

Klassifikation gewisser Darstellungen

halbeinfacher Liealgebren

Der Universität Bayreuth  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften ( Dr. rer .nat.)  
vorgelegte Abhandlung

von

Rıdvan Güner  
geboren am 2.8.1949 in Kayaca - Balıkesir, Türkei

Juni / 2010

## Abstract

The paper is on representation theory and invariant theory of semisimple Lie algebras.

To be more precise:

Given a semisimple (preferably: simple) complex Lie algebra  $L$ . Consider the monoid  $\Gamma = \Gamma(L)$  of equivalence classes of the finite dimensional irreducible complex representations of  $L$ .  $\Gamma$  is identified with the lattice of the corresponding highest weights. (This delivers the monoid structure of  $\Gamma$ .)

For  $\pi \in \Gamma$  one considers the symmetric algebra  $S(\pi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\pi)$  (here  $\pi$  is regarded as a representation).

The elements of  $\Gamma$  "occurring" in  $S(\pi)$  - i.e. which are the highest weights of some irreducible component of the representation  $S(\pi)$  - form a sub-semigroup  $M(\pi)$  of  $\Gamma$ . Such a  $M(\pi)$  has a naturally defined rank  $r(\pi)$  with  $1 \leq r(\pi) \leq r = \text{rank of } L$ .

In the present paper I give a classification, for all the simple  $L$ , of all the  $\pi$  with  $r(\pi) < r$ . The result is a succinct and relatively short list of highest weights  $\pi$ , see Satz 2.1 in §2 and Satz 3.1. in § 3.

In § 4 and §5 I study explicitly the invariant theoretical properties of  $S(\pi)$ , e.g. the detailed decomposition of  $S^n(\pi)$  as a completely reducible  $L$ -module.

§4 determines and lists the multiplicity  $V f_n(0)$  of the 0-representation of  $L$  in  $S^n(\pi)$ .

In §5, after having determined some "fine structures" of algebraic properties of  $S(\pi)$ , the decomposition of the  $S^n(\pi)$ 's in simple  $L$ -modules is given by concrete formulas.

The arguments essentially rely on representation theory. In order to succeed in this way I use, among other things, some explicit branching lists ( see Liste 1 and Liste 2 ) and some detailed branching and reduction devices (see e.g. Whippman, Sundaram, Littleman).

## Zusammenfassung

Meine Arbeit behandelt folgende Fragen aus der Darstellungs- und Invariantentheorie halbeinfacher Liealgebren : Gegeben eine halbeinfache (vorzugsweise: eine einfache) komplexe Liealgebra  $L$ . Betrachtet wird das Monoid  $\Gamma = \Gamma(L)$  der Äquivalenzklassen der endlich dimensional irreduziblen komplexen Darstellungen von  $L$ .  $\Gamma$  wird identifiziert mit dem Gitter der entsprechenden höchsten Gewichte (bezüglich einer ausgewählten Cartanunteralgebra von  $L$  und einer ausgewählten Basis der zugehörigen Wurzeln). Ein  $\pi \in \Gamma$  wird geschrieben als Monom  $\pi = \pi_1^{k_1} \pi_2^{k_2} \dots \pi_r^{k_r}$  in den fundamentalen Gewichte  $\pi_i$ ,  $i = 1, \dots, r$

Zu  $\pi \in \Gamma$ , aufgefasst als irreduzible Darstellung von  $L$ , kann man die symmetrische Algebra  $S(\pi) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S^n(\pi)$  der Darstellung betrachten. ( $S(\pi)$  ist eine unendlich dimensionale Darstellung mit den endlich dimensional homogenen direkten Summanden  $S^n(\pi)$ .) Die Elemente von  $\Gamma$ , die " in  $S(\pi)$  auftreten ", d.h. welche höchste Gewichte von solchen irreduziblen Darstellungen von  $L$  sind, die als irreduzible Komponenten in der symmetrischen Algebra  $S(\pi)$  vorkommen, bilden eine Unter-Semigruppe  $M(\pi)$  von  $\Gamma$ . Solch ein  $M(\pi)$  besitzt einen natürlich definierten Rang  $r(\pi)$  mit  $1 \leq r(\pi) \leq r := \text{Rang von } L$ . (S. Seite 8 der Arbeit in der Einleitung)

Für alle einfachen (endlich dimensional komplexen)  $L$  klassifiziere ich all diejenigen höchsten Gewichte  $\pi$ , für die  $1 \leq r(\pi) < r = \text{rang von } L$ . Eine Darstellung bzw. ein höchstes Gewicht nenne ich **gut**, wenn  $r(\pi) < r$  und **schlecht**, wenn  $r(\pi) = r$  ist. In den Paragraphen 4 und 5 der Arbeit beschreibe ich dann - explizit als  $L$ -Darstellungen - die homogenen Komponenten  $S^n(\pi)$  der guten Darstellungen  $\pi$ .

In der Einleitung stelle ich Grundtatsachen über halbeinfache Liealgebren zusammen und stelle meine Notation vor. Die Einleitung endet mit der für die Arbeit grundsätzlichen Definition von " guten " und " schlechten " Darstellungen.

Im ersten Paragraphen der Arbeit wird nachgewiesen, dass Darstellungen bis auf wenige Ausnahmen schlecht sind, und es werden Listen von schlechten Darstellungen verifiziert. Letztlich werden die Typen der einfachen Liealgebren - die vier klassischen Reihen und die fünf Ausnahmealgebren - einzeln und individuell abgehandelt. In diesem ersten Paragraphen der Arbeit werden, wie auch später, entscheidend explizite Ausreduzierungen von symmetrischen Potenzen von Darstellungen benutzt, die ich in ausführlichen Listen zusammengestellt habe, s. Liste 1 und Liste 2 am Ende der Arbeit. (Die Berechnungen wurden mit dem Lie-Berechnungspaket aus [van Leeuwen] gemacht.)

In Einzelfällen wende ich aber auch allgemeine Ausreduzierungsätze an, so z.B. beim Fall  $\pi_2$  von  $C_n$ , wo ich aus der Referenz [Sundaram] den sehr elaborierten

Verzweigungssatz bei der Ausreduzierung von Darstellungen von  $A_{2n-1}$  auf  $C_n$  benutze und ausführlich vorführe.

Gemäß dem ersten Paragraphen sind für die einzelnen Typen einfacher Liealgebren fast alle irreduziblen Darstellungen schlecht. Bei jedem Typ bleibt nur eine kurze Liste von möglicherweise guten Darstellungen übrig.

In Paragraph 2 werden nun die Darstellungen in diesen Restlisten als tatsächlich gut nachgewiesen.

Paragraph 3 gibt eine Zusammenfassung der guten Darstellung unter einem anderen Gesichtspunkt: Die guten Darstellungen sind geordnet nach ihrem Rang (und nicht nach dem Isomorphietyp der Liealgebra ).

Die Paragraphen 4 und 5 bringen detailliertere Invariantentheorie.

Zur Notation: Sei wie bisher  $\pi$  eine irreduzible Darstellung von  $L$ . Sei  $V$  der Darstellungsraum von  $\pi$ . Es sei  $G$  eine einfach zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Liealgebra  $L$ . Dann wird auf  $V$  eine algebraische lineare Operation von  $G$  induziert. Wir identifizieren  $S(\pi)$  mit  $S(V) \cong C[V] \cong O(V^*)$ , d.h. mit der komplexen Algebra der regulären Funktionen auf dem Dualraum  $V^*$  von  $V$  ( $V^*$  ist Darstellungsraum der dualen Darstellung  $\pi^*$  von  $L$  bzw. von  $G$ ). Beachte dabei: Für  $\pi$  gilt:  $\pi$  gut  $\Leftrightarrow \pi^*$  gut. Mit  $C[V]^G$  wird der Ring der Invarianten, d.h. der Unterring der  $G$ -fixen Elemente in  $C[V]$  bezeichnet.

Mit diesen Bezeichnungen:

In §4 wird im wesentlichen die Dimension von  $S^n(V)^G := C[V]^G \cap S^n(V)$  -das ist die Vielfachheit der Nulldarstellung von  $L$  in  $S^n(\pi)$  - für alle guten Darstellungen  $\pi$  bestimmt.

In §5 werden eine Reihe von "Feindaten" von  $C[V]$  als  $C[V]^G$ -Modul bestimmt. Mit Hilfe all dieser Informationen werden dann ohne Schwierigkeiten die Vielfachheiten  $Vf_n(\lambda)$  in  $S^n(\pi)$  berechnet. Das Ergebnis wird in Satz 5.1 präsentiert.

Im Anhang 1 beschreibe ich noch ausführlich ein Ausreduzierungsverfahren von Whippman aus der physikalischen Literatur. Es ist die Ausreduzierung von  $C_3$  auf  $A_2$ , die eine gewisse Rolle bei den Darstellungen  $\rho$  spielt, wo  $r(\rho) = 3$  ist (der Fall (3) in Satz 3.1).

Meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Manfred Krämer, danke ich sehr für die Anregung zur dieser Arbeit, die er durch unermüdliches Interesse und viele wertvolle Diskussionen gefördert hat.

Dortmund, im Juni 2010

Rıdvan Güner

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
Abstract .....	ii
Zusammenfassung .....	iii
Einleitung .....	1
Paragraph 1. Schlechte Darstellungen .....	9
Paragraph 2. Gute Darstellungen .....	44
Paragraph 3. Klassifikation der guten irreduziblen Darstellungen nach dem Rang .....	62
Paragraph 4. Die Vielfachheit der Nulldarstellungen .....	67
Paragraph 5. Die n-Vielfachheit der Darstellung $\lambda$ in $S^n(\rho)$ .....	75
Anhang 1 .....	97
Paragraph 6. Liste 1 .....	103
Paragraph 7. Liste 2 .....	151
Literaturliste .....	168

# Einleitung

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Klassifikation gewisser endlich dimensionaler Darstellungen der einfachen komplexen endlich dimensionalen Liealgebren, die wir in der Arbeit **gute** Darstellungen nennen werden.

Sei  $L$  eine solche Liealgebra und  $r$  sei ihr Rang. Sei  $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r\}$  die Menge der fundamentalen Gewichte  $\Lambda = \mathbb{Z}\Pi_1 + \mathbb{Z}\Pi_2 + \dots + \mathbb{Z}\Pi_r$  das Gitter der Gewichte und  $\Lambda^+ = \mathbb{N}_0\Pi_1 + \mathbb{N}_0\Pi_2 + \dots + \mathbb{N}_0\Pi_r$  das Monoid der dominanten Gewichte.

(Die Bezeichnungen beziehen sich auf eine festgewählte Cartanunteralgebra in  $L$  und eine festgewählte Basis des Wurzelsystems. Genaueres zur Notation siehe später).

Wir betrachten  $\Lambda_Q = \mathbb{Q}\Pi_1 + \mathbb{Q}\Pi_2 + \dots + \mathbb{Q}\Pi_r$ .  $\Lambda_Q$  ist ein  $r$ -dimensionaler  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. ( $\mathbb{Q}$  = Körper der rationalen Zahlen).

Wir sagen, ein  $\lambda \in \Lambda^+$  tritt in einer (endlich dimensionalen) Darstellung von  $L$  auf, wenn die Darstellung eine irreduzible Komponente mit höchstem Gewicht  $\lambda$  hat.

Sei nun  $\rho$  eine endlich dimensionale Darstellung von  $L$  mit dem Darstellungsraum  $V$ .

Sie induziert eine Darstellung  $S^n \rho$  von  $L$  in der symmetrischen Potenz  $S^n V$  von  $V$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$

Wir definieren:  $M(\rho) := \{\lambda \in \Lambda^+ \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N}_0, \text{ so dass } \lambda \text{ in } S^n V \text{ auftritt}\}$ .

$M(\rho)$  ist ein Untermonoid von  $\Lambda^+$ . Sei dann  $M_Q(\rho)$  der von  $M(\rho)$  in  $\Lambda_Q$  erzeugte  $\mathbb{Q}$ -Untervektorraum.

Wir nennen die Darstellung  $\rho$  **gut**, wenn  $\dim_{\mathbb{Q}} M_Q(\rho) < r$ , sonst **schlecht**.

Die Dimension  $\dim_{\mathbb{Q}} M_Q(\rho)$  wird  $\text{Rang}M(\rho)$  oder  $\text{Rang } \rho$  genannt.

Es stellt sich heraus, dass für die einzelnen einfachen  $L$  die Liste der guten Darstellungen klein und übersichtlich ist. Zudem besitzt die Gesamtheit dieser Listen zusammen mit der Angabe des Ranges der aufgelisteten guten  $\rho$  ein interessantes Muster. Im Nachhinein bestätigt dieses Ergebnis des Interesse an dem behandelten Problem.

Interessant ist die Fragestellung aber auch wegen der Verbindung mit Themen der modernen Algebra und Geometrie. So spielen z.B. die Monoide  $M(\rho)$  eine Rolle bei der Konstruktion gewisser Ideale in der universellen Einhüllenden  $U(L)$  von  $L$  (siehe etwa [Borho]) und  $\text{Rang}(\rho)$  ist eng verknüpft mit dem Rang und der Homogenität homogener Räume (siehe [Panyushev]).

Eine Besonderheit der Arbeit ist die Konzentration auf darstellungstheoretische Argumente. Um dieses Prinzip einzuhalten, werden teilweise recht detaillierte Verzweigungs- und Ausreduzierungsverfahren benutzt (z.B. [Sundaram], [Whippman]).

Im ersten Paragraphen werden die meisten irreduziblen Darstellungen der einfachen  $L$  als schlecht nachgewiesen. Dabei komme ich mit zwei allgemeinen Kriterien aus, die ich zu Beginn des ersten Kapitels als Kriterium 1 und Kriterium 2 vorstelle. Das erste beruht vollständig auf der Struktur- und der Darstellungstheorie der (halb-)einfachen Liealgebren. Das zweite benutzt einfache und nicht allzu tiefliegende Tatsachen aus der Theorie der algebraischen Gruppen und der algebraischen Geometrie. Außerdem benutze ich intensiv

explizite Ausreduzierungen symmetrischer Potenzen von Darstellungen, die ich in ausführlichen Listen zusammengestellt habe (s. Liste 1 und Liste 2 am Ende der Arbeit, berechnet mit dem Lie - Berechnungspaket aus [ van Leeuwen]).

In Paragraph 2 werden die guten Darstellungen aufgelistet. Ich gebe drei Beweisvarianten. Die ersten beiden sind der modernen Invariantentheorie entnommen: die erste aus Ergebnissen in [Panyushev ], wobei ich einige Details hinzufüge, die zweite Variante beruft sich auf [Brion]. Beide Arbeiten benutzen technisch anspruchsvolle Argumente aus der Invariantentheorie. Deshalb bringe ich noch eine dritte Variante, die - im Geist der vorliegenden Arbeit - vor allem auf detaillierter Darstellungstheorie beruht (es werde etwa klassische Ausreduzierungssätze aus [Zelobenko] benutzt). Auch etablierte Ergebnisse über Hauptisotropiegruppen bei Darstellungen, etwa aus [Elashvili], werden hinzugezogen. Im § 3 werden die guten Darstellungen nach der Größe ihres Ranges eingeteilt.

§4 und §5 gehen tiefer auf die invariantentheoretischen Eigenschaften von  $S(\rho)$  ein.

In §4 wird der graduierte Polynomring  $C[V]^G$ , der Invariantenring des  $G$ -Raumes  $V$ , studiert (s. Exkurs über "Algebraische Strukturen im Zusammenhang mit  $S(V) \cong C[V]$ " nach Satz 2.1 ). Dabei ist  $G$  eine einfach zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Liealgebra  $L$  und  $V$  ist der Darstellungsraum einer guten Darstellung  $\rho$  von  $L$  bzw. der davon induzierten linearen Operation von  $G$  auf  $V$ . Zunächst wird in allen guten Fällen mit Hilfe von "Hauptisotropiegruppen-Argumenten" der (Transzendenz-)Grad der Polynomalgebra  $C[V]^G$  bestimmt. Ich gebe dann in Satz 4.1 die Dimension von  $(S^n(V))^G$  d.h. die Vielfachheit der Nulldarstellung von  $L$  in  $S^n(\rho)$ , für alle guten Darstellungen  $\rho$  an.

Ich nenne das die "0-Vielfachheiten  $Vf_n(0)$  eines guten Paares  $(\rho; L)$ ". Die wesentliche Information zur Bestimmung der  $Vf_n(0)$  ist, zu wissen, für welche  $n$  die Polynom-erzeugenden von  $S(V)^G$  in  $(S^n(V))^G$  "sitzen". Im Verlauf des Beweises von Satz 4.1 werden diese Informationen angegeben, meist aus der Liste 2 entnommen, manchmal - siehe etwa Behauptung 1 - aber auch mit klassischer Invariantentheorie bestimmt. Die in Satz 4.1 angegebenen  $Vf_n(0)$  berechnen sich dann einfach.

In § 5 werden die Vielfachheiten der irreduziblen Komponenten  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$  berechnet.

Sei  $\lambda$  ein Höchstgewicht, das in  $C[V]$  vorkommt. Im § 5 spielt die von mir sogenannte "Grundvielfachheit"  $d_\lambda$  eine wichtige Rolle. Es ist die Vielfachheit von  $\lambda$  im Tensorfaktor  $H$  bei der Tensorzerlegung  $C[V] = C[V]^G \otimes H$  (siehe Exkurs nach Satz 2.1 ). Diese Grundvielfachheiten werden von mir bestimmt, zusammen mit weiteren " Feindaten " (Bemerkung 5 plus Feindaten). Wenn man alle bis dahin erarbeiteten Informationen zu Hilfe nimmt, ist die Berechnung der Vielfachheiten  $Vf_n(\lambda)$  von  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$  im Satz 5.1 für alle guten Darstellungen  $\rho$  kein Problem mehr. Ich mache das explizit und ganz ausführlich an vier Rechnungsbeispielen.

In den Folgerungen 5.1 - 5.7 werden die Ergebnisse aus Satz 3.1, Satz 4.1 und Satz 5.1 noch einmal zusammengefasst.

## Notation

Mit  $L$  bezeichnen wir stets eine komplexe einfache oder halbeinfache **endlich dimensionale** Liealgebra. Unter einer Darstellung von  $L$  verstehen wir, wenn nichts anderes gesagt wird, stets eine **komplexe endlich dimensionale** Darstellung. Ist  $V$  der Darstellungsraum einer Darstellung, so sprechen wir von  $V$  auch als von einem  $L$ -Modul. Ein  $L$ -Untermodul ist ein unter  $L$  invarianter linearer Unterraum von  $V$ . Ein  $L$ -Modul heißt **einfach**, wenn er außer  $\{0\}$  und  $V$  keinen  $L$ -Untermodul enthält, d.h. wenn die entsprechende Darstellung **irreduzibel** ist.

Einen  $L$ -Untermodul  $W$  von  $V$  nennen wir auch **Komponente** von  $V$ , insbesondere, wenn  $W$  einfach ist. Sind zwei Darstellungen äquivalent, so nennen wir die entsprechenden Moduln **isomorph**.

$L$ -Moduln sind halbeinfach ( in anderer Redeweise : Darstellungen von  $L$  sind vollständig reduzibel ), d.h. sie sind isomorph zu einer direkten Summe von einfachen  $L$ -Moduln.

Mit  $nV$  bezeichnen wir die direkte Summe von  $n$  Exemplaren des  $L$ -Modul  $V$ . Wir sagen, die Vielfachheit des  $L$ -Moduls  $W$  im  $L$ -Modul  $V$  ist  $n$ , wenn es in  $V$  einen Untermodul gibt, der isomorph zu  $nW$  ist, wenn jedoch in  $V$  kein Untermodul existiert, der zu  $(n+1)W$  isomorph ist.

Sei  $L$  eine einfache Liealgebra. Wenn wir von Gewichten von  $L$  bei Darstellungen reden, meinen wir stets Gewichte bezüglich einer fest gewählten Cartan Unteralgebra  $C$  in  $L$ . Wir fixieren weiter eine Basis  $B = \{ a_1, a_2, \dots, a_r \}$  des Wurzelsystems und erhalten so eine Ordnung auf der Menge der Gewichte von  $L$ . Das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung ist das eindeutig bestimmte Gewicht, das bei Einschränkung auf  $C$  das größte Gewicht bezüglich der eingeführten Ordnung ist. Die  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r$  seien die fundamentalen Gewichte bezüglich  $B$ .

Es ist wohlbekannt, dass die Menge der ganzzahligen Linearkombinationen  $k_1 \Pi_1 + \dots + k_r \Pi_r$   $k_i \in \mathbb{Z}$ , gerade die Menge der möglichen Gewichte bei Darstellungen ist. Ein Gewicht  $m_1 \Pi_1 + \dots + m_r \Pi_r$  mit nicht negativen ganzzahligen  $m_i$  heißt ein dominantes Gewicht. Mit  $\wedge^+$  sei die Menge der dominanten Gewichte bezeichnet. Die höchsten Gewichte einfacher  $L$ -Moduln sind aus  $\wedge^+$ . Genauer : Die  $\lambda \in \wedge^+$  klassifizieren - als höchste Gewichte der entsprechenden Moduln - die Isomorphieklassen einfacher  $L$ -Moduln.



Im Sinne dieser Klassifikation nach höchsten Gewichten nennen wir einen einfachen  $L$ -Modul ( bzw. eine irreduzible Darstellung ) " vom Typ  $\lambda$  ", wenn er  $\lambda$  als höchstes Gewicht hat. Des öfteren, besonders in Formeln, welche die Zerlegung einer Darstellung in direkte Komponenten beschreiben, werden wir einfache  $L$ -Moduln auch mit ihren höchsten Gewichten identifizieren. Die  $\lambda \in \Lambda^+$  bezeichnen dann direkt einfache Moduln bzw. irreduzible Darstellungen. Noch eine weitere Besonderheit bei der Schreib- und Bezeichnungsweise : Je nach Kontext gebrauchen wir zwei verschiedene Schreibweisen, um die  $\lambda \in \Lambda^+$  durch die  $\Pi_1, \dots, \Pi_r$  auszudrücken. Wir benutzen die additive Schreibweise, etwa wenn wir  $Z$ -Modul – Eigenschaften von  $\Lambda$  betrachten oder wenn wir genauere Untersuchungen in der Menge  $\Lambda(\rho)$  der Gewichte einer Darstellung  $\rho$  durchführen. Meist schreiben wir die Elemente von  $\Lambda^+$  aber multiplikativ als Monome in den  $\Pi_1, \dots, \Pi_r$ . D.h. wir schreiben  $\lambda = \Pi_1^{m_1} \dots \Pi_r^{m_r}$  ( Die additive Schreibweise wäre  $\lambda = m_1 \Pi_1 + \dots + m_r \Pi_r$  ). Linearkombinationen der  $\lambda \in \Lambda^+$  mit ganzzahligen nichtnegativen Koeffizienten beschreiben dann die Zerlegung einer Darstellung in irreduzible Komponenten mittels Angabe der Vielfachheit. So steht z.B.  $\rho = 3 \Pi_1 \Pi_2 + 2 \Pi_3^2$  für eine Darstellung, die in 5 irreduzible Komponenten zerfällt, drei davon vom Typ  $\Pi_1 \Pi_2$  und zwei vom Typ  $\Pi_3^2$ .

Ist  $L_1 \subset L$  eine Lieunteralgebra und  $V$  ein  $L$ -Modul, so kann man  $V$  durch Einschränkung der Operation auf  $L_1$  auch als  $L_1$ -Modul auffassen. Dieses  $L_1$ -Modul bezeichnen wir mit  $V|_{L_1}$ .

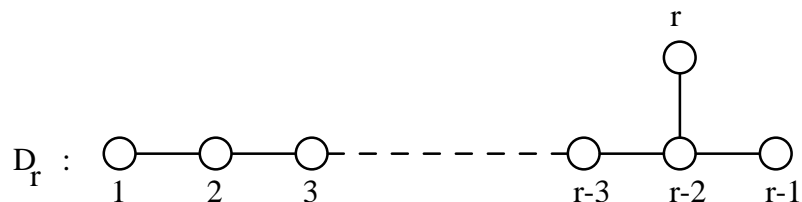
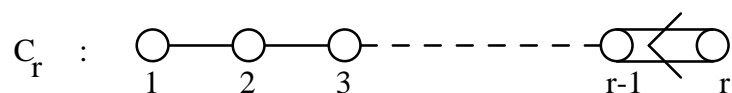
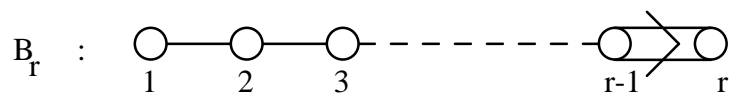
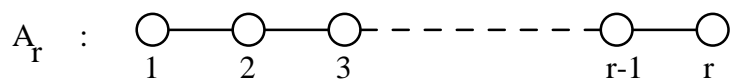
Sei  $\rho$  eine Darstellung von  $L$  mit dem Darstellungsraum  $V$ . Betrachte die  $n$ -te Tensorpotenz  $\otimes^n V$  von  $V$ . In  $\otimes^n V$  betrachten wir den Unterraum  $S^n V$  der symmetrischen Tensoren.  $S^n V$  ist invariant unter der Tensorpotenz  $\otimes^n \rho$  der Darstellung  $\rho$ . Mit  $S^n(\rho)$  sei die entsprechende Darstellung bezeichnet.

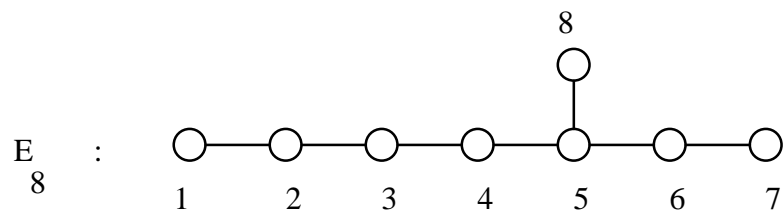
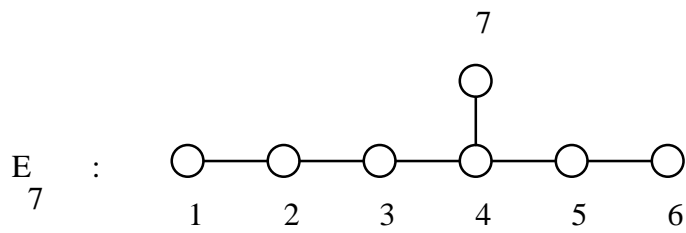
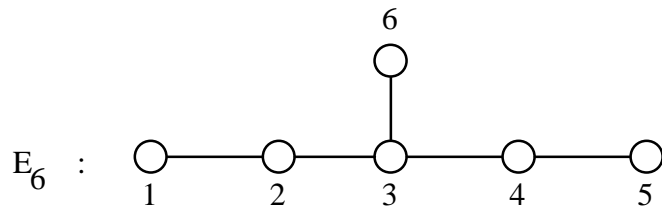
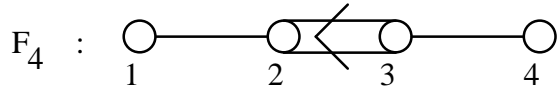
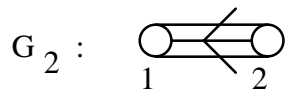
Sei nun  $B_1 = \{ a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s} \}$  eine Untermenge der Basis  $B = \{ a_1, a_2, \dots, a_r \}$  des Wurzelsystems von  $L$ . Die Eigenräume der Wurzeln  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$  und  $-a_{i_1}, -a_{i_2}, \dots, -a_{i_s}$  erzeugen eine Unter algebra  $L_1$  von  $L$ . Es ist bekannt, dass  $L_1$  eine reguläre halbeinfache Unter algebra von  $L$  ist und dass  $C \cap L_1 = C_1$  eine Cartanunter algebra von  $L_1$  ist.

Der Kürze halber bezeichnen wir auch die Einschränkungen  $a_{i_j}|_{C_1}$ , der  $a_{i_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  auf  $C_1$ , mit  $a_{i_j}$ . Dann bilden die  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s}$  eine Basis des Wurzelsystems von  $L_1$ , bezüglich  $C_1$ . Wir nennen  $L_1$ , die halbeinfache **reguläre** Unter algebra von  $L$  definiert durch  $B_1$ .

Wie schon gesagt benutzen wir oft dieselbe Bezeichnung sowohl für eine irreduzible Darstellung wie auch für ihr höchstes Gewicht, z.B. bezeichnet das Monom  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \dots \Pi_r^{m_r}$  sowohl ein Element aus  $\Lambda^+$  als auch eine irreduzible Darstellung mit entsprechendem höchstem Gewicht. Sind  $\rho$  und  $\rho'$  irreduzible Darstellungen von  $L$ , so bezeichnen wir in diesem Sinne mit  $\rho \cdot \rho'$  die irreduzible Darstellung, deren höchstes Gewicht das Produkt der höchsten Gewichte von  $\rho$  und  $\rho'$  ist. Mit  $\rho + \rho'$  bezeichnen wir die direkte Summe von  $\rho$  und  $\rho'$ .

Die Nummerierung der einfachen Wurzeln in der Basis  $B = \{ a_1, a_2, \dots, a_r \}$  ist wie in Tits [I] gewählt. Wir geben zur besseren Orientierung die Dynkindiagramme mit unserer Durchnummerierung der einfachen Wurzeln.





Eine Darstellung  $\rho: L \rightarrow \text{gl}(V)$  induziert in dem Dualraum  $V^*$  von  $V$  eine Darstellung  $\rho^*: L \rightarrow \text{gl}(V^*)$ , welche, die Kontragradiente von  $\rho$  heißt. Die Kontragradiente einer fundamentalen Darstellung  $\Pi_i$  ist eine fundamentale Darstellung  $\Pi_i^*$ . In der folgenden Tabelle sind die Kontragradienten  $\Pi_i^*$  der fundamentalen Darstellungen  $\Pi_i$  für die einfachen Liealgebren angegeben. Es ist  $(\rho^*)^* = \rho$

$A_r:$	$\Pi_i^* = \Pi_{(r+1)-i}$	$i = 1, 2, \dots, r$
$B_r:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2, \dots, r$
$C_r:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2, \dots, r$
$D_r:$	$\Pi_{r-1}^* = \Pi_r$ $\Pi_i^* = \Pi_i$	$r = 2m + 1$ $r = 2m$ oder $i \leq r - 2$
$G_2:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2$
$F_4:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2, 3, 4$
$E_6:$	$\Pi_i^* = \Pi_{6-i}$ $\Pi_6^* = \Pi_6$	$i \leq 5,$
$E_7:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2, \dots, 7$
$E_8:$	$\Pi_i^* = \Pi_i$	$i = 1, 2, \dots, 8$

Es gilt :  $(\Pi_1^{m_1} \dots \Pi_r^{m_r})^* = (\Pi_1^*)^{m_1} \dots (\Pi_r^*)^{m_r}$

Sei  $\rho$  eine Darstellung von  $L$  auf dem Darstellungsraum  $V$ . Dann operiert  $L$  auch vermöge  $S_\rho^n$  auf den symmetrischen Potenzen  $S^n V$  und schließlich auf der (unendlich dimensional) symmetrischen Algebra

$$S(V) = \prod_{n=0} S^n(V) \quad (S^0(V) = C)$$

Wir erinnern an folgende Bezeichnung: Wir sagen, ein  $\lambda \in \Lambda^+$  tritt in einer Darstellung  $\rho$  bzw. in einem  $L$ -Modul auf (oder kommt dort vor), wenn es in  $\rho$  bzw. in  $V$  eine irreduzible Komponente mit höchstem Gewicht  $\lambda$  gibt.

## Bezeichnung

$M(\rho)$  sei die folgendermaßen definierte Untermenge von  $\Lambda^+$  :

Ein  $\lambda \in \Lambda^+$  ist genau dann ein Element aus  $M(\rho)$ , wenn es ein  $k \geq 0$  gibt, so dass  $\lambda$  in  $S^k(\rho)$  vorkommt. Also :

$$M(\rho) := \{ \lambda \in \Lambda^+ \mid \text{es gibt ein } k \geq 0, \text{ so dass } \lambda \text{ in } S^k(\rho) \text{ vorkommt} \}$$

Bemerkung:

$M(\rho)$  ist ein Untermonoid von  $\Lambda^+$ .

Beweis:

Kommen  $\lambda$  in  $S^m(\rho)$  und  $\mu$  in  $S^n(\rho)$  vor, so kommt  $\lambda + \mu$  in  $S^{n+m}(\rho)$  vor .

Sei  $\Lambda_Q := Q\Pi_1 + Q\Pi_2 + \dots + Q\Pi_r \subseteq C^*$

Dabei ist  $C^*$  der Dualraum ( über den komplexen Zahlen ) der Cartanunteralgebra  $C$  von  $L$ ,  $Q$  der Körper der rationalen Zahlen.

Schließlich sei

$$M_Q(\rho) := \text{der von } M(\rho) \text{ erzeugte } Q\text{-Untervektorraum von } \Lambda_Q.$$

Definition 1 ( **Rang** )

Es sei

$$\text{Rang } M(\rho) := \text{Rang } \rho := \text{Dimension von } M_Q(\rho) \text{ über } Q.$$

Definition 2 ( **Gut und schlecht** )

Eine Darstellung  $\rho$  von  $L$  heiße **gut**, wenn  $\text{Rang } M(\rho) < r$  ist. Anderenfalls, d.h. wenn  $\text{Rang } M(\rho) = r$  ist, heißt  $\rho$  **schlecht**.

(Man beachte, dass  $\dim_Q \Lambda_Q = r$ , weil die  $\Pi_1, \dots, \Pi_r$  linear unabhängig sind .)

## §1. Schlechte Darstellungen

Wir fassen gleich am Anfang unsere Ergebnisse in einem Satz zusammen. Der Beweis wird im Laufe des Paragraphen geliefert.

### SATZ 1.1 (Schlechte Darstellungen)

Sei  $L$  einfache Liealgebra und  $\Pi$  eine fundamentale Darstellung von  $L$ .  $\Pi$  ist dann schlecht, wenn  $\Pi$  in der folgenden Liste ist :

(i)  $A_r : \Pi_k \quad 3 \leq k \leq r-2 \quad r \geq 6$

(ii)  $B_r : \Pi_2$  von  $B_3$  ;  
 $\Pi_2, \Pi_3$  von  $B_4$  ;  
 $\Pi_k, 2 \leq k \leq r$  für  $r \geq 5$

(iii)  $C_r : \Pi_3$  von  $C_3$  ;  
 $\Pi_k, 2 \leq k \leq r$  für  $r \geq 4$

(iv)  $D_r : \Pi_2$  von  $D_4$  ;  
 $\Pi_2, \Pi_3$  von  $D_5$  ;  
 $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  von  $D_6$  ;  
 $\Pi_k, 2 \leq k \leq r$  für  $r \geq 7$

(v)  $G_2 : \Pi_2$

(vi)  $F_4 : \Pi_i \quad i = 2, 3, 4$

(vii)  $E_6 : \Pi_i \quad i = 2, 3, 4, 6$

(viii)  $E_7 : \Pi_i \quad i = 2, 3, \dots, 7$

(ix)  $E_8 : \Pi_i \quad i = 1, 2, \dots, 8$

Beweis folgt in den Tatsachen 1.4, 1.5, ....., 1.12 .

## TATSACHE 1.1

Sind  $\rho_1, \rho_2 \in \Lambda^+$  irreduzible Darstellungen von  $L$  und ist  $\text{Rang}(\rho_1) = k$ , so ist  $\text{Rang}(\rho_1 \cdot \rho_2) \geq k$ . Insbesondere gilt: Ist  $\rho_1$  schlecht, so auch  $\rho_1 \cdot \rho_2$ .

Beweis

Sei  $\text{Rang}(\rho_1) = k$ . Dann gibt es  $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}$  und irreduzible Komponenten  $\lambda_i \in S^{m_i}(\rho_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , so dass die  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  additiv geschrieben und als Elemente von  $M_Q(\rho_1)$  betrachtet, linear unabhängig sind. Sei  $\rho = \rho_1 \cdot \rho_2$ .

Da  $\rho_2 \in S^1(\rho_2)$ , gibt es nach (s. z.B. Krämer [I], Tatsache 1.1.6) in den  $S^{m_i+1}(\rho)$  jeweils die Komponenten  $\mu_i = \lambda_i \cdot \rho_2$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Additiv schreiben sich die  $\mu_i$  als  $\lambda_i + \rho_2$ . Sie sind aus  $M_Q(\rho)$  und linear unabhängig.

## TATSACHE 1.2

Sei  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $L$ ,  $\rho^*$  die Kontragradiente zu  $\rho$ . Dann gilt:  
 "  $\rho$  schlecht  $\Leftrightarrow \rho^*$  schlecht " , oder äquivalent dazu "  $\rho$  gut  $\Leftrightarrow \rho^*$  gut. "

Beweis:

Sei  $V$  der Darstellungsraum von  $\rho$  und  $V^*$  der von  $\rho^*$ . Es ist in natürlicher Weise  $S^n(V^*) \cong (S^n(V))^*$  und ist  $S^n(V) = \sum k_i \mu_i$  eine direkte Zerlegung von  $S^n(V)$ , so ist  $S^n(V^*) = \sum k_i \mu_i^*$  die entsprechende Zerlegung im Dualraum. Weil

$\pi \rightarrow \pi^*$  eine Permutation der fundamentalen Gewichte ist und also einen Isomorphismus von  $M_Q(\rho)$  auf  $M_Q(\rho^*)$  induziert, gilt:  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  ist eine Basis  $M_Q(\rho)$  genau dann wenn  $(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_k^*)$  ein Basis von  $M_Q(\rho^*)$  ist. Also sind  $\rho$  und  $\rho^*$  entweder beide gut oder beide sind schlecht.

Im Folgenden sei  $B_1 = \{ a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_s} \}$  eine Untermenge der Basis

$B = \{ a_1, a_2, \dots, a_r \}$  des Wurzelsystems von  $L$ . Die Menge  $B_2 = B \setminus B_1$ , nennen wir auch **Restbasis**.

Als **Träger** eines  $\lambda \in \Pi_1^{m_1} \cdot \Pi_2^{m_2} \cdot \dots \cdot \Pi_r^{m_r} \in \Lambda^+$  bezeichnen wir die Menge  $\text{Tr}(\lambda) = \{ i \mid m_i > 0 \}$ .

Ist  $\text{Tr}(\lambda) \cap \{ i_1, i_2, \dots, i_s \} = \emptyset$ , so sagen wir,  $\lambda$  hat seinen Träger im Restdiagramm.

Sei  $L_1$  die reguläre Unteralgebra, die durch  $B_1$  definiert ist mit Cartanunteralgebra

$$C_1 = C \cap L_1$$

### TATSACHE 1.3

1) Sei  $\lambda$  eine irreduzible Darstellung von  $L$  identifiziert mit ihrem höchsten Gewicht. Sei  $\lambda_1 = \lambda|_{C_1}$  die Einschränkung, identifiziert mit der gleichnamigen irreduziblen Darstellung von  $L_1$ .

