unter dem Aspekt der dichtesten Kugelpackung das fcc-Gitter das dreidimensionale Analogon zum hexagonalen Gitter ist.
Der Beweis ist daher von großer struktureller Ähnlichkeit zum vorhergehenden; er lehnt sich eng an [Cox61] an.

Beweis des Satzes

Sei G ein dreidimensionales Gitter. Wie im zweidimensionalen Fall seien A, B, C Gitterpunkte, so daß für die Seitenlängen a, b, c des Dreiecks ΔABC gilt $c \leq b \leq a$. Ferner können wir $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ wählen. Dann gilt $a^2 \leq b^2 + c^2$.
Sei D ein weiterer Gitterpunkt, der nicht in der Ebene durch A, B, C liegt. Wegen der Periodizität des Gitters können wir diesen o. B. d. A. so wählen, daß seine Projektion D_1 auf die Ebene durch die Punkte A, B, C im Fundamentalparallelogramm $ABA'C$ liegt (vgl. Bild 2.25). O. B. d. A. liege D_1 im Dreieck ΔABC. Sei $d = |D_1D|$ der Abstand der Gitterebenen.

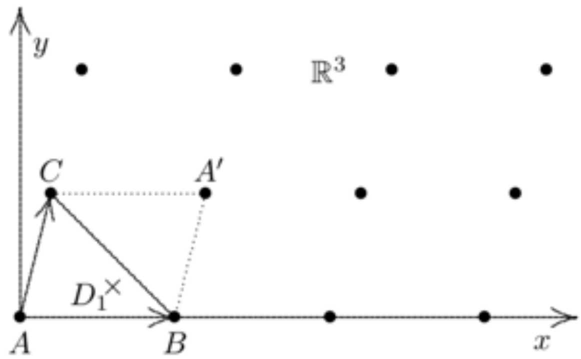


Bild 2.25 Ein dreidimensionales Gitter

Für das Volumen des Fundamentalparallelotops $\mathcal{F}(G)$ gilt dann

$$\mathrm{Vol}\big(\mathcal{F}(G)\big) = 2Fd,$$

wobei F den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC bezeichnet.

aus (Leppmeier, 1997 S. 57)

Es ist zu zeigen, daß dieses Volumen gerade für das fcc-Gitter minimal ist.

Wegen der Wahl der Punkte A, B, C gilt $|AD| \geq b$, und entsprechendes gilt für $|BD|$ und $|CD|$. Wenn R den Umkreisradius des Dreiecks ΔABC bezeichnet, so tritt mindestens einer der folgenden Fälle ein:

$$R \geq |AD_1| \quad \text{oder} \quad R \geq |BD_1| \quad \text{oder} \quad R \geq |CD_1|.$$

Denn für alle Punkte P im Inneren des Dreiecks ΔABC gilt

$$P \in k(A;R) \cup k(B;R) \cup k(C;R).$$

Da D_1 im Inneren des Dreiecks liegt, folgt die Behauptung (vgl. Bild 2.26).

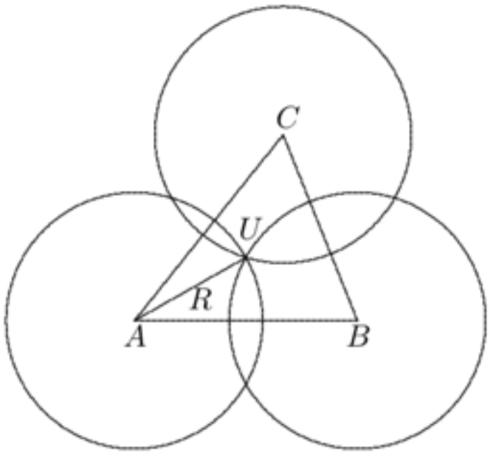


Bild 2.26 Umkreismittelpunkt

O. B. d. A. sei $R \geq |AD_1|$. Mit dem Satz des Pythagoras folgt daraus:

$$R^2 + d^2 \geq |AD_1|^2 + d^2 \geq |AD|^2 \geq b^2 \qquad (*)$$

Nach obigem Lemma wissen wir:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & 16F^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 \\ \text{(b)} & 16F^2R^2 = b^2c^2a^2. \end{array}$$

Für das Quadrat des Volumens des Fundamentalparallelotops gilt damit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Vol}\big(\mathcal{F}(G)\big)^2 &= (2Fd)^2 \\ &\geq 4F^2(b^2 - R^2) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot b^2(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2b^2) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot c^6 + \frac{1}{4} \cdot c^2(b^2 - c^2)(3b^2 + 2c^2) + \frac{1}{4} \cdot b^2(a^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot c^6. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt also nur, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

aus (Leppmeier, 1997 S. 58)

(1) $d^2 = b^2 - R^2$ und

(2a) $b = c$ und $a = b$ oder

(2b) $b = c$ und $b^2 + c^2 = a^2$

Es liegen also (zunächst formal) zwei verschiedene Minima für $\mathrm{Vol}(\mathcal{F}(G))$ vor. Wir unterscheiden die beiden Fälle.

Fall (a): Das Minimum unter (1) und (2a) wird von der in Bild 2.27 links skizzierten Gitterkonfiguration angenommen.

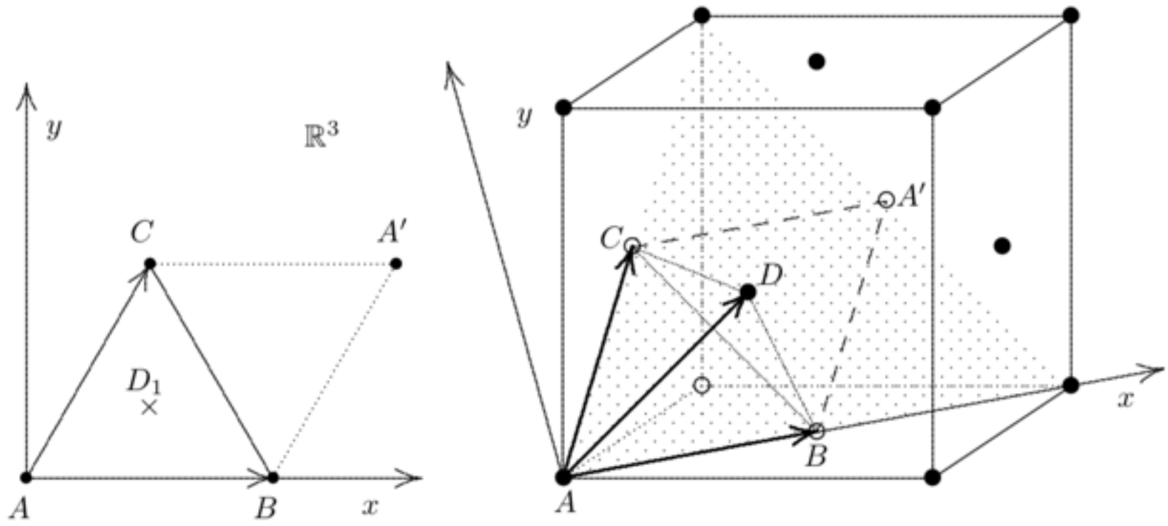


Bild 2.27 Das fcc-Gitter — Fall (a)

Wegen (1) gilt in (*) Gleichheit; also ist $|AD| = b$. Mit (2a) hat man $|AD| = a = b = c$.
Aus der Gleichheit in (*) folgt außerdem $|AD_1| = R$.
Dann ist entweder $R \geq |BD_1|$ oder $R \geq |CD_1|$ (vgl. Bild 2.26).
Aus o. B. d. A. $R \geq |BD_1|$ folgert man wie oben $|BD_1| = R$. Insgesamt gilt also

$$|AD| = |BD| = |CD| = a = b = c$$

Somit bilden die Punkte A, B, C, D die Ecken eines regulären Tetraeders. Eine zugehörige Basis ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Im fcc-Gitter findet man eine Basis, die ein solches Tetraeder aufspannt (in Bild 2.27 rechts).
Sind Sie, lieber Leser, (noch) nicht mit dem Matrizenkalkül vertraut, dürfen Sie sich nach einer inneren Vergewisserung dieses Sachverhalts bereits dem Fall (b) zuwenden.
Für Fortgeschrittene wollen wir den Schlußgedanken (aus Gründen einer vollständigen Überzeugungsarbeit) noch verbalisieren:

aus (Leppmeier, 1997 S. 59)

Die folgende orthogonale Matrix $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$ transformiert die Matrix der Basisvektoren $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$ auf die im Satz 2.14 angegebene Matrix.

Fall (b): Das Minimum in (1) und (2b) wird bei der in Bild 2.28 links skizzierten Gitterkonfiguration angenommen.

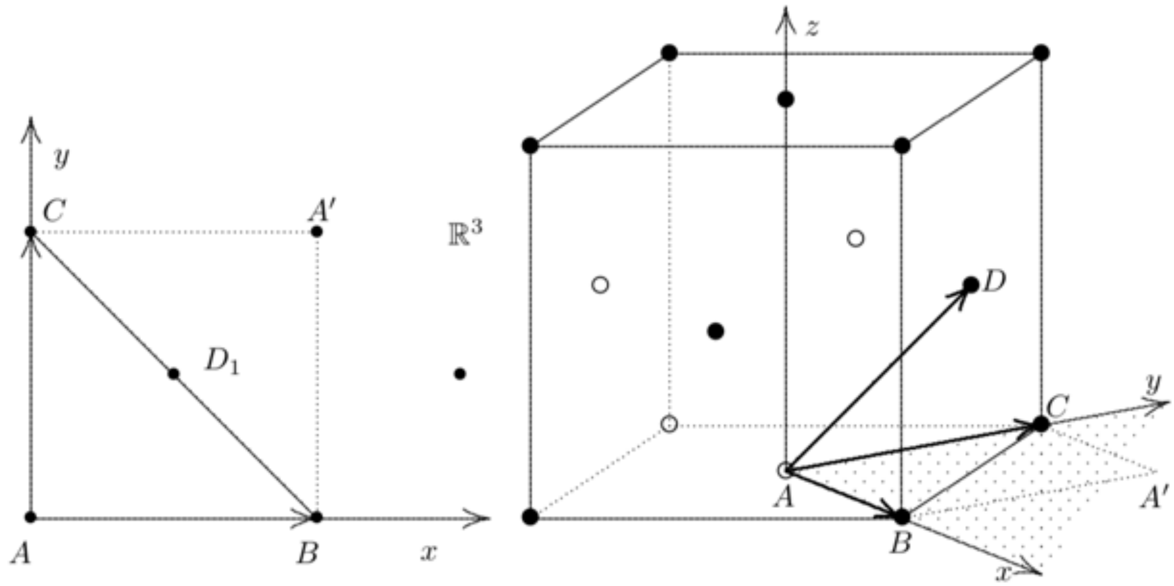


Bild 2.28 Das fcc-Gitter — Fall (b)

Aus (2b) ergibt sich, daß das Dreieck ΔABC gleichschenklig-rechtwinklig ist. Aus (1) folgt wiederum $|AD| = |BD| = |CD| = b = c$. Die zu dem Tetraeder A, B, C, D gehörige Basis ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Auch zu diesem Tetraeder findet man im fcc-Gitter eine Basis, die es aufspannt (in Bild 2.28 rechts).
Wie im Fall (a) verbalisieren wir den Schlußgedanken dieser Betrachtung:
Das Gitter, welches durch die Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ dargestellt wird, läßt sich ebenfalls von der Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ erzeugen (vgl. 2.2.1). Letztere spannt jedoch ein gleichmäßiges Tetraeder auf, so daß sie von der

aus (Leppmeier, 1997 S. 60)

orthogonalen Matrix $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf die im Satz 2.14 angegebene Matrix transformiert wird.

Sowohl im Fall (a) als auch im Fall (b) liegt also ein fcc-Gitter vor.
Für $c = 2$ errechnet man $\mathrm{Vol}\big(\mathcal{F}(G)\big) = 4\sqrt{2}$, woraus $\delta\big(B^3, G_{fcc}\big) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$ folgt. Damit ist der Satz bewiesen. □

aus (Leppmeier, 1997 S. 61)

Geometrisch-analytischer Beweis von Gauß

Satz 2.14 (dichteste Kugelgitterpackung): *Unter allen Kugelgitterpackungen im* $\mathbb{R}^3$ *besitzt nur diejenige Packung mit flächenzentriert-kubischem Gitter* G_{fcc}

$$\textit{(Basis} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\} \textit{)}$$

die maximale Packungsdichte $\delta_{max} = \dfrac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Beweis des Satzes 2.14

Sei G ein 3-dimensionales Gitter mit Basis $\{a_1, a_2, a_3\}$. Wie im ebenen Fall dürfen wir o. B. d. A.

$$|a_1| \le |a_2| \le |a_3| \qquad \text{und} \qquad \langle a_1, a_2 \rangle \ge 0,\ \langle a_2, a_3 \rangle \ge 0,\ \langle a_3, a_1 \rangle \ge 0$$

annehmen.
Wir definieren:

$$\begin{array}{llll} |a_1| =: \sqrt{a} & (a \in \mathbb{R}^+) & \langle a_1, a_2 \rangle =: c' & (c' \in \mathbb{R}_0^+) \\ |a_2| =: \sqrt{b} & (b \in \mathbb{R}^+) & \langle a_2, a_3 \rangle =: a' & (a' \in \mathbb{R}_0^+) \\ |a_3| =: \sqrt{c} & (c \in \mathbb{R}^+) & \langle a_3, a_1 \rangle =: b' & (b' \in \mathbb{R}_0^+). \end{array}$$

aus (Leppmeier, 1997 S. 65)

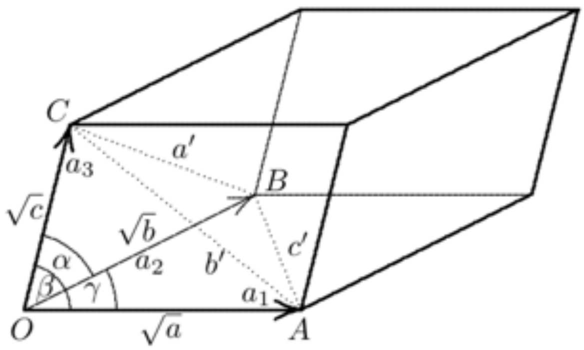


Bild 2.33 Norm und Skalarprodukt im Raum

Dann läßt sich das Volumen des von a_1, a_2 und a_3 aufgespannten Parallelepipeds gerade durch das zugehörige Spatprodukt ausdrücken:

$$\mathrm{Vol}^2\big(\mathcal{F}(G)\big) = \big\langle (a_1 \times a_2), a_3 \big\rangle^2 = abc + 2a'b'c' - aa'^2 - bb'^2 - cc'^2.$$

Für die Länge der Differenzvektoren gilt:

$$\begin{aligned} |a_2 - a_1| &= b + a - 2c', \\ |a_3 - a_2| &= c + b - 2a', \\ |a_3 - a_1| &= c + a - 2b'. \end{aligned}$$

Außerdem kann man o. B. d. A. annehmen, daß gilt:

$$\begin{array}{ll} |a_2 - a_1| \geq |a_1|, & |a_2 - a_1| \geq |a_2|, \\ |a_3 - a_2| \geq |a_3|, & |a_3 - a_2| \geq |a_2|, \\ |a_3 - a_1| \geq |a_3|, & |a_3 - a_1| \geq |a_1|. \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} 2c' \leq b, & 2c' \leq a, \\ 2a' \leq b, & 2a' \leq c, \\ 2b' \leq a, & 2b' \leq c. \end{array}$$

Setzt man dies in die Volumenformel ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}^2\big(\mathcal{F}(G)\big) = {} & abc + \\ & + aa'(b - 2a') + bb'(c - 2b') + cc'(a - 2c') + \\ & + a'(a - 2b')(b - 2c') + b'(c - 2a')(b - 2c') + c'(c - 2a')(a - 2b') + \\ & + (c - 2a')(a - 2b')(b - 2c') \geq \\ \geq {} & abc \geq c^3 \end{aligned}$$

Wir untersuchen in Abhängigkeit von a', b', c', wann Gleichheit eintritt: Dann müssen alle Zusatzsummanden verschwinden.

1. Fall: $a' = b' = c' = 0$

   Dann ist jedoch $2\mathrm{Vol}^2\big(\mathcal{F}(G)\big) = 2abc$ nicht minimal.

aus (Leppmeier, 1997 S. 66), Errata: $|a_2 - a_1|^2 = b + \cdots$ *usw.;* $2\,Vol^2\big(F(G)\big) = \cdots$

2. Fall: O. B. d. A. $a' = b' = 0$
   Dann ist jedoch
$$\begin{aligned} 2\mathrm{Vol}^2\big(\mathcal{F}(G)\big) &= abc + cc'(a-2c') + c'ca + ca(b-2c') = \\ &= 2abc - 2cc'^2 \geq 2abc - 2c\frac{a}{2}\frac{b}{2} = \frac{3}{2}abc \end{aligned}$$
   ebenfalls nicht minimal.
3. Fall: O. B. d. A. $a' = 0$, d. h. $\cos\alpha = 0$ (wobei $\alpha = \measuredangle(a_2, a_3)$).
   Dann ist
$$\begin{aligned} 2\mathrm{Vol}^2\big(\mathcal{F}(G)\big) &= abc + bb'(c-2b') + cc'(a-2c') + \\ &\quad + b'c(b-2c') + c'c(a-2b') + \\ &\quad + c(a-2b')(b-2c') = \\ &= 2abc - 2bb'^2 - 2cc'^2 \geq 2abc - 2b\frac{a}{2}\frac{c}{2} - 2c\frac{a}{2}\frac{b}{2} = \\ &= abc \geq c^3. \end{aligned}$$
   Gleichheit tritt ein für $a = b = c$ und $b' = c' = \frac{a}{2}\big(= \frac{b}{2} = \frac{c}{2}\big)$, also für $a = b = c$ und $\cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$, wobei $\beta = \measuredangle(a_1, a_3)$ und $\gamma = \measuredangle(a_1, a_2)$.
4. Fall: $a' \neq 0$, $b' \neq 0$, $c' \neq 0$
   Dann tritt Gleichheit nur ein, falls $a = b = c$ und $a' = b' = c' = \frac{a}{2}\big(= \frac{b}{2} = \frac{c}{2}\big)$ also für $a = b = c$ und $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{2}$.

Wie in dem unter 2.5.2 gegebenen Beweis zeigt man, daß sowohl Fall 3 als auch Fall 4 ein fcc-Gitter repräsentieren, woraus die Behauptung folgt. □

aus (Leppmeier, 1997 S. 67)

Wir vergleichen beide Beweise: Der Beweis von Gauß besticht durch absolute Klarheit und Brillanz der Ideen. Die Sprache des Verstandenen wird zur Sprache des Verstehens (2.2.4.2, 2.2.4.3, 4.3). Das Prinzip der Minimierung des Volumens des Fundamentalparallelotops ist absolut transparent. Ein einfach kubisches Gitter (1. Fall) kann keine maximale Packungsdichte erzeugen. Ähnlich verhält es sich im 2. Fall.
Im 3. Fall erkennen wir die quadratischen Kugelstapel in der fcc-Packung, im 4. Fall die hexagonalen Kugelstapel in der fcc-Packung.
Auf genetisch-sokratischem Weg lassen sich im formalen Beweis die geometrischen Aspekte der fcc-Packung erkennen. Dies ist sehr faszinierend. Das Kategoriale enthüllt sich (2.1.2.2, 2.2.4.1).
Der elementargeometrische Beweis ist so aufgebaut, dass er beide Aspekte des fcc-Gitters auch visuell zugänglich macht. Die Lernenden können dies erfahren im Wechselspiel zwischen Geometrie und Algebra. Es geht wiederum um „das Entdecken, das Enthüllen, das Erspüren, das Durchschauen“ (2.2.4.2). Erst der Prozess eines intensiven Elementarisierens kann das Kategoriale so aufschließen, dass es die subjektive formale Bildung evoziert (2.2.3, 2.2.4.1, 4.1, 4.1.1.5). Der von Gardner beschriebene Moment des Heureka (2.2.1.2) geht oftmals auch der Formulierung und Verbalisierung des Gedankens voraus.

Das *exemplarische* Prinzip Wagenscheins ist augenfällig in der Auswahl der beiden Sätze nach Lagrange und Gauß. Sie sind in unterschiedlichster Hinsicht ergiebig. Lernen kann gerade an solchen „Einzelfällen“ gelingen, nicht am Ganzen, am Absoluten (2.2.4.2). Und doch baut das Lernen an gehaltvollen Einzelfällen tragfähige Brücken zum Verständnis des Ganzen und des Absoluten (2.1.1.1, 2.2.3). Auch dies ist an den gewählten Beispielen sinnfällig.
Der Lehrende lässt sich leiten von seiner fachlichen Begabung und seinem Einblick ins Wesentliche der Fachwissenschaft (2.2.4.2, 2.2.3). Fachinhalte der Linearen Algebra, der Geometrie, aber auch der Festkörperphysik bilden den strukturierenden Hintergrund (2.1.3.2, 2.2.2, 2.2.3). Die gewählten Beispiele genügen den Anforderungen des exemplarischen Lehrens: „Es erschließt einen ‚Gegenstand‘ (der immer etwas Komplexes und Aufforderndes haben muss) im Sinne einer bestimmten ‚Disziplin‘. Die mit dieser Eröffnung notwendig verbundene Einschränkung – des Gegenstandes wie des Erschließenden – soll

dabei spürbar oder gar bewusst werden. Das Thema soll auf diese Weise also ‚ausstrahlen' nach zwei Seiten hin: auf das Ganze der ‚geistigen Welt' und auf das Ganze der Person des Lernenden" (ebd.). Dies ist unstrittig (2.2.4.1, 2.2.4.3, 4.1.1).
Der Lernende macht eine weitere Erfahrung, die Wagenschein mit dem exemplarischen Lernen verbindet. Er wird nicht „nur als Intellekt, sondern als ganzer Mensch vom Gegenstand angeredet und auch erreicht, ja betroffen" (ebd.). Nur so kann er „spüren oder gar bewusst machen, dass die ‚Disziplin' des Faches auch ihn selber, den Menschen einschränkt; wodurch allein er eben den bestimmten fachlichen Aspekt der Wirklichkeit zu Gesicht bekommt, von dem er sich nun reflexiv zu distanzieren lernt" (ebd.). Die sehr anspruchsvollen Beispiele von Lagrange und Gauß vermögen dem Lernenden neben den eigenen mathematischen Begabungen auch deren Grenzen aufzuzeigen (2.1.1.5, 2.2.1.2, 2.2.2, 2.2.3, 4.1.1). Er erkennt aber auch die Grenzen des Fachs. Das Fach kann nicht alle Fragen beantworten (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.3.2, 2.2.3). Die prominenteste Frage in diesem Zusammenhang ist die Frage nach einer elementarisierbaren Lösung des Kepler-Hilbert-Problems (3.1.1) (Szpiro, 2011).

Zusammenfassend wurde anhand der beiden zentralen Aussagen von Lagrange und Gauß über Kreis- und Kugelgitterpackungen gezeigt, dass das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip Wagenscheins in verschiedenen Ebenen des Verständnisses und damit der Begabungsentfaltung wirksam sein kann (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.3, 2.2.4, 3.2.5, 4.1, 4.2, 4.3). Es unterstützt in besonderer Weise den Prozess des Elementarisierens und Aufschließens mathematischer Bildungsinhalte (2.2.3, 2.2.4, 3.2.5).

3.1.4 Kernideen als Kompass für einen begabungsfördernden Unterricht

Die Thematik der Kugelpackungen ist in fachlicher Hinsicht anspruchsvoll, schwierig und komplex. Sie führt auf kurzem Weg hinein in die aktuelle Mathematik und zu noch ungelösten Fragestellungen.
Eine didaktische Aufbereitung im Rahmen des Enrichment-Ansatzes als Angebot für Oberstufenschüler stellte eine besondere Herausforderung für die Lehrperson dar (2.1.1.5). Am Beginn des Projektes existierte kein Lehrwerk. Die einzelnen Aussagen und Inhalte, die Bildungsgegenstände der Thematik, divergierten stark hinsichtlich ihrer Darstellung und der nötigen Vorkenntnisse und waren in der Literatur verstreut. Manches entwickelte sich auch erst in der aktuellen Fachwissenschaft. Eine durchgängige, in sich geschlossene, homogene Elementarisierung der Thematik wurde in (Leppmeier, 1997) versucht.

Kernideen im Sinne des dialogischen Lernens (2.2.4.3) bildeten den Zugang zur Thematik. Sie standen am Beginn der Herausforderung des personorientierten Lehrens und Lernens (2.1.1.5). Lehrkräfte, die sich aufgefordert fühlen, Kernideen zu generieren, sind zum Erzählen aufgefordert. „Sie sollen den Stoff, den sie im Unterricht behandeln wollen, anderen Menschen erzählend ausbreiten, sie sollen über ihre eigenen Erlebnisse und Erfahrungen mit dem Stoff berichten und sie sollen verständlich machen, wo für sie der Witz der Sache liegt.“ (2.2.4.3)

Die Kernidee, die jeweils am Anfang der Unterrichtskonzepte zur Begabungsförderung (3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.7) stand, war in all ihren Facetten von der Lehrkraft darzustellen: Das Faszinierende an Goldoberflächen, die Innensicht in den Goldkristall, die Frage nach der dichtesten Kreisgitter- und Kugelgitterpackung, der Beitrag von Gauß zur Thematik, die Herausforderung in der Frage der dichtesten Kugelpackung (Kepler-Hilbert-Problem), die immensen zeitgenössischen fachwissenschaftlichen Anstrengungen, die Bedeutung der Kugelgitterpackungen im Höherdimensionalen (mit einem ersten Blick ins Höherdimensionale für Schüler), unter einem völlig anderen Blickwinkel finite Kugelpackungen (und wieder ein Blick ins Höherdimensionale mit

Wurstkatastrophe und Wurstvermutung), mathematischer Humor in der Begrifflichkeit, aber auch moderne Mathematik, eine mögliche Begegnung mit einem aktuellen ‚Paper' aus einer mathematischen Fachzeitschrift, wieder unter einem anderen Blickwinkel finite Kugelpackungen mit dickem Rand, eine Theorie, die innermathematisch sehr interessant ist und (hier schließt sich ein Kreis) sogar auf Phasenübergängen an Goldoberflächen anwendbar ist. Die jeweils eigenen Erlebnisse erzählen stets von einem tiefen Gefühl der Freude (2.2.5) an der Beschäftigung mit der Thematik, aber auch von Umwegen, Irrwegen, Sackgassen auf dem Weg zum selbst definierten Ziel, von mathematischen „Muskelkatern", kreativen Pausen und „Chancen" (Gagné, 2015).

Diese *erste Kernidee*, die (Lern-)Sinn und Zweck des jeweiligen Unterrichtskonzeptes verdeutlicht (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.5, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.3, 3.3.2, 4.1), mündet noch nicht in Aufträge, Reisetagebücher und Rückmeldung (2.2.4.3). Vielmehr nimmt sie die zu begabende Person am Anfang der Begabungsförderung, die in dieser Thematik begründet sein kann, als lernende Person in die Pflicht. Sie ist in ihrer Relationalität gefordert (2.1.1.1). Sie muss für sich über den Lernsinn entscheiden, also darüber, ob das Lernangebot zur eigenen Autorschaft (ebd.) passt, und sie muss die Verantwortung (ebd., 2.1.1.3) für den angebotenen Bildungs- und Begabungsprozess mit übernehmen.
In dieser ersten Kernidee zeigt sich eine personorientierte Schulkultur (2.1.1.3); Offenheit, Aufgeschlossenheit, Neugierde, Kreativität werden spürbar, Anweisungen und Normiertheit verschwinden. Schule wird als Ort eines persongebundenen Bildungsprozesses erfahrbar, als „Erfahrungsraum … menschlicher Entwicklungen und individueller Gestaltungen" (ebd., 4.1, 4.2).
Diese erste Kernidee stellt die Rahmenbedingungen für begabungsfördernde Lernprozesse nach einem ökologischen Begabungsmodell (2.1.1.4) sicher: Eigen-Sinn, Selbstsorge und Selbststeuerung der sich bildenden Person werden angesprochen; das Selbstkonzept (Optimismus, Mut, Hingabe an ein Thema, Sensibilität für menschliche Belange, körperliche und geistige Energie, Zukunftsvision und das Gefühl, eine Bestimmung zu haben) als Schlüssel zur Hochleistung wird aktiviert; Emotion und Vertrauen als Grundlage gelingender Lernprozesse, Volition und Selbstwirksamkeit als Aspekte der Motivation,

Kognition und Anschlussfähigkeit, Aktion und Performanz, Reflexion und Selbststeuerung werden zu Beginn des Unterrichtskonzeptes grundgelegt; Begabung kann sich in ihren Leistungsdimensionen (sachbezogene Exzellenz, fachliche Hochleistung und Performanz; selbstverantwortliche, reflektierende Persönlichkeit mit wertebezogenem Bewusstsein über die eigenen Möglichkeiten, das eigene Handeln und dessen Effekte; soziale Leistungen zugunsten der Gemeinschaft/Gesellschaft und altruistische Übernahme von Verantwortung) von diesem Startpunkt weg entwickeln (ebd.).
Diese erste Kernidee vermittelt klar den Anspruch der Begabungsförderung als Herausforderung für die Lehrenden: „Nicht zusehen, sondern aufbereiten, begleiten, reflektieren, … stets mit Blick auf den sich bildenden Schüler und die Begabungsprozesse“ (2.1.1.5) in drei Förderebenen (Angebotsebene, Erlebnisebene, Persönlichkeitsentwicklung). Sie nimmt bereits das Ziel ins Auge, „durch einen Prozess lebensgestaltenden Lernens in den ihr anvertrauten Heranwachsenden jene personale Exzellenz wachsen zu lassen, die diese in die Lage versetzt, Gelerntes für sich zu deuten, einzuordnen, zu bewerten und zu einer sinn- und wertvollen Gestaltung zunächst des eigenen Lebens zu nutzen, um dann in der Folge auch der Gesellschaft als Gestalter zur Verfügung zu stehen“ (ebd.) (2.1.1, 2.1.3.2, 2.2.1.1, 2.2.3, 3.1.6.4, 4.1). Schmid nennt als förderliche strukturelle Bedingung: Akzeptanz der aktiven Mitbestimmung der Lernenden über Lerninhalte, Lernverfahren, Lernmittel und Beurteilungskriterien („Contracting“, 2.1.1.5) (2.1.1.3, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 4.2). Dies kann im Rahmen des Enrichment-Ansatzes gewährleistet werden (2.1.3.3).

Weitere Kernideen im Sinne des dialogischen Lernens für den Fortgang des jeweiligen Unterrichtskonzeptes (3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.7) können vielfach aus den Darstellungen in 3.1.1 und 3.1.3 generiert werden.
Exemplarisch für viele Kernideen soll hier ein besonderer Anwendungsbereich vorgestellt werden. Es geht um die Wurstvermutung, die Aussage, den Beweis, die Bedeutung, die Entdeckung und die Publikation in der Fachzeitschrift. Das Dialogische, nach Gallin und Ruf (2.2.4.3) in der Ausprägung als Dialog mit dem ICH, dem DU und dem WIR, erfährt im Dialog mit dem WIR eine weitere dialogische Komponente, den unmittelbaren Dialog mit dem Entdecker in Form der Auseunandersetzung mit der Publikation des Autors in einer Fachzeitschrift.

Das WIR wird hier also nicht dargestellt durch die Lehrkraft, ein Arbeitsblatt, ein Schulbuch, eine Schulaufgabe, eine Abituraufgabe, ein Knobelbuch, eine populärwissenschaftliche Zeitschrift etc. Das WIR wird manifest im Aufsatz für das Fachpublikum.

Diese Kernidee, die sowohl den Lehrenden wie auch den Lernenden zu begeistern vermag (2.2.5), wird anhand eines Puzzlestücks aus (Leppmeier, 1997) erläutert.

Periodica Mathematica Hungarica Vol. 6 (2), (1975), pp. 197—199

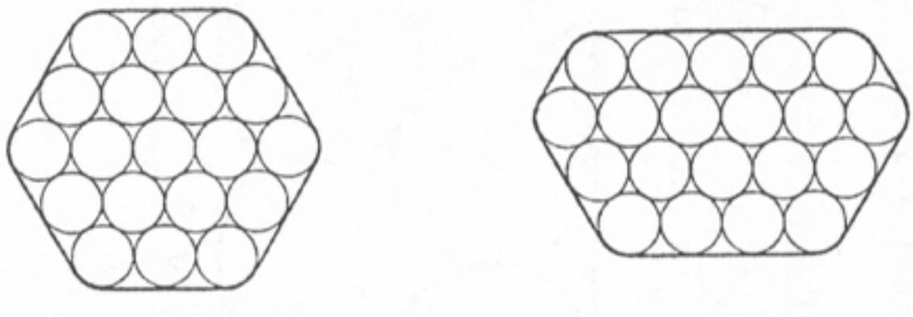
RESEARCH PROBLEMS

EDITED BY A. HAJNAL

In this column Periodica Mathematica Hungarica publishes current research problems whose proposers believe them to be within reach of existing methods. Manuscripts should preferably contain the background of the problem and all references known to the author. The length of the manuscript should not exceed two doublespaced typewritten pages.

13. The problem we want to propose is to obtain any partial result in the following general problem: In Euclidean n-space arrange k non-overlapping unit balls so as to minimize the volume of their convex hull.

For $n = 2$ this problem seems to be difficult but not hopeless. It is conjectured that the discs (2-dimensional balls) must be arranged so as to make their convex hull h „as similar to a regular hexagon as possible" under the condition that each disc contained in the interior of h is touched by six other discs. The numbers $k = 3m(m + 1) + 1$ $(m = 1, 2, \ldots)$ are especially favourable for making h "similar" to a regular hexagon. The figure exhibits the favourable case of $k = 19$ discs and the very unfavourable case of $k = 20$ discs.



It is known [1] that the area a of the convex hull of $k > 1$ non-overlapping unit discs satisfies the inequality $a > \sqrt{12}\, k$. An exact lower bound for a in terms of k and the perimeter of h was given by GROEMER [2].

It is very likely that for $n = 3$ and 4, just as for $n = 2$, the solution of the above problem would imply the solution of the problem of the densest packing of equal balls. Since this problem is for $n > 2$ in itself a very hard long-standing unsolved problem, our problem must be considered for $n = 3$ and 4 as hopeless. On the other hand, for $n \geq 5$ the extremal arrangement is conjectured to be so simple that we have a chance to solve the problem completely.

aus (Leppmeier, 1997 S. 133)

In order to get an orientation of the solution to be expected for $n \geq 5$ let us rephrase our problem as follows: In n-space pack k unit balls so as to maximize their density in their convex hull. It is known [3] that in n-space the density d_n of the densest packing of equal balls tends exponentially to zero when $n \to \infty$. Therefore, distributing a great number of balls uniformly in all directions of the space we will obtain a small density. On the other hand, the density c_n of a ball in its circumscribed cylinder, though also tends to zero, but only in the order $1/\sqrt{n}$. Thus there is an integer N such that for $n \geq N$ we have $c_n > d_n$. From this dimension N on the character of the problem changes: instead of distributing the balls in all directions it is more efficient to arrange them along a line equally spaced with minimal distance so that their convex hull becomes a "sausage" of length $2k$.

The following table shows the approximative values of $c_n = v_n/2v_{n-1}$, where v_n is the volume of the unit ball, the upper bound $b_n = \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}$ for d_n due to Blichfeldt [3], and the density D_n of the densest lattice-packing of balls which, for the respective values of n, is conjectured to be equal to d_n.

n	2	3	4	5	6	7
c_n	.785	.667	.589	.533	.491	.457
b_n	1.000	.844	.750	.619	.500	.398
D_n	.907	.740	.617	.465	.373	.295

Since $c_7 > b_7$, we presumably have $N \leq 7$. But there is a better upper bound of d_n than b_n, namely the bound s_n of Rogers whose numerical computation, however, is difficult. The bound s_n is equal to the density of $n+1$ equal balls mutually touching one another in the simplex spanned by their centers. Comparing the values $s_2 \approx .907$ and $s_3 \approx .780$ with b_2 and b_3, it seems to be very likely that $c_6 > s_6$. This would mean that, presumably, $N \leq 6$. Since, on the other hand, $c_5 \geq D_5$, we can risk the conjecture that $N = 5$ and formulate the following

Sausage conjecture. In n-space with $n \geq 5$ the volume of the convex hull of k non-overlapping balls is at least $2kv_{n-1} + v_n$. Equality is attained only if the centers are equally spaced on a line with distance 2.

REFERENCES

[1] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Zweite Auflage, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1972.

[2] H. Groemer, Über die Einlagerung von Kreisen in einen konvexen Bereich, *Math. Z.* 73 (1960), 285—294.

[3] C. A. Rogers, *Packing and covering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1964.

L. Fejes Tóth

aus (Leppmeier, 1997 S. 133)

Die Kernidee ist schnell formuliert: In fünf- und höherdimensionalen Räumen ist die lineare Kugelkonfiguration am dichtesten („sausage conjecture“).
Die Aufträge im Sinne des dialogischen Lernens liegen auf der Hand (2.2.4.3): Lies den Text! Versuche ihn zu verstehen! Was ist die Hauptaussage? Wie wird diese begründet? Welche Begründungen verstehst du, welche nicht? Wie sieht der Autor die zentralen Fragestellungen? Was ist der heutige Kenntnisstand? Wie empfindest du diesen Text? Was ist anders im Vergleich zu einem Lehrbuchtext? Was ist anders im Vergleich zu einer Prüfungsaufgabe? Was würdest du dem Autor sagen? Was würdest du den Autor fragen?
Die Einträge ins Reisetagebuch sind wie die Rückmeldungen anspruchsvoll, selbst wenn beides nur im Rahmen des Unterrichtsgesprächs und in Form von Heftnotizen behandelt wird.
Die Kernidee ermöglicht ein Lernen auf eigenen Wegen (2.2.4.3), begleitet von der Lehrkraft, die sich selbst immer wieder in die Situation des Lernenden begibt. Sie ermöglicht entdeckendes Lernen in der Textbegegnung, wiederum in einem genetisch-sokratisch-exemplarischen Sinn (2.2.4.2).

Die Kernidee führt auch zur Kernidee von L. Fejes Toth. Der Text lenkt die „Aufmerksamkeit auf etwas, was fundamentaler ist als jeder fachliche Lehrsatz und jede technische Fertigkeit: auf tief in der Person verankerte Haltungen und Grundentscheidungen, die letztlich über Erfolg oder Misserfolg in einem Fachgebiet entscheiden“ (2.2.4.3). L. Fejes Toth tritt als Lehrkraft für Lehrende und Lernende im Begabungsförderungsprozess auf. Es gilt der Satz: „Wenn die Lehrkraft ihren Schülerinnen und Schülern erzählt, wie der aktuelle Stoff im Zentrum der Person verankert ist, macht sie exemplarisch vor, wie man die eigenen Triebkräfte ermittelt und wie man sie in den Dienst einer Sache stellen kann“ (ebd.).
In der Kernidee von L. Fejes Toth sind die drei Merkmale der vertikalen Dimension des dialogischen Lernens feststellbar: Es handelt sich hier bei aller wissenschaftlichen Nüchternheit um „eine persönlich gefärbte und pointiert formulierte Aussage über einen komplexen Sachverhalt, die einem Gesprächspartner ohne Umschweife klar macht, was für [ihn] der Witz der Sache ist“ (ICH, Biographischer Aspekt, ebd.). Toths Kernidee „fordert das Gegenüber heraus, sein eigenes Verhältnis zum Stoff zu klären und die persönlichen

Triebkräfte zu aktivieren“ (ebd.). Sie offeriert „Sicherheit und Orientierung, ohne die Eigentätigkeit einzuschränken“ (DU, Wirkungsaspekt, ebd.). Seine Kernidee(n) „sind der Auftakt zum Lernen auf eigenen Wegen. Sie fangen ganze Stoffgebiete in vagen Umrissen ein, rücken eine provozierende Eigenheit in den Vordergrund und laden zu einem partnerschaftlichen Dialog ein“ (WIR, Sachaspekt, ebd.).
Aber auch das Typische für die horizontale Dimension des dialogischen Lernens lässt sich in der Kernidee von L. Fejes Toth festmachen: „Kernideen sind das Instrument, mit denen eine Verbindung zwischen den Fachgebieten hergestellt werden soll. Zündet eine Kernidee, ist der Weg ins Fachgebiet frei: Jetzt sind fachliche Antworten willkommen, weil sie zu persönlichen Fragen passen“ (ebd.). Auf dem Weg der Kernidee kann der Sinn der Mathematik erfahren werden. Dies geschieht in doppelter Weise: durch die Kernideen der Lehrkraft und die des Autors.

Was gilt es für die Lernenden zu entdecken? Die Fachsprache, die lingua franca der Mathematik. Die Wurstvermutung und die Begründung des Autors. Die Vergleiche mit den dichtesten Kugelgitterpackungen (Packungsdichte als Kugelvolumen pro Fundamentalparallelotop) und die Vergleiche mit den infinitesimalen linearen Konfigurationen (Packungsdichte als Kugelvolumen pro umschriebenem Zylinder). Den ausführlichen Einstieg über Kreispackungen. Die als „hoffnungslos“ bezeichnete Situation für die Dimensionen drei und vier.
Und natürlich bei entsprechender Vorbereitung (Volumen der vierdimensionalen Kugel, etc.) eine Vorstellung von höherdimensionalen Räumen, insbesondere über das Zusammenspiel von Kugel, Zylinder und Würfel.
Und nicht zuletzt, dass auch der anerkannte Fachwissenschaftlicher L. Fejes Toth irren kann. Die als „hoffnungslos“ bezeichnete Situation wurde zwanzig Jahre später im Wesentlichen von Wills et.al. gelöst.

Dieser Text wurde 1994 mit Schülern am Gymnasium Schrobenhausen, 1994/95 mit Schülern am Willibald-Gymnasium Eichstätt und noch einmal 1995/96 mit Schülern am Schyren-Gymnasium Pfaffenhofen betrachtet, und er galt stets in einer Evaluation am Ende des jeweiligen Pluskurses zur Thematik Kugelpackungen als Höhepunkt.

Dies lässt sich durch den Mehrwert personorientierten Lehrens und Lernens (2.1.2.1) erklären. Denn es wurden keine grundsätzlich neuen Lehrformen, Lernformen, Methoden, etc. angewandt, sondern es ging „in der Abgrenzung zur individualisierenden Methodik vor allem um den Prozess der subjektiven Auseinandersetzung mit den Inhalten auf einem für den Einzelnen höchstmöglichen Lernniveau“ (ebd.). Genau das konnte durch die oben aufgezeigte Entfaltung der Kernidee in doppelter Hinsicht durch dialogisches Lernen (horizontale Dimension, vertikale Dimension, 2.2.4.3) erzielt werden. Auf der Grundlage der personalen Prinzipien Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess und Relationalität (2.1.1.1, 2.1.1.3) erfährt das Lernen eine besondere Sinndimension. Die individuelle Auseinandersetzung mit selbstgewählten Fragen und Themen führt zu einer Verständnistiefe, die eine wertgeleitete Integration des Lerngegenstandes in die Person des Lernenden zulässt (2.1.2.1). So werden „Unterricht und Schule … zu anregenden Räumen des Lebens und der Auseinandersetzung mit dem Gelernten über das Gelernte hinaus mit sich selbst. … In diesem Sinne können sie zu prägenden Lernräumen der Entfaltung und Selbstgestaltung der Persönlichkeit und der Mitgestaltung der Umwelt werden. Wissen und Persönlichkeitsgestaltung sind zwei aufeinander bezogene Größen dieses Bildungsverständnisses“ (ebd.) (3.1.6.1, 3.1.6.4, 3.3.1.1, 4.2.2.3, 4.2.3).

Die dargestellten Kernideen erzeugen, eingebettet in einen dialogischen Lernprozess, ein begabungsförderndes Lernarrangement (2.1.2.2). Die Begabungspotentiale sind bereits vor der Teilnahme am Enrichment-Programm erkannt (Identifikation, ebd.). Initiation und Faszination (ebd.) meinen das Eröffnen von Interessen durch forschende und Interesse weckende Aktivitäten, aber auch durch die Begegnung mit vorbildhaften Persönlichkeiten; genau dies gelingt in der Auseinandersetzung mit dem Fachaufsatz von L. Fejes Toth. Differenzierung und Anerkennungskultur runden das begabungsfördernde Lernarrangement ab.

Zusammenfassend erfüllt der Zugang über die Kernideen die didaktischen Prinzipien der Personorientierung (2.1.2.4). Aneignung (reflektiertes Lernen) und Autonomie (selbstgestaltetes Lernen) werden in besonderer Weise bedient. Dialog (dialogisches Lernen) und Sozialität (soziales Lernen) sind wesentliche

Begleitprinzipien. Lernsinn (sinnorientiertes Lernen) und Performanz (gestaltendes Lernen) werden überzeugend erfüllt.
Die dargestellten Kernideen bilden einen Kompass für personorientierten, begabungsfördernden Unterricht über Kugelpackungen (3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.6.3, 3.1.7).

3.1.5 Eine Kernidee als Element des Coachings

Die Kernidee im Sinne des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf entsteht im Kopf und im Herzen des Lehrenden, setzt den Prozess des Lernens in Gang und hält ihn aktiv (2.2.4.3). Dies wurde in 3.1.3 und 3.1.4 dargestellt und erläutert.
Kernideen können auch aus der Person des Lernenden heraus entstehen und an den Lehrenden herangetragen werden. Dies ist regelmäßig der Fall, wenn der Lernende in einem bestimmten Bereich über mehr Wissen und Kompetenz verfügt als der Lehrende. Dies geschah so im Schuljahr 1995/96, als ein Schüler mit der Kernidee einer Darstellung von räumlichen Kugelpackungskonfigurationen durch Computeranimationen an die Lehrkraft herantrat (Abbildung 17 S. 93).
Hier wandelt sich der *biografische Aspekt* (ICH): Die „Kernidee ist eine persönlich gefärbte und pointiert formulierte Aussage“ des Lernenden und des zu begabenden Schülers „über einen komplexen Sachverhalt“, die dem Gesprächspartner und Lehrenden „ohne Umschweife klar macht, was für [ihn] der Witz der Sache ist“ (2.2.4.3). Der Lehrende wird vom ICH zum DU, er wird zum Coach (2.1.2.6). Er erkennt den Wert der Kernidee mit Bezug auf das große Ganze, er erkennt die Triebkraft, die in der Kernidee steckt, er entwickelt im Dialog mit dem Lernenden die Perspektive, die Blickrichtung und formuliert im Dialog die Anregung. Dies ist auch kein Auftrag im Sinne des dialogischen Lernens mehr, da die Lehrkraft diesen Auftrag nicht selbst und ad hoc erfüllen könnte (2.1.1.5, 2.2.4.3).
Auch der *Wirkungsaspekt* (DU) wandelt sich: „Kernideen fordern“ im Dialog mit der Lehrkraft die eigene Person „heraus, [ihr] eigenes Verhältnis zum Stoff zu klären und die persönlichen Triebkräfte zu aktivieren“ (2.2.4.3). An die Stelle des

„Sie offerieren Sicherheit und Orientierung, ohne die Eigentätigkeit einzuschränken“ (ebd.) tritt ein „Sie anerkennen und fördern die Eigentätigkeit und geben ihr im Dialog Orientierung und Sicherheit“ (ebd.).
Der *Sachaspekt* (WIR) bleibt: „Kernideen sind der Auftakt zum Lernen auf eigenen Wegen. Sie fangen ganze Stoffgebiete in vagen Umrissen ein, rücken eine provozierende Eigenheit in den Vordergrund und laden zu einem partnerschaftlichen Dialog ein“ (ebd.) (2.1.2.6).
Mit Bezug auf die Thematik der Kugelpackungen konnten so verschiedene Inhalte visualisiert werden. In Abbildung 17 S. 93 erkennt man auf dem ersten Bild die Innensicht einer fcc-Packung. Der Beobachter befindet sich im Kristall, angeordnet in einer fcc-Packung, und blickt in diesen hinein. Dies war im Jahr 1995 etwas Besonderes, denn eine solche Perspektive konnte mit den damals üblichen Modellen für Kristallgitter, mit eigenen plastischen Modellen aus Styroporkugeln und Zahnstochern oder mit Fotografien aus einer Außenperspektive nicht realisiert werden. Erst durch die Computersimulation des Schülers gelang eine weitere Illustration des Satzes von Gauß über die dichteste Kugelgitterpackung. Im nächsten Bild erkennt man eine finite lineare Kugelpackung mit der konvexen Randhülle, was eine vergleichsweise leichte Übung war. Im dritten Bild konnte eine Darstellung einer tetraedrischen Konfiguration mit dickem Rand und Einblick ins Innere der Konfiguration erzielt werden. Dies war eine sehr komplexe Übung. Es war die Frage nach einem guten Aufschnitt des Randes und seiner Ablage ebenso zu lösen, wie die Frage nach der Position im Raum und der Perspektive auf die Kugelkonfiguration. Stets geschah dies im partnerschaftlichen Dialog zwischen Schüler und Lehrkraft (2.1.1, 2.1.1.3, 2.1.2.6, 2.2.4.3, 3.1.1, 3.1.2).

Eine vergleichbar schwierige Übung war die Illustration der Formel von Steiner, die für die Berechnung des Volumens der konvexen Hüllen finiter Kugelpackungen sehr hilfreich ist. Hierzu wird wieder ein Puzzle aus (Leppmeier, 1997) betrachtet.

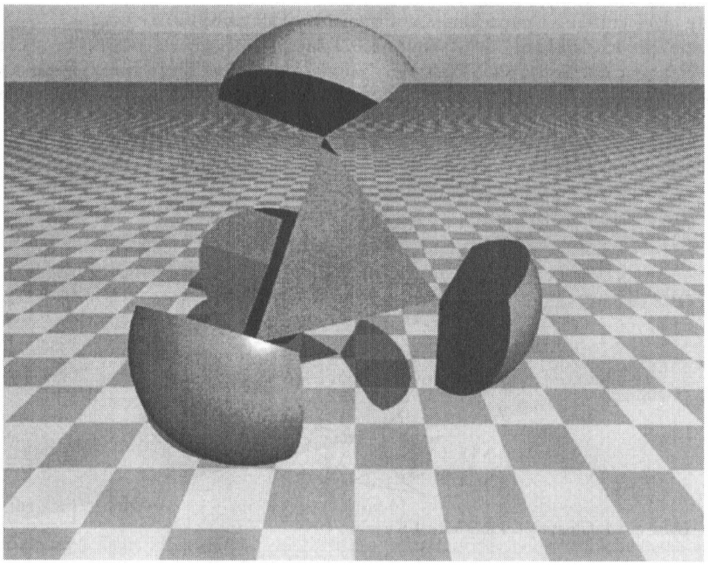


Abbildung 18 Illustration der Formel von Steiner, aus (Leppmeier, 1997 S. 104)

Man erkennt die gelösten Fragen. Die konvexe Hülle einer tetraedrischen Kugelpackung lässt sich in drei Stufen berechnen: die konvexe Hülle der Gitterpunkte (Tetraeder); die zylindrischen Komponenten an den Kanten des Tetraeders, die aus Gründen des Einblicks weggelassen wurden und lediglich durch die dunklen Schnittflächen angedeutet sind; die vier Kugelsektoren, die sich aus Symmetriegründen zu einer Kugel vereinigen lassen. Gerade der letzte Aspekt ist alles andere als trivial; er bildet die (kleine) Kernidee für diese Illustration[28].

Die dargestellte Kernidee der Visualisierung von Kugelpackungen erfüllt die Kriterien für Portfolio und Coaching (2.1.2.6) zur personorientierten Begabungsförderung. Die Fähigkeiten und Stärken des Schülers bilden den Ausgangspunkt für selbstwirksames Lernen und das eigene Bildungskonzept (2.1.1, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7, 4.1). Die für ein Portfolio wichtigen Aspekte (Lern- und Interessenprofil des Lernenden im „Ich"-Buch, Sammlung von Leistungen im „Container", Lernjournal als „Reflexionstagebuch", Logbuch als „Fahrtenschreiber" der Lernwege, 2.1.2.6) werden nicht verschriftlicht, sondern bilden das gedankliche Gerüst der Begabungsförderung. Auch Lernziele,

[28] Ein weiterer Aspekt ist nicht trivial: Die dunklen Schnittflächen, die eng mit den dazugehörigen Kantenwinkeln zusammenhängen, sind irrationale Bruchteile eines Kreises. Auch das Sechsfache bleibt irrational. Es gibt also für räumliche Polytope offensichtlich kein Pendant zur Innenwinkelsumme ebener Polygone. Dieser Aspekt wird in 3.2 näher ausgeführt.

Lernerlebnisse und Lernpfade werden nicht direkt und unmittelbar verschriftlicht. Vielmehr stehen hier der Bildungsprozess und die Reflexivität des Begabungsprozesses mit dem Coach im Zentrum (2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.3, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7).

Die Lehrkraft begleitet und überprüft, was der Schüler tut, warum er es tut, wie er es tut, was er stattdessen tun kann und ob für den Schüler „Einsatz und Benefit in einem akzeptablen Verhältnis stehen" (2.1.2.6). Es gilt auch hier mit Blick auf die coachende Lehrkraft und die ebenfalls immer am Coaching beteiligten Mitschüler: „Was als Unterstützung dienlich ist, sind der wertschätzende und respektvolle Außenblick und interessiertes, lösungsorientiertes Nachfragen statt einer Menge guter Tipps" (ebd.). Auf diese Weise können die Lösungsansätze des zu begabenden Schülers verstärkt werden (ebd.), der Schüler kann seine Begabung maximal entfalten und auch deren Grenzen ausloten (2.1.1, 2.1.1.2, 2.1.1.5, 2.1.3.2, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7, 4.1, 4.1.1.5, 4.2).

„Erfahrungen mit dem Aufbau von Reflexion bei Schülerinnen und Schülern, Lehramtsstudierenden und Lehrpersonen in der Weiterbildung haben gezeigt, dass Selbstreflexion über mehrere Stufen hinweg erarbeitet und eingeübt werden muss" (ebd.). Im dargestellten Beispiel konnte auf der Basis einer Kernidee des Lernenden dies auf einer hohen und erfolgreichen[29] Stufe erreicht werden, nicht zuletzt deswegen, weil die personalen Prinzipien Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess und Relationalität durchweg erfüllt wurden (2.1.1.3, 2.1.2.1).

3.1.6 Unterrichtskonzepte im Rahmen des Enrichment-Ansatzes

Das „Schoolwide Enrichment Model" (SEM) für inklusive Begabungs- und Begabtenförderung wurde in 2.1.3.3 vorgestellt. Es bildet die pädagogisch-didaktische Grundlage für die nachfolgenden Unterrichtskonzepte.

[29] Die Arbeit des Schülers wurde im Wettbewerb Jugend forscht mit einem Sonderpreis ausgezeichnet.

Das SEM ermöglicht beides (ebd.): ‚Highend learning' für Hochbegabte wird in 3.1.6.1 realisiert, ein integratives Modell breiter Begabungsförderung aller im Sinne von ‚a rising tide lifts all the ships' wird in 3.1.6.2 vorgestellt. In der Sichtweise des personorientierten Ansatzes zur Begabungsförderung können auch durchschnittliche Begabungen oder Spezialbegabungen zu Höchstleistung auflaufen (2.1.1.2, 2.2.1.1, 2.2.1.2). Entsprechende Konzepte werden in 3.1.6.3 realisiert. In 3.1.6.4 kommen mathematisch begabte Personen viele Jahre nach ihrem Kontakt mit personorientierter, mathematischer Begabungsförderung in einem persönlichen Rückblick noch einmal zu Wort.

Stets bilden die personalen Prinzipien Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess und Relationalität, die dem Lernen eine Sinndimension verleihen, die Basis des personorientierten Lehrens und Lernens und damit auch der Unterrichtskonzepte zur Begabungsförderung. Denn es geht „vor allem um den Prozess der subjektiven Auseinandersetzung mit den Inhalten auf einem für den Einzelnen höchstmöglichen Lernniveau" (2.1.2.1). Die didaktischen Prinzipien der Elementarisierung des Kategorialen (2.2.4.1), des genetisch-sokratisch-exemplarischen Lehrens (2.2.4.2) und des dialogischen Lernens mit besonderer Berücksichtigung der Kernideen (2.2.4.3) garantieren die personorientierte Begabungsförderung im Hinblick auf die zu behandelnden mathematischen Themen.

3.1.6.1 Pluskurs für die Oberstufe

Ein Pluskurs in der Oberstufe stellt nach dem Methodencluster für begabungsförderndes und personorientiertes Lernen nach Schmid (2.1.2.5) ein Beispiel für Grouping oder internes Enrichment dar. Die Schüler eines Pluskurses bilden eine Leistungsgruppe, ein Enrichment-Cluster oder auch eine Vertiefungsgruppe (ebd.). In schulorganisatorischer Hinsicht liegt eine Pullout-Gruppe vor, die sich an einem wöchentlichen Atelier-Nachmittag trifft (ebd.).
Die folgenden Ausführungen basieren auf Erfahrungen, die in drei unterschiedlichen Pluskursen gewonnen wurden. Sie fanden während des Sommerhalbjahres 1994 am Gymnasium Schrobenhausen statt, während des Winterhalbjahres 1994/95 am Willibald-Gymnasium Eichstätt und während des

Schuljahres 1995/96 am Schyren-Gymnasium Pfaffenhofen. Die Pluskurse wurden jeweils einmal wöchentlich am Nachmittag durchgeführt und standen interessierten Schülern der 11. Jahrgangsstufe offen. Sie wurden von fünf bis zehn sehr leistungsstarken Schülern des gesamten Jahrgangs besucht. Wie in einem Wahlunterricht wurden keine Leistungsnachweise verlangt, zum Zeugnistermin wurde die gezeigte Schülerleistung summarisch in einer Wortbemerkung gewürdigt. Die mathematischen Erfahrungen aus den drei o.g. Pluskursen mündeten in einem Buchprojekt (Leppmeier, 1997).