Sei  $\delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \dots \oplus \delta_p = S^m(\lambda_1)$  eine Zerlegung von  $S^m(\lambda_1)$  in die direkte Summe von irreduziblen Komponenten ( $p = p(m)$  hängt von  $m$  ab). Als additiv geschriebene Gewichte sind die  $\delta_t$   $t=1, 2, \dots, p$  von der Form

$$\delta_t = m \lambda_1 - \sum_{u=1}^s m_{u,t} a_{i_u} \quad m_{u,t} \in \mathbb{N}_0, \quad t = 1, 2, \dots, p.$$

Dann enthält  $S^m(\lambda)$ , im allgemeinen unter anderen Komponenten,  $p$  irreduzible Komponenten  $\Delta_t$ ,  $t=1, 2, \dots, p$  mit dem jeweiligen höchsten Gewicht

$$\Delta_t = m \lambda - \sum_{u=1}^s m_{u,t} a_{i_u} \quad t = 1, 2, \dots, p.$$

2) Ist ein  $\delta = m \lambda_1 - \sum_{u=1}^s m_{u,t} a_{i_u} \in \{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p \}$  als Dominantgewicht von  $L_1$

von der Form  $\delta = \Pi_{i_1}^{m_1} \cdot \Pi_{i_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot \Pi_{i_s}^{m_s}$ ,

so ist  $\Delta = m \lambda - \sum_{u=1}^s m_{u,t} a_{i_u}$  als Dominantgewicht von  $L$  von der Form

$$\Delta = \Pi_{i_1}^{m_1} \cdot \Pi_{i_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot \Pi_{i_s}^{m_s} \cdot \mu,$$

wobei  $\mu$  ein Dominantgewicht von  $L$  ist mit Träger im Restdiagramm.

Insbesondere gilt:

Ist  $\delta$  das Nullgewicht von  $L_1$ , so hat  $\Delta$  seinen Träger im Restdiagramm.

3) Ist  $\text{Rang}(\lambda_1) = k$  (bei  $L_1$ ), so ist  $\text{Rang}(\lambda) \geq k$  (bei  $L$ ).

Beweis (1)

Sei  $V$  der Darstellungsraum von  $\lambda$  und sei  $v$  nicht trivialer Eigenvektor zu dem Gewicht  $\lambda$ . Sei  $W$  der  $L_1$ -invariante Unterraum von  $V$ , der von  $v$  erzeugt wird. Wir können annehmen, dass  $W$  ein Darstellungsraum von  $\lambda_1$  ist. Dann ist  $S^m W$  ein linearer Unterraum von  $S^m V$  und wir erhalten  $S^m \lambda_1$  als eine Unterdarstellung von  $S^m \lambda|_{L_1}$ .

Seien  $e_i$ ,  $i=1,2,\dots,r$  nicht triviale Eigenvektoren der einfachen Wurzeln

$a_1, a_2, \dots, a_r$  von  $L$ . Für  $t=0,1,2,\dots,p$  sei  $v_t$  ein nicht trivialer Eigenvektor zum höchsten Gewicht in der irreduziblen Komponenten  $\delta_t$  von  $S^m W$ . Sei  $t \in \{1,2,\dots,p\}$ .

Es gilt:

$(S^m \lambda_1)(e_i)(v_t) = 0$  für alle  $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$  d.h. für alle  $i$ , für die  $a_i$  eine Wurzel von  $L_1$  ist. Diese Gleichungen sind die charakteristische Eigenschaft der Eigenvektoren zum höchsten Gewicht bei einer irreduziblen Darstellung (von  $L_1$  in diesem Fall). Als ein Element von  $S^m V$  ist  $v_t$  offenbar ein Eigenvektor zum Gewicht

$$\Delta_t = m \lambda - \sum_{u=1}^s m_{u,t} a_{i_u} \quad t = 1, 2, \dots, p \quad \text{von } L \text{ bezüglich } C.$$



Nun ist für alle  $i$ , die nicht unter den  $i_1, i_2, \dots, i_s$  sind, die Linearform  $\Delta_t + a_i$  kein Gewicht bei der Darstellung  $S^m \lambda$  (denn für alle Gewichte  $\mu$  bei  $S^m \lambda$  gilt:  $m\lambda - \mu$  ist lineare Kombination der  $a_1, \dots, a_r$  mit nicht negativen Koeffizienten.) Deshalb gilt für diese  $i$  die Gleichung  $S^m \mathfrak{K}(e_i)(v_t) = 0$ . Wir haben also  $S^m \lambda(e_i)(v_t) = 0$  für alle  $i=1,2,\dots,r$ , d.h.  $v_t$  ist ein Eigenvektor zum höchsten Gewicht in einer irreduziblen Komponente  $\Delta_t$  von  $S^m \lambda$ . Alle die  $v_t$   $t=1,2,\dots,p$ , sind linear unabhängig, folglich sind die Komponenten  $\Delta_t$   $t=1,2,\dots,p$  paarweise verschieden.

**Beweis (2)**

Sei  $(h_1, h_2, \dots, h_r)$  die zu  $(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_r)$  duale Basis in der Cartanunteralgebra  $C$  von  $L$ . Für ein Gewicht  $\mu \in \Delta$  - additiv geschrieben als  $\mu = k_1 \Pi_1 + \dots + k_r \Pi_r$  sind dann die Koeffizienten  $k_i$  bzw. Exponenten  $k_i$  gerade gegeben durch  $k_i = \mu(h_i)$ .

Für die  $a_i \in B$  sind die  $a_i(h_j)$ ,  $1 \leq i, j \leq r$ , die Einträge in der Cartanmatrix von  $L$ . Weil die Einträge in der Cartanmatrix außerhalb der Hauptdiagonalen  $\leq 0$  sind, gilt  $a_{i_k}(h_j) \leq 0$  für alle  $a_{i_k} \in B_1$  und alle  $j$  aus dem Restdiagramm.

Somit ist  $-m_{u,t} a_{i_k}(h_j) \geq 0$  und also

$$\Delta(h_j) = (m\lambda - \sum_{k=1}^s m_{u,t} a_{i_k})(h_j) \geq m\lambda(h_j) \geq 0, \text{ letztere Ungleichung weil}$$

$$m\lambda \in \Delta^+. \text{ Es ist } \mu = \prod_{j \in \text{Restdiagramm}} \prod_j^{\Delta(h_j)}$$
 und dominant.

3) Folgt offenbar aus (1) und (2) und der folgenden Bemerkung.

### Bemerkung

Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Tatsache 1.3. Bildet man die Vereinigung der Mengen  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_p\}$ ,  $p = p(m)$ , über alle  $m$ , so erhält man eine Teilmenge  $\tilde{M}(\lambda_1)$  von  $M(\lambda)$ . Der von  $\tilde{M}(\lambda_1)$  erzeugte  $Q$ -Untervektorraum von  $\Lambda_Q$  sei  $\tilde{M}_Q(\lambda_1)$  genannt.

Man hat die Projektionen  $\text{pr} : \Lambda^+(L) \rightarrow \Lambda^+(L_1) = \Lambda_1^+$  gegeben durch

$$\text{pr} \left( \sum_{i=1}^r m_i \Pi_i \right) = \sum_{u=1}^s m_{i_u} \Pi_{i_u} \text{ und die } Q\text{-Erweiterung, auch pr genannt,}$$

$$\text{pr} : \Lambda_Q^+ \rightarrow \Lambda_{1,Q}^+, \text{ pr} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i \Pi_i \right) = \sum_{u=1}^s \alpha_{i_u} \Pi_{i_u}$$

Tatsache 1.3 (1) und (2) und die zugehörigen Beweise besagen:

$$\text{pr}(\tilde{M}(\lambda_1)) = M(\lambda_1) \text{ und somit } \text{pr}(\tilde{M}_Q(\lambda_1)) = M_Q(\lambda_1).$$

Insbesondere gilt

$$\text{Rang}(\lambda_1) = \dim_Q M_Q(\lambda_1) \leq \dim_Q(\tilde{M}_Q(\lambda_1)) \leq \dim_Q M_Q(\lambda) = \text{Rang}(\lambda)$$

## KRITERIUM 1

Sei jetzt  $B_1 = B \setminus \{ a_i \}$ . Es sei dabei  $a_i$  eine Wurzel vom Rand des Dynkindiagramms von  $L$ , so dass also  $B_1$  zusammenhängend und  $L_1$  einfach ist. (Z.B. sei  $a_i = a_1$  und  $B_1 = \{ a_2, \dots, a_r \}$ ). Sei  $\lambda \in \Lambda^+(L)$  mit Träger in  $B_1$  und es sei  $\lambda_1 = \lambda|_{C_1}$ . Vorausgesetzt sei:

- (i)  $\lambda_1$  ist schlecht als Darstellung von  $L_1$  und
  - (ii) es gibt ein  $m > 0$ , so dass in  $S^m(\lambda_1)$  eine triviale Komponente  $\delta = \Pi_0$  (= Nullgewicht) vorkommt.
- Dann gilt: Auch  $\lambda$  ist schlecht als Darstellung von  $L$ .

Beweis:

Zu zeigen ist:  $\dim_{\mathbb{Q}} M_{\mathbb{Q}}(\lambda) = r$ . Wegen  $(\tilde{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1)) \leq M_{\mathbb{Q}}(\lambda)$  ist das sicher der

Fall, wenn  $\dim_{\mathbb{Q}}(\tilde{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1)) = r$ , d.h. wenn  $\dim_{\mathbb{Q}} \tilde{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1) > r-1$

Wir zeigen letzteres.

Bemerkung 1 zusammen mit der Voraussetzung (i) liefert: Die Projektion

$\text{pr}: (\tilde{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1)) \rightarrow M_{\mathbb{Q}}(\lambda_1)$  ist surjektiv und hat also ein  $(r-1)$  dimensionales Bild.

Die Voraussetzung (ii) zusammen mit der Tatsache 1.3 und den dortigen Bezeichnungen ergibt: Ist  $\delta = \Pi_0$  in  $S^m(\lambda_1)$ , so ist

$\Delta = m\Pi_i$  (Träger im Restdiagramm  $\{ a_i \}$ ). Also ist  $\Delta \in \text{Kern pr}$ .

Wir zeigen noch  $m > 0$ . Denn dann ist  $\text{Kern pr} \neq \{0\}$  und somit

$\dim \tilde{M}_{\mathbb{Q}}(\lambda_1) > \dim_{\mathbb{Q}} \text{Bild pr} = r - 1$ , wie behauptet.

Behauptung:  $m > 0$

Beweis:

Es ist  $0 = \delta = m\lambda_1 - \sum_{a_j \in B_1} m_j a_j$  mit  $m_j \in \mathbb{N}_0$  (Das sind die Bezeichnungen aus

Tatsache 1.3, die Indizes passend vereinfacht) Also:  $m\lambda_1 = \sum_{a_j \in B_1} m_j a_j$

Aber: Alle Koeffizienten bei der Darstellung als Kombinationen der einfachen Wurzeln sind  $> 0$  für alle fundamentalen Gewichte von  $L_1$  (siehe die Listen in { Humphreys}, § 13), als auch bei  $\lambda_1$  und  $m\lambda_1$ .

Dann: Ist  $a_{i_0}$  die an  $a_i$  angrenzende einfache Wurzel des Dynkindiagramms von  $L$

(Z.B.  $a_{i_0} = a_2$  wenn  $a_i = a_1$  bzw.  $B_1 = \{ a_2, \dots, a_r \}$ ) so ist  $m = m_{i_0}$ , also

$\Delta = m_{i_0} \Pi_i$  mit  $m_{i_0} > 0$ .

Aufgabe im folgenden : Um mit Kriterium 1 Induktionsbeweis führen zu können , suchen wir noch ein Kriterium für die Existenz trivialer Komponenten  $\Pi_0$  in einem  $S^m(\lambda)$  ,  $m > 0$ . Zu solch einem Kriterium werden wir ein Stück weit algebraische Geometrie benutzen .Es sei darauf hingewiesen , dass nur relativ elementare Ergebnisse aus dem Anfängen der algebraischen Geometrie benötigt werden.

Exkurs in die Theorie der Liegruppen ( und algebraischen Gruppen ):

Zu jeder einfachen komplexen Liealgebra  $L$  gibt es ( bis auf Isomorphie) genau eine einfach zusammenhängende komplexe Liegruppe  $G(L)$ , deren Liealgebra  $L$  ist. Für die Liealgebren  $A_r, B_r, C_r, D_r$  sind es –respektive- die klassischen Liegruppen  $SL(r+1, C)$ ,  $Spin(2r+1, C)$ ,  $Sp(2r, C)$ ,  $Spin(2r, C)$ . Die  $Spin(m, C)$  haben als Faktorgruppe von Index 2 die  $SO(m, C)$ . ( Hier ist  $C$  Körper der komplexen Zahlen.)

Für  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  sind es Liegruppen der Dimension 14, 52, 78, 133, 248 , die treue Darstellungen , d.h. Realisierungen als abgeschlossene Untergruppen in  $SL(r+1, C)$  haben für  $n = 7, 26, 27, 56, 248$ .

Die Darstellungstheorien der  $L$  und der  $G(L)$  sind äquivalent. In beiden Fällen sind endlich dimensionale komplexe Darstellungen vollständig reduzibel . Jede Darstellung von  $L$  liefert natürlicher Weise ( durch “ Integration“ ) eine Darstellung von  $G(L)$  und diese Konstruktion induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von Darstellungen von  $L$  und von  $G(L)$ .

Insbesondere klassifizieren die  $\lambda \in \Lambda^+ = \Lambda^+(L)$  auch die Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von  $G(L)$  . Die zu  $\lambda$  gehörige Darstellung von  $G(L)$  sei  $\lambda_G$  genannt.

Darstellungen  $\rho : G = G(L) \rightarrow GL(V)$  von  $G$  definieren eine lineare Operation von  $G$  auf dem (Vektor)Raum  $V$  im Sinne der üblichen Gruppenoperationen . Insbesondere hat man die Orbits  $G \bullet v = \{ \rho(g)(v) \mid g \in G \}$  durch die  $v \in V$ . Diese  $G \bullet v$  haben eine Dimension  $\dim G \bullet v \leq \dim V$  .

Für unsere Induktionsbeweise werden wir folgende Tatsache benutzen .

## KRITERIUM 2

Sei  $\lambda$  eine irreduzible Darstellung von  $L$  auf  $V$  und  $\lambda_G$  sei die induzierte Darstellung von  $G = G(L)$  auf  $V$  . Sei  $m := \max \{ \dim G \bullet v \mid v \in V \}$ .

Ist  $m < \dim V$  , so gibt es  $m \in \mathbb{N}$  ,so dass  $S^m(\lambda)$  eine triviale Komponente  $\Pi_0$  enthält .

### Anmerkung :

Das Kriterium ist grob und könnte verfeinert werden . Es ist aber einfach zu verifizieren und zu benutzen und zum Beweis werden nur grundlegende und keine elaborierten Tatsachen aus der Theorie der algebraischen Gruppen und der algebraischen Geometrie benötigt.

## Beweisskizze zum Kriterium 2

(1) Die Operation von  $G$  auf  $V$  induziert in natürlicher Weise eine Operation von  $G$  auf  $S^m(V)$ ,  $m \geq 0$ . Die  $g \in G$  operieren als Algebrenautomorphismen auf  $S(V)$ .  $S(V)$  ist isomorph zum Polynomring in  $d := \dim V$  Variablen. Uns interessiert  $S(V)^G$ , der Unterring aller unter allen  $g \in G$  fixer Elemente aus  $S(V)$ , der sogenannte Invariantenring von  $V$  unter  $G$ .

### **Bemerkung :**

Die Bedingung "Es gibt  $m > 0$ , so dass in  $S^m(V)$  eine triviale Komponente  $\Pi_0$  von  $L$  existiert" ist äquivalent zur Bedingung "Es gibt  $m > 0$ , so dass  $S(V)^G \cap S^m(V) \neq \{0\}$ " bzw. zur Bedingung " $C \neq S(V)^G$ ". (Trivialerweise ist  $C = S^0(V)$  enthalten in  $S(V)^G$ .)

Ein erstes Ergebnis der Invariantentheorie lautet:  $S(V)^G$  ist eine endlich erzeugte  $C$ -Algebra. Einen Beweis - bei uns ist  $X := V$  - findet man als zweiter Teil des Beweises des "Endlichkeitssatzes", III. 1.2 in dem Artikel [Springer]

(2) Wichtig in den weiteren Überlegungen sind diverse Quotientenkörper. Im folgenden schreiben wir auch  $C[V]$  für  $S(V)$ . Mit  $C(V)$  bezeichnen wir den Quotientenkörper von  $C[V]$  ( $C(V)$  ist der Körper der rationalen Funktionen in  $d$  Variablen.). Die Operation von  $G$  auf  $C[V]$  induziert eine Operation auf  $C(V)$ . (Zähler und Nenner einer rationalen Funktion werden beide einzeln transformiert). Mit  $C(V)^G$  wird der Unterkörper der unter  $G$  invarianten Elemente von  $C(V)$  bezeichnet. Der Integritätsbereich  $C[V]^G (= S(V)^G)$  hat einen eigenen Quotientenkörper,  $Q(C[V]^G)$  genannt.

Offenbar gilt generell  $Q(C[V]^G) \subseteq C(V)^G$ . Die Inklusion kann echt sein. Im Fall unserer  $G$  gilt jedoch die Tatsache: Es ist  $Q(C[V]^G) = C(V)^G$ .

Die Tatsache ist in [Springer] als Teil (b) des Satzes in III 3.7 bewiesen und auch als Lemma 1 in [Popov]. (Der Beweis ist kurz und einfach.)

Als Folgerung hat man:

$$C \neq C[V]^G \Leftrightarrow C \neq C(V)^G$$

Beachtet man die Bemerkung im Teil (1) oben, so ist also das Kriterium 2 äquivalent zur Aussage  $\dim V > m \Rightarrow C \neq C(V)^G$ .

(3) Diese letztere Aussage schließlich folgt aus Satz 7 in II 4.3 E von [Kraft] (mit  $V = \mathbb{Z}$ ). Denn  $\dim V > m$  bedeutet insbesondere, dass es in  $V$  keine dichte Bahn von  $G$  gibt. Noch zum Beweis des zitierten Satzes 7 in [Kraft]: Der Beweis beruht - neben einem geschickten Umgang mit den gegebenen geometrischen Größen, auf zwei berühmten klassischen Sätzen der Algebra: Einem Satz von Artin (s. z.B. Bourbaki, Chap. V § 7 théorème 1), und dem Noetherschen Normalisierungssatz etwa in der Version von [Atiyah - Macdonald] § 5 Exercise 16.

TATSACHE 1.4 Fall  $A_r$

(1) (i)  $\Pi_3$  von  $A_r$  ist schlecht für alle  $r = 6, 7, \dots$  und entsprechend die Kontragradiente  $\Pi_{r-2}$   $r \geq 6$ .

ii)  $\Pi_k$  ist schlecht für alle  $k$   $3 \leq k \leq r-2$ ,  $r \geq 6$ .

(2) Alle nicht fundamentalen Darstellungen  $\Pi \cdot \Pi'$ , wo  $\Pi, \Pi'$  aus der Liste (A) sind, sind schlecht ( d.h.  $\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_{r-1}, \Pi_1\Pi_r, \Pi_2\Pi_{r-1}, \Pi_2\Pi_r$   $r \geq 1$ ;  $\Pi_3^2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_2\Pi_3$  von  $A_5$  und die dazu Kontragradienten ).

(3) Alle Darstellungen  $\Pi \cdot \Pi'$  mit  $\Pi$  schlecht sind schlecht.

Beweis 1(i)

Ich benutze die Listen im Anhang der Arbeit .

Für  $n = 2$

$\Pi_1^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_2^2$  sind schlecht nach der Liste 1.1.1 .

Für  $n = 3$

$\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_3^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_2\Pi_3$  sind schlecht nach der Liste 1.1.2.

Für  $n = 4$

$\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_3^2, \Pi_4^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_1\Pi_4, \Pi_2\Pi_3, \Pi_2\Pi_4, \Pi_3\Pi_4$  sind schlecht nach der Liste 1.1.3.

Für  $n = 5$

$\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_3^2, \Pi_4^2, \Pi_5^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_1\Pi_4, \Pi_1\Pi_5, \Pi_2\Pi_3, \Pi_2\Pi_4, \Pi_2\Pi_5, \Pi_3\Pi_4, \Pi_3\Pi_5, \Pi_4\Pi_5$  sind schlecht nach der Liste 1.1.4 .

Für  $n = 6$

$\Pi_3, \Pi_4$  ist schlecht nach der Liste 1.1.5.

$\Pi_1^2, \Pi_2^2, \Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_5$  und die entsprechende Kontragradienten  $\Pi_6^2, \Pi_5^2, \Pi_5\Pi_6, \Pi_2\Pi_6$  sind schlecht nach der Liste 1.1.5

Die  $\Pi_3\Pi_1$  und ihre Kontragradienten  $\Pi_4\Pi_i$   $i \in \{ 1, 2, 5, 6 \}$  sind schlecht nach der Tatsache 1.1.

Beweis 1 (i) für  $r > 6$

Grundlagen für den Beweis sind die Daten aus Liste 1 und die bisherigen theoretischen

Überlegungen. Wir werden den Fall  $\Pi_3$  von  $A_r$  ausführlich besprechen. Bei den anderen Fällen fassen wir uns kürzer. Zuerst sei bemerkt: Aus den Listen 1.1.5 und 1.1.7 kann man direkt ablesen, dass  $\Pi_3$  von  $A_6, A_7, A_8$  schlecht ist, indem man  $r = 6, 7$  bzw.  $8$   $Q$ -linear unabhängige  $\lambda$  in den  $S^k(\Pi_3)$  findet.

Wir wollen aber beim Übergang von  $A_6$  zu  $A_7$  demonstrieren, wie unser Kriterium 1 konkret funktioniert. Also zum Übergang  $A_6 \rightarrow A_7$ :

In  $S(\Pi_3)$  von  $A_6$  findet man (z.B.) in der Liste 1.1.5 folgende über  $Q$  linear unabhängige Elemente aus  $\Lambda^+(\Pi_3)$ :

$$\delta_1 = [0,0,1,0,0,0] = \Pi_3 \text{ in } S^1(\Pi_3)$$

$$\delta_2 = [2,0,0,0,0,0] = \text{in } S^3(\Pi_3)$$

$$\delta_3 = [0,0,0,0,0,2] = \text{in } S^4(\Pi_3)$$

$$\delta_4 = [0,1,0,1,0,1] = \text{in } S^4(\Pi_3)$$

$$\delta_5 = [1,0,0,1,0,0] = \text{in } S^4(\Pi_3)$$

$$\delta_6 = [1,0,0,0,1,0] = \text{in } S^2(\Pi_3)$$

Hieraus leitet man mittels Tatsache 1.3 und Kriterium 1 folgendermaßen her, dass  $\Pi_3$  von  $A_7$  schlecht ist. Es ist  $B = \{ a_1, \dots, a_7 \}$  Wurzelbasis von  $A_7$ ,  $B_1 = \{ a_1, \dots, a_6 \}$ , also  $a_i = a_7$ ,  $a_{i_0} = a_6$ . Ferner ist  $L_1 = A_6$ . Sei  $\lambda = \Pi_3$  von  $A_7$ , somit  $\lambda_1 = \Pi_3$  von  $A_6$ . Dann:

$$\text{Aus } \delta_1 \text{ wird } \Delta_1 = [0,0,1,0,0,0] \text{ in } S^1(\Pi_3)$$

$$\text{Aus } \delta_2 = 3\lambda_1 - (2a_2 + 4a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6) \text{ wird } \Delta_2 = [2,0,0,0,0,1] \text{ in } S^3(\lambda)$$

$$\text{Aus } \delta_3 = 4\lambda_1 - (2a_1 + 4a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 2a_5) \text{ wird } \Delta_3 = [0,0,0,0,2,0] \text{ in } S^4(\lambda)$$

$$\text{Aus } \delta_4 = 4\lambda_1 - (a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 2a_4 + a_5) \text{ wird } \Delta_4 = [0,1,0,1,0,1] \text{ in } S^4(\lambda)$$

$$\text{Aus } \delta_5 = 4\lambda_1 - (a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6) \text{ wird } \Delta_5 = [1,0,0,1,0,1] \text{ in } S^4(\lambda)$$

$$\text{Aus } \delta_6 = 2\lambda_1 - (a_2 + 2a_3 + a_4) \text{ wird } \Delta_6 = [1,0,0,0,1,0] \text{ in } S^2(\lambda).$$

(Die Koeffizient 1 in der letzten Koordinate von  $\Delta_2$  und  $\Delta_5$  kommt von den jeweiligen Koeffizienten von  $a_6$ ). Die  $\Delta_1, \dots, \Delta_6$  spannen einen 6-dimensionalen Unterraum in  $\Lambda_Q(A_7)$  auf.

Nun registriert man: In  $S^7(\lambda_1)$  gibt es eine triviale Komponente  $\delta = \Pi_0 = [0,0,0,0,0,0]$ .

Es ist  $\delta = 7\lambda_1 - (4a_1 + 8a_2 + 12a_3 + 9a_4 + 6a_5 + 3a_6)$ . Sie liefert in  $S^7(\lambda)$  die Komponente

$\Delta = [0,0,0,0,0,3]$ . Dann: Die  $\Delta_1, \dots, \Delta_6, \Delta$  spannen  $\Lambda_Q(A_7)$  auf. Also  $\Pi_3$  von  $A_7$  ist schlecht.

Bisher haben wir Kriterium 1 an einem Beispiel demonstriert. Der Beweis, dass  $\Pi_3$  von  $A_r$  schlecht ist auch für alle  $r \geq 8$  geht nun mittels Induktion über  $r$  folgendermaßen: Aus Kriterium 2 folgt: Es genügt zu zeigen, dass  $\Pi_3$  von  $A_8$  schlecht ist und dass  $\dim \Pi_3 > \dim A_r$  gilt für alle  $r \geq 8$ .

Zuerst : Dass  $\Pi_3$  von  $A_8$  schlecht ist , nehmen wir aus der Tabelle 1.1.7 . Dort findet man : Ein Erzeugendensystem von  $\Lambda_Q(A_8)$  bilden z.B. die folgenden  $\delta_1, \dots, \delta_8$  :  
 $[0,0,1,0,0,0,0,0] \in S^1$ ,  $[3,0,0,0,0,0,0,0] \in S^4$ ,  $[0,0,0,0,0,2,0,0] \in S^4$ ,  $[1,0,0,0,1,0,0,0] \in S^2$   
 $[1,0,0,1,0,0,1,0] \in S^4$ ,  $[0,1,0,1,0,1,0,0] \in S^4$ ,  $[2,0,0,0,0,0,1,0] \in S^3$ ,  $[1,0,1,0,0,0,0,1] \in S^4$ .  
Denn bildet man für  $i = 1, 2, \dots, 8$  den Spann der  $\delta_1, \dots, \delta_i$ , so findet man darin jeweils folgende neuen Fundamentalendarstellungen :  $\Pi_3, \Pi_1, \Pi_6, \Pi_5, \Pi_4, \Pi_2, \Pi_7, \Pi_8$ .

Als zweitens : Wir zeigen  $\dim \Pi_3 > \dim A_r$  für alle  $r \geq 8$ .

$$\begin{aligned} \text{Es ist } \dim \Pi_3 - \dim A_r &= \frac{(r+1) \cdot r \cdot (r-1)}{6} - r \cdot (r+2) = \frac{(r^2-1) \cdot r - 6r \cdot (r+2)}{6} \\ &= \frac{r}{6} (r^2 - 6r - 13) = \frac{r}{6} ((r-3)^2 - 22) \end{aligned}$$

Nun ist  $(r-3)^2 > 22$  für  $r \geq 8$ . Also  $\dim \Pi_3 > \dim A_r$  für diese  $r$ .

Insgesamt : Wir haben bewiesen , dass  $\Pi_3$  von  $A_r$  schlecht ist für alle  $r \geq 6$ .

Beweis von (1)(ii) :

Für  $k = 3$  und alle  $r \geq 6$  ist die Behauptung gezeigt. Wir zeigen sie noch für  $\Pi_k$  von  $A_r$  für  $4 \leq k \leq \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$  (= größte ganze Zahl kleiner – gleich  $\frac{r+1}{2}$ ). Wegen Tatsache 1.2 und weil  $\Pi_{r+1-k} = \Pi_k^*$  ist dann alles gezeigt.

Zuerst Dimensionsabschätzungen , um Kriterium 2 benutzen zu können ( Wir schreiben  $\dim_r \lambda$  für die Dimension von  $\lambda \in \Lambda^+(A_r)$  bei  $A_r$  ) :

$$\dim_7 \Pi_4 = \binom{8}{4} = 70 > 63 = \dim A_7 \text{ und für alle } r \geq 8 .$$

$$\dim_r \Pi_k = \binom{r+1}{k} \geq \binom{r+1}{3} = \dim_r \Pi_3 > A_r \text{ ( die letzte Ungleichung wurde bei 1(i) bewiesen ) .}$$

Nun die Induktionsbeweise:

Für  $k = 4$  : Aus der Liste 1.1.6 ist direkt abzulesen , dass  $\Pi_4$  von  $A_7$  schlecht ist .

( Man sieht auch direkt , dass die triviale Darstellung  $\Pi_0$  in  $S^4$  vorkommt. )

Mit  $B_1 = \{ a_1, \dots, a_{r-1} \}$ ,  $L_1 = A_{r-1}$  gilt nach Kriterium 1 induktiv :

Weil  $\lambda_1 = \Pi_4$  von  $A_{r-1}$  schlecht ist , ist  $\lambda = \Pi_4$  von  $A_r$  schlecht für alle  $r \geq 8$ .

Für  $k \geq 5$  ( und dann  $r \geq 9$  ) mit Induktion über  $k$  :

Mit  $B_1 = \{ a_2, \dots, a_r \}$  gilt :

Weil  $\Pi_{k-1} = \lambda_1$  von  $A_{r-1}$  schlecht ist , ist  $\lambda = \Pi_k$  von  $A_r$  schlecht für alle  $r \geq 2k-1 \geq 9$ .

Beweis von (2)

Die Darstellungen  $\Pi_1 \Pi_r$  und  $\Pi_1^2$  spielen eine Sonderrolle. Sie werden weiter unten behandelt. Bei  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$ ,  $r \geq 4$  und  $\Pi_2^2$ ,  $r \geq 3$  gehen Informationen über  $\Pi_1 \Pi_r$  ein. Diese Fälle werden zuletzt diskutiert.

Zwei Dimensionsabschätzungen ( Zur Anwendung von Kriterium 2 ) :

Es lassen sich ohne Mühe folgende beiden Formeln für die Dimension  $\dim_r \Pi_1 \Pi_2$  und  $\dim_r \Pi_2^2$  aus der Dimensionsformel berechnen , wie sie in [ Jacobson ,VIII, 4.1, Formel (41)], vorgeschlagen wird.

$$(1) \dim_r \Pi_1 \Pi_2 = \frac{(r+2)(r+1)r}{3} \quad , \quad r \geq 3$$

$$(2) \dim_r \Pi_2^2 = \frac{(r+2)(r+1)^2 r}{3 \cdot 4} \quad , \quad r \geq 3$$

Beweis dieser Formeln:

Für beide  $\lambda = \Pi_1 \Pi_2$  und  $\lambda = \Pi_2^2$  ist  $\dim_r \lambda > (r+2) \cdot r = \dim A_r$  für  $r \geq 3$  .

Sei nun  $\lambda = \Pi_1 \Pi_2$  oder  $\lambda = \Pi_2^2$

Aus der Liste 1.1.2 liest man ab : [1,1,0] und [0,2,0] sind schlecht . Dann ergibt sich mittels Induktion über r für  $r \geq 4$  :

Weil  $\lambda$  schlecht ist für r-1 und weil  $\dim_{r-1} \lambda > \dim A_{r-1}$  ist , folgt aus Kriterium 1 unter Anwendung von Kriterium 2 , dass  $\lambda$  schlecht ist auch für r .

Als nächstes registriert man aus der Liste 1.1.4 : Die [1,0,1,0,0] , [0,1,1,0,0] und [0,0,2,0,0] bei  $A_5$  sind schlecht.

Die Schlechtheit von  $\lambda = \Pi_3^2$  ,  $\Pi_1 \Pi_3$  ,  $\Pi_2 \Pi_3$  bei  $A_5$  liest man direkt aus der Tabelle 1.1.4 ab.

Die Fälle  $\lambda = \Pi_1 \Pi_2$  ,  $\Pi_2^2$  ,  $r \geq 3$  , werden nach dem schon bekannten Induktionsverfahren behandelt. Und zwar :

Erster Schritt: Man zeigt ,dass  $\dim \lambda > \dim A_r$  ist für diese  $\lambda$  und alle  $r \geq 3$  .

In dieser Formel liefert jede positive Wurzel je einen Faktor im Zähler und Nenner .

Im Fall  $\lambda = \Pi_1 \Pi_2$  : Die positiven Wurzeln  $a_1 + \dots + a_k$   $r \geq k \geq 1$  liefern im Zähler die Faktoren r+2 , r+1 , ..... , 5, 4,2 und im Nenner die Faktoren r, (r-1) , ..... , 2,1. Die Wurzeln  $a_2 + \dots + a_k$   $r \geq k \geq 2$  liefern r, r-1 , ..... , 3,2 im Zähler und r-1, r-2, ..... , 2,1 im Nenner. Alle anderen positiven Wurzeln liefern im Zähler und Nenner den gleichen Faktor ,d.h. diese Faktoren heben sich auf. Insgesamt erhält man

$$\dim \Pi_1 \Pi_2 = \frac{(r+2)(r+1)r \dots 5.4.2}{r(r-1) \dots 4.3.2.1} \cdot \frac{r(r-1) \dots 2}{(r-1) \dots 2.1} = \frac{(r+2)(r+1)}{3} \cdot r$$

$$= (r+2)r \cdot \frac{r+1}{3} > \dim A_r \quad \text{für } r \geq 3 .$$

Für  $\lambda = \Pi_2^2$  erhält man mit ähnlichen Überlegungen

$$\dim \Pi_2^2 = \frac{(r+2)(r+1)}{3 \cdot 2} \cdot \frac{(r+1)r}{2} = (r+2)r \cdot \frac{(r+1)^2}{12} > (r+2)r \quad \text{für } r \geq 3 .$$

Zweiter Schritt: Induktion .

Als Anfang liest man in der Tabelle 1.1.2 ab, dass  $\Pi_1 \Pi_2$  und  $\Pi_2^2$  schlecht sind für  $A_3$  .

Da wegen der Dimensionsabschätzungen gemäß Kriterium 2 bei  $\lambda = \Pi_1 \Pi_2$  und  $\lambda = \Pi_2^2$  für alle für  $r \geq 3$  triviale Komponenten in einem  $S^m \lambda$  ,  $m \geq 1$  , existieren ,folgt durch Induktion mittels Kriterium 1 , dass  $\Pi_1 \Pi_2$  und  $\Pi_2^2$  schlecht sind für alle  $r \geq 3$  .

( Im Kriterium 1 nimmt man  $\{ a_1, \dots , a_{r-1} \}$  als  $B_1$  für  $r \geq 4$  . )



Der Fall  $\lambda = \Pi_1 \Pi_r$

Bei  $A_r$  ist  $\Pi_1 \Pi_r$  die adjungierte Darstellung  $\text{ad}$ . Die Darstellung von  $L$  in  $S(\text{ad})$  wurde in [Konstant] explizit behandelt. Dort wird folgendes bewiesen.

Theorem 11 von Konstant : In  $\sum_{m \geq 1} S^m(\text{ad})$  kommen alle irreduziblen Darstellungen vor,

deren höchstes Gewicht eine ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln ist  
Insbesondere gilt :

Erstens :  $\Pi_1 \Pi_r$  ist schlecht für alle  $r \geq 2$

Zweitens : Es gibt triviale Komponenten  $\rho_0$  in  $\sum_{m \geq 1} S^m(\Pi_1 \Pi_2)$

(Im Fall  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$  benötigt.)

Der Fall  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$ ,  $r \geq 3$  :

Für  $r = 3$  ist  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$  schlecht nach der Tabelle 1.1.2 ( und fällt dann zusammen mit dem Fall  $\Pi_1 \Pi_2$ , s.o. ).

Die Induktion via  $B_1 = \{ a_1, \dots, a_{r-1} \}$ ,  $L_1 = A_{r-1}$ , funktioniert wie gewohnt, weil jetzt  $\lambda_1$  die adjungierte Darstellung von  $A_{r-1}$  ist. Und  $\text{ad}$  ist schlecht und  $S(\text{ad})$  besitzt triviale Komponenten in gewissen  $S^m(\text{ad})$ ,  $m \geq 2$ .

Es bleibt noch der Fall  $\Pi_1^2$ . Unsere Art des Induktionsbeweises greift hier nicht. Deshalb wird der Fall direkt behandelt. Er fällt in klassische Bereiche der Liethorie und wurde im Rahmen der Theorie der symmetrischen Räume untersucht. Die Darstellung  $\Pi_1^2$  ist nämlich die Isotropiedarstellung von  $U(n)$  beim symmetrischen Raum  $\text{sp}(n, \mathbb{R}) / U(n)$ . Die Theorie der sphärischen Funktionen und der zugehörigen Rang-1-Moduln, siehe [Warner I], Satz 3.3.1.1 und die Ergebnisse in [Konstant-Rallis], Theoreme 18 und 19, besagen : In  $S(\Pi_1^2)$  kommen genau die  $\lambda \in \Lambda^+$  vor, welche geradzahlige Linearkombinationen der fundamentalen Gewichte sind. Insbesondere ist  $\Pi_1^2$  von  $A_r$  schlecht.

Die Aussage (3) der Tatsache 1.4 schließlich folgt aus dem Bisherigen und der Tatsache 1.1.

#### FOLGERUNG 1.1

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $A_r$  betrachtet .

Liste (A) :  $\Pi_1, \Pi_r$   $r \geq 1$  ;  $\Pi_2, \Pi_{r-1}$   $r \geq 2$  ;  $\Pi_3$  von  $A_5$

Dann : Alle irreduzible Darstellungen von  $A_r$ , die nicht in der Liste (A) sind, sind schlecht.

Beweis :

Sei  $\lambda$  nicht aus der Liste (A)

1. Fall:  $\lambda$  ist fundamental . Dann ist  $\lambda$  schlecht aus (1) der Tatsache 1.4.

2. Fall:  $\lambda$  ist nicht fundamental.

1. Unterfall:  $\lambda = \Pi \Pi'$  mit  $\Pi$  schlecht, dann ist  $\lambda$  schlecht aus (3) Tatsache 1.4.

2. Unterfall:  $\lambda$  Produkt aus der Liste (A). Falls  $\lambda$  zwei Faktoren hat, ist  $\lambda$  schlecht aus (2) der Tatsache 1.4. Falls  $\lambda$  mehr als zwei Faktoren hat, ist  $\lambda = \Pi \Pi'$ ,  $\Pi$  schlecht wie in (2) der Tatsache 1.4 . Also ist  $\lambda$  schlecht nach Tatsache 1.1

TATSACHE 1.5 Fall  $B_r$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $B_r$  betrachtet .

Liste ( B ) :  $\Pi_1 \quad r \geq 2 \quad ; \quad \Pi_r \quad r = 2,3,4$

- (1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen sind schlecht.
- (2) Alle nicht fundamentalen Darstellungen  $\Pi\Pi'$ , wo  $\Pi, \Pi'$  aus der Liste (B) sind, sind schlecht ( d.h.  $\Pi_1^2 \quad r \geq 2 \quad ; \quad \Pi_1\Pi_2, \Pi_2^2 \quad r = 2 \quad ; \quad \Pi_1\Pi_3, \Pi_3^2 \quad r = 3 \quad ; \quad \Pi_1\Pi_4, \Pi_4^2 \quad r = 4 \quad )$
- (3) Alle irreduziblen Darstellungen  $\Pi\Pi'$  mit  $\Pi$  schlecht sind schlecht .

Beweis von (1):

Die Darstellung  $\Pi_1$  ist die " definierende " Darstellung gegeben durch die natürliche Operation von  $SO(2r+1, C)$  auf  $V := C^{2r+1}$ . Außerdem ist bekannt:

Die induzierte Operation auf der äußeren Potenz  $\Lambda^i(V)$  ist irreduzibel und liefert die Fundamentaldarstellung  $\Pi_i$  für  $2 \leq i \leq r-1$ . Dabei ist  $\Pi_2$  die adjungierte Darstellung.

Für  $3 \leq i \leq r-1$  ist offenbar  $\dim \Pi_i = \binom{2r+1}{i} > \binom{2r+1}{2} = \dim B_r$ , d.h. Kriterium 2 ist anwendbar.

Der Beweis der Schlechtheit der  $\Pi_i$ ,  $2 \leq i \leq r-1$ , verläuft nun wie gewohnt durch Induktion über  $i$ . Als Anfang :Die Darstellung  $\Pi_2$  als adjungierte Darstellung ist schlecht für alle  $r > 3$  nach dem schon bei  $A_r$  benutzten Theorem 11 in [ Kostant I]. Es gibt auch triviale Komponente in  $S^m(\Pi_2)$   $m \geq 2$ . ( Es gibt eine solche Komponente bereits in  $S^2(\Pi_2)$  ).

Wir arbeiten nun im Sinne von Kriterium 1 mit der regulären Unter algebra  $L_1 \cong B_{r-1}$ , definiert durch die Untermenge  $\{ a_2, \dots, a_r \}$  einfacher Wurzeln . Sei  $i \geq 3$ . Dann ist  $\Pi_i$  von  $L$  das Gewicht  $\Pi_{i-1}$  von  $L_1$ . Dieses ist nach Induktion schlecht und enthält triviale Komponenten. Also ist auch  $\Pi_i$  von  $B_r$  schlecht nach Kriterium 1.

Beweis der Schlechtheit der  $\Pi_r \quad r \geq 5$  :

Für  $r = 5,6,7$  sind die Darstellungen  $\Pi_r$  schlecht gemäß der Liste 1.2 Es gibt triviale Komponenten in gewissen  $S^m(\Pi_r)$ ,  $m \geq 2$ . Mit dem selben  $L_1$  wie oben und weil  $\dim \Pi_r = 2^r > \dim B_r$  für  $r \geq 7$  liefert das Kriterium 2 mit Induktion, dass  $\Pi_r$  schlecht ist für alle  $r \geq 8$ , d.h. für alle  $r \geq 5$  .

Zum Fall  $\Pi_1^2$ :

Die Darstellung  $\Pi_1^2$  ist die Isotropiedarstellung von  $SO(2r+1)$  beim symmetrischen Raum  $SL(2r+1, R) / SO(2r+1)$  bzw. beim kompakten Fall  $SU(2r+1)/SO(2r+1)$ . Wie schon früher wenden wir die Theorem 18,19 in [ Kostant-Rallis ] an.

Das  $M_Q$  in der dortigen Bezeichnungsweise ist in unserem jetzigen Fall endlich. Es folgt, dass  $\Pi_1^2$  von  $B_r$  schlecht ist.

Eine Bemerkung: Es wäre im Fall von  $\Pi_1^2$  von  $B_r$  ( und später im Fall  $\Pi_1^2$  von  $D_r$  ) möglich, explizit Verzweigungssätze ( " Branching Rules " ), hier von  $A_{2r}$  auf  $B_r$

( kurz  $SU(2r+1) \downarrow_{SO(2r+1)}$  geschrieben ), zu benutzen, wie wir es unten im Fall  $\Pi_2$  von  $C_r$  vorführen. Die Referenz zu Geometrie über [ Kostant-Rallis ] könnten wir uns so ersparen. Wir wollen aber die recht speziellen Überlegungen, wie wir sie zur Tatsache 1.13 unten durchführen werden, nur einmal explizit darstellen.

Schließlich: Der Rest von (2) und Teil (3) der Tatsache 1.5 folgt nun, wie schon bei  $A_r$ , aus dem Bisherigen mit Hilfe der Tatsache 1.

## FOLGERUNG 1.2

Alle irreduziblen Darstellungen von  $B_r$ , die nicht in der Liste (B) sind, sind schlecht.

Beweis: Sei  $\Pi$  nicht aus der Liste (B).

1. Fall:  $\Pi$  ist fundamental. Dann ist  $\Pi$  schlecht aus (3) der Tatsache 1.5.

2. Fall:  $\Pi$  ist nicht fundamental.

1. Unterfall:  $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$  mit  $\Pi_1$  schlecht, dann ist  $\Pi$  schlecht aus (3) der Tatsache 1.5.

2. Unterfall:  $\Pi$  Produkt aus der Liste (B). Falls  $\Pi$  zwei Faktoren hat, dann ist  $\Pi$  schlecht aus (2) der Tatsache 1.5.

Falls  $\Pi$  mehr als zwei Faktoren hat, dann ist  $\Pi = \Pi_1 \cdot \Pi_2$  mit  $\Pi_1$  wie in (2) der Tatsache 1.5.

$\Pi$  ist schlecht aus (3) der Tatsache 1.5.

## TATSACHE 1.6 Fall $C_r$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $C_r$  betrachtet.

Liste (C):  $\Pi_1$   $r \geq 3$ ;  $\Pi_2$  von  $C_3$

(1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen sind schlecht.

(2) Alle nicht fundamentalen Darstellungen  $\Pi_1^2$   $r \geq 3$ ,  $\Pi_2^2, \Pi_1 \Pi_2$  von  $C_3$  sind schlecht.

(3) Alle irreduziblen Darstellungen  $\Pi \cdot \Pi'$  mit  $\Pi$  schlecht sind schlecht.

Beweis:

Bei  $C_r$  ist  $\Pi_1^2$  die adjungierte Darstellung, also schlecht (z.B. nach [ Kostant I ]).

Eine Sonderrolle und mit unseren Induktionsargumenten nicht wie gewohnt zu behandeln, ist die Darstellung  $\lambda = \Pi_2$   $r \geq 3$ . Wieder könnte man [ Kostant-Rallis II ] benutzen. Wir wollen jedoch an diesem Beispiel zeigen, dass man solche Fälle mit Verzweigungssätzen explizit behandeln kann – hier mit Ergebnissen über die Einschränkung irreduzibler Darstellungen von  $A_{2r-1}$  auf  $C_r$ . Wir haben unsere Vorgehensweise expliziert bei der Tatsache 1.13 weiter unten dargestellt. Hier benutzen wir das dortige Ergebnis, dass  $\Pi_2$  von  $C_r$  schlecht ist für  $r \geq 4$  und dass es triviale Komponenten in  $\sum_{m \geq 1} S^m(\Pi_2)$  gibt.

Der weitere Verlauf des Beweises der Tatsache 1.6 verläuft nun wie gewohnt:  
 Schlechtheit für kleiner  $r$  wird bei diversen  $\lambda$  direkt aus der Liste 1.3 abgelesen.

Bei  $C_3$  :  $\Pi_3$  ist schlecht, ebenso  $\Pi_2^2$  und  $\Pi_1\Pi_2$

$\Pi_1\Pi_3$  ist dann schlecht nach Tatsache 1.

Bei  $C_4$  :  $\Pi_3$  ist schlecht

Benötigt werden auch Dimensionsabschätzungen ( für Kriterium 2). Man weiß bei  $C_r$   
 folgendes: Die Darstellung von  $L = C_r$  in der äußeren Potenz  $\Lambda^k(\Pi_1)$ ,  $2 \leq k \leq r$ ,  
 zerfällt in die direkte Summe aus einer Darstellung äquivalent zu  $\Pi_k$  und einem  
 Summanden isomorph zu  $\Lambda^{k-2}(\Pi_1)$ .

Also gilt für  $2 \leq k \leq r$  :  $\dim_r \Pi_k = \binom{2r}{k} - \binom{2r}{k-2}$

Man erhält  $\dim_r \Pi_k > \dim C_r$  für  $3 \leq k \leq r$ .

Die bisherigen Informationen erlauben nun den weitem Beweis der Tatsache 1.6 mit  
 unserer Induktionsmethode und mit Tatsache 1. Zur Induktion benutzt wird  $L_1 \subseteq C_r$   
 $C_r$  definiert durch die Teilmenge  $\{a_2, \dots, a_r\}$  einfacher Wurzeln. Es ist  $L_1 \cong C_{r-1}$ .  
 (Die Teilmenge  $\{a_1, \dots, a_{r-1}\}$ , die zur einem  $L_1 \cong A_{r-1}$  führt, ist weniger  
 geeignet.)

Bild für die benutzten  $L_1 \cong C_{r-1}$

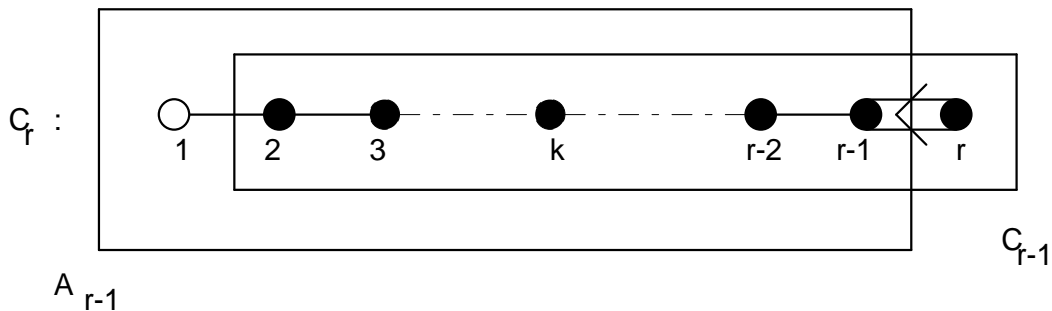


Bild für die benutzten  $L_1 \subseteq C_r$

**FOLGERUNG 1.3**

Alle irreduziblen Darstellungen von  $C_r$ , die nicht in der Liste C sind, sind schlecht.

Beweis: Ähnlich wie Folgerung 1.2.

TATSACHE 1.7 Fall  $D_r$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $D_r$  betrachtet

.

Liste (D) :  $\Pi_1$   $r \geq 4$  ;  $\Pi_3, \Pi_4$  von  $D_4$  ;  $\Pi_4, \Pi_5$  von  $D_5$  ;  $\Pi_5, \Pi_6$  von  $D_6$

(1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen sind schlecht.

(2) Alle nicht fundamentalen Darstellungen  $\Pi \cdot \Pi'$ , wo  $\Pi, \Pi'$  aus der Liste (D) sind,

sind schlecht ( d.h.  $\Pi_1^2$   $r \geq 4$  ;  $\Pi_3^2, \Pi_4^2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_1\Pi_4, \Pi_3\Pi_4$  von  $D_4$   
 $\Pi_4^2, \Pi_5^2, \Pi_1\Pi_4, \Pi_1\Pi_5, \Pi_4\Pi_5$  von  $D_5$  ;  $\Pi_1\Pi_5, \Pi_1\Pi_6, \Pi_5\Pi_6, \Pi_5^2, \Pi_6^2$  von  $D_6$  ).

(3) Alle irreduziblen Darstellungen  $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2$  mit  $\lambda_1$  schlecht sind schlecht .

Beweis:

Wie bei  $B_r$  ist  $\Pi_2$  die adjungierte Darstellung. Sie ist schlecht nach [Kostant I] und es gibt eine triviale Komponente in  $S^2(\Pi_2)$  .

Ein weiterer besonderer Fall ist  $\Pi_1^2$  . Wie bei  $B_r$  gilt:  $\Pi_1^2$  ist Isotropiedarstellung beim symmetrischen Raum  $SL(2r, R)/SO(2r)$ . Aus [ Kostant-Rallis ], Theoreme 18,19 folgt auch hier, dass  $\Pi_1^2$  schlecht ist. ( Auch in diesem Fall hätte man direkt mit Verzweigungsergebnissen arbeiten können analog zu Tatsache 1.13 und zwar diesmal bei der Verzweigung  $SL(2r, C) \downarrow_{SO(2r, C)}$

Bei  $D_r$  gibt es auch wieder ein schon von  $A_r$  bekanntes Phänomen. Es gibt nicht triviale Diagrammautomorphismen, welche äußerer Automorphismen der Liealgebren induzieren. Bei  $D_4$  ist die Gruppe der Diagrammautomorphismen die  $S_3$ , welche die einfachen Wurzeln  $a_1, a_3, a_4$  permutieren. Bei  $D_r, r \geq 5$ , gibt es einen nicht trivialen Automorphismus, der  $a_{r-1}$  und  $a_r$  vertauscht. Als Folgerung ergibt sich:

Bei  $D_4$ : Für jede Permutation  $\sigma$  von 1,3,4 gilt:

$\lambda = \Pi_1^{m_1} \cdot \Pi_2^{m_2} \cdot \Pi_3^{m_3} \cdot \Pi_4^{m_4}$  ist schlecht  $\Leftrightarrow \sigma(\lambda) = \Pi_{\sigma(1)}^{m_1} \cdot \Pi_2^{m_2} \cdot \Pi_{\sigma(3)}^{m_3} \cdot \Pi_{\sigma(4)}^{m_4}$  ist schlecht.

Bei  $D_r, r \geq 5$ :

$\lambda = \Pi_1^{m_1} \dots \dots \Pi_{r-2}^{m_{r-2}} \cdot \Pi_{r-1}^{m_{r-1}} \cdot \Pi_r^{m_r}$  schlecht  $\Leftrightarrow \sigma(\lambda) = \Pi_1^{m_1} \dots \dots \Pi_{r-2}^{m_{r-2}} \cdot \Pi_{r-1}^{m_{r-1}} \cdot \Pi_r^{m_r}$  schlecht

Außerdem: gibt es triviale Komponenten in  $S^m(\lambda)$ ,  $m \geq 2$  so auch in  $S^m(\sigma(\lambda))$ , und umgekehrt .

Die zu untersuchenden Fälle kann man entsprechend reduzieren.

Zur Anwendung von Kriterium 2 benötigen wir auch diesmal Dimensionsabschätzungen .

Es ist bekannt , dass bei  $D_r$  ( wie bei  $B_r$ ) die Darstellungen  $\Lambda^i(\Pi_1)$  auf den äußeren Potenzen von  $\Pi_1$  gerade die Fundamentalendarstellungen  $\Pi_i$  sind für  $1 \leq i \leq r-2$  .

( Es ist  $\Lambda^{r-1}(\Pi_1) \cong \Pi_{r-1}^2 \oplus \Pi_r^2$ .) Daraus ergibt sich :

$$\dim \Pi_i = \binom{2r}{i} > \binom{2r}{2} = \dim D_r \quad \text{für alle } 3 \leq i \leq r-2, \quad r > 5.$$

Für die Halbspindarstellungen  $\Pi_r$  ( bzw.  $\Pi_{r-1}$  ) gilt  $\dim \Pi_r = 2^{r-1}$ .

Das liefert  $\dim \Pi_r > \dim D_r$  für  $r \geq 8$ .

Der Teil (1) von Tatsache 1.7 für  $\Pi_i$  mit  $3 \leq i \leq r-2$  folgt aus dem Bisherigen ( insbesondere den Informationen über  $\Pi_2$  ) mit unseren Induktionsverfahren ( mit  $L_1 \cong D_{r-1}$  erzeugt von  $\{ a_2, \dots, a_r \}$  ). Bei den Halbspindarstellungen liest man in den Tabellen ab, dass  $\Pi_r$  von  $D_7$  und  $D_8$  schlecht ist. Die Schlechtheit für  $r \geq 9$  folgt mit Induktion.

Zum Teil (2) von Tatsache 1.7 :

Es ist ( berücksichtigt man die äußeren Automorphismen, siehe oben) die Schlechtheit von  $\Pi_1^2$ ,  $\Pi_r^2$ ,  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$ ,  $\Pi_{r-1} \Pi_r$  nachzuweisen.

Der Fall  $\Pi_1^2$  ist oben als Sonderfall eigens besprochen. Da  $\Pi_r$ ,  $\Pi_{r-1}$  schlecht sind für  $r \geq 8$ , brauchen die anderen Fälle nur noch für  $4 \leq r \leq 7$  nachgeprüft zu werden.

Für  $\Pi_1 \Pi_{r-1}$  kann man Kriterium 1 mit der Unteralgebra  $L_1 \cong A_{r-1}$ , gegeben durch  $\{ a_1, \dots, a_{r-1} \}$  benutzen. Für  $\lambda = \Pi_1 \Pi_{r-1}$  von  $D_r$  ist  $\lambda_1 = \Pi_1 \Pi_{r-1}$  die adjungierte Darstellung von  $A_{r-1}$ . Die Listen 1.1.2- 1.1.4 zeigen explizit die Schlechtheit von  $\lambda_1$  und die Existenz einer trivialen Komponente etwa in  $S^2(\lambda_1)$ . ( Natürlich könnte man auch auf [ Kostant I ] zurückgreifen.)

Für  $\Pi_r^2$  entnimmt man die Schlechtheit bei  $r = 4, 5, 6$  aus den Listen 1.4.1 – 1.4.3.

Weil für  $r = 6$   $S^2(\Pi_r^2)$  eine triviale Komponente enthält, folgt mit Kriterium 1 auch die Schlechtheit von  $\Pi_r^2$  bei  $r = 7$ .

Ganz analog wie der Fall  $\Pi_r^2$  wird der Fall  $\Pi_{r-1} \Pi_r$  behandelt. Der Rest der Tatsache 1.7 folgt von der Tatsache 1.1.

#### FOLGERUNG 1.4

Alle irreduziblen Darstellungen von  $D_r$   $r \geq 4$ , die nicht in der Liste (D) sind, sind schlecht.

Beweis wie Folgerung 1.

#### TATSACHE 1.8 Fall $G_2$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $G_2$  betrachtet.

Liste (G) :  $\Pi_1$

- (1) Die fundamentale Darstellung  $\Pi_2$  ist schlecht
- (2) Die nicht fundamentale Darstellung  $\Pi_1^2$  ist schlecht
- (3) Die Darstellung  $\Pi_1 \Pi_2$  ist schlecht.

Beweis:

$\Pi_2, \Pi_1^2$  sind schlecht nach der Liste 1.5.  $\Pi_1 \Pi_2$  ist schlecht nach der Tatsache 1.1.

#### FOLGERUNG 1.5

Alle irreduziblen Darstellungen  $\neq \Pi_1$  von  $G_2$  sind schlecht.

Beweis ist klar.

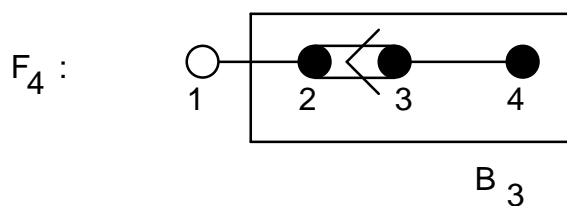
TATSACHE 1.9 Fall  $F_4$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $F_4$  betrachtet .

Liste ( F ) :  $\Pi_1$

- (1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen sind schlecht.
- (2)  $\Pi_1^2$  ist schlecht.
- (3) Die irreduziblen Darstellungen  $\Pi_1\Pi_2, \Pi_1\Pi_3, \Pi_1\Pi_4$  sind schlecht.

Beweis:



Es gibt die reguläre Unteralgebra  $L_1 \cong B_3$  definiert durch  $\{ a_2, a_3, a_4 \}$  .

Die Darstellung  $\lambda = \Pi_3$  von  $F_4$  ergibt als  $\lambda_1$  von  $L_1$  die Darstellung  $\Pi_2$  von  $B_3$  . Nach der Liste 1.2.2 ist  $\Pi_2$  von  $B_3$  schlecht und hat eine triviale Komponente in  $S^2(\Pi_2)$  . Nach Kriterium 1 ist dann auch  $\Pi_3$  von  $F_4$  .

Die Darstellungen  $\Pi_2, \Pi_4, \Pi_1^2$  von  $F_4$  sind schlecht nach Liste 1.6

Man beachte in der Liste 1.6 ist die Nummerierung der fundamentalen Darstellungen verschieden von unserer Nummerierung.

FOLGERUNG 1.6

Alle irreduziblen Darstellungen  $\neq \Pi_1$  von  $F_4$  sind schlecht.

Beweis ist klar.

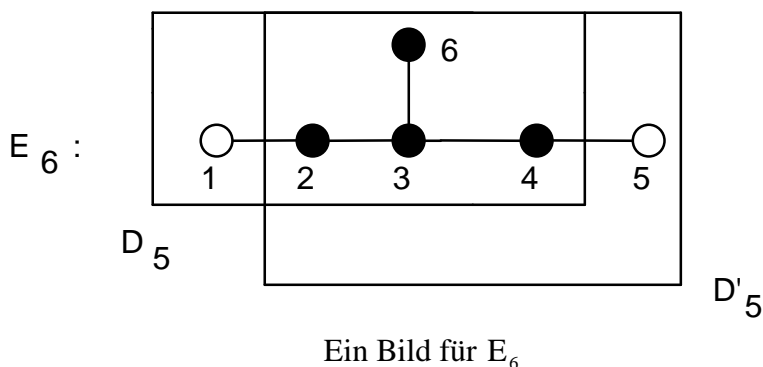
TATSACHE 1.10 Fall  $E_6$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $E_6$  betrachtet.

Liste ( $E_6$ ) :  $\Pi_1, \Pi_5$

- (1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen sind schlecht.
- (2) Die nicht fundamentalen Darstellungen  $\Pi_1^2, \Pi_5^2, \Pi_1\Pi_5$  sind schlecht.
- (3) Alle irreduziblen Darstellungen  $\Pi_1\Pi_k$  und  $\Pi_5\Pi_k$   $k = 2, 3, 4, 6$  sind schlecht.

Beweis:



Es gibt eine reguläre Lieunteralgebra  $D_5, D'_5$ , entstanden durch Entfernen der Wurzel  $a_1$  bzw.  $a_5$ , wie im Bild.

Die Darstellung  $\lambda = \Pi_2, \Pi_3$  von  $E_6$  werden zu  $\lambda_1 = \Pi_2, \Pi_3$  von  $D_5$ . Und  $\Pi_2, \Pi_3$  von  $D_5$  sind schlecht mit trivialen Komponenten in  $S^2(\lambda_1)$ . Nach Kriterium 1  $\Pi_2, \Pi_3$  von  $E_6$  sind schlecht.

Mit der Unteralgebra  $D'_5$  zeigt man entsprechend:  $\Pi_4$  (als  $\Pi_2$  von  $D'_5$ ) ist schlecht.

Schließlich noch :  $\Pi_6$  ( das ist die adjungierte Darstellung )  $\Pi_1^2, \Pi_5^2$  und  $\Pi_1\Pi_5$  sind schlecht nach der Liste 1.7. Man beachte in der Liste 1.7 ist die Nummerierung der fundamentalen Darstellungen verschieden von unserer Nummerierung.

Mit der Tatsache 1.1 folgen die restlichen Behauptungen von Tatsache 10.1.

FOLGERUNG 1.7

Alle irreduziblen Darstellungen von  $E_6$ , die nicht in der Liste ( $E_6$ ) sind, sind schlecht.

Beweis ist klar.



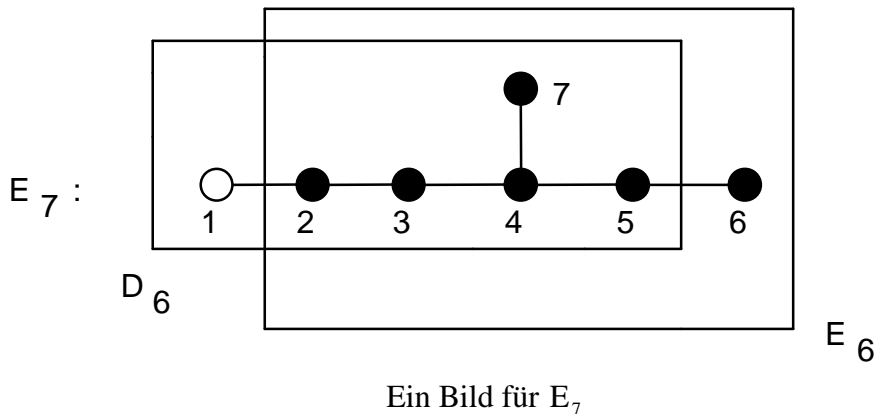
TATSACHE 1.11 Fall  $E_7$

Sei die folgende Liste der Darstellungen von  $E_7$  betrachtet

Liste ( $E_7$ ) :  $\Pi_1$

- (1) Alle übrigen fundamentalen Darstellungen  $\Pi_k$   $k = 2, 3, \dots, 7$  sind schlecht.
- (2)  $\Pi_1^2$  ist schlecht
- (3)  $\Pi_1 \Pi_k$   $k = 2, 3, \dots, 7$  sind schlecht.

Beweis:



Es gibt reguläre Unteralgebren  $E_6$  und  $D_6$  wie im Bild.

Die Darstellungen  $\lambda = \Pi_1^2, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  von  $D_6$  sind schlecht und haben triviale Komponente in  $S^2(\lambda_1)$ . Nach Kriterium 1 sind die entsprechenden  $\lambda = \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$  von  $E_7$  auch schlecht.

Die Darstellung  $\lambda = \Pi_7$  von  $E_7$  liefert die Darstellung  $\lambda_1 = \Pi_6$  von  $E_6$ . Letztere ist schlecht und hat eine triviale Komponente in  $S^2(\lambda_1)$ . Es folgt:  $\Pi_7$  von  $E_7$  ist schlecht.

Das  $\lambda = \Pi_5$  von  $E_7$  liefert die Darstellung  $\lambda_1 = \Pi_4$  von  $E_6$ .

Bei  $E_6$  ist  $\dim E_6 = 78 < \dim \Pi_4 = 351$  (siehe [Tits]), also enthält  $S^m(\Pi_4)$  triviale Komponenten. Es folgt: Auch  $\Pi_5$  von  $E_7$  ist schlecht.

Die Darstellung  $\Pi_6$  von  $E_7$  die adjungierte Darstellung und somit schlecht.

(Siehe [Kostant] oder Liste 1.8). Man beachte in der Liste 1.8 ist die Nummerierung der fundamentalen Darstellungen verschieden von unserer Nummerierung.

Alles andere folgt wieder aus Tatsache 1.1.

FOLGERUNG 1.8

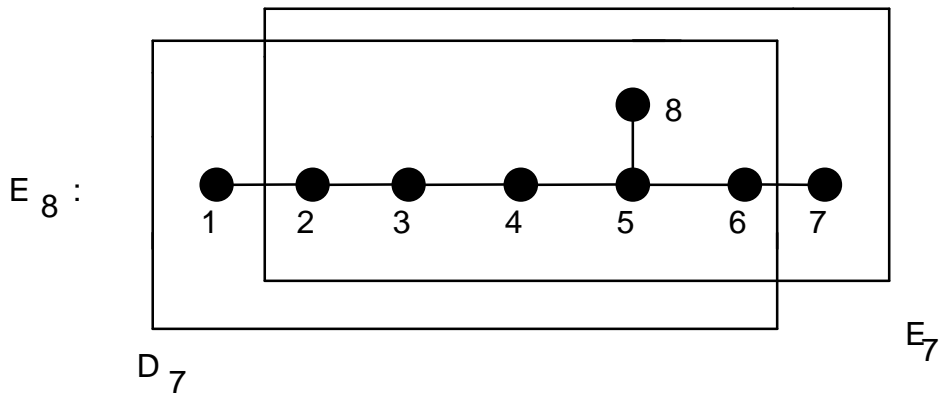
Alle irreduziblen Darstellungen  $\neq \Pi_1$  von  $E_7$  sind schlecht.

Beweis ist klar nach der Tatsache 1.11.

TATSACHE 1.12

Alle fundamentalen Darstellungen von  $E_8$  sind schlecht.

Beweis:



Es gibt reguläre Unteralgebren von Typ  $L_1 = D_7, E_7$  wie im Bild.

Die Darstellungen  $\lambda = \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$  liefern entsprechende und schlechte

$\lambda_1 = \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5$  von  $D_7$  und sind schlecht nach Kriterium 1.

Die Darstellungen  $\lambda = \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8$  liefern schlechte Darstellungen

$\lambda_1 = \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7$  von  $E_7$ . Es ist  $\Pi_6$  die adjungierte Darstellung von  $E_7$  und hat triviale Komponenten in  $S^2(\Pi_6)$ . Die  $\Pi_5, \Pi_7$  haben triviale Komponenten in einem  $S^m(\lambda)$ ,  $m \geq 2$ , weil  $\dim \Pi_5, \Pi_7 > \dim E_7$  ( $\dim \Pi_5 = 8645$ ,  $\dim \Pi_7 = 912$ ,  $\dim E_7 = 133$ , siehe [Tits]) Nach Kriterium 1 und 2 sind dann auch  $\Pi_5, \Pi_6, \Pi_7$  von  $E_8$  schlecht.

Schließlich :  $\Pi_1$  ist als adjungierte Darstellung schlecht.

FOLGERUNG 1.9

Alle irreduziblen Darstellungen von  $E_8$  sind schlecht.

Beweis:

Sei  $\Pi$  fundamental, dann ist  $\Pi$  schlecht nach Tatsache 1.12.

Wenn  $\Pi$  ein Produkt von fundamentalen Darstellungen, dann ist  $\Pi$  schlecht nach der Tatsache 1.1.

TATSACHE 1.13

Der Beweis , dass  $\Pi_2$  von  $C_n$  schlecht ist , geht nicht ohne weiteres mit den bisherigen induktiven Methoden . Wir geben einen direkten Beweis , der die Verzweigung der irreduziblen Darstellungen von  $A_{2n-1}$  bei der Einschränkung auf  $C_n$  benutzt . Den entsprechenden Verzweigungssatz haben wir der Referenz[Sundaram] entnommen. Wegen der Verständlichkeit geben wir eine etwas ausführlichere Einführung in diesem Verzweigungssatz .

Gesucht : Die Branching-Rule  $A_{2n-1} \downarrow_{C_n}$  , d.h. wir müssen  $\Pi(A_{2n-1}) \downarrow_{C_n}$  ausrechnen.  $\Pi$  ist eine irreduzible Darstellung. Dazu benötigen wir :

**Partition der Länge  $\leq r$**

Eine Partition der Länge  $\leq r$  ist eine Folge  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  ,  $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$  , mit  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$  .

Betrachte die Darstellungen von  $A_r$  mit höchstem Gewicht  $\Pi$  ,

$$\Pi = \Pi_1^{k_1} \Pi_2^{k_2} \dots \Pi_r^{k_r} \equiv [k_1, k_2, \dots, k_r]$$

Zu  $\Pi$  betrachtet man folgende Partition  $\lambda$  der Länge  $\leq r$  ,

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) , \text{ wobei } \lambda_i = k_i + k_{i+1} + \dots + k_r , i=1, 2, \dots, r$$

$$\lambda_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_r , \lambda_2 = k_2 + \dots + k_r , \lambda_3 = k_3 + \dots + k_r , \dots , \lambda_r = k_r$$

Beispiele:

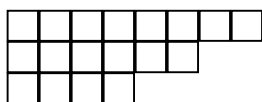
1)  $\Pi_2^2$  von  $A_7$

$$\lambda = (2, 2, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ die Partition von } \Pi_2^2 = [0, 2, 0, 0, 0, 0, 0]$$

2)  $\Pi_1 \Pi_7$  von  $A_7$

$$\lambda = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \text{ eine Partition von } \Pi_1 \Pi_7 = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 1]$$

**Young-Diagramm** zur Partition  $\lambda$



⋮

⋮

⋮

⋮

□

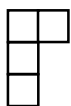
$\lambda_i$  Kästchen in der  $i$ -ten Reihe

Beispiele :

1) Young-Diagramm zur Partition  $\lambda = (2, 2, 0, \dots, 0)$  von  $(\Pi_2^2, A_n)$



2) Young-Diagramm zur Partition  $\lambda = (2, 1, 1, \dots, 1)$  von  $(\Pi_1 \Pi_r, A_r)$



Das gilt  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0$  .

⋮

□

$r$ . te Reihe

Für ein Young-Diagramm T :

$$\Pi = [k_1, k_2, \dots, k_r] \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r), \quad T_\Pi = T_\lambda = T$$

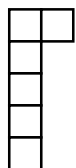
**Länge** von T =  $l(\lambda) = \text{Anzahl der } \lambda_i > 0$  ,

**Betrag** von  $\lambda$  (bzw. von T) ist  $N = |\lambda| = \sum_{i=1}^r \lambda_i$

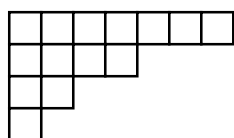
$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l(\lambda)}) = \text{Gestalt von T}$  , d.h.



ist Young-Diagramm von Gestalt (2,2).



ist Young-Diagramm von Gestalt (2,1,1,1).



ist Young-Diagramm von Gestalt (7,4,2,1).

Es gibt eine Bijektion zwischen den Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von  $A_r$  und den Young-Diagrammen der Länge  $\leq r$  .

$$[k_1, k_2, \dots, k_r] \leftrightarrow \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \mid \text{mit } \lambda_i \in \mathbb{N}_0, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0 \}$$

$$\leftrightarrow \{ \text{Young-Diagramm der Länge } \leq r \}$$

2) Genau so :

Die irreduziblen Darstellungen von  $C_n$  werden klassifiziert durch Young-Diagramme der Länge  $\leq n$  , wobei wieder

$$[k_1, k_2, \dots, k_r] \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \leftrightarrow \text{Young-Diagramm der Gestalt } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$$

3) **Tableau** zu Diagrammen

Allgemein : natürliche Zahl in die Kästchen des Tableaus eingesetzt.

Standart-Tableaux:

T von der Gestalt  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  und von Betrag  $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$

$l=l(\lambda)$  . Ein Standard-Tableau zu T ist ein Diagramm zu T , wo alle Zahlen  $1, 2, \dots, N$  , jede Zahl in genau ein Kästchen , in die Kästchen von T eingetragen sind ,so dass die Zahlen in jeder Reihe (von links nach rechts ) streng monoton und jeder Spalte (von oben nach unten ) streng monoton steigen .

Beispiele :

Gestalt  $(3,2,1,1)$  ,  $|\lambda| = N = 7$  , die Zahlen von 1 bis 7 beliebig .

1	3	4
2	5	
6		
7		

1	3	4
2	5	
7		
6		

1	2	3
5	4	
6		
7		

Standard-Tableau

keine Standard-Tableaux

Name : **Spalten- strikte** Tableaux

$T$  , Gestalt  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  , Betrag  $N$

Ins Diagramm Zahlen  $\in \{ 1, 2, \dots, N \}$  so eintragen, dass Monotonie in der Zeilen und streng Monotonie in der Spalten vorliegt.

Beispiele :

1) Alle Standard- Tableaux.

2)

1	1	1
2	2	
3		
4		

1	1	2
2	3	
4		
5		

Spalten-strikte Tableaux

#### (4a) Differenz-Diagramme

$T_\lambda$  Diagramm der Partition  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$

$T_\mu$  Diagramm der Partition  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s)$  mit  $\mu_i \leq \lambda_i$  ,  $s \leq r$

$\lambda = (4, 3, 3, 2, 1)$  ,  $\mu = (2, 2, 1, 1, 0)$

Zeichne  $\lambda$  , darin  $\mu$




$\lambda$

$\mu$

Differenz- Diagramm

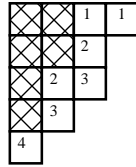
Dann ist  $\lambda / \mu =$  Diagramm , das übrig bleibt.

#### 4b) $\lambda / \mu$ - **Tableaux** ( Zahlen in Differenz - Diagramm )

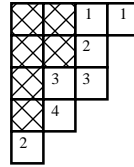
Insbesondere spalten-striktes  $\lambda / \mu$  - Tableau.

## Beispiele

1)



2)



Zeilen monoton , Spalten streng monoton .

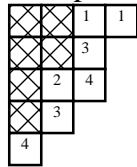
Zu  $\lambda / \mu$  - Tableau zugehöriges **Wort** ist

im Beispiel 1 : 1 1 2 3 2 3 4

im Beispiel 2 : 1 1 2 3 3 4 2

Generell : Eingetragene Zahlen Zeilenweise gelesen in jeder Zeile und zwar in jeder Zeile von rechts nach links hintereinander schreiben .

### Beispiel 3



zugehöriges Wort : 1 1 3 4 2 3 4

Zu einem Wort (Folge der Zahlen von N)  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$

" **Form** " des Wortes :  $(f_1, f_2, \dots, f_N)$  , wo  $f_i$  Anzahl der Ziffer  $i$  im Wort .

Beispiele :

1) Form des Wortes im Beispiel 1  $(f_1, f_2, \dots, f_7) = (2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$

2) Form des Wortes im Beispiel 2  $(f_1, f_2, \dots, f_7) = (2, 2, 2, 1, 0, 0, 0)$

3) Form des Wortes im Beispiel 3  $(f_1, f_2, \dots, f_7) = (2, 1, 2, 2, 0, 0, 0)$

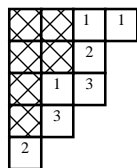
Ein Wort heißt **zulässig**  $\Leftrightarrow$  seine Form ist eine Partition ,

d.h. es ist  $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N$  .

Beispiele :

1) Beispiel 1, 2, 4 zulässig , Beispiel 3 nicht zulässig ( $f_2 < f_3$ ).

2) Beispiel 4.



Zugehöriges Wort : 1 1 2 3 1 3 2 , Form des Wortes :  $(3, 2, 2)$ .