Die Pluskurse waren regelmäßig Ausdruck einer personorientierten Schulentwicklung, denn „selbst an Schulen mit Hochbegabtenklassen geht es nicht allein um die Förderung Hochbegabter, sondern um die Förderung besonderer Begabungen und letztlich um die Begabung aller Kinder und Jugendlichen“ (2.1.3). Sie waren Ausdruck einer Schulentwicklung „von unten“ (2.1.3.1), denn sie beruhten auf der „Veränderungsinitiative Einzelner“ (ebd.) und betrafen „deren Wirkungskreis“ (ebd.) (4.1, 4.1.1, 4.1.2, 4.2). Sie entwickelten „sich aus der Verantwortung und dem Mut der Initiatoren“ (2.1.3.1) und waren „damit grundsätzlich Ausdruck eines personalen Bildungsprozesses“ (ebd.) (2.1.1.1, 2.1.3.2). Von entscheidender Bedeutung im Bereich der Partizipation ist die Wahlfreiheit: Sie „gehört erfahrungsgemäß zu den stärksten Stimulatoren einer aktiven Teilnahme am Entwicklungsprozess einer Schule und ist zudem eine Voraussetzung für die Ermöglichung eines weithin eigengestalteten Lernprozesses bei den Lernenden“ (2.1.3.1).

Verantwortung (2.1.3.2) war stets eine Leitidee für die durchgeführten Pluskurse. Sie wurde in der vorliegenden Abhandlung wiederholt als einer von vier aus dem Personbegriff abgeleiteten Werte (2.1.1.3) neben Eigensinn, Beteiligung und Leistung thematisiert. Der Begriff der „gelebten Verantwortung“ ist eine zentrale Voraussetzung für gelingende Bildungs-, Begabungs- und Lernprozesse wie auch für erfolgreiche personorientierte Schulentwicklung: Verantwortung für sich, für andere, für das Gemeinsame (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 3.1.6.4, 4.1, 4.2).
Verantwortung ist eine wesentliche Orientierungshilfe für Lehrerhandeln, wenn herkömmliche Kompetenzmodelle zu kurz greifen, weil sie keine allgemein anerkannten Maßstäbe für konkretes Handeln in pädagogischen Situationen

anbieten (2.1.3.2). Dies trifft insbesondere auf Pluskurse zu, für die es keine Lehrpläne oder Curricula gibt. Professionelles Lehrerhandeln kann sich hier nicht auf Handlungsrezepte stützen, sondern fundiert wesentlich in der Persönlichkeit des Lehrenden und mit ihr in der Verantwortungsbereitschaft und Verantwortungsfähigkeit der Lehrperson (ebd., 2.1.1.5, 2.2.1.1, 2.2.3, 3.1.6.4, 4.1, 4.2).
Die zeitliche Dimension der Verantwortung bringt zum Ausdruck, dass die Lehrperson in einem prospektiven Sinn verantwortlich ist für das planbare, pädagogische Handeln im Hinblick auf die Lernenden und den Lerngegenstand, in einem retrospektiven Sinn für den mitgestalteten Begabungsentfaltungsprozess im Lernenden (2.1.3.2). Die relationale Dimension umfasst Verantwortungssubjekt, Verantwortungsinhalt und Verantwortungsinstanz (ebd., 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2, 3.1.6.4, 3.2, 3.3.2, 3.4.2.5, 4.1, 4.2, 4.3). Die Lehrkraft ist primäres Verantwortungssubjekt, sie hat die Inhalte und Methoden, Lernziele und Bildungsziele des Pluskurses zu verantworten vor den Schülern, deren Eltern und der Schulleitung. Schließlich hat Verantwortung eine ethische Dimension (2.1.3.2, 4, 4.1). Verantwortung ist in Verantwortungsdialogen zu legitimieren und gegebenenfalls zu korrigieren (2.1.3.2, 2.2.4.3). Gerade in einem Pluskurs fehlt die allgemeine Legitimation durch die Administration, das anerkannte Fachcurriculum, etc. Verantwortung ist daher Leitidee und Verpflichtung zugleich für einen gelingenden Pluskurs (4, 4.1, 4.2).

Gerade, wenn unklar ist, ob die Elementarisierung eines in der Fachliteratur publizierten Gedankengangs gelingen kann, ist die Verantwortung den Schülern gegenüber ein unabdingbares Prinzip für gelingende personorientierte Begabungsförderung. Schüler haben ein Recht darauf, im Vorfeld zu erfahren, wie groß der Wissensvorsprung des Lehrenden ist. Nur auf dieser Vertrauensbasis kann personorientierte Begabungsförderung in einem Pluskurs gelingen.

Auf der Basis des personorientierten Prinzips Verantwortung können im Sinne des dialogischen Lernens die wesentlichen Kernideen generiert werden, die den Lerngegenstand aufschließen (2.1.3.2, 2.2.4.3, 2.2.3). Dies wurde exemplarisch in 3.1.4 aufgezeigt.

In *halbjährlichen Pluskursen* bieten sich als wesentliche Kernideen an:

Gitter, Basis, Fundamentalparallelotop
Infinite Kreisgitterpackungen und infinite Kugelgitterpackungen
Packungsdichte infiniter Kugelgitterpackungen
Die Aussagen von Lagrange und Gauß und ein elementarer Beweis
Finite Kreispackungen und Kugelpackungen und die finite Packungsdichte
Die Formel von Steiner
Die tetraedrische Kugelpackung
Wurstkatastrophe und Wurstvermutung
Die parametrische Dichte
Die verallgemeinerte Wurstkatastrophe
Goldoberflächen im Licht der Kugelpackungen

In einem *jährlichen Pluskurs* können die o.g. Kernideen grundsätzlich breiter und tiefer behandelt, sowie um folgende Kernideen ergänzt werden:

Basistransformationssatz und Determinante
Alternativbeweise zu den Aussagen von Lagrange und Gauß
Das Volumen der n-dimensionalen Kugel
Höherdimensionale Kugelgitterpackungen und Codierungstheorie
Betrachtung linearer, ebener und räumlicher finiter Kugelpackungen
Dirichlet-Voronoi-Zelle
Containerpackungen und das Kissing-Number-Problem
Wurstkatastrophe und Wurstvermutung im Licht der Dichtefunktion
Eigenschaften der Dichtefunktion
Die Dichtefunktion und der Phasenübergang an einer Goldoberfläche
Rastertunnelmikroskopie und eine Exkursion in ein Universitätslabor für Oberflächenchemie und Katalyse

Im Rahmen einer Didaktik der Begabungsförderung (Identifikation, Initiation und Faszination, Differenzierung, Anerkennungskultur) (2.1.2.2) kann „ein spezieller Fokus auf kognitiv anspruchsvolle Aufgabenstellungen“ (ebd.) gelegt werden, die „Möglichkeiten vertiefter und weiterführender Lernprozesse für überdurchschnittlich begabte Schüler eröffnen und vorhandene Begabungspotenziale zum Ausdruck bringen“ (ebd.). Die methodischen

Prinzipien für differenzierende Lernaufgaben (kognitive Anschlussfähigkeit, Heterogenität der Lerngruppe, Multimodalität, Methodenkompetenz, Aufgabenverpflichtung und Selbstregulierung, Selbstlernfähigkeit, Selbstwirksamkeit, Selbstvertrauen, Sozialkompetenz, Selbstreflexion, Selbstbewusstsein, Selbstverantwortung) (ebd.) können in vielfacher Hinsicht angewandt werden, um ihre volle begabungsfördernde Kraft zu entfalten.[30]

Die dargestellten Unterrichtskonzepte für Pluskurse erfüllen alle drei Aspekte nach dem Triad-Modell für Enrichmentprogramme (Typ I: generelle explorative und Interessen weckende Aktivitäten, Typ II: Aufbau von Methodenkompetenzen, Lernstrategien und Praktiken, Typ III: individuelle Freiarbeit oder Gruppenprojekte) (2.1.3.3).

Beide Pluskurskonzepte fördern die Begabungen im Sinne von Gagné (mathematisch kristallisiertes Denken, mathematisch-sprachliche Begabung, mathematisch-arithmetische Begabung, mathematisch-prozedurales Gedächtnis, mathematisch-deklaratives Gedächtnis, etc.) (2.2.1.1), die Intelligenzen im Sinne von Gardner (logisch-mathematische Intelligenz, sprachliche Intelligenz, räumliche Intelligenz, interpersonale Intelligenz, intrapersonale Intelligenz, naturalistische Intelligenz) (2.2.1.2), die Begabung nach Renzulli (überdurchschnittliche Intelligenz, hohe Kreativität, Fähigkeit zur Aufgabenzuwendung) (2.2.1.3), aber auch in differenzierter Weise die Kriterien für Begabungsförderung nach Mönks, Heller und Perleth (ebd.).

In den konzipierten Pluskursen können nahezu alle Dimensionen mathematischen Denkens nach Ulm (2.2.2) erreicht und gefördert werden:

Inhaltsbezogenes Denken (numerisches, geometrisches, algebraisches, funktionales, stochastisches) (ebd.), prozessbezogenes Denken (experimentelles, begriffsbildendes, modellierendes, problemlösendes, schlussfolgerndes, formales, algorithmisches, theoriebildendes) (ebd.) und mathematikbezogene Informationsverarbeitung (mathematische Sensibilität, Denken mit mathematischen Mustern, Bewältigung von Komplexität, gedankliche Flexibilität, mathematische Kreativität, Nutzung von Darstellungen,

[30] Zahlreiche Beispiele hierzu sind in (Leppmeier, 1997) ausformuliert.

mathematisches Gedächtnis) (ebd.) und damit mathematische Begabung werden auf hohem Niveau gefordert und gefördert.

Schließlich können die Teilnehmer an einem Pluskurs Kugelpackungen ihre Wertschätzung für mathematisches Denken wachsen lassen, ihr Verständnis für die Bedeutung der Mathematik in Geschichte und Kultur der Menschheit vertiefen. Sie lernen verstehen, was Mathematiker tun und was Mathematik ist. Kurzum: Sie erwerben in der Auffassung von Hilton die mathematische Komponente einer guten Bildung (2.2.3) und erleben Mathematik als „genuine mathematics, … its methods and its concepts, by contrast with soulless calculation, constitute one of the finest expressions of the human spirit“ (ebd.).

3.1.6.2 Additum für die 11. Jahrgangsstufe

Im Gegensatz zu den in 3.1.6.1 dargestellten und analysierten Pluskurskonzepten wird in einem Unterrichtskonzept zu einem Additum für die 11. Jahrgangsstufe nach dem SEM-Ansatz (2.1.3.3) ein integratives Modell breiter Begabungsförderung aller im Sinne von ‚a rising tide lifts all the ships‘ realisiert. Hier tritt in methodischer Hinsicht das Grouping in den Hintergrund, es liegt ein internes Enrichment für alle Schüler vor (2.1.2.5).
Anders als bei Themenwochen oder Ateliertagen war der zeitliche Rahmen für das darzustellende Additum in der 11. Jahrgangsstufe, das im Schuljahr 2007/08 am Maristen-Gymnasium Furth unterrichtet wurde, klar abgesteckt: Zwei Wochenstunden über ein Schulhalbjahr konnten mit Themen aus dem Bereich Kugelpackungen gestaltet werden. Das Programm wurde als Alternative zu vorhandenen Curricula zu den Themen „Komplexe Zahlen“ oder „Sphärische Trigonometrie“ für Schüler des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums erarbeitet, vorgestellt und angeboten. Das Additum „Kugelpackungen“ bildete zusammen mit dem Fundamentum (dreistündige Einführung in die Infinitesimalrechnung) einen zweigliedrigen Mathematikunterricht.

Die freie Ausgestaltung des Additums erfordert die Berücksichtigung und Umsetzung des Personprinzips. Hier kann nach Weigand „Begabungsförderung nicht vom (bestehenden) System Schule her gedacht werden, nicht von den Standards, von Lehr- oder Bildungsplänen, von Lehr-/Lernprozessen und auch nicht von der Didaktik und Methodik her, sondern ausgehend von den Potenzialen der einzelnen Schülerinnen und Schüler“ (2.1.1.1). Es gilt: „Die fachlichen Aspekte, die Ermöglichung von Einsichten und Erkenntnissen, von gelingenden Lehr-/Lernprozessen, ein anregender und fordernder Unterricht behalten ihre Wichtigkeit, sie sind für die Begabungsförderung geradezu zentral. Aber sie sind nicht Selbstzweck, sondern haben Dienstfunktion. Und demzufolge sind sie immer in Beziehung zu den Besonderheiten und Potenzialen des Einzelnen zu sehen“ (ebd.).

Die personorientierte Begabungsförderung im Additum erfordert die Berücksichtigung der vier zentralen Werte Eigensinn, Beteiligung, Verantwortung, Leistung (2.1.1.3). Dies beginnt bereits bei der Vorstellung der Lerninhalte und Lernziele des Additumkonzeptes durch die Lehrkraft. Die zu begabenden Personen werden aktiv in den Begabungsprozess miteinbezogen (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2, 2.2.3, 2.2.5, 3.1.6.1, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.1.7, 3.4, 4.1, 4.2, 4.3). Sie können grundsätzlich entscheiden, ob sie das Wagnis eines über weite Strecken selbst mitzugestaltenden Additums gegenüber vorformulierten und abgesteckten Curriculumkonzepten eingehen wollen (2.1.1.3, 2.1.3.1, 4.1, 4.1.1.5). Der Eigensinn bekommt hier eine andere Dimension, die Autorschaft für den eigenen Begabungsprozess wird erlebbar (2.1.1.3). Die Partizipation wird als Eingebundensein in den sozialen Kontext, als Relationalität der Person in vielfacher Hinsicht, vor allem aber auch der Mathematik gegenüber, spürbar (ebd.). Die Verantwortung spielt, wie in 3.1.6.1 detailliert ausgeführt, eine zentrale Rolle für die personorientierte Begabungsförderung. Die Lehrkraft trägt die letzte Verantwortung in allen Dimensionen (2.1.3.2) für das Gelingen des Projekts, die Schüler übernehmen die Verantwortung für ihren Begabungsprozess. Dies erfordert einen intensiven Dialog der Lernpartner (2.1.2.4, 2.2.4.3). Schließlich ist das, was Leistung bedeutet und an Leistung eingefordert wird, vor dem Hintergrund der Einmaligkeit der Lerninhalte und des Personbezugs der Lernprozesse zu definieren und zu verantworten (2.1.1.3, 2.1.3.1, 2.1.3.2). So können von der Konzeption des Additums wesentliche Impulse für die Schulentwicklung ausgehen (4.1, 4.1.2, 4.2).

Das *Unterrichtskonzept zum Additum* beinhaltet folgende *Kernideen*:

Gitter und Basis (eindimensional, zweidimensional, dreidimensional)
Das quadratische und das hexagonale Gitter
Die Aussage von Lagrange über das hexagonale Gitter
Finite Kreispackungen und ihre Packungsdichte als Grundaufgabe
Lineare Kreispackungen (Wurstpackungen) und ihre Packungsdichte
Quadratische Kreispackungen und ihre Packungsdichte
Dreieckige Kreispackungen und ihre Packungsdichte
Doppeltlineare Kreispackung und ihre Packungsdichte
Funktionaler Zusammenhang zwischen Stückzahl und Packungsdichte
Grenzwerte der Packungsdichten für unendliche große Stückzahlen
Interpretation dieser Grenzwerte
Finite Kugelpackungen und ihre Packungsdichte als Grundaufgabe
Lineare Kugelpackungen (Wurstpackungen) und ihre Packungsdichte
Quadratisch-doppeltlineare Kugelpackungen und ihre Packungsdichte
Hexagonal-doppeltlineare Kugelpackungen und ihre Packungsdichte
Grenzwerte der Packungsdichten und ihre Interpretation
Einfach-kubische Kugelpackungen und ihre Packungsdichte
Eine dichtere Kugelpackung aus acht Kugeln und ihre Packungsdichte
Unterrichtsprojekt zum Thema „Tetraedrische Kugelpackung“ mit den Arbeitsaufträgen

Die Formel von Steiner in der Ebene
Die Formel von Steiner im Raum
Die Formel von Steiner am Tetraeder
Die mittlere Krümmung M[31] beim Tetraeder
Das Volumen des Tetraeders und die Packungsdichte der tetraedrischen Kugelkonfiguration
Die Packungsdichte der kuboktaedrischen[32] Kugelkonfiguration

Die Wurstkatastrophe
Exkurs: Der Induktionsbeweis

---

[31] Vgl. (Leppmeier, 1997 S. 105)
[32] Vgl. (ebd., S. 114)

Vergleich der Packungsdichten für eine tetraedrische Konfiguration mit einer gleichmächtigen Wurstkonfiguration für wachsende Kugelanzahl[33].
Die Wurstvermutung
Exkurs: Der Nobelpreis für Chemie 2007 (Schuh, 2007)
Exkursion zum Institut für Oberflächenchemie und Katalyse der Universität Ulm

Das *Konzept für schriftliche Leistungsnachweise* umfasst zwei kleine Leistungsnachweise und einen großen Leistungsnachweis, die in die Bildung der Mathematiknote miteingehen. Die Leistungen im Rahmen des Unterrichtsprojekts einschließlich des Vortrags darüber werden als kleiner Leistungsnachweis gewertet.
Ein früher kleiner Leistungsnachweis umfasst folgende Fragen und Aufgaben:

1. Wie lautet die Definition für ein 2-dimensionales Gitter?
2. a) Zeichne ein hexagonales Gitter und gib eine Basis an.
   b) Gib auch ein Vektorpaar an, das keine Basis ist.
   c) Wo kommen hexagonale Gitter in der Natur vor? (Nenne zwei Beispiele.)
3. Zeichne das Gitter zur Basis $\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}$.
   a) Um welche Art von Gitter handelt es sich?
   b) Gib den kleinsten Abstand von je zwei verschiedenen Gitterpunkten an.

Ein späterer kleiner Leistungsnachweis umfasst folgende Fragen und Aufgaben:

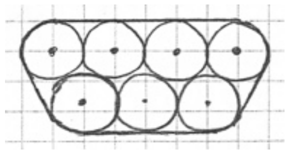
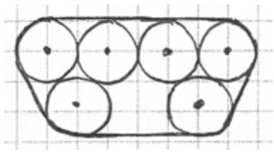
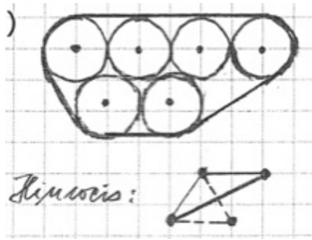
1. Wie lautet der Term für die Packungsdichte einer quadratischen Kreispackung (n beliebig)?
2. Berechne die Packungsdichte in % für folgende hexagonale Kreispackungen. Verallgemeinere dann für eine beliebige Stückzahl n.
3. Berechne die Packungsdichte für eine Wurstpackung zweier Kugeln.

Ein großer Leistungsnachweis über alle Lerninhalte vor dem Unterrichtsprojekt umfasst die Fragen und Aufgaben:

1. Zeichne ein hexagonales Gitter und gib zwei unterschiedliche Basen an.

[33] Vgl. (ebd., S. 123 Tab. 3.2)

2. Berechne die Packungsdichten der folgenden Kreispackungen

a)  b)  c) 

3. Wir betrachten quadratische Kugelpackungen.
   a) Berechne die Packungsdichte für $n = 4, 9, 16, k^2$ $(k \in \boldsymbol{N})$.

      (mögliches Ergebnis: $\delta(k) = \frac{k^2}{1+3k+\frac{6}{\pi}k^2}$)
   b) Bestimme experimentell und algebraisch den Grenzwert von $\delta(k)$ für $k \to \infty$.
   c) Einem Würfel sei eine Einheitskugel einbeschrieben. Berechne den Quotienten der Volumina und interpretiere diesen.

Die Aufgaben erfüllen die Kriterien für die Entwicklung differenzierender Lernaufgaben nach Müller-Oppliger (kognitive Anschlussfähigkeit, Heterogenität der Lerngruppe vs. Monotonie der Lehre, Multimodalität, Methodenkompetenz, Aufgabenverpflichtung und Selbstregulierung, Selbstlernfähigkeit, Selbstwirksamkeit, Selbstvertrauen, Sozialkompetenz) (2.1.2.2).
Selbst die Testaufgaben unterstützen die personorientierte Begabungsförderung nach Schmid: „Neugierde erhalten, Fragen entwickeln, Wissen generieren, Lernende beraten, Lernergebnisse (zum Teil in Absprache mit den Lernenden) bewerten“ (2.1.1.5). Die ersten vier Kriterien werden in den konzipierten schriftlichen Leistungstests erfüllt. Das fünfte Kriterium kommt bei der Bewertung der Unterrichtsprojekte zum Tragen. Denn der Auftrag an die Lehrperson ist „nicht zusehen, sondern aufbereiten, begleiten, reflektieren, … stets mit Blick auf den sich bildenden Schüler und die Begabungsprozesse“ (ebd.). Die Aufgaben sollen zu einem „effizienten und kreativen Selbstlernen“ (ebd.) hinführen. Dies gilt nicht nur für die Testaufgaben, sondern in ganz besonderem Maße für die Aufträge, die den Begabungsprozess im Additum initiieren und unterstützen. Auf diese Weise ergänzen sie die drei Förderebenen, die Schmid als Herausforderung für die Lehrenden sieht: Angebotsebene, Erlebnisebene, Ebene der Persönlichkeitsentwicklung (ebd.). So entwickelt sich eine Pädagogik des

Zutrauens und Zumutens, des Förderns und Entfaltens, nicht eine Pädagogik der Vermittlung, Bewertung, Selektion (ebd.), von der wesentliche Impulse für gelingende Schulentwicklung ausgehen können (4.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.2.3, 4.2.4).

Insgesamt wurde gezeigt, dass im Rahmen eines Additums die Kriterien des SEM für inklusive Begabungsförderung nach Renzulli und Reiss (2.1.3.3) nahezu ideal erfüllt werden können und personorientierte Begabungsförderung in einer besonderen Intensität gelingen kann (2.1, 2.2, 4).
Dabei ist es von untergeordneter Bedeutung, ob ausgearbeitete Curricula und Unterrichtsmaterialien zur Verfügung stehen oder ob die zeitlichen Ressourcen von der Lehrkraft und den Lernenden in hoher Verantwortung für den Bildungsauftrag (2.1.3.2) verwendet werden (0, 4). In jedem Fall stehen die dargelegten Ausführungen exemplarisch für viele andere Lernthemen, die sich für eine personorientierte Begabungsförderung entsprechend adaptieren lassen (3.1.6.1, 3.2, 3.3, 3.4). Sie unterstützen den gesellschaftlichen Auftrag an eine begabungsgerechte Schule (4.1) und bereichern einen gelingenden Schulentwicklungsprozess (2.1.3, 4.2).

3.1.6.3 Projektgebundenes Enrichment

Während in den beiden vorangegangenen Abschnitten Enrichment-Ansätze im Rahmen des stundenplanmäßigen Unterrichts ausgeführt wurden, werden im Folgenden Ansätze zur personorientierten Begabungsförderung am Thema Kugelpackungen außerhalb des stundenplanmäßigen Unterrichts erörtert.

Dazu zählt insbesondere die Semesterarbeit als Form des selbstorganisierten Lernens (2.1.2.5). Schmid ordnet sie ein zwischen klassischer und personorientierter Begabungsförderung (ebd.) als Ausdruck der Methode der Individualisierung (2.1.2.3). Sie wird jedoch zu einem Instrument der personorientierten Begabungsförderung, wenn sie unter dem Aspekt der vier zentralen Werte (Eigensinn, Beteiligung, Verantwortung, Leistung, 2.1.1.3) betreut wird. Reflexion und Dialog prägen sich aus in Lerntagebuch, Portfolio, Ich-Du-Wir-Didaktik, in Tutoring/Mentoring/Coaching (2.1.2.5). Die personale Kompetenz der Lehrperson und des Lernenden sind gefordert (2.1.1.5). Sinn-

Lernen und die Gestaltung von Wissen finden ihr Pendant im komplexen Lernen, im Anwendungsprinzip, in der ästhetischen Gestaltung, in Präsentationsformen, Publikationen und Auszeichnungsveranstaltungen (2.1.2.5). Mehrdimensionale Leistung wird anerkannt in der Lernprozessbewertung und positiven Leistungsbewertung, in Zertifikaten und Begleitzeugnissen (ebd.).

Das Prinzip der Beteiligung kann bereits bei der Themenstellung berücksichtigt werden. Folgende Themen wurden zur Bearbeitung im Rahmen einer einjährigen *Seminararbeit*, einer sog. Facharbeit, im Schuljahr 1997/98 bzw. 1999/00 vorgeschlagen:

1) Die Bedeutung dichtester Kugelgitterpackungen in der Codierungstheorie
2) Die dichtesten finiten Kreisgitterpackungen
3) Die Berechnung einiger finiter Kugelgitterpackungen anhand von Modellen
4) Die dreidimensionale Wurstkatastrophe – veranschaulicht an einigen Modellen
5) Containerpackungen von Kreisen und Kugeln

Das Thema 2) wurde von einem guten Schüler bearbeitet, der insbesondere in der Gliederung des Themas, in der Darstellung funktionaler Zusammenhänge zwischen Konfigurationsstückzahlen und zugeordneten Packungsdichten seine Begabungen neben den allgemeinen Aspekten mathematischen Denkens nach Ulm (2.2.2) weiterentwickeln konnte. Die Arbeit wurde auch beim Wettbewerb Jugend forscht mit einem beachtlichen persönlichen Gewinn präsentiert.
Das Thema 3) wurde von einer sehr guten Schülerin bearbeitet. Sie vermochte es, tief in die Thematik einzudringen und vielfältige Erkenntnisgewinne zu erzielen. Ebenfalls hervorragend gelungen waren die angefertigten Modelle der Kugelpackungen aus großen, farbig applizierten Kugeln, umspannt von Damenstrumpfhosen, die die konvexe Hülle symbolisierten. Sie konnten beispielsweise im Additumsunterricht nach 3.1.6.2 als Demonstrationsobjekte noch verwendet werden. Die Arbeit wurde beim Wettbewerb Jugend forscht mit großem Erfolg präsentiert und als beste Mädchenarbeit ausgezeichnet.

Eine weitere Arbeit hatte die Qualität einer Facharbeit, wurde frei betreut, befasste sich mit dem Thema „Illustration der Formel von Steiner zwischen Wurstvermutung und Wurstkatastrophe“ (3.1.5) und wurde ebenfalls beim Wettbewerb Jugend forscht mit einem Sonderpreis für die aufwändigste Arbeit ausgezeichnet.

Die personorientierte Betreuung der Facharbeiten entwickelte eine hohe Eigendynamik, so dass durch die fachliche Faszination noch weitere mathematische Facharbeiten und mit ihnen die mathematischen Begabungen der Beteiligten[34] gediehen (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.6, 3.1.5, 4.1, 4.1.1.5, 4.2, 4.3). Sie konnten auf Tuchfühlung mit der Mathematik gehen und die Relationalität (2.1.1) zur Fachwissenschaft austesten (2.2.3, 2.2.5).

Mit Blick auf Portfolio und Coaching (2.1.2.6) als Instrumente personorientierten Lehrens und Lernens erkennt man den Unterschied zwischen beiden Ansätzen in der Unterscheidung zwischen Seminararbeit und Jugend forscht-Beitrag.
Die Betreuung einer freiwillig entstandenen *Jugend forscht-Arbeit* ist typisch für Coaching: Lernziele, Lernerlebnisse und Lernpfade werden nicht verschriftlicht (ebd.), der Bildungsprozess und die Reflexivität des Begabungsprozesses in der personalen Begegnung mit dem Coach stehen im Zentrum (ebd.). Im Idealfall coachen in der Schülergruppe sogar die Schüler einander. Sie stellen unterstützende Fragen und vergleichen im Austausch ihre Erfahrungen. Und es werden nach Möglichkeit keine Ratschläge erteilt, sondern Lösungsansätze der Schülerinnen und Schüler verstärkt (ebd.).
Hingegen ist die Betreuung einer *Seminararbeit* typisch für den Portfolio-Ansatz. Ihre Anfertigung ist für die Schüler obligatorisch, das Thema kann jedoch neigungs- und begabungsabhängig relativ frei gewählt oder mitbestimmt werden. Für eine möglichst erfolgreiche Begabungsförderung ist das Instrumentarium des

[34] Ein sehr guter Schüler befasste sich mit dem Thema „Die algebraischen Geheimnisse des Codes der deutschen Banknoten“ und errang den Sieg im Regionalentscheid des Jugend forscht-Wettbewerbs. Eine weitere, sehr gute Schülerin bearbeitete das Thema „Mathematik – nur eine Wissenschaft für Männer?“ und wurde dafür ebenfalls bei Jugend forscht prämiert.

Portfolios hilfreich für das Erkennen von Begabungspotentialen, zur Unterstützung selbstbestimmten, sich aneignenden Lernens, für die Reflexion von Lern-, Begabungs- und Bildungsprozessen und nicht zuletzt als Grundlage für Beratungsgespräche (ebd.). Oftmals ist auch der richtige Umgang mit den zeitlichen Ressourcen ein Ziel, das mit dem Instrumentarium des Portfolios leicht erreichbar ist. Im Dialog zwischen Lehrendem und Lernendem können Leistungen und Lernstile, aber auch Lerneinstellungen und Widerstände erfasst und potentiell begleitet werden (2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.3, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.1.1, 2.2.4.3, 4.1, 4.2). Immer jedoch bilden die Fähigkeiten und Stärken der Schüler den Ausgangspunkt für selbstwirksames Lernen und das eigene Bildungskonzept (2.1.1, 2.1.2.6, 4.1). Das Portfolio nimmt nach Müller-Oppliger drei Ebenen (kriteriale, prozedurale und personale Ebene) in den Blick (2.1.2.6). Im Übergang von Seminararbeit zur Jugend forscht-Arbeit verfließen die Grenzen zwischen Portfolio und Coaching.

Anders als die Betreuung von Seminararbeiten oder Wettbewerbsarbeiten, die im Methodencluster nach Schmid (2.1.2.5, Abbildung 4) jeweils internes Enrichment realisieren, kann die Thematik der Kugelpackungen auch für externes Enrichment (ebd.) verwendet werden. In diesem Sinne wurde das Thema als *Expertenprojekt* (ebd.) im Rahmen eines Expertenvortrags und Expertencolloquiums (ebd.) mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten in Ferienseminaren für die Landessieger des Landeswettbewerbs Mathematik in den Jahren 1999 und 2000 aufbereitet, vorgetragen und diskutiert. Auch in diesem Kontext prägen die vier zentralen Werte einer personorientierten Schulkultur (Eigensinn, Beteiligung, Verantwortung, Leistung, 2.1.1.3) die personorientierte Begabungsförderung (2.1.1, 2.1.2, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.3, 2.2.5, 4.1, 4.3).
Ihr Nachhall kann eine erhebliche zeitliche Dimension annehmen, wie eine E-Mail eines Teilnehmers (inzwischen Professor für Mathematik) am Ferienseminar 1999 zeigt:

„Kürzlich musste ich übrigens in der Tat an Sie und Kugelpackungen denken, weil ich zufällig[35] Maryna Viazovska[36] getroffen habe. Seitdem denke ich nur so zum Spaß ab und zu darüber nach, ob es eine schlaue Umformung ihrer Modulformen gibt, durch die man die Computerrechnung am Ende ihres Beweises ersetzen kann, aber bislang ohne Endergebnis." (E-Mail vom 29.10.2017)

So kann eine Talententwicklung im Sinne Gagnés gelingen (2.2.1.1, 3.1.6.4).

3.1.6.4 Evaluation der Begabungsförderung nach Gagné

Personorientierte Begabungsförderung bettet Begabungs- und Bildungsprozesse in den Entwicklungsprozess der Person ein. Gagné spannt im DMGT-Ansatz den Bogen von den Begabungen („Natural Abilities, Gifts (G) = top 10%") bis zur Berufsausprägung („Competencies, Talents (T) = top 10%) des Lernenden (2.2.1.1, Abbildung 6).
Unter diesem Aspekt soll die personorientierte Begabungsförderung, die durch die Beschäftigung mit der Thematik Kugelpackungen im Rahmen der in 3.1.6.1 und 3.1.6.3 dargestellten Unterrichtskonzepte unterstützt wurde, untersucht werden.

Ein Schüler, der über eine außergewöhnliche mathematische Begabung verfügte, die sich darin äußerte, dass er bereits vor Eintritt in das Gymnasium die Abituraufgaben im Fach Mathematik mit Leichtigkeit und fehlerfrei zu lösen in der Lage war, dass er in der 7. Jahrgangsstufe sich mit der Konstruierbarkeit des

---

[35] Der Zufall stellte sich folgendermaßen dar:
The European Prize of Combinatorics 2017 was awarded to *Christian Reiher* (Univ. Hamburg) for his profound result in extremal and probabilistic combinatorics, particularly for his solution of the Kemnitz conjecture on lattice points and the Lovasz-Simonovits clique density problem and to *Maryna Viazovska* (EPFL) for her deep contributions to spherical designs and particularly for the solution of the sphere packing problem in dimensions 8 and 24.
The prize ceremony took place at the TU Wien at the Opening of the Eurocomb 2017 conference on August 28, 2017. Both prize winners gave a prize lecture on August 30 as part of the Eurocomb conference. The award of 2500 EURO for 2017 is founded with contributions of DIMATIA, local organizers and Elsevier.
(Quelle: http://www.dmg.tuwien.ac.at/eurocomb2017/index.php/2017/09/01/european-prize-in-combinatorics-2/ vom 20.02.2018)

[36] Vgl. (Viazovska, 2016)

17-Ecks beschäftigte und einschlägige Originalliteratur dazu las, der mehrfacher Bundessieger im Bundeswettbewerb Mathematik war, der die IMO-Mannschaft der Bundesrepublik Deutschland verstärkte und der mehrfach Jugend forscht-Preisträger in Mathematik war, nahm auch die Thematik der Kugelpackungen und im Rahmen einesFerienseminars des Landeswettbewerbs Mathematik (3.1.6.3) die offenen Fragen und ungelösten Probleme wahr. Sein Begabungsentwicklungsprozess ging immer über die Thematik der Kugelpackungen hinaus in vielfältige Bereiche der Mathematik. Dennoch erhielt er jüngst einen Preis für eine Arbeit, die sich mit Gitterpunkten und einem Dichteproblem beschäftigt (ebd.). Stets bezog er Impulse für seinen Begabungsentwicklungsprozess aus den unterschiedlichen Ausprägungen von Enrichment (internes Enrichment: Wettbewerbe; externes Enrichment: Expertenprojekte; Akzeleration: Drehtürmodell, Frühstudium; selbstorganisiertes Lernen: freies Lernen, etc.; Reflexion-Dialog: Tutoring/Mentoring/Coaching, Personale Kompetenz; Sinn-Lernen: komplexes Lernen, Anwendungsprinzip, ästhetische Gestaltung; mehrdimensionale Leistung; 2.1.2.5, Abbildung 4). Heute ist er Professor für Mathematik und erfüllt das 10%-Kriterium für Competencies nach Gagné.

Ein anderer Schüler nahm sowohl am Klassenunterricht der 11. Jahrgangsstufe als auch am Pluskurs 1995/96 teil. Im Infinitesimalunterricht zeigte dieser Schüler seine vielfältige Begabung und sein hohes Kreativitätspotenzial. Obgleich ihn die Wiedergabe des Beweises für den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in der Weierstraßschen Formulierung weniger reizte, war er ein wesentlicher Kopf im Pluskurs. Er stellte die richtigen Fragen, fand clevere Antworten und löste so manches harte Problem. Dieser Schüler trat mit guten mathematischen Leistungen in die Oberstufe des Gymnasiums ein, fand Geschmack an mathematischen Fragestellungen, ließ sich von den Fördermöglichkeiten nach dem Enrichment-Programm inspirieren und legte ein exzellentes Abitur in Mathematik ab. Auch hier gelang es, durch den personorientierten Begabungsförderungsansatz mathematische Begabungen nachhaltig zu fördern. Nach dem Abitur wandte sich der Schüler der Physik zu, erhielt als Nachwuchswissenschaftler die Otto-Hahn-Medaille der Max-Planck-Gesellschaft, ist heute Professor für Physik und erfüllt ebenfalls das Gagné-Kriterium für einen gelungenen Talententwicklungsprozess.

Er selbst spannt den Bogen von der personorientierten Begabungsförderung durch den Pluskurs Kugelpackungen bis zu seiner heutigen Berufstätigkeit mit folgenden Worten:

> *„Natürlich ist es nicht ganz leicht, eindeutige Verbindungen herzustellen, zumal der Kurs jetzt schon gute 20 (!) Jahre zurückliegt.*
>
> *Aber ich kann doch mit Bestimmtheit sagen, dass die ‚Kugelpackungen' zu den anregendsten Erfahrungen gehört, die ich im Schulbetrieb am SGP machen konnte. Ich habe die Dynamik in sehr positiver Erinnerung behalten (den Inhalt, bis auf Kernaussagen, leider nur vage :). Es war ja praktisch die erste Begegnung mit der ‚richtigen' Mathematik, das hat schon viel Spaß gemacht. Die Aufbereitung und das intensive Format in einer kleinen Gruppe haben dazu stark beigetragen.*
>
> *Zu einem gewissen Grad hat mich das sicher in späteren Entscheidungen bestärkt (wobei es mir zugegebenermaßen schwerfällt, mich in alle Überlegungen von damals wieder hineinzuversetzen): zu wissen, dass das Physikstudium eine gute Wahl sein könnte, passend zu Talenten und Interessen; im Grundstudium die ‚reine' Mathematik zu hören anstatt der abgespeckten für Physiker, weil es klares Denken schult und intellektuell stimuliert; im Studium mit ausgesuchten Kommilitonen Projekte anzupacken, die über das Standard-Curriculum hinausgehen, bei deren selbständiger Bearbeitung sich aber viel lernen lässt, etc." (E-Mail vom 28.10.2017)*

In dieser Äußerung kommen viele Bedingungsfaktoren des Talententwicklungsprozesses nach Gagné (2.2.1.1) zum Ausdruck: Der Entwicklungsprozess (D) mit den Unterkategorien Aktivitäten (DA, Zugang, Inhalt, Format), Fortschritt (DP), Investment (DI), die Katalysatoren Umwelt (E) mit den Unterkategorien Milieu (EM), Personen (EI), Angebot (EP) und Intrapersonales (I) mit den Unterkategorien Physis (IF), Mentales (IP), Bewusstsein (IW), Motivation (IM), Volition (IV) (Abbildung 6 S. 50).

Ebenso erkennt man Prinzipien (Eigensinn, Prozess, Autorschaft, Relationalität, 2.1.1.3), Werte (Autonomie, Beteiligung, Verantwortung, Leistung, ebd.) und Haltungen (Förderung, Begleitung, Stärkenorientierung, Anerkennung, ebd.) der personorientierten Begabungsförderung wieder.

Ein anderer Schüler, der über eine sehr gute Begabung in Mathematik und den anderen Fächern verfügte, nahm am einjährigen Pluskurs (3.1.6.1) teil.

Er war in seiner Persönlichkeit dem o.g. Schüler vergleichbar. Auch er stellte im Pluskurs die richtigen Fragen, fand originelle Antworten, schob die Leistungsgrenze immer weiter hinaus.

Er wurde mehrmals für sehr erfolgreiche, naturwissenschaftliche Arbeiten beim Wettbewerb Jugend forscht prämiert und beendete seine Schulzeit mit einem sehr guten Abitur und einem herausragenden Ergebnis in Mathematik. Durch die personorientierte Begabungsförderung im Pluskurs war es dem Schüler möglich, seine eigenen Begabungen genau auszuloten und eine fundierte Studienentscheidung zu treffen. Er entschied sich nicht für ein naturwissenschaftliches Studium, sondern für ein Studium der Mathematik. In einem Rückblick auf die eigene, personorientierte Begabungsförderung schreibt er:

> *„Ja, selbstverständlich erinnere ich mich noch. Ich denke sehr gerne an die Zeit zurück. (Je älter man wird, um so mehr schwelgt man offenbar in alten Erinnerungen, zumindest beobachte ich das bei mir). Die Kugelpackungen haben mich damals sicher mit dazu motiviert, Mathematik zu studieren - in diesem Sinne, wer weiß, was sonst wäre? Der normale Schulunterricht ist ja etwas anders. Eine kleine ‚homogenere' Gruppe von Schülern mit ähnlichen Interessen funktioniert ganz anders als eine Schulklasse. Das wäre so meine Hoffnung, dass sich Schule generell in dieser Richtung bewegt. Gruppen-Arbeit an speziellen Projekten statt Auswendiglernen (viel weniger wichtig in Zeiten des Internets, Google und Wikipedia).*
>
> *Wie Sie ja gesehen haben, ich habe an der ETH studiert (hat sich ergeben, weil meine Professorin gerade zum Zeitpunkt meiner Diplomarbeit an die ETH gerufen wurde). Meine Doktorarbeit war im Bereich Finanz-Mathematik (im weitesten Sinne). Und so bin ich in die ‚Finanzindustrie' gerutscht. Viel im Schnittfeld zwischen Mathematik und Informatik, Statistik und maschinellem Lernen. Ist spannend, herausfordernd. Aber ich wünsche mir manchmal schon auch eine Tätigkeit, die vielleicht der Welt etwas mehr bringen würde (mal sehen)." (E-Mail vom 2.11.2017)*

Eine gelungene Talententwicklung nach Gagné (2.2.1.1) und im Sinne der personorientierten Begabungsförderung (2.1.1).

Es fällt auf, dass dieser ehemalige Schüler wie Schmid der Methode des Grouping (Leistungsgruppen, Enrichmentclusters; modulares Kurssystem, Pullout-Gruppen, Abbildung 4 S. 34) unter allen Methoden des begabungsfördernden und personorientierten Lernens den Vorzug gibt und dies als wesentlichen Impuls für die Schulentwicklung sieht (2.1.3, 4.1, 4.1.1.5, 4.1.2, 4.2, 4.2.3.1).

Eine umfassend begabte Schülerin, die bereits in 3.1.6.3 vorgestellt wurde, trat mit guten mathematischen Leistungen in den Leistungskurs Mathematik ein und konnte insbesondere durch die Beschäftigung mit der Facharbeit zum Thema „Die Berechnung einiger finiter Kugelgitterpackungen anhand von Modellen" und der Präsentation dieser Arbeit bei Jugend forscht (ebd.) ihre mathematischen Begabungen so weit entwickeln, dass sie ein hervorragendes Mathematik-Abitur ablegte. Sie entschied sich gegen ein Studium der Medizin und für ein Studium der Mathematik. Auf ihre personorientierte Begabungsförderung im Fach Mathematik blickt sie folgendermaßen zurück:

> *„Für mich persönlich ging Förderung der Mathematik bereits im Elternhaus los. Mein Vater, Diplom-Ingenieur, förderte von klein auf logisches Denken bei mir und meiner Schwester. Das war - wohl gepaart mit einem angeborenen Talent - der Schlüssel zu einem erfolgreichen Pfad im Fach Mathematik über meine gesamte Schullaufbahn hinweg. Und obwohl einzelne im Allgemeinen ‚verpönte' Lehrkräfte im Fach Mathematik meinen Weg kreuzten, gelang es ihnen nicht, mir die Freude und das Interesse an der Mathematik zu nehmen. Ich wählte daher für die letzten beiden Schuljahre bis zum Abitur das Leistungsfach Mathematik. In diesem Leistungskurs wurde ich durch die engagierte Lehrkraft angeregt, mich über den Unterricht hinaus mit einem mathematischen Thema, den Kugelpackungen, zu beschäftigen und darin meine Facharbeit zu verfassen. Rückwirkend betrachte ich das als ein sehr geeignetes Thema für das schulische Umfeld, da es in relativ kurzer Zeit mit dem im Schulstoff erlernten Mathematikwissen greifbar ist und sehr plastisch vorstellbar ist. Der Erfolg in der Schule, insbesondere auch mein sehr gutes Abschließen im Abitur im Fach Mathematik, motivierte mich, ein Mathematikstudium mit Nebenfach Wirtschaftswissenschaften auf Diplom an der TU München aufzunehmen. Im Rahmen meines Studiums bemerkte ich, dass die in der Schule von meinem Leistungskursleiter eingeführten Arbeitstechniken eine optimale Vorbereitung auf das Mathematikstudium war. Insbesondere das wöchentliche Bearbeiten eines Aufgabenblattes allein oder in einer Kleingruppe, das sich zumindest im Grundstudium durch alle wesentlichen Kernfächer wie Algebra, Analysis, Stochastik und Numerik zog, kannte ich schon aus den zwei Leistungsfachjahren vor dem Abitur. Die Ansprüche*

insbesondere an Selbständigkeit und Umfang des zu erlernenden Wissens im Mathematikstudium waren selbstverständlich deutlich umfangreicher als im schulischen Bereich, ich fühlte mich jedoch insbesondere durch die geeignete Vorbereitung gewachsen und motiviert, mich immer wieder durchzubeißen. Der erfolgreiche Abschluss des Mathematikstudiums ermöglichte mir einen guten Start in das Berufsleben. Ich bewarb mich bei Finanzinstituten und startete nach einem freiwilligen sozialen Jahr im Ausland umgehend bei einer der größten deutschen Banken im Risikomanagement. Ich habe sowohl in der Bewerbungsphase als auch in meiner weiteren beruflichen Laufbahn immer großen Respekt für den Abschluss eines Mathematikstudiums erfahren - eine Tatsache, die ich für meinen erfolgreichen Pfad in Funktionen mit Verantwortung auch mit ursächlich sehe. Mein aktuelles Arbeitsumfeld in der Finanzabteilung einer Unternehmensberatung umfasst derzeit die Anwendung von Mathematik im betriebswirtschaftlichen Umfeld, was mir nach wie vor große Freude bereitet." (E-Mail vom 16.12.2017)

Die Schülerin spannt den Bogen einer personorientierten Begabungsförderung im Sinne Gagnés weit über die Schulzeit hinaus. Sie beschreibt insbesondere die Katalysatoren Umwelt (E) mit den Unterkategorien Milieu (EM), Personen (EI) und Angebot (EP) und Intrapersonales (I) mit den Unterkategorien Physis (IF), Mentales (IP), Bewusstsein (IW), Motivation (IM), Volition (IV) (Abbildung 6). Aber auch die Prinzipien, Werte und Haltungen einer personorientierten Begabungsförderung leuchten in ihren unterschiedlichen Facetten auf (vgl. Abbildung 2 S. 16).

Die Vorstellung der Schülerpersönlichkeiten, die durch die Beschäftigung mit dem Thema „Kugelpackungen" in ihrem personorientierten Begabungsförderungsprozess begleitet und gefördert werden konnten, wird abgeschlossen mit einem Schüler, der sehr intensiv die Elementarisierung der Kugelpackungen begleitet hat. Er nahm mit einer besonderen mathematischen Begabung am ersten halbjährlichen Pluskurs teil, fand insbesondere die Einblicke in die höherdimensionale Welt, beispielsweise die Zugänge zur Berechnung des Volumens einer mehrdimensionalen Kugel, sehr spannend und gab so einer Weiterentwicklung des Pluskurskonzeptes interessante Impulse. Er organisierte mathematische Treffen über das Schuljahr hinaus. Er erklärte sich auch sofort bereit, das Manuskript des Buches zu tippen und die entsprechenden Abbildungen

zu erstellen. Die Berechnung der dazugehörigen Projektionen waren für den Oberstufenschüler eine besondere mathematische Herausforderung. Nach einem sehr guten Abitur in Mathematik studierte und promovierte er in diesem Fach und ist heute an einer technischen Universität tätig.
Die Werte einer personorientierten Begabungsförderung – Eigensinn, Prozess, Autorschaft, Relationalität (2.1.1.3) – prägten seinen Werdegang als Wissenschaftler. Die Kriterien eines Talententwicklungsprozesses nach Gagné sind überzeugend erfüllt.

Anhand der vorgestellten Persönlichkeitsentwicklungen wurde gezeigt, dass das Enrichment-Angebot auf der inhaltlichen Basis des Themas Kugelpackungen mathematische Begabungen personorientiert fördern (2.1.1, 2.1.2.3, 2.1.3, 2.2, 4.1) und Impulse für einen gelingenden Schulentwicklungsprozess setzen kann (4). Die Begeisterung für Mathematik und mathematiknahe berufliche Herausforderungen hält gerade durch die personorientierte Begabungsförderung weit über die Schulzeit hinaus an und stellt einen großen Gewinn für die Gesellschaft dar (2.2.3, 2.2.5, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 4.1, 4.1.1.5, 4.2, 4.2.3.2, 4.3).

3.1.7 Ein Akademiekonzept als außerschulisches Unterrichtskonzept

Personorientierte Begabungsförderung, geprägt durch die Haltungen Förderung, Begleitung, Stärkenorientierung und Anerkennung, überzeugt von den Werten Autonomie, Beteiligung, Verantwortung und Leistung, basierend auf den Prinzipien Eigensinn, Prozess, Autorschaft und Relationalität (2.1.1), gehört seit der Gründung zu den Überzeugungen der Studienstiftung des deutschen Volkes. Wenn sie alljährlich ihre Stipendiaten zu den zweiwöchigen Sommerakademien einlädt, wird regelmäßig ein Hauptseminarprogramm „in Offenheit und Aufgeschlossenheit, in Neugierde und Kreativität“ (2.1.1.3) absolviert.

Personorientierte Schulkultur wird fortgeführt in einer personorientierten Akademiekultur. Das Niveau der Hochbegabung steigt, ohne eine genaue Quantifizierung vorzunehmen, gegenüber einem Additum (3.1.6.2) oder einem Pluskurs (3.1.6.1) in der Auffassung Gagnés (2.1.1.2) von „moderatly“ oder „highly“ auf „exceptionally“ (Abbildung 1 S.11).

Da der Elementarisierungsprozess mit Berücksichtigung des Kategorialen in einem genetisch-sokratisch-exemplarischem Sinn unter Auswahl der richtigen Kernideen sehr stark personorientiert ausgerichtet werden kann, lässt sich aus der Thematik der Kugelpackungen ein ansprechendes Unterrichtskonzept ableiten (2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 4.1). Ziel ist die Einführung in ein Teilgebiet der Mathematik mit vielfältigen Querbezügen zu anderen Disziplinen und die Hinführung zu offenen wissenschaftlichen Fragestellungen (2.2, 2.2.3, 4.3). In der Verantwortung der Stipendiaten für die Autorschaft des jeweils eigenen Bildungsprozesses konstituiert sich so personorientierte Begabungsförderung (2.1.1, 2.1.3.2).

Das „abstract“ eines Sommerakademieprogramms lautet folgendermaßen:

> *„Kugelpackungen spielen in weiten Bereichen der Mathematik eine Rolle, von der Geometrie bis zur Codierungstheorie, der Zahlentheorie und der Analysis. In der Arbeitsgruppe werden zunächst Kugelpackungen im engeren Sinne behandelt. Eine zentrale Rolle spielen dabei die klassischen Kugelgitterpackungen – im physikalischen Modell repräsentiert durch Kristalle. Sie sind mit so altehrwürdigen Namen wie Lagrange, Gauß und Kepler verbunden. Demgegenüber hält die noch junge Theorie der finiten Packungen verblüffende Aussagen bereit, die mit so skurrilen Begriffen wie Wurstkatastrophe und Wurstvermutung bezeichnet werden. Dann werden Kugelpackungen im weiteren Rahmen der Geometrie der Zahlen behandelt. Schließlich werden Ausblicke in die Codierungstheorie und die Theorie der quadratischen Formen gegeben.“ (Studienstiftung des deutschen Volkes, 2000 S. 16)*

Die *Kernideen des Unterrichtskonzepts* lauten:

Infinite Gitterpackungen – eine Auswahl

Die dichteste Kugelgitterpackung

Finite Packungen – Teil 1

Finite Packungen – Teil 2

Lattices – Minkowski´s Fundamental Theorem

Successive Minima – The Minkowski-Hlawka Theorem – Mahlers Selection Theorem

Lattice and Non-Lattice Packing and Covering with Convex Bodies

Packing of Balls

Die letzten vier Kernideen orientieren sich an (Gruber, et al., 1993), die ersten vier Kernideen an 3.1.1.

Das angebotene Akademieprogramm wurde von Studenten der Mathematik, der Naturwissenschaften, der Ingenieurswissenschaften und anderer Disziplinen gewählt. Mit diesem Konzept fand die Vorstellung des Themas und des Kepler-Hilbert-Problems für den Autor nach siebenjähriger intensiver Beschäftigung unter dem Fokus der Elementarisierung einen vorläufigen Abschluss.

Insgesamt zeigt die Betrachtung dieses Akademiekonzeptes in der Zusammenschau mit den anderen dargestellten und analysierten Unterrichtskonzepten (3.1.6) die gute Skalierbarkeit der Thematik Kugelpackungen auf der Basis der didaktischen Prinzipien der Elementarisierung und des dialogischen Lernens (2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.2.5) im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (2.1.3.3) einer personorientierten Begabungsförderung (0) und ihre Wirksamkeit für gelingende Schulentwicklung (4). Viele didaktische Erkenntnisse lassen sich auf andere extracurriculare und curriculare mathematische Bildungsgegenstände übertragen (3.2, 3.3, 3.4).

3.2 Hilberts drittes Problem – Enrichment

Viele Schüler glauben, dass sie (nach einem entsprechenden Mathematikunterricht) die Volumenformel für die Pyramide verstanden haben. Auch viele Lehrkräfte sind überzeugt, dass sie die Volumenformel für die Pyramide beherrschen, denn sie können den Faktor $\frac{1}{3}$ erklären und mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri didaktisch-methodisch aufbereiten. In den Schulbüchern und im Unterricht bleiben jedoch zwei naheliegende Fragen meist unbeantwortet: „Warum benötigt man zur Erklärung das Prinzip von Cavalieri?" und „Warum sind die drei Zerlegungstetraeder eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nicht kongruent?"

3.2.1 Historische Genese

Die oben beschriebene Selbstverständlichkeit herrschte nicht immer vor, wie Auszüge aus dem Briefwechsel des Göttinger Mathematik-Professors Gerling mit C.F. Gauß zeigen (Hartshorne, 2000 S. 230) (Aigner, et al., 2015 S. 72) (Ciesielska, 2018).

> *„… Ein anderer, freilich auch elementarer Gegenstand, der in meiner Vorlesung über Trigonometrie vorkommt, hat mir auch viel Vergnügen gemacht. Seitdem … 1813 …, ist mir das desiderium[37] geblieben, daß mir eigentlich eine scharfe Definition oder ein scharfes Kriterium der Symmetrie[38] fehlte, im Gegensatz gegen die Kongruenz …" (Brief Nr. 339 von Gerling an Gauß, 26.2.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 669).*

> *„… Ihre Bemerkungen über Symmetrie[39] und Kongruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desiderieren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als wahrgenommene Tatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht*

[37] Anliegen

[38] Hier verwendet für „Volumengleichheit" oder „Gleichheit in Grundfläche und Höhe".

[39] dito

widersprechend ist und füglich höheren Wesen zukommen könnte. Um aber aus der Höhe wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, daß die Gleichheit der Volumina körperlicher, bloß symmetrischer, aber nicht kongruenter Gebilde, sich nur die Exhaustionsmethode[40] *und nicht eben so elementar demonstrieren läßt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben…" (Brief Nr. 341 von Gauß an Gerling, 8.4.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 676).*

„… Ich sehe ferner aus Ihrem Brief, daß Hr. Eisenstein mich falsch berichtet oder selbst im Irrtum gewesen ist, da der Legendreschen Art das Wesentliche fehlt, nämlich die Vermeidung der Exhaustionsmethode: davon allein war die Rede. Wenn Sie sich aber bei Legendres Art, die Exhaustionsmethode anzuwenden, auf Ihren Lorenz, § 330, beziehen, so bedaure ich, diesen jetzt nicht nachlesen zu können: mein Exemplar hat mein Sohn vor mehreren Jahren einmal mitgenommen und mir nicht wiedergegeben…" (Brief Nr. 347 von Gauß an Gerling, 30.7.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 707).

„…Das neulich erwähnte Desiderium rücksichtlich der Exhaustionsmethode („Lorenz §330") besteht darin, daß ich den Satz: Pyramiden sind gleich, wenn die Grundfläche und Höhe gleich sind, nicht beweisen kann, als indem ich der Grundfläche parallele, gleichabstehende Ebenen durch beide lege, innere und äußere Prismen konstruiere und dann bemerke, daß die Prismensummen beiderseits übereinstimmen, während doch die Summe der inwendigen und auswendigen sich einander und also auch den Pyramiden beiderseits unendlich nähern lassen, da sie nur um das größte äußere Prisma differieren, welches mit seiner Höhe unendlich klein werden kann.- Wenn es gelänge, diesen Satz unabhängig von der Exhaustionsmethode zu beweisen, oder auch den Satz, daß die Pyramide 1/3 des Prismas ist, so würde ich die Exhaustionsmethode bei eckigen Körpern gar nicht mehr nötig haben, und nur die runden dadurch auf die eckigen zurückführen…" (Brief Nr. 348 von Gerling an Gauß, 12.9.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 710).

„…Legt man durch die Diagonale 1.5[41] *eines beliebigen Parallelepipeds, dessen Inhalt=P, die Ebenen 1.2.5; 1.3.5; 1.4.5; 1.6.5; 1.7.5; 1.8.5, so zerfällt dasselbe in 6 Pyramiden, von denen je zwei und zwei einander symmetrisch sind:*

[40] Prinzip von Cavalieri

[41] Die Eckpunkte sind mit 1, 2, …, 8 bezeichnet. Die Strecken mit den Endpunkten 1 und 2 als 1.2 usw.