Sei  $(a_1, a_2, \dots, a_N) = W$  ein Wort .

Für  $1 \leq d \leq N$  sei  $W_d$  das **d-te Anfangssegment**  $(a_1, a_2, \dots, a_d)$

Beispiele :

1) 6.te Anfangssegment im Beispiel 1 ist  $(1, 1, 2, 3, 2, 3)$

2) 6.te Anfangssegment im Beispiel 2 ist  $(1, 1, 2, 3, 3, 4)$

3) 6.te Anfangssegment im Beispiel 4 ist  $(1, 1, 2, 3, 1, 3)$

**Definition**

Ein Wort heißt **gut**  $\Leftrightarrow$  Für jedes  $d=1,2,\dots,N$  ist  $W_d$  zulässig .  
 ( Insbesondere  $W_N = W$  zulässig .)

Beispiele :

- 1) Beispiel 1 ist gut
- 2) Beispiel 2 ist nicht gut ,  $W_5$  ist nicht zulässig .
- 3) Beispiel 3 ist nicht gut ,  $W_3, W_4, W_6, W_7$  nicht zulässig .
- 4) Beispiel 4 ist nicht gut ,  $W_6$  nicht zulässig .

**Bezeichnung**

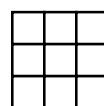
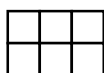
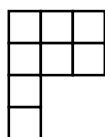
Ist  $f$  die Form des Wortes  $W$  , so heiße  $W$  ein **f-Wort** .

Beispiele von guten  $(2,2,1)$ -Worten

11223 , 12123 , 11232 , 12132 , 12312

Eine Partition heißt **spaltengerade**  $\Leftrightarrow$  Im Diagramm zu  $f$  haben alle Spalte eine gerade Anzahl von Kschen .

Beispiele :

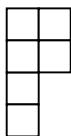
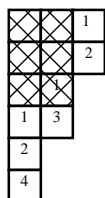


Spaltengerade

Nicht spaltengerade

Man kann betrachten f-Worte zu  $\lambda / \mu$  - Tableau , die gut und wo  $f$  spaltengerade ist .

Beispiel :  $\lambda = (3,3,2,2,1,1,0)$  ,  $\mu = (2,2,2,0,0,0,0)$



$f = (2,2,1,1)$  ,  $W = (1,2,3,1,2,4)$

$[0,0,2,0] = \Pi_3^2 \rightarrow \lambda = (2,2,2,0)$  kommt in  $[0,1,0,1,0,1,0]_{\downarrow C_4}$  von  $A_7$  vor .

5) Gegeben Partitionen  $\lambda \geq \mu$  (d.h.  $\mu_i \leq \lambda_i$  alle  $i$ ) Tableaux zu  $\lambda / \mu$   $l(\lambda) \leq 2n-1$ ,  $l(\mu) \leq n$ . Das zugehörige Wort  $W = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  heißt **erlaubt**  $\Leftrightarrow$  für alle ungeraden  $i = 2k+1$ ,  $k=0,1,2,\dots$ , die in  $W$  kommen, gilt:  $i$  taucht im Tableau  $\lambda / \mu$  in keiner späteren Zeile als in Zeile  $n+k$  auf. (d.h. 1 darf nur in den Zeilen 1 bis  $n$  auftreten, 3 darf nur in den Zeilen 1 bis  $n+1$  auftreten.)

Beispiel  $n=3$

1	1
2	2

1 ist bis drei erlaubt

1 ist nicht erlaubt

**Bemerkung 1**

Wenn  $l(\lambda) \leq n \Rightarrow$  jedes Wort erlaubt. (d.h. "erlaubt sein" ist keine zusätzliche Bedingung)

**SATZ 1.2 ( Branching - Rule  $(A_{2n-1})_{\downarrow C_n}$  )  $n \geq 2$**

Sei  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $A_{2n-1}$  mit zugehöriger Partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n-1})$ .

Sei  $\Pi$  eine irreduzible Darstellung von  $C_n$  mit zugehöriger Partition  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ .

(1)  $\Pi$  kommt bei der Einschränkung  $\rho_{\downarrow C_n}$  vor.  $\Leftrightarrow$  Es gibt ein spalten-

striktes Tableau zu  $\lambda / \mu$ , so dass das zugehörige Wort  $W$

- (i) gerade-spaltig
- (ii) gut
- (iii) erlaubt ist.

(2) Die Vielfachheit von  $\Pi$  in  $\rho_{\downarrow C_n}$  ist die Anzahl der spalten-

strikten Tableaux von  $\lambda / \mu$  mit den Eigenschaften (i),(ii), (iii).

**Bemerkung 2**

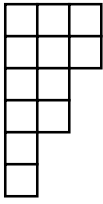
$f$  ist gerade-spaltig  $\Rightarrow |\lambda| - |\mu|$  gerade, d.h. nur solche  $\mu$  sind möglich für die  $|\mu|$  die gleiche Parität (gerade oder ungerade) wie  $|\lambda|$  hat.

**Bemerkung 3**

Die Eigenschaften strikt-spaltig für Tableau im Satz implizieren, dass  $\lambda \geq f(w)$  ist.



**Beispiel :**  $\rho = (0,1,0,1,0,1,0)$  von  $A_7$   
 $\lambda = (3,3,2,2,1,1,0)$  ,  $|\lambda| = N = 12$  und  $l(\lambda) = 6$



$\lambda$

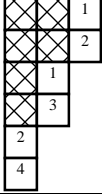
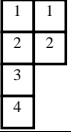
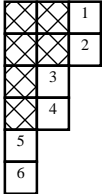

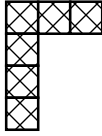
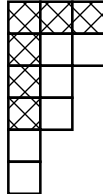
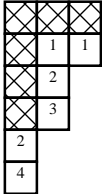
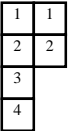


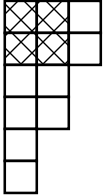
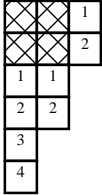
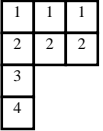
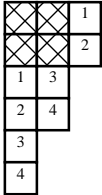
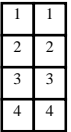
Bedingungen :  $\lambda > \mu$  ,  $|\lambda| - |\mu|$  gerade ,  $|\mu| \leq n$   
 Leer- Diagramm entspricht 0-Darstellung .

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux
$ \mu  = 12$	$\lambda = \mu$ weil $l(\lambda) \geq n$	kein Diagramm	kein Tableau
$ \mu  = 10$			 1 nicht erlaubt 1 ist in 5.te Zeile
$ \mu  = 8$			 nicht gerade spaltig

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux
	 $[0,2,0,1]$		
			 1 nicht erlaubt

	 $[0,0,0,2]$		
			 1 nicht erlaubt
	 $[1,0,1,1]$		
			 1 nicht erlaubt

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux																							
$ \mu  = 6$	 [0,3,0,0]		 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	1	2	2	3		4		1	1	2	2	3		4								
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										
	 [1,1,1,0]		 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	1	1	2	2		1	3		2			4			1	1	2	2	3		4	
1	1	1																								
2	2																									
1	3																									
2																										
4																										
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										
			 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	1	1	2	2		3			4			1	1	2	2	3		4				
1	1	1																								
2	2																									
3																										
4																										
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										
	 [0,0,2,0]		 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>2</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	1	1	2	2		1	3		2			4			1	1	2	2	3		4	
1	1	1																								
2	2																									
1	3																									
2																										
4																										
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										
			 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table> <span>nicht gut</span>	1	1	1	2	2		1	2		3			4										
1	1	1																								
2	2																									
1	2																									
3																										
4																										
	 [0,1,0,1]		 <table border="1" style="display: inline-table; margin-right: 20px;"> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td></td></tr> <tr><td>3</td><td></td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td><td></td></tr> </table> <table border="1" style="display: inline-table;"> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> </table>	1	1	1	2	2		1	2		3			4			1	1	2	2	3		4	
1	1	1																								
2	2																									
1	2																									
3																										
4																										
1	1																									
2	2																									
3																										
4																										

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux
			 
			 
	 <p>[2,0,0,1]</p>		 
	 <p>höchsten 4 Zeilen</p>		
$ \mu  = 4$	 <p>[0,2,0,0]</p>		 
			 

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux
	 $[0,0,0,1]$		
	 $[1,0,1,0]$		

$ \mu $	$\mu$	$\lambda / \mu$	spalten-strikte Tableaux
$ \mu  = 2$			      nicht gerade spaltig
$ \mu  = 0$	0- Darstellung		    

Ergebnis :

$$\begin{aligned}
 [0,1,0,1,0,1,0]_{\downarrow C_4} = & [0,2,0,1] + [0,0,0,2] + [1,0,1,1] + [0,3,0,0] + 2[1,1,1,0] \\
 & + [0,0,2,0] + 3[0,1,0,1] + 3[0,2,0,0] + 2[0,0,0,1] + 3[1,0,1,0] \\
 & + 3[0,1,0,0] + [2,0,0,1] + [0,0,0,0]
 \end{aligned}$$

Vom Beispiel nun zum uns interessierendes Fall  $\Pi_2$  von  $C_n$

**Behauptung :**

$\Pi_2$  von  $C_n$  ist schlecht  $n \geq 4$

Beweis :

$S(\Pi_2)$  von  $A_n$  ist bekannt .  $\Pi_2 (A_{2n-1})_{\downarrow C_n} = \Pi_2(C_n) + 1$

$$\Pi_k (A_{2n-1})_{\downarrow C_n} = \Pi_k + \Pi_{k-2} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S^k (\Pi_2, A_{2n-1})_{\downarrow C_n} &= S^k (\Pi_2 + 1, C_n) = \sum_{r=0}^k S^r (\Pi_2, A_{2n-1}) \otimes S^{k-r} (\Pi_0) \\ &= \sum_{r=0}^k S^r (\Pi_2, A_{2n-1}) \end{aligned}$$

Grob ist es :

$M(\Pi_2, A_{2n-1})_{\downarrow C_n} = M(\Pi_2, C_n)$  und

$S^k(\Pi_2, C_n) \subset S^k(\Pi_2, A_{2n-1}) \quad n \geq k$

Genau ist es :

$$\begin{aligned} S^k (\Pi_2, A_{2n-1})_{\downarrow C_n} - S^{k-1} (\Pi_2, A_{2n-1})_{\downarrow C_n} &= (S^k (\Pi_2, A_{2n-1}) - S^{k-1} (\Pi_2, A_{2n-1}))_{\downarrow C_n} \\ &= S^k (\Pi_2, C_n) \end{aligned}$$

Behauptung:

Für alle  $n \geq 3$  gilt :  $S(\Pi_2, A_{2n-1})$  enthält von  $C_n$

die  $\Pi_i \quad i = 2k \quad k=1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$ ,

die  $\Pi_1 \Pi_j \quad j = 2k+1 \quad k=1,2,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right]$  und


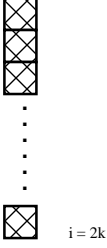
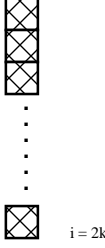
$\Pi_3^2$  im Fall  $r \geq 4$

Das sind  $n$  linear unabhängige Gewichte für  $r \geq 4$ .

Beweis :

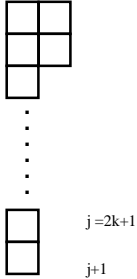
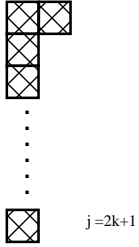
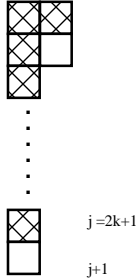
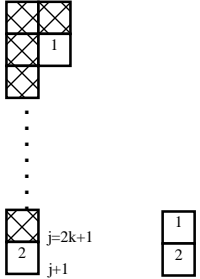
a)  $\lambda \in S(\Pi_2, A_{2n-1}) \Rightarrow \lambda$  gerade-spaltig .

Setze  $\lambda = \mu_i = \Pi_i \quad i = 2k \quad k=1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]$

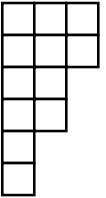
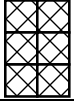
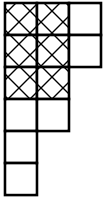
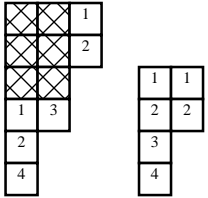
$\lambda$	$\mu$	$\lambda/\mu$	spalten-strikte Tableaux
			0- Tableau erfüllt alle Bedingungen

b)  $\Pi_{2k} (A_{2n-1})_{\downarrow C_n} = \Pi_{2k} + \Pi_{2k-2} + \dots + \Pi_2$

Setze  $\lambda = \Pi_2 \Pi_{j+1}$ , dann ist  $\mu = \Pi_1 \Pi_j$   $j = 2k+1$   $k=1,2,\dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

$\lambda$	$\mu$	$\lambda/\mu$	spalten-strikte Tableaux
			

c) Setze  $\lambda = \Pi_2 \Pi_4 \Pi_6$ , dann ist  $\mu = \Pi_3^2$ ,  $r \geq 4$ .

$\lambda$	$\mu$	$\lambda/\mu$	spalten-strikte Tableaux
			

Es gibt mindestens  $n$  linear unabhängige Gewichte, d.h.  $\dots$ . Also ist  $\Pi_2$  von  $C_n$  schlecht.

Bemerkung: Im Fall  $r=3$  kann man kein  $\mu = \Pi_3^2$  erhalten.



## § 2. Gute Darstellungen

In Paragraph 1 haben wir eine Liste von schlechten Darstellungen gegeben. Wir zeigen nun, dass dies alle schlechten irreduziblen Darstellungen waren, d.h. dass die restlichen irreduziblen Darstellungen alle gut sind.

### SATZ 2.1 ( Gute Darstellungen )

Sei  $L$  einfach und  $L \neq A_1$ .

Ist  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $L$ , so ist  $\rho$  gut, genau dann wenn  $\rho$  in der folgenden Liste ist.

- (i)  $A_r$  :  $\Pi_1$  und  $\Pi_r$ ,  $\Pi_2$  und  $\Pi_{r-1}$ ,  $r \geq 2$  ;  
 $\Pi_3$  von  $A_5$
- (ii)  $B_r$  :  $\Pi_1$ ,  $r \geq 2$  ;  
 $\Pi_r$  für  $r = 2,3,4$
- (iii)  $C_r$  :  $\Pi_1$ ,  $r \geq 3$  ;  
 $\Pi_2$  von  $C_3$
- (iv)  $D_r$  :  $\Pi_1$ ,  $r \geq 4$  ;  
 $\Pi_3$  und  $\Pi_4$  von  $D_4$ ,  $\Pi_4$  und  $\Pi_5$  von  $D_5$ ,  $\Pi_5$  und  $\Pi_6$  von  $D_6$
- (v)  $G_2$  :  $\Pi_1$
- (vi)  $F_4$  :  $\Pi_1$
- (vii)  $E_6$  :  $\Pi_1$  und  $\Pi_5$
- (viii)  $E_7$  :  $\Pi_1$

Dass alle irreduziblen Darstellungen von  $L$ , die nicht in der Liste von Satz 2.1 sind, schlecht sind, wurden in § 1 bewiesen. Es bleibt noch zu beweisen, dass alle in Satz 2.1 aufgelisteten irreduziblen Darstellungen gut sind.

Zum Beweis davon geben wir drei Varianten. Dazu und für spätere Beweise brauchen wir einige algebraische Vorbereitungen.

## Exkurs: Algebraische Strukturen im Zusammenhang mit $S(V) = C[V]$

Wie in der Notation sei  $\rho$  eine endlich dimensionale Darstellung von  $L$  mit Darstellungsraum  $V$ . Es sei  $S^k(\rho) = S^k(V)$  die  $k$ -te symmetrische Potenz und

$S(V) = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(V)$  sei die symmetrische Algebra von  $V$ . Ist  $\rho^*$  die kontragrediente

(duale) Darstellung zu  $\rho$  mit dem Dualraum  $V^*$  von  $V$  als Darstellungsraum,

so ist  $S(V^*)$  die Algebra der polynomialen Funktionen auf  $V$ .

Wie schon beim Exkurs in § 1 ( vor dem Kriterium 2 ) : Es sei  $G$  die einfach zusammenhängende komplexe Liegruppe mit Liealgebra  $L$ , aufgefasst als lineare algebraische Gruppe über  $C$ . Dann sind  $V$  und  $V^*$  ( besonders einfache )  $G$ -Varietäten und man kann die Theorie solcher  $G$ -Varietäten anwenden.

Z.B.  $S(V) = O(V^*)$ , wobei  $O(V^*)$  die  $C$ - Algebra der regulären Funktionen

auf der Varietät  $V^*$  bezeichnet. Wir schreiben bei dieser Sicht der Dinge  $S(V) = C[V]$  ( Bemerge : In der Literatur steht  $C[V]$  normalerweise für  $O(V)$

(statt für  $O(V^*)$  ), ein Unterschied , der für uns unerheblich ist , weil gilt

"  $\rho$  gut  $\Leftrightarrow \rho^*$  gut " )

Wir fassen auch die Theorie der Gewichte in die Sprache der Gruppen.

Seien  $T$  ein maximaler Torus ,  $B$  eine Boreluntergruppe von  $G$  mit  $T \subseteq B$ .

Wir identifizieren das Gewichtsgitter  $\Lambda$  von  $L$  mit dem Untergitter  $\Omega$  des Raums derjenigen Charaktere von  $B$  bzw. von  $T$  , die als Gewichte bei regulären

Darstellungen von  $G$  auftreten. Wie bisher ist  $\Omega^+ \equiv \Lambda^+$  das Monoid der Höchstgewichte

Die folgenden Informationen sind Gemeinwissen in der Invariantentheorie und z.B. aus [ Popov – Vinberg ] , [ Springer ] u.a. zu entnehmen.

1) Die graduierte Polynomalgebra  $C[V]$  ist ein ( lokal – endlicher )  $G$  –Modul.

Die Operation von  $G$  auf  $C[V]$  ist via Algebra – Automorphismen .

Wir sprechen daher von einer  $G$  – Algebra . Die  $G$  – Modulstruktur ist mit der Graduierung verträglich , d.h. die  $C^k[V]$  sind  $G$  – invariant.

2) Sei  $\lambda \in \Omega^+$  , sei  $C_\lambda[V]$  die Summe aller einfachen  $G$  – Untermoduln von

$C[V]$  mit  $\lambda$  als höchsten Gewicht . ( die sogenannte isotypische Komponente von  $C[V]$  von Typ  $\lambda$ . )

$C_\lambda[V]$  sind  $G$  – invariant und  $C[V] = \sum_{\lambda \in \Omega^+} C_\lambda[V]$  ist eine direkte Summe, liefert also

$\Omega^+$  – graduierte  $G$  – Modul – Struktur.

( 3 ) Sei  $I = C[V]^G$  der sogenannte Invariantenring von  $C[V]$  , d.h. der Untermodul

aller  $x \in C[V]$  mit  $gx = x$  für alle  $g \in G$ . (  $I$  ist der hauptsächliche Untersuchungsgegenstand der Invariantentheorie. )

Die  $C_\lambda[V]$  sind  $I$  – Untermoduln . Also ist

$$C[V] = \sum_{\lambda \in \Omega^+} C_\lambda[V] \quad \text{ein } \Omega^+ \text{ – graduiertes } I \text{ – } G \text{ – Modul.}$$

4)  $I$  und die  $C_\lambda[V]$  sind graduierte Untermoduln bzgl. der graduierten Struktur.

$C[V] = \sum_{k=0}^{\infty} S^k(V)$  ist eine direkte Summe. Also ist  $I = \sum_{k=0}^{\infty} I^k$  eine direkte Summe,

$I^k = I \cap S^k(V)$  und  $C_\lambda[V] = \sum_{k=0}^{\infty} C_\lambda^k[V]$  ist eine direkte Summe mit

$$C_\lambda^k[V] = C_\lambda[V] \cap S^k(V).$$

5) Manchmal ist  $C[V]$  ein freier  $I$ -Modul. Dann gibt es einen  $I$ - $G$ -Modul  $H \subset C[V]$  mit  $C[V] = I \otimes H$ .  $H$  ist graduiert, d.h.

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} H^k \text{ mit } H^k = H \cap C^k[V]. \text{ Es ist } C^k[V] = \sum_{s=0}^k I^s \otimes H^{k-s}.$$

Die  $C[V]$  wie hier in 5) heißen **kofrei**. Die kofreien  $C[V]$  sind in [Popov II] und [Schwarz II] klassifiziert. Ist  $C[V]$  kofrei, so ist  $I$  eine Polynomalgebra.

6)  $U \subset B$  sei eine maximale unipotente Untergruppe. Wir betrachten  $C[V]^U =$

"Ring der  $U$ -Invarianten".  $C[V]^U$  ist eine graduierte Unteralgebra von  $C[V]$ .

Auch  $C[V]^U$  ist endlich erzeugt.  $C[V]^U$  ist der von allen Höchstgewichtvektoren der irreduziblen Untermoduln von  $C[V]$  aufgespannte Unterraum.

Es ist  $I \subset C[V]^U$ . Ist  $C[V] = I \otimes H$ , so ist  $C[V]^U = I \otimes H^U$ .  $C[V]^U$  heißt manchmal auch **Algebra der Kovarianten** des  $G$ -Moduls  $V$ .

7) Ist  $C[V]$  kofrei, also  $I$  frei, so ist  $C[V]^U = C[u_1, u_2, \dots, u_d, v_1, v_2, \dots, v_s]$ ,

wo  $u_1, u_2, \dots, u_d$  freie homogene Erzeugende von  $I$  und  $v_1, v_2, \dots, v_s$  ein minimales Erzeugendensystem von  $H$  aus homogenen Elementen ist.

Ist  $C[u_1, u_2, \dots, u_d, v_1, v_2, \dots, v_s]$  freie Algebra, so determinieren die  $d, s, n_1, \dots, n_d, t_1, \dots, t_s, v_1, v_2, \dots, v_s$  die Algebra  $C[V]^U$  bis auf Isomorphie.

8) Um die von  $C[V]$  geerbte Graduierung in  $C[V]^U$  inhärent zu machen, schreiben wir

$$A := C[V]^U, \quad A^k := A \cap S^k(V). \text{ Dann ist } A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Ist  $C[V] = I \otimes H$ ,  $C[V]^U = C[u_1, u_2, \dots, u_d, v_1, v_2, \dots, v_s]$ , so sind  $u_i \in A^{n_i}$ ,  $v_i \in A^{t_i}$  wie in 7).

9) Die Unteralgebra  $A = C[V]^U$  erbt von  $C[V]$  auch die  $\Omega^+$ -Graduierung. Es ist

$$A = \sum_{\lambda \in \Omega^+} A_\lambda \quad \text{wo} \quad A_\lambda = A \cap C_\lambda[V] \text{ ist}$$

Insbesondere ist  $I = A_0$  ( $0 =$  das Nullgewicht aus  $\Omega^+$ ).

10) Schließlich : Die Graduierung aus 9) verträgt sich mit der Graduierung aus 8).

Man hat  $A = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\lambda \in \Omega} A_{\lambda}^k$  , wo  $A_{\lambda}^k = A^k \cap C_{\lambda}[V]$  ist .

11) Sei  $C[V] = I \otimes H$ . Man kann die Erzeugenden  $u_1, u_2, \dots, u_d \in I$  und  $v_1, v_2, \dots, v_s$  aus dem  $A_0^k$  wählen. Dann: Erzeugende  $u_1, u_2, \dots, u_d$  von  $I$  liegen in  $A_0^{n_i}$ . Erzeugende  $v_1, v_2, \dots, v_s$  von  $H$  liegen in wohlbestimmten

$$A_{\lambda_1}^{t_1}, A_{\lambda_2}^{t_2}, \dots, A_{\lambda_s}^{t_s}.$$

Ist  $A = C[u_1, u_2, \dots, u_d, v_1, v_2, \dots, v_s]$  frei in den Erzeugenden , so ist  $A$  vollständig bestimmt durch die Angabe der  $d, s, n_1, n_2, \dots, n_d, t_1, t_2, \dots, t_s, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ , und zwar bis auf die Isomorphie als  $\mathbb{N}_0$ - $\Omega$ -graduierete Algebra .

( Mit  $\mathbb{N}_0$ - Graduierung ist die Graduierung  $A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$  gemeint . )

### Beispiel

$\Pi_1$  von  $F_4$

$$d = 2 \quad s = 3, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 3; \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad t_3 = 3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_1, \quad \lambda_3 = \Pi_2$$

Dazu und weitere Beispiele später.

### 1. Beweisvariante

Wir benutzen die Ergebnisse aus [ Panyushev ]. Der dortige Rang  $r(x)$  ist für  $x = V_{\rho}$  nach Linearer Algebra gleich unserem Rang  $\hat{\lambda}^* = \text{Rang } \rho$ . Im dortigen Korollar 2(i) ist  $r(x)$  bestimmt als  $r(x) = \text{Rang } G - \text{Rang } G_z$ . Wir müssen noch das entsprechende  $G_z$  für unsere Darstellungsräume  $x = V_{\rho}, \rho$  aus der Liste der Kandidaten für gute

Darstellungen , bestimmen. Es stellt sich heraus :

Es sei  $G_u$  die kompakte Form der komplexen ( halb -) einfachen Gruppe  $G$  .

Sei  $H$  eine Hauptisotropiegruppe (im Sinne der topologischen Transformationsgruppen) des  $G$ -Raums  $V = V_{\rho}$  und  $G_z = H_C$  die reduktive Untergruppe von  $G$  mit  $H$  als

kompakte Form. Dann ist  $G_z = H_x$ . Insbesondere ist dann :

$$\text{Rang } \rho = \text{Rang } G_u - \text{Rang } H.$$

Der Beweis beruht auf Dichtigkeitsargumenten und sei hier weggelassen .

Diese Überlegungen erlauben es , zur Bestimmung von Rang  $\rho$  die Listen der Hauptisotropiegruppen bei den reellen irreduziblen Darstellungen von  $G_u$  zu benutzen, zu finden in Krämer [ I ] und Hsiang- Hsiang. Wir geben die Liste der  $H$  bei unseren Kandidaten , zusammen mit der Bestimmung von Rang  $\rho = \text{Rang } G_u - \text{Rang } H$ .

Für  $\rho =$

- 1)  $\Pi_1$  von  $A_r$ ,  $r \geq 2$   
 $H_x = \text{SU}(r)$  vom Rang  $r-1$   
 $\text{Rang } \lambda = r - (r-1) = 1$
- 2)  $\Pi_1$  von  $B_r$ ,  $r \geq 2$   
 $H_x = B_{r-1}$  ( $= \text{SO}(2r-1) \subseteq \text{SO}(2r+1)$ )  
 $\text{Rang } \lambda = 1$
- 3)  $\Pi_1$  von  $C_r$ ,  $r \geq 3$   
 $H_x = C_{r-1}$   
 $\text{Rang } \lambda = 1$
- 4)  $\Pi_1$  von  $D_r$ ,  $r \geq 4$   
 $H_x = D_{r-1}$   
 $\text{Rang } \lambda = 1$
- 5)  $\Pi_2$  von  $A_{2k}$ ,  $k \geq 2$   
 $H_x = \text{SU}(2)^k$   
 $\text{Rang } \lambda = k$
- 6)  $\Pi_2$  von  $A_{2k+1}$ ,  $k \geq 1$   
 $H_x = \text{SU}(2)^{k+1}$   
 $\text{Rang } \lambda = k$
- 7)  $\Pi_3$  von  $A_5$   
 $H_x = T_2$  (ein 2-dimensionaler Torus)  
 $\text{Rang } \lambda = 3$
- 8)  $\Pi_2$  von  $C_3$   
 $H_x = T_1$   
 $\text{Rang } \lambda = 2$
- 9)  $\Pi_3$  von  $B_3$   
 $H_x = A_2$   
 $\text{Rang } \lambda = 1$
- 10)  $\Pi_4$  von  $B_4$   
 $H_x = A_2$   
 $\text{Rang } \lambda = 2$
- 11)  $\Pi_5$  von  $D_5$   
 $H_x = A_3$   
 $\text{Rang } \lambda = 2$

12)  $\Pi_6$  von  $D_6$

$$H_x = \text{SU}(2)^3$$

$$\text{Rang } \lambda = 3$$

13)  $\Pi_1$  von  $G_2$

$$H_x = A_1$$

$$\text{Rang } \lambda = 1$$

14)  $\Pi_1$  von  $F_4$

$$H_x = A_2$$

$$\text{Rang } \lambda = 2$$

15)  $\Pi_1$  von  $E_6$

$$H_x = D_4$$

$$\text{Rang } \lambda = 2$$

16)  $\Pi_1$  von  $E_7$

$$H_x = D_4$$

$$\text{Rang } \lambda = 3$$

Ergebnis: Alle Kandidaten sind gut . Es ist sogar  $\text{Rang } \rho$  genau bestimmt.

## 2. Beweisvariante

Diesmal benutzen wir die Ergebnisse aus [Brion] . Man stellt fest , dass unsere Liste Teil der Liste im dortigen Teil III ist , welche diejenigen  $\rho$  angibt, bei denen  $C[V_\rho]^U$  eine Polynomialgebra ist .

In dieser Liste von Brion wird auch der Typ und der Grad der Erzeugenden angegeben . Insbesondere zeigt sich : Für alle  $\rho$  aus unserer Liste der Kandidaten für gute Darstellungen ist  $\text{Rang } \rho < \text{Rang } L$ , d.h. alle diese  $\rho$  sind tatsächlich gut.

Das Beispiel  $\Pi_1$  von  $F_4$  : Wie schon am Ende des Abschnitts über

" Algebraische Strukturen im Zusammenhang mit  $S(V)$  " angegeben gibt es

bei diesem  $\rho$  außer zwei Erzeugenden aus  $C[V]^G$  noch zwei Erzeugenden von Typ  $\Pi_1$  ( eines in  $C^1[V]$  , das andere in  $C^2[V]$  ) und ein Erzeugendes vom Typ  $\Pi_2$  in  $C^3[V]$ .

Der Rang ist also 2.

Die Arbeit von Brion beruht auf technisch anspruchsvollem Umgehen mit der

Poincaré-Reihe von  $C[V]^U$  , in deren Formulierung die  $\text{INx}\Omega^+$  - Graduierung

von  $C[V]^U$  eingeht. Wir wollen deshalb noch in einer 3. Variante den Satz 2.1 soweit wie möglich mit Darstellungstheorie beweisen.

### 3. Beweisvariante

Die Überlegungen beruhen in vielen Fällen auf der direkten Ausreduzierung der  $S^n(\rho)$ .

Auch wird folgende **Grund-Tatsache** benutzt:

Ist die Hauptisotropiegruppe  $K$  von  $V_\rho$  reduktiv, so kommen in  $S(V_\rho)$  genau diejenigen irreduziblen Komponenten von  $G$  vor, die Fixpunkte unter  $K$  haben. Siehe z.B.

Proposition 4.6 in Schwarz[ I ]. Wir gehen die einfachen  $L$  bzw.  $G$  der Reihe nach durch .

TATSACHE 2.1 ( $A_r$ )

Sei  $L \cong A_r$   $r > 1$  und  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $L$

1)  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n$  für alle  $n \geq 1$

Also : Für  $r \geq 2$  sind  $\Pi_1$  und  $\Pi_r = \Pi_1^*$  gut

2) In  $S(\Pi_2)$  ,  $r = 2k$  oder  $r = 2k+1$   $k \geq 1$  kommen genau diejenigen  $\lambda$  vor ,

die vom Typ  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}$  sind ,  $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}_0$  .

Also : Rang  $\Pi_2$  ist  $k$  und  $\Pi_2$  ist gut .

3) Sei  $L \cong A_5$   $\rho = \Pi_3$

In  $S(\Pi_3)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor ,die vom Typ

$\lambda = \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_2} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_3}$  sind ,  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}_0$  .

Also ist Rang  $(\Pi_3$  von  $A_5) = 3$  und  $\Pi_3$  von  $A_5$  ist gut .

Beweis :

1. Bekannte Dimensionsformeln liefern  $\dim \Pi_1^n = \dim S^n(V_{\Pi_1})$ . Daraus  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n$  .

Nach Kontragradienz :  $S^n(\Pi_r) = \Pi_r^n$ . Also : Rang  $\Pi_1 = 1$  und  $\Pi_1$  ist gut für  $r \geq 2$ .

2. Die Fälle  $r = 2k$  und  $r = 2k+1$  sind etwas verschieden, gehören aber zusammen.

Für  $r = 2k+1$  ist die Hauptisotropiegruppe  $C_{r+1}$  , also reduktiv , und unser Argument über die Fixpunkte von  $C_{r+1}$  greift. Insgesamt hat man folgende Bemerkungen .

Dabei nennen wir ein irreduzibles  $\lambda$  von  $A_r$  " gerade " , wenn  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}$  ist.

(i) Die klassische Ausreduzierung  $A_r \downarrow_{A_{r-1}}$  ,  $r \geq 3$  , liefert : Ist  $\lambda$  als Darstellung

von  $A_r$  gerade , so sind alle Komponenten in  $\lambda \downarrow_{A_{r-1}}$  gerade.

(ii) Jede gerade Komponente von  $A_{2k}$  kommt bei Ausreduzierung einer entsprechenden geraden Komponente von  $A_{2k+1}$  vor.

(iii) Es ist  $(\Pi_2$  von  $A_{2k}) \downarrow_{A_{2k-1}} = (\Pi_2$  von  $A_{2k-1}) + 1$

Also ist  $S^n(\Pi_2$  von  $A_{2k}) \downarrow_{A_{2k-1}} = \sum_{m=0}^n S^m(\Pi_2$  von  $A_{2k-1})$  .

(iv) Die Hauptisotropiegruppe von  $\Pi_2$  von  $A_{2k+1}$  ist  $C_{k+1}$ . Aus der Tabelle 1 in Krämer [VI], Fall  $(G,H) = (SU(2k+2), C_{k+1})$  entnimmt man: Genau die geraden Darstellungen von  $A_{2k+1}$  haben Fixpunktmenge (in diesem Fall 1-dimensionale) unter  $C_{k+1}$ . Aus all dem ergibt sich die Aussage 2 der Tatsache.

Für  $r=2k+1$  ist das gerade die Bemerkung (iv) zuvor wegen der Grundtatsache.

Für  $r=2k$  ergibt sich die Behauptung leicht unter Benutzung von (i), (ii), (iii) und (iv).

3. Die Hauptisotropiegruppe von  $\Pi_3$  von  $A_5$  ist  $A_2 \times A_2$ . Die Tabelle 1 in Krämer [VI]

besagt im Falle  $(G, H) = (SU(6), S(U(3) \times U(3)))$ : Genau die Komponenten

$\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_4} \Pi_5^{m_5}$ , d.h. diejenigen, deren höchstes Gewicht Produkt von

$\Pi_1 \Pi_5, \Pi_2 \Pi_4, \Pi_3$  ist, haben Fixpunkte unter  $A_2 \times A_2 = SU(3) \times SU(3)$ .

Der Rang ist 3 und  $\Pi_3$  von  $A_5$  ist gut.

Anmerkung: In der besagten Tabelle ist das dritte Erzeugende  $\Pi_3^2$  statt  $\Pi_3$ . Das liegt

darin, dass  $\Pi_3$  zwar Fixpunkte unter  $SU(3) \times SU(3)$  hat, nicht aber unter dem

1-dimensionalen Zentrum von  $SU(3) \times SU(3)$ . Das wird erst fix unter  $\Pi_3^2$ .

## TATSACHE 2.2 ( $B_r$ )

Sei  $L = B_r$   $r \geq 2$  und  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $B_r$ .

$$1. \quad S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist  $\Pi_1$  von  $B_r$  gut für alle  $r \geq 2$

2. Sei  $L \cong B_2$

$$S^n(\Pi_2) = \Pi_2^n$$

Also ist  $\Pi_2$  von  $B_2$  gut.

3. Sei  $L \cong B_3$

$$S^n(\Pi_3) = \Pi_3^n + \Pi_3^{n-2} + \Pi_3^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_3 & n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist  $\Pi_3$  von  $B_3$  gut.

4. Sei  $L \cong B_4$

In  $S(\Pi_4)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$$\lambda = \Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1} \text{ sind, } m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_4 \text{ von } B_4) = 2$  und  $\Pi_4$  von  $B_4$  ist gut.



Beweis :

$$(1) \text{ Es ist } S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & n \text{ ungerade} \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

Der Rang ist also 1 und  $\Pi_1$  von  $B_r$  ist gut. Die Formel ist klassisch ( Beweis etwa mit Weylscher Dimensionsformel und Dimensionsvergleich. ).

(2)  $\Pi_2$  von  $B_2$  entspricht  $\Pi_1$  von  $C_2$ . Man weiß  $S^n(\Pi_1 \text{ von } C_2) = \Pi_1^n$   
(s. auch Tatsache 2.3)

(3) Sei  $L = B_3$  und  $\rho = \Pi_3$ . Wir behaupten :

$$\text{Es ist } S^n(\Pi_3) = \Pi_3^n + \Pi_3^{n-2} + \Pi_3^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Beweis durch Induktion über  $n$ . Es ist genüg offenbar, zu zeigen, dass  $\dim S^n \Pi_3 - \dim S^{n-2} \Pi_3 = \dim \Pi_3^n$  ist.

Man rechnet nur direkt nach, dass beide Seiten gleich

$$\frac{1}{360} (k+1)(k+2)(k+3)^2(k+4)(k+5) \text{ sind.}$$

$S^n(\Pi_3)$  wird von  $\Pi_3$  erzeugt,  $\text{Rang}(\Pi_3 \text{ von } B_3) = 1$  und  $\Pi_3$  von  $B_3$  ist gut.

(4) Die Hauptisotropiegruppe von  $B_4$  bei  $\Pi_4$  ist  $\text{Spin}(7) \cong B_3$ . Wir zeigen :  
Genau die Komponenten des Typs  $\Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$  haben Fixpunkte unter  $\text{Spin}(7)$ :

### TATSACHE 2.2.1

Wir betrachten  $H \cong \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8) \cong D_4$ .

Die Verzweigung  $\lambda_{\downarrow H}$  von Darstellungen  $\lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_4}$  von  $D_4$  auf die

Untergruppe  $H \cong B_3$  funktioniert folgendermaßen :

Wir bilden  $\tilde{\lambda} = \Pi_1^{m_4} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_1}$  ( d.h. vertauschen  $m_1$  und  $m_4$  ) und bilden dann die übliche Verzweigung  $\tilde{\lambda}_{\downarrow \text{SO}(7)}$  von  $\tilde{\lambda}$  auf das übliche  $B_3 \cong \text{SO}(7) \subset \text{SO}(8)$ .

### TATSACHE 2.2.2

Wir betrachten  $H \cong \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8) \subset \text{SO}(9) \cong B_4$ .

Die Einschränkung  $\Pi_{\downarrow H}$  von irreduziblen Darstellungen  $\Pi = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_4}$

von  $B_4$  auf  $H \cong B_3$  erhält man auf folgende Weise :

1) Wir bilden die übliche Verzweigung  $\Pi_{\downarrow \text{SO}(8)=D_4}$

2) Wir beschränken alle irreduziblen Komponenten  $\lambda$  dieser Verzweigung weiter auf  $H \cong B_3$  nach dem Verfahren von Tatsache 2.2.1. Daraus ergibt sich :

## SATZ 2.2

Von den Darstellungen  $\Pi = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_4}$  von  $B_4$  haben genau diejenigen Fixpunkte unter  $H \cong \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8) \subset \text{SO}(9) \cong B_4$ , bei denen  $m_2 = m_3 = 0$  ist. Die Fixpunktmenge von  $H$  ist dann 1-dimensional.

**Beweis**

Nach der klassischen Ausreduzierung  $\text{SO}(8) \downarrow \text{SO}(7)$  weiß man, dass genau die Darstellungen der Form  $\lambda = \Pi_4^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  von  $D_4$  Fixpunkte unter  $\text{SO}(7) \subset \text{SO}(8)$  haben mit 1-dimensionaler Fixpunktmenge. Aus der Tatsache 1 folgt dann: Genau die Darstellungen

$\lambda = \Pi_4^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  von  $D_4$  haben Fixpunkte unter  $H \cong \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(8)$ , und zwar weiter mit 1-dimensionaler Fixpunktmenge.

Also Tatsache 2.2.2: Genau diejenigen Darstellungen von  $\Pi$  von  $B_4$  haben Fixpunkte unter  $H \cong \text{Spin}(7) \subset \text{SO}(9) \cong B_4$ , bei denen nach Ausreduzierung auf  $D_4 \cong \text{SO}(8) \subset \text{SO}(9) \cong B_4$  irreduzible Komponenten von Typ  $\lambda \approx \Pi_4^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  von  $D_4$  vorkommen. Es ist die Dimension der Fixpunktmenge gleich der Anzahl solcher Komponenten.

Es bleibt, die Ausreduzierung von  $B_4$  auf  $D_4$  zu betrachten. Das geht so:

Es sei  $\Pi = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \Pi_4^{m_4}$ . Wir betrachten

$$\left( \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5 \right) = \left( m_1 + m_2 + m_3 + \frac{m_4}{2}, m_2 + m_3 + \frac{m_4}{2}, m_3 + \frac{m_4}{2}, \frac{m_4}{2}, -\frac{m_4}{2} \right)$$

und alle Tupel  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , wo alle  $p_i$  gleichzeitig mit der  $\mu_i$  entweder ganz- oder halbzahlig sind und wo  $\mu_1 \geq p_1 \geq \mu_2 \geq p_2 \geq \mu_3 \geq p_3 \geq \mu_4 \geq p_4 \geq |\mu_5|$  sind.

Jedem  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  entspricht eine  $D_4$ -Komponente vom Typ  $[p_1 - p_2, p_2 - p_3, p_3 - p_4, 2p_4]$ . Sie ist der Typ  $\Pi_4^k$  genau dann, wenn  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$  ist. Solch ein Typ kommt genau dann vor, wenn

$$m_2 + m_3 + \frac{m_4}{2} = \frac{m_4}{2}, \text{ d.h. wenn } m_2 = m_3 = 0 \text{ ist. In einem solchen Fall}$$

$(m_2 = m_3 = 0)$  gibt es genau ein Tupel mit  $p_1 = p_2 = p_3 = p_4$ ,

nämlich das Tupel  $\left( \frac{m_4}{2}, \frac{m_4}{2}, \frac{m_4}{2}, \frac{m_4}{2} \right)$ . Damit ist der Satz 2.2 bewiesen.

TATSACHE 2.3 ( $C_r$ )

Sei  $L \cong C_r$   $r \geq 3$  und  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $C_r$ .

1.  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n$  für alle  $n \geq 1$   
Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } C_r) = 1$  und  $\Pi_1$  von  $C_r$  ist gut.
2.  $L \cong C_3$ ,  $\rho = \Pi_2$   
In  $S(\Pi_2)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ  $\lambda = \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_2}$  sind,  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ .  
Also ist  $\text{Rang}(\Pi_2 \text{ von } C_3) = 2$  und  $\Pi_2$  von  $C_3$  ist gut.

- (1) Klassisch :  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n$
- (2) Die Hauptisotropiegruppe bei  $\Pi_2$  von  $C_3$  ist  $A_1 \times A_1 \times A_1$ . (Elashvili, p 47)

Bei diesem Beispiel geben wir ausführliche Argumente.

**Bestimmung der Darstellungen von  $C_3$  mit Fixpunkten unter  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$**

Wir benutzen folgende Schreibweise :  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3}$  für die irreduzible Darstellung von  $C_3$ .

Behauptung : Genau dann, wenn  $m_1 = m_3$  ist, gibt es Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$ . Die Fixpunktmenge ist dann  $(m_2 + 1)$ -dimensional.

Beweis der Behauptung :

Es gibt  $A_1 \oplus A_1 \subset C_2$  als Untergruppe maximalen Ranges. Wir betrachten die Inklusionen  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 \subset A_1 \oplus C_2 \subset C_3$ .

1) Bestimmung der Darstellungen  $\Pi_1^{k_1} \Pi_2^{k_2}$  von  $C_2$ , welche Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1$  haben :

$A_1 \oplus A_1 \subset C_2$  ist dasselbe wie  $A_1 \oplus A_1 \subset B_2$  und lokal isomorph zu  $SO(4) \subset SO(5)$ . Man weiß bereits : Unter den Darstellungen  $\Pi_1^{k_1} \Pi_2^{k_2}$  von  $B_2 \cong SO(5)$  haben genau die Darstellungen  $\Pi_1^{k_1}$  (d.h.  $k_2 = 0$ ) Fixpunkte unter  $SO(4) \cong A_1 \oplus A_1$ . Die Fixpunktmenge ist 1-dimensional. Beim Identifizieren von  $C_2$  mit  $B_2$  kehrt sich die Nummerierung der Indizes der fundamentalen Darstellungen um :  $\Pi_2 \leftrightarrow \Pi_1$ . Das ergibt :

Von den Darstellungen  $\Pi_1^{k_1} \Pi_2^{k_2}$  von  $C_2$  haben genau die Darstellungen  $\Pi_2^{k_2}$  (d.h.  $k_1 = 0$ ) Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1$ . Die Fixpunktmenge ist 1-dimensional.

2) Wir nehmen folgende Ausreduzierung vor : Die Änderung der Schreibweise der höchsten Gewichte ergibt : statt der Monome in der fundamentalen Darstellung werden die entsprechenden "Signaturen" angegeben.

Für  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \dots \Pi_n^{m_n}$  von  $C_n$  schreiben wir die Partition:  $\langle \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n \rangle$   
 $= \langle m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n, m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n, \dots, m_{n-1} + m_n, m_n \rangle$

Z.B. Die Darstellungen  $\Pi_2^k$  von  $C_2$  sind genau die mit der Signatur  $\langle k, k \rangle$ .

Wir untersuchen die Ausreduzierung von  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3}$  von  $C_3$  auf  $A_1 \oplus C_2$  und  $C_2$ . (Siehe § 130 von D.P Zelobenko: Compact Lie Groups and Their Representations).

Die Ausreduzierung  $C_3 \downarrow_{C_2}$  :

Setze  $\langle m_1+m_2+m_3, m_2+m_3, m_3 \rangle =: \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$  und bilde

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 = 0 \\ & p_1 & p_2 & p_3 \\ & & q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

mit  $\mu_i \geq p_i \geq \mu_{i+1}$   $i=1,2,3$  und  $p_1 \geq q_1 \geq p_2 \geq q_2 \geq p_3$  alle  $\mu_i, p_i, q_i$  ganze Zahlen  $\geq 0$ .

Die irreduziblen Komponenten von  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} \downarrow_{C_2}$  stehen in 1-1- deutiger

Beziehung zu den Schemata (\*). Dem Schema (\*) ist dabei die Darstellung

$\langle q_1, q_2 \rangle \cong \Pi_1^{q_1-q_2} \Pi_2^{q_2}$  von  $C_2$  zugeordnet.

Bemerke : Solch eine  $C_2$  - Komponente hat nach "(1)" Fixpunkte unter

$A_1 \oplus A_1$  genau dann, wenn  $q_1 - q_2 = 0$ , d.h.  $q_1 = q_2$  ist.

3) Studiert werden müssen also die Schemata (\*) oben, bei denen  $q_1=q_2$  ist.

Es ist dann notwendigerweise  $q_1 = p_2 = q_2$ . Untersucht werden muss, wie

sich diese Darstellungen zu  $A_1 \oplus C_2$  - Darstellungen gruppieren und wann

eine  $A_1 \oplus C_2$  Komponente vorkommt, bei der  $A_1$  trivial operiert.

Bei einer solchen  $A_1 \oplus C_2$ -Komponente hat dann nämlich  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$  Fixpunkte.

(Dazu siehe Zelobenko).

T sei ein maximaler Torus in  $A_1$  von  $A_1 \oplus C_2$ . Wir betrachten  $T \oplus C_2$  und

bezeichnen die Gewichte von T mit  $s \in Z$ . Nach Zelobenko repräsentiert

das Schema (\*) oben eine  $T \oplus C_2$ - Darstellung mit " Signatur "  $\langle s | q_1, q_2 \rangle$ , wo

$$s =: 2(p_1 + p_2 + p_3) - (q_1 + q_2) - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \quad (**)$$

In dieser Schreibweise zerfällt z.B. eine irreduzible Darstellung von  $A_1 \oplus C_2$

von Typ  $\Pi^k \otimes \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2}$  in

$\langle k | m_1+m_2, m_2 \rangle + \langle k-2 | m_1+m_2, m_2 \rangle + \dots + \langle -k | m_1+m_2, m_2 \rangle$

Die Darstellungen von  $A_1 \oplus C_2$ , die Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$  haben, sind

genau dann diejenigen vom Typ  $\Pi^0 \Pi_2^q$ . Eingeschränkt auf  $T \oplus C_2$ , haben sie

die " Signatur "  $\langle 0 | q, q \rangle$ .

4) Die Untersuchung der  $T \oplus C_2$  - Signaturen bei den  $C_2$  Komponenten

erfolgt mit Hilfe des folgenden Schemas

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 = 0 \\ & p_1 & p_2 & p_3 \\ & & q_1 & q_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Nach der Formel (\*\*) ist dann ( $q_1 = q_2 = p_2$ ):

$$s = 2p_1 + 2p_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) \quad (***)$$

Es ist  $p_2 = q$  fest und  $p_1$  variiert von  $\mu_2$  zu  $\mu_1$ ,  $p_3$  variiert von 0 bis  $\mu_3$ .  
 Eine Analyse von  $s$  in ( \* \* \* ) ergibt :  
 Das kleinste  $s$  liegt vor bei  $p_1 = \mu_2$  und  $p_3 = 0$ . Es ist dann

$$s_{\min} = -\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = -m_1 - m_3$$

Das größte  $s$  liegt vor bei  $p_1 = \mu_1$  und  $p_3 = \mu_3$ . Es ist dann

$$s_{\max} = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = m_1 + m_3 = -s_{\min}$$

Die übrigen Gewichte  $s$  liegen dazwischen und haben die gleiche Parität wie  $s_{\max}$  und  $s_{\min}$ .

Hält man  $p_3$  fest und variiert man  $p_1$  von  $\mu_2$  bis zu  $\mu_1$ , so erhält man die T- Signaturen :

$$s = r = 2p_3 - \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 2p_3 - m_1 - m_3$$

$$\begin{array}{ccc} r+2 & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \downarrow \text{ immer um 2 ansteigen} \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \\ r+2(\mu_1 - \mu_2) & = & 2p_3 + m_1 - m_3 \end{array}$$

Lässt man noch  $p_3$  von 0 bis  $\mu_3 = m_3$  laufen, so erhält man für die  $s$  das folgende Schema, wobei wir den Fall  $m_1 \geq m_3$  beschreiben :

				$m_1 + m_3$
				·
				·
		$m_1 - m_3 + 4$	.....	·
	$m_1 - m_3 + 2$	$m_1 - m_3 + 2$	.....	·
$m_1 - m_3$	$m_1 - m_3$	$m_1 - m_3$	.....	·
·	·	·	.....	·
·	·	·	.....	·
·	·	·	.....	·
·	·	·	.....	·
$-m_1 + m_3$	$-m_1 + m_3$	$-m_1 + m_3$	.....	$-m_1 + m_3 + 2$
·	·	·	.....	·
·	·	·	.....	·
·	·	·	.....	·
$-m_1 - m_3 + 4$	$-m_1 - m_3 + 4$	$-m_1 - m_3 + 4$	.....	·
$-m_1 - m_3 + 2$	$-m_1 - m_3 + 2$	$-m_1 - m_3 + 2$	.....	·
$-m_1 - m_3$	$-m_1 - m_3$	$-m_1 - m_3$	.....	·
$p_3 = 0$	$p_3 = 1$	$p_3 = 2$	.....	$p_3 = \mu_3 = m_3$

Das Multiplizitätenschema ist demnach :

( M2 )	Gewicht von T	Multiplizität
	$m_1 + m_3$	1
	$m_1 + m_3 - 2$	2
	.	.
	.	.
	$m_1 - m_3$	$m_3$
	$m_1 - m_3 - 2$	$m_3$
	.	.
	.	.
	$-m_1 + m_3$	$m_3$
	$-m_1 + m_3 - 2$	$m_3 - 1$
	.	.
	.	.
	$-m_1 - m_3 + 2$	2
	$-m_1 - m_3$	1

Das entspricht einer  $A_1$  - Darstellung vom Typ

$$\Pi^{m_1+m_3} + \Pi^{m_1+m_3-2} + \dots + \Pi^{m_1-m_3} \quad \text{falls } m_1 \geq m_3$$

Man sieht :  $\Pi^0$  kommt vor dann und nur dann , wenn  $m_1 = m_3$  ist ,  
und dann ist die Vielfachheit von  $\Pi^0$  gleich 1.

Analog kann man den Fall  $m_1 \leq m_3$  behandeln . Man erhält ein zu ( M1)  
analoges Signaturschema , wenn man bei den Spalten  $p_1$  fix lässt ,  
 $\mu_2 \leq p_1 \leq \mu_1 = \mu_2 + m_1$  und  $p_3$  von 0 bis  $\mu_3 = m_1$  laufen lässt .

Das Multiplizitätenschema ist (  $m_1 \leq m_3$  ) :

Gewicht	Multiplizität
$m_1 + m_3$	1
$m_1 + m_3 - 2$	2
.	.
.	.
.	.
$m_3 - m_1$	$m_1$
.	.
.	.
.	.
$m_1 - m_3$	$m_1$
$m_1 - m_3 - 2$	$m_1 - 1$
.	.
.	.
.	.
$-m_1 - m_3$	1

Das entspricht einer  $A_1$  - Darstellung des Typs

$$\Pi^{m_1+m_3} + \Pi^{m_1+m_3-2} + \dots + \Pi^{m_3-m_1} \quad \text{falls } m_1 \leq m_3 .$$

$\Pi^0$  kommt wieder vor nur dann , wenn  $m_3 = m_1$  ist .

Ergebnis :

Ein festes  $p_2 = q$  liefert folgende  $A_1 \oplus C_2$  - Komponenten  $\Pi^k \otimes \Pi_2^q$  :

$$\Pi^{m_1+m_3} . \Pi_2^q + \Pi^{m_1+m_3-2} . \Pi_2^q + \dots + \Pi^{m_1-m_3} . \Pi_2^q \quad \text{falls } m_1 \geq m_3 \text{ bzw.}$$

$$\Pi^{m_1+m_3} . \Pi_2^q + \Pi^{m_1+m_3-2} . \Pi_2^q + \dots + \Pi^{m_3-m_1} . \Pi_2^q \quad \text{falls } m_1 \leq m_3$$

Es kommt  $\Pi^0 . \Pi_2^q$  genau dann vor , wenn  $m_1 = m_3$  , und zwar mit der Vielfachheit 1. Da  $p_2$  die verschiedenen Werte zwischen  $\mu_2$  und  $\mu_3$  annehmen kann, ergeben sich insgesamt  $\mu_2 - \mu_3 + 1 = m_2 + 1$  Werte .

Es gilt :

Ist  $m_1 = m_3$  , so hat man als Komponenten von  $A_1 \oplus C_2$  , welche Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$  sind , gerade die Komponenten

$$\Pi^0 . \Pi_2^{m_3} , \Pi^0 . \Pi_2^{m_3+1} , \dots , \Pi^0 . \Pi_2^{m_2+m_3}$$

Das sind  $m_2+1$  Komponenten mit jeweils 1- dimensionalen Fixpunkten . Insgesamt ist folglich die Dimension der Fixpunktmenge von  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$  gleich  $m_2+1$  .

Ist  $m_1 \neq m_3$  , so gibt es keine Komponente des Typs  $\Pi^0 . \Pi_2^q$  , also keine Fixpunkte unter  $A_1 \oplus A_1 \oplus A_1$  .

TATSACHE 2.4 ( $D_r$ )

Sei  $L \cong D_r$ , für  $r \geq 4$  und  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $D_r$ .

$$1 \quad S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } D_r) = 1$  und  $\Pi_1$  von  $D_r$  ist gut für  $r \geq 4$

2 Sei  $L \cong D_4$   $\rho = \Pi_3$

$$S^n(\Pi_3) = \Pi_3^n + \Pi_3^{n-2} + \Pi_3^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also sind  $\Pi_3$  und  $\Pi_4 = \Pi_3^*$  gut.

3  $L \cong D_5$  und  $\rho = \Pi_4$

In  $S(\Pi_4)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$$\lambda = \Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1} \text{ sind, } m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0.$$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_4 \text{ von } D_5) = 2$ .  $\Pi_4$  und  $\Pi_5 = \Pi_4^*$  von  $D_5$  sind gut.

4  $L \cong D_6$  und  $\rho = \Pi_6$

In  $S(\Pi_6)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$$\lambda = \Pi_6^{m_1+m_2} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4} \text{ sind, } m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}_0$$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_6 \text{ von } D_6) = 3$ .  $\Pi_6$  und  $\Pi_5 = \Pi_6^*$  von  $D_6$  sind gut.

Beweis (1)

Der Fall  $L = D_r$  und  $\rho = \Pi_1$  entspricht dem entsprechenden Fall für  $B_r$ . Es ist

$$S^n \Pi_1 = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_3 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \Pi_0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Man beweist das durch Induktion über  $n$  mit Hilfe der Welyschen Dimensionsformel.

$S^n(\Pi_1)$  wird von  $\Pi_1$  erzeugt und  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } D_r) = 1$ .  $\Pi_1$  von  $D_r$  ist gut.

Beweis (2)

Es gibt äußere Automorphismen  $\sigma_s$ ,  $s = 4, 5$ , von  $D_5$  mit  $\Pi_1^\sigma = \Pi_s$ .

Also ist  $S(\Pi_s) = (S(\Pi_1))^\sigma$ . Aus (1) folgen dann die behaupteten Aussagen für  $\Pi_4$  und  $\Pi_5$

Beweis (3)

Man bemerkt folgendes :

(i) Es gilt  $(\Pi_4 \text{ von } D_5)_{\downarrow B_4} = \Pi_4 \text{ von } B_4$ .

Also ist  $S^n(\Pi_4 \text{ von } D_5)_{\downarrow B_4} = S^n(\Pi_4 \text{ von } B_4)$ .

Aus (4) in Tatsache 2.2 ergibt sich somit: In  $S(\Pi_4 \text{ von } D_5)_{\downarrow B_4}$  treten genau die

Komponenten von  $B_4$  auf, die vom Typ  $\Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$  sind.



(ii) Die klassische Ausreduzierung  $D_{5 \downarrow B_4}$  zeigt (s. etwa [Zelobenko], § 129) :

Eine Darstellung  $\lambda$  von  $D_5$  hat ausschließlich Komponenten vom Typ  $\Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$  bei Einschränkung auf  $B_4 \Leftrightarrow \lambda$  ist vom Typ  $\Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$  oder vom Typ  $\Pi_1^{m_2} \Pi_5^{m_1}$ .

(iii) In  $S^1(\Pi_4$  von  $D_5)$  gibt es die Komponente  $\Pi_4$ , in  $S^2(\Pi_4$  von  $D_5)$  gibt es die Komponente  $\Pi_1$ . Als treten in  $S(\Pi_4$  von  $D_5)$  alle Komponenten des Typs  $\Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$ . Gäbe es auch Komponenten des Typs  $\Pi_1^{m_2} \Pi_5^{m_1}$ , so auch "gemischte" Komponenten des Typs  $\Pi_1^{n_1} \Pi_4^{n_4} \Pi_5^{n_5}$ , im Widerspruch zu (i) und (ii).

Die Behauptung für  $\Pi_4$  von  $D_5$  und entsprechend für  $\Pi_5$  von  $D_5$  ist damit gezeigt.

(4) Die Hauptisotropiegruppe bei  $\Pi_6$  von  $D_6$  ist  $A_5$ .

Aus dem Fall  $(G, H) = (SO(2n), U(n))$   $n$  gerade, der Tabelle 1 in Krämer [VI] und unserer Grundtatsache folgt die Behauptung von (4) für  $\Pi_6$ .

Die für  $\Pi_5$  folgt nach Anwendung des entsprechenden äußeren Automorphismus.

(Wieder sei bemerkt : In der zitierten Tabelle 1 tritt  $\Pi_6^2$  statt  $\Pi_6$  als drittes erzeugendes Element auf. Das liegt wieder daran, dass der 1-dimensionale Zentralisator von  $U(6)$  bei  $\Pi_6$  noch keinen entsprechenden Fixpunkt hat, sondern erst bei  $\Pi_6^2$ . Das  $SU(6)$  hat aber einen Fixpunkt bei  $\Pi_6$ .)

#### TATSACHE 2.5 ( $G_2$ )

Sei  $L \cong G_2$  und  $\rho = \Pi_1$

$$S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } G_2) = 1$  und  $\Pi_1$  von  $G_2$  ist gut.

#### Beweis

Betrachte  $G_2$  eingebettet in  $SO(7) \cong B_3$  via  $\Pi_1$ . Dann sind die Darstellungen  $\Pi_1^n$  von  $B_3$  irreduzibel bei Einschränkung auf  $G_2$  und ebenfalls vom höchsten Gewicht  $\Pi_1^n$

(bezüglich  $G_2$ ). Die betrachtete Darstellung von  $G_2$  ist nämlich Komponente in der Einschränkung der betrachteten Darstellung von  $B_3$ .

Beide haben jedoch die Dimension  $\frac{1}{120}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+5)$ .

$S^n(\Pi_1)$  wird von  $\Pi_1$  erzeugt und  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } G_2) = 1$ . Also ist  $\Pi_1$  gut.

## TATSACHE 2.6 ( $F_4$ )

Sei  $L \cong F_4$  und  $\rho = \Pi_1$

In  $S(\Pi_1)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$\lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2}$  sind,  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ .

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } F_4) = 2$  und  $\Pi_1$  von  $F_4$  ist gut.

Beweis.

Hier ist die Argumentation so. Die Hauptisotropiegruppe von  $\Pi_1$  ist  $D_4$  (Elashvili).

Wir betrachten die sukzessive Ausreduzierung  $F_4 \supset B_4 \supset D_4$  ergibt: Fixpunkte unter  $D_4$  haben genau diejenigen irreduziblen Darstellungen  $\lambda$  von  $F_4$ , wobei bei

der Einschränkung  $\lambda_{\downarrow B_4}$  Komponenten des Typs  $\Pi_1^m$  von  $B_4$  vorkommen.

Die Ausreduzierung  $F_{4 \downarrow B_4}$  ist (teilweise) in [Lepowski] behandelt. Es stellt sich heraus:

Die dortigen Methoden können auch benutzt werden um zu zeigen, dass in  $\lambda_{\downarrow B_4}$

Komponenten von  $B_4$  des Typs  $\Pi_1^m$  genau dann vorkommen, wenn  $\lambda$  vom Typ  $\Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2}$  ist. Das ist unsere Behauptung.

## TATSACHE 2.7 ( $E_6$ )

Sei  $L \cong E_6$  und  $\rho = \Pi_1$

In  $S(\Pi_1)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$\lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}$  sind,  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ .

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } E_6) = 2$ .  $\Pi_1$  und  $\Pi_5 = \Pi_1^*$  von  $E_6$  sind gut.

Beweis

Die Hauptisotropiegruppe von  $\Pi_1$  bei  $E_6$  ist  $F_4$  (Elashvili). Unsere Behauptung folgt

- wie schon mehrmals - aus Tabelle 1 in Krämer [VI], hier unter dem Fall

$(G, H) = (E_6, F_4)$ .

## TATSACHE 2.8 ( $E_7$ )

Sei  $L \cong E_7$  und  $\rho = \Pi_1$

In  $S(\Pi_1)$  kommen genau die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  vor, die vom Typ

$\lambda = \Pi_1^{m_1+m_2} \Pi_6^{m_3} \Pi_2^{m_4}$  sind,  $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}_0$

Also ist  $\text{Rang}(\Pi_1 \text{ von } E_7) = 3$  und  $\Pi_1$  von  $E_7$  ist gut.

Beweis

Bei  $\Pi_1$  von  $E_7$  ist die Hauptisotropiegruppe  $E_6$ . Wieder folgt die Behauptung aus

Tabelle 1 in Krämer [VI], Fall  $(G, H) = (E_7, U_1 \cdot E_6)$ . (Weil wir  $E_6$  statt  $U_1 \cdot E_6$

benötigen, tritt wieder als erstes Erzeugende das  $\Pi_1$  statt des  $\Pi_1^2$  in der Tabelle 1 auf.)

### § 3. Klassifikation der guten irreduziblen Darstellungen nach dem Rang

Wir fassen hier unsere bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen. Wir ordnen die guten Darstellungen aber nach einem anderen Prinzip, und zwar nach dem Rang .

SATZ 3.1 ( Klassifikation )

Seien  $L$  und  $\rho$  unter den folgenden Beispielen

- (1) (i)  $L = A_1$  und  $\rho$  beliebig  
(ii)  $L = A_r$   $r \geq 2$  und  $\rho = \Pi_1$ , oder  $\rho = \Pi_r$   
 $L = A_3$  und  $\rho = \Pi_2$   
(iii)  $L = B_r$   $r \geq 2$  und  $\rho = \Pi_1$ ,  $L = B_2$  und  $\rho = \Pi_2$   
 $L = B_3$  und  $\rho = \Pi_3$   
(vi)  $L = C_r$   $r \geq 3$   $\rho = \Pi_1$   
(v)  $L = D_r$  und  $\rho = \Pi_1$ ,  $L = D_4$  und  $\rho = \Pi_3$  oder  $\rho = \Pi_4$   
(vi)  $L = G_2$  und  $\rho = \Pi_1$

Dann ist  $\text{Rang}_1 M(\rho)$  eindimensional.

- (2) (i)  $L = A_4$  und  $\rho = \Pi_2$  oder  $\rho = \Pi_3$ ,  
 $L = A_5$  und  $\rho = \Pi_2$  oder  $\rho = \Pi_4$   
(ii)  $L = B_4$  und  $\rho = \Pi_4$   
(iii)  $L = C_3$  und  $\rho = \Pi_2$   
(iv)  $L = D_5$  und  $\rho = \Pi_4$  oder  $\rho = \Pi_5$   
(v)  $L = F_4$  und  $\rho = \Pi_1$   
(vi)  $L = E_6$  und  $\rho = \Pi_1$

Dann ist  $\text{Rang}_1 M(\rho) = 2$

- (3) (i)  $L = A_5$  und  $\rho = \Pi_3$   
(ii)  $L = D_6$  und  $\rho = \Pi_5$  oder  $\Pi_6$   
(iii)  $L = E_7$  und  $\rho = \Pi_1$

Dann ist  $\text{Rang}_1 M(\rho) = 3$


- (4)  $L = A_r$   $r \geq 2$  und  $\rho = \Pi_2$  oder  $\rho = \Pi_{r-1}$

Dann ist  $\text{Rang}_1 M(\rho) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$


Beweis folgt dann Tatsache 2.1, 2.2 ... 2.6 im § 2.

Übersicht über die guten und schlechten fundamentalen Darstellungen in den folgenden Dynkindiagrammen der einfachen Liealgebren.


**gut**

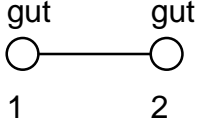
 : gute fundamentale Darstellung  $\Pi_3$

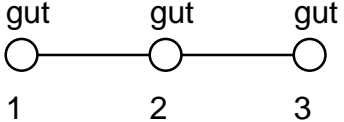
**sch**

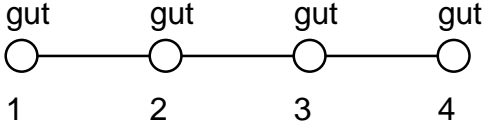
 : schlechte fundamentale Darstellung  $\Pi_2$

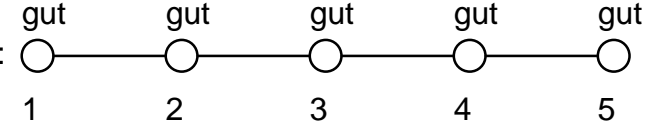
$A_r$  :

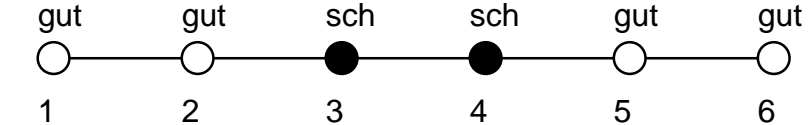
$A_1$  : **sch**  


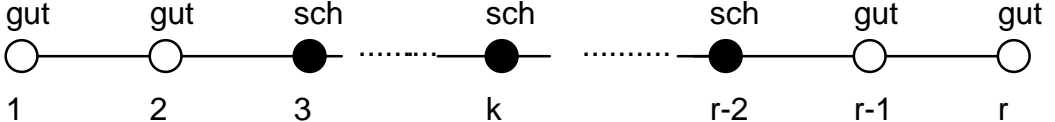
$A_2$  : 

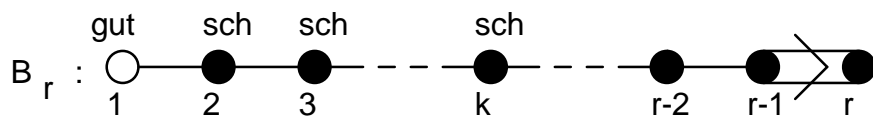
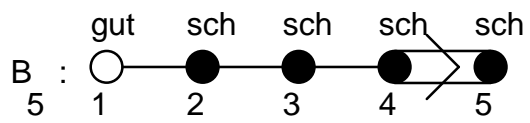
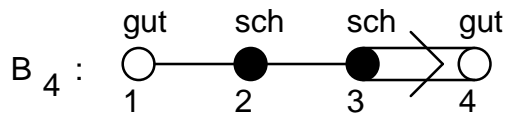
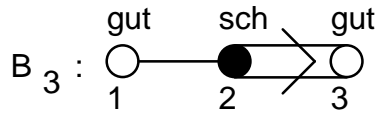
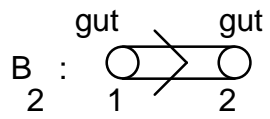
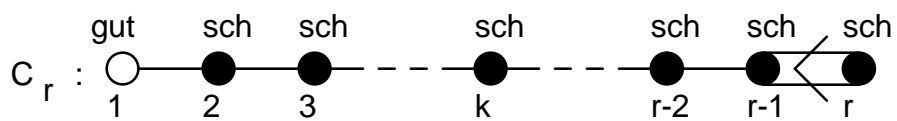
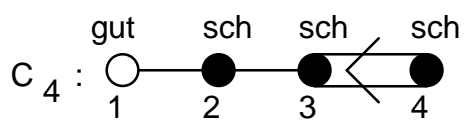
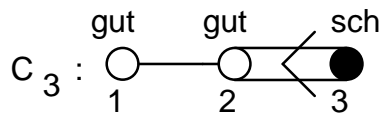
$A_3$  : 

$A_4$  : 

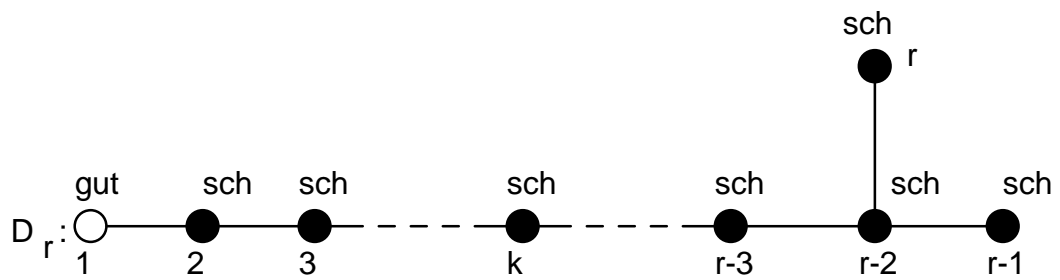
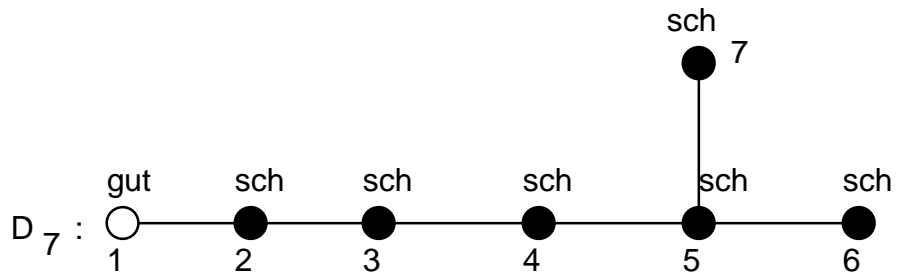
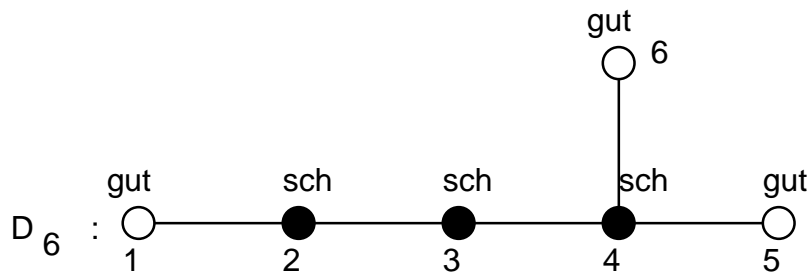
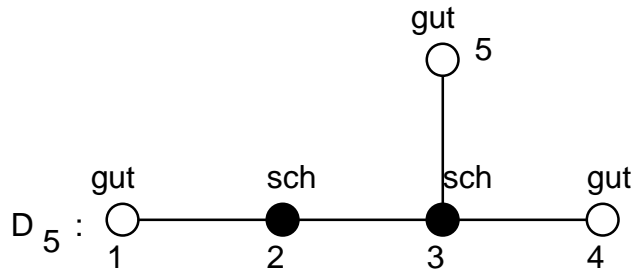
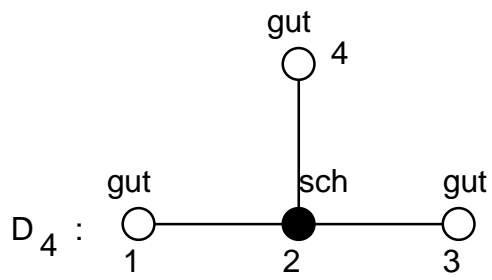
$A_5$  : 

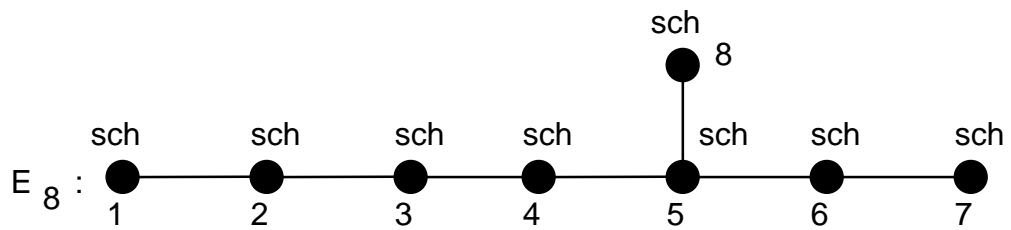
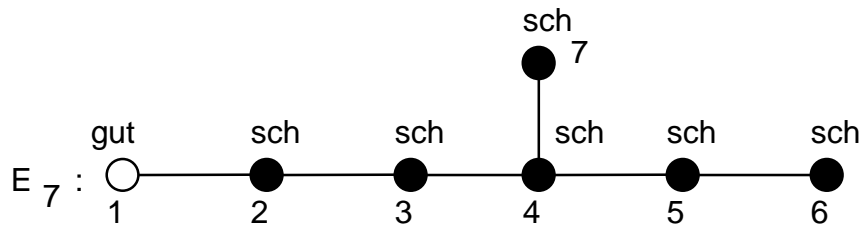
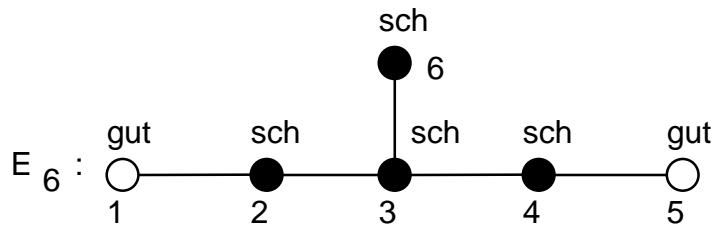
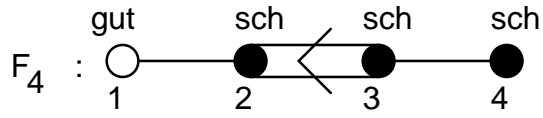
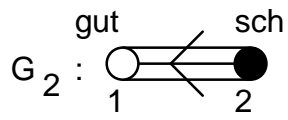
$A_6$  : 

$A_r$  : 

$B_r$  $C_r$ 

$D_r$





## § 4 . Die Vielfachheit der Nulldarstellung von L in S<sup>n</sup>(V)

Zum folgenden siehe auch die Bezeichnungen beim Exkurs zum Beginn des §2.  
 Seien : L einfache komplexe Liealgebra , G einfachzusammenhängende komplexe Liegruppe bzw. lineare algebraische Gruppe über C mit L als Liealgebra, ρ eine irreduzible Darstellung von L bzw. von G mit Darstellungsraum V<sub>ρ</sub> = V ,

C[V] ≡ S(V) die symmetrische Algebra über V.

$C[V] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C^n[V]$  ( C<sup>n</sup>[V] = S<sup>n</sup>(V) ) ist graduierte G – Algebra .