A=1.2.3.5 symmetr. mit A´=5.6.7.1

B=1.3.4.5 symmetr. mit B´=5.7.8.1

C=1.4.6.5 symmetr. mit C´=5.8.2.1

B+C bilden eine vierseitige Pyramide 3.4.6.5.1=p, und es ist:

A +p = 1/2 P

A´+p = 1/2 P,   also A=A´

Für jede beliebige dreiseitige Pyramide A läßt sich nun ein Parallelepiped P finden, und so zerteilen, atqui ergo.[42]

Es käme nun noch darauf an, zu beweisen, daß A=B=C; das hat sich aber, alles seit 3 Wochen darauf verwandten Grübelns ungeachtet, noch nicht erreichen lassen[43]*. Gelänge dies noch, so wäre der Satz Lorenz § 330 unnötig und somit die Exhaustion aus der geradlinigen Geometrie ganz verbannt…" (Brief Nr. 349 von Gerling an Gauß, 18.1.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 713f.).*

„…Viel Zeit habe ich überdies an den bewußten stereometrischen Lehrsatz verwendet, ohne bisher so glücklich gewesen zu sein, den Schlüssel zu der Schwierigkeit zu finden. Hessel hat sich ebenfalls damit abgegeben und wir haben von Zeit zu Zeit unsere meletemata[44] *verglichen. Die Sache scheint aber sehr viel tiefer zu liegen, als ich früher vermutete und mag vielleicht dem Euclid schon Kopfbrechen gemacht haben. – Doch aber sagt mir ein dunkles Gefühl, daß hier noch irgendein Lehrsatz verborgen liegen muß, der, wenn er einmal gefunden ist, durch seine Einfachheit vielleicht überrascht…" (Brief Nr. 350 von Gerling an Gauß, 11.3.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 714f.).*

„…Seit jener Zeit, richtiger seit den Weihnachtsferien, habe ich einen großen Teil meiner Zeit darauf verwendet, zu versuchen, ob ich nun vollends die Exhaustionsmethode aus der Elementarmathematik dadurch fortschaffen könnte, daß ich den Satz: Pyramiden sind gleich[45] *bei gleicher Grundfläche und Höhe, unabhängig bewiese. Alle diese Versuche sind aber leider vergeblich gewesen; und ist mir nur das dabei merkwürdig erschienen, daß alle, auch die verschiedenst angefangenen immer endlich darauf zurückkommen, zu beweisen: daß 2 dreiseitige Pyramiden gleich groß sind, wenn in ihnen ein Dreieck ABC kongruent und eine Kante in jeder (AD und AE) durch einen Punkt*

[42] Dieser Aspekt erscheint in 3.2.2.8 in einem anderen Kontext.

[43] Dies wird in 3.2.2.7 näher untersucht.

[44] Studien

[45] Hier verwendet für „zerlegungsgleich" (3.2.2.5).

A desselben beiderseits gleich. Einen direkten Beweis dafür zu finden, hat mir aber auf keine Weise gelingen wollen[46]*; so dass ich endlich mich definitiv habe entschließen müssen, die darauf verwendete Zeit verloren zu geben und meinen Lorenz ohne diese gewünschte Verbesserung fertig zu machen, womit ich jetzt beschäftigt bin…" (Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845) (Gauss, et al., 1927 S. 716).*

Gerling ließ die Aufgabenstellung nach eineinhalb Jahren Nachdenkens ruhen. Auf die vielfältigen Aspekte seines Probierens werden in diesem Abschnitt Antworten gegeben werden (3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.6, 3.2.2.7). Dies begründet in der Retrospektive den didaktischen Wert der zitierten Stellen.

Gauß ahnte im Gegensatz zu Gerling die Schwierigkeiten schon wesentlich früher. Seine letzte Kommentierung war:

„…Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloß symmetrischer, nicht zugleich kongruenter Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, daß man sagt …[47]

Mein Bedauern muß ich nun, da jener Satz[48] *nicht mehr davon getroffen ist, auf die anderen Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch*[49] *von der Exhaustionsmethode abhängig sind, wie Euclid XII,5. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich aber nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen…" (Brief Nr. 343 von Gauß an Gerling, 17.4.1844) (Gauss, et al., 1927 S. 686).*

Im Jahr 1900 war das Problem noch immer nicht gelöst. Hilbert nahm es daher in seine berühmte Liste der damals offenen Probleme auf.

„Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

[46] Dieser Aspekt wird in 3.2.2.7 aufgelöst.

[47] Die folgenden Ausführungen beziehen sich nicht auf das dritte Hilbertsche Problem im engeren Sinn, sondern auf die Zerlegung achsensymmetrischer Tetraeder in kongruente Teiltetraeder, die Gerling gelungen ist (Ciesielska, 2018).

[48] dito

[49] auch noch

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauss spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden; auch ist es Gerling gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitsbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist." (Hilbert, 1900 S. 266f.)

Der Ursprung des dritten Hilbertschen Problems ist – selbst im historischen Kontext – curricular. Es geht um „Elementarmathematik" (Brief Nr. 351), aus der heraus im Rahmen des Enrichment-Ansatzes ein Unterrichtskonzept zur personorientierten Begabungsförderung erarbeitet wird.

3.2.2 Mathematischer Überblick

Während das Kepler-Hilbert-Problem (als Spezialfall des achtzehnten Hilbertschen Problems) in mathematischer Hinsicht den Abschnitt 3.1 mitbegründet, sollen im Folgenden die mathematischen Grundlagen zu Hilberts drittem Problem aufbereitet werden, so dass auf dieser Basis in 3.2.3 ein Unterrichtskonzept abgeleitet werden kann. Dabei ergeben sich auch interessante Querbezüge zur Thematik der Kugelpackungen (3.1, 3.2.2.8).

Jeder Schüler kennt die Volumenformel einer Pyramide $V = \frac{1}{3} Gh$ und den Beweis über die Zerlegung eines Prismas mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe in drei nach dem Prinzip von Cavalieri volumengleiche Pyramiden (Abbildung 28 S. 178), die jedoch – ein Schönheitsfehler – im Allgemeinen nicht kongruent sind. Im Vergleich zur ebenen Situation – jedes Parallelogramm lässt sich in zwei kongruente Dreiecke mit gleicher Höhe zerlegen – stellt sich die Frage nach dem mathematischen Grund dieses Schönheitsfehlers. Die Antwort darauf findet man im Themenkomplex um Hilberts drittes Problem.

3.2.2.1 Zwei grundlegende Fragestellungen

Kirchgraber sieht die gleiche Thematik aus einem anderen Blickwinkel (Kirchgraber, 2016). Er stellt zunächst fest, dass der Begriff Flächeninhalt so festgelegt ist, dass zwei zerlegungsgleiche Polygone gleichen Flächeninhalt haben. Das verwundert nicht. Verblüffend ist jedoch, dass die Umkehrung gilt: Haben zwei Polygone gleich großen Flächeninhalt, so sind sie zerlegungsgleich. Dieser Satz wurde von Bolyai 1832 und Gerwin 1833 unabhängig voneinander bewiesen (ebd.). Im Raum verwundert es zunächst wieder nicht, dass gilt, dass zwei zerlegungsgleiche Polyeder gleiches Volumen haben. Es stellt sich die umgekehrte Frage: Sind zwei Polyeder mit gleichem Volumen zerlegungsgleich? Hilbert formulierte im Jahr 1900 diese Frage als drittes von insgesamt 23 (damals) offenen mathematischen Problemen auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris (3.2.1). Die Antwort gab noch im gleichen Jahr sein Schüler Dehn: *Würfel und reguläres Tetraeder* sind auch dann nicht zerlegungsgleich, wenn sie gleiches Volumen haben (Dehn, 1900). Zwei Jahre später erfolgte eine verallgemeinerte Darstellung (Dehn, 1902).

In Ergänzung der Darstellung nach Kirchgraber sei darauf hingewiesen, dass es zum Satz von Bolyai und Gerwin ein räumliches Analogon gibt: Es gelang (Sydler, 1965) zu zeigen, dass die Volumengleichheit und die Gleichheit der Dehn-Invariante (3.2.2.2) bereits hinreichend sind für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder (Jessen, 1968). Dies bedeutet im Kontext, dass zwei *Polygone* genau dann *zerlegungsgleich* sind, wenn sie *flächengleich* sind, und dass zwei

Polyeder genau dann *zerlegungsgleich* sind, wenn sie *volumengleich und dehninvariantengleich* sind.

Die folgende Darstellung (3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.4, 3.2.2.5, 3.2.2.6) orientiert sich an der Aufbereitung durch (Aigner, et al., 2000 S. 39ff.).
Der Wortlaut Hilberts wird in *Aigner et.al.* wie in der Originalliteratur (3.2.1) wiedergegeben: Er forderte 1900 dazu auf,

> *„zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügen kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist" (ebd.).*

Beide Fragestellungen bilden die Leitfragen für die folgenden Betrachtungen:

1) Sind ein Würfel und ein volumengleiches, reguläres Tetraeder zerlegungsgleich? (*Formulierung nach Kirchgraber*) (3.2.2.2, 3.2.2.6, 3.2.4)
2) Sind zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe zerlegungsgleich oder zumindest ergänzungsgleich? (*Formulierung nach* Hilbert bzw. *Aigner et.al.*) (3.2.2.2, 3.2.2.6, 3.2.2.7, 3.2.5)

Auch die *elementarmathematische Frage* bleibt als Leitfrage bestehen:

> Warum sind die drei Zerlegungstetraeder eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche nicht kongruent?

Sowohl auf die Formulierung nach Kirchgraber als auch auf die Formulierung nach Aigner et.al. wird durch den Satz von Dehn-Hadwiger eine Antwort gegeben werden (3.2.2.6). Die elementarmathematische Frage wird in 3.2.2.7 gelöst. Eine entscheidende Rolle für das Verständnis des Kategorialen und für den zugrundeliegenden Elementarisierungsprozess (2.2.4.1) spielt dabei die Dehn-Invariante (3.2.2.2), eine Art räumlich erweiterte Innenwinkelsumme.

3.2.2.2 Die Dehn-Invariante

Der mathematische Ursprung der Dehn-Invariante liegt in (Dehn, 1900) (Dehn, 1902) vor, der Ursprung der algebraischen Präzisierung der Dehn-Invariante findet sich in der Darstellung der Thematik bei (Jessen, 1968).
Wir versuchen, ausgehend von der Definition für die Dehn-Invariante nach (Aigner, et al., 2000) einen Einblick in die Bedeutung dieses Begriffes und der damit verbundenen Vorstellung zu gewinnen.

Definition (Dehn-Invariante):
Gegeben sei ein Polyeder P.
Für jede Kante k bezeichne $\boldsymbol{l(k)}$ die Länge der Kante k und $\boldsymbol{\alpha(k)}$ den **Kantenwinkel**[50] **zu $\boldsymbol{k}$,** d. h. den Winkel zwischen den beiden an k angrenzenden Flächen.
Die Menge aller Kantenwinkel von P einschließlich π sei $\boldsymbol{M_P}$.
Für eine beliebige, reelle Obermenge $\boldsymbol{M}$ zu $\boldsymbol{M_P}$ sei $\boldsymbol{V(M)}$ die Menge aller Linearkombinationen von Zahlen aus $\boldsymbol{M}$ mit rationalen Koeffizienten und die Funktion $\boldsymbol{f}$ eine beliebige $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$, die die Bedingung $f(\pi) = 0$ erfüllt.
Dann heißt der Term $m_f(k) := l(k) \cdot f(\alpha(k))$ **Masse der Kante $\boldsymbol{k}$ (bzgl. $\boldsymbol{f}$)** und

$$D_f(P) := \sum_{k \in P} m_f(k)$$

Dehn-Invariante von $\boldsymbol{P}$ (bezüglich $\boldsymbol{f}$).

Die Dehn-Invariante ist eine „Massensumme“ in der Weise, dass unter „Masse“ das Produkt aus Länge und bewertetem Kantenwinkel einer Kante zu verstehen ist. Die Masse ist in diesem Sinn das räumliche Pendant zum Innenwinkel eines Polygons.

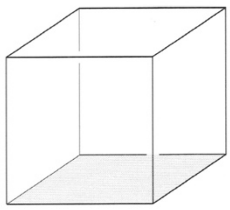
---

[50] In der Literatur findet man dafür auch den Begriff „Diederwinkel“ (Aigner, et al., 2015) (Wittmann, 2012).

Wie das Volumen eines Polyeders ist auch die Dehn-Invariante ein Funktional, das jedem Polyeder eine reelle Zahl zuordnet. In der Physik kennt man viele Funktionale; beispielsweise ist die Energie ein Funktional, das einem Körper eine Zahl (mit Maßeinheit) zuordnet.

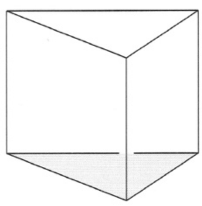
Wir berechnen nun in exemplarischer Weise (2.2.4.2) einige Dehn-Invarianten von Polyedern und beginnen mit dem einfachsten Polyeder.

a) Würfel (W)



Die Kantenwinkel sind durchweg $\frac{\pi}{2}$, die Menge $M_W = \left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.
Aufgrund der $\mathbb{Q}$-Linearität gilt für jedes $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot f(\pi)$.
Der Term verschwindet definitionsgemäß und mit ihm auch die Masse jeder Kante; somit ist die Dehn-Invariante eines Würfels $\boldsymbol{D_f(W) = 0}$.

b) Gerades Prisma mit dreieckiger Grundfläche (Pr)



Die Innenwinkel des Dreiecks seien α, β, γ, die Höhe h.
Die Kantenwinkel sind α, β, γ mit $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ und $\frac{\pi}{2}$,
die Menge $M_{Pr} = \left\{\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.
Unter Berücksichtigung der Höhe h des Prismas und des Zusammenhangs
$h \cdot f(\alpha) + h \cdot f(\beta) + h \cdot f(\gamma) = h \cdot f(\alpha + \beta + \gamma) = 0$

(ℚ-Linearität von f) ergibt sich wiederum für die Dehn-Invariante eines geraden Prismas $\boldsymbol{D_f(Pr) = 0}$.

Wir stellen fest: Würfel und gerades Prisma besitzen die gleiche Dehn-Invariante. Dies verwundert nicht, da der Übergang von der ebenen Situation (Quadrat bzw. Dreieck) in die räumliche (Würfel bzw. gerades Prisma) in beiden Fällen orthogonal verläuft. Die Winkelsumme der Grundfläche (Quadrat bzw. Dreieck) verschwindet jeweils in der Dehn-Invariante.

c) Tetraeder Typ I (TI)

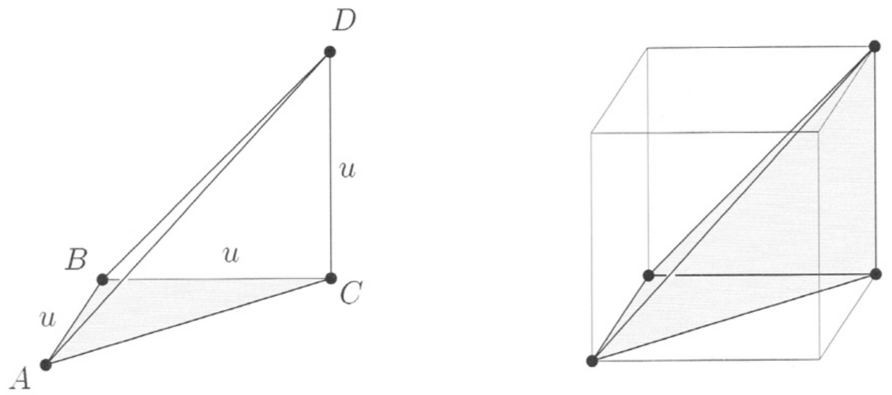


Abbildung 19 Dehn-Invariante zum Tetraeder TI, aus (Aigner, et al., 2000 S. 43)

Dieses Tetraeder ist Teil eines Würfels. Er enthält drei zusammenhängende, linear unabhängige Würfelkanten (AB[51], BC, CD). Sie sind wechselweise orthogonal und gleich lang.

Die Kantenwinkel zu AB, AC, BC, BD, CD sind trivial.

Der Kantenwinkel zu AD berechnet sich unter Berücksichtigung der Normalenvektoren zu ABD[52] und ACD als

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Die Kantenwinkel sind $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$, die Menge $M_{TI} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

[51] AB bezeichnet der Einfachheit halber die Strecke mit den Endpunkten A und B.

[52] ABD bezeichnet der Einfachheit halber die Ebene durch die Punkte A, B, D.

Für jedes f ist damit wiederum aufgrund der $\mathbb{Q}$-Linearität von f die Dehn-Invariante $\boldsymbol{D_f(TI) = 0}$.

Bemerkenswert ist, dass ein Würfel aus sechs (bis auf Symmetrie) kongruenten Tetraedern des Typs TI zusammengesetzt werden kann (vgl. Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845, in 3.2.1).
Eine weitere Betrachtung des Tetraeders TI ergibt, dass alle seine Begrenzungsflächen aus rechtwinkligen Dreiecken bestehen. Zwei Begrenzungsflächen sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlängen 1 und $\sqrt{2}$ („Quadrathälften"), die anderen beiden Begrenzungsflächen sind rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlängen 1, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.
Die chinesische Mathematik kennt für dieses Tetraeder vom Typ I seit dem Altertum einen eigenen Begriff: Es ist ein pieh-nao (Abbildung 31 S. 200), der sechste Teil eines Würfels (Cromwell, 1964).

Die Tetraedereigenschaften ändern sich bei den nächsten Beispielen grundlegend:

d) Tetraeder Typ II (TII)

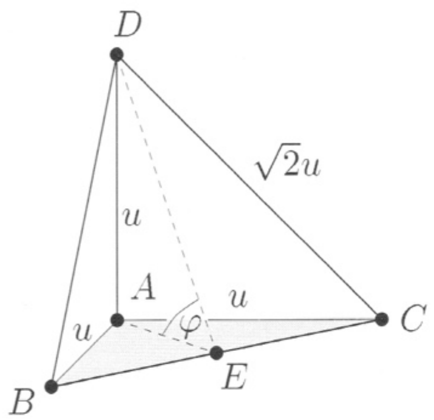


Abbildung 20 Dehn-Invariante zum Tetraeder TII, aus (ebd.)

Dieses Tetraeder ist ebenfalls Teil eines Würfels. Er enthält drei in einem Eckpunkt vereinte, linear unabhängige Würfelkanten (AB, AC, AD). Sie stehen orthogonal aufeinander und sind gleich lang.

Drei Kantenwinkel sind $\frac{\pi}{2}$.

Die anderen drei Kantenwinkel berechnet man mit Hilfe der Trigonometrie:

$$cos\varphi = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Also:

$$\varphi = arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Die Kantenwinkel sind $\frac{\pi}{2}$, φ, die Menge $M_{TII} = \left\{\frac{\pi}{2}, \varphi, \pi\right\}$.

Da $\frac{1}{\pi}arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ irrational ist (Aigner, et al., 2000 S. 33f.), sind φ und $\frac{\pi}{2}$ in $\mathbb{Q}$ linear unabhängig, so dass es eine Funktion f mit

$$f(\pi) = 0\,, \qquad f\left(arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) := 1$$

gibt.

Damit erhält man (die Kantenlänge wird der Einfachheit u=1 gesetzt):

$$\boldsymbol{D_f(TII)} = 3\ \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\ \cdot\ \sqrt{2}\ \cdot f\left(arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{3\sqrt{2}}\,.$$

Die Dehn-Invariante dieses Tetraeders ist erstmals von Null verschieden. Das ist ein wesentlicher Unterschied zum Tetraeder vom Typ I (TI).

Dieses Tetraeder weist neben drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit Seitenlängen 1 und $\sqrt{2}$ als Begrenzungsflächen auch ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{2}$ als Begrenzungsfläche auf.
In der Sichtweise Gerlings sind das Tetraeder vom Typ TI und das Tetraeder vom Typ TII „symmetrisch“ in der Weise, dass sie in der Grundfläche und in einer Kante (und auch in der Höhe) kongruent sind (vgl. Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845, in 3.2.1). Jedoch ist der Fußpunkt der gemeinsamen Kante (beim Tetraeder TI: Kante CD, beim Tetraeder TII: Kante AD) (bei Gerling: Kante AD und Kante AE, ebd.) nicht mehr gleich. An dieser Stelle kam Gerling nicht mehr weiter. Der Schlüssel liegt in der Verschiebung der zur Grundfläche ABC orthogonalen Kante vom Fußpunkt C zum Fußpunkt B (Abbildung 19) und in der Betrachtung der Dehn-Invariante (die Gerling noch nicht kannte), die die Veränderung in der Kantenwinkelsituation bzw. Massensituation abbildet. Das war zugleich die entscheidende Entdeckung Dehns.

In der Sichtweise der Kugelpackungen (3.1.1) tritt zu den quadratischen Aspekten beim Tetraeder TI hier erstmals beim Tetraeder TII in Form des gleichseitigen Dreiecks auch ein hexagonaler Aspekt in Erscheinung.

Verzichtet man auf alle quadratischen Aspekte, geht die Betrachtung über zum regulären Tetraeder.

e) Tetraeder Typ III (TIII)

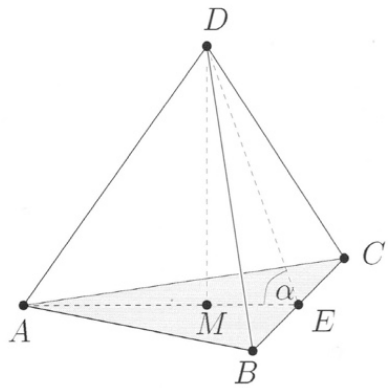


Abbildung 21 Dehn-Invariante zum Tetraeder TIII, aus (Aigner, et al., 2000 S. 42)

Dieses Tetraeder ist kein Teil eines Würfels mehr. Es ist ein reguläres Tetraeder, wie es auch in 3.1, beispielsweise in Abbildung 17 S. 93 oder in 3.1.5, im Kontext der Kugelpackungen schon betrachtet wurde.

Wir wenden uns wieder der Berechnung der Kantenwinkel zu. Aus der Elementargeometrie wissen wir, dass der Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt und damit die Höhe der Grundfläche im Verhältnis 2:1 teilt; unter Anwendung der Trigonometrie erhält man:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}$$

Unter Berücksichtigung der Irrationalität von $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} arccos\frac{1}{3}$ (Aigner, et al., 2000 S. 33f.) sind wiederum α und π in $\mathbb{Q}$ linear unabhängig, so dass es eine Funktion f mit

$$f(\pi) = 0\,, \qquad f\left(arccos\frac{1}{3}\right) := 1$$

gibt.

Damit erhält man (die Kantenlänge wird der Einfachheit wieder 1 gesetzt):

$$\boldsymbol{D_f(TIII) = 6\ \cdot f(\alpha) = 6}\ .$$

Die Dehn-Invariante dieses Tetraeders TIII ist also auch hier von Null verschieden. Wir beobachten, dass gegenüber dem Tetraeder TII die Abweichung vom Würfel bzw. vom Tetraeder TI abermals stärker ausgeprägt ist und der Wert der Dehn-Invariante größer ist. Alle sechs Kantenwinkel liefern einen Beitrag zum Nichtverschwinden der Dehn-Invariante.

In der Sichtweise der Kugelpackungen (3.1.1) verkörpert das Tetraeder TIII den rein hexagonalen Aspekt.

f) Tetraeder Typ IV (TIV)

Als letztes Beispiel sei hier ein Tetraeder erwähnt, das für die Betrachtung des dritten Hilbertschen Problems zunächst keine Rolle spielt, sondern erst mit Blick auf die Relevanz des dritten Hilbertschen Problems für Kugelpackungen (3.2.2.8, Abbildung 29 S. 187) in Erscheinung treten wird.

Dieses Tetraeder ist wie das Tetraeder TIII auch kein Teil eines Würfels mehr.
Es entsteht, wenn man ein Oktaeder in vier kongruente Tetraeder zerlegt.

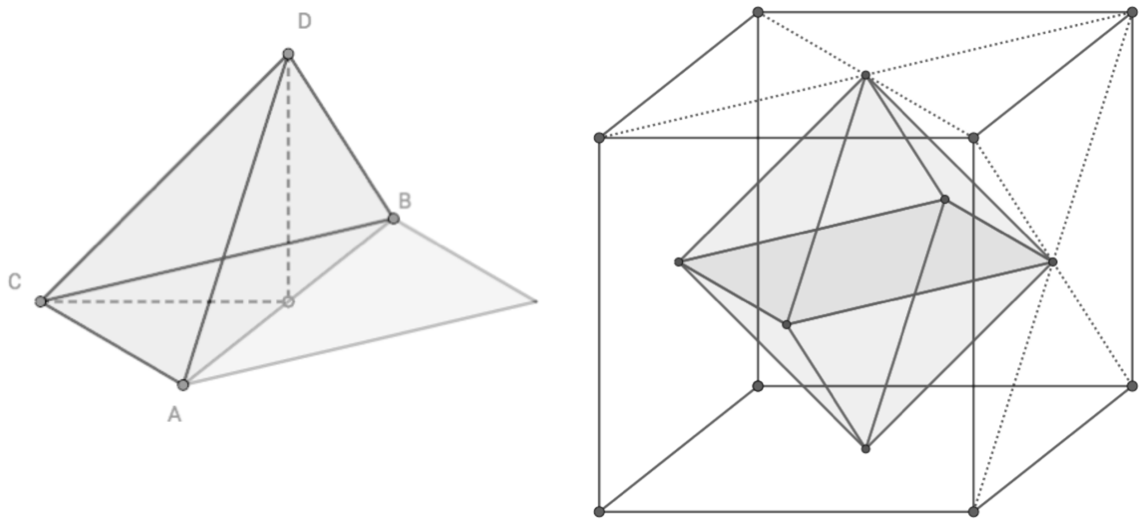


Abbildung 22 Tetraeder TIV mit gleichschenklig-rechtwinkliger Grundfläche

Die Grundfläche und eine Seitenfläche sind ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, die anderen beiden Seitenflächen gleichseitige Dreiecke.
Natürlich kann man dieses Tetraeder auch mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche betrachten.

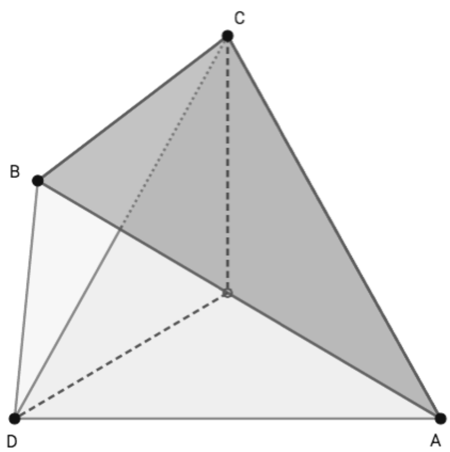


Abbildung 23 Tetraeder TIV mit gleichseitiger Grundfläche

Man erkennt dann sehr schön, dass der Oktaederwinkel an der Kante CD einen „Überhang“ bewirkt. Der Fußpunkt des Punktes B liegt außerhalb der Grundfläche ACD.
Die Dehn-Invariante dieses Tetraeders weist einen engen Bezug zur Dehn-Invariante des Tetraeders TIII auf; sie wird in 3.2.2.8 untersucht.

Das Oktaeder, das aus diesen vier Tetraedern TIV besteht, berührt mit seinen sechs Ecken die sechs Seitenmitten eines umschriebenen Würfels. Es ist dual zum Würfel.
In der Sichtweise der Kugelpackungen (3.1.1) verkörpert das Tetraeder TIV sowohl den quadratischen als auch den hexagonalen Aspekt.

Wir erkennen in der Zusammenschau der betrachteten Beispiele, dass es, anders als für ebene Polygone, für Polyeder keine Kantenwinkelsumme bzw. Massensumme als invariante Erhaltungsgröße gibt. Die Dehn-Invariante ist in diesem Sinne gerade nicht invariant. Vielmehr ist die Kantenwinkelsumme der drei betrachteten Tetraeder unterschiedlich. Die Kantenwinkelsumme des Tetraeders TI ist ein Vielfaches von π, was durchaus bemerkenswert ist. Die Kantenwinkelsumme des Tetraeders TII enthält Kantenwinkel, die irrationale Vielfache von π sind[53] und in der Summe ihre Irrationalität behalten. Am wenigsten verwundert dies beim regulären Tetraeder TIII, dessen sechs kongruente Kantenwinkel jeweils irrationale Vielfache von π sind; hier ist die Ursache für die zu π irrationale Kantenwinkelsumme am leichtesten sichtbar.

Ergänzend sei angemerkt, dass für ein Polyeder die Summe der Produkte aus Kantenwinkel und Kantenlänge $\sum_{k \in P} \alpha(k) \cdot l(k)$ in der Sprache der Differentialgeometrie die mittlere Krümmung des Polyeders beschreibt und einen wesentlichen Teil der Formel von Steiner darstellt. Für die tetraedrische Konfiguration wird sie in (Leppmeier, 1997 S. 112f.) berechnet, sie ist in 3.1.5 illustriert.
Die Dehn-Invariante ergänzt die mittlere Krümmung um eine Gewichtung jedes einzelnen Kantenwinkels. Darin besteht gerade der mathematische Wert des Begriffs der Dehn-Invariante.

[53] Dies allein kann auch bereits beim geraden Prisma der Fall sein.

3.2.2.3 Das Verhalten der Dehn-Invariante bei Polyeder-Zerlegungen

Wir betrachten eine beliebige Zerlegung eines Polyeders P in disjunkte Teilpolyeder. Sie ist in Abbildung 24 symbolisch für einen Würfel dargestellt.

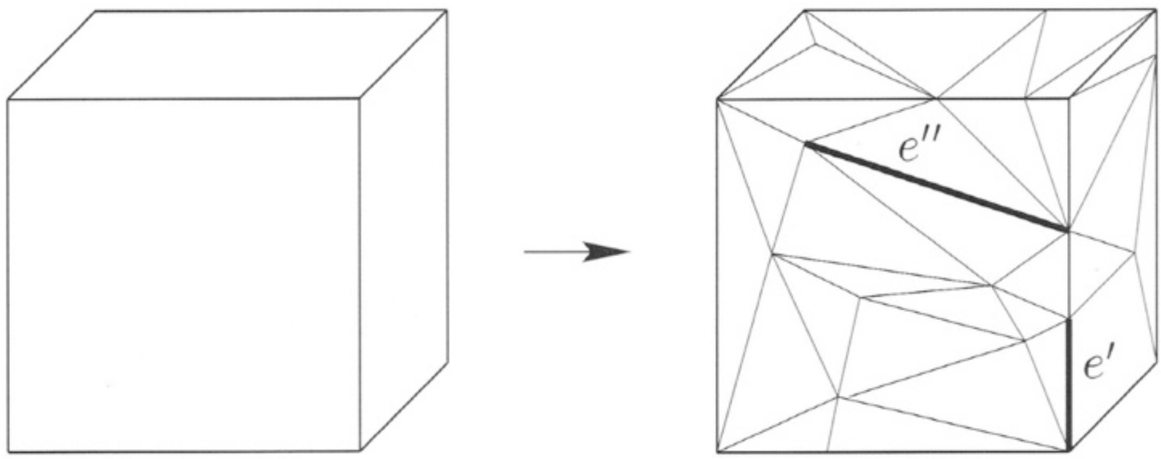


Abbildung 24 Dehn-Invariante bei Zerlegung in Teilpolyeder, aus (Aigner, et al., 2000 S. 42)

Die Zerlegung in Teilpolyeder enthält innere Kanten vom Typ e'', die im Inneren von P (1. Fall) oder auf einer Begrenzungsfläche von P (2. Fall) liegen können, und Polyederkantenabschnitte vom Typ e', die auf einer Kante von P liegen können.

Wir betrachten die Dehn-Invarianten aller Teilpolyeder (bzgl. einer gemeinsamen Funktion f) und gruppieren die Summen um. Eine Betrachtung aller Massen zur Kante e'' ergibt: Im 1. Fall, dass deren Summe gerade einen Vollwinkel ergibt. Im 2. Fall, dass deren Summe gerade einen Halbwinkel ergibt. Mit anderen Worten: Ausgehend von einem beliebigen Kantenwinkel $\boldsymbol{\alpha_i}(\boldsymbol{e''})$ gilt für die Summe aller Kantenwinkel $\sum_i \boldsymbol{\alpha_i}(\boldsymbol{e''}) = 2\pi$ (1. Fall) oder $\sum_i \boldsymbol{\alpha_i}(\boldsymbol{e''}) = \pi$ (2. Fall). Dies ist eine zentrale Eigenschaft.

Eine entsprechende Betrachtung aller Massen zum Kantenabschnitt e' ergibt, dass die Summe der Massen der Teilpolyeder, die die Kante e' enthalten, wegen der Additivität von f die Masse des Polyeders auf dem Kantenabschnitt e' ergibt. Eine Addition aller Massen aller Kantenabschnitte e' ergibt schließlich die Masse der Gesamtkante des Polyeders. Dies ist eine weitere zentrale Eigenschaft.

Wir halten dies fest im

Lemma 1 (Additivität der Dehn-Invarianten der Teilpolyeder):
Gegeben sei ein Polyeder P und eine Zerlegung in endlich viele Teilpolyeder $P_1, P_2, \dots, P_n$. Gegeben seien ferner M_P und ein M, das auch alle Kantenwinkel aller Teilpolyeder enthalte.
Dann gilt für jede $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$:

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \dots + D_f(P_n).$$

Hier sehen wir eine wesentliche (vgl. Brief Nr. 341 von Gauß an Gerling, 8.4.1844, und Brief Nr. 347 von Gauß an Gerling, 30.7.1844, in 3.2.1) Invarianz-Eigenschaft der Dehn-Invariante. Sie ist unabhängig von der Zerlegung in Teilpolyeder.
Eine vergleichbare Invarianz-Eigenschaft gilt auch für das Volumen eines Polyeders.

3.2.2.4 Weitere Eigenschaften der Dehn-Invariante

Wir wollen hier die in der Definition der Dehn-Invariante enthaltenen Mengen M und $V(M)$ und die Funktion f noch weiter betrachten.

M ist eine endliche Menge reeller Zahlen mit geometrischer Bedeutung. Beispiele haben wir in 3.2.2.2 kennengelernt.
$V(M)$ ist die Menge der rationalen Linearkombinationen von M, eine Art erweiterte, rationale Vielfachenmenge von M. Präzise formuliert:

$$V(M) = \left\{ \sum_i q_i \alpha_i : \ \alpha_i \in M, q_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

$V(M)$ ist ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Man überzeugt sich leicht, dass die Vektorraumaxiome erfüllt sind.
Da $V(M)$ von M erzeugt wird, ist eine Basis in M enthalten. Somit gilt für die Dimension von $V(M)$:

$$dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq |M|$$

In den Beispielen, die in 3.2.2.2 betrachtet wurden, führten die eindimensionalen Kantenwinkelmengen M_P zum Polyeder P im Falle eines Würfels, eines geraden

Prismas und eines Tetraeders Typ TI jeweils zu einer verschwindenden Dehn-Invariante, die zweidimensionalen Kantenwinkelmengen M_P zum Polyeder P im Falle eines Tetraeders Typ TII und eines regulären Tetraeders Typ TIII zu nichtverschwindenden Dehn-Invarianten. Dreidimensionale (oder noch höherdimensionale) Mengen M sind im Polyeder-Kontext durchaus vorstellbar, die dazugehörigen Berechnungen nehmen jedoch sehr schnell eine sehr hohe Komplexität an.

Die $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$ bewertet die Kantenwinkel.
Dem Winkel π wird der Wert 0 zugeordnet.
Rationale Vielfache von π werden genauso bewertet.
Einem irrationalen Vielfachen von π kann ein anderer Wert zugeordnet werden. Dies muss auch geschehen, wenn die Dehn-Invariante Sinn ergeben soll. Hier liegt in der Sprechweise des dialogischen Lernens (vgl. 2.2.4.3) der eigentliche „Witz" der Dehn-Invariante (3.2.2.6, 3.2.2.7, 3.2.2.8).
Eine Funktion $f \equiv 1$ ergäbe „nur" die mittlere Krümmung des zugrundeliegenden Polyeders. Auch dies zeigt den algebraischen Wert des Dehn-Funktionals.

Ein weiterer Vorteil dieser $\mathbb{Q}$-linearen Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$, besteht darin, dass die wesentliche Abbildungseigenschaft und Bewertungseigenschaft nicht verloren geht, wenn man $V(M)$ erweitert. Dies ist, wie wir in 3.2.2.3 gesehen haben, grundsätzlich nötig, wenn man das Polyeder P zerlegt und sodann die Zerlegung mit diesem Ausgangspolyeder P vergleicht. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft der Dehn-Invariante und eine wesentliche Idee (3.2, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.5, 3.2.2.6, 3.2.2.7, 3.2.2.8). Wir halten sie fest als

Lemma 2 (Erweiterbarkeit von f auf Oberräume):
Für jede reelle Obermenge M' zu M ist $V(M')$ ein Obervektorraum zu $V(M)$.
Ebenso kann eine $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$ zu einer $\mathbb{Q}$-linearen Funktion $f': V(M') \to \mathbb{Q}$ erweitert werden, so dass $f'(m) = f(m)$ für alle $m \in M$ gilt.
Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Basiserweiterungssatz der Linearen Algebra.

Diese Eigenschaften der Dehn-Invariante sind entscheidend für den Beweis des Satzes von Dehn-Hadwiger und die Lösung des dritten Hilbertschen Problems (3.2.2.6).

3.2.2.5 Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit

Im Vergleich zur Ergänzungsgleichheit ist die Zerlegungsgleichheit begrifflich eingängiger und vertrauter. Sie bildet das Fundament der ebenen Flächenmessung und kann problemlos auf Polyeder übertragen werden.

Definition. Zwei Polyeder P und Q heißen **zerlegungsgleich**, wenn es je eine Zerlegung für P und für Q gibt mit $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$, so dass P_i kongruent ist zu Q_i für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$.

Eine Analogiebetrachtung in der Ebene zeigt, dass die Zerlegungsgleichheit für inhaltsgleiche Flächen grundsätzlich nicht trivial ist (3.2.2.1, Bolyai 1832 und Gerwin 1833).
Wir beschränken uns nachfolgend nur auf Aspekte, die in unmittelbarer Analogie zu den beiden grundsätzlichen Fragestellungen nach Kirchhammer und Aigner et.al. stehen (3.2.2.1).

Beispielsweise lässt sich in Analogie zur Fragestellung nach Aigner et.al. (Zerlegungsgleichheit zweier Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe) für ein (spitzwinkliges) Dreieck und ein Dreieck mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe nicht ad hoc eine Zerlegung in inhaltsgleiche Teilflächen angeben. Jedoch erkennt man zügig, dass ein Parallelogramm und ein Rechteck mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe zerlegungsgleich sind[54].

Die Einbettung eines spitzwinkligen Dreiecks in ein Parallelogramm (Abbildung 25) und die Teilung des Parallelogramms durch den Schwerpunkt lotrecht zur Grundlinie in zwei kongruente rechtwinklige Trapeze lösen dann die obige Frage

[54] Mit diesem Argument beweist man oftmals in der Anfangsgeometrie die Flächenformel für das Parallelogramm.

der Zerlegungsgleichheit eines spitzwinkligen und eines rechtwinkligen Dreiecks. Da die Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation darstellt, ist damit auch die Frage nach der Zerlegungsgleichheit zweier (spitzwinkliger) Dreiecke mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe beantwortet.

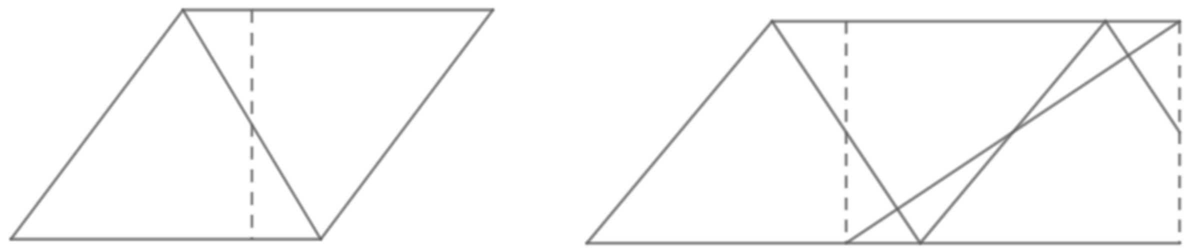


Abbildung 25 Zerlegungsgleichheit von Dreiecken

Noch anspruchsvoller ist in Analogie zur Fragestellung nach Kirchhammer (Zerlegungsgleichheit eines Würfels und eines regulären Tetraeders) die Zerlegungsgleichheit von Quadrat und gleichseitigem Dreieck. Hier ist von Bedeutung, dass eine Zerlegung in endliche viele Teildreiecke möglich ist.

Eine Betrachtung von Quadrat und Rechteck mit gleichem Flächeninhalt ergibt, dass beide zerlegungsgleich sind. Eine konstruktive Lösung findet sich beispielsweise über den Kathetensatz aus der Satzgruppe des Pythagoras.

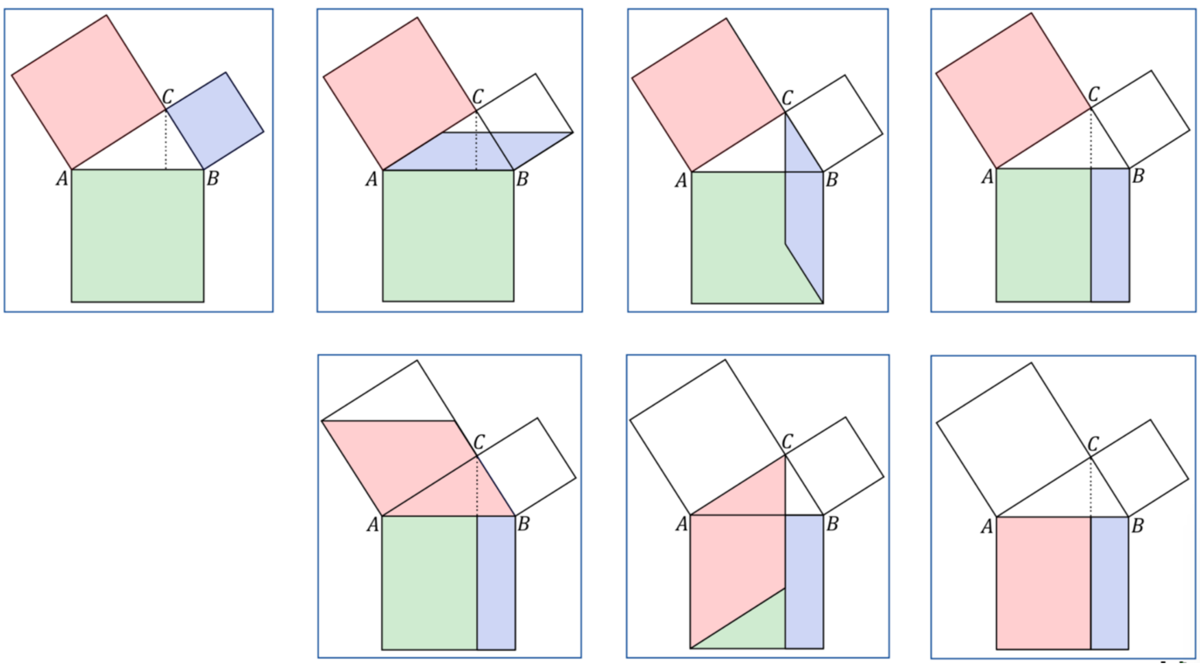


Abbildung 26 Zerlegungsgleichheit von Quadrat und Rechteck, aus (Roth, 2018)

Das Quadrat über AC ist zum dazugehörigen Rechtecksteil des Quadrates über AB zerlegungsgleich. Gleiches gilt für das Quadrat über BC, was in der gezeichneten Situation aber noch eine kleine Zusatzüberlegung in Richtung Ergänzungsgleichheit erfordert.

Eine direkte Folge davon ist, dass ein Quadrat und ein dazu flächengleiches gleichseitiges Dreieck zerlegungsgleich sind.

Die im Vergleich mit der räumlichen Situation wesentlichen Beobachtungen halten wir fest.

Notiz.

1) Ein Quadrat und ein dazu flächengleiches gleichseitiges Dreieck sind zerlegungsgleich.
2) Zwei Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt sind zerlegungsgleich.

Beweis. Der erste Teil wurde bereits gezeigt. Der zweite Teil ergibt sich folgendermaßen: Ein Dreieck ist zu einem Rechteck mit gleicher Grundlinie und halber Höhe zerlegungsgleich und damit auch zu einem Quadrat mit gleichem Flächeninhalt. Da die Zerlegungsgleichheit reflexiv und transitiv ist, kann man die Zerlegungsgleichheit dieses Quadrates zu jedem flächengleichen Dreieck folgern. Daraus folgt der zweite Teil der Notiz. ■

Es ist bemerkenswert, dass Teil 2) der Notiz eine sehr allgemeine Aussage macht: Es sind auch Dreiecke mit unterschiedlicher Grundlinie und unterschiedlicher Höhe zerlegungsgleich, wenn sie nur flächengleich sind. Im Vergleich mit der Formulierung des Hilbertschen Problem zeigt sich hier schön die Zuspitzung der allgemeinen Fragestellung durch Hilbert auf einen wesentlichen Spezialfall, der durch gleiche Grundfläche und gleiche Höhe charakterisiert ist (vgl. Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845, in 3.2.1 und Tetraeder TI und TII in 3.2.2.2) (2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 3.2.3.2, 3.2.3.3).

Wir wenden uns nun wieder der räumlichen Situation und den Leitfragen (3.2.2.1) zu:

Sind ein Würfel und ein volumengleiches reguläres Tetraeder zerlegungsgleich (Formulierung nach Kirchhammer)?
Gibt es zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe, die nicht zerlegungsgleich sind (Formulierung nach Aigner et.al.)?

Anknüpfende Fragestellungen sind:
Sind ein Würfel und ein volumengleiches reguläres Tetraeder ergänzungsgleich?
Sind die Tetraeder TI und TII ergänzungsgleich, beispielsweise zu einem Würfel?

Es ist außerdem intuitiv zu erwarten und nicht schwer zu begründen (3.2.2.6), dass eine Beantwortung dieser Fragen zur Ergänzungsgleichheit Rückschlüsse auf die Ausgangsfragen zur Zerlegungsgleichheit zulassen.
Dafür hilfreich[55], aber nicht zwingend erforderlich[56] ist die Begrifflichkeit der Ergänzungsgleichheit.
Sie wirkt im Vergleich zur Zerlegungsgleichheit etwas artifizieller.

Definition. Zwei Polyeder P und Q heißen **ergänzungsgleich**, wenn es Polyeder $P_1, P_2, \ldots, P_m$ und Polyeder $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ gibt, so dass das Innere der Polyeder P_i wechselweise disjunkt ist und das Innere der Polyeder P_i disjunkt zu P ist und das Gleiche sinngemäß auch für die Polyeder Q_i gilt, weiterhin, dass für alle i das Polyeder P_i kongruent zum Polyeder Q_i ist und dass gilt: $P \cup P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_m$ und $Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$ sind zerlegungsgleich.

Es ist klar, dass Folgendes gilt:
Lemma 3. Zwei zerlegungsgleiche Polyeder sind ergänzungsgleich.

Die Umkehrung ist dagegen nicht klar. Eine Klärung ist jedoch für den weiteren Gedankengang nicht nötig.

---

[55] Die Darstellung folgt hier im Wesentlichen dem Grundkonzept von (Aigner, et al., 2000).
[56] Wie die Ausführungen in (Aigner, et al., 2015) und (Wittmann, 2012) nahelegen, und wie es am Ende des Abschnitts 3.2.2.6 ausgeführt wird, ist die Betrachtung der Ergänzungsgleichheit für die Beantwortung des dritten Hilbertschen Problems nicht erforderlich.

Zur Illustration der Ergänzungsgleichheit betrachten wir wieder das obige Beispiel. Ein rechtwinkliges Dreieck ist zu einem spitzwinkligen Dreieck mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe ergänzungsgleich.

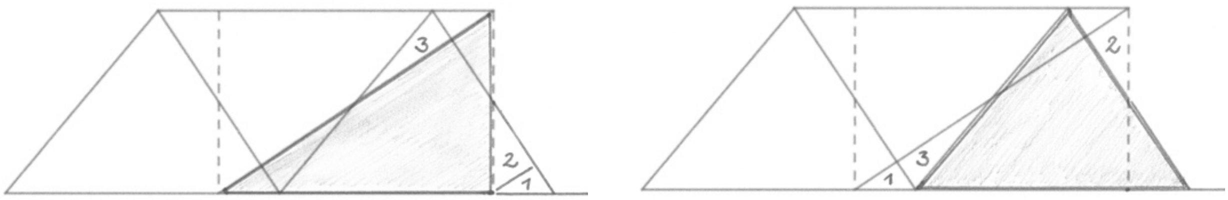


Abbildung 27 Ergänzungsgleichheit von Dreiecken (vgl. Abbildung 25)

Einfachere Beispiele ergeben sich, wenn man die Ergänzungsgleichheit von Parallelogramm und Rechteck (mit jeweils gleicher Grundlinie) oder von Dreieck und Rechteck (mit jeweils gleicher Grundlinie) betrachtet.

Im Raum ist die Situation komplexer. Das Tetraeder vom Typ TI kann um fünf im Wesentlichen (d. h. bis auf Spiegelungen) kongruente Tetraeder vom gleichen Typ zu einem Würfel ergänzt werden. Die Dehn-Invarianten sind jeweils Null. Nach Lemma 3 ergibt die Berechnung der Dehn-Invarianten des Würfels aus den sechs Dehn-Invarianten des Tetraeders TI auch Null. Dies ist in sich konsistent. Fragwürdig ist die Ergänzung des Tetraeders vom Typ TII um weitere Polyeder zu einem Würfel[57]. Die korrekte Antwort darauf gibt der folgende Satz von Dehn-Hadwiger.

3.2.2.6 Der Satz von Dehn-Hadwiger

Zerlegungsgleiche Polyeder sind nach Lemma 3 ergänzungsgleich. Nicht ergänzungsgleiche Polyeder können nicht zerlegungsgleich sein. Auf dieser Basis eröffnet der folgende Satz die Möglichkeit, zwei Tetraeder anzugeben, die nicht ergänzungsgleich und somit nicht zerlegungsgleich sind.

[57] Man könnte hier versucht sein, sich nur nichtnegative Dehn-Invarianten vorzustellen, und damit implizit zu argumentieren. Dieses Argument ist jedoch falsch, wie man an den in 3.2.2.7 und 3.2.2.8 ausgeführten Beispielen erkennen kann.

Satz (Dehn-Hadwiger). Es seien P und Q zwei Polyeder mit Kantenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$. Die reelle Menge M enthalte alle genannten Kantenwinkel und π.
Wenn $f: V(M) \to \mathbb{Q}$ eine beliebige $\mathbb{Q}-$lineare Funktion mit $f(\pi) = 0$ ist, so dass

$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

dann sind P und Q nicht ergänzungsgleich.

Beweis. Wir nehmen an, dass P und Q ergänzungsgleich sind.
Dann gibt es nach Definition Polyeder $P_1, P_2, \dots, P_m$ und $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$, so dass das Innere der Polyeder P_i wechselweise disjunkt ist und das Innere der Polyeder P_i disjunkt zu P ist und das Gleiche sinngemäß auch für die Polyeder Q_i gilt, weiter dass für alle i das Polyeder P_i kongruent zum Polyeder Q_i ist und dass gilt: $P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ und $Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ sind zerlegungsgleich.
Nach Lemma 1 gilt wegen der Zerlegungsgleichheit für jede $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$:

$$D_f(P) + D_f(P_1) + D_f(P_2) + \dots + D_f(P_m) = D_f(Q) + D_f(Q_1) + D_f(Q_2) + \dots + D_f(Q_m).$$

Wegen der Kongruenz von P_i zu Q_i für alle i gilt $D_f(P_i) = D_f(Q_i)$, und somit folgt $D_f(P) = D_f(Q)$.
Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung $D_f(P) \neq D_f(Q)$.■

Dies bedeutet:
Die Tetraeder vom Typ TI und vom Typ TII haben unterschiedliche Dehn-Invarianten. Somit sind sie nach Dehn-Hadwiger nicht ergänzungsgleich und nach Lemma 3 nicht zerlegungsgleich.
Da die Tetraeder jedoch als Grundfläche kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke und kongruente Höhen haben, ist dies zugleich die *Antwort auf Hilberts drittes Problem* in der Formulierung nach Aigner et.al.
Gauß hat recht behalten, wenn er sagte: „Um aber aus der Höhe wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, daß die Gleichheit der Volumina

körperlicher, bloß symmetrischer, aber nicht kongruenter Gebilde, sich nur die Exhaustionsmethode[58] und nicht eben so elementar demonstrieren läßt …“ (3.2). Gerling hatte auch recht, seine Forschungen einzustellen, denn das, wonach er suchte, konnte es nicht geben: „Die Sache scheint aber sehr viel tiefer zu liegen, als ich früher vermutete und mag vielleicht dem Euclid schon Kopfbrechen gemacht haben. – Doch aber sagt mir ein dunkles Gefühl, daß hier noch irgendein Lehrsatz verborgen liegen muß, der, wenn er einmal gefunden ist, durch seine Einfachheit vielleicht überrascht…“ (ebd.).
Der verborgene Lehrsatz lautet in seiner Einfachheit: „Zwei volumengleiche, aber nicht dehninvariantengleiche Polyeder sind nicht zerlegungsgleich.“

Dies bedeutet ferner:
Ein Würfel und ein volumengleiches regelmäßiges Tetraeder haben ebenfalls unterschiedliche Dehn-Invarianten. Somit sind sie nach dem Satz von Dehn-Hadwiger nicht ergänzungsgleich und daher ebenfalls nicht zerlegungsgleich. Dies ist die *Antwort auf die Variante des dritten Hilbertschen Problems* nach Kirchgraber.

Damit sind beide in 3.2.2.1 formulierten Fragen beantwortet. Im Vergleich zur ebenen Situation liegt also eine handfeste Sensation vor.

Der Satz von Dehn-Hadwiger ohne Verwendung der Ergänzungsgleichheit

Am Ende dieses Abschnitts sei noch darauf hingewiesen, dass mit Blick auf die alleinige Zerlegungsgleichheit ein schnellerer Weg als der bisher dargestellte möglich ist:
Satz. Es seien P und Q zwei Polyeder mit Kantenwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$. Die reelle Menge M enthalte alle genannten Kantenwinkel und π.
Wenn $f: V(M) \to \mathbb{Q}$ eine beliebige $\mathbb{Q}-$lineare Funktion mit $f(\pi) = 0$ ist, so dass

$$D_f(P) \neq D_f(Q)$$

[58] Prinzip von Cavalieri, Archimedisches Prinzip

dann sind P und Q nicht zerlegungsgleich.

Beweis. Wir nehmen an, dass P und Q zerlegungsgleich sind.
Dann gibt es nach Definition Polyeder $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, so dass

$P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_n$ und

P_i kongruent sind zu Q_i für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$.

Die Menge M kann so zu M' erweitert werden, dass sie alle Kantenwinkel aller Teilpolyeder P_i und Q_i enthält. Ebenso kann die $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M) \to \mathbb{Q}$ zu einer $\mathbb{Q}$-linearen Funktion $f': V(M') \to \mathbb{Q}$ erweitert werden, so dass $f'(m) = f(m)$ für alle $m \in M$ gilt (Lemma 2).
Der Einfachheit halber sei f' weiter als f notiert.
Wegen der paarweisen Kongruenz stimmen die Dehn-Invarianten der Teilpolyeder paarweise überein und es gilt für jede $\mathbb{Q}$-lineare Funktion $f: V(M') \to \mathbb{Q}$:

$D_f(P_i) = D_f(Q_i)$ für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$, also

$D_f(P_1) + D_f(P_2) + \ldots + D_f(P_n) = D_f(Q_1) + D_f(Q_2) + \ldots + D_f(Q_n)$.

Nach Lemma 1 folgt

$$D_f(P) = D_f(Q)$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

3.2.2.7 Die Pyramidenformel im schulischen Geometrieunterricht

Wir knüpfen an den bereits formulierten schulischen Kontext an. Die übliche Vorgehensweise zur Herleitung der Volumenformel für eine dreiseitige Pyramide ist in Abbildung 28 symbolisch dargestellt.

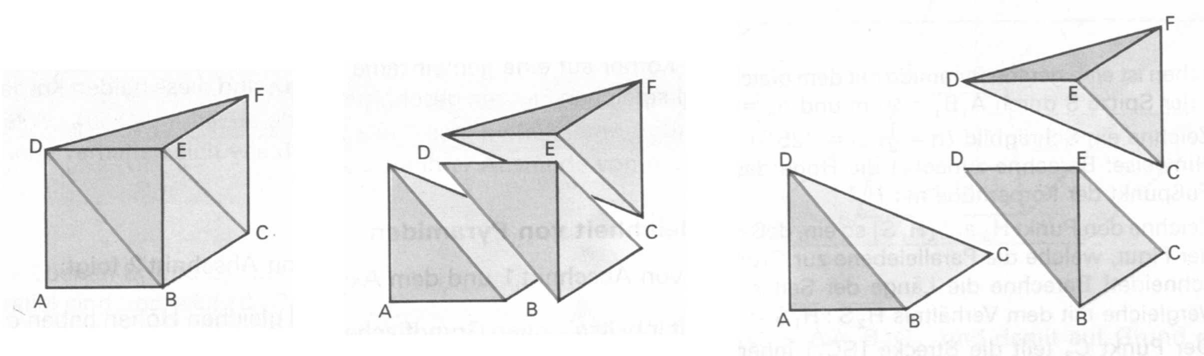


Abbildung 28 Zerlegung eines Prismas in eine Pyramide, aus (Schmitt, et al., 1991 S. 62)

Wir nehmen der Einfachheit[59] halber an, dass das Prisma als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck und als Höhe dessen Seitenlänge besitzt. Dann sind zwei Teiltetraeder bis auf Spiegelungseffekte kongruent. Das dritte Teiltetraeder BCDE kann hingegen nicht kongruent sein, da seine Oberfläche kein gleichseitiges Dreieck aufweist. Diese Beobachtung führt in der schulischen Raumgeometrie zum Prinzip von Cavalieri, wie es beispielsweise in (Roth, 2018) dargestellt ist, um die Volumengleichheit zu den beiden anderen Teiltetraedern zu begründen.

Bemerkenswert ist in der Betrachtung der Abbildung 28 folgende Beobachtung: Die Tetraeder ABCD und BCDE haben die kongruente Berührfläche BCD, von B aus verlaufen die kongruenten Kanten BA und BE. Das gleiche gilt für die Tetraeder BCDE und CDEF; sie haben die kongruente Berührfläche CDE und die kongruenten Kanten EB und EF. Dennoch sind die Tetraeder zwar wechselweise volumengleich, jedoch nicht zerlegungsgleich. Genau an diesem Punkt scheitert Gerling im Jahr 1845, wenn er schreibt: „Alle diese Versuche sind aber leider vergeblich gewesen; und ist mir nur das dabei merkwürdig erschienen, daß alle, auch die verschiedenst angefangenen immer endlich darauf zurückkommen, zu beweisen: daß 2 dreiseitige Pyramiden gleich groß sind, wenn in ihnen ein Dreieck ABC kongruent und eine Kante in jeder (AD und AE) durch einen Punkt A desselben beiderseits gleich“ (3.2.1). Denn die gewünschte elementare Zerlegungsgleichheit für solche in der Sprache Gerlings und Gauß´ „symmetrischen“ Pyramiden konnte nicht gezeigt werden, da sie nicht existiert.