I = C[V]<sup>G</sup> die Unter algebra der Invarianten , d.h. der unter G fixen Elemente von C[V].

Man hat : C[V] ist I – G – Algebra.

Man nennt C[V] oder ρ **kofrei** , wenn C[V] ein freier I – Modul ist.

C[V] oder ρ heißen **koregulär** , wenn C[V]<sup>G</sup> eine freie Algebra , d.h. ein Polynomring ist. Man kann dann ( endlich viele ) homogene algebraisch unabhängige Erzeugende von C[V]<sup>G</sup> wählen.

Kofreie ρ sind auch koreguläre ( Popov II, Schwarz II ).

### Bemerkung 4.1

Unsere guten Darstellungen sind alle kofrei , also insbesondere koregulär ( siehe Popov II oder die Listen in [Schwarz I, II] ) .

**Bezeichnung** : Für koreguläre ρ sei d = dim C[V]<sup>G</sup> die Anzahl der freien Erzeugenden des Polynomrings C[V]<sup>G</sup>

### Berechnung der d = dim C[V]<sup>G</sup> für die guten Darstellungen.

Wir berechnen d nach folgender Formel : Sei K die Hauptisotropiegruppe von G in V<sub>λ</sub> im Sinne und nach den Berechnung von [ Elashvili] . Dann gilt

$$d = \dim V - \dim G + \dim K$$

Denn : Für unser G und λ ist der Invariantenkörper C[V]<sup>G</sup> des Quotientenkörpers C(V) von C[V] gleich dem Quotientenkörper des ( faktoriellen ) Ringes C[V]<sup>G</sup> .  
 Siehe die Bemerkung von Kriterium 2 in §1 . In diesem Falle ist

$$\text{Transzendenzgrad von } C[V]^G = \dim V - \dim G + \dim K$$

nach Proposition 3.4 in [ Popov – Vinberg ]. Weil bei uns aber C[V]<sup>G</sup> ein Polynomring ist, ist d = Transzendenzgrad von C[V]<sup>G</sup> .

**Die Berechnung von d** im einzelnen ( für die Hauptisotropiegruppen K siehe [ Elashvili]):

$$(1) d = \dim C[\Pi_2]^{A_4} = ?$$

$$\dim C[\Pi_2]^{A_4} = \dim \Pi_2 - \dim A_4 + \dim K, \quad K = C_2 + U_4(R(\varphi_1))$$

$$\dim \Pi_2 = 10, \quad \dim A_4 = 24, \quad \dim K = 10 + 4 = 14$$

$$d = \dim C[\Pi_2]^{A_4} = 10 - 24 + 14 = 0$$



$$(2) \quad d = \dim C[\Pi_4]^{D_5} = ?$$

$$\dim C[\Pi_4]^{D_5} = \dim \Pi_4 - \dim D_5 + \dim K, \quad K = B_3 + U_8(R(\varphi_1))$$

$$\dim \Pi_4 = 16, \quad \dim D_5 = 45, \quad \dim K = 21 + 8 = 29$$

$$d = C[\Pi_4]^{D_5} = 16 - 45 + 29 = 0$$

$$(3) \quad d = \dim C[\Pi_2]^{A_5} = ?$$

$$\dim C[\Pi_2]^{A_5} = \dim \Pi_2 - \dim A_5 + \dim K, \quad K = C_3$$

$$\dim \Pi_2 = 15, \quad \dim A_5 = 35, \quad \dim K = \dim C_3 = 21$$

$$d = \dim C[\Pi_2]^{A_5} = 15 - 35 + 21 = 1$$

$$(4) \quad d = \dim C[\Pi_1]^{E_6} = ?$$

$$\dim C[\Pi_1]^{E_6} = \dim \Pi_1 - \dim E_6 + \dim K, \quad K = F_4$$

$$\dim \Pi_1 = 27, \quad \dim E_6 = 78, \quad \dim K = 52$$

$$d = \dim C[\Pi_1]^{E_6} = 27 - 78 + 52 = 1$$

$$(5) \quad d = \dim C[\Pi_4]^{B_4} = ?$$

$$\dim C[\Pi_4]^{B_4} = \dim \Pi_4 - \dim B_4 + \dim K, \quad K = B_3$$

$$\dim \Pi_4 = 16, \quad \dim B_4 = 36, \quad \dim K = 21$$

$$d = \dim C[\Pi_4]^{B_4} = 16 - 36 + 21 = 1$$

$$(6) \quad d = \dim C[\Pi_1]^{F_4} = ?$$

$$\dim C[\Pi_1]^{F_4} = \dim \Pi_1 - \dim F_4 + \dim K, \quad K = D_4$$

$$\dim \Pi_1 = 26, \quad \dim F_4 = 52, \quad \dim K = 28$$

$$d = \dim C[\Pi_1]^{F_4} = 26 - 52 + 28 = 2$$

$$(7) \quad d = \dim C[\Pi_2]^{C_3} = ?$$

$$\dim C[\Pi_2]^{C_3} = \dim \Pi_2 - \dim C_3 + \dim K, \quad K = A_1 \times A_1 \times A_1$$

$$\dim \Pi_2 = 14, \quad \dim C_3 = 21, \quad \dim K = 3 + 3 + 3 = 9$$

$$d = \dim C[\Pi_2]^{C_3} = 14 - 21 + 9 = 2$$

$$(8) \quad d = \dim C[\Pi_3]^{A_5} = ?$$

$$\dim C[\Pi_3]^{A_5} = \dim \Pi_3 - \dim A_5 + \dim K, \quad K = A_2 + A_2$$

$$\dim \Pi_3 = 20, \quad \dim A_5 = 35, \quad \dim K = 8 + 8 = 16$$

$$d = \dim C[\Pi_3]^{A_5} = 20 - 35 + 16 = 1$$

$$(9) \quad d = \dim C[\Pi_3]^{C_3} = ?$$

$$\dim C[\Pi_3]^{C_3} = \dim \Pi_3 - \dim C_3 + \dim K, \quad K = A_2$$

$$\dim \Pi_3 = 14, \quad \dim C_3 = 21, \quad \dim K = 8$$

$$d = \dim C[\Pi_3]^{C_3} = 14 - 21 + 8 = 1$$

$$(10) \quad d = \dim C[\Pi_5]^{D_6} = ?$$

$$\dim C[\Pi_5]^{D_6} = \dim \Pi_5 - \dim D_6 + \dim K, \quad K = A_5$$

$$\dim \Pi_5 = 32, \quad \dim D_6 = 66, \quad \dim K = 35$$

$$d = \dim C[\Pi_5]^{D_6} = 32 - 66 + 35 = 1$$

$$(11) \quad d = \dim C[\Pi_6]^{D_6} = ?$$

$$\dim C[\Pi_6]^{D_6} = \dim \Pi_6 - \dim D_6 + \dim K, \quad K = A_5$$

$$\dim \Pi_6 = 32, \quad \dim D_6 = 66, \quad \dim K = 35$$

$$d = \dim C[\Pi_6]^{D_6} = 32 - 66 + 35 = 1$$

$$(12) \quad d = \dim C[\Pi_1]^{E_7} = ?$$

$$\dim C[\Pi_1]^{E_7} = \dim \Pi_1 - \dim E_7 + \dim K, \quad K = E_6$$

$$\dim \Pi_1 = 56, \quad \dim E_7 = 133, \quad \dim K = 78$$

$$d = \dim C[\Pi_1]^{E_7} = 56 - 133 + 78 = 1$$

$$(13) \quad d = \dim C[\Pi_2]^{A_{2k}} = ?$$

$$\dim C[\Pi_2]^{A_{2k}} = \dim \Pi_2 - \dim A_{2k} + \dim K, \quad K = C_k + U_{2k}(\mathbb{R}(\varphi_1))$$

$$\dim \Pi_2 = 2k^2 + k, \quad \dim A_{2k} = 4k^2 + 4k, \quad \dim K = (2k^2 + k) + 2k$$

$$d = \dim C[\Pi_2]^{A_{2k}} = (2k^2 + k) - (4k^2 + 4k) + [(2k^2 + k) + 2k] = 0$$

$$(14) \quad d = \dim C[\Pi_2]^{A_{2k-1}} = ?$$

$$\dim C[\Pi_2]^{A_{2k-1}} = \dim \Pi_2 - \dim A_{2k-1} + \dim K, \quad K = C_k \quad (\text{Krämer [I], Hsiang})$$

$$\dim \Pi_2 = 2k^2 - k, \quad \dim A_{2k-1} = 4k^2 - 1, \quad \dim K = 2k^2 + k$$

$$d = \dim C[\Pi_2]^{A_{2k-1}} = (2k^2 - k) - (4k^2 - 1) + (2k^2 + k) = 1$$

$$(15) \quad d = \dim C[\Pi_1 \Pi_2]^{A_2} = ?$$

$$\dim C[\Pi_1 \Pi_2]^{A_2} = \dim \Pi_1 \Pi_2 - \dim A_2 + \dim K, \quad K = T_2 \quad (\text{ein 2-dimensionaler Torus})$$

$$\dim \Pi_1 \Pi_2 = 8, \quad \dim A_2 = 8, \quad \dim K = 2$$

$$d = \dim C[\Pi_1 \Pi_2]^{A_2} = 8 - 8 + 2 = 2$$

#### Bemerkung 4.2

Die Rechnungen haben ergeben, dass  $d \leq 2$  in allen (guten) Fällen ist. Wir haben die Fälle (9) und (15) aufgenommen, obwohl diese Darstellungen schlecht sind. Siehe dazu auch den Anhang.

SATZ 4.1 (0-Vielfachheit)

Sei  $L$  eine einfache Liealgebra,  $\rho$  eine Darstellung von  $L$ .  $S(\rho)$ ,  $C[\rho]$ ,  $S^n(\rho)$ ,  $C^n[\rho]$ ,  $I$ ,  $I^n$ ,  $H$ ,  $H^n$  wie oben. Seien  $d = \dim C[\rho]^L$ ,  $u_1, u_2, \dots, u_d$  die Erzeugenden von  $I$  mit  $\deg u_i = n_i$   $i = 1, 2, \dots, d$ . Sei  $Vf_n(0)$  die Vielfachheit der 0-Darstellung in  $S^n(\rho)$ .

In der folgenden Liste geben wir  $Vf_n(0)$  für alle guten Paare  $(\rho, L)$  an. (Aus Kongruenzgründen haben wir die Paare  $(\Pi_1 \Pi_2, A_2)$ ,  $(\Pi_3, C_3)$  mit aufgenommen, obwohl diese Paare nicht gut sind).

- 1)  $(\Pi_2, A_4)$ ,  $(\Pi_3, A_4)$ ,  $(\Pi_4, D_5)$ ,  $(\Pi_5, D_5)$ ,  $(\Pi_1, A_r)$ ,  $(\Pi_r, A_r)$ ,  $(\Pi_1, C_r)$  und  $(\Pi_2, A_r)$ ,  $(\Pi_{r-1}, A_r)$  für  $r = 2m$ .

$$\text{Dann ist } Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 2)  $(\Pi_2, A_5)$ ,  $(\Pi_4, A_5)$ ,  $(\Pi_1, E_6)$ ,  $(\Pi_5, E_6)$   
 Dann ist  $Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 3k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- 3)  $(\Pi_4, B_4)$ ,  $(\Pi_1, B_r)$ ,  $(\Pi_1, D_r)$ ,  $(\Pi_1, G_2)$   
 Dann ist  $Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- 4)  $(\Pi_1, F_4)$ ,  $(\Pi_2, C_3)$ ,  $(\Pi_1 \Pi_2, A_2)$   
 $Vf_n(0)$  ist gleich der Anzahl der Tupel  $(k_1, k_2)$  mit  $2k_1 + 3k_2 = n$   
 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$

- 5)  $(\Pi_3, A_5)$ ,  $(\Pi_3, C_3)$ ,  $(\Pi_5, D_6)$ ,  $(\Pi_6, D_6)$ ,  $(\Pi_1, E_7)$   
 Dann ist  $Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 4k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

- 6)  $(\Pi_2, A_r)$ ,  $(\Pi_{r-1}, A_r)$  für  $r = 2m - 1, m \geq 2$   
 Dann ist  $Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \cdot k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Die Anzahl  $d$  der polynomialen Erzeugenden von  $I$  in allen diesen Fällen wurden vor dem Satz 4.1 berechnet. Die Grade  $n_i$  der Erzeugenden  $u_1, u_2, \dots, u_d$  (bei uns ist  $d \leq 2$ ) entnehmen wir i.a. aus der Liste 2 im Anhang. Dazu zwei Beispiele.

Fall  $\Pi_1$  von  $E_7$  :

Die Nulldarstellung taucht erstmals in  $C[V]^4$  auf: Es ist  $d=1$ ,  $n_1=4$ .

Fall  $\Pi_1$  von  $F_4$  :

Es ist  $d=2$ . Die erste triviale Darstellung taucht in  $C[V]^2$ , die zweite in  $C[V]^3$  auf. Demnach ist  $n_1=2$ ,  $n_2=3$ .

Auf diese Weise werden die  $n_i$  bei allen Fällen ermittelt außer bei Fall 6).

Fall  $(\Pi_2, A_r)$ ,  $(\Pi_{r-1}, A_r)$  für  $r=2m-1$  :

In diesem Fall ist  $d=1$  nach der Berechnung 14. Gesucht wird das erste  $n$ , so dass in  $S^n(\Pi_2)$  ein  $0 \neq u$  Element von  $I$  existiert. In diesem Fall argumentieren wir mit klassischer Invariantentheorie.

Einzelheiten :

Wir erinnern : Die fundamentale Darstellung  $\Pi_2$  von  $A_r$  ist

$$\Pi_2 = \frac{1}{r+1} [(r-1)a_1 + 2(r-1)a_2 + 2(r-2)a_3 + \dots + 4a_{r-1} + 2a_r]$$

Für  $r=2m-1$  ist das

$$\Pi_2 = \frac{1}{m} [(m-1)a_1 + (2m-2)a_2 + (2m-3)a_3 + \dots + 2a_{2m-2} + a_{2m-1}]$$

Das höchste Gewicht von  $S^m(\Pi_2)$  ist dann

$$\Pi_2^m = (m-1)a_1 + (2m-2)a_2 + (2m-3)a_3 + \dots + 2a_{2m-2} + a_{2m-1}$$

### Behauptung 1

Bei  $\rho = \Pi_2$  von  $A_{2m-1}$  ist  $n_1 = \text{Grad}(u_1) = m$ . Dann:

In  $S^m(\Pi_2)$  von  $A_{2m-1}$  kommt die triviale Komponente  $\Pi_0$  mit Vielfachheit 1 vor. Sie hat das Gewicht

$$0 = \Pi_2^m - [(m-1)a_1 + (2m-2)a_2 + (2m-3)a_3 + \dots + 2a_{2m-2} + a_{2m-1}]$$

Für alle  $A_r$   $r \geq 2m-1$  nennen wir

$$\Omega_m = (m-1)a_1 + (2m-2)a_2 + (2m-3)a_3 + \dots + 2a_{2m-2} + a_{2m-1}$$

In Potenzen  $S^k(\Pi_2)$ ,  $k < m$  gibt es keine trivialen Komponenten.

Beweis:

Wir arbeiten mit  $G = \text{SL}(2m)$ . Der Darstellungsraum ist  $V = \Lambda^2(C^{2m})$ .

Die klassische Invariantentheorie und lineare Algebra kennt die Darstellung der Determinantenform auf  $C^{2m}$  als Polynom  $m$ -ten Grades - genannt Pfaffsches Polynom und bei uns  $\text{Pf}_m$  bezeichnet - auf dem Raum der alternierenden 2-Formen auf  $C^{2m}$  (Genaueres zu  $\text{Pf}_m$  : siehe [Weyl], Kap. VI, Formel (1.8)).

Nach Definition ist  $Pf_m \in S^m(\Pi_{r-1})$ . Nun : Offenbar ist die Determinantenform eine Invariante von  $SL(2m)$  .D.h.  $0 \neq Pf_m \in I^m$  von  $\Pi_{r-1}$ . Nach Kontragradienz gibt es die  $Pf_m$  entsprechende Invariante  $u$  in  $I^m$  von  $\Pi_2$

Behauptung: Dieses  $u$  ist das Erzeugende  $u_1$  von  $I$  bei  $\rho = \Pi_2$ .

Denn : Nach dem klassischen 1. Hauptsatz der Invariantentheorie für  $SL(2m)$  (siehe Theorem 2.6A in [Weyl] , Chapt.II,6 ) gibt es in den Tensorräumen  $\otimes^t(C^{2m})$  keine Invarianten , wenn  $t < 2m$  .

Daraus folgt : In  $S^k(\Pi_2)$ ,  $k < m$  , gibt es keine Elemente  $\neq 0$  aus  $I$ . Also :

Das " Pfaffsche "  $u \in S^m(\Pi_2)$  ist Invariante mit dem kleinsten Grad , also Erzeugendes Element von  $I$ .

### Beweis von Satz 4.1

Seien  $d = \dim C[\rho]^L$  ,  $u_1, u_2, \dots, u_d$  die Erzeugenden von  $I$  mit  $\deg u_i = n_i$

$n_i \in \mathbb{N}$   $i = 1, 2, \dots, d$  . Nach der Bemerkung 4.2 ist  $d \leq 2$  bei allen aufgeführten Fällen . Wir schreiben  $C[u] := C[u_1, u_2, \dots, u_d]$  . Es ist

$I = I^0 + I^1 + I^2 + I^3 + \dots + I^n + \dots = C[u]$ . Dann ist

$\{ u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_d^{k_d} \mid n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots + n_d k_d = n \text{ mit } k_i \in \mathbb{N}_0 \}$  eine Basis von

$I^n$  über  $C$  Also ist  $Vf_n(0) = \dim I^n$  , d.h. die Vielfachheit der 0-Darstellung in  $S^n(\rho)$  gleich der Anzahl der Tupel  $(k_1, k_2, \dots, k_d)$  , mit  $n_1 k_1 + n_2 k_2 + \dots + n_d k_d = n$  ,  $k_i \in \mathbb{N}_0$ .

Wir unterteilen den Beweis in die folgenden drei Fälle.

(i) Die Fälle mit  $d = 0$  , d.h. mit  $I = C^0[\rho] = C$  sind klar . ( Siehe unten ) .

(ii) In den Fällen  $d = 1$  ist  $n_1$  der kleinste Exponent ,so dass in  $S^{n_1}(\rho)$  eine triviale Darstellung vorkommt .

(iii) In den Fällen  $d = 2$  suchen wir die ersten beiden  $S^{n_1}(\rho)$  ,  $S^{n_2}(\rho)$  die trivialen Darstellungen enthalten .

Wir entnehmen die  $n_i$  jeweils aus den Listen.

1)  $d = 1$  ,  $n_1 = \deg u = 3$

a) Sei  $L = A_5$  ,  $\rho = \Pi_2$

$d = \dim C[\Pi_2]^{A_5} = 1$  nach Berechnung (3)

$n_1 = \deg u = 3$  nach der Liste 2.1.2

b) Sei  $L = A_5$  ,  $\rho = \Pi_4$   $n_1 = \deg u = 3$

(  $\Pi_4$  ist die Kontragradiente von  $\Pi_2$  .)

c) Sei  $L = E_6$  ,  $\rho = \Pi_1$

$d = \dim C[\Pi_1]^{E_6} = 1$  nach Berechnung (4) ,

$n_1 = \deg u = 3$  nach Liste 2.6.1

d) Sei  $L = E_6$  ,  $\rho = \Pi_5$   $n_1 = \deg u = 3$  ( $\Pi_5$  ist die Kontragradiente von  $\Pi_1$ .)

2)  $d = 1$  ,  $n_1 = \deg u = 2$   
 a) Sei  $L = B_4$  ,  $\rho = \Pi_4$   
 $d = \dim C[\Pi_4]^{B_4} = 1$  nach Berechnung ( 5 )  
 $n_1 = \deg u = 2$  nach Liste 2.2.1

b) Sei  $L = B_r$  ,  $\rho = \Pi_1$   $n_1 = \deg u = 2$   
 ( Da  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{für } n = 2k+1 \\ \Pi_0 & \text{für } n = 2k \end{cases}$  ist )

c) Sei  $L = D_r$  ,  $\rho = \Pi_1$   $n_1 = \deg u = 2$   
 ( Da  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{für } n = 2k+1 \\ \Pi_0 & \text{für } n = 2k \end{cases}$  ist )

d) Sei  $L = G_2$   $\rho = \Pi_1$   $n_1 = \deg u = 2$   
 ( Da  $S^n(\Pi_1) = \Pi_1^n + \Pi_1^{n-2} + \Pi_1^{n-4} + \dots + \begin{cases} \Pi_1 & \text{für } n = 2k+1 \\ \Pi_0 & \text{für } n = 2k \end{cases}$  ist )

3)  $d = 1$  ,  $n_1 = \deg u = 4$   
 a) Sei  $L = A_5$  ,  $\rho = \Pi_3$   
 $d = \dim C[\Pi_3]^{A_5} = 1$  nach Berechnung ( 8 )  
 $n_1 = \deg u = 4$  nach Liste 2.1.4

b) Sei  $L = D_6$  ,  $\rho = \Pi_5$   
 $d = \dim C[\Pi_5]^{D_6} = 1$  nach Berechnung ( 10 ),  $n_1 = \deg u = 4$  nach Liste 2.4.2

c) Sei  $L = D_6$  ,  $\rho = \Pi_6$   
 $d = \dim C[\Pi_6]^{D_6} = 1$  nach Berechnung ( 11 ).  $n_1 = \deg u = 4$  nach Liste 2.4.1

d) Sei  $L = E_7$  ,  $\rho = \Pi_1$   
 $d = \dim C[\Pi_1]^{E_7} = 1$  nach Berechnung ( 12 ) ,  $n_1 = \deg u = 4$  nach Liste 2.7.1

4)  $d = 1$  ,  $n_1 = \deg u = m$   
 Sei  $L = A_r$  ,  $\rho = \Pi_2$   $r = 2m - 1$   
 $d = \dim C[\Pi_2]^{A_{2m-1}} = 1$  nach Berechnung ( 14 )  
 $n_1 = \deg u = m$  nach dem dritten explizit behandelten Fall .

Beweis zu (i)  $d = 0$

In den Fällen aus 1) ist  $d = 0$  nach den Berechnungen 1, 2, 13 . Dann ist  
 $I = I^0 = C^0[u] = C$  Also ist  $I^n = \{ 0 \}$  für  $n \geq 1$  und die Behauptung folgt .

Beweis zu (ii)  $d = 1$

In den Fällen 2, 3, 5 und 6 ist  $d = 1$ . Der Index  $n_1 \geq 1$ , für den  $S^n(\rho)$  die triviale Darstellung enthalten ist gemäß der Liste der folgende:

$n_1 = 2$  in den Fällen 3 ( Siehe die Liste )

$n_1 = 3$  in den Fällen 2

$n_1 = 4$  in den Fällen 5

$n_1 = m$  in den Fällen 6

Es ist also jeweils  $\forall f_n(0) = \dim I^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = kn_1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis zu (iii)  $d = 2$

a) Sei  $L = F_4$ ,  $\rho = \Pi_1$

$d = \dim C[\Pi_1]^{F_4} = 2$  nach Berechnung (6)

In den folgenden Formeln bezeichnen wir mit  $\{u\}$   $u \in I$ , der Teilraum  $Cu$  von  $I$ .

Seien  $u_1, u_2$  die Erzeugenden von  $I$ ,  $\deg u_1 = 2$  und  $\deg u_2 = 3$  nach Liste

$$I = C[u_1, u_2]$$

$$I = C^0[u_1, u_2] + C^1[u_1, u_2] + C^2[u_1, u_2] + C^3[u_1, u_2] + \dots + C^n[u_1, u_2] + \dots$$

$$I^0 = C^0[u_1, u_2], I^1 = \{0\}, I^2 = \{u_1\}, I^3 = \{u_2\}, \dots, I^n = \{u_1^{2k_1} u_2^{3k_2} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0\}, \dots$$

Dann ist  $\forall f_n(0) = \dim I^n = \dim \{u_1^{2k_1} u_2^{3k_2} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0\}$ . d.h.  $\forall f_n(0)$  gleich der Anzahl der Tupel  $(k_1, k_2)$  mit  $2k_1 + 3k_2 = n$   $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ .

b) Sei  $L = C_3$ ,  $\rho = \Pi_2$

Beweis wie (iii) a).

$d = \dim C[\Pi_2]^{C_3} = 2$  nach Berechnung (7),  $\deg u_1 = 2$  und  $\deg u_2 = 3$  nach Liste

## § 5. Die Vielfachheit der Komponente $\lambda$ in $S^n(\rho)$

### Teil 1 : Feinstrukturen

Die Bezeichnungen seien wie im " Exkurs über algebraische Strukturen im Zusammenhang mit  $S(V)$  " ( siehe in §2 ) und wie in §2 und §4 . Insbesondere sei  $G$  die einfache zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Liealgebra  $L$  . Es sei  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $G$  mit Darstellungsraum  $V$  . Wir untersuchen hier genaue Strukturen von  $S(V) = C[V]$  als  $G$ -Modul für die guten Darstellungen  $\rho$  . Diese guten  $\rho$  sind nach [ Popov IV ] und [ Schwarz II ] kofrei ,  $I = C[V]^G$  ist freie Algebra und  $C[V] = I \otimes H$  .

Für  $\lambda \in \Lambda^+$  seien  $C_\lambda[V]$  bzw.  $H_\lambda$  die isotypischen Komponenten von Typ  $\lambda$  in  $C[V]$  bzw. in  $H$  . Sei  $H_\lambda^n = S^n \cap H_\lambda$  . Man hat

$$S_\lambda = I \otimes H_\lambda \quad \text{und} \quad S_\lambda^n = \sum_{i=0}^n I^{n-i} \otimes H_\lambda^i \quad \text{als direkte Summe .}$$

Sei  $d_\lambda = d(\rho, \lambda)$  die Vielfachheit von  $\lambda$  in  $H$  . Wir nennen  $d_\lambda$  die **Grundvielfachheit** von  $\lambda$  . ( Zur eigentlichen Vielfachheit von  $\lambda$  in  $C[V]$  trägt dann noch  $I = C[V]^G$  bei , wie später beschrieben . )

Die  $G$ -Modulstruktur von  $C[V]$  beschreiben wir mittels des Unterrings  $C[V]^U$  der  $U$ -Invarianten .  $C[V]^U$  ist erzeugt von den Höchstgewichtsvektoren der irreduziblen Komponenten in  $C[V]$  .

Möchte man noch erkennen , von welchem  $\lambda$  so ein Höchstgewichtsvektor kommt , so fassen wir den Raum  $C[V]^U$  als Raum  $C[V]^{sB}$  der **Semiinvarianten** unter  $B$  auf . Der Torus  $T$  in  $B = T.U$  operiert nicht mehr trivial , sondern über das Gewicht ( den Charakter )  $\lambda$  .

Gemäß Popov und Schwarz sind unser  $\rho$  kofrei ,  $I = C[V]^G$  ist freie Algebra .

Nach [ Brion ] ist sogar ganz  $C[V]^U$  eine Algebra in algebraisch unabhängigen homogenen Erzeugenden , die in gewissen  $H_{\lambda_i}$  liegen .

Gemäß (8) und (11) des Exkurses in §2 schreiben wir :

$$C[V]^U = C [ u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_s ] , \text{ wo } u_1, \dots, u_d \text{ Erzeugende von } I \text{ sind und wo } u_i \in I^{n_i} , \quad i = 1, \dots, d , \quad v_i \in C[V]_{\lambda_i}^{t_i} , \quad \lambda_i \in \Lambda^+ , \quad n_i, t_i \in \mathbb{N} .$$

Die Anzahl  $d$  der Polynomerzeugenden von  $I$  haben wir in §4 berechnet . Die Anzahl  $d+s$  der Polynomerzeugenden von  $C[V]^U$  ermitteln wir nach der Formel

$$d+s = \dim C[V]^U = \dim V - \dim U + \dim U_x \quad \text{gemäß [ Panyushev ] .}$$

Dabei ist  $U_x$  maximale unipotente Untergruppe von  $H_x$  .

Das  $H_x$  - eine Hauptisotropiegruppe von  $V \oplus V^*$  - wurde in §2 eingeführt . Die  $H_x$  für die guten  $\rho$  wurden dort aufgelistet .



### Berechnung von $d + s = \text{Rang}$ von $C[V]^U$

1.  $\Pi_2$  von  $A_4$

$$\dim \Pi_2 = 10 \quad \dim U = 10$$

$$H_X = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \quad \dim U_X = 2$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 10 - 10 + 2 = 2$$

2.  $\Pi_5$  von  $D_5$

$$\dim \Pi_5 = 16 \quad \dim U = 20$$

$$H_X = A_3 \quad \dim U_X = 6$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 16 - 20 + 6 = 2$$

3.  $\Pi_2$  von  $A_5$

$$\dim \Pi_2 = 15 \quad \dim U = 15$$

$$H_X = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \quad \dim U_X = 3$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 15 - 15 + 3 = 3$$

4.  $\Pi_1$  von  $E_6$

$$\dim \Pi_1 = 27 \quad \dim U = 36$$

$$H_X = D_4 \quad \dim U_X = 12$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 27 - 36 + 12 = 3$$

5.  $\Pi_4$  von  $B_4$

$$\dim \Pi_4 = 16 \quad \dim U = 16$$

$$H_X = A_2 \quad \dim U_X = 3$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 16 - 16 + 3 = 3$$

6.  $\Pi_1 \Pi_2$  von  $A_2$

$$\dim \Pi_1 \Pi_2 = 8 \quad \dim U = 3$$

$$H_X = T \times T = T_2 \quad \dim U_X = 0$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 8 - 3 + 0 = 5$$

7.  $\Pi_2$  von  $C_3$

$$\dim \Pi_2 = 14 \quad \dim U = 9$$

$$H_X = T \quad \dim U_X = 0$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_X = 14 - 9 + 0 = 5$$

8.  $\Pi_1$  von  $F_4$

$$\dim \Pi_1 = 26 \quad \dim U = 24$$

$$H_x = A_2 \quad \dim U_x = 3$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = 26 - 24 + 3 = 5$$

9.  $\Pi_3$  von  $A_5$

$$\dim \Pi_3 = 20 \quad \dim U = 15$$

$$H_x = U_x = T_2 \quad \dim U_x = 0$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = 20 - 15 + 0 = 5$$

10.  $\Pi_6$  von  $D_6$

$$\dim \Pi_6 = 32 \quad \dim U = 30$$

$$H_x = SU(2) \times SU(2) \times SU(2) \quad \dim U_x = 3$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = 32 - 30 + 3 = 5$$

11.  $\Pi_1$  von  $E_7$

$$\dim \Pi_1 = 56 \quad \dim U = 63$$

$$H_x = D_4 \quad \dim U_x = 12$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = 56 - 63 + 12 = 5$$

12.  $\Pi_3$  von  $C_3$

$$\dim \Pi_3 = 14 \quad \dim U = 9$$

$$H_x = \text{Diskret} \quad \dim U_x = 0$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = 14 - 9 + 0 = 5$$

13.  $\Pi_2$  von  $A_{2k}$

$$\dim \Pi_2 = (2k+1)k \quad \dim U = (2k+1)k$$

$$H_x = SU(2)^k \quad \dim U_x = k$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = (2k+1)k - (2k+1)k + k = 2k^2 + k - 2k^2 - k + k = k$$

14.  $\Pi_2$  von  $A_{2k+1}$

$$\dim \Pi_2 = (k+1)(2k+1) \quad \dim U = (k+1)(2k+1)$$

$$H_x = SU(2)^{k+1} \quad \dim U_x = k+1$$

$$\dim V - \dim U + \dim U_x = (k+1)(2k+1) - (k+1)(2k+1) + k+1 = k+1$$

Bemerkung :

Als Punkte 6. und 12. haben wir noch zwei schlechte Darstellungen aufgenommen , weil sie in gewisse Schemata passen , s. später .

### Bestimmung der $n_i, \lambda_i, t_i$

Zur Bestimmung der Daten  $n_i, \lambda_i, t_i$  der Polynomerzeugenden  $u_1, \dots, u_d, v_1, \dots, v_s$  gehen wir folgendermaßen vor :

Bekannt sind die Anzahl  $d$  der Erzeugenden von  $I$  ( s. die Berechnung in §4 ), die oben gerechnete Gesamtzahl  $d+s$  der Erzeugenden von  $C[V]^U$  und der Rang  $\rho$  von  $\rho$  (s. Beweisvariante 1 in §2 ). Mit Hilfe dieser Größen lassen sich nun mit Hilfe der Liste 2 im Anhang alle Details bestimmen. Wir geben einige Beispiele.

#### Beispiel 1 : $\rho = \Pi_1$ von $F_4$

Hier ist  $d=2, d+s=5, \text{Rang } \rho=2$  . Man brähte:  $s=3$  , aber  $\text{Rang } \rho=2$

Die 3 Erzeugenden  $v_1, v_2, v_3$  sind also linear abhängig über  $Z$  .

Wir inspizieren unsere Liste 2.5 und erkennen :  $v_1 \in S^1(\rho)$  Höchstgewichtsvektor von  $\Pi_1 \in C^1[V]$  . Also  $t_1=1, \lambda_1 = \Pi_1$  .

In  $C^2[V]$  kommt  $v_1^2$  als Höchstgewichtsvektoren von  $\Pi_1^2$  wie erwartet vor . Aber es gibt auch  $\Pi_1$  in  $C^2[V]$  . Dieses muss algebraisch unabhängig sein von  $v_1$  . Also ist  $v_2$  Höchstgewichtsvektor des  $\lambda_1$  in  $C^2[V]$  . Somit :  $\lambda_2 = (\text{ebenfalls}) \Pi_1, t_2 = 2$ .

Schließlich : Das  $\Pi_2 \in C^3[V]$  liefert  $\lambda_3 = \Pi_2, t_3 = 3$  . Die Erzeugenden  $u_1, u_2$  von  $I$  liegen nach Liste 2.5 in  $S^2 \Pi_1$  und in  $S^3 \Pi_1$  . Somit  $n_1 = 2, n_2 = 3$ .

Alle Erzeugende sind gefunden . Das Ergebnis ist das schon am Schluss des Exkurses in §2 gegebenes Beispiel.

#### Beispiel 2 : $\rho = \Pi_1$ von $E_7$

Hier erhalten wir das Ergebnis durch Inspektion der Liste 2.7

Man erhält : Erzeugende  $v_1, v_2$  als Höchstgewichtsvektoren der  $\Pi_1$  in  $S^1 \Pi_1$  und in  $S^3 \Pi_1, v_3$  als Höchstgewichtsvektor der  $\Pi_6$  in  $S^2 \Pi_1$  und  $v_4$  als Höchstgewichtsvektor von  $\Pi_2$  in  $S^4 \Pi_1$  . Da  $d+s - \text{Rang } \Pi_1 = 5 - 1 = 4$  , haben wir bereits alle Erzeugenden gefunden . Die gewünschten Daten sind :

$d=1, s=4, t_1=1$  mit  $\lambda_1 = \Pi_1, t_2=3$  mit  $\lambda_2 = \Pi_1, t_3=2$  mit  $\lambda_3 = \Pi_6$  und  $t_4=4$  mit  $\lambda_4 = \Pi_2$  . Schließlich :  $n_1 = 4$  ( Die erste Komponente  $\Pi_0$  erscheint in  $S^4 \Pi_1$  .)

#### Beispiel 3:

Die Beispielklasse  $\Pi_2$  von  $A_r, r \geq 3$

Die Fälle  $r = 2n$  und  $r = 2n-1, n \geq 2$  , verhalten sich verschieden , sind aber ineinander verschränkt. Aus der Berechnung des polynomialen Rangs  $d$  von  $I$  wissen wir :  $d = 0$  im Fall  $r = 2n, d = 1$  im Fall  $r = 2n-1$

Wir benutzen die **Behauptung 1** in § 4

## Behauptung 2

In  $S^n(\Pi_2)$  von  $A_{2n}$  kommt die Komponente  $\Pi_{2n}$  vor. Ihr höchstes Gewicht ist  $\Pi_{2n} = \Pi_2^n - \Omega_n$ .

Beweis :

Wir betrachten die Einbettung  $A_{2n-1} \subset A_{2n} \cdot \Pi_2^n - \Omega_n$  ist nach Tatsache 1.3 in  $S^n(\Pi_2)$  von  $A_{2n}$  das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung. Diese Darstellung ist  $\mu = \Pi_{2n}$ .

( Es ist  $\mu = \Pi_{2n}^k$ , weil der Träger von  $\mu$  im

Restdiagramm  $\overset{2n}{\bullet}$  ist . Es ist  $k=1$ , weil der Koeffizienten von  $A_{2n-1}$  in  $\Omega_n$  gleich 1 ist . )

## Behauptung 3

Für alle  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  und alle  $A_r$  mit  $r \geq 2k$  kommt die Komponente  $\Pi_{2k}$  in  $S^k(\Pi_2)$  von  $A_r$  vor .

Beweis :

Für  $r = 2k$  ist das die 2. Behauptung .

Für  $r > 2k$  betrachten wir die Einbettung  $A_{2k} \subset A_r$  und die Tatsache 3.1 .

Das höchste Gewicht  $S^k(\Pi_2) - \Omega_n$  von  $A_{2k}$  (siehe die Behauptung 2) ist auch das höchste Gewicht in  $S^k(\Pi_2)$  von  $A_r$ , und zwar bleibt es ein  $\Pi_{2k}$ , denn die einfachen Wurzeln  $a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}$ , die in  $\Omega_n$  vorkommen, nämlich  $a_1, a_2, \dots, a_{2k-1}$ , grenzen nicht an das Restdiagramm .

## Behauptung 4

Für alle  $A_r \geq 3$  und alle  $k$  mit  $1 \leq k \leq \left[ \frac{r}{2} \right]$  gilt :  $\Pi_{2k}$  kommt in  $S^k(\Pi_2)$  vor .

Beweis :

Die 4. Behauptung ist nur die 3. Behauptung in anderer Formulierung .

Es ist  $1 \leq k \leq \left[ \frac{r}{2} \right] \Leftrightarrow r \geq 2k$  und die Behauptung folgt aus Behauptung 3 .

## Ergebnis:

Für  $\Pi_2$  von  $A_{2n-1}$ .

$d = 1$ ,  $u_1 \in S^n(\Pi_2)$ , d.h.  $n_1 = n$

$s = n-1$ ,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$ ,  $t_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$

Für  $\Pi_2$  von  $A_{2n}$ :

$d = 0$ ,  $s = n$ ,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$ ,  $t_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$

Auf die in den Beispielen 1 und 2 beschriebene Weise ermittelt man alle restlichen Fälle der folgenden Liste der **Feindaten**.