Wir wollen nun beweisen, dass das dritte Teiltetraeder BCDE nicht zerlegungsgleich zu den beiden anderen ist.

Dazu betrachten wir die Dehn-Invariante von einem der beiden Teiltetraeder mit gleichseitiger Grundfläche, z. B. vom Tetraeder ABCD.
O.B.d.A. nehmen wir an $l(AB) = 1$ und $l(AD) = 1$.

[59] Da eine Streckung längs der Höhe des Prismas die Kongruenzen der drei Teiltetraeder nicht grundlegend verändert, gilt die Annahme ohne Beschränkung der Allgemeinheit.

Die Kantenwinkel zu AB und AC sind $\frac{\pi}{2}$, der Kantenwinkel zu AD ist $\frac{\pi}{3}$. Die dazugehörigen Massen verschwinden also.
Die Kantenwinkel zu BD und CD sind aus Symmetriegründen gleich.

Die Längen betragen $l(BD) = l(CD) = \sqrt{2}$.

Unter Anwendung der analytischen Geometrie (s. „Elementare Berechnung der Dehn-Invarianten" auf S. 182) erhält man:

$$\alpha(BD) = \alpha(CD) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$$

Dieser Winkel ist nach (Aigner, et al., 2000 S. 33) irrational zu π.

Den Kantenwinkel zu BC kann man ebenfalls mit Hilfe der analytischen Geometrie berechnen:

$$\alpha(BC) = arcccos\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$$

Da die $\mathbb{Q}$-lineare Unabhängigkeit der beiden Winkel und die Irrationalität von $\alpha(BC)$ zu π nicht automatisch klar ist, unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: Beide Winkel sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig und $\alpha(BC)$ ist irrational zu π.

   Dann kann f so gewählt werden, dass $f\big(\alpha(BD)\big) = 0$ und $f\big(\alpha(BC)\big) = 1$. Es ist dann:

   $$D_f(ABCD) = 1$$

2. Fall: Beide Winkel sind $\mathbb{Q}$-linear unabhängig und $\alpha(BC)$ ist rational zu π.

   Dann kann f so gewählt werden, dass $f\big(\alpha(BD)\big) = 1$, und es ist $f\big(\alpha(BC)\big) = 0$. Es ist dann:

   $$D_f(ABCD) = 2\sqrt{2}$$

3. Fall: Beide Winkel sind $\mathbb{Q}$-linear abhängig, also $\alpha(BC)$ irrational zu π.

   Dann kann f so gewählt werden, dass $f\big(\alpha(BD)\big) = 1$, und es ist $f\big(\alpha(BC)\big) = q$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Es ist dann:

   $$D_f(ABCD) = 2\sqrt{2} + q$$

   Wegen der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ist dann diese Dehn-Invariante auch nicht verschwindend.

In jedem Fall gilt:

$$D_f(ABCD) \neq 0$$

Aus Symmetriegründen hat der andere, dazu kongruente Teiltetraeder CDEF die gleichen Massen und damit die gleiche, nichtverschwindende Dehn-Invariante.

$$D_f(CDEF) = D_f(ABCD) \neq 0$$

Dies würde auch für ein drittes, ebenfalls kongruentes Tetraeder BCDE gelten. Hier haben wir den Widerspruch.

Nach der Additivität der Dehn-Invariante kann es kein drittes, ebenfalls kongruentes Tetraeder BCDE geben, das in der anvisierten Zerlegung zum Ausgangsprisma mit verschwindender Dehn-Invariante führt.

Dies halten wir fest als

Lemma. Gegeben sei ein Polyeder P mit Dehn-Invariante $D_f(P) = 0$ für alle f sowie eine Zerlegung $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ in wechselseitig untereinander kongruente Teilpolyeder P_i.

Dann gilt für die Dehn-Invariante eines jeden Teilpolyeders $D_f(P_i) = 0$.

Beweis. Angenommen, die Dehn-Invariante eines Teilpolyeders verschwindet nicht. Wegen der Kongruenz haben dann alle anderen Teilpolyeder die gleiche, nichtverschwindende Dehn-Invariante. Und wegen der Additivität der Dehn-Invariante (Lemma 1 in 3.2.2.3) ist dann auch die Dehn-Invariante $D_f(P)$ des Ausgangspolyeders nichtverschwindend, im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Als Folge dieses Lemmas haben wir den

Satz. Es gibt keine Zerlegung eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche in drei zueinander kongruente Pyramiden.

Beweis. Jede Zerlegung in drei Pyramiden bedeutet, dass die Eckpunkte der zugehörigen Pyramiden durch Eckpunkte des Prismas gebildet werden. Der Rest folgt aus dem Lemma und der obigen Hinführung zum Lemma. ■

Damit ist die *schulische Version des dritten Hilbertschen Problems* mit Hilfe der Dehn-Invariante und ihrer Eigenschaften beantwortet.

Zum Vergleich erinnern wir uns, dass es eine Zerlegung eines Prismas mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck („halber Würfel“) als Grundfläche in drei kongruente Pyramiden der Gestalt eines Tetraeders TI gibt (3.2.2.2). Alle beteiligten Dehn-Invarianten verschwinden in dieser Situation.

Elementare Berechnung der Dehn-Invarianten

Die nachfolgenden Rechnungen sind für das weitere Verständnis nicht unbedingt nötig. Sie geben jedoch einen ersten exemplarischen Einblick in das Wechselspiel der Dehn-Invarianten von Zerlegungstetraedern eines Prismas. Damit führen sie die beispielhaften Betrachtungen in 3.2.2.2 fort und weisen den Weg für weitere Untersuchungen in 3.2.2.8.
Sie zeigen die Genese der Lösung der elementarmathematischen Fragestellung des dritten Hilbertschen Problems mit dem Instrumentarium der Dehn-Invariante und sind damit *Ausdruck einer Sprache des Verstehens*, während die obige Beweisführung ein *Ausdruck der Sprache des Verstandenen* ist (2.2.4.2, 2.2.4.3). Der Rechengang ist in sich konsistent ausgeführt; daher sind Doppelungen zum ausgeführten Beweis nicht zu vermeiden.
In der Rechnung selbst offenbart sich sehr schön die Beweisbedürftigkeit für das Nichtverschwinden der Dehn-Invariante des Zerlegungstetraeders ABCD. Sie ist auf arithmetische Weise allein nicht zu erreichen.
Schließlich zeigen die Rechnungen in der Zusammenschau mit dem ausformulierten Beweis, welche argumentative Kraft in der abstrakten Verwendung des Begriffs und des Kalküls der Dehn-Invariante steckt.

I. Wir beginnen die Rechnung für das *Tetraeder ABCD (*Abbildung 28*)*.
Die Kantenwinkel zu AB und AC sind $\alpha(AB) = \alpha(AC) = \frac{\pi}{2}$, der Kantenwinkel zu AD ist $\alpha(AD) = \frac{\pi}{3}$, die Massen verschwinden jeweils.
Die Kantenwinkel zu BD und CD sind aus Symmetriegründen gleich. Es sei $\alpha(BD) = \alpha(CD) =: \alpha$. Ihr Massenanteil beträgt zusammen $2 \cdot l(BD) \cdot f(\alpha)$.

Um α zu berechnen, greift man idealerweise auf Mittel der analytischen Geometrie zurück.

Mit den Punkten $A(0, \sqrt{3}, 0); B(-1, 0{,}0); C(1{,}0{,}0); D(0, \sqrt{3}, 2)$ erhält man

als Normalenvektor für die Ebene BCD $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ und

als Normalenvektor für die Ebene ABD $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist der Schnittwinkel der Ebenen ABD und BCD:

$$\alpha = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67{,}79235°$$

Dieser Winkel ist nach (Aigner, et al., 2000 S. 33) irrational zu π.

Der Kantenwinkel zu BC sei $\beta \coloneqq \alpha(BC)$. Der Massenanteil beträgt $l(BC) \cdot f(\beta)$.

Um β zu berechnen, kann man in der analytischen Geometrie verbleiben.

Der Normalenvektor für die Ebene ABC ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ist der Schnittwinkel[60] der Ebenen ABC und BCD:

$$\beta = arcccos\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right) \approx 49{,}10661°$$

Es ist unklar, ob dieser Winkel irrational zu π ist, da z. B. eine Übertragung des in (Aigner, et al., 2015 S. 33) gegebenen Beweises auf diesen Sonderfall unklar ist.

Schließlich kann man für den weiteren Verlauf der Rechnung $l(AB) = 1$ setzen. Damit ist dann $l(AD) = 1$ und $l(BD) = \sqrt{2}$.

Für die Dehn-Invariante des Tetraeders ABCD erhält man damit:

$$D_f(ABCD) = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot f(\alpha) + f(\beta)$$

---

[60] Dieser Schnittwinkel lässt sich elementarer auch über das Stützdreieck, das von A, D und der Streckenmitte zu BC gebildet wird, zu $\alpha(\mathrm{BC}) = \arctan\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \approx 49{,}10661°$ berechnen.

Sie ist bei entsprechender Setzung von $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ ungleich 0. Dies ist in der obigen Hinführung abstrakt ausgeführt und exakt begründet.

II. Das *Tetraeder CDEF* hat aus Symmetriegründen die gleiche irrationale Dehn-Invariante: $D_f(CDEF) = D_f(ABCD)$

III. Wir berechnen die Dehn-Invariante des dritten *Tetraeders BCED*.
Der Kantenwinkel zu BE ist $\frac{\pi}{3}$, die Masse verschwindet.
Der Kantenwinkel zu BD ist $\pi - \alpha$ (man betrachte hierzu die Kantenwinkel der beiden Tetraeder ABCD und BCDE zur Kante BD), die Masse ist

$$l(BD) \cdot f(\pi - \alpha) = \sqrt{2} \cdot f(-\alpha).$$

Das Gleiche gilt für den Kantenwinkel zu CE.
Der Kantenwinkel zu BC ist $\frac{\pi}{2} - \beta$, der Massenbeitrag von BC ist $f(-\beta)$.
Das Gleiche gilt für den Kantenwinkel zu ED.
Der Kantenwinkel zu CD ist $\alpha(CD) = \pi - 2\alpha$ (man betrachte die Kantenwinkel aller drei Tetraeder zur Kante CD), die Masse ist

$$l(CD) \cdot f(\pi - 2\alpha) = \sqrt{2} \cdot f(-2\alpha).$$

Für die Dehn-Invariante des Tetraeders BCDE erhält man also:

$$D_f(BCED) = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot f(-\alpha) + 2 \cdot f(-\beta)$$

IV. Man erkennt, dass gilt:

$$D_f(ABCD) + D_f(CDEF) + D_f(BCED) = D_f(Prisma)$$

Und insbesondere:

$$D_f(BCED) = -2 \cdot D_f(ABCD)$$

Die Ergebnisse sind also mit der Additivität der Dehn-Invariante konsistent.
Die Schlussfolgerungen für die Zerlegungsgleichheit liegen auf der Hand und sind auf der Basis konkreter Zahlenwerte offensichtlich.

Interpretation

Es ist sehr bemerkenswert, dass erstmals ein Polyeder mit negativer Dehn-Invariante auftritt. Dies ist völlig anders als man es in Analogie zu einer ebenen

Winkelsumme erwarten würde. Der Grund besteht darin, dass ein Polyeder mit Dehn-Invariante 0 in Teilpolyeder mit Dehn-Invariante ungleich 0 zerlegt wird. Um die Additivität zu wahren, muss daher (mindestens) ein Teilpolyeder eine negative Dehn-Invariante aufweisen. Diese Beobachtung, die in 3.2.2.8 wieder in Erscheinung tritt, ist dort von zentraler Bedeutung.
In elementarer Weise lohnt abschließend noch ein Blick auf die Kanten und die Kantenwinkel: Von den 9 Ausgangskanten des Prismas bleiben 6 Kanten (AB, AC, AD; FC, FD, FE) ungeteilt. Die 2 Kantenwinkel an BC und DE werden auf je zwei Zerlegungstetraeder verteilt. Der letzte Kantenwinkel an CD wird auf alle drei Zerlegungstetraeder verteilt. Dort findet in der Rechnung auch der entscheidende „Ausgleich“ der Dehn-Invarianten der drei Zerlegungstetraeder statt.

3.2.2.8 Das dritte Hilbertsche Problem im Kontext der Kugelpackungen

Die Dehn-Invariante wurde im Kontext der Kugelpackungen bislang noch nicht intensiv betrachtet (Zong, 1999) (Hales, 2007) (Szpiro, 2011).

Im finiten Zugang zum Kepler-Problem spielt die tetraedrische Konfiguration eine wichtige Rolle. Die Dehn-Invariante eines regulären Tetraeders – dies ist in 3.2.2.2 der Tetraeder vom Typ III – ist irrational.
Im infiniten Zugang zum Kepler-Problem ist die Frage nach dem kleinstmöglichen Fundamentalparallelotop interessant. Die Antwort auf die Frage nach der Dehn-Invariante eines Fundamentalparallelotops ist schnell gefunden: Das Fundamentalparallelotop verfügt über insgesamt zwölf, je vier zueinander parallele, gleich lange Kanten. Zu diesen gibt es immer eine orthogonale Schnittebene, so dass sich vier Kantenwinkel mit paarweise gleicher Masse (wie in einem Parallelogramm) zu 2π addieren. Dies halten wir fest.

Lemma.
Gegeben ist eine infinite Kugelgitterpackung mit Basis und Fundamentalparallelotop P.
Dann gilt für die Dehn-Invariante des Fundamentalparallelotops:

$$D_f(P) = 0.$$

Insbesondere gilt für die dichteste Kugelgitterpackung:
Die Dehn-Invariante eines beliebigen Fundamentalparallelotops des fcc-Gitters ist 0. Diese Aussage gilt für ein *Fundamentalparallelotop mit einem gleichseitigen Dreieck als Teil der Grundfläche* ebenso wie für ein *Fundamentalparallelotop mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck als Teil der Grundfläche* (vgl. Bild 2.27 und Bild 2.28 auf S. 108f.). Wie aus dem Beweis nach Gauß hervorgeht (ebd.), sind dies *die beiden wesentlichen Fundamentalparallelotope eines fcc-Gitters*.

Wir betrachten für beide wesentlichen Fundamentalparallelotope des fcc-Gitters die Dehn-Invarianten der Zerlegungstetraeder.

Die Zerlegung des *ersten wesentlichen Fundamentalparallelotops* ist in Abbildung 29 veranschaulicht.

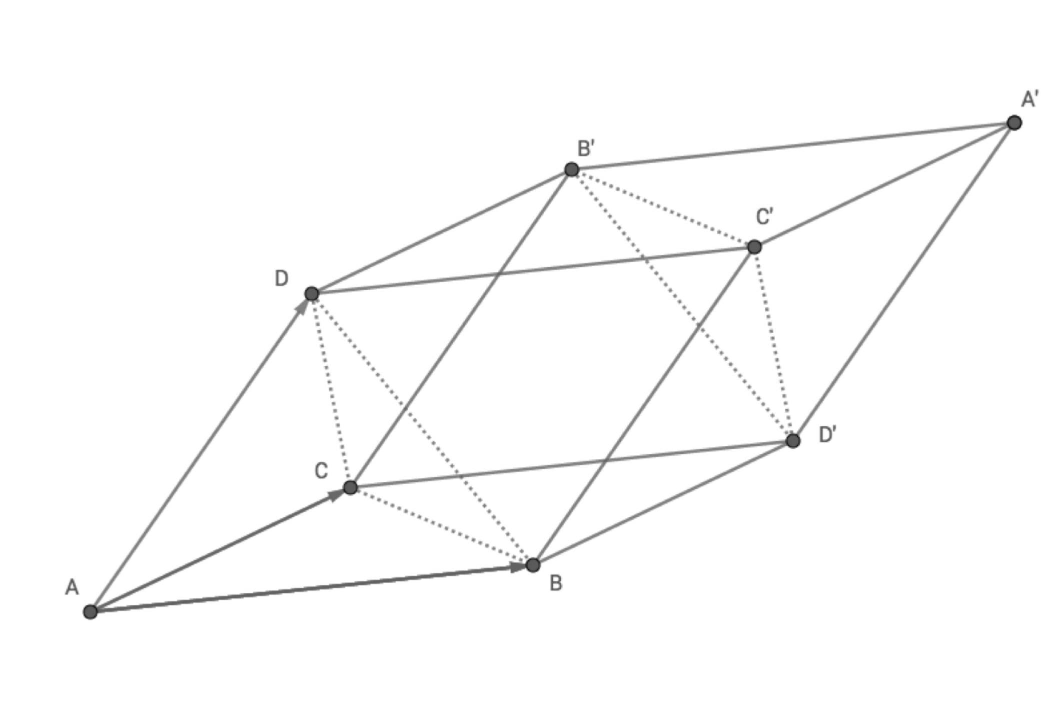


Abbildung 29 Zerlegung des ersten wesentlichen Fundamentalparallelotops eines fcc-Gitters

Man erkennt die beiden regulären Tetraeder ABCD und A'B'C'D' vom Typ TIII und dazwischen ein Oktaeder, das aus vier kongruenten Tetraedern BB'D'C', BB'DC', BB'D'C und BB'DC vom Typ TIV besteht (3.2.2.2).
Die Dehn-Invariante des regulären Tetraeders TIII ist nach 3.2.2.2 bekannt:

$$\boldsymbol{D_f(TIII) = 6 \cdot f(\alpha)} \qquad \text{mit} \quad \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

Die Dehn-Invariante des Tetraeders vom Typ IV berechnet sich folgendermaßen:
Wir betrachten exemplarisch das Tetraeder BB'DC'.
Eine Kante (BB') hat den Kantenwinkel $\frac{\pi}{2}$, ihr Anteil verschwindet wegen der $\mathbb{Q}$-Linearität von f unter Berücksichtigung der Bedingung $f(\pi) = 0$.
Eine weitere Kante (DC') hat den Kantenwinkel $\pi - \alpha$, wobei α gerade der Kantenwinkel des regulären Tetraeders (s.o.) ist[61]. Dies erkennt man, wenn man sich vergegenwärtigt, dass im Tetraeder BB'DC' die Ebene B'DC' parallel zur

[61] In der naturwissenschaftlichen Literatur wird α als „Tetraederwinkel" und $\pi - \alpha$ als „Oktaederwinkel" bezeichnet.

Ebene ABC ist und sich somit der Kantenwinkel zu DC' und der Kantenwinkel AB des regulären Tetraeders ABCD gerade zu π ergänzen.
Vier Kanten (BD, B'D, BC', B'C') haben den Kantenwinkel $\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dazu betrachtet man wie in den Berechnungen für die Tetraeder vom Typ TII und TIII das Stützdreieck, dessen Hypotenuse $\sqrt{3}$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 2) und dessen Ankathete zum Kantenwinkel 1 ist.
Fünf Kanten (DC', BD, B'D, BC', B'C') sind gleich lang. Wir setzen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $l(\pi - \alpha) = l(\beta) = 1$.

Außerdem gilt $\beta + \beta + \alpha = \pi$. Dies erkennt man, indem man die Kantenwinkel zu BD betrachtet. Der Kantenwinkel zu BD im soeben untersuchten Tetraeder BB'DC' ist β, der Kantenwinkel zu BD im dazu kongruenten Tetraeder BCDB' ist ebenfalls β, daran schließt sich der Kantenwinkel zu BD im regulären Tetraeder ABCD an, er beträgt α. In der Summe ergeben die drei Kantenwinkel einen Halbwinkel π, da die Ausgangsfläche des ersten Kantenwinkels und die Endfläche des letzten Kantenwinkels übereinstimmen; es ist die Begrenzungsebene ABD des Fundamentalparallelotops[62].

Wir erhalten für die Dehn-Invariante analog:

$$\boldsymbol{D_f(TIV) = f(\pi - \alpha) + 4 \cdot f(\beta)} \qquad \text{mit} \quad \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta = \pi.$$

Und damit unter Berücksichtigung der $\mathbb{Q}$-Linearität von f:

$$\boldsymbol{D_f(TIV) = 6 \cdot f(\beta)} \qquad \text{mit} \quad \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Wir halten fest:

Lemma. Für die Zerlegungstetraeder des ersten wesentlichen Fundamentalparallelotops eines fcc-Gitters nach Gauß gilt:

1) Das Fundamentalparallelotop lässt sich in zwei reguläre Tetraeder vom Typ TIII und in vier Tetraeder vom Typ TIV zerlegen.
2) Die Dehn-Invarianten betragen

[62] Dieses Argument findet sich auch in der Betrachtung des 2.Falls zur Kante e'' in 3.2.2.3 (Abbildung 24).

$$\boldsymbol{D_f(TIII) = 6 \cdot f(\alpha)} \qquad \text{mit} \quad \alpha = \arccos\frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{D_f(TIV) = 6 \cdot f(\beta)} \qquad \text{mit} \quad \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) Es gilt $\alpha + 2\beta = \pi$ und damit $f(\alpha) + 2f(\beta) = 0$.

Eine einfache Rechnung unter Berücksichtigung des Lemmas 1 (Additivität der Dehn-Invarianten der Teilpolyeder, 3.2.2.3) ergibt das folgende

Lemma. Für das erste wesentliche Fundamentalparallelotop P_{fcc} eines fcc-Gitters mit seinen Zerlegungstetraedern vom Typ TIII und TIV gilt:

$$\boldsymbol{2 \cdot D_f(TIII) + 4 \cdot D_f(TIV) = 0 = D_f(P_{fcc})}$$

Wir betrachten nun das *zweite wesentliche Fundamentalparallelotop eines fcc-Gitters*, wie es sich aus dem Beweis nach Gauß ergibt. Es ist der Abbildung 30 zu entnehmen, dass das Tetraeder ABCD vom Typ TIV ist, ebenso das Tetraeder D'BCD und außerdem die Tetraeder DB'C'D' und A'B'C'D'. Die beiden Tetraeder BB'DD' und CC'DD' sind regulär, also vom TYP TIII.

Dies ist ein erstaunliches und zugleich ein schönes Ergebnis.
Die beiden wesentlichen Fundamentalparallelotope eines fcc-Gitters, die nicht kongruent sind, obgleich sie das gleiche Gitter beschreiben, besitzen eine Zerlegung in kongruente Tetraeder.

Lemma: Die beiden wesentlichen Fundamentalparallelotope eines fcc-Gitters besitzen eine gemeinsame Zerlegung in je zwei reguläre Tetraeder vom Typ TIII und in je vier Tetraeder vom Typ TIV.

Für die weiteren Betrachtungen kann man sich also anstelle des Fundamentalparallelotops auf die *Zerlegungstetraeder vom Typ TIII und vom Typ TIV* konzentrieren.

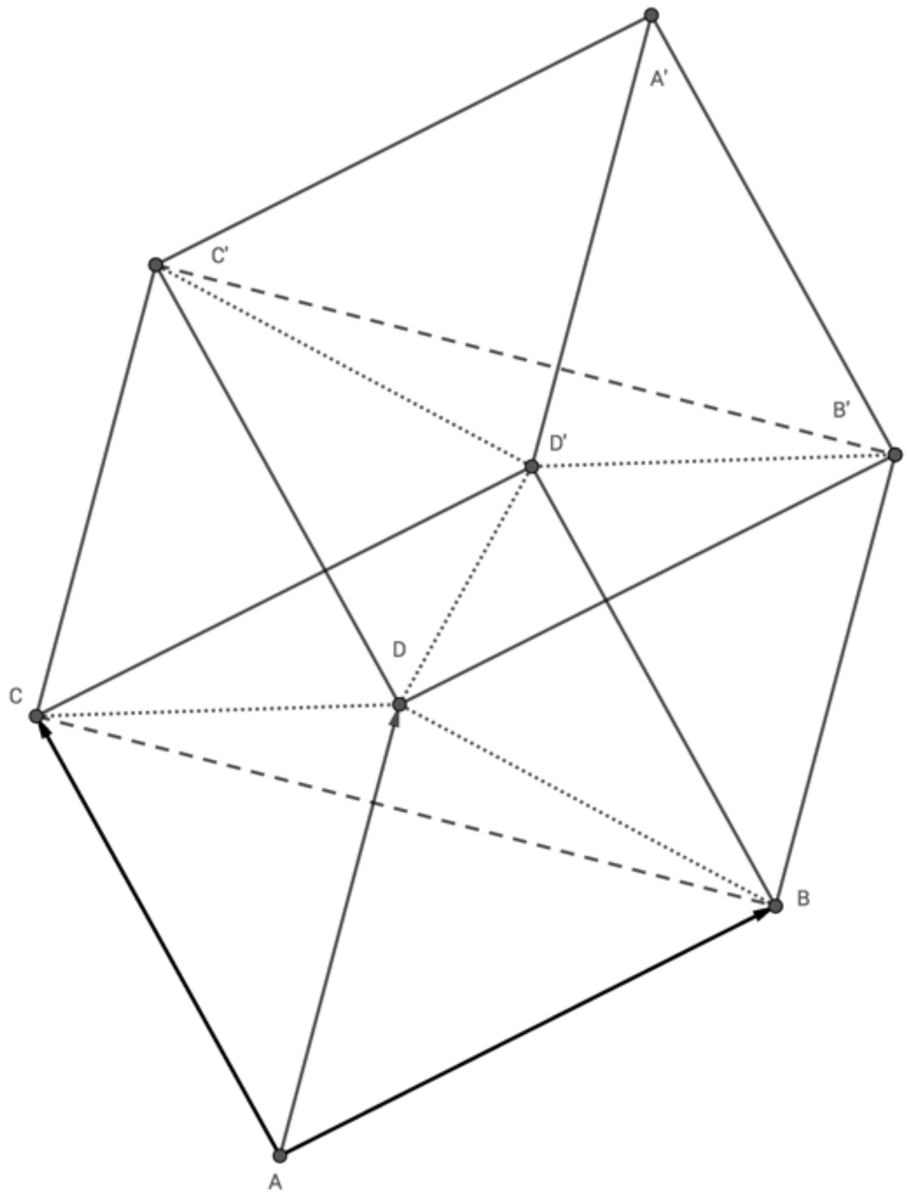


Abbildung 30 Zerlegung des zweiten wesentlichen Fundamentalparallelotops eines fcc-Gitters

Mit Bezug auf die Packungsdichte ist ferner der Anteil der gepackten Kugel im jeweiligen Zerlegungstetraeder interessant. Man kann ihn berechnen wie in (Leppmeier, 1997 S. 119) vorgeschlagen. Die Rechnung ist aufwändig und erfordert Kenntnisse über die Fläche eines Kugeldreiecks, wie sie beispielweise in (Kern, et al., 1991) vermittelt werden. Der Rechengang wird im Folgenden skizziert. Der Einfachheit halber wird mit gerundeten Winkeln im Gradmaß gerechnet und $\alpha = 70{,}5288°, \pi - \alpha = 109{,}4712°, \beta = 54{,}7356°$ angesetzt.
Wir beginnen mit dem regulären Tetraeder (TIII).
Hier ist die Kugelfläche in einem Eck $3 \cdot 70{,}5288° - 180° = 31{,}5864°$, der Kugelanteil $126{,}3456°$. Bedenkt man, dass die Gesamtkugel $720°$ umfasst,

enthält das reguläre Tetraeder $6{,}3456°$ mehr als ein Sechstel einer Kugel. Dieser kleine Überschuss gegenüber der fcc-Packungsdichte verursacht im Zugang nach Hales die Schwierigkeiten beim Beweis der Kepler-Vermutung[63].

Wir betrachten das Tetraeder vom Typ TIV.
Hier ist die Kugelfläche in zwei Ecken $109{,}4712° + 2 \cdot 54{,}7356° - 180° = 38{,}9424°$ und in den beiden anderen Ecken $90° + 2 \cdot 54{,}7356° - 180° = 19{,}4712°$, der Kugelanteil im Tetraeder TIV ist also $116{,}8272°$. Im Vergleich mit der Gesamtkugel enthält das Tetraeder TIV $3{,}1728°$ weniger als ein Sechstel einer Kugel. Insgesamt gleichen daher zwei Tetraeder vom Typ TIV die durch ein Tetraeder vom Typ TIII erzeugte lokale Verdichtung aus.

Notiz. In einer fcc-Konfiguration beträgt der Packungsdichteüberschuss des regulären Tetraeders TIII gegenüber dem Fundamentalparallelotop

$$\frac{18}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - 7 \approx 5{,}288\%$$

und das Packungsdichtedefizit des Tetraeders vom Typ TIV gegenüber dem Fundamentalparallelotop

$$\frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{7}{2} \approx 2{,}644\%.$$

Beweis. Dem oben ausgeführten Gedankengang entnimmt man für den ersten Term:

$$\frac{\left(3 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) - \pi\right) \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \pi}{\frac{2}{3} \cdot \pi}$$

[63] Zong sieht die Ursache hierfür eher in einem Aspekt des Gregory-Newton-Problems. Er betrachtet zwei Konfigurationen für die Kusszahl 12: Eine fcc-Konfiguration und eine ikosaedrische Konfiguration. Während die fcc-Konfiguration fest ist, lässt die ikosaedrische Konfiguration geringfügige Verschiebungen der Berührkugeln zu, erscheint daher dichter und ist es (in gewisser Weise) auch. Bezogen auf die Dirichlet-Voronoi-Zelle der zentralen Kugel, ein Dodekaeder als dualer Körper zum Ikosaeder, ist die Packungsdichte größer als bei einer fcc-Packung (Zong, 1999 S. 13). Da die ikosaedrische Anordnung mit Bezug auf die Zentralkugel nur tetraedrische Aspekte aufweist, ist auch hier die tiefere Ursache in den oben ausgeführten Überlegungen zu sehen. Und so verwundert es auch nicht, dass es scheinbar ein wenig Platz zwischen den tetraedrischen Anordnungen gibt.

Den zweiten Term rechnet man analog nach.■

Was bedeutet das dritte Hilbertsche Problem im Kontext der Kugelpackungen?
In einer fcc-Packung ist die Packungsdichte in den Fundamentalparallelotopen gleich der fcc-Packungsdichte von

$$\delta = \frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 74{,}048\%.$$

Auf der Ebene der die das Fundamentalparallelotop konstituierenden Tetraeder vom Typ TIII und vom Typ TIV treten Packungsdichteschwankungen auf. Mit diesem feinen Blick kann grundsätzlich nicht mehr von einer einheitlichen Packungsdichte gesprochen werden[64]. Ein Drittel des Raumes einer fcc-Packung ist dichter gepackt, zwei Drittel sind weniger dicht gepackt. Dies geht einher mit der weiteren Auflösung der zu packenden Kugel als Ganzes. Im Fundamentalparallelotop befinden sich endlich viele Kugelsektoren[65], die sich zu einer ganzen Kugel zusammenfügen lassen. In den untersuchten Tetraedern bilden die enthaltenen Kugelsektoren im Allgemeinen nicht einmal mehr einen rationalen Teil einer Kugel.
Was in der Ebene durch die Innenwinkelsumme des Dreiecks garantiert ist, ein konstanter Kreisanteil in jedem beliebigen Dreieck, ist im Raum verschwunden.
Gleichwohl stellt die Zerlegung des Fundamentalparallelotops in seine „Elementartetraeder“ eine interessante Perspektive dar. Die Unterschiede zwischen fcc-Gitterpackung und hcp-Pseudogitterpackung verschwinden. Die Gitterstruktur ist für die dichteste Packung nicht mehr entscheidend. Vielmehr kommt es auf die richtige Zerlegung des Raumes in Polyeder an, um die maximale Packungsdichte zu erzielen.

Insgesamt konnte gezeigt werden, dass die Ergebnisse des dritten Hilbertschen Problems, insbesondere der Aspekt der Dehn-Invariante, eine Invarianzeigenschaft hinsichtlich der Zusammensetzung der beiden wesentlichen Fundamentalparallelotope eines fcc-Gitters offenlegen (3.1).

---

64 Die Situation erinnert in gewisser Hinsicht an die weitere Zerlegung von Protonen und Neutronen in Quarks.

65 Wenn keine Überschneidungen vorliegen, sind dies genau acht Kugelsektoren an den acht Ecken des Fundamentalparallelotops.

Die im Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Beobachtungen, Berechnungen, Begriffsbildungen und Methoden können einen neuen Zugang zum Kepler-Hilbert-Problem eröffnen; eine zugehörige Veröffentlichung ist in Vorbereitung.

3.2.3 Ein Unterrichtskonzept im Rahmen des Enrichment-Ansatzes

Die Thematik des dritten Hilbertschen Problems stellt unbestrittenen einen mathematischen Bildungsgegenstand dar. Es ist Teil des „Regulären“ nach Gallin und Ruf (2.2.4.3), Teil des „Kategorialen“ nach Klafki (2.2.4.1), Teil der „Welt“ nach Humboldt (2.1.1.1) und kann die inhaltliche Basis für ein Unterrichtskonzept nach dem Enrichment-Ansatz darstellen (2.1.3.3, 3.1.6).

3.2.3.1 Personen begaben

Die Auseinandersetzung mit dem dritten Hilbertschen Problem vermag den Bildungsprozess einer lernenden Person zu befördern, denn es treffen die grundlegenden Aspekte für die Entfaltung und Förderung von Begabungen zu, wie sie in 2.1.1.2 herausgearbeitet wurden:

- *„Bildungs- und Begabungsprozesse sind inhalts- und themengebunden. ...*

Ob ... die Beschäftigung mit einem Thema zu einer bildenden Erfahrung und für Begabungspotenziale wirksam wird, hängt davon ab, inwieweit sie für den Einzelnen bedeutsam wird und sie/er aktiv damit umgeht. ...

- *Bildung und die Entfaltung von Begabungen beinhalten die Auseinandersetzung mit Dingen und Gegenständen sowie den sozialen Austausch, den Dialog. ...*

- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat ein reflexives Moment. ...*

Die Reflexion ist ... bedeutsam für ... die Schülerin und den Schüler. Sie trägt dazu bei, sich das, womit sie sich beschäftigen und was sie *lernen, bewusst zu machen und zu verstehen, sich anzueignen und auch bewusst damit umzugehen.*

- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat letztlich eine ethische Dimension. ...“ (2.1.1.2)*

Beim dritten Hilbertschen Problem geht es um ein ganz intensives Bewusstmachen im Sinne der Reflexion (2.1.1.2, 2.1.1.4, 2.1.2.2, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.4.2, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 3.2.1, 3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.4, 3.2.2.5, 3.2.2.6, 3.2.2.7, 3.2.2.8, 3.3.1.3, 3.4.2, 4.1.1.5, 4.1.2, 4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3, 4.3).
Dies beginnt schon bei der Beschäftigung mit der Fragestellung. Die Frage nach der Zerlegungsgleichheit von zwei Tetraedern mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe ist nicht so eingängig, wie die Frage nach der dichtesten Kugelpackung (3.2.1, 3.2.2.1). Insofern eignet sie sich auch nicht für eine schnelle Diagnose mathematischen Interesses oder mathematischer (Hoch)Begabung. Es gilt vielmehr:

> *„Dementsprechend kann es auch bei der Frage der Begabtenförderung nie nur um die Diagnostizierung von Potenzialen auf der einen und um ergebnisorientierte „effiziente“ Maßnahmen zur Förderung einzelner Fähigkeiten auf der anderen Seite gehen, sondern um die Ermöglichung umfassender und auf ein Leben hin angelegter Lern- und Bildungsprozesse.“ (ebd.)*

Soll die Beschäftigung mit dem dritten Hilbertschen Problem begabungswirksam werden, ist sie auf eine personorientierte Schulkultur angewiesen, die sich „in Offenheit und Aufgeschlossenheit, in Neugierde und Kreativität, nicht in Anweisung und Normiertheit“ (2.1.1.3) zeigt (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.3, 4).

Ein intensives Bewusstmachen im Sinne der Reflexion wird in der Beschäftigung mit dem dritten Hilbertschen Problem auch dem Lehrenden abgefordert (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.2, 4.1, 4.2.3, 4.2.4). Der Lehrende wird zum Lernenden. Er lernt, weshalb die Zerlegung eines Prismas mit gleichseitiger Grundfläche in drei kongruente Tetraeder nicht gelingen kann (3.2.2.7). Oder wie ein Mathematiklehrer einmal formulierte: „Das habe ich zwar immer beobachtet, ich habe mich auch immer darüber gewundert, aber ich habe es nie verstanden.“ Das tiefe Verstehen wird zu einem persönlichen Gewinn des Lehrenden (4.2.3).

3.2.3.2 Didaktische Prinzipien

Es ist klar, dass aus der Beschäftigung mit dem dritten Hilbertschen Problem keine „völlig neuen Lehr- und Lernformen oder Methoden“ erwachsen, sondern dass vielmehr gezeigt wird, „wie durchaus bekannte und gängige Formen ‚lernwirksamen Unterrichts‘ … aus der Perspektive der Personorientierung eine qualitativ andere, nämlich begabungsgestaltende und persönlichkeitsbildende Ausrichtung erhalten“ (2.1.2) (3.1, 3.3, 3.4, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4). Es ist auch klar, dass die Beschäftigung mit dieser Thematik nur durch die Prinzipien einer personorientierten Didaktik (Dialog, Sozialität, Aneignung, Autonomie, Lern-Sinn, Performanz; Abbildung 3 S. 31) begabungsfördernd wirken kann (2.1.2.4). In methodischer Hinsicht sind viele Realisierungen denkbar: Grouping mit Leistungsgruppen oder Enrichmentclustern; internes Enrichment in einem Additum, in Vertiefungsgruppen, vielleicht auch eine Verwendung in einem Wettbewerb; externes Enrichment in einem Expertenprojekt; Akzeleration mit Compacting und der Möglichkeit zu einem Frühstudium; selbstorganisiertes Lernen mit freiem Lernen, Selbstlernzeit, aber auch in einem Vertiefungsfach, in einem Wahlpflichtfach oder in einer Facharbeit (2.1.2.5). Diese Methoden entfalten in der Kombination mit Formen der personorientierten Begabungsförderung (Beteiligung, Partizipation; Reflexion, Dialog; Sinn-Lernen, Gestaltung von Wissen; mehrdimensionale Leistung) nach Schmid (Abbildung 4 S. 34) ihre pädagogische Kraft.

Ein Unterrichtskonzept zum dritten Hilbertschen Problem soll daher möglichst umfassend angewendet werden können. Es soll immer in den Ansatz des “Schoolwide Enrichment Model“ (SEM) zur inklusiven Begabungsförderung (2.1.3.3) integrierbar sein. Verantwortung für das pädagogische Tun (2.1.3.2) und Freude an der Mathematik (2.2.5) fungieren als Leitideen (4.2, 4.2.3, 4.2.4).

Ein Unterrichtskonzept zum dritten Hilbertschen Problem erfüllt die Kriterien eines mathematischen Bildungsverständnisses nach Hilton:

> *„Mathematics … has its own internal dynamic, powerful and subtle. … mathematics moves forward not under the stimulus of science but under the stimulus of its own recent advances“ (2.2.3)*

Und es erfüllt auch, wie dies bereits für Kugelpackungen gezeigt wurde (3.1.6.1), die Prämissen eines fachbezogenen Modells für mathematische Begabung nach Ulm (2.2.2).

Im Sinne Klafkis erfordert die Aufbereitung der Thematik, die ihre erste Lösung in der Antwort auf die offene Frage Hilberts durch (Dehn, 1900) fand, über verschiedene Stufen, die in (Aigner, et al., 2000) genannt sind und zu einer ersten Elementarisierung für Absolventen eines Mathematikstudiums führten, eine weitere Elementarisierung (3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.4, 3.2.2.5, 3.2.2.6, 3.2.2.7), um den Bildungsgegenstand für mathematisch interessierte Schüler zugänglich zu machen. Gefordert ist ein „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (2.2.4.1) und andererseits ein „Aufgehen allgemeiner Einsichten, Erlebnisse, Erfahrungen auf der Seite des Subjekts“ (ebd.). Dann wirkt das dritte Hilbertsche Problem begabungsfördernd und bildend im Sinne Klafkis:

> *„Bildung ist* ***kategoriale Bildung*** *in dem Doppelsinn, daß sich dem Menschen eine Wirklichkeit ‚kategorial' erschlossen hat und daß eben damit er selbst – dank der selbstvollzogenen ‚kategorialen' Einsichten, Erfahrungen, Erlebnisse – für diese Wirklichkeit erschlossen worden ist.“ (ebd.)*

Die Vorarbeit für eine solche Elementarisierung wurde in 3.2.2 geleistet. Hierbei ist von entscheidender Bedeutung, dass es nicht um „ein Simplifizieren, um ein Vereinfachen, um ein nur mit einfachen Worten sagen“ (2.2.4.1) geht, sondern um „einen in jeder Situation begabungsadäqaten Anschluss an die Fachwissenschaft“ (ebd.). Das Elementare in Bezug auf mathematische Inhalte oder Kategorien ist „steigerbar und damit nahezu unerschöpflich“ (ebd.).
Dieser eminent wichtige Aspekt wird in 3.2.5 noch einmal aufgegriffen, da er wesentlich für die Elementarisierung im Spannungsfeld zwischen „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (ebd.) und ein „Aufgehen allgemeiner Einsichten, Erlebnisse, Erfahrungen auf der Seite des Subjekts“ (ebd.) ist.

Das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip Wagenscheins (2.2.4.2) wird in einem Unterrichtskonzept zum dritten Hilbertschen Problem auf natürliche Weise erfüllt.

Die Thematik ist genetisch: An ihrem Anfang steht die Frage Hilberts (3.2.1) (Hilbert, 1900). In einer Vertiefung des genetischen Prinzips gelangt man zum Briefwechsel zwischen Gerling und Gauß und kann sehr viel über die Genese der Fragestellung und ihren Kontext lernen (3.2.1) (Gauss, et al., 1927) (Dehn, 1900) (Dehn, 1902) (Sydler, 1965) (Jessen, 1968) (Benko, 2007) (Ciesielska, 2018), aber auch über personorientierte Begabungsförderung (2.1.2, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.3, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.2.3.1, 3.2.3.2, 4.3). Nicht zuletzt ist das genetische Prinzip im brieflichen Dialog zwischen Gerling und Gauß ein interessanter Aspekt (2.2.4.3, 3.2.1, 3.2.3.1, 3.2.3.2).
Die Thematik ist auch sokratisch: Es gibt keine einfache, keine intuitive Antwort auf die Frage. Man muss sie suchen (2.2.4.3, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.4, 3.2.2.5, 3.2.2.6). Auch hier ist die Kunst des Fragens im brieflichen Dialog zwischen Gerling und Gauß ein wichtiger Gesichtspunkt für die personorientierte Begabungsförderung (2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.2.4.3, 2.2.5, 3.1.4, 4.2.3.2).
Die Thematik ist in vielfältiger Weise exemplarisch: Man muss sich auf Beispiele einlassen (3.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.7, 3.2.2.8). Sie bilden die Brücke zum Kategorialen des dritten Hilbertschen Problems und darüber hinaus (3.2.1, 3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3, 3.2.2.6, 3.2.2.8).

Kernideen sollen, wie in 3.1.4 erläutert und in 3.1.6 für die Thematik der Kugelpackungen ausgeführt, das Unterrichtskonzept versinnbildlichen.

3.2.3.3 Kernideen des Unterrichtskonzepts

Kernideen können nur Wegweiser für eine in jeder Hinsicht personorientierte und situationsadäquate Ausgestaltung des Unterrichtskonzeptes durch Unterrichtsmaterialien, Medien, Tafelbilder, Unterrichtsgesprächsverläufe, Stundenkonzepte, etc. sein. Die konkrete Ausgestaltung der Kernideen muss in der jeweiligen Begabungsförderungssituation vor dem Hintergrund der Prämisse einer größtmöglichen, personorientierten Begabungsförderung im Rahmen des SEM-Modells erfolgen (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.3.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.6.4, 4.1, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4).

Die *erste Kernidee* stellt die Hinführung zur Thematik dar (3.2.1, 3.2.2.1). Hier gibt der Lehrende auch die grobe Richtung für den genetisch-exemplarisch-sokratischen Entdeckungsgang vor (3.2.3.1, 3.2.3.2).
Soll es nur um die Frage gehen: Sind ein Würfel und ein volumengleiches reguläres Tetraeder zerlegungsgleich? Dann ist dieses Thema, wie in 3.2.4 ausgeführt, noch weiter elementarisierbar. Auf die Begriffsbildung der Dehn-Invariante kann beispielsweise verzichtet und das Unterrichtskonzept dadurch kürzer gehalten werden.
Oder soll es auch um die Fragen gehen:
Sind zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe zerlegungsgleich?
In welche Tetraeder zerfällt das Fundamentalparallelotop eines fcc-Gitters?
Dann ist das Unterrichtskonzept umfangreicher anzulegen, wie es im Folgenden versinnbildlicht wird.

Eine *zweite Kernidee* ist die Beschäftigung mit der ebenen Situation (3.2.2.5), die eine erste Plattform des Verstehens und eine Plattform für Vergleiche schafft. Sind ein Quadrat und ein flächengleiches, gleichseitiges Dreieck zerlegungsgleich? Wie sieht eine solche Zerlegung aus?
Die Schüler lernen, dass es bereits hier keine „einfache“ Lösung gibt, sondern dass eine strukturierte Lösung zu erforschen und zu entdecken ist.
Entsprechend sucht man ein Analogon zur anderen Hinführungsfrage nach Aigner et.al. (3.2.2.1). In einem Exkurs kann man die Thematik weitergefasst abrunden und neben der Zerlegungsgleichheit die Ergänzungsgleichheit betrachten.

Eine *dritte Kernidee* ist die Einführung der Dehn-Invariante (3.2.2.2). Hier wird man die schwierige Klippe der $\mathbb{Q}$-linearen Funktion f zur Menge M umschiffen müssen. Dies gelingt, indem man die Dehn-Invariante zunächst an konkreten Beispielen des Würfels, des regulären Tetraeders, der Tetraeder vom Typ TI und vom Typ TII berechnet.
Für das Verständnis muss jedoch eine Klärung des Begriffs der $\mathbb{Q}$-linearen Funktion erfolgen. Eine Einführung in den Begriff des Vektorraums ist nicht zwingend erforderlich, ein Hinweis darauf kann jedoch einen Einblick in das mächtige Instrumentarium der Linearen Algebra geben (Beutelspacher, 1995).

Die Beschäftigung mit den Beispielen gibt bereits ein Gespür für die Lösungsidee des dritten Hilbertschen Problems.

Eine *vierte Kernidee* fasst die Lösungsidee in Worte (3.2.2.6).

Eine *fünfte Kernidee* nimmt die strukturierte Lösung in den Blick.
Additivität der Dehn-Invarianten einer Zerlegung, Bedingung für Nicht-Ergänzungsgleichheit, Bedingung für Nicht-Zerlegungsgleichheit (3.2.2.3, 3.2.2.4, 3.2.2.5, 3.2.2.6).

Eine *sechste Kernidee* beantwortet die beiden Leitfragen (3.2.2.6, 3.2.2.1).
Würfel und reguläres Tetraeder haben unterschiedliche Dehn-Invarianten, sind also nicht zerlegungsgleich.
Die beiden Tetraeder vom Typ TI und vom Typ TII haben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe, aber unterschiedliche Dehn-Invarianten, sind also nicht zerlegungsgleich (Lösung des dritten Hilbertschen Problems).

Eine *siebte Kernidee* beantwortet die elementarmathematische Fragestellung (3.2.2.7).
Für ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche gibt es keine Zerlegung in drei (bis auf Spiegelung) kongruente Pyramiden.

Eine *achte Kernidee* rundet die Thematik ab.
Würfel und Tetraeder vom Typ TI haben die gleiche Dehn-Invariante. Ein Würfel kann in der Tat in sechs (bis auf Spiegelungen) kongruente Tetraeder zerlegt werden (3.2.2.2).
Diese Kernidee lässt sich mit einem kleinen historischen Exkurs in die chinesische Mathematik des 3. Jahrhunderts nach Christus – es war die Mathematik des Liu Hui – anreichern (Cromwell, 1964): Wir erkennen in Abbildung 31 die Zerlegung eines Würfels in drei kongruente Pyramiden, „yang-ma“ genannt, die vier als „ch’i“ bezeichneten chinesischen Spielsteine und eine Zerlegungsaufgabe zum Tetraeder vom Typ TI.

Natürlich sehen wir auch die chinesische Version des Satzes: „Ein Würfel kann in der Tat in sechs (bis auf Spiegelungen) kongruente Tetraeder zerlegt werden.“ Sie würde sinngemäß lauten: „Ein Würfel besteht aus sechs ‚pieh-nao‘.“ Entsprechend kann auch ein Prisma mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche in drei kongruente „pieh-nao“ zerlegt werden.

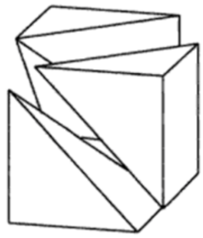


Figure 1.7. Dissection of a cube into three yang-ma pyramids

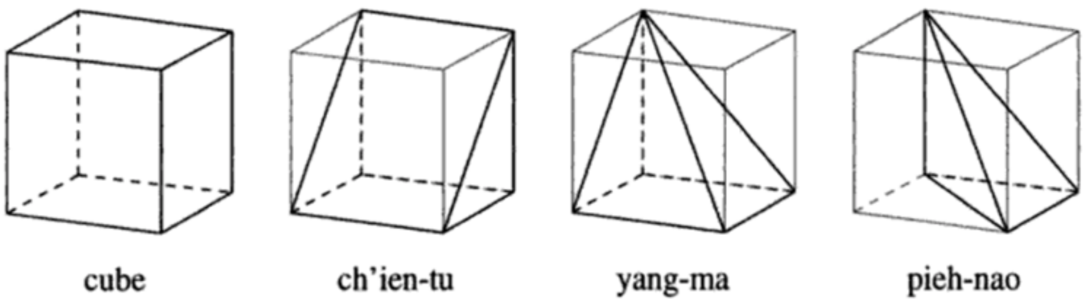


Figure 1.4. The four Chinese blocks, known as ch'i, used by Liu Hui.

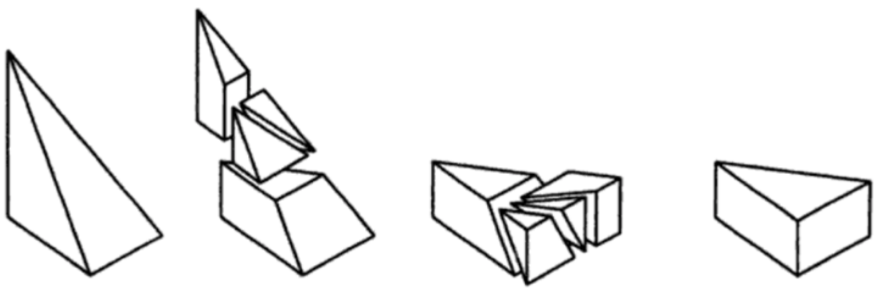


Figure 1.16. The 'pieh-nao' tetrahedron is equidecomposable with a prism on the same base.

Abbildung 31 Chinesische Polyeder aus dem 3. Jahrhundert, aus (Cromwell, 1964)

In einer *neunten Kernidee* kann man fakultativ die Zusammenhänge mit dem Kepler-Hilbert-Problem besprechen (3.2.2.8).

Denkbar ist auch eine Besprechung der Irrationalität von $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ bzw. $\frac{1}{\pi}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, wie man sie in (Aigner, et al., 2000 S. 33f.) oder (Wittmann, 2012) vorfindet.

Die *zehnte Kernidee* beschäftigt sich mit der historischen Genese des dritten Hilbertschen Problems anhand des Briefwechsels zwischen Gauß und Gerling (3.2.1). Sie zeigt, dass Lernen Anstrengung erfordert, nicht nur in der Schule, sondern auch in der Wissenschaft (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 2.2.1.3, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.3.2, 4.2.4, 4.3).

3.2.4 Ein alternatives Unterrichtskonzept

Steht allein die Frage nach der Zerlegungsgleichheit von Würfel und dazu volumengleichem regulären Tetraeder im Raum, kann man das Unterrichtskonzept anders aufbereiten. Einen Weg dazu weist (Wittmann, 2012). Die Kernideen[66] sind die folgenden:

Hinführung zum Thema durch die dazu analoge Fragestellung für die ebene Situation

Vorbereitendes Lemma zur Annäherung positiver reeller Zahlen durch rationale Zahlen, im Wortlaut:

„***Lemma.*** *Gegeben sei eine Menge* $\{a_{1,}, \dots, a_n\}$ *positiver reeller Zahlen und* m *eine beliebige natürliche Zahl. Dann existieren nicht negative rationale Zahlen* $\frac{p_i}{q}$, $i = 1, \dots, n$ *, so dass für* $i = 1, \dots, n$ *gilt* $\left|a_i - \frac{p_i}{q}\right| \leqq \frac{1}{10^m \cdot q}$. *“ (Wittmann, 2012 S. 46)*

[66] Hier wird nur die Beweisidee mit Kernideen in der Tiefe dargestellt, wie diese für das Verständnis der Betrachtungen in 3.2.5 erforderlich sind.

Definition der gewichteten Winkelsumme für Polyeder[67], im Wortlaut:

*„**Definition.** Für ein Polyeder P wird unter der gewichteten Winkelsumme $S(P)$ des Polyeders die Summe $\sum l(e_j) \cdot \alpha_j$ verstanden. Summiert wird dabei über alle Kanten e_j des Polyeders. $l(e_j)$ ist die Länge von e_j und α_j der zu der Kante e_j gehörende Diederwinkel.*

Die gewichtete Winkelsumme $S(P_1, \dots., P_k)$ einer Menge $\{P_1, \dots, P_k\}$ von Polyedern wird definiert als $S(P_1) + \cdots + S(P_k)$." (ebd.)

Definition einer verfeinerten Winkelsumme $S_P(P_1, \dots, P_k)$ für eine Zerlegung eines Polyeders P in die Teilpolyeder $P_1, \dots, P_k$.

Für die verfeinerten Winkelsummen gilt:

$$S_P(P_1, \dots, P_k) = S(P_1, \dots, P_k) = S_Q(P_1, \dots, P_k)$$

Approximation der Kantenlängen aller durch Zerlegung entstandenen (Teil)kanten durch rationale Näherungen

Satz mit Definition im Wortlaut:

*„**Satz 1.** Die approximativ gewichteten Winkelsummen $S^*(P_1, \dots, P_k)$, $S^*_P(P_1, \dots, P_k)$ und $S^*_Q(P_1, \dots, P_k)$, die entstehen, wenn in den gewichteten Winkelsummen $S(P_1, \dots, P_k)$, $S_P(P_1, \dots, P_k)$ und $S_Q(P_1, \dots, P_k)$ die Längen $l(L_i)$ für $i = 1, \dots, N$ durch ihre rationalen Näherungen $\frac{p_i}{q}$ ersetzt werden, sind gleich." (ebd.)*

Ein Vergleich der approximativen gewichteten Winkelsummen für zerlegungsgleiche Polyeder, im Wortlaut:

*„**Satz 2.** Für zerlegungsgleiche Polyeder P und Q ist die Differenz $S^*(P) - S^*(Q)$ ein rationales Vielfaches von π." (ebd.)*

Interpretation: Für zerlegungsgleiche Polyeder P und Q gibt es jeweils eine Summe von ganzzahligen Vielfachen der Diederwinkel von P und eine

[67] In der Literatur über Konvexgeometrie und Differentialgeometrie wird dafür der Begriff „mittlere Krümmung" verwendet (3.2.2.2).

Summe von ganzzahligen Vielfachen der Diederwinkel von Q, die sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden (sog. Bricardsche Bedingung).

Das Finale: Ein reguläres Tetraeder und ein volumengleicher Würfel sind nicht zerlegungsgleich.
An dieser Stelle gibt (Wittmann, 2012) auch einen elementaren Beweis für die Irrationalität von $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$.

Eine Erweiterungsmöglichkeit: Betrachtung der Bricardschen Bedingung für Tetraeder vom Typ TI und vom Typ TII (3.2.2.2) und Beantwortung der Fragestellung Hilberts

Dieses Alternativkonzept hat gegenüber dem in 3.2.3 auf der Basis von 3.2.2 vorgestellten Entwurf zwei Vorzüge: Es ist klar bis auf die Ebene der Schulmathematik durchelementarisiert, und es konzentriert sich auf die Kernaussagen und Kernbegriffe.
Ein vergleichbares Alternativkonzept ist in (Aigner, et al., 2015 S. 71ff.) dargestellt. Anstelle der Betrachtung des Dehnschen Funktionals wie in (Aigner, et al., 2000 S. 37ff.) steht die Betrachtung der Bricardschen Bedingung (s.o.) im Zentrum der Beweisführung. Auch hier wird eine Anregung durch (Benko, 2007) aufgegriffen, auf die sich (Wittmann, 2012) explizit beruft.
Natürlich kann dieses Konzept nicht den Facettenreichtum des in 3.2.2 grundgelegten und in 3.2.3 dargestellten Unterrichtskonzeptes wiedergeben.

3.2.5 Ebenen der Elementarisierung

Ein Vergleich des in 3.2.3 aufgezeigten Unterrichtskonzepts mit der in 3.2.4 dargestellten Alternative zeigt unterschiedliche Ebenen der Elementarisierung.

Der Begriff der Ergänzungsgleichheit erscheint im Alternativkonzept nicht mehr. Damit kann eine Facette der Formulierung Hilberts nicht mehr beantwortet

werden. Es fehlt dadurch auch eine Vergleichsmöglichkeit mit der ebenen Situation.
Unter dem Aspekt der Konzentration auf das Wesentliche der Fragestellung ist die Erweiterung auf die Ergänzungsgleichheit verzichtbar.
Die Frage, ob die Begrifflichkeit der Ergänzungsgleichheit für einen kategorialen Bildungsprozess erforderlich ist, wird man letztlich nur unter allgemeineren Aspekten einer personorientierten Begabungsförderung klären können (2.2.4.1, 2.1.1.3, 2.1.1.5, 2.1.2.4, 2.1.3.2, 2.2.3, 2.2.5).

Anstelle des Begriffskonzeptes der Dehn-Invariante wird der einfachere Begriff der gewichteten Winkelsumme eingeführt, der näher an der Vorstellung liegt und für das Ziel des Konzeptes völlig ausreicht.
Ein begrifflicher Kern der Dehn-Invariante besteht ja gerade aus gewichteten Kantenwinkeln, die in 3.2.2.2 als „Masse“ bezeichnet werden. Wir finden sie vereinfacht – die Kantenwinkel sind nur multiplikativ durch die Kantenlängen gewichtet – in der gewichteten Winkelsumme wieder.
Die Dehn-Invariante ist jedoch reicher. Das Winkelsortiment enthält zusätzlich zu den vorhandenen Kantenwinkeln noch π. Dies verdeutlicht einen wesentlichen Unterschied zwischen der Zerlegung eines Polyeders in Tetraeder und der Zerlegung eines Polygons in Dreiecke. Die Innenwinkelsumme eines ebenen Dreiecks ist konstant und gleich π. Ein räumliches Analogon zur Innenwinkelsumme ist nicht erkennbar und auch nicht begrifflich analog zu erfassen, da es dieses nicht geben kann. Die Aufnahme von π in das Winkelsortiment ermöglicht jedenfalls den Vergleich mit der ebenen Situation. Summieren sich Kantenwinkel zu π auf, stellen sie (wie in der ebenen Situation auch) kein Problem für die Zerlegungsgleichheit dar. Dies wurde exemplarisch in 3.2.2.2 an verschiedenen Beispielen betrachtet.
Ein zweiter begrifflicher Kern der Dehn-Invariante besteht in der Gewichtungsmöglichkeit der unterschiedlichen Kantenwinkel. Die Setzung $f(\pi) = 0$ ist sehr elegant gewählt, ebenso die Linearität von f. Ein irrationaler Kantenwinkel stellt kein Problem dar, wenn es einen oder mehrere Komplementärwinkel zu π gibt. Die Dehn-Invariante ist gerade in dieser Hinsicht invariant. Dies erklärt den auf den ersten Blick etwas merkwürdigen Begriff der

„Invariante“. Ein weiterer Aspekt: Die Summe der Dehn-Invarianten ist invariant bei Zerlegungen.
Nötig für das Verständnis des Funktionals f der Dehn-Invariante ist die Linearität von f und ein Verständnis für die Erzeugung einer $\mathbb{Q}$-linear abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Ein Verzicht auf diese Begrifflichkeiten aus der Linearen Algebra ist möglich. Dies ist das Interessante am Ansatz von (Wittmann, 2012) und dem neueren Ansatz von (Aigner, et al., 2015). Zugleich wird aber eine sehr aufwändige elementare Sekundärbegriffsbildung, bei (Wittmann, 2012) eine „approximierte erweiterte Winkelsumme“, bei (Aigner, et al., 2015) das „Perlenlemma“ und das „Kegellemma“, die in letzter Konsequenz auf dem Wesensunterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen und der Approximierbarkeit reeller Zahlen durch rationale Zahlen beruhen, erforderlich. Durch die umfangreiche Sekundärbegriffsbildung leidet die Übersichtlichkeit in der Gedankenführung, wodurch die Ansätze überelementarisiert erscheinen. Und natürlich erkennt man im Umkehrschluss auch die gedankliche Bedeutung und die Strahlkraft der in der Linearen Algebra so wirkmächtigen Begriffe der Linearität und des Vektorraums.

Die Ebenen der Elementarisierung sind in dem Ansatz von (Wittmann, 2012) und in dem neueren Ansatz von (Aigner, et al., 2015), verglichen mit dem älteren Ansatz von (Aigner, et al., 2000), unterschiedlich.
Eine noch intensivere Betrachtung der beiden Elementarisierungsansätze zeigt eine Fokusverschiebung. Im Konzept der Dehn-Invariante bleibt der Fokus primär immer auf den Kantenwinkeln, die das entscheidende Geheimnis in sich tragen. Im Konzept der gewichteten Winkelsumme wird der Fokus schnell auf die Kantenlängen und ein Wechselspiel zwischen Irrationalität und Rationalität verschoben. Die Entdeckung im eigentlichen Wortsinn kann nicht so umfangreich gelingen. Diese Fokusverschiebung sieht man auch sehr schön im Beweis der elementarmathematischen Fragestellung (3.2.2.7): Da ein Nachweis der Irrationalität von $\frac{1}{\pi} arcccos \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$ nicht problemlos möglich ist, wird diese offene Frage durch eine geschickte Beweislogik in eine beantwortbare Frage über die Irrationalität von Seitenlängen transformiert und so gelöst.

Ein Vergleich mit der historischen Genese der Fragestellung des dritten Hilbertschen Problems ist ebenfalls interessant und aufschlussreich. Gerling bleibt nicht an problematischen Kantenlängen hängen, was in seinen Worten klar zum Ausdruck kommt: „… und ist mir nur das dabei merkwürdig erschienen, daß alle, auch die verschiedenst angefangenen immer endlich darauf zurückkommen, zu beweisen: daß 2 dreiseitige Pyramiden gleich groß sind, wenn in ihnen ein Dreieck ABC kongruent und eine Kante in jeder (AD und AE) durch einen Punkt A desselben beiderseits gleich“ (3.2.1). Die Lösung liegt also im Spiel der Kantenwinkel. Hier verbirgt sich das mathematische Geheimnis.

Im Sinne Klafkis ermöglichen beide Ebenen der Elementarisierung Bildung und damit eine Förderung der mathematischen Begabung. Denn Bildung ist „jenes Phänomen, an dem wir – im eigenen Erleben oder im Verstehen eines anderen Menschen – unmittelbar der Einheit eines objektiven (materialen) und eines subjektiven (formalen) Momentes innewerden“ (2.2.4.1). Bildung ereignet sich zwischen einem „Aufgehen allgemeiner Einsichten, Erlebnisse, Erfahrungen auf der Seite des Subjekts“ (ebd.) und einem „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (ebd.).
Beides ist in den zwei unterschiedlichen Ansätzen möglich. Die Frage nach der Wahl der Elementarisierungsebene kann man idealerweise unter Berücksichtigung der Prinzipien einer personorientierten Begabungsförderung (Eigen-Sinn, Autorschaft, Relationalität, Prozess, 2.1.1.3) klären.
In jedem Fall wird man sich auch an der kategorialen Idee Klafkis orientieren: „Jeder erkannte oder erlebte Sachverhalt auf der objektiven Seite löst im Zögling nicht nur eine subjektive, ‚formale' Kraft aus oder ist Übungsmaterial solcher subjektiven Kräfte oder formal verstandener Methoden, sondern er ist – in einem übertragenen Sinne – selbst Kraft, insofern – und nur insofern – er ein Stück Wirklichkeit einschließt und zugänglich macht“ (2.2.4.1). In mathematischer Hinsicht stellt sich daher die Frage: Von welcher Elementarisierung geht mehr Kraft aus? Denn an der Schaltstelle des Elementaren greift die Lehrperson in den fachlichen Begabunsgprozess ein sowohl mit der Perspektive des Lernenden als auch mit der Perspektive der begabungsstiftenden Fachwissenschaft (ebd.).

Auf der einen Seite liegt die Kraftentfaltung in einer Vertiefung der Einsichtsmöglichkeiten in das Wechselspiel zwischen rationalen und reellen Zahlen und in die Anwendbarkeit elementarer Beweismethoden (wie etwa dem Schubfachprinzip), auf der anderen Seite in einer Erweiterung der Einsichtsmöglichkeiten in das Thema Winkelsumme im Dreidimensionalen mit Anschlussmöglichkeiten für weitere umfangreiche kategoriale Begabungserlebnisse.

Schließlich hängen unterschiedliche Ebenen der Elementarisierung mit unterschiedlichen Ebenen der Verständnistiefe zusammen. Im einen Fall wendet man das Rechenschema der gewichteten Winkelsumme und das damit zusammenhängende Beweisschema auf jede neue Situation an und lässt sich ggf. jedes Mal wieder neu überraschen, was herauskommt. Im anderen Fall versucht man anhand einiger exemplarischer Beispiele das Wesen der Dehn-Invariante zu erkunden, um so das allgemeine Prinzip zu verstehen und in verallgemeinernder Weise die Leitfragen in ihrem einheitlichen Kern zu beantworten.

Ein Vergleich der unterschiedlichen Elementarisierungsebenen der Beweise (elementargeometrisch und analytisch) der Aussagen von Langrange bzw. Gauß zur dichtesten Kreisgitterpackung bzw. Kugelgitterpackung lässt analoge Schlüsse auf die Ebenen der Verständnistiefe zu (3.1.1, 3.1.3, 3.1.6.1, 3.1.7). Auch das in verschiedenem Kontext betrachtete Prinzip der kürzesten Zeit bzw. das des kürzesten Weges (3.3.1.3, 3.4.2.4) führt ebenso wie die unterschiedlichen Elementarisierungen des Unendlichkeitsbegriffs (3.3.2, 3.4.2.2) zu offensichtlichen Ergebnissen über den Zusammenhang zwischen Elementarisierungsebene und Verständnistiefe.

Stets gilt: Mathematische Begabung (2.2.2) und mathematische Bildung (2.2.3) werden durch unterschiedliche Ebenen der Elementarisierung in unterschiedlicher Weise entfaltet und gefördert (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.6.3, 3.1.6.4, 4.1, 4.2.3, 4.2.4).

3.3 Konzepte für die 11. Jahrgangsstufe – zwischen Enrichment und Akzeleration

Im Gegensatz zu den in 3.1 und 3.2 erörterten Unterrichtskonzepten, die unabhängig von Curriculumszwängen aus dem fachlichen Schatz der Mathematik heraus zur Begabungsförderung im Rahmen des SEM-Ansatzes entwickelt wurden, geht es hier um die Vorstellung und Analyse von Unterrichtskonzepten im Rahmen des curricularen Mathematikunterrichts der 11. Jahrgangsstufe am Gymnasium unter der Prämisse einer personorientierten Begabungsförderung.
Die Rückkehr zu einer standardmäßig neunjährigen Lernzeit am Gymnasium eröffnet insbesondere in dieser Jahrgangsstufe einen größeren Spielraum zur Begabungsförderung im stundenplanmäßigen Mathematikunterricht vor dem Hintergrund des gesellschaftlichen Auftrags einer begabungsgerechten Schule (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2, 4.1, 4.2).
Enrichment und Akzeleration stellen dabei keinen Gegensatz zum regulären Unterricht dar, sondern können das Anliegen einer personorientierten Begabungsförderung im Regelunterricht wirksam unterstützen.

3.3.1 Elementarisierung in zwei Strängen: Einführung in die Analysis

Die Infinitesimalrechnung, die auf Leibniz und Newton zurückgeht, stellt seit der Gründung des neunjährigen Gymnasiums durch Wilhelm von Humboldt einen unbestrittenen curricularen Lern- und Bildungsgegenstand dar, der in der Regel einen wesentlichen Teil der Abiturprüfung im Fach Mathematik bestimmt.
Entsprechend umfangreich ist das Angebot an Lehrbüchern und didaktisch-methodischen Abhandlungen (Greefrath, et al., 2016) (Bruder, et al., 2015 S. 149f.). Hier geht es um ein Unterrichtskonzept, das mehr sein soll als nur ein ideal ausgestalteter Leitfaden zur Prüfungsvorbereitung. Formal spiegelt sich dies in zwei Strängen wieder – einem Ideenstrang und einem Rechenstrang. Dem Enrichment-Ansatz begegnen wir also hier in einer besonderen Strukturierung

und Akzentuierung der Lerninhalte, so dass möglichst viele Schüler vom Prinzip einer personorientierten Begabungsförderung im Regelunterricht profitieren können (2.1.1, 2.1.1.2, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3, 2.2.2, 3.1.6.2, 3.3.2, 3.4, 4).

3.3.1.1 Personorientierte Begabungsförderung für alle Schüler

Grundprinzip einer personorientierten Begabungsförderung ist, dass sie das begabte Kind in den Mittelpunkt stellt. „Und das nutzt hochbegabten wie allen Kindern und Jugendlichen“ (2.1). Wenn es gelingt, in einem integrativen Ansatz breiter Begabungsförderung „im Sinne von ‚a rising tide lifts all the ships‘ “ (Weigand, et al., 2014 S. 253) die Neugierde möglichst vieler Schüler zu wecken, ihre Freude zu entfalten und ihre Fähigkeiten und Begabungen zu entwickeln, ist ein wesentliches Ziel personorientierter Begabungsförderung im Mathematikunterricht erreicht (2.1.3, 2.2, 3.3.2, 3.4, 4.1, 4.2.4).

Wie in 2.1.2.1 ausgeführt wurde, sind vom Ansatz des personorientierten Lehrens und Lernens grundsätzlich keine neuen Lehrformen, Lernformen, Methoden, etc. zu erwarten. Der Mehrwert wird anders begründet:

> *„Im Kern geht es beim personorientierten Lernen in der Abgrenzung zur individualisierenden Methodik vor allem um den Prozess der subjektiven Auseinandersetzung mit den Inhalten auf einem für den Einzelnen höchstmöglichen Lernniveau.“ (2.1.2.1)*

Ziel ist es daher, auf der Grundlage der personalen Prinzipien Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess und Relationalität (Abbildung 2 S.16) dem Lernen eine Sinndimension zu geben. Die individuelle Auseinandersetzung mit selbstgewählten Fragen und Themen soll zu einer Verständnistiefe führen, die eine wertgeleitete Integration des Lerngegenstandes in die Person des Lernenden zulässt (ebd.).

Mit Blick auf den Analysis-Unterricht bedeutet dies, dass es vorrangig nicht mehr nur darum geht, „im Leistungsnormrahmen einer Schule erfolgreiche Leistungsträger hervorzubringen“ (ebd.).

> *„Unterricht und Schule erhalten gegenüber dem bisherigen Selbstverständnis eine veränderte Bedeutung. Sie werden zu anregenden Räumen des Lebens und der Auseinandersetzung mit dem Gelernten über das Gelernte hinaus mit sich selbst. … In diesem Sinne*

> *können sie zu prägenden Lernräumen der Entfaltung und Selbstgestaltung der Persönlichkeit und der Mitgestaltung der Umwelt werden. Wissen und Persönlichkeitsgestaltung sind zwei aufeinander bezogene Größen dieses Bildungsverständnisses.“ (ebd.)*

Es ist klar, dass die Prämisse einer individuellen Auseinandersetzung mit selbstgewählten Fragen und Themen ein großes Spannungspotenzial zu den üblicherweise formulierten curricularen Anforderungen und Erwartungen beinhaltet. Insbesondere stellt dies vor dem Hintergrund, dass die selbstgewählten Fragen und Themen der Schüler nicht automatisch mit den selbstgewählten Fragen und Themen von Sir Isaac Newton oder von Gottfried Wilhelm Leibniz im 18. Jahrhundert übereinstimmen, eine große Herausforderung an die Lehrenden dar, die Neugierde in diese Richtung zu lenken (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.5, 2.1.3.2, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2, 4.1, 4.1.2, 4.2.1).

Neben den fünf Bereichen einer Didaktik der Begabungsförderung (Identifikation, Initiation und Faszination, innere Differenzierung, äußere Differenzierung, Anerkennungskultur), neben begabungsfördernden Lernarrangements im Regelunterricht, neben kognitiv anspruchsvollen Aufgabenstellungen, die die Möglichkeit „vertiefter und weiterführender Lernprozesse für … begabte Schüler eröffnen und vorhandene Begabungspotenziale zum Ausdruck bringen“ (2.1.2.2), wie sie in 2.1.2.2 dargestellt wurden, soll im nachfolgenden Unterrichtskonzept ein weiterer Ansatz für begabungsfördernden Mathematikunterricht herausgearbeitet werden.
In einem ersten Strang des Konzeptes geht es um die Ideen der Analysis, in einem weiteren, zweiten Strang um das Handwerk der Analysis (2.2.2). Denn beides ist für ein begabungsförderndes Verständnis nötig. Fingerfertigkeit und Fehlerkorrekturmechanismen im Rechenkalkül der höheren Mathematik sind für ein erfolgreiches Bestehen der Abschlussprüfung erforderlich; in dieser Weise muss sich personorientierte Begabungsförderung an der Realität der Abiturprüfung messen lassen. Aber auch die Entwicklung der Ideen, der Begriffe, die Interpretation des Gedachten kann nicht hinter einem Prüfungstraining zurückstehen; es ist gerade diese Komponente einer personorientierten Begabungsförderung, die ein tieferes Verständnis und eine anhaltende

Wertschätzung für mathematisches Denken über das schulische Lernen hinaus in der mathematisch begabten und gebildeten Person verankern kann (2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2). „Genuine mathematics, … its methods and its concepts, by contrast with soulless calculation, constitute one of the finest expressions of the human spirit." (2.2.3) formulierte Hilton als Auftrag an alle Lernenden und Lehrenden (2.1.1.5, 4.1).

3.3.1.2 Die Bedeutung von Kernideen für das Unterrichtskonzept

Bei der Darstellung eines Unterrichtskonzepts für den Anfangsunterricht in Analysis steht das didaktische Prinzip der Elementarisierung nicht im Vordergrund. Der Schatz an Literatur ist reich, für jede Elementarisierungsebene (3.2.5) findet man genügend Material. Das Kategoriale der Analysis ist vielfach dargestellt (Greefrath, et al., 2016) (Heuser, 1988) (Keil, et al., 1992) (Baierlein, et al., 1994), ebenso die Aspekte einer objektiven materialen Bildung und die Aspekte einer subjektiven formalen Bildung im Sinne Klafkis (2.2.4.1).

Im Zentrum steht das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip nach Wagenschein (2.2.4.2). Mit ihm gelingt eine Herausarbeitung der Fragestellungen, der Antworten, der Ideen und der Geistesgeschichte der Infinitesimalrechnung.

Sie werden mit Hilfe von Kernideen im Sinne des dialogischen Prinzips nach Gallin und Ruf dargestellt (2.2.4.3, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.6, 3.2.3.3). Denn sie lenken die „Aufmerksamkeit auf etwas, was fundamentaler ist als jeder fachliche Lehrsatz und jede technische Fertigkeit: auf tief in der Person verankerte Haltungen und Grundentscheidungen, die letztlich über Erfolg oder Misserfolg in einem Fachgebiet entscheiden" (2.2.4.3).

Mit Blick auf die vertikale Dimension des Lernens im dialogischen Prinzip werden drei Merkmale unterschieden:

> *„Biographischer Aspekt (Ich)*
>
> *Eine Kernidee ist eine persönlich gefärbte und pointiert formulierte Aussage über einen komplexen Sachverhalt, die meinem Gesprächspartner ohne Umschweife klar macht, was für mich der Witz der Sache ist.*

Wirkungsaspekt (Du)

Kernideen fordern das Gegenüber heraus, sein eigenes Verhältnis zum Stoff zu klären und die persönlichen Triebkräfte zu aktivieren. Sie offerieren Sicherheit und Orientierung, ohne die Eigentätigkeit einzuschränken.

Sachaspekt (Wir)

Kernideen sind der Auftakt zum Lernen auf eigenen Wegen. Sie fangen ganze Stoffgebiete in vagen Umrissen ein, rücken eine provozierende Eigenheit in den Vordergrund und laden zu einem partnerschaftlichen Dialog ein." (ebd.)

Die horizontale Dimension im dialogischen Prinzip kommt im Folgendem zum Ausdruck:

„Kernideen sind das Instrument, mit denen eine Verbindung zwischen den Fragen der Lernenden und den Antworten der Fachgebiete hergestellt werden soll. Zündet eine Kernidee, ist der Weg ins Fachgebiet frei: Jetzt sind fachliche Antworten willkommen, weil sie zu persönlichen Fragen passen." (ebd.)

Auf diese Weise können Kernideen im Analysis-Unterricht mathematische Begabungsförderungsprozesse initiieren und unterstützen (2.1.1.1, 2.1.1.4, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2, 4.1) und schließlich ein Bildungserlebnis im Sinne Hiltons „genuine mathematics … constitute one of the finest expressions of the human spirit" (3.3.1.1) oder im Sinne Kirchgrabers (3.2.2.1), aber auch in der allgemeinen Auffassung nach Klafki, Wagenschein und Humboldt ermöglichen (2.2.4.1, 2.2.4.2, 2.1.1.1, 4.2, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4).

3.3.1.3 Kernideen des Unterrichtskonzeptes

Das nachfolgend dargestellte Unterrichtskonzept für den Analysis-Unterricht wurde mehrfach in mathematisch-naturwissenschaftlichen Klassen an einem neunjährigen Gymnasium erprobt. Es kann bei einer konsequenten Anwendung des dialogischen Prinzips grundsätzlich in jedem Analysis-Anfangsunterricht verwendet werden.

Einige Kernideen werden exemplarisch ausgeführt; andere im Hinblick auf die Gesamtstringenz des Gedankengangs nur genannt. Es erfolgt, wie in 3.3.1.1 begründet, eine Klassifizierung in Ideenstrang (I) und Kalkülstrang (K).

Wie an anderer Stelle (3.2.3.3) schon ausgeführt, können Kernideen nur Wegweiser für eine in jeder Hinsicht personorientierte und situationsadäquate Ausgestaltung des Unterrichtskonzeptes durch Unterrichtsmaterialien, Medien, Tafelbilder, Unterrichtsgesprächsverläufe, Stundenkonzepte, etc. sein (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6.1, 3.1.6.2, 3.1.7, 3.2.3.3). Die konkrete Ausgestaltung der Kernideen muss in der jeweiligen Begabungsförderungssituation vor dem Hintergrund der Prämisse einer größtmöglichen, personorientierten Begabungsförderung im Rahmen des SEM-Modells erfolgen (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.3.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.6.4, 4.1, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.4).

Einführung – Was ist Analysis? (I)

Diese erste Kernidee soll bewusst Raum lassen für den biografischen Aspekt (3.3.1.2). Hier ist die Lehrkraft aufgefordert, zu artikulieren, was sie persönlich faszinierend an der Analysis findet. Weshalb sollen sich die Lernenden einlassen auf dieses neue Lerngebiet, diese neue Welt[68]?

Natürlich geht es um Funktionen, deren Eigenschaften und Änderungsverhalten. Aber dies interessiert nicht alle Schüler. Manche sind bereits hier der Auffassung, dass für ihre persönliche Autorschaft und ihren persönlichen Begabungsentwicklungsprozess die maximal erträgliche Dosis an Funktionenkalkül bereits überschritten ist, bevor es richtig losgeht.

Faszinierend hingegen ist die Suche nach dem unendlich Großen und nach dem unendlich Kleinen. Faszinierend ist das Erfassen mit Begriffen, die der endlichen Erfahrungswelt entnommen sind (da wir Menschen über keine andere verfügen). So lässt sich die Tür zu einer personorientierten Begabungsförderung aufstoßen.

Der Grenzwert – ein erster Eindruck vom unendlich Großen und vom unendlich Kleinen (I)

Diese Kernidee gehört zum Ideenstrang. Es muss die Idee von der Erfassung des unendlich Großen und des unendlich Kleinen und ihre begriffliche Formulierung im Vordergrund stehen (Ich-Aspekt, 2.2.4.3), nicht die Algebra.

Anders als bei einer enzyklopädischen Zusammenfassung des bisherigen Wissens über Funktionen aus der Sekundarstufe I, die die guten Schüler nur langweilen

[68] Vgl. Humboldt (2.1.1.1), aber auch Hesse (2.2.5).

und die schwächeren Schüler in ihrer Frustration nur bestärken kann (3.3.1.2), geht es mit dieser Kernidee direkt in ein zentrales Gebiet der Analysis.
Anhand der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2^{-x}$$

und ihres Graphen G_f kann man die Leitfrage (DU-Aspekt, 2.2.4.3) „Was bedeutet: Der Graph G_f nähert sich immer mehr der x-Achse an?“ untersuchen.
In entdeckender Weise findet man auch heraus, dass es schönere und (auf den ersten Blick) weniger schöne „Lasso“-Werte gibt.
Schöne „Lasso“-Werte sind $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, ..., da ja

$f(x) < \frac{1}{4}$ für alle $x > 2$

$f(x) < \frac{1}{8}$ für alle $x > 3$ usw.

Weniger schöne „Lasso“-Werte sind $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, ..., da

$f(x) < \frac{1}{10}$ für alle $x >$?

nicht so einfach angegeben werden kann, aber dennoch interessant ist. Die algebraischen Kenntnisse helfen:

$$f(x) < \frac{1}{10} \text{ falls } \quad 2^{-x} < \frac{1}{10}$$
$$-x < log_2\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$x > log_2(10)$$
$$x > 3{,}32$$

Das auf den ersten Blick weniger Schöne hat jedoch einen besonderen Reiz, es lässt sich leicht verallgemeinern auf ein Weierstraßsches ε-„Lasso“:

$$f(x) < \varepsilon \text{ falls } \quad 2^{-x} < \varepsilon$$
$$x > -log_2(\varepsilon)$$

Wenn für jedes noch so kleine ε-„Lasso“ die Funktion f ab einem bestimmten x_ε in dieses ε-„Lasso“ passt, dann ist die Leitfrage beantwortet. Der Graph G_f nähert sich immer mehr der x-Achse an.

Nun folgt noch der WIR-Aspekt (ebd.) der Kernidee.
Wenn wir die Schreibweise

$$f(x) \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow +\infty \text{ oder } \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$$

verwenden, meinen wir:

Definition: Gegeben ist eine Funktion mit rechtsseitig unbeschränktem Definitionsbereich und positiven Funktionswerten. Falls nun für jedes (beliebig kleine) $\varepsilon > 0$ eine Schranke x_ε existiert, so dass $f(x) < \varepsilon$ für alle $x > x_\varepsilon$ ist,

dann gilt $f(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow +\infty$ oder $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$,

und der Graph G_f besitzt eine waagrechte Asymptote.

Hier ist es wichtig, dass diese gehaltvolle Definition noch einmal griffig verbalisiert wird, etwa in der Art des ICH-DU-WIR-Prinzips (ebd.):

1) Gib mir ein beliebiges $\varepsilon > 0$.
2) Ich berechne ein x_ε mit folgender Eigenschaft: $f(x) < \varepsilon$ für alle $x > x_\varepsilon$.
3) Dann sagen wir: $f(x) \longrightarrow 0$ für $x \longrightarrow +\infty$ oder $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$
4) Wir stellen uns vor: eine waagrechte Asymptote von G_f (hier: x-Achse)

In einer Weiterführung dieser Kernidee erfolgt die Verallgemeinerung auf beliebige waagrechte Asymptoten.

Bestimmung von Grenzwerten (K)

Diese Kernidee gehört zum Kalkülstrang.

Hier geht es um Grenzwerte von Funktionen, deren Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten für $x \longrightarrow +\infty$ oder $x \longrightarrow -\infty$.

Die Lernenden (und auch die Lehrenden) werden dankbar sein für weitere, automatisierbare Methoden zur Grenzwertbestimmung.

Da es sich jedoch nicht um grundsätzlich und für das Verständnis der Analysis wesentliche neue Ideen und Begriffsbildungen handelt, sondern um Rechenkompetenzen in der Art von Fingerfertigkeiten, erfolgt die Zuordnung zum Kalkülstrang.

Funktionenscharen (K)

Das Verhalten von Funktionen für $x \longrightarrow \pm\infty$ (I)

Diese Kernidee enthält wieder eine besondere Spannung.
Es geht um Konvergenz und um Nicht-Konvergenz, um bestimmte Divergenz und unbestimmte Divergenz.
Es geht um die Greifbarkeit von Funktionsverhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$ und letztlich um ihre „Be-Greifbarkeit".
So wie es für das unendlich Kleine ein ε-„Lasso" gibt, gibt es für das unendlich Große (hier die bestimmte Divergenz einer Funktion) ein N-„Lasso" in analoger Begrifflichkeit. Dies ist erstaunlich und faszinierend zugleich.

Funktion und Umkehrfunktion (K)

Die Sekantengleichung – die Idee der linearen Approximation (I)
Diese Kernidee verlagert den Fokus in das „Innere" des Definitionsbereichs. Zugleich lernen die Schüler das Grundparadigma der Analysis kennen.

Von der Sekante zur Tangente – die Ableitung in einem Punkt (I)
Diese Kernidee spitzt zu. Es geht um die bestmögliche lineare Approximation in einem Punkt.

Differenzenquotient – Differentialquotient – Ableitung (K)

Die physikalische Bedeutung der Ableitung (I)
Diese Kernidee ist sehr vielfältig ausgestaltbar. Natürlich wird Newton als Mitbegründer der Analysis zur Sprache kommen.
Aus Sicht Newtons kann dies einen ICH-Aspekt (Biografischen Aspekt) der Kernidee generieren: Die zweimalige Ableitung einer Zeit-Orts-Funktion im Schwerefeld der Erde (Parabel) führt zur Erdbeschleunigung. Dies war für den damaligen Forscher faszinierend und ist es auch heute noch im Sinne des genetisch-exemplarisch-sokratischen Prinzips nach Wagenschein (ebd.).
Aber auch Kernideen, die den DU-Aspekt (Wirkungsaspekt) oder den WIR-Aspekt (Sachaspekt) enthalten, sind hier in vielfältiger Weise denkbar.

Die Ableitungsfunktion - Bestimmung und Eigenschaften (K)
Zusammenhang Funktion – Ableitungsfunktion (K)

Ableitungsregeln (K)

Das Krümmungsverhalten einer Funktion (I)
Diese Kernidee kann man ebenfalls dem Kalkülstrang (K) zuordnen.
Jedoch liegt hier eine besondere Begriffsbildung vor, die nicht sofort aus dem Grundparadigma der linearen Approximation folgt.
Es ist faszinierend, dass die Ableitung der Ableitung eine grafische Interpretation besitzt. Mithin liegt hier ein schönes Spielfeld für genetisch-sokratisch-exemplarisches Lernen in einem durchaus kalküldominierten Bereich vor.

Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen (K)

Symmetrieeigenschaften von Funktionen (I)
Auch diese Kernidee kann man dem Kalkülstrang zuordnen.
Allein die ästhetische Komponente spricht bei entsprechender methodisch-didaktischer Aufbereitung verschiedene Aspekte einer personorientierten Begabungsförderung an.

Kurvendiskussion „rückwärts“ (K)

Extremwertaufgaben – Optimierungsprobleme (I)
Hier sind verschiedene Aufgaben mit Bezug zur Geometrie, zur Physik, zur Betriebswirtschaftslehre, zur Volkswirtschaftslehre, etc. denkbar.
Wegen des Querbezugs zu 3.4.2.4 soll ein Aufgabeninhalt zum Prinzip der kürzesten Zeit (auch: Fermatsches Prinzip) dargestellt werden. Der Einstieg beginnt mit einer Idee des amerikanischen Physikers Feynman:

It turns out that light seems to go slower in water than it does in air (I will explain why in the next lecture), which makes the distance through water more "costly," so to speak, than the distance through air. It's not hard to figure out which path takes the least time: suppose you're the lifeguard, sitting at S, and the beautiful girl is drowning, at D (Fig. 30). You can run on land faster than you can swim in water. The problem is, where do you enter the water in order to reach the drowning victim the fastest? Do you run down to the water at A, and then swim like

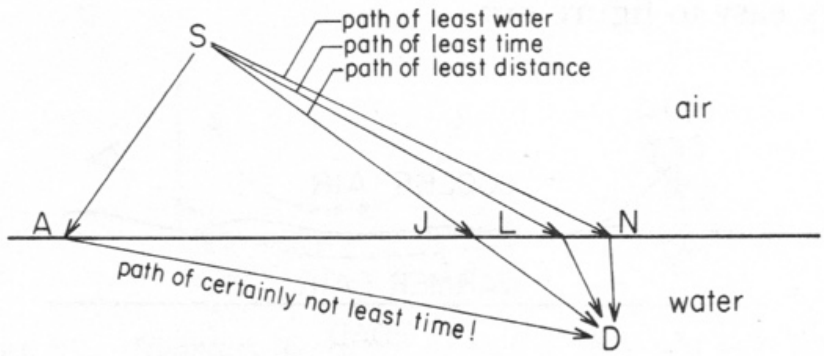


FIGURE 30. *Finding the path of least time for light is like finding the path of least time for a lifeguard running and then swimming to rescue a drowning victim: the path of least distance has too much water in it; the path of least water has too much land in it; the path of least time is a compromise between the two.*

hell? Of course not. But running directly toward the victim and entering the water at J is not the fastest route, either. While it would be foolish for a lifeguard to analyze and calculate under the circumstances, there is a computable position at which the time is minimum: it's a compromise between taking the direct path, through J, and taking the path with the least water, through N. And so it is with light—the path of least time enters the water at a point between J and N, such as L.

aus (Feynman, 1985 S. 51f.)

Für die Modellierung ist die Laufzeit t in Abhängigkeit von der x-Koordinate des Punktes L zu minimieren.
Dies führt mit u, v als Geschwindigkeiten in Luft bzw. Wasser zum Ansatz

$$t(x) = \frac{k}{u} + \frac{l}{v}$$

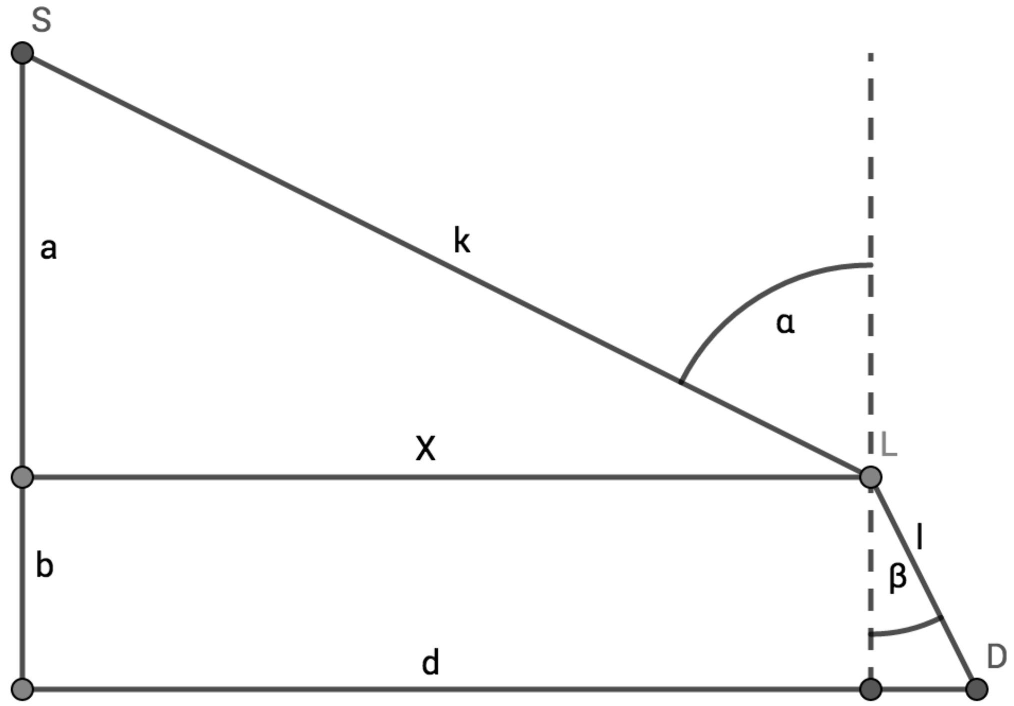


Abbildung 32 Prinzip der kürzesten Zeit

Unter Verwendung des Satzes von Pythagoras erhält man:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v}$$

Ohne Verwendung von Mitteln der Analysis kann man hier versuchen, das Minimum experimentell für vorgegebene Werte, beispielsweise mit Hilfe einer Wertetabelle, zu lösen. Natürlich ist auch der Einsatz eines CAS zur numerischen Bestimmung des Minimums möglich.
Mit Hilfe der Analysis erhält man für die Ableitung:

$$t'(x) = \frac{1}{u}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{1}{v}\frac{-2(d-x)}{2\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}$$

Diese ist 0 für

$$\frac{xv}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{(d-x)u}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}},$$

was zu einer Gleichung vierten Grades in x führt, die elementar mit Schulkenntnissen[69] nicht zu lösen ist.

Einen Ausweg bietet die Idee des Brechungsgesetzes aus der Physik. Sie führt hier zu einer indirekten Lösung. Mit $\sin(\alpha) = \frac{x}{k}$ und $\sin(\beta) = \frac{d-x}{l}$ erhält man als Bedingung für die Nullstelle der Ableitung und damit als Bedingung für den schnellsten Weg:

$$\frac{xv}{k} = \frac{(d-x)u}{l}$$

und somit

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{u}{v} \ .$$

Dies ist (auch wenn x nicht konkret gelöst ist) ein faszinierendes Ergebnis.

Der Rettungsschwimmer wird im Notfall intuitiv richtig schwimmen. (*)

Das Ausrechnen der richtigen Lösung gelingt nicht mit einem direkten, einfachen Rechenweg. (*)

Die Natur, konkret das Licht, beherrscht die Infinitesimalrechnung in Echtzeit. Die Antwort darauf gibt die Wellentheorie des Lichts. (*)

Dieses Ergebnis ist, namentlich im Hinblick auf die drei Aspekte (*), auch im Vergleich mit 3.1 faszinierend. Es ergeben sich folgende Analogien:

> Kinder packen Kugeln intuitiv richtig.
>
> Das Ausrechnen der richtigen Lösung gelingt nicht auf einem einfachen Weg.
>
> Die Natur, beispielsweise ein Goldkristall, beherrscht die Konvexgeometrie.

Auch im Bereich der Kugelpackungen findet man weitere Anregungen für Extremwertaufgaben im Kontext der Analysis[70].

Der Zwischenwertsatz (I)

---

[69] Auch die Anwendung der Cardano-Formel führt nicht zu einem befriedigenden Ergebnis.

[70] Vgl. (Leppmeier, 1997 S. 76f.)

Die Kernidee liegt hier auf der Hand. Es wird ein intuitiver Zugang zum Nullstellensatz formuliert und davon der Zwischenwertsatz abgeleitet.

Stetigkeit – langweilig oder beruhigend (I)

Die Kernidee besteht in einer Auflösung des Wortspiels. Stetigkeit ist nötig für den Nullstellensatz, also beruhigend.

Stetigkeit ist keinesfalls langweilig, denn hier erscheint wieder die „Lasso“-Idee nach Weierstraß. Sie fängt das unendlich Kleine ein, das Stetige, und das unendlich Große. Ein Faszinosum.

Stetige Fortsetzung – Scharnier zwischen Stetigkeit und Grenzwert (I)

Hier beginnt ein Spiel mit besonderen Funktionen wie $\frac{\sin(x)}{x}$, die immer wieder auch in einem weiteren Sinne philosophische Fragen berühren können.

Die horizontale Dimension der Kernideen (2.2.4.3) kann hier entfaltet werden.

Grenzwert – Fortsetzung (K)

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (I)

Wie beim Zwischenwertsatz wird auch hier ein intuitiver Zugang zum Satz von Rolle formuliert und davon der Mittelwertsatz abgeleitet.

Differenzierbarkeit – beruhigend oder langweilig (I)

Das Wortspiel zeigt bereits die strukturelle Querverbindung zur Stetigkeit an.

Die „Lasso“-Idee ist in diesem Zusammenhang nicht mehr ergiebig. Dennoch ist Differenzierbarkeit keinesfalls langweilig, wie ein Ausblick in Richtung Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigen kann. Der Spannungsbogen bleibt offen.

Zusammenschau - Ausblick

Wie bei der Einführung ist hier wieder ausreichend Raum für den ICH-Aspekt der Kernideen im Besonderen und für die Prinzipien eines personorientierten, begabungsfördernden Unterrichts (Reflexion, Dialog, Autorschaft, Eigensinn) im Allgemeinen (2.2.4.3, 2.1.1.3, 2.2.2, 3.1.6, 3.2.3, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.4).

Das vorgestellte Unterrichtskonzept stellt eine milde Form des Enrichment dar (2.1.3.3). Es wurde dargelegt, dass bereits die bewusste Gruppierung von Lerninhalten und Bildungsgegenständen und die damit verbundene Artikulation der Kernideen eine personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht (2.1.2.5) zu unterstützen vermag und diesen öffnet für die didaktischen Prinzipien und Methoden des personorientierten Lehrens und Lernens (2.1.2.1, 2.1.2.4, 2.1.2.5). Zudem wurde exemplarisch gezeigt, dass auch der curriculare Unterricht viele Anknüpfungspunkte für eine sanfte Form des Enrichment in der Klasse bieten kann.
Wenn es gelingt, die Begeisterung so weit zu steigern, dass die Lerninhalte bei gleichem Kompetenzniveau schneller begriffen werden, ergibt sich eine milde Form der Akzeleration im Klassenverband, die dann wieder Spielräume für ein weitergehendes Enrichment und einen anhaltenden Begabungsförderungsprozess für viele Schüler im Klassenverband eröffnet (2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 4.1, 4.2, 4.2.1, 4.2.3, 4.2.3.1, 4.2.3.2, 4.2.4).

3.3.2 Gewinn einer sanften Akzeleration – das Unendliche

Die Thematik des Unendlichen stellt nicht nur unbestritten einen mathematischen Bildungsgegentand dar, sie war in der Kulturgeschichte der Mathematik immer eine befruchtende Fragestellung für die Entwicklung der gesamten Disziplin. Sie ist Teil des „Regulären“ nach Gallin und Ruf (2.2.4.3), Teil des „Kategorialen“ nach Klafki (2.2.4.1), Teil der „Welt“ nach Humboldt (2.1.1.1).
Die Frage nach dem Unendlichen berührt das Personsein in besonderer Weise, das Personsein der heranwachsenden Lernenden in einer Welt, die begrenzt ist, aber oftmals unbegrenzt gedacht oder empfunden wird. Die Neugierde auf Antworten der Mathematik ist in der Regel sehr groß – bei allen Schülern.
Der mathematische Hintergrund wurde im Wesentlichen einem unveröffentlichten Manuskript einer Lehrerfortbildung zum Thema „Das

Unendliche in der Mathematik“, die vom 4.3. bis 8.3.1996 an der Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen stattfand, entnommen (NN, 1996).

3.3.2.1 Didaktische Überlegungen

Grundsätzlich bietet die Thematik einen leichten Zugang zu den personalen Prinzipien Einmaligkeit, Autorschaft, Prozess, Relationalität (2.1.2.1). Auch die didaktischen Prinzipien der Elementarisierung, des genetisch-sokratisch-exemplarischen Lernens und des Lernens im Dialog lassen sich leicht verwirklichen (2.2.4). Nicht zuletzt passen die wesentlichen Aspekte für Kernideen (vertikale Dimension mit ICH-Aspekt, DU-Aspekt, WIR-Aspekt, horizontale Dimension, 2.2.4.3). Die dazu detailliert in 3.3.1.2 ausgeführten Gedanken gelten auch hier.
Da es bei dieser Thematik weniger um kalkülhaftes Rechnen, sondern vielmehr um die Entwicklung mathematischen Denkens geht, fällt die Freude an diesem Erlebnis von Mathematik leicht (2.2.2, 2.2.5, 3.4, 4.1, 4.2.1, 4.2.3.1, 4.2.3.2, 4.2.4).

3.3.2.2 Kernideen des Unterrichtskonzepts

Die Möglichkeit für das nachfolgend vorgestellte Unterrichtskonzept entstand in einer engagierten Klasse einer 11. Jahrgangsstufe an einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium, nachdem das Curriculum für das Additum des ersten Schulhalbjahres schneller als erwartet bewältigt werden konnte.
Im Sinne von „…whatever curriculum challenge the teacher offers, it must incorporate Higher Order Thinking Skills (HOTS) not More of the Same (MOTS)“ (2.1.3.3) wurden daher neue Lerninhalte mit hoher Anschlussfähigkeit an das Kerncurriculum aufbereitet. Nach der Klassifizierung Müller-Oppligers für Fördermaßnahmen im Rahmen des SEM (ebd.) liegen zwei wesentliche Kriterien vor:

- *„Curriculum-Modifikationen im Sinne von Lehrplanstraffung (Compacting) für Schüler, die etwas bereits können und weniger Übungszeit benötigen; entsprechende Vertiefungsangebote und* *anregende Herausforderungen innerhalb der Lehrplaninhalte für die durch die Komprimierung frei werdende Lernzeit*

- *zusätzliche Lehr- und Lernangebote (Enrichment) über den regulären und normativen Lehrplan hinaus für Interessierte und Begabte“ (ebd.)*

Das Unterrichtskonzept stellt daher eine Form von Enrichment im Klassenverband dar (3.1.6.2, 3.3.1.3, 3.4.1, 3.4.2, 4.2.4).

Einführung in das Aktual-Unendliche nach Cantor (1845-1918)

Hier ist die Frage nach den Personen interessant. Wer war Cantor? Wer forschte noch in diesem Bereich?

Auch Galilei beschäftigte sich mit dieser Thematik, wie man dem folgenden fiktiven Dialog entnehmen kann:

> *„Galilei: Ich nenne nur ein einfaches Beispiel. Schreiben wir hier einmal die ganzen Zahlen, mit 0 beginnend, auf. Stellen wir uns die Zahlenreihe bis ins Unendliche fortgesetzt vor. Jetzt unterstreichen wir in dieser Folge die Quadratzahlen. Sehen Sie, je weiter wir gehen, desto seltener werden die Quadratzahlen und desto größer werden die Abstände zwischen je zwei aufeinanderfolgenden dieser Zahlen.*
>
> *Frau Niccolini: Wirklich, die Abstände sind 1, 3, 5, 7, 9, ..., eben die ungeraden Zahlen.*
>
> *Galilei: Genauso wie beim fallenden Stein die während gleicher Zeitabschnitte zurückgelegten Wege. Davon will ich aber jetzt nicht sprechen. Was uns jetzt interessiert, ist nur, dass die Quadratzahlen seltener werden; wenn ich nun behaupte, dass es weniger Quadratzahlen gib als ganze Zahlen, sage ich dann die Wahrheit?*
>
> *Frau Niccolini: Unbedingt.*
>
> *Galilei: Machen Sie jetzt einmal Folgendes. Schreiben Sie wieder die Folge aller ganzen Zahlen hin und unter jede Zahl deren Quadrat. Nicht wahr, in der zweiten Reihe stehen nur Quadratzahlen, und alle kommen genau einmal vor?*
>
> *01 2 3 4 5 6 7 8 9 10… 0*
> *1 4 9 16 25 36 49 64 81 …*
>
> *Frau Niccolini: So ist es.*
>
> *Galilei: Unter jeder Zahl steht eine Quadratzahl, und wenn zwei Zahlen verschieden sind, sind auch ihre Quadrate verschieden. Demnach stehen ohne Zweifel in der zweiten Reihe ebenso viele Zahlen wie in der*

ersten. Behaupten Sie jetzt noch immer, dass es weniger Quadratzahlen gibt als ganze Zahlen? Offenbar haben wir uns also geirrt, als wir sagten, es gäbe weniger Quadratzahlen als ganze Zahlen.

Frau Niccolini: Sie haben mich mit diesem Beispiel in Verwirrung gebracht. Was kann man denn daraus ersehen?

Galilei: Dass das, was im Endlichen gilt – etwa, dass der Teil immer kleiner ist als das Ganze – nicht unbedingt für das Unendliche gilt." (entnommen aus: Unterrichtsmaterialien Analysis STARK Verlag, o.O., o.J., S. 606) (NN, 1996)

Die Beschäftigung mit diesem Dialog kann eine Initialzündung ergeben für einen divergenten Unterrichtsdialog zwischen ICH und DU.
Interessant ist hier auch die Frage, was man mit zwei Kartenstapeln aus unendlich vielen Karten machen kann, und die Antwort: Man kann sie nicht aufeinandersetzen. Man kann sie jedoch aneinanderlegen und auch ineinanderschieben. Den gleichen Gedankengang findet man bei der Thematik „Hilberts Hotel".

Am Ende eines solchen Einstiegsdialogs können als Ergebnis die Fragen stehen:
Enthält eine Strecke der Länge 5cm mehr Punkte als eine Strecke der Länge 3cm?
Enthält $\mathbb{Q}^+$ mehr Elemente als $\mathbb{N}$? Enthält $\mathbb{R}^+$ mehr Elemente als $\mathbb{Q}^+$?

Enthält $\mathbb{Q}$ mehr Elemente als $\mathbb{N}$? (*)

Die Betrachtung der Frage „Gibt es mehr natürliche Zahlen als Quadratzahlen?" führt zur

> Definition: Eine Menge heißt nummerierbar, wenn man ein Schema angeben kann, nach dem man die einzelnen Elemente der Menge abzählen kann[71].

Und zu der faszinierenden Feststellung:

> Eine nummerierbare Menge enthält genauso viele Elemente wie die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

[71] Dies ist beispielsweise eine elementarisierte Version der Darstellung in (Beutelspacher, 1995 S. 11ff.).

Dies erkennt man beispielsweise auch bei Vielfachenmengen, z. B. den Vielfachen von 5 wieder. Es gelingt auch eine Erweiterung des Gedankengangs auf $\mathbb{Z}$.
Wieder faszinierend ist das Diagonalverfahren nach Cantor, zunächst auf $\mathbb{Q}^+$ angewandt und dann auf $\mathbb{Q}$ übertragen.
Mit Worten: $\mathbb{Q}$ erscheint am Zahlenstrahl „dicht" und „kontinuierlich" und offenbart nach Anwendung des Diagonalverfahrens („Auseinanderziehen wie ein Teig") „Löcher wie ein Schweizer Käse"[72].

Enthält $\mathbb{R}$ mehr Elemente als $\mathbb{Q}$? **(*)**
Die Betrachtung dieser Frage führt zur Frage der Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche.
Die Antwort liegt in einer Betrachtung der unendlichen, nichtperiodischen Dezimalbrüche.

Ein Widerspruchsbeweis löst das Rätsel:
Annahme: Die Menge der reellen Zahlen ist nummerierbar.
O.B.d.A. kann man sich auf die reellen Zahlen im Intervall zwischen 0 und 1 beschränken.
Dann sieht jede Nummerierung folgendermaßen aus:

$$r_1 = 0, d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14}\ d_{15} \ldots$$
$$r_2 = 0, d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24}\ d_{25} \ldots$$
$$r_3 = 0, d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34}\ d_{35} \ldots$$
$$r_4 = 0, d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44}\ d_{45} \ldots$$
$$\ldots$$

d_{ij} steht für die j-te Dezimalstelle der i-ten Zahl.

Nun gibt es jedoch eine Zahl

$$a = 0, a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5 \ldots$$

mit $a_i \neq d_{ii}$ für alle i .
Diese Zahl ist reell, aber nicht in der Nummerierung enthalten.
Dies steht im Widerspruch zur Annahme. Es gilt also der

Satz: Die Menge der reellen Zahlen ist nicht nummerierbar.

[72] An diesen Formulierungsversuchen erkennt man die Begrenztheit der sprachlichen Ausdrucks- und Veranschaulichungsmöglichkeiten.

Bereits die reellen Zahlen im Intervall zwischen 0 und 1 sind nicht nummerierbar. In der Fachsprache: Es gibt überabzahlbar unendlich viele Zahlen im Intervall zwischen 0 und 1 und natürlich in $\mathbb{R}$.
Ein sensationelles Ergebnis.

Enthält eine Strecke der Länge 5cm mehr Punkte als eine Strecke der Länge 3cm? (*)
Die Frage kann man zuspitzen: Liegen auf einem Haar der Länge 3cm weniger Punkte als auf dem Sonnendurchmesser?

Für die Antwort auf diese Leitfrage bieten sich mehrere Möglichkeiten an.

1. Möglichkeit: Beide Strecken können das Intervall $[0{,}1]$ darstellen. Also enthalten sie gleich viele Punkte.
2. Möglichkeit: Mit Hilfe einer zentrischen Streckung (Strahlensatz) kann man die eine Strecke bijektiv auf die andere Strecke abbilden.

Aufgaben
Aufgaben können Kernideen auslösen oder ergänzen. In jedem Fall bereichern sie das Unterrichtskonzept.

1) Die Menge $\mathbb{N}$ und die Menge der Quadratzahlen sind gleichmächtig. Geben Sie eine Vorschrift für die Zuordnung der Elemente an. Welche natürliche Zahl wird 66049 zugeordnet?
2) Untersuchen Sie, ob die Menge $\mathbb{Z}$ numerierbar ist? Wenn ja, geben Sie ein geeignetes Verfahren zur Nummerierung an und bestimmen Sie die Nummern der Zahlen 3, -3, -1111, z ($z \epsilon \mathbb{Z}$).
3) Wie kann man die Menge der rationalen Zahlen nummerieren? Geben Sie ein Nummerierungsschema an, aus dem die Reihenfolge der Brüche entsprechend ihrer Nummer ersichtlich ist.
4) Die Menge $\mathbb{Z}^2$ ist die Menge aller Zahlenpaare $(x; y)$, bei denen beide Koordinaten x, y ganze Zahlen sind.

Wie kann man diese Menge nummerieren? Tragen Sie dazu alle Zahlenpaare $(x; y)$ mit $-3 \leq x, y \leq 3$ in ein Koordinatensystem ein. Welche Nummer hat $(-2; 2)$?

5) Was fällt Ihnen im Vergleich der Aufgaben 3) und 4) auf?
6) Was versteht man wohl unter der Menge $(\mathbb{Q}^{+})^{2}$? Wie kann man sie nummerieren?
7) Zeigen Sie, dass die Menge der Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und dem Wertebereich $\{0,1\}$ nicht nummerierbar ist.
8) Begründen Sie, warum die Dezimalbrüche der Form 0, … , bei denen hinter dem Komma nur die Ziffern 0 oder 1 stehen, nicht nummerierbar sind.
9) Zeigen Sie, dass die Potenzmenge von $\mathbb{R}$ eine größere Mächtigkeit besitzt als $\mathbb{R}$.

Zusammenfassung

Die drei Leitfragen (*), die hier auch als Kernideen erscheinen, und ihre Antworten sind Paradoxien[73] des Unendlichen.

Das Unterrichtskonzept zum Aktual-Unendlichen nach Cantor ist zeitlich und inhaltlich skalierbar. Man kann es in vier Unterrichtsstunden überblicksweise und als mathematischer Appetithappen oder in einem längeren zeitlichen Rahmen mit stärkerer Vertiefung unterrichten. Es steht exemplarisch für viele andere denkbare Themen, die an das Kerncurriculum der 11. Jahrgangsstufe anknüpfen und als thematische Basis für eine personorientierte Begabungsförderung im Rahmen des Ansatzes „Higher Order Thinking Skills (HOTS) not More of the Same (MOTS)“ (s.o.) für alle Schüler fungieren können.

[73] von griech. para (neben) und doxon (Glaubenswahrheit)

3.3.2.3 Zusammenschau - mathematische Begabungsförderung für alle

Zusammen mit dem Unterrichtskonzept zur Einführung in die Analysis in zwei Strängen wurden zwei unterschiedliche Ansätze eines „sanften Enrichments“ zur personorientierten Begabungsförderung für alle Schüler der 11. Jahrgangsstufe vorgestellt und erörtert. Natürlich können die besprochenen Themen auch in einem anderen Rahmen mathematische Begabungs- und Bildungsprozesse initiieren, begleiten und vertiefen (2.1.1.4, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.5).

Schließlich können allein von dem Grundparadigma „Higher Order Thinking Skills (HOTS) not More of the Same (MOTS)“ (3.3.2.2) in Verbindung mit den Prinzipien, Werten und Haltungen einer personorientierten Begabungsförderung (2.1.1.3) nachhaltige Impulse für Schulentwicklungsprozesse ausgehen (4). Lehrkräfte, die die Herausforderung des personorientierten Lehrens annehmen, befinden sich bereits in einem fruchtbaren Personalentwicklungsprozess (2.1.1.5, 2.1.2.1, 4.2.3, 4.2.3.1, 4.2.3.2). Die untersuchten Unterrichtskonzepte haben ihren Ursprung im curricularen Unterricht und gestalten diesen auf besondere Weise mit; sie versinnbildlichen Unterrichtsentwicklung (3.1.6.2, 3.3.1.3, 3.3.2.2, 4.2.1, 4.2.4). Auf natürliche Weise wird es sich ergeben, dass sich überdurchschnittlich Begabte ein über den regulären Unterricht hinaus reichendes Enrichment-Angebot wünschen und so die Organisationsentwicklung nach dem SEM-Ansatz befruchten (2.1.3.1, 2.1.3.2, 2.1.3.3, 3.1, 3.2, 4.1, 4.1.1.5, 4.1.2, 4.2, 4.2.1, 4.2.2, 4.3).

Zweifelsohne können beide Unterrichtskonzepte exemplarisch für viele andere denkbare Konzeptmöglichkeiten Wege aufzeigen, um im Rahmen einer Rückkehr zum neunjährigen Gymnasium die voraussichtlich wachsenden unterrichtszeitlichen Ressourcen effektiv für eine personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht zu nutzen (0, 3, 4).

Zusammenfassend stehen die vorgestellten Unterrichtskonzepte für einen „integrativen Ansatz breiter Begabungsförderung im Sinne von ‚a rising tide lifts all the ships' " (Weigand, et al., 2014 S. 253), mit dem Ziel, die Neugierde vieler Schüler zu wecken, ihre Freude an der Mathematik zu entfalten und ihre mathematischen Fähigkeiten und Begabungen zu entwickeln (3.3.1.1).

3.4 Unterrichtskonzepte für die Unterstufe

Wie in den in 3.3 diskutierten Unterrichtskonzepten geht es auch hier mit einem engen inhaltlichen Bezug zum Curriculum der Unterstufe um die vielfältigen Möglichkeiten einer personorientierten Begabungsförderung im regulären Mathematikunterricht.
Von der Figurengeometrie können im Rahmen des personorientierten Ansatzes besondere Anregungen zu einer frühzeitigen Begabungsförderung im Mathematikunterricht ausgehen; sie werden in 3.4.1 untersucht.
Mit Hilfe von kleinen Fensterkonzepten lässt sich die Idee der personorientierten Begabungsförderung bereits im gymnasialen Anfangsunterricht realisieren (3.4.2). Schüler begeistern sich so von Beginn an für die mathematischen Bildungsinhalte und legen die Grundlage für ihren eigenen Begabungs- und Bildungsprozess (2.1.1.1).