1.  $\Pi_2$  von  $A_4$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $A_4$ ,  $\Pi_4$  von  $D_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_5$ )  
 $d = 0$ ,  $s = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_4$

2.  $\Pi_5$  von  $D_5$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $A_4$ ,  $\Pi_4$  von  $D_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_5$ )  
 $d = 0$ ,  $s = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_5$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1$

3.  $\Pi_4$  von  $D_5$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $A_4$ ,  $\Pi_4$  von  $D_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_5$ )  
 $d = 0$ ,  $s = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_4$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1$

4.  $\Pi_2$  von  $A_5$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $A_5$ ,  $\Pi_1$  von  $E_6$ )  
 $d = 1$ ,  $s = 2$ ,  $n_1 = 3$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_4$

5.  $\Pi_1$  von  $E_6$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $A_5$ ,  $\Pi_1$  von  $E_6$ )  
 $d = 1$ ,  $s = 2$ ,  $n_1 = 3$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_1$ ,  $\lambda_2 = \Pi_5$

6.  $\Pi_4$  von  $B_4$   
 $d = 1$ ,  $s = 2$ ,  $n_1 = 2$ ,  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $\lambda_1 = \Pi_4$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1$

7.  $\Pi_2$  von  $C_3$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $C_3$ ,  $\Pi_1$  von  $F_4$ ,  $\Pi_1\Pi_2$  von  $A_2$ )  
 $d = 2$ ,  $s = 3$ ,  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_2$ ,  $\lambda_3 = \Pi_1\Pi_3$

8.  $\Pi_1$  von  $F_4$  ähnlich wie ( $\Pi_2$  von  $C_3$ ,  $\Pi_1$  von  $F_4$ ,  $\Pi_1\Pi_2$  von  $A_2$ )  
 $d = 2$ ,  $s = 3$ ,  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_1$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2$

9.  $\Pi_3$  von  $A_5$   
 ähnlich wie ( $\Pi_3$  von  $C_3$ ,  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_6$ ,  $\Pi_6$  von  $D_6$ ,  $\Pi_1$  von  $E_7$ )  
 $d = 1$ ,  $s = 4$ ,  $n_1 = 4$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 4$   
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_3$ ,  $\lambda_3 = \Pi_1\Pi_5$ ,  $\lambda_4 = \Pi_2\Pi_4$

10.  $\Pi_5$  von  $D_6$   
 ähnlich wie ( $\Pi_3$  von  $C_3$ ,  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_6$ ,  $\Pi_6$  von  $D_6$ ,  $\Pi_1$  von  $E_7$ )  
 $d = 1$ ,  $s = 4$ ,  $n_1 = 4$ ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 4$   
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_5$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2$ ,  $\lambda_4 = \Pi_4$

11.  $\Pi_6$  von  $D_6$

ähnlich wie ( $\Pi_3$  von  $C_3$ ,  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_6$ ,  $\Pi_6$  von  $D_6$ ,  $\Pi_1$  von  $E_7$ )

$d = 1$   $s = 4$ ,  $n_1 = 4$  ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 4$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_6$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2$ ,  $\lambda_4 = \Pi_4$

12.  $\Pi_1$  von  $E_7$

ähnlich wie ( $\Pi_3$  von  $C_3$ ,  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_5$  von  $D_6$ ,  $\Pi_6$  von  $D_6$ ,  $\Pi_1$  von  $E_7$ )

$d = 1$   $s = 4$ ,  $n_1 = 4$  ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 3$ ,  $t_3 = 2$ ,  $t_4 = 4$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \Pi_1$ ,  $\lambda_3 = \Pi_6$ ,  $\lambda_4 = \Pi_2$

13.  $\Pi_2$  von  $A_{2k}$

$d = 0$ ,  $s = k$  ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 4$ , .....,  $t_k = k$

$\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_4$ ,  $\lambda_3 = \Pi_6$ ,  $\lambda_4 = \Pi_8$ , .....,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$

14.  $\Pi_2$  von  $A_{2k+1}$

$d = 1$ ,  $s = k$   $n_1 = k+1$  ;  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 2$ ,  $t_3 = 3$ ,  $t_4 = 4$ , .....,  $t_k = k$

$\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_4$ ,  $\lambda_3 = \Pi_6$ ,  $\lambda_4 = \Pi_8$ , .....,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$

## Teil 2 : Die Vielfachheiten explizit.

Es sei  $\rho$  eine der guten Darstellungen von  $L$  bzw. von  $G$  und die Bezeichnungen seien wie bisher. Wir wollen nun die genauen Vielfachheiten eines irreduziblen  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$  berechnen.

Sei  $m_\rho = \text{Rang } M(\rho)$  (s.§2 und §3). Unsere Berechnungen von  $m_\rho$  (s. §2), die Berechnung von  $d$  (§4) und von  $d + s$ , also  $s$  (siehe in 5.1) haben folgendes ergeben. Es gibt zwei Fälle:

(i) Es ist  $m_\rho = s$ . Das sind die meisten Fälle.

(ii) Es ist  $m_\rho = s - 1$  (weil  $\lambda_1 = \lambda_2$ ).

Der Fall (ii) tritt in folgenden Fällen auf:

(ii)a)  $\Pi_2$  von  $C_3$  und  $\Pi_1$  von  $F_4$ , wo  $m_\rho = 2$ ,  $s = 3$

(ii)b)  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_6$  von  $D_6$  und  $\Pi_1$  von  $E_7$  wo  $m_\rho = 3$ ,  $s = 4$

### Schreibweise für die irreduziblen $\lambda$ aus $H$ :

Für unsere guten  $\rho$  ist  $M(\rho)$  ein freies Monoid (Brion) in  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_\rho}$  im Fall(i)

und in  $\lambda_1, \lambda_3$  im Falle (ii)a) und  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$  im Fall (ii)b).

Die irreduziblen Komponenten  $\lambda$  aus  $H$  lassen sich also folgendermaßen darstellen mit eindeutig bestimmten  $m_i$  :

In den Fällen aus (i) :  $\lambda = \lambda_1^{m_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{m_\rho}^{m_{m_\rho}}$

In den Fällen aus (ii)a) :  $\lambda = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_3^{m_3}$  und in den Fällen aus (ii)b) :  $\lambda = \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_3^{m_3} \cdot \lambda_4^{m_4}$

(z.B.  $\lambda = \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}$  im Fall  $\Pi_3$  von  $A_5$ .)

Diese Schreibweise wird im Folgenden durchgehend benutzt.

## Berechnung der Grundvielfachheit $d_\lambda$

### Behauptung 5

Für  $\lambda$ , dargestellt wie zuvor, gilt.

$d_\lambda = 1$  in allen Fällen aus (i)

$d_\lambda = m_1 + 1$  in den Fällen (ii)a, (ii)b)

Beweis:

Fall(i):  $M(\rho)$  ist freies Monoid in  $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_p}$

Fall(ii):  $M(\rho)$  ist freies Monoid in  $\lambda_1, \lambda_3$  bzw.  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$

Da  $\lambda_1 = \lambda_2$  und der U-Invariantenring frei erzeugt wird von Höchstgewichtsvektoren  $0 \neq v_i$  von  $\lambda_i$   $i=1, 2, \dots, s$ , gibt es im Falle (ii) a) genau  $m_1 + 1$  Komponenten von Typ  $\lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_3^{m_3}$ , nämlich die von den Höchstgewichtsvektoren  $v_1^{m_1-i} \cdot v_2^i \cdot v_3^{m_3}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m_1$  erzeugten Komponenten.

Im Fall (ii) b) sind es die von  $v_1^{m_1-i} \cdot v_2^i \cdot v_3^{m_3} \cdot v_4^{m_4}$  erzeugten Komponenten.

Bemerke: Die  $m_1 + 1$  Komponenten von Typ  $\lambda$  haben dabei jeweils verschiedene Homogenitätsgrade (s. Behauptung 2).

Wir beschreiben die Daten noch einmal explizit in allen Fällen. Rechnungsbeispiele sind am Ende.

Wir bekommen nun zur expliziten Berechnung der Vielfachheit von  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$ .

Dazu noch.

#### Weitere Bezeichnungen:

Die isotypische Komponente  $H_\lambda$  von  $H$  bezüglich  $\lambda$  sei direkt zerlegt in

$$H_\lambda = \sum_{i=1}^{d_\lambda} H_{\lambda, i}, \text{ wo } H_{\lambda, i} \text{ irreduzibel ist und homogen, d.h. enthalten in}$$

$H^{S_i(\lambda)}$ ,  $s_i(\lambda) \in \mathbb{N}$ , monoton wachsend in  $i = 1, 2, \dots, d_\lambda$  ( $= m_1 + 1$  in den interessanten Fällen). Seien noch  $0 \neq y_i(\lambda) = y_i$  Höchstgewichtsvektoren der  $H_{\lambda, i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_\lambda$ .

Wir nennen  $y_1, y_2, \dots, y_{d_\lambda}$  **Grundvektoren** von  $H_\lambda$ .

### Behauptung 6

Es seien die Fälle (ii) a) und (ii) b) betrachtet. Sei  $s_1(\lambda)$  der minimale Grad unter den  $s_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_\lambda$ . Dann ist im Fall (ii) a):

Es ist  $s_i(\lambda) = s_1(\lambda) + (i - 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_\lambda = m_1 + 1$ . Dann ist:

Im Fall (ii) a)  $s_i(\lambda) = s_1(\lambda) + (i - 1)$   $i = 1, 2, \dots, m_1 + 1$

Im Fall (ii) b)  $s_i(\lambda) = s_1(\lambda) + 2(i - 1)$   $i = 1, 2, \dots, m_1 + 1$

Beweis: (mit den Bezeichnungen aus dem Beweis der Behauptung 1):

Im beiden Fällen ist  $n_1 = \text{Grad}(v_1) = 1$ .

Fall(ii) a):

Hier ist  $\text{Grad}(v_2) = 2 = \text{Grad}(v_1) + 1$ . Es ist  $s_1(\lambda) = \text{Grad}(v_1^{m_1} \cdot v_3^{m_3})$ . Also ist

$$\text{Grad}(v_1^{m_1-j} \cdot v_2^j \cdot v_3^{m_3}) = s_1(\lambda) + j$$

Fall(ii) b):

Es ist  $\text{Grad}(v_2) = 3 = \text{Grad}(v_1) + 2$  und  $s_1(\lambda) = \text{Grad}(v_1^{m_1} \cdot v_3^{m_3} \cdot v_4^{m_4})$  und somit

$$\text{Grad}(v_1^{m_1-j} \cdot v_2^j \cdot v_3^{m_3} \cdot v_4^{m_4}) = s_1(\lambda) + 2j. \text{ In den Formeln ist } i = j + 1 \text{ gesetzt.}$$

**TATSACHE 5.1**

Seien  $Vf_n(\lambda)$  die Vielfachheit von  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$ ,  $Vf_n(0)$  die Vielfachheit der 0-Darstellung in  $S^n(\rho)$ . Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{n-S_i(\lambda)}(0)$$

In diesem Beweis schreiben wir auch kurz "dim" anstelle von "Vielfachheit von  $\lambda$  in".

**Beweis**

$$S_\lambda^n = \sum_{i=0}^n I^{n-i} \otimes H_\lambda^i, \quad Vf_n(\lambda) = \dim S_\lambda^n$$

$$Vf_n(\lambda) = \dim \sum_{i=0}^n I^{n-i} \otimes H_\lambda^i = \sum_{i=0}^n \dim(I^{n-i} \otimes H_\lambda^i)$$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n (\dim I^{n-i} * \dim H_\lambda^i)$$

$\dim I^{n-i} = Vf_{(n-i)}(0)$  und es ist

$$\dim H_\lambda^i = \begin{cases} 1 & \text{für } i \in \{s_1(\lambda), s_2(\lambda), \dots, s_{d_\lambda}(\lambda)\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \dim I^{n-S_i(\lambda)} * \dim H_\lambda^{S_i(\lambda)} = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{n-S_i(\lambda)}(0)$$

**Liste der Grundvielfachheiten der  $d_\lambda$ :**

Sei  $\lambda$  eine auftretende Darstellung in  $S(\rho)$  in der Schreibweise, wie sie zum Beginn von Teil 2 eingeführt wurde. Wir geben die Gesamtliste der Grundvielfachheiten  $d_\lambda$  gemäss der Behauptung 5 und der Liste der Feindaten, mit genauer Angabe der jeweiligen  $\lambda$ .

(5.1) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_4$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}$   
 $d_\lambda = d(\Pi_2, A_4, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}) = 1$

(5.2) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_5$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}$   
 $d_\lambda = d(\Pi_2, A_5, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}) = 1$

(5.3) Sei  $\rho = \Pi_3$ ,  $L = A_5$ ,  $\lambda = \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}$   
 $d_\lambda = d(\Pi_3, A_5, \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}) = m_1 + 1$

(5.4) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_{2k}$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}$   
 $d_\lambda = d(\Pi_2, A_{2k}, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}) = 1$



$$(5.5) \text{ Sei } \rho = \Pi_2, \quad L = A_{2k+1}, \quad \lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_2, A_{2k+1}, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}) = 1$$

$$(5.6) \text{ Sei } \rho = \Pi_4, \quad L = B_4, \quad \lambda = \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_4, B_4, \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2}) = 1$$

$$(5.7) \text{ Sei } \rho = \Pi_2, \quad L = C_3, \quad \lambda = \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_2, C_3, \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}) = m_1 + 1$$

$$(5.8) \text{ Sei } \rho = \Pi_3, \quad L = C_3, \quad \lambda = \Pi_3^{m_1} \Pi_1^{2m_3} \Pi_2^{2m_4}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_3, C_3, \Pi_3^{m_1} \Pi_1^{2m_3} \Pi_2^{2m_4}) = m_1 + 1$$

$$(5.9) \text{ Sei } \rho = \Pi_5, \quad L = D_5, \quad \lambda = \Pi_5^{m_1} \Pi_1^{m_2}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_5, D_5, \Pi_5^{m_1} \Pi_1^{m_2}) = 1$$

$$(5.10) \text{ Sei } \rho = \Pi_6, \quad L = D_6, \quad \lambda = \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_6, D_6, \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}) = m_1 + 1$$

$$(5.11) \text{ Sei } \rho = \Pi_1, \quad L = F_4, \quad \lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_3}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_1, F_4, \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_3}) = m_1 + 1$$

$$(5.12) \text{ Sei } \rho = \Pi_1, \quad L = E_6, \quad \lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_1, E_6, \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}) = 1$$

$$(5.13) \text{ Sei } \rho = \Pi_1, \quad L = E_7, \quad \lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_6^{m_3} \Pi_2^{m_4}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_1, E_7, \Pi_1^{m_1} \Pi_6^{m_3} \Pi_2^{m_4}) = m_1 + 1$$

SATZ 5.1 ( $\lambda$ -Vielfachheit)

Es sei  $\rho$  eine der guten Darstellungen von  $L$  bzw. von  $G$  und die Bezeichnungen seien wie bisher.

Sei  $\lambda$  eine auftretende Darstellung in  $S(\rho)$  in der Schreibweise des Beginns von Teil 2 bzw. der Liste der  $d_\lambda$ .

Seien  $V_n f(0)$  die  $n$ -Vielfachheit der Nulldarstellung in  $S^n(\rho)$ ,

$V_n f(\lambda)$  die Vielfachheit von  $\lambda$  in  $S^n(\rho)$ ,  $d_\lambda$  die Vielfachheit von  $\lambda$  in  $H$ .

Sei  $(\rho, L, \lambda)$  ein folgendes Tripel.

$$(1) \quad (\Pi_2, A_4, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}), (\Pi_5, D_5, \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}), (\Pi_4, D_5, \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2})$$

$$\text{Dann ist } V_n f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m_1 + 2m_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(2) \quad (\Pi_2, A_5, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}), (\Pi_1, E_6, \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}), (\Pi_5, E_6, \Pi_1^{m_2} \Pi_5^{m_1})$$

$$\text{Dann ist } V_n f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_2) = 3t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(3) \quad (\Pi_4, B_4, \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2})$$

$$\text{Dann ist } V_n f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_2) = 2t, \quad t = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(4) \quad (\Pi_2, A_r, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}), (\Pi_{r-1}, A_r, \Pi_{r-1}^{m_1} \Pi_{r-3}^{m_2} \dots \dots \Pi_1^{m_k}), \quad r = 2k$$

$$\text{Dann ist } V_n f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m_1 + 2m_2 + \dots \dots + km_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(5) \quad (\Pi_2, A_r, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}), (\Pi_{r-1}, A_r, \Pi_{r-1}^{m_1} \Pi_{r-3}^{m_2} \dots \dots \Pi_2^{m_k}), \quad r = 2k+1$$

$$\text{Dann ist } V_n f(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_2 + \dots \dots + km_k) = (k+1)t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(6) \quad (\Pi_2, C_3, \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}), (\Pi_1, F_4, \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_3})$$

$$a) \quad V_n f(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+1} V_{[n-(m_1+3m_3)-(i-1)]} f(0)$$

$$b) \quad V_{3k+1} f((\lambda_2)^k) = 0, \quad \lambda_2 = \Pi_1 \Pi_3, \quad (\lambda_2 = \Pi_2)$$

$$(7) \quad (\Pi_6, D_6, \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}), (\Pi_5, D_6, \Pi_5^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}), (\Pi_3, A_5, \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}) \\ (\Pi_1, E_7, \Pi_1^{m_1} \Pi_6^{m_3} \Pi_2^{m_4}), (\Pi_3, C_3, \Pi_3^{m_1} (\Pi_1^2)^{m_3} (\Pi_2^2)^{m_4})$$

$$\text{Dann ist } Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+1} Vf_{[n-(m_1+2m_3+4m_4)-(2i-2)]}(0)$$

$$Vf_{[n-(m_1+2m_3+4m_4)-(2i-2)]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_3 + 4m_4) - (2i - 2) = 4t, t=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis zu (1)

a) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_4$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}$

$$\lambda_1 = \Pi_2, \lambda_2 = \Pi_4, \deg \Pi_2 = 1, \deg \Pi_4 = 2,$$

$$\deg \lambda = \deg \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} = m_1 + 2m_2 \text{ nach der Liste 2.1.1}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_2, A_4, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}) = 1 \text{ nach der Berechnung (5.1)}$$

Sei  $y_1(\lambda)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda) = s_1(\lambda) = m_1 + 2m_2$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) \text{ nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = Vf_{[n-(m_1+2m_2)]}(0)$$

$$\text{Da } Vf_n(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \text{ nach Satz 4.1}$$

$$\text{Dann ist } Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m_1 + 2m_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Sei  $\rho = \Pi_5$ ,  $L = D_5$ ,  $\lambda = \Pi_5^{m_1} \Pi_1^{m_2}$

$$\lambda_1 = \Pi_5, \lambda_2 = \Pi_1, \deg \Pi_5 = 1, \deg \Pi_1 = 2,$$

Beweis geht weiter wie 1a).

c) Sei  $\rho = \Pi_4$ ,  $L = D_5$ ,  $\lambda = \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2}$

$$\lambda_1 = \Pi_4, \lambda_2 = \Pi_1, \deg \Pi_4 = 1, \deg \Pi_1 = 2,$$

Beweis wie 1a und 1b)

Beweis zu (2)

a) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_5$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}$

$$\lambda_1 = \Pi_2, \lambda_2 = \Pi_4, \deg \Pi_2 = 1, \deg \Pi_4 = 2,$$

$$\deg \lambda = \deg \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} = m_1 + 2m_2 \text{ nach der Liste 2.1.1}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_2, A_5, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2}) = 1 \text{ nach Berechnung (5.2)}$$

Sei  $y_1(\lambda)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda) = s_1(\lambda) = m_1 + 2m_2$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = Vf_{[n-(m_1+2m_2)]}(0) \quad , \text{ nach Satz 4.1 ist}$$

$$Vf_m(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } m=3k \quad , \quad k=0,1,\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{[n-(m_1+2m_2)]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=3k+(m_1+2m_2), \quad k=0,1,\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Sei  $\rho = \Pi_1$  ,  $L = E_6$  ,  $\lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}$   
 $\lambda_1 = \Pi_1$  ,  $\lambda_2 = \Pi_5$  ,  $\deg \Pi_1 = 1$  ,  $\deg \Pi_5 = 2$  ,  
 Beweis ist wie 2a.

c) Sei  $\rho = \Pi_5$  ,  $L = E_6$  ,  $\lambda = \Pi_1^{m_2} \Pi_5^{m_1}$   
 $\lambda_1 = \Pi_5$  ,  $\lambda_2 = \Pi_1$  ,  $\deg \Pi_5 = 1$  ,  $\deg \Pi_1 = 2$  ,  
 Beweis wie 2a und 2b.

Beweis zu (3)

Sei  $\rho = \Pi_4$  ,  $L = B_4$  ,  $\lambda = \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2}$   
 $\lambda_1 = \Pi_4$  ,  $\lambda_2 = \Pi_1$  ,  $\deg \Pi_4 = 1$  ,  $\deg \Pi_1 = 2$  ,  
 $\deg \lambda = \deg \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2} = m_1 + 2m_2$  nach der Liste 2.2.1  
 $d_\lambda = d(\Pi_4, B_4, \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2}) = 1$  nach Berechnung (5.6)  
 Sei  $y_1(\lambda)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda) = s_1(\lambda) = m_1 + 2m_2$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = Vf_{[n-(m_1+2m_2)]}(0)$$

$$Vf_m(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } m=2k \quad k=0,1,\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{nach Satz 4.1}$$

Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{[n-(m_1+2m_2)]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n=2k+(m_1+2m_2), \quad k=0,1,\dots\dots\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis zu (4)

a) Sei  $\rho = \Pi_2$  ,  $L = A_r$  ,  $r=2k$  ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}$   
 $\lambda_1 = \Pi_2$  ,  $\lambda_2 = \Pi_4$  ,  $\dots$  ,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$  und  $\deg \Pi_2 = 1$  ,  $\deg \Pi_4 = 2$  ,  $\dots$  ,  $\deg \Pi_{2k} = k$   
 $\deg \lambda = \deg \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k} = m_1 + 2m_2 + \dots \dots + k m_k$   
 $d_\lambda = d(\Pi_2, A_r, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \dots \Pi_{2k}^{m_k}) = 1$  nach Berechnung 5.4  
 Sei  $y_1(\lambda)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda) = m_1 + 2m_2 + \dots \dots + k m_k$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = Vf_{[n-(m_1+2m_2+\dots+km_k)]}(0)$$

$$Vf_m(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } m=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{nach Satz 4.1}$$

Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{[n-(m_1+2m_2+\dots+km_k)]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Sei  $\rho = \Pi_{r-1}$ ,  $L = A_r$ ,  $r = 2k$ ,  $\lambda = \Pi_{r-1}^{m_1} \Pi_{r-3}^{m_2} \dots \Pi_1^{m_k}$

$\lambda_1 = \Pi_{r-1}$ ,  $\lambda_2 = \Pi_{r-3}$ , ...,  $\lambda_k = \Pi_1$  und  $\deg \Pi_{r-1} = 1$ ,  $\deg \Pi_{r-3} = 2$ , ...,  $\deg \Pi_1 = k$

Beweis wie 4a

Beweis zu (5)

a) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = A_r$ ,  $r = 2k+1$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}$

$\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_4$ , ...,  $\lambda_k = \Pi_{2k}$  und  $\deg \Pi_2 = 1$ ,  $\deg \Pi_4 = 2$ , ...,  $\deg \Pi_{2k} = k$

$\deg \lambda = \deg \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k} = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$

$d_\lambda = d(\Pi_2, A_r, \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}) = 1$  nach Brechnung 5.4

Sei  $y_1(\lambda)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda) = m_1 + 2m_2 + \dots + km_k$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = Vf_{(n-s_1(\lambda))}(0) = Vf_{[n-(m_1+2m_2+\dots+km_k)]}(0)$$

$$Vf_m(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = (k+1)t, t=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{nach Satz 4.1}$$

Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_2 + \dots + km_k) = (k+1)t, t=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) a) Sei  $\rho = \Pi_{r-1}$ ,  $L = A_r$ ,  $r = 2k+1$ ,  $\lambda = \Pi_{r-1}^{m_1} \Pi_{r-3}^{m_2} \dots \Pi_2^{m_k}$

$\lambda_1 = \Pi_{r-1}$ ,  $\lambda_2 = \Pi_{r-3}$ , ...,  $\lambda_k = \Pi_2$  und  $\deg \Pi_{r-1} = 1$ ,  $\deg \Pi_{r-3} = 2$ , ...,  $\deg \Pi_2 = k$

Beweis wie 5a

Beweis zu (6)

a (i) Sei  $\rho = \Pi_2$ ,  $L = C_3$ ,  $\lambda = \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}$

$\lambda_1 = \Pi_2$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1 \Pi_3$ ,  $\deg \Pi_2 = 1$ ,  $\deg \Pi_1 \Pi_3 = 3$ ,

$\deg \lambda = \deg \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3} = m_1 + 3m_3$  nach der Liste 2.3.2

$d_\lambda = d(\Pi_2, C_3, \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}) = m_1 + 1$  nach Berechnung (5.7)

Seien  $y_1(\lambda), y_2(\lambda), \dots, y_{(m_1+1)}(\lambda)$  die Grundvektoren von  $H_\lambda$  mit

$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda) = (m_1 + 3m_3) + (i-1)$   $i = 1, 2, \dots, m_1 + 1$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+1} Vf_{[n-(m_1+3m_3)-(i-1)]}(0) \quad , \quad \text{wobei } Vf_m(0) \text{ gleich}$$

der Anzahl der Tupel  $(k_1, k_2)$  mit  $2k_1+3k_2=m$  ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$  ist .

$$a \text{ (ii) } Vf_{(3k+1)}(\lambda_2) = Vf_{(3k+1)}(\Pi_1^k \Pi_3^k) = 0 \quad ?$$

$$d_{\lambda_2} = d(\Pi_2, C_3, \Pi_1 \Pi_3) = 1 \quad \text{nach Berechnung (5.7)}$$

Sei  $y_1(\lambda_2)$  der Grundvektor von  $H_\lambda$  mit  $\deg y_1(\lambda_2) = s_1(\lambda_2) = 3k$

$$Vf_{(3k+1)}(\lambda_2) = Vf_{(3k+1)}(\Pi_1^k \Pi_3^k) = Vf_{((3k+1)-s_1(\lambda_2))}(0)$$

$$Vf_{(3k+1)}(\Pi_1^k \Pi_3^k) = Vf_{[(3k+1)-3k]}(0) = Vf_1(0) = 0 \quad \text{nach Satz 4.1}$$

$$b) \text{ Sei } \rho = \Pi_1, L = F_4 \quad \lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_3}$$

$$\lambda_1 = \Pi_1, \lambda_2 = \Pi_2, \deg \Pi_1 = 1, \deg \Pi_2 = 3,$$

Beweis wie 6a.

Beweis zu (7)

$$a) \text{ Sei } \rho = \Pi_6, L = D_6, \lambda = \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}$$

$$\lambda_1 = \Pi_6, \lambda_2 = \Pi_2, \lambda_3 = \Pi_4, \deg \Pi_6 = 1, \deg \Pi_2 = 2, \deg \Pi_4 = 4$$

$$\deg \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4} = m_1 + 2m_3 + 4m_4 \quad \text{nach der Liste 2.4.1}$$

$$d_\lambda = d(\Pi_6, D_6, \Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}) = m_1 + 1 \quad \text{nach Berechnung (5.10)}$$

Seien  $y_1(\lambda), y_2(\lambda), \dots, y_{(m_1+1)}(\lambda)$  die Grundvektoren von  $H_\lambda$  mit

$$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda) = (m_1 + 2m_3 + 4m_4) + (2i-2) \quad i = 1, 2, \dots, m_1 + 1$$

$$Vf_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} Vf_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad \text{nach Tatsache 5.1}$$

$$Vf_n(\Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}) = \sum_{i=1}^{m_1+1} Vf_{[n-(m_1+2m_3+4m_4)-(2i-2)]}(0)$$

$$Vf_m(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 4k, \quad k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{nach Satz 4.1}$$

Dann ist

$$Vf_n(\lambda) = Vf_n(\Pi_6^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}) = \sum_{i=1}^{m_1+1} Vf_{[n-(m_1+2m_3+4m_4)-(2i-2)]}(0), \text{wobei}$$

$$Vf_{[n-(m_1+2m_3+4m_4)-(2i-2)]}(0) = \begin{cases} 1 & \text{für } n - (m_1 + 2m_3 + 4m_4) - (2i-2) = 4t, t=0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$b) a) \text{ Sei } \rho = \Pi_5, L = D_6, \lambda = \Pi_5^{m_1} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}$$

$$\lambda_1 = \Pi_5, \lambda_2 = \Pi_2, \lambda_3 = \Pi_4, \deg \Pi_5 = 1, \deg \Pi_2 = 2, \deg \Pi_4 = 4$$

Beweis wie 7a.

c) Sei  $\rho = \Pi_3$ ,  $L = A_5$ ,  $\lambda = \Pi_3^{m_1} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}$   
 $\lambda_1 = \Pi_3$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1 \Pi_5$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2 \Pi_4$ ,  $\deg \Pi_3 = 1$ ,  $\deg \Pi_1 \Pi_5 = 2$ ,  $\deg \Pi_2 \Pi_4 = 4$   
 Beweis wie 7a und 7b

d) Sei  $\rho = \Pi_1$ ,  $L = E_7$ ,  $\lambda = \Pi_1^{m_1} \Pi_6^{m_3} \Pi_2^{m_4}$   
 $\lambda_1 = \Pi_1$ ,  $\lambda_2 = \Pi_6$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2$ ,  $\deg \Pi_1 = 1$ ,  $\deg \Pi_6 = 2$ ,  $\deg \Pi_2 = 4$   
 Beweis wie 7a, 7b und 7c

e) Sei  $\rho = \Pi_3$ ,  $L = C_3$ ,  $\lambda = \Pi_3^{m_1} (\Pi_1^2)^{m_3} (\Pi_2^2)^{m_4}$   
 $\lambda_1 = \Pi_3$ ,  $\lambda_2 = \Pi_1^2$ ,  $\lambda_3 = \Pi_2^2$ ,  $\deg \Pi_3 = 1$ ,  $\deg \Pi_1^2 = 2$ ,  $\deg \Pi_2^2 = 4$   
 Beweis wie 7a,b,c,d.

**Rechnungsbeispiele :**

**Beispiel 1 a :**

Berechne  $Vf_6(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_1^3$  in  $S^6(\Pi_1)$  von  $F_4$ ,  $Vf_6(\Pi_1^3) = 3$

Gewicht	Grundvektoren	$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda)$	$s_i(\lambda) = m_1 + 2m_2$	$(m_1, m_2)$
$\lambda$	$y_i(\lambda)$ $i=1,2,3,4$	$s_i(\lambda) = s_i(\lambda) + (i - 1)$	$s_i(\lambda) = k$	
$\Pi_1^3$	$y_1(\lambda)$	$s_1(\lambda) = 3+0=3$	$s_1(\lambda) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$	$(3, 0)$
$\Pi_1^3$	$y_2(\lambda)$	$s_2(\lambda) = 3+1=4$	$s_2(\lambda) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4$	$(2, 1)$
$\Pi_1^3$	$y_3(\lambda)$	$s_3(\lambda) = 3+2=5$	$s_3(\lambda) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$	$(1, 2)$
$\Pi_1^3$	$y_4(\lambda)$	$s_4(\lambda) = 3+3=6$	$s_4(\lambda) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 6$	$(0, 3)$

$$\begin{aligned}
 Vf_6(\Pi_1^3) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{6-s_i(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_{6-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{6-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{6-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{6-s_4(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_3(0) + Vf_2(0) + Vf_1(0) + Vf_0(0) \\
 &= 1 + 1 + 0 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_1^3$  in  $S^6(\Pi_1)$  von  $F_4$  kommt 3 mal mit  $\deg \Pi_1^3 = s_1(\lambda) = 3$ ,  $\deg \Pi_1^3 = s_2(\lambda) = 4$  und  $\deg \Pi_1^3 = s_4(\lambda) = 6$  vor.

**Beispiel 1 b :**

Berechne  $Vf_{11}(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_1^3$  in  $S^{11}(\Pi_1)$  von  $F_4$ ,  $Vf_{11}(\Pi_1^3) = 6$

$$\begin{aligned} Vf_{11}(\Pi_1^3) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{11-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{11-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{11-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{11-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{11-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_8(0) + Vf_7(0) + Vf_6(0) + Vf_5(0) \\ &= 2 + 1 + 2 + 1 = 6 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_1^3$  in  $S^{11}(\Pi_1)$  von  $F_4$  kommt 6 mal vor ; 2 mal mit  $\deg \Pi_1^3 = s_1(\lambda) = 3$ , mit  $\deg \Pi_1^3 = s_2(\lambda) = 4$ , 2 mal mit  $\deg \Pi_1^3 = s_3(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_1^3 = s_4(\lambda) = 6$ .

**Beispiel 2a :**

Berechne  $Vf_9(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_3^3$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$ ,  $Vf_9(\Pi_3^3) = 2$

Gewicht	Grundvektoren	$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda)$	$s_i(\lambda) = m_1 + 3m_2$	$(m_1, m_2)$
$\lambda$	$y_i(\lambda)$ $i=1,2,3,4$	$s_i(\lambda) = s_1(\lambda) + (2i - 2)$	$s_i(\lambda) = k$	
$\Pi_3^3$	$y_1(\lambda)$	$s_1(\lambda) = 3 + 0 = 3$	$s_1(\lambda) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 3$	$(3, 0)$
$\Pi_3^3$	$y_2(\lambda)$	$s_2(\lambda) = 3 + 2 = 5$	$s_2(\lambda) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$	$(2, 1)$
$\Pi_3^3$	$y_3(\lambda)$	$s_3(\lambda) = 3 + 4 = 7$	$s_3(\lambda) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 7$	$(1, 2)$
$\Pi_3^3$	$y_4(\lambda)$	$s_4(\lambda) = 3 + 6 = 9$	$s_4(\lambda) = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9$	$(0, 3)$

$$\begin{aligned} Vf_9(\Pi_1^3) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{9-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{9-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_6(0) + Vf_4(0) + Vf_2(0) + Vf_0(0) \\ &= 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^3$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 2 mal mit  $\deg \Pi_3^3 = s_2(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_3^3 = s_4(\lambda) = 9$  vor.

**Beispiel 2b :**

Berechne  $Vf_{12}(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_3^3$  in  $S^{12}(\Pi_3)$  von  $A_5$ ,  $Vf_{12}(\Pi_3^3) = 0$

$$\begin{aligned} Vf_{12}(\Pi_1^3) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{12-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{12-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{12-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{12-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{12-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_9(0) + Vf_7(0) + Vf_5(0) + Vf_3(0) \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^3$  in  $S^{12}(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt nicht vor.



**Beispiel 2c :**

Berechne  $Vf_{13}(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_3^3$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$ ,  $Vf_{13}(\Pi_3^3) = 2$

$$\begin{aligned} Vf_{13}(\Pi_3^3) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{13-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{13-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{10}(0) + Vf_8(0) + Vf_6(0) + Vf_4(0) \\ &= 0 + 1 + 0 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^3$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 2 mal mit  $\deg \Pi_3^3 = s_2(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_1^3 = s_4(\lambda) = 9$  vor.

**Beispiel 3a :**

Berechne  $Vf_9(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$ ,  $Vf_9(\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5) = 2$

Gewicht	Grundvektoren	$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda)$	$s_i(\lambda) = m_1 + 3m_2 + 2m_3$	$(m_1, m_2, m_3)$
$\lambda$	$y_i(\lambda)$ $i=1, 2, 3, 4$	$s_i(\lambda) = s_i(\lambda) + (2i - 2)$	$s_i(\lambda) = k$	
$\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$	$y_1(\lambda)$	$s_1(\lambda) = 5 + 0 = 5$	$s_1(\lambda) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 5$	$(3, 0, 1)$
$\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$	$y_2(\lambda)$	$s_2(\lambda) = 5 + 2 = 7$	$s_2(\lambda) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7$	$(2, 1, 1)$
$\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$	$y_3(\lambda)$	$s_3(\lambda) = 5 + 4 = 9$	$s_3(\lambda) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 9$	$(1, 2, 1)$
$\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$	$y_4(\lambda)$	$s_4(\lambda) = 5 + 6 = 11$	$s_4(\lambda) = 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$	$(0, 3, 1)$

$$\begin{aligned} Vf_9(\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{9-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{9-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_4(0) + Vf_2(0) + Vf_0(0) + Vf_{-2}(0) \\ &= 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 2 mal mit  $\deg \Pi_3^3 = s_1(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_1^3 = s_3(\lambda) = 9$  vor.

**Beispiel 3b :**

Berechne  $Vf_{13}(\lambda)$ ,  $\lambda = \Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$ ,  $Vf_{13}(\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5) = 2$

$$\begin{aligned} Vf_{13}(\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=4} Vf_{13-s_i(\lambda)}(0) \\ &= Vf_{13-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_4(\lambda)}(0) \\ &= Vf_8(0) + Vf_6(0) + Vf_4(0) + Vf_2(0) \\ &= 1 + 0 + 1 + 0 = 2 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 2 mal mit  $\deg \Pi_3^3 \Pi_1 \Pi_5 = s_1(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_1^3 \Pi_1 \Pi_5 = s_3(\lambda) = 9$  vor.

**Beispiel 4 a :**

Berechne  $Vf_9(\lambda)$  ,  $\lambda = \Pi_3^5$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$  ,  $Vf_9(\Pi_3^5) = 2$

Gewicht	Grundvektoren	$\deg y_i(\lambda) = s_i(\lambda)$	$s_i(\lambda) = m_1 + 3m_2$	$(m_1, m_2)$
$\lambda$	$y_i(\lambda)$ $i=1,2,3,4,5,6$	$s_i(\lambda) = s_1(\lambda) + (2i - 2)$	$s_i(\lambda) = k$	
$\Pi_3^5$	$y_1(\lambda)$	$s_1(\lambda) = 5 + 0 = 5$	$s_1(\lambda) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 5$	$(5, 0)$
$\Pi_3^5$	$y_2(\lambda)$	$s_2(\lambda) = 5 + 2 = 7$	$s_2(\lambda) = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 7$	$(4, 1)$
$\Pi_3^5$	$y_3(\lambda)$	$s_3(\lambda) = 5 + 4 = 9$	$s_3(\lambda) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$	$(3, 2)$
$\Pi_3^5$	$y_4(\lambda)$	$s_4(\lambda) = 5 + 6 = 11$	$s_4(\lambda) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$	$(2, 3)$
$\Pi_3^5$	$y_5(\lambda)$	$s_5(\lambda) = 5 + 8 = 13$	$s_5(\lambda) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 13$	$(1, 4)$
$\Pi_3^5$	$y_6(\lambda)$	$s_6(\lambda) = 5 + 10 = 15$	$s_6(\lambda) = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 15$	$(0, 5)$

$$\begin{aligned}
 Vf_9(\Pi_3^5) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=6} Vf_{9-s_i(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_{9-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_4(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_5(\lambda)}(0) + Vf_{9-s_6(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_4(0) + Vf_2(0) + Vf_0(0) + Vf_{-2}(0) + Vf_{-4}(0) + Vf_{-6}(0) \\
 &= 1 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 2
 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^5$  in  $S^9(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 2 mal mit  $\deg \Pi_3^5 = s_1(\lambda) = 5$  und mit  $\deg \Pi_3^5 = s_3(\lambda) = 9$  vor.