3.4.1 Der Kongruenzweg im geometrischen Anfangsunterricht

Geometrie lässt sich auf vielfältige Weise strukturieren und unterrichten (Weigand, et al., 2014). Sowohl der Zugang über die Abbildungsgeometrie als auch über die Figurengeometrie stellen ein Strukturmodell für begabungsfördernden Unterricht dar. Entscheidend für eine nachhaltige Begabungsförderung ist die Stringenz im Gedankengang und ein Wechselspiel zwischen entdeckendem Lernen und begründendem Nachdenken.
Das Unterrichtskonzept des Kongruenzweges setzt konsequent auf die Erforschung des Dreiecks als geometrischer Grundfigur. Ausgehend vom Kongruenzbegriff und aufbauend auf Kongruenzsätzen werden nicht zu begründende Fundamentalsätze und zu begründende Lehrsätze entdeckt und formuliert.

Parallel dazu wird das geometrische Konstruieren mit Zirkel und Lineal als wesentliche Technik eingeführt und im Gleichklang mit dem Kongruenzweg entwickelt.

Der Kongruenzweg wird als Gedankensequenz vom Kongruenzbegriff für zwei Dreiecke bis zum Satz des Thales vorgestellt und erörtert.

Das Konzept kann problemlos an die im Klassenzimmer vorherrschenden technischen Gegebenheiten und insbesondere ideal an die Begabungsprofile der lernenden Schüler angepasst werden. Manches wird man nur kurz ansprechen und als Appetithappen für eine spätere geometrische Beschäftigung im gedanklichen Raum stehen lassen. Die Schüler können dann im Rahmen der Autorschaft über ihren eigenen Begabungsprozess entscheiden, ob und wann sie wieder darauf zurückkommen wollen (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.1.5, 4.2.1). Vieles wird man auch im Detail erarbeiten, so dass es einen dauerhaften Bildungsprozess in allen Lernenden auslöst und intensiviert (2.1.1.1, 2.1.1.5, 2.1.2.1, 4.1, 4.2.1). Einiges kann man beispielsweise für ein SEM-Programm außerhalb des Klassenunterrichts verwenden (2.1.3.3, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2). In diesem Sinne ist der Kongruenzweg, der grundsätzlich auf handwerklichen Techniken der Lernenden beruht und auf dieser Basis mathematisches Denken und mathematische Begabungen fördert, mit Blick auf eine personorientierte Begabungsförderung frei skalierbar (3.3.1, 3.3.2).

Das Unterrichtskonzept des Kongruenzweges kann über den Satz des Thales hinaus nach Belieben fortgesetzt werden.

3.4.1.1 Die Bedeutung von Elementarisierung und Kernideen

Die Literatur zum geometrischen Anfangsunterricht ist naturgemäß sehr umfangreich. Euklids Elemente gelten als Ursprung der ebenen Geometrie. Eine profunde Information über die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie findet man in (Baptist, 1992), einen Überblick über den aktuellen Stand der Geometriedidaktik beispielsweise in (Weigand, et al., 2014):

„Dieses Buch versteht sich als Anregung, die Vielfalt der Elementargeometrie als Chance zu sehen, mathematische Denk- und Arbeitsweisen an geometrischen Inhalten zu entwickeln und dadurch einen Beitrag dazu zu leisten, der einzelnen Schülerin bzw. dem einzelnen Schüler eine Perspektive sowohl im Hinblick auf die Persönlichkeitsentwicklung als auch die Teilnahme am gesellschaftlichen, kulturellen, politischen und wirtschaftlichen Leben zu geben." (ebd., S. 280)

Das Credo einer personorientierten Begabungsförderung im Geometrieunterricht gilt im Besonderen auch für den Einstieg in diese Disziplin anhand des Kongruenzweges. (Weigand, et al., 2014) beschreiben die neueren Entwicklungen in der Geometrie folgendermaßen:

„Graumann u. a. (1996) plädieren in ihrem ... Überblicksartikel für eine lebendige Geometrie, die dadurch gekennzeichnet ist, dass es nicht um das Lernen eines bestimmten Stoffes geht, sondern um eine aktive Auseinandersetzung des Einzelnen mit geometrischen Fragestellungen, vor allem um das Aufzeigen der komplexen Beziehung zwischen Umwelt und Begriffsbildung. Dabei ist eine aspektreiche Auseinandersetzung des Einzelnen mit geometrischen Fragestellungen wichtiger als der Aufbau längs einer bestimmten (didaktischen) Hintergrundtheorie, wie etwa der Kongruenz- oder Abbildungsgeometrie. Es wird also die stoffliche und didaktische Vielfalt der Elementargeometrie gegenüber deren Systematik stärker herausgestellt (Neubrand 1994)." (ebd.)

Eine „aspektreiche Auseinandersetzung" mit geometrischen Fragestellungen führt oftmals dazu, dass auch sehr gute Schüler den Satz von Thales nur als Mittel zur Konstruktion eines rechten Winkels begreifen ohne andauerndes, tieferes Verständnis für den gedanklichen Hintergrund. Eine aspektreiche Auseinandersetzung muss jedoch einer gedanklichen Systematik nicht widersprechen. Vielmehr ermöglicht erst eine klare Hintergrundstrukturierung personorientierte Begabungsförderung in einer aspektreichen Auseinandersetzung mit geometrischen Fragestellungen. Auch dies soll der Kongruenzweg zeigen.

Gerade die Auseinandersetzung mit dem Dreieck erfüllt alle Anforderungen an den Begriff des Elementaren nach Klafki (2.2.4.1). Das Elementare ist ein wesentliches Moment des Verstehens, des Erklärens, des Durchdringens; es vermittelt zwischen der in der Person verankerten subjektiven formalen Bildung und der in der Fachwissenschaft verankerten objektiven materialen Bildung. Der Prozess des Elementarisierens unterstützt das „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (2.2.4.1) und ist daher von entscheidender Bedeutung für die Entfaltung entsprechender Begabungs- und Bildungsprozesse in den Lernenden (ebd., 3.2.5).

Die Dreiecksgeometrie ist eine Spielwiese für das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip entsprechend Wagenscheins Forderung (2.2.4.2): „Eine Entdeckung wird am wirksamsten durch ihren nicht-rezeptiven Nachvollzug verstanden und behalten; durch eine, sei es auch nur bescheidene ‚Wiederentdeckung‘“ (ebd.). Mit den Worten „seit Euklid haben, so scheint es, die Entdecker eine Scheu zu sagen, ‚wie sie darauf gekommen sind‘“ (ebd.) fordert er Lehrende und Lernende auf, den Mehrwert einer personorientierten Begabungsförderung zu generieren (2.1.2.1, 3.1.3, 3.2.3, 3.3.1, 3.3.2, 4.1, 4.2.1).

Wenn sehr gute Schüler den Satz von Thales nach einigen Jahren intensiven Geometrieunterrichts nicht begründen können, ist dies ein klares Indiz dafür, dass er nur rezeptiv gelernt und angewandt, aber nicht im Sinne Wagenscheins verstanden und nicht im Sinne Ulms in mehrdimensionaler Weise begriffen wurde (2.2.2). Sie hatten dann nicht die Chance, „genuine mathematics“ als „one of the finest expressions of the human spirit“ (Hilton, 2.2.3) zu erleben und ihren persönlichen mathematischen Bildungsprozess zu entwickeln (2.1.1, 2.2.1, 4.1, 4.1.1.5, 4.2).

Schließlich kann die Dreiecksgeometrie dialogisches Lernen mit den vier Instrumenten Kernidee, Auftrag, Reisetagebuch und Rückmeldung (2.2.4.3) ermöglichen. Im Rahmen des dialogischen Lernens wird auch die Frage des Handwerks – ob mit Papier, Zirkel und Lineal oder am Reißbrett einer entsprechenden Software – entschieden werden. In jedem Fall kommt für die Entwicklung der Begabungs- und Bildungsprozesse den Kernideen (ebd.) wieder eine entscheidende Bedeutung zu (ebd., 3.1.4, 3.1.6, 3.2, 3.3).

Unterstützt werden die Begabungs- und Bildungsprozesse in der ebenen Geometrie durch die handwerklichen und ästhetischen Komponenten. So können in einer großen Spannweite die Haltungen, die Hackl für personorientierte Begabungsförderung benennt, berücksichtigt werden: Stärkenorientierung, Förderung, Anerkennung, Begleitung (2.1.1.3, Abbildung 2 S. 16). Nicht nur „scharfe Denker“, sondern auch „handwerkliche Zeichner“ können unter den

Lernenden erreicht werden. So kann eine integrative, breite Begabungsförderung im Klassenverband im Geiste von ‚a rising tide lifts all the ships' (SEM-Ansatz, 2.1.3.3) realisiert werden (2.1.1.2, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.3.1, 2.2.1.2, 2.2.2, 4.1, 4.2).

3.4.1.2 Kernideen des Unterrichtskonzepts

Die Darstellung des Unterrichtskonzepts zum Kongruenzweg erfolgt, wie in 3.4.1.1 begründet, mit Hilfe von Kernideen (2.2.4.3).
Bekannte, klassische Lerninhalte werden neu gruppiert, so dass sich ein stringenter, tiefer Einblick in die Zusammenhänge gewinnen lässt. Zugleich nimmt eine „handwerkliche" Begabungsförderung für alle einen hohen Stellenwert ein.
Das dargestellte Konzept geht zurück auf ein Ursprungskonzept, das am Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut tradiert wurde. Es wurde mehrfach erprobt und an unterschiedliche Gegebenheiten (Lehrbücher, Schulzweige, etc.) angepasst.

Kongruenz von Dreiecken – der Kongruenzbegriff und der erste Kongruenzsatz
Dreiecke sind elementare Figuren in der ebenen Geometrie. Sie bilden den gedanklichen Ursprung des Kongruenzweges.
Die Leitfrage lautet: „Wann sind zwei Dreiecke gleich?" In abstrakter Hinsicht geht es hier nicht um die Gleichheit der Farbe oder des Materials oder anderer nebensächlicher Aspekte, sondern um die Übereinstimmung der ebenen Figur und im Detail um die Übereinstimmung in den drei Seiten und den drei Winkeln.

> **Definition:** Zwei Dreiecke heißen **kongruent**, wenn sie in den drei Seiten und in den drei Winkeln übereinstimmen.

Spannend ist hier eine Minimalisierung. Welche Übereinstimmungen genügen bereits für eine Kongruenz? Die Erfahrung und die Intuition führt hier die Schüler in der Regel zur Übereinstimmung in einem Winkel und den dazugehörigen Schenkeln (diese Erkenntnis stabilisiert beispielsweise auch einen Wagenheber). Dies wird weiter unten (SWS) noch aufgegriffen.
Aus der Intuition heraus unklar ist jedoch, ob bereits die Übereinstimmung in drei Seiten genügt. Diese Frage kann man idealerweise nach dem genetisch-

sokratisch-exemplarischen Prinzip (2.2.4.2) klären und nach dem dialogischen Prinzip (2.2.4.3) als Auftrag formulieren. Ein Schülerexperiment mit jeweils drei Strohhalmen unterschiedlicher Länge (in unterschiedlicher Farbe) und einem Bindfaden kann der Erkenntnis dienlich sein. Der Bindfaden, der durch die Strohhalme gezogen wird und die drei Strohhalme zu einem Dreieck verknüpft, fixiert die Strohhalme zu einem eindeutigen Dreieck. Ein Viereck oder Fünfeck, etc. lässt sich demgegenüber so nicht fixieren.
Dies ist faszinierend und führt zum ersten

> **Fundamentalsatz**[74] (**SSS-Satz**). Zwei Dreiecke sind bereits dann kongruent, wenn sie in drei Seiten übereinstimmen.

Schon auf dieser Basis kann man die ersten Dreieckskonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführen.

> **Grundaufgabe**[75]**.** Konstruktion eines Dreiecks ABC aus den drei Seiten a, b, c.
> Vorschlag zur Ausgestaltung, die so für alle Konstruktionsaufgaben verwendet werden kann:
> 1. Gegeben: a=6,5cm; b=9cm; c=7cm
> 2. Planfigur (hier kennzeichnet man gegebene Stücke mit Farbe, ggf. bekannte Teildreiecke mit einer anderen Farbe)
> 3. Konstruktionsbeschreibung[76]
>   1) A und B sind die Endpunkte der Strecke AB[77] mit $l(AB) = 7cm$
>   2) C liegt auf dem
>   a) Kreis um B mit Radius a=6,5cm und
>   b) Kreis um A mit Radius b=9cm
> 4. Konstruktion
>
>   …

[74] Statt Fundamentalsatz ist auch der Begriff „Axiom“ gebräuchlich.
[75] Der Begriff der Grundaufgabe dient allein dem gedanklichen Gerüst des Lernenden. Ihm kommt keine weitere mathematisch-didaktische Bedeutung zu.
[76] Die Konstruktionsbeschreibung folgt hier einem Ergebnisprotokoll-Gedanken, nicht einem Verlaufsprotokoll-Gedanken. Die Leitfrage ist „Wo liegt der jeweilige Punkt X?“
Die einzelnen Punkte müssen der Reihe nach in schlüssiger Weise darstellbar sein.
[77] Die Nomenklatur ist hier ggf. unterschiedlich.

Die Konstruktion ergibt zwei Dreiecke, die nach dem SSS-Satz kongruent sind und im Bild der Strohhalme übereinstimmen.

Konfrontiert man die Schüler mit unmöglichen Konstruktionen (etwa a=3cm, b=3cm, c=7cm), hat man die nächste spannende Fragestellung. Welche Bedingung müssen die Seiten erfüllen, dass die Konstruktionsaufgabe lösbar ist? Dies führt zum

> **Satz (Dreiecksungleichung).** In jedem Dreieck gilt: $a + b > c$ und auch $a + c > b$ sowie $b + c > a$.

Weitere Anwendungen des SSS-Satzes

Konstruktion aus Teildreiecken

Nach der Einführung des Begriffs der **Seitenhalbierenden** lassen sich etwas anspruchsvollere Konstruktionen anfertigen. Sind zwei Seiten und eine der beiden Seitenhalbierenden gegeben, kann man ein Teildreieck nach SSS konstruieren und zum gesuchten Dreieck erweitern.

Da hier die Teilung einer Strecke mit Zirkel und Lineal noch nicht bekannt ist, lässt man für die Konstruktionsvorbereitung die arithmetische Halbierung der erforderlichen Strecke zu.

Winkelübertragung mit Zirkel und Lineal

Den zu übertragenden Winkel fasst man als Winkel an der Spitze eines (nicht notwendigerweise) gleichschenkligen Dreiecks auf, das man nach dem SSS-Satz überträgt. Dies ist auch eine **Grundaufgabe**.

Konstruktion der Winkelhalbierenden

Nach Einführung des Begriffs der **Winkelhalbierenden** kann man die Winkelhalbierende konstruieren. Konstruktiv erzeugt man (auf bekannte Weise) zu einem vorgegebenen Winkel zwei kongruente Dreiecke, die im halben Winkel übereinstimmen. Dies ist ebenfalls eine **Grundaufgabe**.

Faszinierend ist hier, dass man die (vielleicht bereits bekannte) Konstruktion mit Hilfe des SSS-Satzes in sich schlüssig begründen kann. Das mathemische Tun und das mathematische Begründen fließen ineinander. Die Konstruktionsaufgabe wird hier im Umgang mit Winkel, Lineal, Bleistift und Zirkel sichtbar in ihrer begabungsfördernden Wirkung, eben im geometrischen Verstehen des geometrischen Handelns (2.1.1.1, 3.4.1.1).

Der zweite Kongruenzsatz

Dieser Satz ist intuitiv verständlich (s.o.) und bekommt einen Platz in der geometrischen Grundordnung.

> **Fundamentalsatz (SWS).** Zwei Dreiecke sind bereits dann kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen.

Dieser Satz inspiriert zu weiteren Konstruktionsaufgaben.

Weitere Anwendungen des SWS-Satzes

Konstruktion aus Teildreiecken

Nach Einführung des Begriffs der Winkelhalbierenden lassen sich auch Dreieckskonstruktionen mit einer Winkelhalbierenden durchführen.

Konstruktion der Mittelsenkrechten

Nach Einführung des Begriffs der **Mittelsenkrechten** kann man die Mittelsenkrechte konstruieren. Man erstellt (mit der bekannten Konstruktion) zu einer vorgegebenen Seite zwei nach dem SSS-Satz kongruente Dreiecke (Abbildung 33). Die Anwendung des SWS-Satzes auf ein Teildreieckspaar erklärt die Mittelsenkrechten. Dies ist auch eine **Grundaufgabe**.

Faszinierend ist auch hier, dass man eine (vielleicht bekannte) Konstruktion mit Hilfe des SSS-Satzes und des SWS-Satzes in sich schlüssig begründen kann. Wieder fließen das mathemische Tun und das mathematische Begründen ineinander.

Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten – der Umkreismittelpunkt

Die Betrachtung der Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten ist ebenfalls spannend. Ist es Zufall, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden oder nicht?

Ein experimenteller Zugang erhärtet den Verdacht, dass hier kein Zufall vorliegen kann. Die Antwort mit Begründung liefert die Geometrie.

Konstruktion: Begründung:

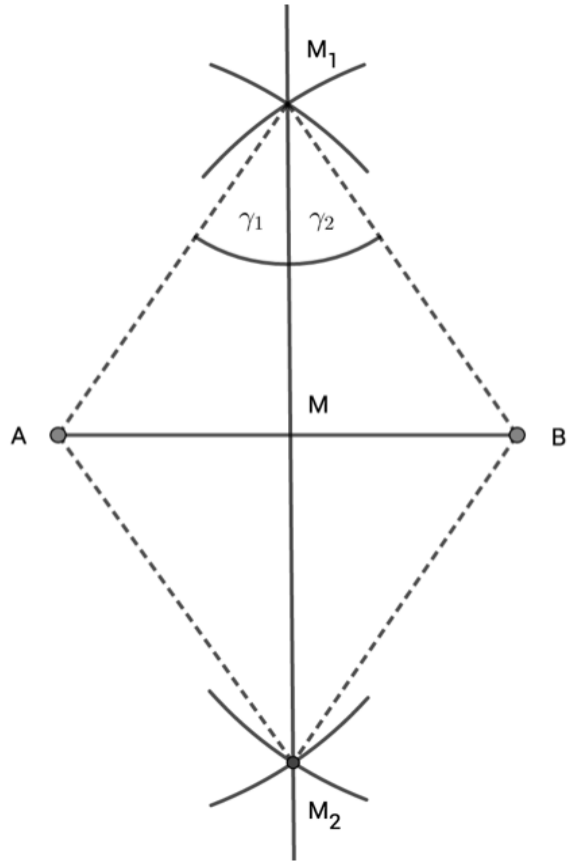


Abbildung 33 Mittelsenkrechte

$$\triangle AM_1M_2 \cong \triangle BM_1M_2 \text{ (nach } SSS)$$
$$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2$$
$$\triangle AMM_1 \cong \triangle BMM_1 \text{ (nach } SWS)$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{l(AM) = l(MB)} \blacksquare$$

Mit Hilfe der bisherigen Bausteine kann man den folgenden Satz begründen:

Satz (**Eigenschaft der Mittelsenkrechten**). Die Mittelsenkrechte einer Strecke AB enthält alle Punkte, die von A und B gleichen Abstand besitzen.

Daraus folgt dann der

Satz (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks). Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Und die

Definition. Dieser Schnittpunkt heißt **Umkreismittelpunkt.**

Damit hat auch ein Dreieck eine Art „Mitte", die man experimentell weiter erkunden kann.

Das umfangreiche Feld der Dreieckskonstruktionen erfährt eine weitere Bereicherung. Denkbar sind Konstruktionen zu vorgegebenem Umkreisradius, einer Seite und einem anliegenden Winkel oder zu vorgegebenem Umkreisradius und zwei Dreiecksseiten.

Weitere Anwendungen der Mittelsenkrechten
sind die folgenden zwei Grundaufgaben, die sich jeweils auf die Konstruktion einer geeigneten Mittelsenkrechten zurückführen lassen:
Konstruktion der Senkrechten zu einer Geraden g in einem Punkt P (auf g)
Konstruktion des Lotes von einem Punkt P auf eine Gerade g
Auf dieser Basis gelingt die Definition des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.
Auch hier gehen geometrisches Experiment, Konstruktion und Begründung Hand in Hand und unterstützen so im Wechselspiel zwischen genetisch-exemplarisch-sokratischem Prinzip und dialogischem Lernen eine personorientierte Begabungsförderung (2.2.4.2, 2.2.4.3).

Den Inkreis eines Dreiecks kann man an dieser Stelle noch nicht einführen, da die Abstandsgleichheit des Inkreismittelpunktes den SWW-Satz erfordert, dessen Kenntnis hier noch nicht vorliegt.

Mit der Definition der **Höhe** im Dreieck gelingt wieder eine Erweiterung des Repertoires der Dreieckskonstruktionen, beispielsweise bei vorgegebenem $\alpha, b, l(BH_c)$ oder $l(AH_c), l(H_cB), b$; dabei bezeichnet H_c den Höhenfußpunkt. Sie stellen unmittelbare Anwendungen der beiden o.g. Grundaufgaben dar.

Der dritte Kongruenzsatz
Dieser Satz ist ebenso intuitiv verständlich wie der SWS-Satz.

> **Fundamentalsatz (WSW).** Zwei Dreiecke sind bereits dann kongruent, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Dieser Satz ergibt eine weitere **Grundaufgabe**, die Konstruktion eines Dreiecks nach WSW.
Zusammen mit der Winkelsumme im Dreieck (s.u.) bildet er das argumentative Gerüst für den Schnittpunkt der Höhen im Dreieck.

Geradenkreuzung
Hier kann man die bekannten Aussagen über Scheitelwinkel und Nebenwinkel in den Kongruenzweg einfügen.

Doppelkreuzung
Diese Betrachtung beginnt mit einer im Gedankengang konsistenten Definition für Parallelität.

> **Definition**: Zwei Geraden heißen **parallel**, wenn sie ein gemeinsames Lot besitzen.

Daraus ergibt sich eine **Grundaufgabe**: die Konstruktion einer Parallelen zu einer vorgegebenen Geraden und einem Punkt außerhalb. Eine einfache Lösung besteht in der Rückführung auf zwei bekannte Grundaufgaben (Konstruktion des Lotes und der Senkrechten). Eine ökonomischere Lösung lässt sich aus der Anwendung von Wechselwinkeln gewinnen, da so nur vier anstelle von sechs Kreisbögen benötigt werden.
Diese Aufgabe kann man im Sinne einer personorientierten Begabungsförderung in einen Auftrag nach dem dialogischen Prinzip oder in einen Wettbewerbsauftrag verwandeln (2.1.2.5, 2.2.4.2, 4.2.2.1). Dies ist faszinierend.
Schnell entdeckt man den

> **Satz (Doppelkreuzung 1).** Wenn an einer Doppelkreuzung Wechselwinkel (oder Stufenwinkel) gleich groß sind, dann sind die beiden Geraden parallel.
>
> **Beweis.** Man betrachte das Lot von der Streckenmitte auf eine der beiden Geraden. Das Lot erzeugt zugleich zwei Teildreiecke, die nach WSW kongruent sind. Daher ist der rechte Winkel auch im zweiten Teildreieck vorhanden und das Lot auf eine Gerade ein gemeinsames Lot, woraus die Behauptung folgt. ■

Die Aussage über Nachbarwinkel ist klar.

Damit gelingt nun eine „elegante“ Parallelenkonstruktion (s.o.).
Für die Umkehrung des Satzes benötigt man einen weiteren

Fundamentalsatz[78] (Parallelenaxiom). Zu einer Geraden g und einem Punkt außerhalb von g gibt es **genau eine Parallele**.

Dann gilt der

Satz (Doppelkreuzung 2). Wenn an einer Doppelkreuzung die beiden Geraden parallel sind, dann sind die Wechselwinkel (oder Stufenwinkel) gleich groß.

Beweis. Wir geben uns eine Doppelkreuzung mit zwei parallelen Geraden g_1 und g_2 vor und nehmen an, dass die beiden Wechselwinkel nicht gleich groß sind. Dann gibt es zu einer der beiden parallelen Geraden, o.B.d.A. g_1, eine weitere Gerade g_3 mit gleichem Wechselwinkel. Nach dem Satz (Doppelkreuzung 1) gilt: $g_3 \parallel g_1$. Da aber außerdem nach Voraussetzung gilt: $g_2 \parallel g_1$, folgt nach dem Fundamentalsatz $g_2 = g_3$. Hier ist der Widerspruch. Die Annahme ist falsch, der Satz bewiesen. ■

Ob man die Schüler einer 7. Jahrgangsstufe an dieser Stelle mit einem logisch sehr anspruchsvollen Widerspruchsbeweis konfrontiert, ist mit Blick auf eine personorientierte Begabungsförderung zu entscheiden. Das Risiko, dass auch gute Schüler die Beweislogik nicht verstehen, würde die Gefahr einer unguten Emotion in sich tragen und dem wichtigen Ziel der Freude (2.2.5) an der Beschäftigung mit Mathematik zuwiderlaufen.

Gut durchführbar ist jedoch die Begründung von

Satz (Höhenschnittpunkt). Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Beweis. Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Zu jeder Dreiecksseite zeichnet man die Parallele durch die Dreiecksecke. Die Schnittpunkte der Parallelen seien A', B', C'. Auf diese Weise erhält man drei weitere Dreiecke $\triangle A'BC$, $\triangle AB'C$, $\triangle ABC'$, die wegen gleicher Wechselwinkel (Satz Doppelkreuzung 2) und nach WSW zum Ausgangsdreieck $\triangle ABC$ kongruent sind. Die Höhen des Dreiecks $\triangle ABC$ sind wiederum wegen gleicher Wechselwinkel (Satz Doppelkreuzung 2) die Mittelsenkrechten des großen Gesamtdreiecks $\triangle A'B'C'$. Aus dem Satz (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks) folgt die Behauptung. ■

---

[78] Auf der Basis dieses Fundamentalsatzes ist die Winkelsumme im Dreieck kein Axiom (weiterer Fundamentalsatz), sondern ein begründbarer Lehrsatz.

Dies ist wieder eine faszinierende Begründung. Wenige Gedanken, logisch richtig aneinandergefügt, begründen einen neuen Sachverhalt. So wächst „genuine mathematics“ im Sinne Hiltons (2.2.3).

Die Winkelsumme im Dreieck

Dies ist ein sehr faszinierender Zusammenhang, den sich die Schüler auf unterschiedliche Weise experimentell erschließen können. Beispielsweise kann man den Auftrag erteilen, ein Dreieck mit möglichst großer Winkelsumme zu zeichnen.

Eines der schönsten Experimente setzt den nachfolgenden Begründungsgedanken um. Die Lehrkraft bereitet zwei große, kongruente Papierdreiecke vor. Angefeuchtet kleben sie gut an jeder Tafel. Von einem der beiden Dreiecke reißt man die unteren beiden Ecken ab und legt sie so an die verbliebene Ecke, dass die drei Ecken einen gestreckten Winkel bilden.

Es gilt der

> **Satz (Winkelsumme im Dreieck).** Die Summe der Winkel im Dreieck ist 180°.
>
> **Beweis.** Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Gegeben ist außerdem die Parallele p zu c durch C. Nach Satz (Doppelkreuzung 2) liegen an der einen Seite der Parallelen p nacheinander die Winkel α als Wechselwinkel, γ (bei C) und β als Wechselwinkel (jeweils lückenlos) an. Daraus folgt die Behauptung. ■

Dem Gedankengang kann entnommen werden, dass er nur unter der Voraussetzung des Parallelenaxioms gültig ist. Umgekehrt sieht man, dass man aus der Winkelsumme im Dreieck auch das Parallelenaxiom folgern kann. Dies ist ausgesprochen faszinierend und gibt einen Einblick in das Gedankengebäude und die logischen Querverbindungen der ebenen Elementargeometrie (3.4.1.1). Für die Lehrenden ist ein Vergleich mit der Dehn-Invariante interessant und aufschlussreich (3.2.2.2).

An dieser Stelle können arithmetische Übungsaufgaben zu Winkelberechnungen in das Unterrichtskonzept eingeflochten werden.

Das gleichschenklige und das gleichseitige Dreieck

Diese Kernidee lässt sich in der bekannten Art und Weise behandeln.

Für den Satz des Thales (s.u.) ist der Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck unabdingbar.
Natürlich wird man auch die Konstruktion eines 60°-Winkels als Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks zusammen mit einer Anwendung der Winkelsumme im gleichseitigen Dreieck interpretieren. Dies ist eine schöne **Grundaufgabe**. Sie zeigt zugleich den Mehrwert des vorliegenden Unterrichtskonzeptes. Es wird nicht nur ein 60°-Winkel konstruiert, sondern die begabten Schüler – und dies sind im Kongruenzweg viele – haben zugleich das Bild vom gleichseitigen Dreieck und den Satz von der Winkelsumme im Blick (2.1.2.1, 2.1.2.5, 2.2.2, 4.2.4).

Der Satz von Thales
Der Satz über die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck und die Winkelsumme im Dreieck gehen im Satz des Thales eine faszinierende logische Symbiose ein.
Er ist unbestritten ein Höhepunkt im geometrischen Anfangsunterricht, der durch die gedankliche Einbindung in den Kongruenzweg ein besonderes mathematisches Fundament erhält.
Natürlich bereichert er auch den Schatz an Konstruktionsaufgaben.

Abschließend und rückblickend lassen sich in dem abwechselnden Konstruieren und Begründen des Kongruenzweges auch Parallelen zum Unterrichtskonzept für einen Analysis-Unterricht in zwei Strängen (3.3.1.3) erkennen.

3.4.1.3 Der pädagogische Gewinn des Kongruenzweges

Der Kongruenzweg ermöglicht das Erleben und Verstehen einer Freude des Menschen am Schönen, an der Geist und Sinn in gleichem Maße teilhaben (2.2.5).
In Abwandlung der Worte Kirchgrabers kann man den Schülern vermitteln:

> *„Wenn ihr, meine Schülerinnen und Schüler gern einen Gedanken verfolgt, Freude an einer zündenden Idee habt, ein Aha-Erlebnis genießt – dann seid ihr in der Mathematik richtig." (frei nach Kirchgraber, 2016) (2.2.5)*

Dies sind oftmals mehr Schüler als man zunächst erwartet. Und viele dieser Schüler können und werden sich auch nach ihrer Abschlussprüfung noch mit Freude an die Kernidee oder nach Gallin/Ruf (2.2.4.3) an den „Witz“ des Satzes von Thales erinnern (2.1.1, 2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.2, 4.1, 4.2.1, 4.2.4, 4.3).

Alle Lernenden haben die Chance, Geometrie und damit Mathematik als eine Wissenschaft „mit einer eigenen, inneren Dynamik, kraftvoll und feinsinnig“ (2.2.3) zu erleben. Hilton formulierte: „I long for the day when, indeed mathematics will be appreciated and enjoyed by educated laymen as an art and also respected as the mainstay of science. It has been so in the past, but it is not so now. Is it too optimistic to hope it might be so again?“ (ebd.). Dieser Tag, auf den Hilton wartet, ist in der Geometrie zum Greifen nahe.

In jedem Fall unterstützt der Kongruenzweg die Entfaltung geometrischen Denkens in vielerlei Hinsicht: Experimentelles Denken, begriffsbildendes Denken, modellierendes Denken, problemlösendes Denken, schlussfolgerndes Denken, formales Denken, algorithmisches Denken, theoriebildendes Denken wurden im Unterrichtskonzept direkt oder indirekt thematisiert. Dies sind alle Facetten des prozessbezogenen Denkens nach Ulm (2.2.2). Dazu kommt die Förderung folgender Begabungskomponenten: mathematisches Wahrnehmen, Operieren mit mathematischen Objekten, Denken mit mathematischen Mustern, flexibles Denken, mathematisch-kreatives Denken, Nutzen von Darstellungen, mathematisches Gedächtnis. Auch sie wurden direkt oder indirekt im Unterrichtskonzept thematisiert. Dies sind alle Aspekte mathematikbezogener Informationsbearbeitung (ebd.).

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass eine Einführung in die ebene Geometrie auf dem Kongruenzweg ein wirkungsvolles Instrumentarium zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht ist (2, 3.3, 4.1, 4.2). Auf die Frage, wann man mit begabungsförderndem Geometrieunterricht beginnen sollte, würde Sherlock Holmes vielleicht formulieren: „Preelementary, my dear Watson!“ und Gagné würde vielleicht hinzusetzen: „Thou Shalt Accelerate … Asneededly! … Thou Shalt Enrich … Relevantly! … Thou Shalt Dream … Eyeswideopenly!“ (2.2.1.1).

3.4.2 Fensterkonzepte im gymnasialen Anfangsunterricht

Anders als bei allen bisher betrachteten Konzepten, stellen die Fensterkonzepte im gymnasialen Anfangsunterricht ausgeprägte Minikonzepte dar. Hier geht es nicht um die Elementarisierung und das Aufschließen komplexer Lerngegenstände und Sachverhalte für mathematisch Begabte (3.1, 3.2, 3.3, 3.4.1), auch nicht um die Darstellung und Aufbereitung von Kernideen in mehrfach stringenter Weise (3.1.4, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.2.3, 3.2.4, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1). Ebenso wenig geht es um Akzeleration oder Enrichment im üblichen zeitlichen und räumlichen Rahmen (2.1.3.3) oder äquivalente Konzepte (2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6).

Vielmehr stellt sich die Frage: Wo beginnt personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht?

Noch weiter zugespitzt: Wie kann elementare personorientierte Begabungsförderung im gymnasialen Mathematikunterricht beginnen?

Eine Antwort darauf kann mit Blick auf das Kategoriale (2.2.4.1) einer personorientierten Begabungsförderung in genetisch-sokratisch-exemplarischer Weise (2.2.4.2) unter Einbeziehung des dialogischen Prinzips (2.2.4.3) gefunden werden.

> *„Dabei werden keine völlig neuen Lehr- und Lernformen oder Methoden dargestellt, vielmehr wird gezeigt, wie durchaus bekannte und gängige Formen ‚lernwirksamen Unterrichts' ... aus der Perspektive der Personorientierung eine qualitativ andere, nämlich begabungsgestaltende und persönlichkeitsbildende Ausrichtung erhalten." (2.1.2)*

Auch am Ursprung mathematischer Begabungsprozesse gilt, was Weigand für den Bildungsprozess einer Person für das ganze Leben formuliert:

- *„Bildungs- und Begabungsprozesse sind inhalts- und themengebunden. ...*

> *Ob ... die Beschäftigung mit einem Thema zu einer bildenden Erfahrung und für Begabungspotenziale wirksam wird, hängt davon ab, inwieweit sie für den Einzelnen bedeutsam wird und sie/er aktiv damit umgeht. ...*

- *Bildung und die Entfaltung von Begabungen beinhalten die Auseinandersetzung mit Dingen und Gegenständen sowie den sozialen Austausch, den Dialog. ...*
- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat ein reflexives Moment. ...*

Die Reflexion ist ... bedeutsam für ... die Schülerin und den Schüler. Sie trägt dazu bei, sich das, womit sie sich beschäftigen und was sie lernen, bewusst zu machen und zu verstehen, sich anzueignen und auch bewusst damit umzugehen.

- *Der Bildungs- und Begabungsprozess hat letztlich eine ethische Dimension. ...“ (2.1.1.2)*

Es wird also exemplarisch anhand alltäglicher Themen und Aufgaben aufgezeigt, wie personorientierte Bildungs- und Begabungsprozesse entfaltet werden können. Denn personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht kann und soll im Kleinen bereits mit der ersten Aufgabe beginnen.

3.4.2.1 Die Bedeutung von Dialog und Elementarisierung

Die Sprache des Verstandenen ist nach Gallin und Ruf

> *„ökonomisch und effizient. Als Richtschnur für das Lernen ist sie mörderisch. Ein Unterricht, der sich darauf beschränkt, sie zu vermitteln und einzuüben, produziert reihenweise Schädigungen und überlässt die Bildung dem Zufall.“ (2.2.4.3)*

Kompakte Formalismen, auch die Sprache der Arithmetik (3.4.2.2), tragen dieses Proprium einer Sprache des Verstandenen in sich. Um Begabungsprozesse zu initiieren, ist jedoch eine Sprache des Verstehens relevant. In ihr

> *„artikulieren die Lehrenden und Lernenden ihre Sicht der Dinge, tauschen ihre Geschichten über ihre Begegnungen mit dem Stoff aus und erarbeiten einen tragfähigen Konsens: ICH MACHE DAS SO! WIE MACHST DU ES? DAS MACHEN WIR AB. Zwischen den Polen ICH und DU werden auf diese Weise neue Dimensionen der Beweglichkeit aufgespannt, die einen Spielraum für das interaktive Verarbeiten erlebter und erzählter Erfahrungen eröffnen und reguläre Rezeptions- und Produktionsmuster als mögliche Standorte ins Auge fassen, wo sich die Gesprächspartner in einem ausgehandelten WIR treffen können.“ (2.2.4.3)*

Als vier wesentliche Instrumente des dialogischen Lernens benennen Gallin und Ruf Kernidee, Auftrag, Reisetagebuch, Rückmeldung (ebd., Abbildung 14). Sie verhindern ein stupides Einüben, ein vorschnelles, bildungsunwirksames Eintauchen in Formalismen.

> *„Weil das Herz vor dem Kopf, das Mannigfaltige vor der Einheit, das Singuläre vor dem Regulären agiert, hat das Erzählen Vorrang vor dem Erklären.“ (Ruf, et al., 2014 S. 171 Bd.1)*

Mit diesem Credo, das im Zentrum des dialogischen Prinzips steht, kann ein Anfangsunterricht personorientierte Begabungsprozesse in Mathematik initiieren. Elementarisierung gibt dem Dialog zwischen Lernenden und Lehrenden fachlichen Sinn und Gehalt, stellt Themen und Fragen zur Verfügung. Sie ermöglicht Bildung als

> *„Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen – das ist der objektive oder materiale Aspekt; aber das heißt zugleich: Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit – das ist der subjektive oder formale Aspekt zugleich im ‚funktionalen' wie im ‚methodischen' Sinne“ (2.2.4.1)*

Am Beginn der Elementarisierung steht daher das „Sichtbarwerden von allgemeinen, kategorial erhellenden Inhalten auf der objektiven Seite“ (ebd.). Genau dies ist gemeint, wenn von Fensterkonzepten die Rede ist, die den Blick der Schüler öffnen sollen auf das Kategoriale nach Klafki. Idealerweise löst dies im Lernenden eine „subjektive, ‚formale‘ Kraft“ für einen nachhaltigen, mathematischen Bildungsprozess aus (ebd., 2.1.1, 2.1.3, 4.2).

3.4.2.2 Freude an der Mathematik und den natürlichen Zahlen

Freude an der Mathematik in der fünften Klasse? Stellt man diese Frage Schülern in ihrer ersten Mathematikstunde am Gymnasium, stutzen zunächst viele. Manche rechnen gerne, manche empfinden eine solche Frage als surreal, manche beteuern aus ganzem Herzen ihre Unlust an Sachaufgaben oder am Rechnen, nur wenige am Zeichnen oder Knobeln.

Der Mathematikunterricht ist in der fünften Klasse obligatorisch. Er bedeutet eine Pflichterfüllung, der man allenfalls mit wohldosierter Passion begegnet. Es verwundert daher nicht, dass sich in einem Gespräch (in der ersten Mathematikstunde an der neuen Schule) über Erfahrungen und Erlebnisse mit Mathematik

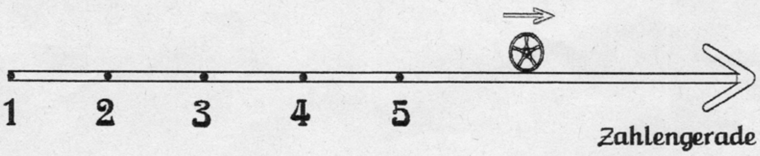
zeigt, dass Schüler in der Anfangsklasse eines Gymnasiums bereits geprägt sind durch einschlägige fachspezifische Erfahrungen in ihrem Grundschulunterricht.
Manche glauben, was Hilton treffend formuliert in dem Satz: „Students, and their parents, believe that mathematics education should consist exclusively of the acquisition of a set of skills which prove useful in their later careers; so the skills must be learnt, that is committed to memory, and no real understanding need occur" (2.2.3). Für den Übertritt an das Gymnasium ist eine gute Mathematiknote nützlich. Dafür trainieren manche Grundschüler mit entsprechender Erwartungshaltung ihrer Eltern hart. „The first serious error is the confusion of education with training" (ebd.), konstatiert Hilton. Viele Schüler bringen entsprechende Testerlebnisse mit, einige auch die Erfahrung, dass sie aus eigenen Fehlern nicht wirklich lernen konnten oder durften (ebd., 2.1.1.3, 2.2.4.2, 2.2.4.3, 4.1.2, 4.2, 4.2.3.2).
Manchen erging es wie den Grundschülern, die für das folgende Statement Pate gestanden sind oder stehen: „… the study of mathematics starts with the teaching of arithmetic, a horrible, wretched subject, far removed from real mathematics, but perceived to be useful. So vast numbers of intelligent people become \`mathematics avoiders´ although they have never met mathematics. … \`mathophobia´, \`math clinics´, \`math anxiety´ … Arithmetics is the cholesterol of elementary education, clogging the arteries of learning" (ebd.).
So oder so ähnlich stellt sich oft die Ausgangssituation für eine personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht dar. Wir Pädagogen wissen, dass die Mathematik mit ihren Bildungsgegenständen, mit ihren vielen spannenden Fragen und faszinierenden Antworten für eine wirksame, personorientierte Begabungsförderung (2.1) auf Herzblut und Freude (2.2.5) der Lernenden angewiesen ist. Hilton geben wir zur Antwort, dass das Prinzip des dialogischen Lernens (2.2.4.3), das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip (2.2.4.2) und das Prinzip der Elementarisierung (2.2.4.1) zusammen mit vielen anderen methodisch-didaktischen Prinzipien für guten Unterricht die „Arterien des Lernens" öffnen können (2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.5, 2.1.3.1, 4).

Dies soll durch das *Minikonzept zur ersten Mathematikstunde* am Gymnasium zum Ausdruck gebracht werden. Anstelle einer Kernidee wird es durch ein Arbeitsblatt repräsentiert.

Von der Entstehung der natürlichen Zahlen

Als Gott das Rad der Zeit erschaffen hatte, markierte er zunächst auf einer Geraden einen Punkt mit Namen "Eins" oder "Anfang".

Gott setzte das Rad in ewigen Schwung und gab ihm eine Vorrichtung mit, die nach jeder Umdrehung auf der Geraden eine Markierung hinterließ. Seitdem breitet sich das Rad unentwegt auf der Zahlengeraden aus.



Die Markierungssteine auf der Zahlengeraden heißen 1, 2, 3, 4, 5 und so weiter. Das nicht vorhandene Ende der Zahlengeraden verschwindet in der Unendlichkeit.

Merke:

Diese oben auf der Zahlengeraden markierten Zahlen heißen **natürliche Zahlen**. Alle natürlichen Zahlen zusammen nennen wir die **Menge der natürlichen Zahlen** und schreiben für sie die Abkürzung $\mathbb{N}$.

(aus Kern, H.: Unveröffentlichtes Unterrichtskonzept zur 5. Jahrgangsstufe)

Ein weiteres *Minikonzept* zeigt, dass anknüpfend an die Formulierung Hiltons die Arithmetik durchaus die „Arterien des Lernens“ öffnen kann.
Die Kernidee ist hier: *Wie oft schlägt das Herz eines Menschen (während seines Lebens)?* Mit noch stärkerem Personenbezug: Wie oft schlug dein Herz seit deiner Geburt? Wie oft das Herz deines Mathematiklehrers? Wie oft wird dein Herz noch schlagen? Wie oft das Herz deines Mathematiklehrers?
Kein Schüler stellt hier die Frage nach dem Sinn der Aufgabe. Sie ist aus sich heraus faszinierend. Der Unterschied zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit wird spürbar. Auch die Kleinheit und Begrenztheit vermeintlich großer Zahlen wird am eigenen Körper erlebbar. Und auch die Freiheit, ins Unendliche hinein zu denken und zu zählen, wird spürbar (3.3.2). Dies ist faszinierend.
Arithmetik bekommt im Kleid dieser Aufgabe einen Lern-Sinn (2.1.1.3, 2.1.2.4, 2.2.4). Sie erfüllt auf einfache Weise die Prinzipien einer personorientierten Didaktik (Aneignung / Autonomie, Lern-Sinn / Performanz, Dialog / Sozialität, 2.1.2.4) und berührt die Personmerkmale (Würde, Autorschaft, Relationalität, Prozess, 2.1.1.3).
Auf diese Weise stellt die Aufgabe ein Fensterkonzept für personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht dar. Diese kleine Überschlagsaufgabe deckt alle Facetten prozessbezogenen Denkens (experimentelles Denken, begriffsbildendes Denken, modellierendes Denken, problemlösenden Denken, schlussfolgerndes Denken, formales Denken, algorithmisches Denken, theoriebildendes Denken) und sogar drei Facetten des inhaltsbezogenen Denkens (numerisches Denken, algebraisches Denken, funktionales Denken) neben vielen Aspekten der mathematikbezogenen Informationsbearbeitung (mathematisches Wahrnehmen, Operieren mit mathematischen Objekten, Denken mit mathematischen Mustern, flexibles Denken, mathematisch-kreatives Denken, Nutzen von Darstellungen, mathematisches Gedächtnis) nach Ulm ab (2.2.2).

3.4.2.3 Der Eulersche Polyedersatz

Der Eulersche Polyedersatz in der fünften Klasse? Sicherlich eine berechtigte Frage. Natürlich ist hier nicht an eine Elementarisierung des Beweises[79] gedacht. Vielmehr geht es um das Entdecken eines nicht alltäglichen, aber interessanten Zusammenhangs und seiner Anwendung auf einen beinahe alltäglichen Polyeder mit zugegebenermaßen nicht ganz ebenen Teilflächen, einen Fußball[80]. Die dazu passenden, aus einem Lehrbuch entnommenen, Aufgaben sind in Abbildung 34 gezeigt.

Der Eulersche Polyedersatz ist für die Schüler absolutes Neuland[81]. Die Entdeckung erfolgt nach dem Wagenscheinschen Prinzip (2.2.4.2). Neben einer Verbalisierung der Beobachtung kann man auch behutsam in die algebraische Formelsprache einführen. Auf diese Weise erfüllt die Aufgabe eine mehrfache Fensterfunktion, um an eine mit Freude erlebte Mathematik heranzuführen (2.2.5, 4.2.1). Fußballfans erhalten hier die Chance, ein „mathematisches Tor“ zu schießen.

Ein kurzer Ausblick auf das Leben und mathematische Wirken von Euler rundet das Minikonzept ab (Fellmann, 1995).

---

[79] Einen Beweis findet man beispielsweise in (Aigner, et al., 2000 S. 59).

[80] Eine andere Aufbereitung der Mathematik im Fußball findet sich bei (Beutelspacher, 1996 S. 71ff.).

[81] Diese nahe an der Umgangssprache gewählte Formulierung weist auf den Begriff der Welt im Sinne Humboldts (2.1.1.1) hin.

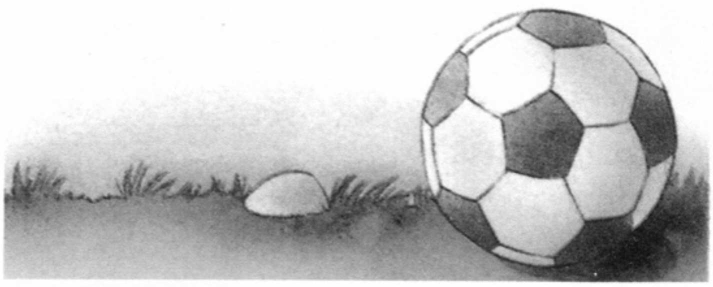
8 Euler'scher Polyedersatz

Es werden die geometrischen Grundkörper mit ebenen Begrenzungsflächen von Seite 64 betrachtet.
Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie.

	Anzahl der		
	Flächen (F)	Ecken (E)	Kanten (K)
Quader			
Würfel			
quadr. Pyramide			
Prisma (1)			
Prisma (2)			

Vergleiche. Was fällt dir auf?

9



Die Nähte eines Fußballs kann man ebenfalls als Kanten eines Körpers auffassen, die einzelnen Lederstücke als Flächen.

a) Zähle die Fünfecke und Sechsecke eines Fußballs. Wie viele Flächen sind es zusammen?
b) Bestimme auch die Anzahl der Kanten und Ecken. Überprüfe deine Ergebnisse mit der in Aufgabe 8 gefundenen Beziehung zwischen F, E und K.

Abbildung 34 Eulerscher Polyedersatz, aus (Schmid, et al., 2003 S. 66)

Eine nähere Betrachtung dieser Aufgabe zeigt die hohe Elementarisierungskunst der Autoren (2.2.4.1) und verwirklicht viele Ansätze einer modernen Aufgabenkultur (4.2.1, 4.2.3.2, 4.2.4). Sie ist genetisch, exemplarisch, sokratisch (2.2.4.2).

Genetisch: Es genügt ein einfacher Impuls, um den Blick der Schüler auf etwas Interessantes zu lenken, sie neugierig zu machen (2.1.2.5). Der Zugang ist einfach: Beobachten. Zählen. Notieren.

Exemplarisch: Es genügen einige beispielhaft ausgewählte Körper, um das Wesentliche entdecken zu können.

Sokratisch: Die gewonnene Erkenntnis $E + F = K + 2$ kann man diskutieren. Gilt der Zusammenhang auch für eine dreieckige Pyramide (Tetraeder)? Diese Frage trainiert Kopfgeometrie, insbesondere das Vorstellungsvermögen.

Gilt der Zusammenhang auch für einen Zylinder? Auf den ersten Blick nicht. Die Auflösung der Knobelfrage kann auch ein 10-Jähriger nachvollziehen. Es gibt eine Fläche, die „unbegrenzt“ ist, die Mantelfläche. Eine Begrenzung durch eine künstliche Kante (hier kann der Fußball mit seinen gewölbten Flächen als Ideenbringer fungieren) ermöglicht die Anwendbarkeit von $E + F = K + 2$.

Wie sieht es bei der Kugel aus? Auf den ersten Blick keine Ecke, eine Fläche, keine Kante, also $0 + 1 = 0 + 2$. Auch hier hilft der Polyederblick. Ein Nordpol, ein Südpol, ein Längenkreis. Euler ist „gerettet“: $2 + 2 = 2 + 2$.

Diese Leitfragen faszinieren die begabten Schüler. Mit wenigen Gedanken steht man mitten in der Mathematik. Die leistungsstärkeren Schüler haben das Gefühl, sie sind die Entdecker auf den Spuren Eulers, alle Schüler haben das Gefühl, sie verstehen die Frage, sie verstehen die Körper und sie verstehen die Lösung. Heuristik im besten Sinn.

Diese Aufgabe kann noch einem ganz anderen Ziel dienen. Während man in der Regel in der 5. Jahrgangsstufe mit arithmetischen Lerninhalten beginnt, die der Lehrkraft einen Überblick über die Begabungsverteilung in diesem Bereich mathematischen Denkens erlaubt, eröffnet die Beschäftigung mit dem Eulerschen Polyedersatz einen Einblick in die Begabungsverteilung im geometrischen Bereich. Die Beobachtungen können Aufschluss geben über viele Facetten inhaltsbezogenen Denkens, wie numerisches Denken, eben-geometrisches Denken, räumlich-geometrisches Denken, funktionales Denken und fast alle Ausprägungen prozessbezogenen Denkens wie algorithmisches Denken, formales

Denken, schlussfolgerndes Denken, problemlösendes Denken, modellierendes Denken, begriffsbildendes Denken, experimentierendes Denken (2.2.2). Diese Aufgabe stößt also zu Beginn der Laufbahn an der neuen Schulart für Lernende und Lehrende vielfältige Fenster in die spannende Welt mathematischen Denkens auf (2.2.3, 2.2.5, 4.2).

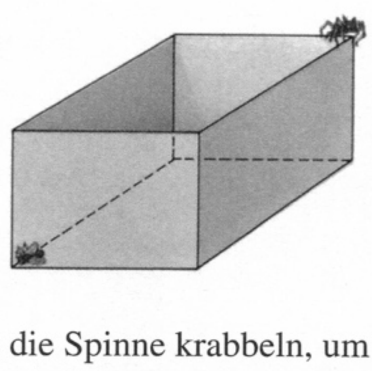
Abschließend wird man den Schülern erklären, dass neben der Entdeckung in der Mathematik vor allem auch die Begründung eine hohe Bedeutung hat. Dies ist ein weiterer Verdienst Eulers (Fellmann, 1995). Aus Respekt vor der altersgemäßen Auffassungsgabe und Interessenlage wird sich die Lehrkraft hier in adäquater Zurückhaltung üben. So ist eine bestmögliche, personorientierte Begabungsförderung im Anfangsunterricht möglich (2.1.1, 2.1.1.5, 3.1.6.1, 3.1.6.2, 4.1).

3.4.2.4 Der kürzeste Weg

Die Frage nach dem kürzesten Weg ist immer eine spannende Frage (Gritzmann, et al., 2003).

Wir betrachten als Fensterkonzept die folgende Aufgabe aus einem Lehrbuch:

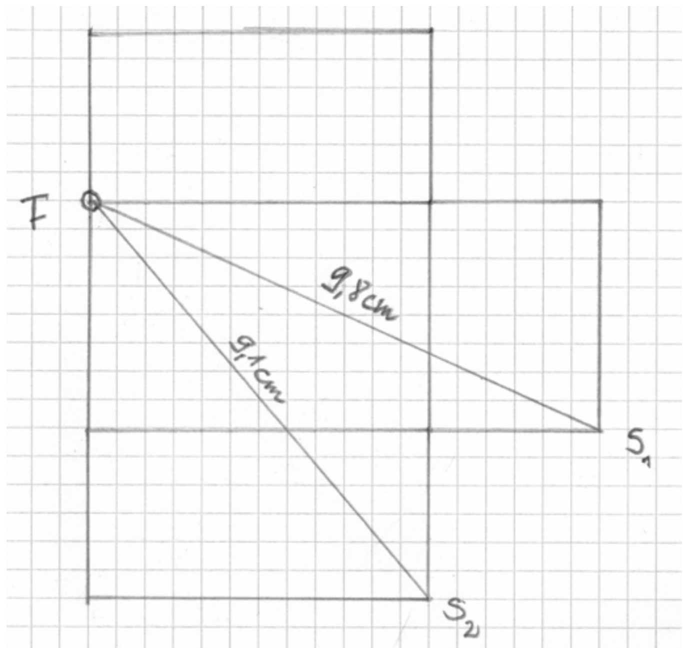
In einem offenen, 30 cm langen, 20 cm breiten und 15 cm hohen Schuhkarton liegt in einer Ecke auf dem Boden eine tote Fliege; in der gegenüberliegenden oberen Ecke sitzt eine Spinne.



Wie muss die Spinne krabbeln, um möglichst rasch bei der Fliege zu sein? Zeichne in ein verkleinertes Netz des Schuhkartons den Weg der Spinne ein. Wie lang ist ihr Weg?

Abbildung 35 Kürzester Weg, aus (Schmid, et al., 2003 S. 66)

Die Antwort sieht zunächst sehr einfach aus. Man zeichnet das Netz und erhält als kürzesten Weg die Verbindungsstrecke der beiden Punkte F und S_1. Dabei ist es durchaus anspruchsvoll, das räumliche Problem in einem verkleinerten Maßstab in die Ebene zu transferieren, dort zu lösen, und dann wieder unter Berücksichtigung des Maßstabes in die räumliche Realität zurückzuführen.



Viele Schüler werden zunächst auf die Lösung $l(FS_1)$ kommen,
also auf $9{,}8cm \cdot 5 = 49cm$.
Erst die Betrachtung von $l(FS_2)$ löst das Problem jedoch wirklich,
also $9{,}1cm \cdot 5 = 45{,}5cm$ ist der kürzeste Weg.
Gibt es vielleicht einen noch kürzeren Weg? Nein.

Diese Aufgabe ist spannend. Das macht sie faszinierend (2.1.2.5, 4.2.4).
Sie ist nicht trivial. Man benötigt eine geometrische Zeichnung, um sie zu lösen.
Auch das macht sie faszinierend, denn das Urbild der Spinnenposition hat im Netz zwei Bildpositionen (S_1und S_2). Dies ist der Grund für die nötige Fallunterscheidung.
Interessant ist ebenfalls ein Vergleich mit einem Kantenweg der Länge $30cm + 20cm + 15cm = 65cm$. Die Abkürzung über die Diagonalen bringt also für die Spinne einen erheblichen Weggewinn. Zeichnerische Lösung und Rechnung bekommen hier einen tieferen Sinn (2.1.1.3, 2.1.2.4).

Schließlich ist die Aufgabe eine Fensteraufgabe. Auch das macht sie faszinierend. Man kann die beiden Streckenlängen mit Hilfe des Lehrsatzes von Pythagoras ausrechnen: $\sqrt{(6+3)^2+4^2}=\sqrt{97}\approx 9{,}849$ und $\sqrt{6^2+(3+4)^2}=\sqrt{85}\approx 9{,}220$ wären zu vergleichen. „Was man nicht im Kopf hat, hat man in den Füßen“ sagt der Volksmund, und man könnte dieses Sprichwort auch auf die Klammern unter der Wurzel oder auf die Spinne anwenden.
Für die Lehrenden ist es hier interessant, die algebraische Ursache (Klammerverschiebung) und ihre Wirkung zu sehen. Der Erkenntnisgewinn generiert sogar einen möglichen Einstieg in die Satzgruppe des Pythagoras und ein Fensterkonzept für die Mittelstufe. Bei näherem Hinsehen enthält die Wurzelrechnung ein weiteres algebraisches und zugleich geometrisches Geheimnis. Die dritte Klammerungsmöglichkeit ist ohne geometrische Bedeutung; das Weglassen der Klammern jedoch führt zur Länge der Diagonalen im Quader und damit zum kürzesten Weg in der Luft. Die Themenstellung der Aufgabe enthält viel Mathematik (Gritzmann, et al., 2003) (2.1.2.5).
In jedem Fall ist die Aufgabe gut geeignet, um den Schülern mehr Appetit auf Mathematik zu machen. Nicht zuletzt ist auch ein Ausblick auf das Prinzip der kürzesten Zeit (3.3.1.3) oder auf Extremalprobleme im Allgemeinen und deren Bedeutung für die Mathematik möglich (3.1, 3.3.1).

Kurzum: Mathematik ist viel mehr als richtig rechnen, richtig zeichnen und (ach ja) Sachaufgaben richtig lösen. Mathematik bedeutet Freude am Wahren, Schönen und Guten. Den Blick dafür und den Weg dazu können Fensterkonzepte aufschließen und eröffnen.

3.4.2.5 Pädagogisches Resümee

Fensterkonzepte zeigen, dass personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht von Anfang an möglich ist und dass personorientierte Begabungsförderung ein Gewinn für alle Lernenden sein kann (2.1, 2.2). Sie können am Beginn einer integrativen, breiten Begabungsförderung im Klassenverband im Sinne von ‚a rising tide lifts all the ships‘ (SEM-Ansatz, 2.1.3.3) stehen, in jedem Fall gehen sie in einem weiten Zusammenhang schließlich über in Unterrichtskonzepte zur personorientierten Begabungsförderung im gymnasialen Mathematikunterricht (3.1, 3.2, 3.3, 3.4.1, 4.1, 4.2).

Die hier vorgestellten Fensterkonzepte wurden am Ende des Schuljahres in einer formlosen Evaluation von Schülern als besonders interessant und beeindruckend bezeichnet. Dass darunter auch so einfache Aufgaben sind wie die Frage nach der Anzahl der Pulsschläge eines menschlichen Herzens, die in einer ad hoc-Situation entstanden ist, unterstreicht den Wert der grundsätzlichen Prämisse einer personorientierten Begabungsförderung.
Wenn schließlich am Ende des gymnasialen Bildungsweges Absolventen nicht mehr sagen „In Mathe war ich immer schlecht …“ (Beutelspacher, 1996), sondern ein nachhaltiges Mathematikerlebnis erzählen, dann kann dies das Ergebnis eines Fensterkonzepts oder einer intensiveren, personorientierten Begabungsförderung sein (4.3). In jedem Fall ist es Ausdruck eines guten Schulentwicklungsprozesses.

4 Schulentwicklung

Unterrichtskonzepte (3) sind Bestandteil der Unterrichtsentwicklung und damit auch der Schulentwicklung. Hier weitet sich der Fokus: Im Rahmen der personorientierten Begabungsförderung werden im vorliegenden Kapitel Konzepte zur Schulentwicklung, ausgehend von der Mathematik, dargestellt und erörtert.

Während die Untersuchungen zur personorientierten Begabungsförderung ihren Ursprung in der begabten Person haben, nehmen die Überlegungen zur Schulentwicklung ihren Ursprung im Lernumfeld der zu begabenden Person, namentlich in der Gesellschaft. Sie begründet den Auftrag einer begabungsgerechten Schule an das Bildungssystem.

Die unterschiedlichen normativen Ebenen werden in einem exemplarischen Überblick betrachtet (4.1.1.1, 4.1.1.2, 4.1.1.3, 4.1.1.4), der umrahmt ist von einem fiktiven Dialog zwischen Hesse und Humboldt als Mahner und Wegbereiter einer personorientierten Begabungsförderung und historische Repräsentanten der „Bildungsgesellschaft“ (4.1.1, 4.1.1.5). Ebenfalls überblicksweise werden mögliche gesellschaftliche Spannungsfelder für Schulentwicklung angesprochen und Lösungsansätze auf der Basis einer personorientierten Begabungsförderung aufgezeigt (4.1.2).

Mathematische Begabungsförderung kann nicht nur den Bildungsprozess des Einzelnen positiv gestalten, sondern auch Impulsgeber und Motor für Schulentwicklungsprozesse sein. So lassen sich Strategien für die Schulentwicklung gewinnen: Konzepte für mathematische Begabungsförderung im außerunterrichtlichen Schulleben (4.2.2.1, 4.2.2.2, 4.2.2.3) und in reflexiver Hinsicht ein Konzept für eine Schule, die mathematische Begabung fördert (4.2.1). Betrachtet werden außerdem die Bereiche Personalentwicklung (4.2.3) und Unterrichtsentwicklung (4.2.4) vor dem Hintergrund der Hattiestudie, die als Metastudie über Unterricht und Schule die Erwartungen der weltweiten „Bildungsgesellschaft“ abbildet.

Am Ende der Untersuchungen steht „Mathematik im Gespräch“ als konzeptueller Indikator und als Ziel für gelingende personorientierte Begabungsförderungs- und Schulentwicklungsprozesse (4.3).

4.1 Begabungsgerechte Schule als gesellschaftlicher Auftrag

Hermann Hesse formuliert im Jahre 1906 folgende Bestandsaufnahme des damaligen Schulsystems:

> *„Für die Lehrer sind Genies jene Schlimmen, die keinen Respekt vor ihnen haben .... Ein Schulmeister hat lieber einige Esel als ein Genie in seiner Klasse, und genau betrachtet hat er ja recht, denn seine Aufgabe ist es nicht, extravagante Geister herauszubilden, sondern gute Lateiner, Rechner und Biedermänner. ... wir haben den Trost, dass bei den wirklich Genialen fast immer die Wunden vernarben, und dass aus ihnen Leute werden, die der Schule zum Trotz ihre guten Werke schaffen und welche später, wenn sie tot und vom angenehmen Nimbus der Ferne umflossen sind, anderen Generationen von ihren Schulmeistern als Prachtstücke und edle Geister vorgeführt werden. Und so wiederholt sich von Schule zu Schule das Schauspiel des Kampfes zwischen Gesetz und Geist, und immer wieder sehen wir Staat und Schule atemlos bemüht, die alljährlich auftauchenden paar tieferen und wertvolleren Geister an der Wurzel zu knicken. Und immer wieder sind es die von den Schulmeistern Gehassten, die oft Bestraften, Entlaufenen, davon Gejagten, die nachher den Schatz unseres Volkes bereichern. Manche aber – und wer weiß wie viele? – verzehren sich in stillem Trotz und gehen unter.“ (Bardy, 2007 S. 111)*

Knapp 100 Jahre später liest man in einer Schrift mit dem Titel „USA verschenken Talente“:

> *„In jedem Bundesstaat, in jeder Schule, in Großstädten und kleinen Bauerndörfern gibt es Schüler, die weitaus mehr können, als das System von ihnen fordert.*
>
> *Diese Kinder sind besser als jeder Politiker zu erwarten wagt. Sie haben die besten Noten, sie lassen die Leistungskurve ansteigen. Das sind Kinder, die bereits als Dreijährige die Etiketten auf der Shampooflasche gelesen haben und sich im Alter von fünf Jahren mit den Leitartikeln in der Zeitung beschäftigen. Sie können die Preise für Lebensmittel schneller addieren als eine Registrierkasse. Sie schockieren ihre Eltern und begeistern ihre Großeltern.*
>
> *Aber mit der Einschulung ändert sich die Lage. Sie sind häufig die am meisten frustrierten Schüler im Klassenzimmer. In der Vorschule ist ihnen langweilig, und in der ersten Klasse auch. Jahr für Jahr lernen*

sie nur wenig, was sie noch nicht wissen. Sie hoffen auf Besserung, die aber nur selten eintritt. Für viele von ihnen ändert sich nichts.

Das amerikanische Schulsystem hält begabte Schüler zurück, indem es sie zwingt, im Gleichschritt mit ihren Klassenkameraden zu lernen. Lehrer und Rektoren ignorieren den Wunsch der Schüler, mehr – viel mehr – zu lernen als ihnen beigebracht wird.

Statt Lob und Ermutigung hören diese Schüler nur ein Wort: nein. Wenn sie um Herausforderungen bitten, werden sie gebremst. Wenn sie ihre Flügel ausbreiten wollen, müssen sie auf ihrem Platz bleiben.

Bleib in deiner Jahrgangsstufe. Bleib auf deinem Platz." (Colangelo, et al., 2004 S. 1)

Erzählen begabte Menschen von ihrem Werdegang, treten immer Personen in Erscheinung, die sie ermuntert haben, ihre Flügel auszustrecken, die Freude am Denken zuzulassen und die eigene Begabung wachsen zu lassen.

4.1.1 Grundlagen

Die philosophisch-anthropologischen Grundlagen einer personorientierten Begabungsförderung wurden bereits in 2.1.1.1 angesprochen. Hier sollen die gesellschaftlichen Grundlagen betrachtet werden.

4.1.1.1 Verfassungsmäßige Grundlagen

In den verfassungsmäßigen Grundlagen sind Bildung und Erziehung, der Begabungsbegriff im Allgemeinen und die personorientierte Begabungsförderung im Besonderen unterschiedlich verankert.
In der Charta der Grundrechte der europäischen Union ist im Titel II „Freiheiten" das Recht auf Bildung verbürgt.

„Artikel 14

Recht auf Bildung

(1) Jede Person hat das Recht auf Bildung sowie auf Zugang zur beruflichen Ausbildung und Weiterbildung.

(2) Dieses Recht umfasst die Möglichkeit, unentgeltlich am Pflichtschulunterricht teilzunehmen.

(3) Die Freiheit zur Gründung von Lehranstalten unter Achtung der demokratischen Grundsätze sowie das Recht der Eltern, die Erziehung und den Unterricht ihrer Kinder entsprechend ihren eigenen religiösen, weltanschaulichen und erzieherischen Überzeugungen sicherzustellen, werden nach den einzelstaatlichen Gesetzen geachtet, welche ihre Ausübung regeln." (NN, 2012)

Das Recht auf Bildung ist ein Freiheitsrecht. Schüler dürfen ihre „Flügel ausbreiten" (4.1), wenn sie wollen. Sie müssen nicht „auf ihrem Platz bleiben" (ebd.).

Aus dem Recht auf Bildung lässt sich ein Recht auf Begabungsförderung ableiten. Im Grundgesetz der Bundesrepublik Deutschland liest man:

„Artikel 2

(1) Jeder hat das Recht auf die freie Entfaltung seiner Persönlichkeit, soweit er nicht die Rechte anderer verletzt und nicht gegen die verfassungsmäßige Ordnung oder das Sittengesetz verstößt." (NN, 2017)

Das Recht auf freie Entfaltung der Persönlichkeit schließt das Recht auf Begabungsentfaltung als Teil der Persönlichkeitsentfaltung ein.

Da Bildung und Erziehung in der Kulturhoheit der Länder liegen, sind die Ausführungen in den Länderverfassungen meistens detaillierter. Exemplarisch für alle Bundesländer soll hier die Bayerische Verfassung betrachtet werden.

„Art. 128

(1) Jeder Bewohner Bayerns hat Anspruch darauf, eine seinen erkennbaren Fähigkeiten und seiner inneren Berufung entsprechende Ausbildung zu erhalten.

(2) Begabten ist der Besuch von Schulen und Hochschulen, nötigenfalls aus öffentlichen Mitteln zu ermöglichen.

…

Art. 131

(1) Die Schulen sollen nicht nur Wissen und Können vermitteln, sondern auch Herz und Charakter bilden.

(2) Oberste Bildungsziele sind Ehrfurcht vor Gott, Achtung vor religiöser Überzeugung und vor der Würde des Menschen,

Selbstbeherrschung, Verantwortungsgefühl und Verantwortungsfreudigkeit, Hilfsbereitschaft, Aufgeschlossenheit für alles Wahre, Gute und Schöne und Verantwortungsbewusstsein für Natur und Umwelt.

(3) Die Schüler sind im Geiste der Demokratie, in der Liebe zur bayerischen Heimat und zum deutschen Volk und im Sinne der Völkerversöhnung zu erziehen.

(4) Die Mädchen und Buben sind außerdem in der Säuglingspflege, Kindererziehung und Hauswirtschaft besonders zu unterweisen.

Art. 132

Für den Aufbau des Schulwesens ist die Mannigfaltigkeit der Lebensberufe, für die Aufnahme eines Kindes in eine bestimmte Schule sind seine Anlagen, seine Neigung, seine Leistung und seine innere Berufung maßgebend, nicht aber die wirtschaftliche und gesellschaftliche Stellung der Eltern.

Art. 133

(1) Für die Bildung der Jugend ist durch öffentliche Anstalten zu sorgen. ...“ (NN, 1998)

Die Förderung von Begabten ist nach Art. 128 BV, Abs. 2 ein gesellschaftlicher Auftrag. Die begabungsgerechte Schule ist in Abs. 1 verankert.
Der Bildungsbegriff ist in Art. 131 thematisiert, der Fächerkanon klingt in Abs. 4 an. Personorientierte Begabungsförderung als gesellschaftlicher Auftrag findet in Art. 132 ihren Niederschlag.

Die weitere Ausgestaltung des verfassungsgemäßen Auftrags einer personorientierten Begabungsförderung erfolgt in der nachgeordneten Gesetzgebung und in den jeweiligen länder-, schulart- und fächerspezifisch ausformulierten Lehrplänen.

4.1.1.2 Grundlagen der Kultusministerkonferenz

Zusammenfassend für alle Bundesländer formuliert die Kultusministerkonferenz der Länder mit Beschluss vom 11.06.2015 in der Broschüre „Förderstrategie für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler“ (Kultusministerkonferenz, 2015):

„Die Individualisierung von Lernprozessen bedeutet, für alle Schülerinnen und Schüler Lernbedingungen zu schaffen, die ihnen eine optimale Entfaltung ihrer Potenziale ermöglichen und ihnen die ihrer individuellen Leistungsfähigkeit entsprechende bestmögliche Bildung vermitteln.

...

Die Förderstrategie empfiehlt, die nachfolgend beschriebenen Maßnahmen im Bereich der Diagnostik, der innerschulischen wie außerschulischen Förderung und Begleitung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Leistungspotenzialen zu verstetigen. In allen Phasen der Lehrerbildung bedarf es erhöhter Anstrengungen, um die Kenntnisse und Kompetenzen von Lehrkräften im Bereich der schulischen und außerschulischen Förderung von leistungsstarken und potenziell leistungsfähigen Schülerinnen und Schülern auszubauen.“ (ebd.)

Personorientierte Begabungsförderung wird hier klar für alle Bundesländer als gesellschaftliche Aufgabe und als stetige, gesellschaftliche Herausforderung definiert. Als Kernbereiche schulischer Förderung werden genannt: Enrichment, Akzeleration, Gruppierung, integrierte Förderung (ebd., 2.1.2.5).

In einer Fortführung des Beschlusses vom 11.06.2015 entstand mit Beschluss vom 10.11.2016 eine „Gemeinsame Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler“ (Kultusministerkonferenz, 2016). Hier wird der gesellschaftliche Auftrag zur personorientierten Begabungsförderung noch weiter ausdifferenziert.

„Alle Schülerinnen und Schüler unabhängig von Herkunft, Geschlecht und sozialem Status so zu fördern, dass für alle Kinder und alle Jugendlichen ein bestmöglicher Lern- und Bildungserfolg gesichert ist – das ist Leitlinie einer auf Chancengleichheit und Bildungsgerechtigkeit zielenden Bildungspolitik. Bund und Länder stimmen darin überein, dass dies sowohl für den Einzelnen als auch für unsere Gesellschaft von großer Bedeutung ist.

…

Alle Kinder und Jugendlichen benötigen geeignete Formen des Lehrens und Lernens sowie auf sie zugeschnittene und sie aktivierende Angebote der Beratung und Begleitung ihres Bildungsganges. Ihre Förderung ist Bund und Ländern ein wichtiges Anliegen.

…

Es existieren Erfolg versprechende Konzepte der integrierten Förderung durch individualisierte und herausfordernde Lernangebote im Regelunterricht ebenso wie Strategien zur Einrichtung spezieller Lerngruppen mit besonderen Leistungsanforderungen. Innerschulische Akzelerations- und Enrichmentmaßnahmen sind ebenso ausgebaut worden wie außerschulische Förderangebote.

…

Bund und Länder stimmen zugleich darin überein, dass weiterhin Bedarf zur Optimierung der Entwicklungsmöglichkeiten leistungsstarker wie potenziell besonders leistungsfähiger Kinder und Jugendlicher besteht.

…

Dabei geht es insbesondere um

o Impulse für eine Leistungsstärke fördernde Schul- und Unterrichtsentwicklung,

o die Stärkung der Professionalität von Lehrerinnen und Lehrern sowie der weiteren pädagogischen und ggf. auch der psychologischen Fachkräfte,

o die weitere Stärkung und qualitative Verbesserung von individuellen und systemischen Beratungsangeboten,

o die stärkere Berücksichtigung von Kindern und Jugendlichen mit kulturell, sozial oder individuell erschwerten Lernausgangslagen,

o eine Intensivierung der für die Initiative relevanten Bildungsforschung.

o Ziel ist, durch einen befristeten Einsatz zusätzlicher Ressourcen dazu beizutragen, dass das Regelsystem Schule nachhaltige Strukturen entwickelt, leistungsstarke und potenziell besonders leistungsfähige Schülerinnen und Schüler optimal zu fördern." (ebd.)

Der gesellschaftliche Auftrag einer begabungsgerechten Schule begründet also insbesondere auch die Entwicklung von Unterrichtskonzepten zur personorientierten Begabungsförderung, wie sie in Kapitel 3 ausgeführt wurden. Er begründet zudem die Notwendigkeit einer differenzierten Schulentwicklung (2.1.3, 4.1.2, 4.2.4).

4.1.1.3 Darstellung in Handreichungen

Regelmäßig ist der gesellschaftliche Auftrag einer begabungsgerechten Schule Thema in Handreichungen und Presseerklärungen.
Die Bundesministerin für Bildung und Forschung formuliert 2016 im Vorwort der Broschüre „Entdecken. Mitmachen. Bewegen."

> *„Bildung und Forschung sind bedeutende Ressourcen für unser Land. Sie dienen der Innovationskraft unserer Gesellschaft. Deshalb ist es wichtig, dass wir bereits junge Menschen für Wissenschaft und Forschung begeistern. Genauso wichtig ist es, die Kreativität und den Ideenreichtum von Schülerinnen und Schülern so früh wie möglich zu stärken.*
>
> *Das Bundesministerium für Bildung und Forschung möchte junge Menschen deshalb ermutigen, auch abseits des schulischen Curriculums Fragen zu stellen und Antworten darauf zu finden. Deshalb fördern wir seit vielen Jahren Nachwuchstalente durch Schüler- und Jugendwettbewerbe. ...*
>
> *Die Bandbreite der Wettbewerbe und der eingebrachten Beiträge zeigt deutlich: Talent kann ganz verschiedene Ausprägungen haben. Es ist unsere Aufgabe, jedes dieser Talente individuell zu fördern. Denn mit kreativen und innovativen Ideen machen wir unsere Gesellschaft zukunftsfähig. Solche Ideen können jedoch nur entstehen und weiterentwickelt werden, wenn Menschen die eingefahrenen Bahnen des Denkens und Handelns in Frage stellen und sich von Entdeckerlust mitreißen lassen. Dazu sollen die Wettbewerbe motivieren.*
>
> *Die Wettbewerbe sind deshalb nicht nur für Schülerinnen und Schüler ein Gewinn. Sie geben uns allen neue Impulse, mit denen wir unsere Gesellschaft weiterentwickeln können." (BMBF, 2016)*

Im Vorwort der Broschüre „Begabte Kinder finden und fördern - Ein Wegweiser für Eltern, Erzieherinnen und Erzieher, Lehrerinnen und Lehrer" betont die Ministerin die gesellschaftliche Aufgabe „Begabungspotenziale und Talente von Kindern zu erkennen und zu fördern" (BMBF, 2017) und das „Gebot der Chancengerechtigkeit, jedem Kind die bestmögliche Entwicklung zu sichern" (ebd.). Sie formuliert das Ziel, „auf Kinder mit besonderen Fähigkeiten und Interessen aufmerksam zu werden, sie besser zu verstehen und entsprechend zu fördern" (ebd.). Genau dies ist die Grundlage einer personorientierten Begabungsförderung.

In den einzelnen Bundesländern genießt das Thema der Begabtenförderung einen durchweg hohen Stellenwert, wie die Überschriften der folgenden Publikationen zeigen:

Hamburg: „15 Jahre Beratungsstelle besondere Begabungen (BbB)
Besondere Begabungen entdecken und fördern – Impulse für Unterricht und Schule“ (Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung, 2012)

Die Broschüre enthält u.a. einen Beitrag zum Thema: „Wege in Forschungsfelder öffnen – anregende Kost für mathematisch Begabte“, in denen J. Reinhardt drei Prämissen für personorientiertes, begabungsförderndes Lehren formuliert:

> *„Eigentlich braucht jedes Kind drei Dinge: Aufgaben, an denen es wachsen kann, Vorbilder, an denen es sich orientieren kann, Gemeinschaften, in denen es sich aufgehoben fühlt.“ (ebd.)*

Und er konstatiert:

> *„Mathematik kennt den Jammer, als Schulfach zu enden.“ (ebd.)*

(2.2.1.1, 2.2.1.3, 3.1.6.4) (2.1.3.3, 3, 4.2.4)

Hessen: „Kluge Köpfe entdecken – beflügeln – fördern
Handreichung zum Überspringen – Planung, Begleitung und Evaluation der Probezeit“ (Landesschulamt und Lehrkräfteakademie, 2013)

Hier geht es um klassische Akzeleration (2.1.2.5, 2.1.3.3).

Sachsen: »Jeder zählt!« – Begabungs- und Begabtenförderung in Sachsen (Sächsisches Staatsministerium für Kultus, 2016)

Die Broschüre enthält einen Beitrag zum Thema „Offene Aufgaben – Kreatives Lernen im Mathematikunterricht in Klasse 9“, in dem F. Rabel einen mathematischen Schulrundgang beschreibt. Schüler können an ihrer Schule Parabeln entdecken (2.1.1.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 3).

Bayern: „Besondere Begabungen an weiterführenden Schulen finden und fördern“ (ISB, 2011)

In dieser Broschüre erfolgt der Brückenschlag von der personorientierten Begabungsförderung zu einer begabungsgerechten Schulkultur.

„Vision einer begabungsgerechten Schulkultur:

- *Begabungsförderung ist Teil der Schulentwicklung.*
- *Schüler werden durch persönliche Zuwendung individuell unterstützt.*
- *Didaktik ist auf Integration ausgerichtet.*
- *Lernarrangements ermöglichen ein differenziertes Lernen aller Schüler.*
- *Unterschiede werden berücksichtigt und genutzt.*
- *Schüler bekommen Gelegenheit zu Selbstwirksamkeitserfahrungen.*
- *Personale Fähigkeiten werden genauso gefördert wie spezifisches Fachwissen.*
- *Die Schule ermöglicht flexible Lösungen (Überspringen, Drehtürmodell, Frühstudium...).*
- *Es werden individuelle Bezugsnormen angesetzt, wo dies möglich ist.*
- *Schüler übernehmen Verantwortung für sich und andere." (ebd.)*

Mit Bezug auf personorientierte Begabungsförderung im Fach Mathematik werden folgende Ideen genannt: Wettbewerbe, Talentkurse, Arbeitsgemeinschaften, Mathematikolympiade, Mathematik zum Anfassen, berühmte Mathematiker, Mathematik im Alltag (ebd.) (2.1.1.4, 2.1.2.5, 2.1.3.3, 2.2.1.1, 3, 4.1.1.2, 4.1.1.4, 4.2.1, 4.2.2).

Auch A. Einstein kommt zu Wort mit einem pointierten Ausspruch: „Ich habe keine besondere Begabung, sondern bin nur leidenschaftlich neugierig." (ISB, 2011) Doch Neugierdeförderung (Initiation und Faszination, 2.1.2.2) ist auch bereits Begabungsförderung.

4.1.1.4 Darstellung in Presseerklärungen

Exemplarisch für die Darstellung des gesellschaftlichen Auftrags einer begabungsgerechten Schule in der Presse steht die folgende Pressemitteilung Nr. 003 vom 23.03.2018 des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus:

> *„50 Stipendien für besonders begabte Schüler - Kultusstaatssekretärin Carolina Trautner und Dr. Dagmar Wolf von der Robert-Bosch-Stiftung übergeben Urkunden bei Festakt in München ...*
>
> *Insgesamt 50 junge Talente sind heute feierlich in das Programm ‚Talent im Land – Bayern' (TiL) aufgenommen worden. Sie werden in den nächsten Jahren vom Bayerischen Kultusministerium und der Robert-Bosch-Stiftung GmbH auf ihrem Weg zum Abitur oder zur Fachhochschulreife unterstützt. ...*
>
> *Staatssekretärin Carolina Trautner sagte bei der Veranstaltung: ‚Wir wollen mit den Stipendien junge Menschen, die aufgrund ihrer Herkunft, beispielsweise ihrer Migrationsgeschichte, Hürden zu überwinden haben, dabei unterstützen, ihre besonderen Talente zu entfalten. Unsere bisherigen TiL-Stipendiatinnen und Stipendiaten sind lebendige Beispiele für gelingende Bildungswege. Sie sind damit auch Vorbilder für andere. ...'*
>
> *‚Junge Talente dürfen nicht darunter leiden, wenn zuhause keiner bei den Hausaufgaben helfen kann oder das Geld für eigene technische Experimente oder den Musikunterricht nicht ausreicht.', so Dr. Dagmar Wolf. ‚Deshalb setzen wir uns mit Talent im Land für begabte junge Menschen ein und begleiten sie auf ihrem Weg zum Abitur.'" (NN, 2018)*

Ein Teil der Gesellschaft (Robert-Bosch-Stiftung) nimmt hier zusammen mit der Exekutive den gesellschaftlichen Auftrag einer begabungsfördernden Schule an (4.1). Darüber hinaus bringt die Presseerklärung einen umfassenden Begabungsbegriff zum Ausdruck, der auch dieser Arbeit zugrunde liegt (2.1.1.1, 2.1.1.2, 2.2.1.1, 2.2.1.2).

Zusammenfassend wurde in den Abschnitten 4.1.1.1 bis 4.1.1.4 gezeigt, dass der gesellschaftliche Auftrag einer begabungsgerechten Schule eine verfassungsmäßige Verankerung auf der Ebene der Persönlichkeits- und Menschenrechte besitzt, die Förderung besonderer Begabungen in einem breiten gesellschaftlichen Konsens miteinschließt und einen intensiven, andauernden Schul- und Unterrichtsentwicklungsprozess begründet.

4.1.1.5 Humboldts Replik an Hesse

Auch wenn Wilhelm von Humboldt (1776-1835), der Begründer des neuzeitlichen Gymnasiums, lang vor Hesse (1877-1962) lebte, so würde er ihm (4.1) fiktiv sinngemäß Folgendes zu bedenken geben.

> *„Der Zweck des Schulunterrichts ist die Uebung der Fähigkeiten, und die Erwerbung der Kenntnisse, ohne welche wissenschaftliche Einsicht und Kunstfertigkeit unmöglich ist. Beide sollen durch ihn vorbereitet; der junge Mensch soll in Stand gesetzt werden, den Stoff, an welchen sich alles eigne Schaffen immer anschließen muss, theils schon jetzt wirklich zu sammeln, theils künftig nach Gefallen sammeln zu können, und die intellectuell-mechanischen Kräfte auszubilden. Er ist also auf doppelte Weise einmal mit dem Lernen selbst, dann mit dem Lernen des Lernens beschäftigt. […] Der Schüler ist reif, wenn er so viel bei anderen gelernt hat, dass er nun für sich selbst zu lernen im Stande ist. Sein Sprachunterricht z. B. ist auf der Schule geschlossen, wenn er dahin gekommen ist, nun mit eigner Anstrengung und mit dem Gebrauch der vorhandenen Hülfsmittel jeden Schriftsteller, insoweit er wirklich verständlich ist, mit Sicherheit zu verstehen, und sich in jede gegebene Sprache, nach seiner allgemeinen Kenntnis vom Sprachbau überhaupt, leicht und schnell hinein zu studiren. Wenn also der Elementarunterricht den Lehrer erst möglich macht, so wird er durch den Schulunterricht entbehrlich. Darum ist auch der Universitätslehrer nicht mehr Lehrer, der Studirende nicht mehr Lernender, sondern dieser forscht selbst und der Professor leitet seine Forschung und unterstützt ihn darin.“ (Flitner, et al., 1982 S. 169f.)*

Humboldt würde auch auf sein Bildungsverständnis als persönlichen Auftrag und zugleich als gesellschaftspolitisch bestmöglich zu erfüllende Aufgabe hinweisen:

> *„Die letzte Aufgabe unseres Daseyns: dem Begriff der Menschheit in unserer Person, sowohl während der Zeit unseres Lebens, als auch noch über dasselbe hinaus, durch die Spuren des lebendigen Wirkens, die wir zurücklassen, einen so großen Inhalt, als möglich, zu verschaffen, diese Aufgabe löst sich allein durch die Verknüpfung unsres Ichs mit der Welt zu der allgemeinsten, regesten und freiesten Wechselwirkung. Diess allein ist nun auch der eigentliche Massstab zur Beurtheilung der Bearbeitung jedes Zweiges menschlicher Erkenntniss. Denn nur diejenige Bahn kann in jedem die richtige seyn, auf welcher*

> *das Auge ein unverrücktes Fortschreiten bis zu diesem letzten Ziele zu verfolgen im Stande ist, und hier allein darf das Geheimniss gesucht werden, das, was sonst ewig todt und unnütz bleibt, zu beleben und zu befruchten." (Flitner, et al., 1980 S. 235f.)*

In den Äußerungen Humboldts findet man viele Berührpunkte zu einer personorientierten Begabungsförderung (2.1, 2.2). Insbesondere lässt sich die Notwendigkeit für einen Schulentwicklungsprozess erkennen, der die Aspekte der Unterrichtsentwicklung (4.2.4) und der Personalentwicklung (4.2.3) einschließt und der seinem Bildungsideal (2.1.1.1) in der Verwirklichung Nachdruck verleiht.

4.1.2 Der personorientierte Ansatz für gelingende Schulentwicklung

Zu Beginn des Kapitels 4.1 wurde der gesellschaftliche Auftrag für eine begabungsgerechte Schule beleuchtet.
Der Literaturnobelpreisträger Hesse fordert den Respekt vor dem Schüler, vor dem „Genie" (ebd.). Er sieht durchaus eine Aufgabe darin, „extravagante Geister herauszubilden" (ebd.). Er beklagt „das Schauspiel des Kampfes zwischen Gesetz und Geist" und sieht, „Staat und Schule atemlos bemüht, die alljährlich auftauchenden paar tieferen und wertvolleren Geister an der Wurzel knicken" (ebd.). Begabte Schüler „verzehren sich in stillem Trotz und gehen unter" (ebd.). In der Äußerung Hesses geht es im Kern um die Personmerkmale Würde, Autorschaft, Prozess und Relationalität (2.1.1.3), er fordert Achtsamkeit für die Personwerte Autonomie, Verantwortung, Leistung und Beteiligung (ebd.), und er verlangt eine Haltung der Förderung, der Stärkenorientierung, der Anerkennung, der Begleitung (ebd.) mit Blick auf die Genies[82], die extravaganten Geister und die begabten Schüler im Allgemeinen. Eine personorientierte Schulkultur kann die impliziten Forderungen Hesses erfüllen.

[82] Vgl. lat. in-genium - Begabung

In gleicher Weise lässt sich begründen, dass der Ansatz einer personorientierten Schulkultur Defizite wie die in der Schrift „USA verschenken Talente“ (4.1) aufgezeigten verhindern kann.

Unter Bezug auf alle in 4.1.1 dargestellten Grundlagen kann man wiederum in gleicher Weise belegen, dass der Ansatz einer personorientierten Begabungsförderung, insbesondere einer personorientierten Schulkultur (Abbildung 2 S. 16), die einzelnen Aspekte, Erwartungen und Anforderungen des gesellschaftlichen Auftrags an eine begabungsgerechte Schule zu erfüllen vermag.
Nicht zuletzt weisen die detaillierten Zitate in 4.1.1 zahlreiche Querbezüge zu den in 2.1 dargestellten und erarbeiteten Inhalten einer personorientierten Begabungsförderung auf.

Allerdings garantiert das Prinzip einer personorientierten Begabungsförderung keinen Automatismus für die Verwirklichung einer begabungsgerechten Schule, da deren Realisierung in unterschiedlichen Spannungsfeldern erfolgt (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.3, 2.1.3, 2.2.1.1, 2.2.1.3, 4.1.1). Wir betrachten davon einige exemplarisch.
Das Beziehungsgeflecht *Schüler-Eltern-Lehrkräfte* ist ein wesentliches, persongeprägtes Spannungsfeld. An erster Stelle steht die Heterogenität der individuellen Schülerpersönlichkeiten. Sie bildet regelmäßig den Ursprung für die Betrachtungen in Kapitel 0, sowohl in allgemeiner als auch in besonderer Hinsicht (2.1.1.5, 2.1.2.2, 2.1.2.3, 2.1.2.4, 2.2.4, 3.1.6.1, 3.1.6.2). Nicht minder heterogen sind die Erwartungen der Eltern. Sie stimmen zwar grundsätzlich einer bestmöglichen Begabungsförderung ihrer Kinder zu, jedoch erzeugt die Frage nach dem richtigen Maß der für jedes Lernen erforderlichen Anstrengung ein eigenes Spannungspotential (2.2.3). Auch das Selbstverständnis der Lehrkräfte ist heterogen. Sie stimmen ebenfalls grundsätzlich einer bestmöglichen Begabungsförderung der Schüler zu, doch sind die diagnostischen und methodischen Potenziale unterschiedlich ausgeprägt. Dies führt regelmäßig zu divergierenden Auffassungen und Diskussionen darüber, welches Maß an personorientierter Begabungsförderung gut sei. Die Verantwortung als Leitidee 2.1.3.2 kann einen konstruktiven Umgang mit diesem Spannungsfeld und einen

befruchtenden Dialog (2.1.1.1, 2.1.1.3, 2.1.2.3) über die richtige personorientierte Begabungsförderung gewährleisten.

Der Komplex *Lehrplan-Prüfungen-pädagogischer Freiraum* ist ein weiteres wesentliches, bildungsgegenstandsgeprägtes Spannungsfeld. Lehrpläne und Prüfungen sind meistens für einen idealen Schülertypus konzipiert und berücksichtigen die Bedürfnisse von Heterogenität (s.o.) oder Individualität (2.1.1.3, 2.1.2.4) nicht oder nur sehr eingeschränkt. Inhaltliche Fesseln oder Gängelungen streift der Enrichment-Ansatz (2.1.3.3) vollkommen ab, so dass hier personorientierte Begabungsförderung voll wirksam werden kann. In Kapitel 3 wurden sowohl Unterrichtskonzepte für ein lehrplanungebundenes (3.1.6, 3.2.3, 3.2.4) als auch für ein lehrplangebundenes (3.3, 3.4) Enrichment vorgestellt. Prüfungslernen geißelt nicht nur Hilton als wenig bildungsstiftend (2.2.3), es steckt auch in der Äußerung „Mathematik kennt den Jammer, als Schulfach zu enden“ (J. Reinhart, 4.1.1.3) oder in der Formulierung Hesses „ein Schulmeister hat lieber einige Esel als ein Genie in seiner Klasse, und genau betrachtet hat er ja recht, denn seine Aufgabe ist es nicht, extravagante Geister herauszubilden, sondern gute Lateiner, Rechner und Biedermänner“ (4.1). Und dies ist sicher das schwierigste Unterfangen: In Prüfungen immer auch offene Aufgaben und kreative Problemlösungen zuzulassen und gleichermaßen initiierende und faszinierende Transferaufgaben zu entwerfen. Denn so kann selbst in einer Prüfungssituation noch sinnstiftendes, begabungsförderndes Lernen stattfinden und nicht nur stoppuhrorientiertes Vorrechnen von antrainierten Routinen.

Das Spannungsfeld *Behörde-Stundenplan-Freizeit* ist lernzeitgeprägt. Die Schule als staatlich kontrollierte Behörde gibt den Lernzeitrahmen vor, der Stundenplan öffnet das Lernzeitfenster für das jeweilige Fach, das für Kernfächer um die schriftliche Hausaufgabe erweitert wird. In diesen Zeitfenstern wird Lernen und personorientierte Begabungsförderung nicht in Frage gestellt. Schwieriger ist die Situation manchmal im Bereich der Freizeit, wenn diese stundenplanähnlich mit verschiedenen Aktivitäten durchgetaktet ist und in Konkurrenz zur schulischen Begabungsförderung steht. Angebote im Enrichment-Ansatz wie beispielsweise Wettbewerbe (2.1.2.5, 2.1.3.3, 4.1.1.3) erstrecken sich regelmäßig auf die Freizeit und erfordern daher eine hohe Wertschätzung für personorientierte Begabungsförderung, denn Lernen ist nicht nur anstrengend, sondern erfordert Zeit (2.1.2.6, 2.1.3.2).

Das Spannungsfeld *gesellschaftlicher Diskurs-politische Debatte-Bildung und Erziehung* ist vielschichtig und kann die personorientierte Begabungsförderung in erheblichem Maße beeinflussen (4.1.1). Gesellschaftlicher Rückhalt trägt wesentlich dazu bei, personorientierte Begabungsförderung für jedes Kind wirksam werden zu lassen (ebd.). Umgekehrt war bei der in der Vergangenheit geführten, ausgeprägten Lernzeitdiskussion für den gymnasialen Bildungsgang zu beobachten, dass die Reduzierung der Lernzeit von neun auf acht Jahre in der Mathematik verbunden war mit einer Vereinheitlichung der Prüfungsanforderungen und der Lehrpläne. Dieser Prozess berücksichtigte die Heterogenität der Schüler nur noch in geringem Ausmaß. Bei einer Rückkehr zu einer neunjährigen Lernzeit am Gymnasium ist daher der gesellschaftliche Auftrag an eine begabungsgerechte Schule zu respektieren (ebd.). Die Heterogenität der Schüler (s.o.) ist für eine bestmögliche personorientierte Begabungsförderung im Fach Mathematik zu berücksichtigen bei der Ausprägung der gymnasialen Zweige und dem Kursangebot in der Oberstufe, aber auch bei der Ausgestaltung von Leistungserhebungen generell und der Abiturprüfung im Besonderen (2.1.2.3, 2.1.3, 3).

Zukunftsorientierte Schulentwicklung kann sehr wohl auch innerhalb unterschiedlicher Spannungsfelder – es wären neben den angeführten Spannungsfeldern noch weitere denkbar – mit Hilfe des Prinzips einer personorientierten Begabungsförderung gelingen.

4.2 Begabungsförderung als Impulsgeber für Schulentwicklung

Wir nehmen an: Die ehemaligen Schüler des Genius-Schlaumeier-Gymnasiums in Intelligenzdorf formulieren ein Leitbild für ihre Schule. Es beginnt mit den Worten. „Bildung und Begabung lagen uns während der ganzen Schulzeit am Herzen. Heute sind wir stolz darauf, dass wir in Mathe immer schlecht waren (Beutelspacher, 1996). Wir sind auch stolz darauf, dass wir in X, $X \in \{Fach; Fach\ wird\ am\ G.-S.-Gymnasium\ unterricht\}, X \neq Mathe$, immer schlecht waren. …“

Diese fiktive Situation führt unmittelbar zu wesentlichen Fragestellungen. Was ist Mathe? Wie wird Mathe wahrgenommen? Was erklärt die große kognitive und emotionale Distanz der Person zu Mathe?

Welche Bedeutung hat eine personorientierte, mathematische Begabungsförderung für die Schulentwicklung?

4.2.1 Eine die mathematische Begabung fördernde Schule

In 2.1.1.3 wurde begründet, dass sich eine personorientierte Schulkultur in Offenheit und Aufgeschlossenheit, in Neugierde und Kreativität, nicht in Anweisung und Normiertheit zeigt.

Angewandt auf die Förderung mathematischer Begabungen geht dies einher mit *Interesse und Wertschätzung für mathematische Leistungen*, mit Offenheit und Aufgeschlossenheit für mathematische Fragestellungen und Lösungen als Teil der menschlichen Kultur (Gardner, 2011) (Hilton, 1991) (2.2.1.2), mit Neugierde für mathematische Aufgabenstellungen und Kreativität im mathematischen Denken (Ulm, 2018) (Wagenschein, 1988). Von herausragender Bedeutung ist die jeweilige Relativität der Wertschätzung für mathematische Leistungen. Sie beginnt nicht erst bei der Leistung der Preisträger eines überregionalen Wettbewerbs oder der Auszeichnung für das beste Mathematikabitur. Sie fängt vielmehr bereits an bei der Begeisterung der Eltern für ihr Kind, das gerade zählen lernt und sich auch verzählen darf oder das gerade eine erste geometrische Figur zeichnet (2.2.1.1, 2.2.1.3). Und sie setzt sich fort in den vielen, später meist schulischen, mathematischen Geh- und Denkversuchen (Bardy, 2007) (Ulm, 2009) (Hilton, 1991). Stets wird die Wertschätzung für mathematische Leistungen flankiert von den Haltungen einer personorientierten Begabungsentwicklung: Förderung, Stärkenorientierung, Begleitung, Anerkennung. Sie haben die lernende Schülerpersönlichkeit mit ihrer Würde, ihrer Autorschaft, ihrer Relationalität und ihrem Begabungsprozess im Blick (2.1.1.3, Abbildung 2).

Eine Begleiterin der Wertschätzung ist die Einschätzung mathematischer Leistungen. In 2.2.1 wurde dargestellt, dass Begabungen und Begabungsprozesse im Allgemeinen wie auch in der Mathematik inter- und intrapersonal verschieden ausgeprägt sein können (Gagné, 2007) (Gardner, 1993). Dies gilt auch für das Sichtbarwerden von mathematischen Begabungen und mathematischem Denken in mathematischen Leistungen (Ulm, 2018) und ist von hoher Relevanz für eine wertschätzende Beurteilung mathematischer Leistungen.

Eng verbunden mit der Wertschätzung mathematischer Leistungen ist der Umgang mit Fehlern im mathematischen Tun und Denken. So wie sich Eltern über die ersten Zähl- oder Zeichenversuche ihres Kindes freuen und bei Fehlern in elterlicher Liebe nur behutsam und wohldosiert gegensteuern, ist eine *gelebte Fehlerkultur* für einen gelingenden Begabungsförderungsprozess unentbehrlich. Auch wenn ältere Geschwister schon einmal ihre gesicherten Kenntnisse gegenüber der kleinen Schwester oder dem kleinen Bruder machtvoll demonstrieren, werden Eltern stets ein behütendes Auge auf die wachsende Begabung werfen und verhindern, dass erwachendes Denken „an der Wurzel" knickt (Hesse, 4.1).
In einem ökologischen Begabungsmodell „wird dem Individuum eine selbstbewusste Position zugestanden und zugemutet als unverfügbare, eigenständige und eigenverantwortlich entscheidende Persönlichkeit, die zu ihrer Umwelt in Beziehungen tritt." (2.1.1.4). Eine gute Fehlerkultur entwickelt das *Selbstkonzept des Lernenden* als wichtige Förderinstanz zur Begabungsförderung. Denn die „Selbsteinschätzung der eigenen Fähigkeiten und Möglichkeiten,

verbunden mit den co-kognitiven Einstellungen und Fähigkeiten der Person, sind von entscheidender Bedeutung für deren Ausbildung von (Hoch)Begabungen oder Nichtausgestaltung“ (ebd.).
In der Didaktik der Mathematik spielt die gelebte Fehlerkultur seit langer Zeit eine wesentliche Rolle (Ruf, et al., 2014) (Wagenschein, 1988), auch im Verständnis für mathematische Bildung (Hilton, 1991) (Beutelspacher, 1996).

Gelebte Fehlerkultur geht ebenso ein in das *Selbstkonzept des Lehrenden.* Anders als das Selbstkonzept der Lernenden ist diese Thematik in analoger Weise mit Blick auf die Lehrenden wissenschaftlich bislang nicht untersucht und strukturiert worden. Hattie weist auf die Bedeutung dieser Thematik hin, wenn er die Haltung der Lehrkraft – sie ist eine wesentliche Komponente des Selbstkonzeptes – ins Zentrum seiner Betrachtungen stellt (Hattie, et al., 2018) (4.2.3.2, 4.2.4). Weigand greift dies mit klaren Worten auf: „Die Haltung einzelner Lehrpersonen wird … zum Auslöser und Katalysator von ´Schulentwicklung durch Begabungsförderung´“. (Weigand, et al., 2014 S. 102) (2.1.1.5). Schmid nennt drei Herausforderungen für die Lehrenden: die Angebotsebene, die Erlebnisebene und die Ebene der Persönlichkeitsentwicklung, die er in Zusammenhang setzt mit der kognitiven Leistung, der individuellen Leistung und der personalen Leistung des Lernenden (ebd.). Die bei der Lehrkraft angesiedelten klassischen Aufgaben der Vermittlung und Bewertung von Wissen ergänzt er um Aufgaben, die zu einem „effizienten und kreativen Selbstlernen“ (ebd.) hinführen. So mündet das Selbstkonzept einer Lehrkraft nicht in Diagnose und Selektion, sondern in Zutrauen und Zumuten, Fördern und Entfalten (ebd.).
Für die *Aufgabenkultur* gilt analog wie für die Fehlerkultur: In der Didaktik der Mathematik spielt die gelebte Aufgabenkultur seit langer Zeit, insbesondere seit TIMSS und PISA, eine wesentliche Rolle (Ruf, et al., 2014) (Wagenschein, 1988) (Ulm, 2010), auch im Verständnis für mathematische Bildung (Hilton, 1991) (Beutelspacher, 1996) (Bruder, et al., 2015) (Greefrath, et al., 2016) (Weigand, et al., 2014).

Zusammenfassend spielen *Aufgabenkultur* und *Fehlerkultur*, *Selbstkonzept der Lernenden* und *Selbstkonzept der Lehrenden* in konzertanter Weise eine wesentliche Rolle als Katalysatoren einer personorientierten mathematischen

Begabungsförderung. Dies meint auch Schmid, wenn er konstatiert, dass nach einem personalen Verständnis Schulqualität und Begabungsförderung „nicht eine Frage von Systemen und Strukturen“ (2.1.1.5), sondern von „Personen, deren Rollenbildern und Haltungen“ (ebd.) ist. Denn von ihnen geht die ursprüngliche und letztendliche Kraft für mathematische Begabungsförderung im Besonderen und für Schulentwicklung im Allgemeinen aus (2.1, 2.2, 4.1.2, 4.2.3, 4.2.4).

Dennoch ist unbestritten, dass Rollenbilder und Haltungen einer personorientierten Begabungsförderung auf Systeme und Strukturen wirken (2.1.2.2, 4.2.3.2, 4.2.4). Müller-Oppliger legt Wert auf ein „Kerncurriculum und ergänzende Bildungsangebote für Schüler/innen mit besonderen Bedürfnissen, was (potenzielle) Hochleistende miteinschließt („Schoolwide Enrichment Model“ von Renzulli/Reis 1997)“ (2.1.2.2). Er plädiert für eine *inklusive Lernstruktur*, die gemeinsame und „individuelle Lernpfade, die sich in ihrer Entwicklung immer wieder begegnen und gegenseitig anerkennen“, enthält. Sie berücksichtigen die fünf Bereiche einer *Didaktik der Begabungsförderung* (Identifikation, Initiation und Faszination, innere Differenzierung, äußere Differenzierung, Anerkennungskultur) und zeichnen eine ideale mathematische Begabungsförderung aus (3.1.4, 3.1.6.1, 3.3.1.1).
Akzeleration und Enrichment öffnen die schulischen Strukturen für individuelle Lernpfade, die begabungsabhängig ohne Gängelung auch schneller und reicher beschritten werden dürfen. Insofern geht die Gestaltungskraft für schulische Strukturen idealerweise stets vom Anliegen einer personorientierten Begabungsförderung aus. Eine größtmögliche mathematische Begabungsförderung gelingt dabei im Rückgriff auf das gesamte Spektrum an Möglichkeiten, das Unterrichtsentwicklung und Organisationsentwicklung bereitstellen, das im Abschnitt über personorientiertes Lehren und Lernen (2.1.2) erläutert wurde und exemplarisch im *Methodencluster für Begabungsförderung* nach Schmid (2.1.2.5) eine konkrete Ausprägung erfährt.
In Kapitel 3 wurde anhand von Unterrichtskonzepten aufgezeigt, wie mathematische Begabungsförderung in einer inklusiven Lernstruktur unter Ausschöpfung des zwischen Akzeleration und Enrichment aufgespannten Spektrums an methodischen Möglichkeiten von der ersten Unterrichtsstunde bis zu einem Pluskurs oder einer Sommerakademie gelingen kann.

Die Frage nach den Möglichkeiten der Unterrichts- und Organisationsentwicklung lenkt den Blick auf die Führungskultur. Hackl proklamiert mit Ausrichtung auf Werteetablierung und -implementierung eine *partizipative Führungskultur* (Visionen kommunizieren und Prozesse einleiten, Herausforderungen schaffen, neue Ideen formulieren, individuelle Förderungen und Unterstützung vorhalten, Konsens über Ziele erreichen, u.a., 2.1.3.1). Sie ist Voraussetzung, um den Wert einer mathematischen Begabungsförderung organisatorisch und unterrichtlich zu realisieren.

In den Bereich der Partizipation fällt auch die Entscheidungsfreiheit der einzelnen Lehrperson, in welcher Weise und in welchem Umfang sie in der mathematischen Begabungsförderung tätig sein möchte (ebd.). Das, was in 2.1.1.3 mit Blick auf die zu begabenden Schüler formuliert wurde, gilt ebenso für die Mathematiklehrenden: Eine Haltung der *Begleitung* unterstützt den Wert der Beteiligung und das Beschreiten neuer organisatorischer und unterrichtlicher Wege für begabungsförderndes Lehren und Lernen (die Personwerdung des Lehrenden) im relationalen Kontext. Sie kann in verschiedenen Modellen realisiert werden (Mentoring, Coaching etc., 2.1.2.6). Dabei ist unstrittig, dass personale Begleitung und Orientierung (Personalentwicklung) zentrale Bestandteile einer personorientierten Schulkultur sind, die mathematische Begabungen fördert. Denn auch das *begabungsfördernde Lehren* verdient mit Blick auf die Mathematik wie auch auf andere Kulturleistungen *Anerkennung und Wertschätzung*.

Damit sind wir wieder am Ausgangspunkt der Betrachtungen angelangt. Eine die mathematische Begabung fördernde Schule wertschätzt und fördert das mathematische Interesse, das mathematische Denken und die mathematischen Leistungen der Lernenden und der Lehrenden. So konstituiert eine personorientierte Schulkultur Schule als Ort eines persongebundenen Bildungsprozesses, als „Erfahrungsraum … menschlicher Entwicklungen und individueller Gestaltungen“ (2.1.1.3). Zusammenfassend kann Schulentwicklung eine bestmögliche mathematische Begabungsförderung ebenso ermöglichen wie eine ideale mathematische Begabungsförderung Bestandteil einer idealen Schulentwicklung ist.

4.2.2 Mathematik im außerunterrichtlichen Schulleben

In 4.2.1 wurde begründet, dass von einem begabungsfördernden Unterricht in Mathematik wesentliche Impulse für die Unterrichtsentwicklung und damit für die Schulentwicklung ausgehen können. Dies gilt sowohl für das Kerncurriculum als auch für ergänzende Bildungsangebote.
Neben den unterrichtlichen Realisierungen von ergänzenden Bildungsangeboten (gymnasialer Zweig mit mathematischem Schwerpunkt, Additum im Rahmen des pädagogischen Freiraums, Pluskurs, Wahlfach, etc.) gibt es auch außerunterrichtliche Realisierungen, die eine integrative Lernstruktur mit ihren individuellen Lernpfaden (2.1.2.2, 4.2.1) bereichern. Sie fallen primär in den Bereich der Organisationsentwicklung.

4.2.2.1 Mathematik-Wettbewerbe

Mit Blick auf die personorientierte Begabungsförderung und die Kriterien einer personorientierten Schulkultur (2.1.1.3) sind Mathematik-Wettbewerbe vielfach vergleichbar mit Pluskursen (3.1.6.1):
Pluskurse sind regelmäßig Ausdruck einer personorientierten Schulentwicklung, denn „selbst an Schulen mit Hochbegabtenklassen geht es nicht allein um die Förderung Hochbegabter, sondern um die Förderung besonderer Begabungen und letztlich um die Begabung aller Kinder und Jugendlichen“ (2.1.3). Sie sind Ausdruck einer Schulentwicklung „von unten“ (2.1.3.1), denn sie beruhen auf der „Veränderungsinitiative Einzelner“ (ebd.) und betreffen „deren Wirkungskreis“ (ebd.). Sie entwickeln „sich aus der Verantwortung und dem Mut der Initiatoren“ (ebd.) und sind „damit grundsätzlich Ausdruck eines personalen Bildungsprozesses“ (ebd.). Von entscheidender Bedeutung im Bereich der Partizipation ist die Wahlfreiheit: Sie „gehört erfahrungsgemäß zu den stärksten Stimulatoren einer aktiven Teilnahme am Entwicklungsprozess einer Schule und ist zudem eine Voraussetzung für die Ermöglichung eines weithin eigengestalteten Lernprozesses bei den Lernenden“ (ebd.).

Es gibt einen kleinen Unterschied. Die Initiative für Wettbewerbe geht oft von überregionalen Institutionen aus, die auch strukturelle Unterstützung für die Wettbewerbsdurchführung bieten (Bundeswettbewerb Mathematik, Landeswettbewerb Mathematik, Känguru, etc.), so dass in schulorganisatorischer Hinsicht eine Wettbewerbsbegleitung meist einfach zu realisieren ist.
Das Bundesministerium für Bildung und Forschung hält eine Broschüre über Schüler- und Jugendwettbewerbe bereit (BMBF, 2016) und weist auf die begabungsfördernde Wirkung einer passenden Wettbewerbsteilnahme hin (BMBF, 2017 S. 45). Dies zeigt den hohen Stellenwert, den man überregionalen Mathematik-Wettbewerben einräumt.

Mathematische Leistungen in außerunterrichtlichen Wettbewerben (Jugend forscht, s.o.) geben regelmäßig Anlass zu einer Würdigung in öffentlichem Rahmen (3.1.6.3, 4.1.1.4). Anerkennung, Stärkenorientierung, Förderung und Begleitung sind die Haltungen (2.1.1.3), die eine personorientierte Schulkultur definieren. Sie sind im außerunterrichtlichen Kontext von Mathematik-Wettbewerben idealerweise erfüllt (4.1.1.2, 4.1.1.3).

4.2.2.2 Mathematisches Kolloquium

Es gibt viele Gründe, an einer Schule kein mathematisches Kolloquium durchzuführen. Die Organisation ist reichlich aufwändig. Ein Kolloquiumsabend steht und fällt mit dem Referenten und seinem Thema. Der Termin ist abzustimmen, ein Einladungsschreiben zu entwerfen, der Raum herzurichten, ein Präsent bereit zu halten, ein Hotelzimmer zu buchen, etc. Und man weiß bis zuletzt nicht, wie viele Interessenten kommen. Wer begibt sich am Abend schon noch einmal gerne an die Schule? Die Mathematiklehrer? Die Mathematikschüler? Die „Mathematikeltern“? Die „Mathematikadministration“? Einige versprengte Interessierte?
Die wenigen Interessierten könnten doch genauso gut an eine Universität fahren, eine Mathematik-Ausstellung besuchen, ein Mathematik-Museum aufsuchen oder einfach nur zu Hause gemütlich ein Mathematikbuch in die Hand nehmen.
Es gibt jedoch auch viele Gründe, zu einem mathematischen Abendvortrag mit anschließender Diskussion einzuladen. Denn dies ist die Fortsetzung des

dialogischen Lernens (2.2.4.3). Der Referent wird die Kernideen seines Vortrages erzählen, die Aufträge geschickt verpacken, die Zuhörer auf eine mathematische Reise mitnehmen, ohne ein verpflichtendes Reisetagebuch einzuführen, und in der Diskussion Rückmeldung geben. Der Vortrag wird das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip (2.2.4.2) berücksichtigen und zu bewirken versuchen, dass das Kategoriale auf elementare Weise (2.2.4.1) zu einem subjektiven Erlebnis wird. Bemerkt oder unbemerkt werden die Prinzipien eines begabungsfördernden Mathematikunterrichts angewandt, und die mathematische Begabung des Zuhörers wird sich weiter entfalten. Da die Besucher außerdem freiwillig dem Vortragenden lauschen, ist davon auszugehen, dass die Personmerkmale Würde, Autorschaft, Prozess, Relationalität einer personorientierten Schulkultur (2.1.1.3) uneingeschränkt erfüllt sind.
Kurzum: Ein mathematisches Kolloquium erfüllt die Kriterien für eine personorientierte mathematische Begabungsförderung nahezu ideal. Schließlich geht man ja auch ergänzend zum Deutsch- oder Musikunterricht hin und wieder ins Theater oder in ein Konzert. Mathematische Bildung zu pflegen ist nach Hilton (2.2.3) nichts wesentlich anderes. Für den Fall, dass Zweifel an der akademischen Ernsthaftigkeit der Argumentation aufkommen: Es ist durchaus gestattet, Freude am mathematischen Denken (2.2.5) zu erleben, die nicht immer sofort mit der Anstrengung des Lernens und des unterrichtlichen Begabungsentwicklungsprozesses verbunden sein muss.

4.2.2.3 Fächerübergreifende Vernissage im Jahr der Mathematik

Es gibt, wie in 4.2.2.2 dargestellt, wiederum viele Gründe, sich an einer Schule außerhalb des Unterrichts nicht mit Mathematik zu beschäftigen.
Am Maristen-Gymnasium Furth wurde das Jahr der Mathematik 2008 als Initiative aufgegriffen, um „Mathematik sichtbar“ zu machen. Im Jahresbericht liest man:

> *„Im Sommer 2008 arbeiteten viele engagierte Schüler und Lehrer aller Jahrgangsstufen an einer umfangreichen, informativen und unterhaltsamen mathematischen Ausstellung. Das Jahr der Mathematik war der Anlass für den großen Eifer, der viele gelungene Exponate hervorbrachte. Angefangen bei den fünften Klassen, die … Muttertagsherzen oder Möbiusbänder bastelten, bis zu den zwölften*

Klassen, die sich mit der Fourier-Analyse im Rahmen des Grundkurses Musik ... auseinandersetzten, beschäftigten sich fast alle Schüler und viele Lehrer mit besonderen Themen aus der Mathematik und Themen, die ihre Verwandtschaft mit der Mathematik nicht leugnen können. Aufwändig für Außenstehende aufbereitet, konnten die Ergebnisse dann einige Monate in der Aula und dem Aufenthaltsraum bewundert werden: ein Film, Plakate, Basteleien, Modelle und Skulpturen, philosophische Themen, geschichtliche sowie aktuelle Themen, lustige und hintergründige Themen – in der gesamten Bandbreite und Vielfalt wurde die Mathematik durchleuchtet: ... überdimensional großes π ..., ...'Plastisches Gestalten und geometrische Grundformen' ..., ... selbst gebastelte Abaki ..., ... Pythagoras-Baum ... , ... Novalis als Romantiker und Mathematiker ..., ... ,Warum zählen die Franzosen so merkwürdig?' ..., ... ,Mathematik und die englische Sprache' ..., ... ,Alles über π' ..., ... Geschichte der Mathematik ..., ... Akustik, ..., ... Inflation ..., ... mathematische Hintergründe zur Sozialversicherung und Zusatzvorsorge ..., ... Reaktionstest mit Fallschnüren ..., ... Zitate französischer Mathematiker ..., ... ,Chemische Zahlenspiele'..., ... Fermats letzter Satz und die Primzahlen ... , ... Codierung ... .

Hinter den Stellwänden schloss sich ein weiterer Ausstellungsraum – der auf wohl schönste Weise zweckentfremdete Aufenthaltsraum – an. ... Exponate zur ,Schönheit und Mathematik' ... Platonische Körper ..., ...Fernseher, mit dem man ein mit liebevollem Detailwitz ausgestattetes selbstgedrehtes Video („Logik – Mathematik und Argumentieren"), das an die Klassiker von Loriot erinnerte, ...

...viele Schaukästen im gesamten Schulgebäude ... dem Thema Mathematik gewidmet ... griechische Philosophen und Mathematiker ..., ... Bedeutung der Fibonacci-Zahlen in der Natur ...

Die ... Zusammenstellung aller Ausstellungsstücke und der spannende Vortrag von Professor Dr. Beutelspacher ... konnten alle ... Besucher davon überzeugen, dass Mathematik nicht nur ist, was sowieso niemand kann, sondern auch einfach nur schön, interessant und ab und zu sogar lustig sein kann." (NN, 2009 S. 78ff.)

In dieser Darstellung kommen viele Aspekte einer personorientierten Begabungsförderung zum Ausdruck, wie sie auch in 4.2.2.2 herausgearbeitet wurden.

Mit Blick auf Schule und Schulentwicklung bedeutet dies, dass es bei einer personorientierten Begabungsförderung vorrangig nicht allein nur mehr darum geht, „im Leistungsnormrahmen einer Schule erfolgreiche Leistungsträger hervorzubringen“ (2.1.2.1). Im Gegenteil: Der Mehrwert einer personorientierten Begabungsförderung (ebd.) offenbart sich. Die individuelle Auseinandersetzung mit selbstgewählten Fragen und Themen führt zu einer Verständnistiefe, die eine wertgeleitete Integration des Lerngegenstandes in die Person des Lernenden zulässt.

> *„Unterricht und Schule erhalten gegenüber dem bisherigen Selbstverständnis eine veränderte Bedeutung. Sie werden zu anregenden Räumen des Lebens und der Auseinandersetzung mit dem Gelernten über das Gelernte hinaus mit sich selbst. ... In diesem Sinne können sie zu prägenden Lernräumen der Entfaltung und Selbstgestaltung der Persönlichkeit und der Mitgestaltung der Umwelt werden. Wissen und Persönlichkeitsgestaltung sind zwei aufeinander bezogene Größen dieses Bildungsverständnisses.“ (ebd.)*

Erkennbar sind in der o.g. Darstellung auch wesentliche Prinzipen für personorientierte Begabungsförderung. Die Kernideen (2.2.4.3) sowie die genetisch-sokratisch-exemplarischen Momente (2.2.4.2) des Projektes Vernissage sind ebenso wie die Freude an der personorientierten Auseinandersetzung mit mathematischen Themen (2.2.3, 2.2.5) klar sichtbar.

Die Realisierung einer mathematischen Vernissage stellt eine besondere Herausforderung für die personorientierte Begabungsförderung an die Lehrenden (2.1.1.5) und Lernenden dar:

> *„Statt (sei es auch noch so behutsam und in einem individualisierten Verfahren) ‚an der Hand geführt‘ zu werden, werden die Lernenden dazu ‚aufgerufen‘ ..., selbst aus der eigenen Beengtheit herauszutreten und ihr eigenes – selbstgewähltes, aber auch selbstverantwortetes! – Ziel (freilich mit der notwendigen Unterstützung) anzusteuern.“ (2.1.1.5)*

Wird dies erreicht, dann gelingt Bildung auf der Basis mathematischer Begabungsförderung. Im Kleinen kann man dies beispielsweise auch durch den Besuch einer mathematischen Wanderausstellung, eines mathematischen Museums oder durch eine themenbezogene Exkursion ermöglichen und unterstützen. Und wenn dann am Ende einer solchen Veranstaltung oder eines solchen Projektes die Schüler sagen: „Mathe ist cool“ statt „in Mathe war ich immer schlecht“, ist dies die richtige Replik auf (Beutelspacher, 1996) und ein möglicher Indikator für gelungene mathematische Begabungsförderung für alle.

Die Impulse, die von einer personorientierten mathematischen Begabungsförderung im außerunterrichtlichen Schulleben ausgehen, wirken als Impulse für die Organisations- und Personalentwicklung bis hin zu Impulsen für die Unterrichtsgestaltung und damit weit in den Schulentwicklungsprozess hinein.

4.2.3 Personalentwicklung von Mathematiklehrkräften

Der Pflichtunterricht im Kernfach und Abiturprüfungsfach Mathematik ist häufig darauf ausgelegt, „im Leistungsnormrahmen einer Schule erfolgreiche Leistungsträger hervorzubringen“ (2.1.1.5). Für viele Lehrpersonen stellt daher der Anspruch einer personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht einen Paradigmenwechsel dar:

> *„Unterricht und Schule erhalten gegenüber dem bisherigen Selbstverständnis eine veränderte Bedeutung. Sie werden zu anregenden Räumen des Lebens und der Auseinandersetzung mit dem Gelernten über das Gelernte hinaus mit sich selbst. ... In diesem Sinne können sie zu prägenden Lernräumen der Entfaltung und Selbstgestaltung der Persönlichkeit und der Mitgestaltung der Umwelt werden. Wissen und Persönlichkeitsgestaltung sind zwei aufeinander bezogene Größen dieses Bildungsverständnisses.“ (2.1.1.5)*

4.2.3.1 Impulse aus der personorientierten Begabungsförderung

Eine Schulentwicklung „von unten“ beruht nach Hackl auf der Veränderungsinitiative Einzelner und betrifft deren Wirkungskreis (3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 4.2.1, 4.2.2). Sie entwickelt sich aus der Verantwortung (2.1.1.5, 2.1.3.2) und dem Mut der Initiatoren (2.1.2.2) und ist damit grundsätzlich Ausdruck eines personalen Bildungsprozesses (2.1.1). Die in 4.2.2 genannten Beispiele sind Ausdruck einer solchen Schulentwicklung „von unten“, ebenso wie die in 3 vorgestellten Unterrichtskonzepte zum begabungsfördernden Unterricht nach dem SEM-Ansatz (2.1.3.3).

„Die Unterstützung einer experimentellen Kultur durch die Schulleitung kann zu einem hohen Engagement verschiedener Lehrpersonen … führen“ (2.1.3.1). Neben einer partizipativen Führungskultur, wie sie Hackl für eine werteorientierte Schulentwicklung fordert (ebd.), kann Coaching (2.1.2.6) als Führungshaltung eine sehr hilfreiche Unterstützung für die Lehrkräfte darstellen, die sich auf den Weg machen, personorientierte Begabungsförderung umzusetzen. Die in 2.1.2.6 gemachten Feststellungen für ein Coaching der Lernenden durch die Lehrenden sind nahezu identisch auf ein Coaching der Lehrenden durch Schulleitende übertragbar.
Umgekehrt können durch die Prinzipien Partizipation und Coaching die Impulse der Lehrkräfte aufgenommen werden, die personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht umsetzen, und so zu einem wertvollen Beitrag für fächerübergreifende Schulentwicklung gemacht werden.

„Die Haltung einzelner Lehrpersonen wird damit zum Auslöser und Katalysator von ´Schulentwicklung durch Begabungsförderung´“ (2.1.1.5). Folgerichtig fordert Schmid, dass sich letztlich jede Lehrkraft auf die Haltung zur begabungsfördernden Lehrperson einlassen soll (ebd.). Die Ressource ist die individuelle Persönlichkeit, die Haltung dem Lernenden gegenüber und eine sich zu eigen gemachte Pädagogik der personorientierten Begabungsförderung. Dies ist nicht mehr eine Pädagogik der Vermittlung, Bewertung und Selektion, sondern eine Pädagogik des Zutrauens und Zumutens, des Förderns und Entfaltens. (ebd.)

4.2.3.2 Entwicklungsziele nach Hattie

Wie Weigand mit Blick auf die personorientierte Begabungsförderung formuliert, dass „keine völlig neuen Lehr- und Lernformen oder Methoden dargestellt“ (2.1.2) werden, sondern vielmehr gezeigt wird, „wie durchaus bekannte und gängige Formen ‚lernwirksamen Unterrichts’ … aus der Perspektive der Personorientierung eine qualitativ andere, nämlich begabungsgestaltende und persönlichkeitsbildende Ausrichtung erhalten“ (ebd.), stellt auch Hattie nüchtern fest, dass „es nichts Neues … im Buch Lernen sichtbar machen gibt“ (Hattie, 2017 S. 178), dass es „kein neues Programm, kein neues Akronym, kein neues ‚Hey, lasst uns mal das hier versuchen!‘“ gibt, sondern dass es darum geht, „die ausschlaggebende Bedeutung des Verstehens, wie exzellente Lehrpersonen denken, anzuerkennen!“ (ebd.)

> *„Es geht um eine Veränderung, die dazu führt, dass alle Lehrpersonen an den Schulen auf wirkungsvolle Weise über ihre Rolle, ihren Einfluss und ihre Kollegialität nachdenken, und darum, alle dabei zu unterstützen, hohe Erwartungshaltungen zu haben. Nötig ist über multiple Quellen der Evidenz zum Einfluss auf alle Schülerinnen und Schüler zu verfügen und diese empirischen Belege über den Einfluss wertzuschätzen - und zwar sowohl öffentlich als auch privat.“ (ebd.)*

Zurecht stellt Hattie fest:

> *„Wir haben Tests verwendet, um das Oberflächen-Wissen zu messen. Wir haben diese Daten verwendet, um Schuld zuzuschieben. Und die Lehrpersonen haben gelernt, dieses Spiel mitzuspielen. ... Wir reden gern über Dinge, die nicht wirklich eine Rolle spielen.“ (Hattie, 2017 S. 170)*

Diese Kritik, die man so oder so ähnlich auch bei (Gagné, 2007) (Gardner, 1993) (Hilton, 1991) (Ruf, et al., 2014) (Wagenschein, 1988) findet, war nicht zuletzt Ausgangspunkt für die Begründung einer personorientierten Begabungsförderung in Mathematik (0).

Hattie stellt die Lehrpersonen nicht nur in den Mittelpunkt der Anforderungen für Personalentwicklung, sondern ins Zentrum der Erkenntnis, wenn er sagt:

> *„Vielleicht liegt der größte Widerstand gegen Veränderung des gegenwärtigen Systems darin, dass wir Millionen von Lehrpersonen gebeten haben, dieses System zu verbessern. Sie haben ihre kreativen Gedanken eingesetzt und damit das bestehende Modell weit über sein Verfallsdatum verbessert und aufrechterhalten.“ (Hattie, 2017 S. 170)*

Die Kreativität der Lehrkräfte in der personorientierten Begabungsförderung stand auch in 4.2.3.1 als Impulsgeber für Schulentwicklung.

Als grundlegendes Personalentwicklungsziel formuliert Hattie:

> *„Verbesserungen richten sich darauf, die gemeinschaftliche Fähigkeit der Lehrpersonen an einer Schule aufzubauen und Erfolg auszuweisen. Dieser betrifft nicht lediglich die Leistung. Er umfasst auch, Lernen zu einem wertgeschätzten Outcome zu machen: indem das Interesse der Schülerinnen und Schüler am Lernen bewahrt wird, indem sie dazu gebracht werden, sich selbst und andere zu respektieren, indem Vielfalt anerkannt und wertgeschätzt wird und indem eine Gemeinschaft aufgebaut wird.“ (Hattie, 2017 S. 171)*

Dieses grundsätzliche Ziel schließt auch den summarischen Blick auf die Kriterien, Werte und Haltungen für personorientierte Begabungsförderung mit ein.
Im Detail nennt Hattie als Schlussfolgerung in „Lernen sichtbar machen“ sechs „Wegweiser für Exzellenz im Bildungsbereich“ (Hattie, 2017 S. 21):

> *„1 Lehrpersonen gehören zu den wirkungsvollsten Einflüssen beim Lernen.*
>
> *2 Lehrpersonen müssen direktiv, einflussreich, fürsorglich und aktiv in der Leidenschaft des Lehrens und Lernens engagiert sein.*
>
> *3 Lehrpersonen müssen wahrnehmen, was Lernende denken und wissen. ...*
>
> *4 Lehrpersonen und Lernende müssen die Lernintentionen sowie die Erfolgskriterien für ihre Unterrichtsstunden kennen und wissen, wie gut sie diese Kriterienpunkte für alle Lernenden erreichen. ...*
>
> *5 Lehrpersonen müssen von einer einzelnen Idee hin zu vielfältigen Ideen voranschreiten und diese Ideen so miteinander verknüpfen und erweitern, dass die Lernenden Wissen und Ideen konstruieren und rekonstruieren. Nicht das Wissen oder die Ideen, sondern die Konstruktion des Wissens durch die Lernenden sind entscheidend.*
>
> *6 Schulleitende und Lehrpersonen müssen Schulen, Lehrerzimmer und Klassenzimmer schaffen, in denen Fehler als Lerngelegenheiten willkommen sind, in denen das Verwerfen von fehlerhaftem Wissen und Erkenntnissen begrüßt wird und in denen sich die Lehrpersonen sicher fühlen können, um zu lernen, neu zu lernen und Wissen und Erkenntnisse zu erkunden.“ (ebd.)*

Als Zielvorstellungen beschreibt Hattie „einflussreiche, leidenschaftliche, versierte Lehrpersonen“ (Hattie, 2017 S. 22), die

> *„sich auf die kognitive Auseinandersetzung der Lernenden mit dem Unterrichtsinhalt konzentrieren,*
>
> *sich auf die Entwicklung einer Art des Denkens und Schlussfolgerns konzentrieren, die Problemlöse- und Lehrstrategien betont, die sich auf den Stoff beziehen, von dem sie wollen, dass die Schülerinnen und Schüler ihn lernen,*
>
> *sich auf die Vermittlung neuen Wissens und neuer Erkenntnisse konzentrieren und dann überprüfen, wie Lernende in diesem neuen Wissen Flüssigkeit und Verständnis erlangen,*

sich auf das Geben von angemessenem und zeitnahem Feedback konzentrieren, um die Lernenden zu unterstützen, dass sie die erstrebenswerten Ziele der Unterrichtsstunde erreichen,

Feedback über ihren Einfluss auf den Lernfortschritt und die Versiertheit aller ihrer Lernenden suchen,

ein tiefes Verständnis darüber haben, wie wir lernen und

sich darauf konzentrieren, das Lernen mit den Augen der Lernenden zu sehen; die dabei sowohl deren schrittweises Vorankommen beim Lernen anerkennen wie auch deren oft nicht-lineare Fortschritte in Richtung der Zielerreichung; die deren bewusstes Üben unterstützen; die ihnen Feedback bezüglich ihrer Fehler und eingeschlagenen Irrwege geben; die sich darum sorgen, dass die Lernenden die Ziele erreichen und dass sie die Leidenschaft der Lehrperson für den zu lernenden Stoff teilen." (ebd.)

Ohne es im Einzelnen nachzuweisen, ist es evident, dass gerade Lehrkräfte, die sich mit Überzeugung und Leidenschaft einer personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht verschreiben, diese von Hattie formulierten Feinziele in der Personalentwicklung erreichen. Darüber hinaus können von diesen Lehrkräften für die Personalentwicklung an der Schule und für die Schulentwicklung insgesamt starke Impulse ausgehen. Wiederum gilt: „Die Haltung einzelner Lehrpersonen wird … zum Auslöser und Katalysator von ´Schulentwicklung durch Begabungsförderung´" (4.2.3.1).

4.2.4 Unterrichtsentwicklung

Hattie setzt in das Zentrum des pädagogischen Dreiecks aus Stoff-Schüler-Lehrer und didaktischer Kompetenz-pädagogischer Kompetenz-fachlicher Kompetenz die Haltungen der Lehrenden (Hattie, et al., 2018 S. 26), die damit im Zentrum des Unterrichts stehen.
Hattie leitet aus seinen wissenschaftlichen Studien „Visible Learning" *zehn wesentliche Haltungen für die Unterrichtspraxis* ab, die hier in ihrer Relevanz für personorientierte Begabungsförderung genannt werden sollen. Sie stellen zugleich eine Zusammenfassung der vielfältigen Aspekte personorientierter

Begabungsförderung im Mathematikunterricht unter dem besonderen Blickwinkel der Unterrichtsentwicklung dar.

„Ich rede über Lernen, nicht über Lehren“ (Hattie, et al., 2018 S. 31ff.). Mit dieser Haltung rückt Hattie die Schülerpersönlichkeit mit ihren Begabungen in den Fokus (2.1.1.1). Er untersucht Faktoren für lernwirksames Lehren (Erkenntnisstufen, vorausgehendes Leistungsniveau, Concept Mapping, Lernstile, Selbstkonzept, etc.) (2.1.1.4, 2.1.3.3, 3.1.4, 4.2.1).
„Ich setze die Herausforderung“ (Hattie, et al., 2018 S. 47ff.). Mit dieser Haltung betont Hattie das grundsätzliche Prinzip, dass Lernen eine Herausforderung benötigt und Lehrpersonen dafür Sorge tragen, dass weder eine Unterforderung noch eine Überforderung eintritt. In 2.1.2 wurde diese Thematik differenziert aufgearbeitet, so dass erkennbar ist, dass aus einer personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht im Rahmen des SEM-Ansatzes differenzierte Impulse für diese allgemein formulierte Haltung ausgehen können.
„Ich sehe Lernen als harte Arbeit“ (Hattie, et al., 2018 S. 63ff.). Mit dieser Haltung fordert Hattie die aktive Mitarbeit der zu begabenden Person in ihrem Begabungsförderungsprozess und letztlich in ihrem Bildungsprozess ein (2.1.1.1). Denn „ob … die Beschäftigung mit einem Thema zu einer bildenden Erfahrung und für Begabungspotenziale wirksam wird, hängt davon ab, inwieweit sie für den Einzelnen bedeutsam wird und sie/er aktiv damit umgeht“ (2.1.1.2). Die Lernumwelt erhält den Auftrag, eine gedeihliche Atmosphäre des „Forderns“ zuzulassen (2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.2.1.1, 2.2.1.3, 4.1.1.2, 4.2.1), in der Lernen Freude hervorruft (2.2.5).
„Ich entwickle positive Beziehungen“ (Hattie, et al., 2018 S. 81ff.). Mit dieser Haltung legt Hattie Wert auf eine positive Grundgestimmtheit gegenüber den Lernenden, dem Lernumfeld und dem Bildungsgegenstand. Positive Emotionalität wurde in der vorliegenden Abhandlung in verschiedenem Kontext angesprochen (2.1.1.4, 2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.2, 2.1.2.5, 2.1.3.1, 2.2.1.1, 2.2.1.3, 2.2.3, 3, 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2), ebenso wie das grundlegende Prinzip der Relationalität für gelingende personorientierte Begabungsförderung (2.1.1.1, 2.1.1.3).
„Ich verwende Dialog anstelle von Monolog“ (Hattie, et al., 2018 S. 93ff.). Mit dieser Haltung betont Hattie das Prinzip des Dialogs, das in dieser Arbeit als ein

wesentliches didaktisches Prinzip für personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht begründet und vielfach angewandt wurde (2.1.1.3, 2.1.2.4, 2.2.4.3, 3.1.4, 3.1.5, 3.2.3.3, 3.3.1.2, 3.3.1.3, 3.3.2.2, 3.4.1.1, 3.4.1.2).

„Ich informiere alle über die Sprache der Bildung“ (Hattie, et al., 2018 S. 105ff.). Diese Haltung ist eng verbunden mit dem dialogischen Prinzip, das nur auf der Grundlage einer gemeinsamen Sprache der Bildung gelingen kann. Auch wenn Gardner den Moment des Heureka noch nicht an Sprache gebunden sieht, ist Sprache als Kommunikationsmittel über Bildungsinhalte, Bildungsziele, und die Schaffung einer förderlichen Bildungsumgebung von essentiellem Wert (2.2.1.2, 1, 0, 3, 4, 5).

„Ich bin ein Veränderungsagent“ (Hattie, et al., 2018 S. 125ff.). Mit dieser Haltung betont Hattie die Notwendigkeit einer Aufgeschlossenheit für Veränderungen und eine konstruktive Gestaltung und Begleitung von Umwandlungsprozessen. Eine solche Haltung ist wesentlicher Bestandteil einer personorientierten Schulkultur, die sich gerade in Offenheit, Aufgeschlossenheit (4.1.1.1), Neugierde und Kreativität zeigt, nicht in Anweisung und Normiertheit (2.1.1.3). Sie konstituiert Schule als Ort eines persongebundenen Bildungsprozesses, als „Erfahrungsraum … menschlicher Entwicklungen und individueller Gestaltungen“ (ebd.) (4.2.1).

„Ich bin ein Evaluator“ (Hattie, et al., 2018 S. 141ff.). Diese Haltung bringt zum Ausdruck, dass es nicht um ein Verändern oder Experimentieren an sich geht, sondern dass die Veränderungen im Schulentwicklungsprozess idealerweise in einen Mehrwert für die sich bildenden Schüler mündet (2.1.2.1, 2.1.2.6, 4.1.1.2). Schulentwicklung kann nur gelingen, wenn die Verantwortung dafür wahrgenommen wird (2.1.3.1, 2.1.3.2, 3.1.6.4, 3.4.2.5).

„Ich erachte Schülerleistungen als eine Rückmeldung für mich über mich“ (Hattie, et al., 2018 S. 165ff.). Diese Haltung Hatties bringt wesentliche Prinzipien (Würde, Autorschaft, Prozess, Relationalität), Werte (Autonomie, Verantwortung, Leistung, Beteiligung) und Haltungen (Förderung, Stärkenorientierung, Anerkennung, Begleitung) einer personorientierten Schulkultur zum Ausdruck (2.1.1.3). Sie betont die enge Verbindung zwischen Lehren und Lernen (2.1.1.5, 2.1.2.1, 2.1.2.6, 2.1.3.2, 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1) und setzt einen Gegenpunkt zur Haltung einer auf Minderleistung basierenden Selektion.

„Ich arbeite mit anderen Lehrpersonen zusammen“ (Hattie, et al., 2018 S. 185ff.).

Diese grundlegende Einstellung betont den Wert der Kooperation für gelingende Begabungsförderungsprozesse (2.1.1.3, 2.1.1.4, 2.1.2.5, 2.1.2.6, 2.1.3.1, 2.1.3.3, 2.2.1.3, 4.1.2, 4.2.1).

Seine zehn Haltungen für die Unterrichtspraxis lässt Hattie in eine umfangreiche *„Vision von einer Schule der Zukunft"* münden:

> *„Wir haben die Vision von einer Schule, in der Leidenschaft für das Unterrichten, für das Fach und für die Lernenden erkennbar und spürbar sind.*
>
> ...
>
> *Wir haben die Vision von einer Schule, in der Lernende für das Lernen begeistert werden, um an sich zu glauben und mit dem Herzen in ihr Lernen zu investieren.*
>
> ...
>
> *Wir haben die Vision von einer Schule, in der alle Lernenden willkommen sind.*
>
> ...
>
> *Wir haben die Vision von einer Schule, in der in jedem Lernendem Potenzial gesehen wird und in der in jedem Lernendem etwas gesehen wird, was dieser noch gar nicht von sich kennt.*
>
> ...
>
> *Entfache die Leidenschaft fürs Lernen! Halte deine Leidenschaft fürs Lehren am Leben! Kenne deinen Einfluss!" (Hattie, et al., 2018 S. 209f.)*

Diese Visionen können pädagogische Leitschnur für eine gelingende Unterrichtsentwicklung sein (2.1, 2.2.4, 3, 4.2.1, 4.2.3).

Zusammenfassend wurde gezeigt, dass eine intensive Korrelation zwischen personorientierter Begabungsförderung im Mathematikunterricht und den Haltungen der Lehrkraft besteht; davon können wesentliche Impulse für die Unterrichtsentwicklung ausgehen.

Das für SEM formulierte Ziel, das stellvertretend für personorientierte Begabungsförderung im Mathematikunterricht steht, den Schulen „erfolgreiche und erprobte Praktiken zur Verfügung zu stellen, die so aufeinander abgestimmt sind, dass sie beides ermöglichen: ‚Highend learning für Hochbegabte, ebenso wie ein integratives Modell breiter Begabungsförderung aller im Sinn von ‚a rising tide lifts all the ships' " (2.1.3.3) fungiert als „rising tide" in der Schulentwicklung.

4.3 Mathematik im Gespräch

Am Ende einer Einführungsstunde über Unendlichkeit in der Mathematik (3.3.2.2) sagte ein sehr guter Schüler, der die vorhergehende Jahrgangsstufe überspringen durfte, zur Lehrkraft: „Das war aber heute keine gute Stunde.“ Die Lehrkraft war für einen Moment konsterniert, ehe sie den Schüler nach dem Grund für seine Meinung fragte. Die Antwort des Schülers war: „Wir haben heute aber gar nicht gerechnet.“

Dies verbindet oftmals leistungsstarke Schüler mir leistungsschwachen Schülern: Sie wollen über Mathematik nicht reden oder schreiben. Dann wird mathematische Begabung, mathematisches Denken und mathematische Leistung nur sichtbar im Übungsheft oder im Test.

Stellvertretend für viele spricht Enzensberger. Er vergleicht diese Situation in „Zugbrücke außer Betrieb“ mit der Musik:

> *„Man kann sich fragen, ob es in den ersten fünf Jahren des Curriculums überhaupt so etwas wie einen mathematischen Unterricht gibt. Was dort gelehrt wird, hat man früher völlig zu Recht als ‚Rechnen‘ bezeichnet. ...*
>
> *Aber mit mathematischem Denken hat das alles nichts zu tun. Es ist so, als würde man Menschen in die Musik einführen, indem man sie jahrelang Tonleitern üben lässt. Das Resultat wäre vermutlich lebenslänglicher Haß auf diese Kunst.“ (Enzensberger, 1999 S. 34, 36)*

Er fährt fort:

> *„In den höheren Schulklassen geht es meist nicht viel anders zu. ... Nur darf man sich nicht darüber wundern, daß ein solcher Unterricht letzten Endes den mathematischen Analphabetismus fördert.“ (Enzensberger, 1999 S. 36)*

Enzensberger konstatiert:

> *„Es gibt jedoch Lehrer, die sich den obsoleten Routinen, die man ihnen zumutet, widersetzen und die es fertigbringen, ihre Schüler mit den Schönheiten, Reichtümern und Herausforderungen der Mathematik bekannt zu machen. Ihre Erfolge sprechen für sich.*
>
> *Auch außerhalb des Bildungssystems gibt es vereinzelt Symptome, die hoffen lassen, daß der Tiefpunkt der mathematischen Ignoranz erreicht und vielleicht sogar durchschritten ist.“ (Enzensberger, 1999 S. 40)*

Er fordert:

> *„Es ist der Versuch einer Alphabetisierung, auf den es ankäme: ein langwieriges, aber vielversprechendes Projekt, das im zarten Alter zu beginnen hätte und unseren viel zu trägen Gehirnen ein gewisses Fitneß-Training und ganz ungewohnte Lustgefühle verschaffen könnte." (Enzensberger, 1999 S. 46)*

Enzensberger sieht damit eine mathematische Alphabetisierung nicht allein als Auftrag an die Personalentwicklung der Mathematiklehrkräfte, nicht allein als Auftrag an die Unterrichtsentwicklung, nicht allein als Auftrag an das Bildungssystem und damit der Schulentwicklung, sondern als Auftrag an die Gesellschaft.

In bekannten populärwissenschaftlichen Fachzeitschriften wird dieser Auftrag angenommen, in vielen Büchern über mathematische Knobeleien, aber auch in Beiträgen, die direkte Brücken zur Literatur bauen wie „Mathematik in der Lyrik" (K. Radbruch in (Beutelspacher, et al., 1997 S. 38ff.)) oder „Carmina Mathematica" (Cremer, 1982), nicht zuletzt auch im Mathematikum in Gießen (Beutelspacher, 2003) (Beutelspacher, 2015).

5 Zusammenfassung – Resümee

> *„Eine spezifische ´Pädagogik und Didaktik der Begabungs- und Begabtenförderung´ mit Implikationen für begabungsfördernde Schulkonzepte und Unterrichtsgestaltung und einer entsprechenden Wirkungsforschung wurde bisher ... nicht oder nur marginal entwickelt.“ (Weigand, et al., 2014 S. 67)*

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, einen überschaubaren, auf die Mathematik bezogenen Beitrag zu dieser Thematik zu leisten.

Ausgehend vom Personbegriff mit den Merkmalen Würde, Relationalität, Autorschaft, Prozess wurden die Grundlagen für personorientierte Begabungsförderung in den drei wesentlichen Bereichen Personen „begaben“, personorientiertes Lehren und Lernen sowie personorientierte Schulentwicklung dargestellt. Darauf aufbauend wurde der Begriff der mathematischen Begabung in seiner Relevanz für die personorientierte Begabungsförderung konkretisiert. Es wurden allgemeine Begabungstheorien, die sich mit den intra- und interpersonalen Gelingensbedingungen sowie der Prozesshaftigkeit der Begabungsentwicklung in der persönlichen Entwicklung befassen, und das fachbezogene Begabungsmodell nach Ulm, das verschiedene Dimensionen mathematischer Begabung aufzeigt, thematisiert. Zwischen dem im Personbegriff begründeten „Eigensinn“ hinsichtlich Bildung und Begabungsförderung und der in der Relativität des Personbegriffs mit Bezug auf die Fachwissenschaft begründeten Ausrichtung auf eine fachliche Bildung und mathematische Begabungsförderung wurden didaktische Prinzipen für einen begabungsfördernden Mathematikunterricht entwickelt. Als besonders hilfreich erwiesen sich dabei das aus dem Bildungsbegriff nach Klafki abgeleitete Prinzip der Elementarisierung, das für das Didaktikverständnis nach Wagenschein typische genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip und das von Gallin und Ruf präzisierte Prinzip des dialogischen Lernens mit dem Begriff der Kernidee in einer zentralen Rolle. Eingegangen wurde auch auf die Bedeutung der Freude an der Mathematik als Gelingensbedingung für personorientierte Begabungsförderung.

Im Zentrum der Untersuchungen standen die exemplarischen Unterrichtskonzepte zur personorientierten Förderung mathematischer Begabungen. Das Fachgebiet Kugelpackungen wurde vorgestellt, die begabungsstiftenden Inhalte und ein Elementarisierungsprozess wurden herausgearbeitet und drei Unterrichtskonzepte im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (Pluskurs, Additum, Sommerakademie) mit Hilfe von Kernideen dargestellt. Ergänzt wurden diese Unterrichtskonzepte um ein projektgebundenes Enrichment-Programm mit einer langfristigen Evaluation durch Teilnehmer.

In einem weiteren Themenkomplex wurde das dritte Hilbertsche Problem didaktisch aufbereitet. Nach einer umfangreichen inhaltlichen Aufarbeitung, die einen elementaren Beweis für die Nichtkongruenz der drei Zerlegungspyramiden eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche enthält, wurde wiederum ein Unterrichtskonzept mit Hilfe von Kernideen formuliert. Im Vergleich mit einem alternativen Unterrichtskonzept konnten unterschiedliche Ebenen von Elementarisierung und ihr Wechselspiel mit der verwendeten Begrifflichkeit herausgearbeitet werden.

In einem weiteren Themenbereich wurden Unterrichtskonzepte für den Pflicht- bzw. Wahlpflichtunterricht in der Oberstufe untersucht. Es wurde gezeigt, dass eine Neugruppierung der Lerninhalte für den Anfangsunterricht in Analysis den Begabungsförderungsprozess noch besser unterstützen kann; außerdem wurde dargestellt, dass eine Betrachtung des Unendlichen das Curriculum in sinnvoller Weise ergänzen kann.

Für die Unterstufe wurden weitere Unterrichtskonzepte betrachtet. Wiederum wurde eine Umgruppierung der Bildungsgegenstände für den geometrischen Anfangsunterricht untersucht, die den Begabungsförderungsprozess verstärken kann; den Abschluss der Untersuchungen bildeten Fensterkonzepte, die im gymnasialen Anfangsunterricht für die Schönheit und Vielfalt mathematischer Themen zu begeistern vermögen und am Anfang von Begabungsförderung im gymnasialen Mathematikunterricht stehen können.

Stets bildeten Kernideen das strukturelle Rückgrat der dargestellten Unterrichtskonzepte. Damit wurde exemplarisch gezeigt, dass mathematische Begabungsförderung am Gymnasium in einer großen Spannweite möglich ist, sowohl im Rahmen des personorientierten Ansatzes im Allgemeinen als auch im Rahmen des Enrichment-Ansatzes im Besonderen.

Unterrichtskonzepte sind Teil der Unterrichtsentwicklung und damit Teil der Schulentwicklung, die sich durch die Teilbereiche Organisations-, Personal- und Unterrichtsentwicklung konstituiert. Zunächst wurde der gesellschaftliche Auftrag einer begabungsgerechten Schule in den unterschiedlichen Rahmenbedingungen als Grundlage für Schulentwicklung herausgearbeitet. Davon ausgehend wurden Gelingensbedingungen für eine Schule, die mathematische Begabungen fördern will, skizziert. Als Ausdruck der Organisationsentwicklung wurde Mathematik im außerunterrichtlichen Schulleben mit Blick auf die Begabungswirksamkeit und als Motor für die Schulentwicklung untersucht. Es wurden die Anforderungen der Hattie-Studie auf gelingende Personal- und Unterrichtsentwicklung angesprochen. Abschließend wurde der Auftrag an die Gesellschaft begründet, die „mathematische Alphabetisierung“ als Ausdruck einer personorientierten Begabungsförderung in Mathematik zu begleiten.

6 Literaturverzeichnis

Aigner, Martin und Behrends, Ehrhard, [Hrsg.]. 2016. *Alles Mathematik - Von Pythagoras zu Big Data.* 4. Auflage. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2016.

Aigner, Martin und Ziegler, Günter M. 2015. *Das BUCH der Beweise.* 4. Auflage. Berlin : Springer, 2015.

—. 2000. *Proofs from the BOOK.* Berlin : Springer, 2000.

Aurenhammer, Franz und Klein, Rolf. Voronoi Digrams. [Online] [Zitat vom: 23. März 2018.] http://www.pi6.fernuni-hagen.de/downloads/publ/tr198.pdf.

Baierlein, M., et al. 1994. *Anschauliche Analysis 1.* 12. Auflage. München : Ehrenwirth, 1994.

Baptist, Peter. 1992. *Die Entwicklung der neueren Deiecksgeometrie.* Bayreuth : BI Wissenschaftsverlag, 1992.

Bardy, Peter. 2007. *Mathematisch begabte Grundschulkinder.* Berlin : Springer, 2007.

Behrends, Ehrhard, Gritzmann, Peter und Ziegler, Günter M. 2008. *Pi und Co. - Kaleidoskop der Mathematik.* Berlin : Springer, 2008.

Benko, David. 2007. A New Approach to Hilbert's Third Problem. *The American Mathematical Monthly.* 2007, Bd. 114, S. 665–676 .

Beutelspacher, Albrecht. 1996. *In Mathe war ich immer schlecht ...* Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1996.

—. 1995. *Lineare Algebra.* 2. Auflage. Braunschweig : Vieweg, 1995.

—. 2003. Mathematik braucht jeder und: Sie kann Spaß machen. *KlettThemendienst - Schule Wissen Bildung.* 2003, Bd. 18, 4.

—. 2015. *Wie man in eine Seifenblase schlüpft - DIE WELT DER MATHEMATIK IN 100 EXPERIMENTEN.* München : C.H. Beck, 2015.

Beutelspacher, Albrecht, et al. 1997. *Überblicke Mathematik 1996/97.* Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1997.

BMBF, [Hrsg.]. 2017. *Begabte Kinder finden und fördern - Ein Wegweiser für Eltern, Erzieherinnen und Erzieher, Lehrerinnen und Lehrer.* Berlin : s.n., 2017.

—. 2016. *Entdecken. Mitmachen. Bewegen.* Berlin : s.n., 2016.

Bruder, Regina, et al., [Hrsg.]. 2015. *Handbuch der Mathematikdidaktik.* Berlin : Springer, 2015.

Chang, Hai-Chau und Wang, Lih-Chung. 2010. A Simple Proof of Thue's Theorem on Circle Packing. [Online] 22. September 2010. [Zitat vom: 23. März 2018.] arXiv:1009.4322[math.MG].

Ciesielska, D. & Ciesielski, K. 2018. Math. Intelligencer. [Online] 2018. [Zitat vom: 5. Juni 2018.] https://doi.org/10.1007/s00283-017-9748-4.

Colangelo, Nicholas, Assouline, Susan G. und Gross, Miraca U.M. 2004. *Eine betrogene Nation: Wie Schulen die besten Schüler Amerikas bremsen.* Iowa City : The University of Iowa, 2004.

Cremer, Hubert. 1982. *Carmina Mathematica.* 7. Auflage. Aachen : Mayer, 1982.

Cromwell, Peter. 1964. *Polyhedra.* Cambridge : Cambridge University Press, 1964.

Dehn, Max. 1902. Über den Rauminhalt. *Mathematische Annalen.* 1902, Bd. 55, S. 465-478.

—. 1900. Über raumgleiche Polyeder. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900.* 1900, Bd. 3, S. 345-354.

Enzensberger, Hans Magnus. 1999. *Zugbrücke außer Betrieb - Die Mathematik im Jenseits der Kultur. Eine Außenansicht.* Natick : A K Peters, 1999.

Fellmann, Emil A. 1995. *Leonhard Euler.* Hamburg : rororo, 1995.

Feynman, Richard P. 1985. *QED - The Strange Theory of Light and Matter.* Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1985.

Flitner, Andreas und Giel, Klaus, [Hrsg.]. 1980. *Wilhelm von Humboldt – Werke in fünf Bänden. Band I: Schriften zur Anthropologie und Geschichte (Theorie der Bildung).* 3. Auflage. 1980.

—. 1982. *Wilhelm von Humboldt – Werke in fünf Bänden. Band IV: Schriften zur Politik und zum Bildungswesen.* 3. Auflage. Darmstadt : s.n., 1982.

Fritzlar, Torsten. 2013. Robert - Zur Entwicklung mathematischer Expertise bei Kindern und Jugendlichen. [Buchverf.] Torsten Fritzlar und Käpnick Friedhelm. *Mathematische Begabungen - Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven.* Münster : WTM, 2013.

Gagné, Francoys. 2010. Begabungen in Talente umsetzen - Kurze Übersicht über das differenzierte Modell von Begabung und Talent (DMGT 2.0). *SwissGifted.* 2010, Bd. 3, 1, S. 14-19.

—. 2009. Debating Giftedness: Pronat vs. Antinat. [Buchverf.] L.V. Shavinina. *International Handbook on Giftedness.* Dordrecht : Springer, 2009.

—. 2015. From genes to talent: the DMGT/CMTD perspective. *Revista de Educación.* 2015, Bd. , 368, S. 12-37.

—. 2010. Motivation within the DMGT 2.0 framework. *High Ability Studies.* 2010, Bd. 21, 2, S. 81-99.

—. 2007. Ten Commandments for Academic Talent Development. *Gifted Child Quarterly.* 2007, Bd. 51, 2, S. 93-118.

Gardner, Howard. 2011. *The Theory of Multiple Intelligences.* [Online] 2011. [Zitat vom: 19. 12 2017.] http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

—. 1993. Multiple Intelligences: In a Nutshell. [Online] 1993. [Zitat vom: 19. 12 2017.] http://www.pz.harvard.edu/resources/multiple-intelligences-in-a-nutshell.

Gauss, Carl Friedrich und Gerling, Christian Ludwig. 1927. *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling.* [Hrsg.] Clemens Schaefer. Berlin : Elsner, 1927.

Greefrath, Gilbert, et al. 2016. *Didaktik der Analysis.* Berlin : Springer, 2016.

Gritzmann, Peter und Brandenberg, Rene. 2003. *Das Geheimnis des kürzesten Weges - Ein mathematisches Abenteuer.* 2. Auflage. Berlin : Springer, 2003.

Gruber, Peter M. und Wills, Jörg M. 1993. *Handbook of convex geometry.* Amsterdam : North-Holland, 1993.

Hörner, Elke Bettina. 2011. *Hochbegabung. Eine internationale Perspektive.* Augsburg : s.n., 2011.

Hales, T. u.a. 2015. A Formal Proof of the Kepler Conjecture. [Online] 9. Januar 2015. [Zitat vom: 5. Februar 2018.] arXiv:1501.02155[math.MG].

Hales, Thomas C. 2005. A proof of the Kepler conjecture. *Annals of Mathematics.* 2005, Bd. 3, 162, S. 1065-1185.

—. 2007. Equidecomposable Quadratic Regions. [Buchverf.] Francisco Botana und Tomas Recio. *Automated Deduction in Geometry: 6th International*

Workshop, ADG 2006, Pontevedra, Spain: August 31-September 2, 2006, Revised Papers. s.l. : Springer Science & Business Media, 2007.

Hartshorne, Robin. 2000. *Geometry: Euclid and Beyond.* New York : Springer, 2000.

Hattie, John. 2017. *Lernen sichtbar machen für Lehrpersonen - Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von "Visible Learning for Teachers" besorgt von Wolfgang Beywl und Klaus Zierer.* 3. Auflage. Hohengehren : Schneider, 2017.

Hattie, John und Zierer, Klaus. 2018. *Kenne deinen Einfluss!* 3. Auflage. Hohengehren : Schneider, 2018.

Heller, Kurt A. 2013. Findings from the Munich Longitudinal Study of Giftedness and Their Impact on Identification, Gifted Education and Counseling. *Talent Development & Excellence.* 2013, Bd. 5, 1, S. 51–64.

—. 2004. Identification of Gifted and Talented Students. *Psychology Science.* 2004, Bd. 46, 3, S. 302-323.

—. 1976. Intelligenz und Begabung. *Studienhefte Psychologie in Erziehung und Unterricht.* 1976.

—. 1989. Perspectives on the Diagnosis of Giftedness. *German Journal of Psychology.* 1989, Bd. 13, S. 140-159.

Heller, Kurt A. und Perleth, Christoph. 2008. The Munich High Ability Test Battery (MHBT): A multidimensional, multimethod approach. *Psychology Science Quarterly.* 2008, Bd. 50, S. 173-188.

Henk, Martin und Ziegler, Günter M. 2000. Kugeln im Computer - Die Kepler-Vermutung. [Buchverf.] Martin Aigner und Ehrhard Behrends. *Alles Mathematik.* Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 2000.

Heuser, Harro. 1988. *Lehrbuch der Analysis.* 5. Auflage. Stuttgart : Teubner, 1988.

Hilbert, David. 1900. Mathematische Probleme. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900.* 1900, Bd. 3, S. 253-297.

Hilton, Peter. 1991. The Mathematical Component of a Good Education. [Hrsg.] P. Hilton, F. Hirzebruch und R. Remmert. *Miscellanea Mathematica.* Berlin : Springer, 1991, S. 145-154.

Igerl, Franz, Seibert, Norbert und Zöpfl, Helmut. 1989. *Wenn Freude Schule macht.* Bayerisch Gmain : Alexandra-Verlag, 1989.

ISB, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, [Hrsg.]. 2011. Besondere Begabungen an weiterführenden Schulen finden und fördern. München : MDV Maristen Druck & Verlag GmbH, 2011.

Jessen, Borge. 1968. The Algebra of Polyhedra and the Dehn-Sydler Theorem. *Math. Scand.* 1968, Bd. 22, S. 241-256.

Keil, K., et al. 1992. *Infinitesimalrechnung 1.* 2. Auflage. München : bsv, 1992.

Kern, Hans und Josef, Rung. 1991. *Sphärische Trigonometrie.* 3. Auflage. München : bsv, 1991.

Kirchgraber, Urs. 2016. Mathematik - das unerkannte Vergnügen. [Online] 2016. [Zitat vom: 27. Januar 2018.] http://vsmp.ch.

Kultusministerkonferenz, [Hrsg.]. 2015. *Förderstrategie für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler.* 2015.

—. 2016. *Gemeinsame Initiative von Bund und Ländern zur Förderung leistungsstarker und potenziell besonders leistungsfähiger Schülerinnen und Schüler.* 2016.

Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung, [Hrsg.]. 2012. *15 Jahre Beratungsstelle besondere Begabungen (BbB). Besondere Begabungen entdecken und fördern – Impulse für Unterricht und Schule.* Hamburg : s.n., 2012.

Landesschulamt und Lehrkräfteakademie, [Hrsg.]. 2013. *Kluge Köpfe entdecken – beflügeln – fördern. Handreichung zum Überspringen – Planung, Begleitung und Evaluation der Probezeit.* Wiesbaden : s.n., 2013.

Leppmeier, Max. 1997. *Kugelpackungen von Kepler bis heute.* Braunschweig/Wiesbaden : Vieweg, 1997.

Mönks, F.J. und Pflüger, R. 2005. *Gifted Education in 21 European Countries: Inventory and Perspective.* 2005.

Mönks, Franz J. 1992. Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. [Buchverf.] Ernst A. Hany und H. Nickel. *Begabung und Hochbegabung.* Bern : Huber, 1992.

Maulbetsch, Corinna. 2014. Gelebte Verantwortung. [Hrsg.] Gabriele Weigand, et al. *Personorientierte Begabungsförderung.* Weinheim : Beltz, 2014.

NN. 1998. *Verfassung des Freistaates Bayern in der Fassung der Bekanntmachung vom 15. Dezember 1998.* 1998. (GVBl. S. 991, 992) BayRS 100-1-I.

—. 2018. Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus. [Online] 2018. [Zitat vom: 16. April 2018.] https://www.km.bayern.de/pressemitteilung/11187/nr-003-vom-23-03-2018.html.

—. 2012. CHARTA DER GRUNDRECHTE DER EUROPÄISCHEN UNION. *Amtsblatt der Europäischen Union.* 2012. Bd. C 326/391.

—. 1996. *Das Unendliche in der Mathematik. Manuskript zum Lehrgang.* Dillingen : Akademie für Lehrerfortbildung, 1996.

—. 2017. Grundgesetz der Bundesrepublik Deutschland. *Artikel 1 des Gesetzes vom 13. Juli 2017 (BGBl. I S. 2347).* 2017.

—. 2009. *Maristen-Gymnasium Furth - Jahresbericht 2008/09.* Furth : s.n., 2009.

Perleth, Christoph. 2010. Helle Köpfchen. *economag.de.* 2010, Bd. 11.

—. 2007. Hochbegabung. [Buchverf.] J. Borchert. *Einführung in die Sonderpädagogik.* München : Oldenbourg, 2007.

—. 2012. *Umgang mit Vielfalt im Bildungswesen.* 2012.

Reich, Kersten. 1977. *Theorien der Allgemeinen Didaktik.* Stuttgart : Ernst Klett Verlag, 1977.

Renger, Sebastian. 2009. *Begabungsausschöpfung – Persönlichkeitsentwicklung durch Begabungsförderung.* Osnabrück : s.n., 2009.

Renzulli, J.S., Reiss, S.M. und Stednitz, U. 2001. *Das schulische Enrichment Modell SEM - Begabungsförderung ohne Elitebildung.* Aarau : Sauerländer, 2001.

Renzulli, Joseph S. 2012. Reexamining the Role of Gifted Education andTalent Development for the 21st Century: A Four-Part Theoretical Approach. *Gifted Child Quarterly.* 2012, Bd. 56, 3, S. 150–159.

—. 1978. What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *The Phi Delta Kappan.* Nov. 1978, Bd. 60, 3, S. 180-184, 261.

Roth, Jürgen. 2018. *Didaktik der Geometrie - Modul 5: Fachdidaktische Bereiche.* [Online] 2018. [Zitat vom: 6. März 2018.] www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/.../did_geometrie_4_argumentieren_beweisen.pdf.

—. 2018. Prinzip von Cavalieri u.a. [Online] 2018. [Zitat vom: 2. März 2018.] www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/.../cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf .

Ruf, Urs und Gallin, Peter. 2014. *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik - Austausch unter Ungleichen.* 5. Auflage. Seelze : Kallmeyer in Verbindung mit Klett, 2014. Bd. 1.

—. 2014. *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik - Spuren legen, Spuren lesen.* 5. Auflage. Seelze : Kallmeyer in Verbindung mit Klett, 2014. Bd. 2.

Sächsisches Staatsministerium für Kultus, [Hrsg.]. 2016. *»Jeder zählt!« – Begabungs- und Begabtenförderung in Sachsen.* Dresden : s.n., 2016.

Schick, Hella. 2007. *(Hoch-)Begabung und Schule - Lernmotivation, Identität und Leistungsverhalten von Jugendlichen in Abhängigkeit von intellektueller Begabung und schulischen Förderbedingungen.* Köln : s.n., 2007.

Schmid, August und Weidig, Ingo. 2003. *Lambacher Schweizer 5 - Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart : Ernst Klett, 2003.

Schmitt, Hans und Wohlfarth, Peter. 1991. *Mathematikbuch 9G.* 2. Auflage. München : Bayerischer Schulbuch Verlag, 1991.

Schuh, Hans. 2007. Erhellte Magie - Der Chemienobelpreis zeigt die Bedeutung der Katalyseforschung. *DIE ZEIT.* 18. Oktober 2007, 43, S. 44.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung, [Hrsg.]. 2011. *Besondere Begabungen an weiterführenden Schulen finden und fördern.* München : s.n., 2011.

Studienstiftung des deutschen Volkes, [Hrsg.]. 2000. Wissenschaft und Praxis. Bonn : s.n., 2000.

Sydler, J.-P. 1965. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comment. Math. Helv.* 1965, Bd. 40, S. 43-80.

Szpiro, George G. 2011. *Die Keplersche Vermutung - Wie Mathematiker ein 400 Jahre altes Rätsel lösten.* Heidelberg : Springer, 2011.

Ulm, Volker. 2018. *Mathematische Begabung - Ein fachbezogenes Modell. Skript zur Vorlesung "Mathematik Lehren und Lernen".* Bayreuth : s.n., 2018.

—. 2009. *Mathematische Begabung und ihre Förderung im Unterricht.* Regensburg : Tagungsband zum 100. MNU-Kongress, 2009.

—. 2010. *Mathematische Begabungen fördern.* Berlin : Cornelsen, 2010.

Viazovska, Maryna. 2016. The sphere packing problem in dimension 8. [Online] 14. Mar 2016. [Zitat vom: 5. Februar 2018.] arXiv:1603.04246[math.NT].

Wagenschein, Martin. o.J.. Entdeckung der Axiomatik. [Online] o.J. [Zitat vom: 21. 12 2017.] http://www.martin-wagenschein.de/2/W-200.pdf.

—. 1988. *Naturphänomene sehen und verstehen - Genetische Lehrgänge.* 2. Auflage. Stuttgart : Ernst Klett, 1988.

Weigand, Gabriele und Gräbner, Jürgen. 2017. eVOCATIOn Weiterbildung Begabungs-und Begabtenförderung. [Online] 2017. [Zitat vom: 1. Dezember 2017.] http://www.ewib.de.

Weigand, Gabriele, et al. 2014. *Personorientierte Begabungsförderung.* Weinheim : Beltz, 2014.

Weigand, Hans-Georg, et al. 2014. *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* 2. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2014.

Wittmann, Erich Ch. 2012. Elementarisierung von Benkos Lösung des 3. Hilbertschen Problems. *Elem. Math.* . 2012, Bd. 67, S. 45 - 50.

Wustinger, Renate. 2014. Befähigen statt begleiten. [Hrsg.] Gabriele Weigand, et al. *Personorientierte Begabungsförderung.* Weinheim : Beltz, 2014, S. 211-217.

Zong, Chuanming. 1999. *Sphere Packings.* Berlin : Springer, 1999.

7 Kurzfassungen (deutsch, englisch)

Kurzfassung deutsch

Konzepte zur personorientierten Begabungsförderung im Mathematikunterricht und in der Schulentwicklung, ausgehend von Mathematik

Die vorliegende Dissertation gliedert sich in drei Teile.
Im ersten Teil wird die *personorientierte Förderung mathematischer Begabungen* untersucht. Dazu wird zunächst ein allgemeiner Überblick über den aktuellen Stand der *personorientierten Begabungsförderung nach Weigand* gegeben, der die drei Bereiche Personen „begaben", personorientiertes Lehren und Lernen sowie personorientierte Schulentwicklung umfasst. Es folgt eine Betrachtung der *mathematischen Begabung* unter den Blickwinkeln allgemeiner Begabungstheorien (Gagné, Gardner, Renzulli, Mönks, Heller, Perleth), eines fachbezogenen Modells (Ulm) und einer Auffassung von mathematischer Bildung (Hilton). Didaktische Prinzipien für einen begabungsfördernden Mathematikunterricht werden hergeleitet: das Elementarisieren aus der Theorie der kategorialen Bildung nach Klafki, das genetisch-sokratisch-exemplarische Prinzip nach Wagenschein, die Kernidee im dialogischen Lernen nach Gallin und Ruf. Eingegangen wird auch auf die Bedeutung von Freude an der Mathematik.
Im zweiten Teil werden *Unterrichtskonzepte zur personorientierten Begabungsförderung* erarbeitet und analysiert. Aus dem Thema *Kugelpackungen* werden verschiedene Konzepte im Rahmen des Enrichment-Ansatzes (Pluskurs, Additum, Projektgebundenes Enrichment) abgeleitet, mit Hilfe von Kernideen dargestellt und untersucht. Die Thematik des *dritten Hilbertschen Problems* wird in ihrer historischen Genese (Briefwechsel Gauß-Gerling) betrachtet, für ein Unterrichtskonzept elementarisiert, und es wird ein Beweis für die Nichtkongruenz der drei Zerlegungspyramiden eines Prismas mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche gegeben. Unter dem Fokus einer *Begabungsförderung für alle Schüler* werden *Unterrichtskonzepte für die 11. Jahrgangsstufe* zur Einführung in die Infinitesimalrechnung und zur Betrachtung des Unendlichen nach Cantor sowie *Unterrichtskonzepte für die Unterstufe* zur Einführung in die Geometrie und als Fensterkonzepte (Freude an den natürlichen Zahlen, Eulerscher Polyedersatz, kürzester Weg) in der 5. Jahrgangsstufe erörtert.
Im dritten Teil über *Schulentwicklung* wird zunächst die *begabungsgerechte Schule als gesellschaftlicher Auftrag* untersucht. *Mathematische Begabungsförderung* wird *als Impulsgeber für Schulentwicklung* betrachtet: Es werden Kriterien für eine die mathematische Begabung fördernde Schule erarbeitet und die Bedeutung der Mathematik im außerunterrichtlichen Schulleben (Mathematik-Wettbewerbe, mathematisches Kolloquium, mathematische Ausstellung) analysiert. In die Impulse für Personalentwicklung von Mathematiklehrkräften und Unterrichtsentwicklung fließen auch die Ergebnisse der Hattie-Studie mit ein. Schließlich wird, wie *Mathematik im gesellschaftlichen Diskurs* dargestellt wird, als Indikator für gelingende Begabungsförderung und Schulentwicklung formuliert.

Kurzfassung englisch

Concepts for person-oriented promotion of giftedness in mathematics education and for school improvement, based on mathematics

The dissertation consists of three chapters.
In the first chapter, we outline the concept of *person-oriented promotion of mathematical giftedness*. For this purpose, we give a general overview of the status quo of *person-oriented promotion of giftedness according to Weigand,* which contains the three fields of "making" persons "gifted", of person-oriented teaching and learning and of person-oriented school improvement. We proceed with an examination of *mathematical giftedness* in the perspective of general theories of giftedness (Gagné, Gardner, Renzulli, Mönks, Heller, Perleth), of a subject-specific model (Ulm) and of an individual perception of mathematical education (Hilton). We then deduce some didactical principles for a giftedness stimulating education of mathematics: The elementarizing according Klafki´s theory of categorial education, the genetic-socratic-exemplaric principle according to Wagenschein and the core idea in dialogic learning according to Gallin and Ruf. We also point out the importance of delight for mathematics.
In the second chapter we deduce and analyze *instructional concepts for person-oriented promotion of giftedness.* From the topic of *sphere packings*, we derive and examine different concepts within the schoolwide-enrichment-model (SEM, Renzulli, Reiss) and we illustrate them using its core ideas. We present the subject matter of *Hilbert's third problem* in the context of its historical development (correspondence between Gauß and Gerling), we elementarize it for an instructional concept and give a proof for noncongruence of the three dissection pyramids of a prism with an equilateral triangle as a base. Focusing on the *promotion of giftedness of all students,* we discuss educational concepts for an introduction to calculus, for the deliberation on infinity (Cantor) and for an introduction to geometry as well as gateway concepts for beginners (delight on natural numbers, Euler´s formula, shortest path).
In the third chapter about *school improvement* we first examine the idea of a *giftedness appropriated school as a social challenge.* We then discuss the *promotion of mathematical giftedness* as a *trigger for school improvement* by deriving formal criteria for a mathematical-giftedness-promoting school and analyze the importance of mathematics in extracurricular activities (competitions, colloquia, exhibitions). We include Hattie´s results into the triggers for *personal advancement* and *improvement of instruction*. Finally, we declare *mathematics in conversation* as an indicator for successful advancement of giftedness and school improvement.