**Beispiel 4b :**

Berechne  $Vf_{13}(\lambda)$  ,  $\lambda = \Pi_3^5$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$  ,  $Vf_{13}(\Pi_3^5) = 3$

$$\begin{aligned}
 Vf_{13}(\Pi_3^5) &= \sum_{i=1}^{d_\lambda=6} Vf_{13-s_i(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_{13-s_1(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_2(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_3(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_4(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_5(\lambda)}(0) + Vf_{13-s_6(\lambda)}(0) \\
 &= Vf_8(0) + Vf_6(0) + Vf_4(0) + Vf_2(0) + Vf_0(0) + Vf_{-2}(0) \\
 &= 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3
 \end{aligned}$$

Die Darstellung  $\Pi_3^5$  in  $S^{13}(\Pi_3)$  von  $A_5$  kommt 3mal mit  $\deg \Pi_3^5 = s_1(\lambda) = 5$  , mit  $\deg \Pi_3^5 = s_3(\lambda) = 9$  und mit  $\deg \Pi_3^5 = s_5(\lambda) = 13$  vor.

Die folgenden Folgerungen 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6, 5.7 ergeben sich aus Satz 3.1, Satz 4.1 und Satz 5.1.

**FOLGERUNG 5.1**

Sei  $L \cong A_r$   $r > 1$  und  $\rho$  eine irreduzible Darstellung von  $L$

1) für  $r = 2k$ ,  $\rho = \Pi_2$

$$S^n(\Pi_2) = \sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}$$

mit  $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + km_k = n$   $m_i \in \mathbb{N}_0$   $i = 0, 1, \dots, k$

2) für  $r = 2k + 1$ ,  $\rho = \Pi_2$

$$S^n(\Pi_2) = \sum_{(m_1, m_2, \dots, m_k)} \Pi_2^{m_1} \Pi_4^{m_2} \dots \Pi_{2k}^{m_k}$$

mit  $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots + km_k = n - (k+1)t$

$t = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor$ ,  $m_i \in \mathbb{N}_0$ ;  $i = 1, 2, \dots, k$

3) Sei  $L \cong A_5$   $\rho = \Pi_3$

$$S^n(\Pi_3) = \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4)} \alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \Pi_3^{m_1+m_2} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}$$

mit  $m_1 + 3m_2 + 2m_3 + 4m_4 = n - 4k$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

$$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} = \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \text{Vf}_{(n-s_i(\lambda))}(\lambda) \quad ; \quad d_\lambda = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + 1$$

$$s_i(\lambda) = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 4m_4) + 2(i-1); \quad \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+m_2+1} \text{Vf}_{[n-(m_1+m_2+2m_3+4m_4)-2(i-1)]}(\lambda) \quad (0)$$

$$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \in \mathbb{N}_0, \quad m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda = \Pi_3^{m_1+m_2} (\Pi_1 \Pi_5)^{m_3} (\Pi_2 \Pi_4)^{m_4}$$

**FOLGERUNG 5.2**

Sei  $L \cong B_4$ ,  $\rho = \Pi_4$

$$S^n(\Pi_4) = \sum_{(m_1, m_2)} \Pi_1^{m_2} \Pi_4^{m_1}$$

mit  $m_1 + 2m_2 = n - 2k$   $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

FOLGERUNG 5.3

$$L \cong C_3, \quad \rho = \Pi_2$$

$$S^n(\Pi_2) = \sum_{(m_1, m_3)} \alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} \Pi_2^{m_1} (\Pi_1 \Pi_3)^{m_3}$$

$$\text{mit } m_1 + 3m_3 = n - i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad m_1, m_3 \in \mathbb{N}_0$$

$$\alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} = \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \text{Vf}_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad ; \quad d_\lambda = 1, 2, \dots, m_1 + 1$$

$$s_i(\lambda) = (m_1 + 3m_3) + (i-1), \quad \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+1} \text{Vf}_{[n-(m_1+3m_3)-(i-1)]}(0)$$

$$\alpha_{(0, k)}^{3k+1} = 0, \quad \text{für } n = 3k+1, \text{ d.h. } (\Pi_1 \Pi_3)^k \text{ kommt nicht für } n = 3k+1 \text{ in } S^n(\Pi_2) \text{ vor.}$$

Beweis:  $\alpha_{(0, k)}^{3k+1} = 0$  nach Tatsache 5.5 .

FOLGERUNG 5.4

1.  $L \cong D_5$  und  $\rho = \Pi_4$

$$S^n(\Pi_4) = \sum_{(m_1, m_2)} \Pi_4^{m_1} \Pi_1^{m_2} \quad \text{mit } m_1 + 2m_2 = n \quad m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$$

2.  $L \cong D_6$  und  $\rho = \Pi_6$

$$S^n(\Pi_6) = \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4)} \alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \Pi_6^{m_1+m_2} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}$$

$$\text{mit } m_1 + 3m_2 + 2m_3 + 4m_4 = n - 4t, \quad t = 0, 1, \dots, \left[ \frac{n}{4} \right]$$

$$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} = \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \text{Vf}_{(n-s_i(\lambda))}(0) \quad ; \quad d_\lambda = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + 1$$

$$s_i(\lambda) = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 4m_4) + 2(i-1); \quad \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+m_2+1} \text{Vf}_{[n-(m_1+m_2+2m_3+4m_4)-2(i-1)]}(0)$$

$$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \in \mathbb{N}_0, \quad m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \lambda = \Pi_6^{m_1+m_2} \Pi_2^{m_3} \Pi_4^{m_4}$$

FOLGERUNG 5.5

Sei  $L \cong F_4$  und  $\rho = \Pi_1$

$$S^n(\Pi_1) = \sum_{(m_1, m_3)} \alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_3}$$

mit  $m_1 + 3m_3 = n - i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$   $m_1, m_3 \in \mathbb{N}_0$

$\alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha_{(m_1, m_3)}^{n-i} = \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \text{Vf}_{(n-s_i(\lambda))}(0)$ ,  $d_\lambda = 1, 2, \dots, m_1 + 1$

$s_i(\lambda) = (m_1 + 3m_3) + (i-1)$ ,  $\text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+1} \text{Vf}_{[n-(m_1+3m_3)-(i-1)]}(0)$

$\alpha_{(0, k)}^{3k+1} = 0$ , für  $n = 3k+1$ , d.h.  $\Pi_2^k$  kommt nicht für  $n = 3k+1$  in  $S^n(\Pi_1)$  vor.

Beweis:  $\alpha_{(0, k)}^{3k+1} = 0$  nach Tatsache 5.5 .

FOLGERUNG 5.6

Sei  $L \cong E_6$  und  $\rho = \Pi_1$

$$S^n(\Pi_1) = \sum_{(m_1, m_2)} \Pi_1^{m_1} \Pi_5^{m_2}$$

mit  $m_1 + 2m_2 = n - 3k$   $k = 0, 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$

FOLGERUNG 5.7

Sei  $L \cong E_7$  und  $\rho = \Pi_1$

$$S^n(\Pi_1) = \sum_{(m_1, m_2, m_3, m_4)} \alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \Pi_1^{m_1+m_2} \Pi_6^{m_3} \Pi_3^{m_4}$$

mit  $m_1 + 3m_2 + 2m_3 + 4m_4 = n - 4k$ ,  $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} = \text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \text{Vf}_{(n-s_i(\lambda))}(0)$ ;  $d_\lambda = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + 1$

$s_i(\lambda) = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 4m_4) + 2(i-1)$ ;  $\text{Vf}_n(\lambda) = \sum_{i=1}^{m_1+m_2+1} \text{Vf}_{[n-(m_1+m_2+2m_3+4m_4)-2(i-1)]}(0)$

$\alpha_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}^{n-4k} \in \mathbb{N}_0$ ,  $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{N}_0$  und  $\lambda = \Pi_1^{m_1+m_2} \Pi_6^{m_3} \Pi_3^{m_4}$

## Anhang 1

Bei den Sätzen 3.1 , 4.1 , 5.1 und den dabei verwendeten Daten  $d, s, m_p$  treten die Darstellungen  $\rho$  in gewissen Gruppierungen auf. Einige Male erwähnt und betrachtet wurde die (schlechte) Darstellung  $\rho = \Pi_3$  von  $C_3$ , die sich genau so verhält wie die Darstellungen  $\Pi_3$  von  $A_5$ ,  $\Pi_5, \Pi_6$  von  $D_6$  und  $\Pi_1$  von  $E_7$ . Wir geben hier Beweise für einen Teil der Ergebnisse für dieses  $\rho$  (vergl. Diesen Fall bei [ Brion ]) mittels eines älteren Ausreduzierungsergebnisses aus [ Whippman]. Ausgangspunkt ist die Grund-Tatsache zu Beginn der 3. Beweisvariante in §2 und die Tatsache, dass  $A_2$  die Hauptisotropiegruppe bei  $\Pi_3$  von  $C_3$  ist ([ Elashvili ]).

### Whippman - Verfahren $\Pi$ von $C_{3 \downarrow A_2}$

Sei  $\Pi = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3} = [m_1, m_2, m_3]$  ein höchstes Gewicht von  $C_3$

1) Wir bilden die Signatur-Partitionen :

$$\mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle = \langle m_1 + m_2 + m_3, m_2 + m_3, m_3 \rangle .$$

2) Wir betrachten folgende Operation von  $S_3$  auf die Menge aller Tripel :

Dabei sind  $s_1 = (1,2)$ ,  $s_2 = (2,3)$ ,  $s_3$ ,  $s_i^2 = \text{id}$

$$S_3 = \{ 1, s_1, s_2, s_3 = s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_1 s_2, s_2 s_1 \}$$

Setze	$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$		$=: \lambda_{\text{Typ1}}$
	$s_1^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$= (\lambda_2 - 1, \lambda_1 + 1, \lambda_3)$	$=: \lambda_{\text{Typ2}}$
	$s_2^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$= (\lambda_1, \lambda_3 - 1, \lambda_2 + 1)$	$=: \lambda_{\text{Typ3}}$
	$s_3^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$= (\lambda_3 - 2, \lambda_2, \lambda_1 + 2)$	$=: \lambda_{\text{Typ4}}$
	$s_2 s_1^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$= (\lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \lambda_1 + 2)$	$=: \lambda_{\text{Typ5}}$
	$s_1 s_2^*(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	$= (\lambda_3 - 2, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1)$	$=: \lambda_{\text{Typ6}}$

3)  $\mu_{\text{sp}(3)} = \mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle .$

Zu  $\mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$  betrachte folgende Menge  $T_\mu$  von ganzzahligen Tripeln :

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$$

$$T_\mu = : \{ \lambda^* = (\mu_1 - 2r_1, \mu_2 - 2r_2, \mu_3 - 2r_3) \mid r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}_0 \}$$

4) Wir setzen  $T_{\mu,i} = \{ \lambda_{\text{Typ}i}^* \mid \lambda^* \in T_\mu, \lambda_{\text{Typ}i}^* \text{ ist eine Partition} \}$

5) Wir bilden folgende formale Linearkombinationen von Partitionen :

$$\mu_{\text{so}(6)} = \sum_{\lambda \in T_{\mu,1}} \lambda + \sum_{\lambda \in T_{\mu,5}} \lambda + \sum_{\lambda \in T_{\mu,6}} \lambda - \sum_{\lambda \in T_{\mu,2}} \lambda - \sum_{\lambda \in T_{\mu,3}} \lambda - \sum_{\lambda \in T_{\mu,4}} \lambda \quad \text{schreiben wir kurz als}$$

$$\mu_{\text{so}(6)} = \sum \pm \lambda \quad ( * )$$

6) Für eine Partition  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  bilden wir  $p = (p_1, p_2, p_3, 0)$ :  
 $p_\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, 0)$  falls  $\lambda_3 = 0$  bzw.  $p_\lambda^+ = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3, 0)$ ,  
 und  $p_\lambda^- = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 0)$  falls  $\lambda_3 \neq 0$ . Ersetzt man in (\*) jedes der  
 $\lambda$  durch entweder  $p_\lambda$  falls  $\lambda_3 = 0$  oder  $p_\lambda^+ + p_\lambda^-$  falls  $\lambda_3 \neq 0$ , so erhält  
 man eine Linearkombination von 4 Tupeln der Form  $p = (p_1, p_2, p_3, 0)$ , die  
 wir kurz schreiben als

$$\mu_{\text{SU}(4)} = \sum \pm p \quad ( ** )$$

7) Eine Partition  $p = (p_1, p_2, p_3, 0)$  wird aufgefasst als Charakter von  
 $\text{SU}(4)$ . Wir bilden den klassischen Charakter auf  $U(3) \subset \text{SU}(4)$ , d.h. bilden alle

$$\text{Schemata} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\ & q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

mit  $p_1 \geq q_1 \geq p_2 \geq q_2 \geq p_3 \geq q_3 \geq 0$ , alle ganzzahlig.

$$\mu_{U(3)} = \sum \pm q$$

8) Ein Charakter  $q = (q_1, q_2, q_3)$  von  $U(3)$  liefert eingeschränkt auf  $\text{SU}(3)$   
 den Charakter  $a = (a_1, a_2) = (q_1 - q_2, q_2 - q_3)$  und

$$\mu_{\text{SU}(3)} = \sum \pm a$$

Jedes dieser  $p$  definiert einen irreduziblen Charakter von  $\text{SU}(4)$ . Wir  
 führen nun die klassische Verzweigung auf die Untergruppe  $U(3) \subset \text{SU}(4)$   
 durch, d.h. wir ersetzen jedes  $p = (p_1, p_2, p_3, 0)$  durch die Summe aller  
 solchen Partitionen  $q = (q_1, q_2, q_3)$  mit  $p_1 \geq q_1 \geq p_2 \geq q_2 \geq p_3 \geq q_3 \geq 0$ .  
 Dann wird aus (\*\*) )

$$\mu_{U(3)} = \sum \pm q \quad ( *** )$$

Jedes  $q = (q_1, q_2, q_3)$ , aufgefasst als irreduzibler Charakter von  $U(3)$ , wird  
 eingeschränkt auf  $\text{SU}(3)$ . Den eingeschränkten Charakter schreiben wir als  
 $a_q = [q_1 - q_2, q_2 - q_3] = : [a_1, a_2]$ . Solch ein  $[a_1, a_2]$  steht für die irreduzible  
 Darstellung  $\Pi_1^{a_1} \Pi_2^{a_2}$  von  $\text{SU}(3) = A_2$ . Ersetzt man jedes  $q$  in (\*\*\*) durch das  
 entsprechende  $a_q$ , so erhält man

$$\mu_{\text{SU}(3)} = \sum \pm a_q \quad ( **** )$$

### SATZ 1

Die Einschränkung des irreduziblen Charakters  $\mu = \mu_{\text{sp}(3)}$  auf die Untergruppe

$\text{SU}(3)$  ist gerade das so erhaltene  $\mu_{\text{SU}(3)} = \sum \pm a_q$ .

Bemerke: Die negativen Vorzeichen kürzen sich insgesamt heraus.

**SATZ 2**

Die Darstellungen  $\Pi = \Pi_1^{m_1} \Pi_2^{m_2} \Pi_3^{m_3}$  von  $C_3$ , die Fixpunkte unter  $A_2$  haben, sind genau diejenigen, für die  $m_1$  und  $m_2$  beide gerade sind. Die Dimension der Fixpunktmenge von  $A_2$  ist dann  $m_3 + 1$ .

**Beweis :**

In der Gleichung  $(****) \mu_{SU(3)} = \sum \pm a_q$  betrachten wir genau diejenigen  $a_q$

als triviale Komponente von  $SU(3)$ , für die  $a_q = (0, 0)$  ist. Für die entsprechende  $q$  heißt das: alle Koordinaten sind gleich, d.h.  $q = q_1 = q_2 = q_3$ . Solch ein  $q$  taucht bei Verzweigen eines  $p = (p_1, p_2, p_3, 0)$  genau dann auf, wenn  $p_2 = p_3$  ist, und zwar liefert solch ein  $p$  genau ein  $q$  mit drei gleichen Koordinaten, nämlich  $q = q_1 = q_2 = q_3$ .

Die  $p$ 's entstanden durch Ersetzen der  $\lambda$  in Gleichung  $(*)$  gemäß den dort geschriebenen Modifikationen. Sieht man die Gleichung an, so stellt man fest:  $p_2 = p_3$  in  $p_\lambda, p_\lambda^+$  oder  $p_\lambda^-$  genau dann, wenn  $\lambda_1 = \lambda_2$  ist.

**Fazit :**

Man erhält die Dimension der Fixpunktmenge von  $A_2$  bei der Darstellung  $\mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$  von  $C_3$  auf folgende Weise:

Man zählt diejenigen  $\lambda$ 's in der Gleichung  $(*)$ , für welche  $\lambda_1 = \lambda_2$  ist, und zwar zählt man solch ein  $\lambda$  doppelt, wenn  $\lambda_3 \neq 0$  ist, weil solch ein  $\lambda$  zwei  $p$ 's liefert, und zählt es einfach, wenn  $\lambda_3 = 0$  ist.

Außerdem beachte man das Vorzeichen: die so erhaltene Summe ist die Dimension der Fixpunktmenge von  $A_2$ .

**Beispiel :**

$$\langle 3, 1, 1 \rangle_{SO(6)} = (3, 1, 1) + (1, 1, 1) - (3, 0, 0) - (1, 0, 0)$$

$\lambda_1 = \lambda_2$  gilt nur für den zweiten Summanden. Dort ist  $\lambda_3 = 1 \neq 0$ . Also wird jedes  $\lambda$  doppelt gezählt, und das Vorzeichen ist positiv. Damit ist die Dimension der Fixpunktmenge gleich 2.

Aus dem  $\mu$  wurden die  $\lambda^*$ 's produziert und daraus 6 verschiedene Typen von  $\lambda$ 's gebildet. Für den allgemeinen Beweis muss man die Bedingungen registrieren, wann bei diesen verschiedenen Typen  $\lambda_1 = \lambda_2$  ist.

Aus der Liste der Typen ergibt sich:

Typ	$\lambda$	$\lambda_1 = \lambda_2$
1	$(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$	$\lambda_1^* = \lambda_2^*$
2	$(\lambda_2^* - 1, \lambda_1^* + 1, \lambda_3^*)$	$\lambda_1^* = \lambda_2^* - 2$
3	$(\lambda_1^*, \lambda_3^* - 1, \lambda_2^* + 1)$	$\lambda_1^* = \lambda_3^* - 1$
4	$(\lambda_3^* - 2, \lambda_2^*, \lambda_1^* + 2)$	$\lambda_2^* = \lambda_3^* - 2$
5	$(\lambda_2^* - 1, \lambda_3^* - 1, \lambda_1^* + 2)$	$\lambda_2^* = \lambda_3^*$
6	$(\lambda_3^* - 2, \lambda_1^* + 1, \lambda_2^* + 1)$	$\lambda_1^* = \lambda_3^* - 3$



Wir beweisen nun den allgemeinen Satz , mit dem wir vier verschiedene Paritätsfälle für einzelne  $m_1$  und  $m_2$  behandeln :

1.Fall

$m_1$  und  $m_2$  sind beide ungerade .

Für  $\mu = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle = \langle m_1+m_2+m_3, m_2+m_3, m_3 \rangle$  und nach der Konstruktion von  $\lambda^*$  für alle  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*)$  gilt dann Parität  $\lambda_1^* \neq$  Parität  $\lambda_2^*$ ,

Parität  $\lambda_2^* \neq$  Parität  $\lambda_3^*$  und Parität  $\lambda_1^* =$  Parität  $\lambda_3^*$  .

Ein Blick auf die Spalte  $\lambda_1 = \lambda_2$  der Tabelle zeigt : Diese Paritätssituation widerspricht allen sechs Bedingungen dieser Spalte . Also : falls  $m_1$  und  $m_2$  beide ungerade sind , gibt es in der Gleichung ( \* ) keine  $\lambda$  's mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  , somit ist die Dimension der Fixpunktmenge gleich Null .

2.Fall

$m_1$  und  $m_2$  sind beide gerade .

Die Paritätssituation ist für  $\lambda^*$  : Parität  $\lambda_1^* =$  Parität  $\lambda_2^* =$  Parität  $\lambda_3^*$

Der Blick auf die dritte Spalte zeigt diesmal : Es gibt keine  $\lambda$  's von Typ 3 und Typ 6 ; die anderen Typen sind möglich und müssen abgezählt werden .

Verrechnen der  $\lambda$  's von Typ 1 und Typ 2 für die  $\lambda_1 = \lambda_2$  :

Bei beiden Typen kann  $\lambda_3 = \mu_3$  jeden der Werte

$\mu_3, \mu_3 - 2, \mu_3 - 4, \dots, \begin{cases} 0 & \mu_3 \text{ gerade} \\ 1 & \mu_3 \text{ ungerade} \end{cases}$  annehmen .

Für solch ein festes  $\lambda_3$  gibt es offenbar folgende Möglichkeiten für die gesuchten  $\lambda^*$  bzw.  $\lambda$  . ( Beachte :  $\lambda$  muss eine Partition sein .)

Beim Typ 1 ( $\lambda = \lambda^*$ )	Beim Typ 2	
( $\lambda_3, \lambda_3, \lambda_3$ )	( $\lambda_3^*, \lambda_3^*+2, \lambda_3^*$ )	( $\lambda_3+1, \lambda_3+1, \lambda_3$ )
( $\lambda_3+2, \lambda_3+2, \lambda_3$ )	( $\lambda_3^*+2, \lambda_3^*+4, \lambda_3^*$ )	( $\lambda_3+3, \lambda_3+3, \lambda_3$ )
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
( $\mu_2, \mu_2, \lambda_3$ )	( $\mu_2-2, \mu_2, \lambda_3^*$ )	( $\mu_2-1, \mu_2-1, \lambda_3$ )

Man stellt fest :

Für jedes  $\lambda_3 = \mu_3, \mu_3 - 2, \mu_3 - 4, \dots, \begin{cases} 0 & \mu_3 \text{ gerade} \\ 1 & \mu_3 \text{ ungerade} \end{cases}$

gibt es links, d.h. Typ 1, genau eine Möglichkeit mehr als rechts, d.h. bei den  $\lambda$  's vom Typ 2 . Berücksichtigt man die Vorzeichen (Typ 1 mit plus , Typ 2 mit minus ) , so ergibt sich : Die  $\lambda$  's vom Typ 2 heben sich alle auf gegen  $\lambda$  's vom Typ 1 .

Es bleibt für  $\lambda_3 = \mu_3, \mu_3 - 2, \mu_3 - 4, \dots, \begin{cases} 0 & \mu_3 \text{ gerade} \\ 1 & \mu_3 \text{ ungerade} \end{cases}$

jeweils ein  $\lambda$  mit positiven Vorzeichen übrig . Das sind  $\left\lfloor \frac{\mu_3}{2} \right\rfloor + 1$  Stück .

Ist  $\lambda_3 \neq 0$  wird jedes Exemplar doppelt gezählt, für  $\lambda_3 = 0$  nur einfach. Das ergibt im Fall  $\lambda_3 = \mu_3 = 2k+1$  ungerade,  $(k+1)$  doppelt gezählte Fälle, d.h. insgesamt  $2(k+1) = 2k+2 = m_3 + 1$  triviale Komponenten von  $A_2$ .  
 Im Fall  $\lambda_3 = \mu_3 = 2k$  gerade,  $k$  doppelt gezählte Fälle und ein einfach gezählter Fall, d.h. insgesamt  $2k+1 = m_3 + 1$  triviale Komponenten von  $A_2$ .

### Zwischenstand

Es sind bereits so viele triviale Komponenten von  $A_2$  entdeckt, wie im Satz behauptet. Unter den Typen 4 und 5 darf es also entweder keine neuen  $\lambda$ 's mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  geben, oder die vom Typ 4 müssen sich mit denjenigen vom Typ 5 aufheben.

Wir verrechnen die  $\lambda$ 's mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  vom Typ 4 mit denen vom Typ 5:

Typ 5:  $\lambda_1^* + 2 \geq 0 \Rightarrow \lambda_1^* \geq -2$ . Der Paritätscharakter von  $\lambda$  liefert:  $\lambda_2^* \geq \lambda_1^* + 3$ , wegen gleicher Parität ist  $\lambda_2^* \geq \lambda_1^* + 4$ . Relevante  $\lambda$ 's bei festem  $\lambda_1^*$ :

Typ5	Typ 4
$(\lambda_1^*, \lambda_1^*+4, \lambda_1^*+4)$	$(\lambda_1^*, \lambda_1^*+2, \lambda_1^*+4)$
$(\lambda_1^*, \lambda_1^*+6, \lambda_1^*+6)$	$(\lambda_1^*, \lambda_1^*+4, \lambda_1^*+6)$
.	.
.	.
.	.
.	.
$(\lambda_1^*, \mu_3, \mu_3)$	$(\lambda_1^*, \mu_3 - 2, \mu_3)$

Für jedes mögliche  $\lambda^*$  gibt es offenbar genau so viele Zählkandidaten vom Typ 4 wie vom Typ 5. Wegen der Vorzeichen heben sich diese  $\lambda$ 's beim Zählen auf, tragen also nichts zur Fixpunktmenge von  $A_2$  bei. Es bleibt bei dem zu den Typen 1 und 2 erzielten Resultat: die Dimension der Fixpunktmenge ist gleich  $m_3 + 1$ .

### 3. Fall

$m_1$  ist ungerade und  $m_2$  ist gerade.

Die Paritätssituation ist für die  $\lambda^*$ : Parität  $\lambda_1^* \neq$  Parität  $\lambda_2^* =$  Parität  $\lambda_3^*$

Nach der 3. Spalte der Tabelle liefern Typ 1 und 2 keine relevanten  $\lambda^*$ .

Verrechnung von Typ 3 und Typ 6:

Typ 3: $\lambda_2^* \geq -1$ oder 0	Typ 6: $\lambda_2^* \geq -1$ oder 0
$\lambda_2^* = -1$ oder 0, ....., $\mu_3 - 2$	$\lambda_2^* = -1$ oder 0, ....., $\mu_3 - 4$
$(\lambda_2^*+1, \lambda_2^*, \lambda_2^*+2)$	$(\lambda_2^*+1, \lambda_2^*, \lambda_2^*+4)$
$(\lambda_2^*+3, \lambda_2^*, \lambda_2^*+4)$	$(\lambda_2^*+3, \lambda_2^*, \lambda_2^*+6)$
.	.
.	.
.	.
$(\mu_3 - 1, \lambda_2^*, \mu_3)$	$(\mu_3 - 3, \lambda_2^*, \mu_3)$
$(\text{leer} : \lambda_2^* + 2 > \mu_3)$	

Man stellt fest : Zu jedem festen  $\lambda_2^*$  zwischen  $-1$  oder  $0$  und  $\mu_3-2$  gibt es beim Typ 3 genau ein relevantes  $\lambda$  mehr als beim Typ 6 . Es gibt  $\left[ \frac{\mu_3+1}{2} \right]$  verschiedene Werte für  $\lambda_2^*$  . Das ergibt : Typ 3 und Typ 6 zusammen liefern  $\left[ \frac{m_3+1}{2} \right]$  triviale Komponenten mit negativen Vorzeichen .

Verrechnung von Typ 4 und Typ 5 :

Typ 4 : $\lambda_1^* \geq -2$ oder $-1$	Typ 5 : $\lambda_1^* \geq -2$ oder $-1$
$\lambda_1^* = -2$ oder $-1$ , ..... , $\mu_3 -5$	$\lambda_1^* = -2$ oder $-1$ , ..... , $\mu_3 -3$
$( \lambda_1^* , \lambda_1^* +3 , \lambda_1^* +5 )$	$( \lambda_1^* , \lambda_1^* +3 , \lambda_1^* +3 )$
$( \lambda_1^* , \lambda_1^* +5 , \lambda_1^* +7 )$	$( \lambda_1^* , \lambda_1^* +5 , \lambda_1^* +5 )$
.	.
.	.
.	.
.	.
$( \lambda_1^* , \mu_3 -2 , \mu_3 )$	$( \lambda_1^* , \mu_3 , \mu_3 )$

Hier stellt man fest : Für jedes  $\lambda_1^* = -2$  oder  $-1$  , ..... ,  $\mu_3 -3$  gibt es beim Typ 5 genau ein relevantes  $\lambda$  mehr als beim Typ 4 .Man zählt nach , dass das auch hier  $\left[ \frac{\mu_3+1}{2} \right]$  triviale Komponenten von  $A_2$  liefert , diesmal mit positiven Vorzeichen . Sie heben sich mit den  $\lambda$  's von Typ 3 und Typ 6 auf . Insgesamt gibt es im Fall  $m_1$  ungerade und  $m_2$  gerade keine trivialen Fixpunkte unter  $A_2$  .

#### 4. Fall

$m_1$  ist gerade und  $m_2$  ist ungerade .

Die Paritätssituation ist für die  $\lambda^*$  : Parität  $\lambda_1^* =$  Parität  $\lambda_2^* \neq$  Parität  $\lambda_3^*$  .

Hier gibt es keine relevanten  $\lambda$ 's vom Typ 4 und Typ 5 . Ähnliche Überlegung wie in den vorhergehenden Fällen ergeben : Die relevanten  $\lambda$ 's vom Typ 1 heben sich mit denjenigen vom Typ 2 auf . Die relevanten  $\lambda$ 's vom Typ 3 mit denjenigen vom Typ 6 . D.h. auch in diesem Fall ist die Dimension der Fixpunktmenge gleich Null . Insgesamt ist damit der Satz bewiesen .

## § 6. Liste 1

Die Listen wurden mit dem Berechnungspaket aus [ van Leeuwen ] berechnet. Weil sie im Verlauf unserer Untersuchungen berechnet worden sind , haben wir auch sehr viele Daten mitgeliefert, die in der Arbeit nicht unmittelbar gebraucht sind.

Für die irreduzible Darstellung  $\Pi_1^{m_1}\Pi_2^{m_2}\dots\dots\dots\Pi_r^{m_r}$  schreiben wir auch  $[m_1,m_2,\dots\dots\dots,m_r]$ . In der Liste I verwende ich diese Form.

Sind  $\rho$  und  $\rho^*$  kontragradient zueinander ,so werden die Rechnungen nur bei einem der beiden in der Liste aufgeführt.

### Liste 1.1 : Ar

#### Liste 1.1.1 : A2

**sym\_tensor(2,[2,0],A2)**

1X[0,2] +1X[4,0]

**sym\_tensor(2,[1,1],A2)**

1X[0,0] +1X[1,1] +1X[2,2]

**sym\_tensor(3,[1,1],A2)**

1X[0,0]+1X[0,3]+1X[1,1]+1X[2,2]+1X[3,0]+1X[3,3]

**sym\_tensor(4,[1,1],A2)**

1X[0,0] +2X[1,1] +1X[1,4] +2X[2,2] +1X[3,3] +1X[4,1] +1X[4,4]

**sym\_tensor(5,[1,1],A2)**

1X[0,0] +1X[0,3] +2X[1,1] +1X[1,4] +2X[2,2] +1X[2,5] +1X[3,0]  
+2X[3,3] +1X[4,1] +1X[4,4] +1X[5,2] +1X[5,5]

**sym\_tensor(6,[1,1],A2)**

+2X[0,0] +1X[0,3] +1X[0,6] +2X[1,1] +1X[1,4] +3X[2,2] +1X[2,5]  
+1X[3,0] +3X[3,3] +1X[3,6] +1X[4,1] +2X[4,4] +1X[5,2] +1X[5,5]  
+1X[6,0] +1X[6,3] +1X[6,6]

**sym\_tensor(7,[1,1],A2)**

1X[0,0] +1X[0,3] +3X[1,1] +2X[1,4] +1X[1,7] +3X[2,2] +2X[2,5]  
+1X[3,0] +3X[3,3] +1X[3,6] +2X[4,1] +3X[4,4] +1X[4,7] +2X[5,2]  
+2X[5,5] +1X[6,3] +1X[6,6] +1X[7,1] +1X[7,4] +1X[7,7]

**sym\_tensor(8,[1,1],A2)**

2X[0,0] +1X[0,3] +1X[0,6] +3X[1,1] +2X[1,4] +1X[1,7] +4X[2,2]  
+2X[2,5] +1X[2,8] +1X[3,0] +4X[3,3] +2X[3,6] +2X[4,1] +4X[4,4]  
+1X[4,7] +2X[5,2] +3X[5,5] +1X[5,8] +1X[6,0] +2X[6,3] +2X[6,6]  
+1X[7,1] +1X[7,4] +1X[7,7] +1X[8,2] +1X[8,5] +1X[8,8]

**sym\_tensor(9,[1,1],A2)**

2X[0,0] +2X[0,3] +1X[0,6] +1X[0,9] +3X[1,1] +2X[1,4] +1X[1,7]  
+4X[2,2] +3X[2,5] +1X[2,8] +2X[3,0] +5X[3,3] +3X[3,6] +1X[3,9]  
+2X[4,1] +4X[4,4] +2X[4,7] +3X[5,2] +4X[5,5] +1X[5,8] +1X[6,0]  
+3X[6,3] +3X[6,6] +1X[6,9] +1X[7,1] +2X[7,4] +2X[7,7] +1X[8,2]  
+1X[8,5] +1X[8,8] +1X[9,0] +1X[9,3] +1X[9,6] +1X[9,9]

### Liste 1.1.2 : A3

**sym\_tensor(2,[2,0,0],A3)**

1X[0,2,0] +1X[4,0,0]

sym\_tensor(3,[2,0,0],A3)

1X[0,0,2] +1X[2,2,0] +1X[6,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,2,0],A3)**

1X[0,0,0] +1X[0,2,0] +1X[0,4,0] +1X[2,0,2]

sym\_tensor(3,[0,2,0],A3)

1X[0,0,0] +1X[0,0,4] +2X[0,2,0] +1X[0,4,0] +1X[0,6,0]  
+1X[1,2,1] +1X[2,0,2] +1X[2,2,2] +1X[4,0,0]

sym\_tensor(4,[0,2,0],A3)

2X[0,0,0] +3X[0,2,0] +1X[0,2,4] +3X[0,4,0] +1X[0,6,0]  
+1X[0,8,0] +1X[1,1,3] +1X[1,2,1] +1X[1,4,1] +3X[2,0,2]  
+2X[2,2,2] +1X[2,4,2] +1X[3,1,1] +1X[4,0,4] +1X[4,2,0]

sym\_tensor(5,[0,2,0],A3)

2X[0,0,0] +2X[0,0,4]+5X[0,2,0]+1X[0,2,4] +4X[0,4,0]  
+1X[0,4,4] +3X[0,6,0]+1X[0,8,0]+1X[0,10,0] +2X[1,1,3]  
+3X[1,2,1] +1X[1,3,3]+2X[1,4,1]+1X[1,6,1] +3X[2,0,2]  
+1X[2,0,6] +1X[2,1,4]+5X[2,2,2]+2X[2,4,2] +1X[2,6,2]  
+2X[3,1,1] +1X[3,2,3]+1X[3,3,1]+2X[4,0,0] +1X[4,0,4]  
+1X[4,1,2] +1X[4,2,0]+1X[4,2,4]+1X[4,4,0] +1X[6,0,2]

**sym\_tensor(2,[1,1,0],A3)**

1X[0,0,2] +1X[1,1,1] +1X[2,0,0] +1X[2,2,0]

sym\_tensor(3,[1,1,0],A3)

1X[0,0,3] +1X[0,1,1] +1X[0,3,1] +1X[1,0,0] +1X[1,1,2]  
+1X[1,2,0] +2X[2,0,1] +1X[2,2,1] +1X[3,0,2] +1X[3,1,0]  
+1X[3,3,0]

sym\_tensor(4,[1,1,0],A3)

1X[0,0,4] +1X[0,1,2] +3X[0,2,0] +1X[0,4,0] +2X[1,0,1]  
+2X[1,1,3] +3X[1,2,1] +1X[1,4,1] +3X[2,0,2] +2X[2,1,0]  
+2X[2,2,2] +1X[2,3,0] +3X[3,1,1] +1X[3,3,1] +2X[4,0,0]  
+1X[4,1,2] +1X[4,2,0] +1X[4,4,0]

**sym\_tensor(2,[1,0,1],A3)**

1X[0,0,0] +1X[0,2,0] +1X[1,0,1] +1X[2,0,2]

sym\_tensor(3,[1,0,1],A3)

1X[0,0,0] +1X[0,1,2] +2X[1,0,1] +1X[1,2,1] +1X[2,0,2]  
+1X[2,1,0] +1X[3,0,3]

```

sym_tensor(4,[1,0,1],A3)
  2X[0,0,0] +1X[0,1,2] +2X[0,2,0] +1X[0,4,0] +2X[1,0,1]
+1X[1,1,3] +1X[1,2,1] +3X[2,0,2] +1X[2,1,0] +1X[2,2,2]
+1X[3,0,3] +1X[3,1,1] +1X[4,0,4]

```

```

sym_tensor(5,[1,0,1],A3)
  1X[0,0,0] +2X[0,1,2] +1X[0,2,0] +1X[0,3,2] +4X[1,0,1]
+2X[1,1,3] +3X[1,2,1] +1X[1,4,1] +3X[2,0,2] +2X[2,1,0]
+1X[2,1,4] +1X[2,2,2] +1X[2,3,0] +3X[3,0,3] +2X[3,1,1]
+1X[3,2,3] +1X[4,0,4] +1X[4,1,2] +1X[5,0,5]

```

```

sym_tensor(6,[1,0,1],A3)
  3X[0,0,0] +1X[0,0,4] +2X[0,1,2] +3X[0,2,0] +1X[0,2,4]
+1X[0,3,2] +2X[0,4,0] +1X[0,6,0] +4X[1,0,1] +3X[1,1,3]
+4X[1,2,1] +1X[1,3,3] +1X[1,4,1] +6X[2,0,2] +2X[2,1,0]
+2X[2,1,4] +4X[2,2,2] +1X[2,3,0] +1X[2,4,2] +4X[3,0,3]
+3X[3,1,1] +1X[3,1,5] +1X[3,2,3] +1X[3,3,1] +1X[4,0,0]
+3X[4,0,4] +2X[4,1,2] +1X[4,2,0] +1X[4,2,4] +1X[5,0,5]
+1X[5,1,3] +1X[6,0,6]

```

### Liste 1.1.3 : A4

```

sym_tensor(2,[2,0,0,0],A4)
  1X[0,2,0,0] +1X[4,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[2,0,0,0],A4)
  1X[0,0,2,0] +1X[2,2,0,0] +1X[6,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[2,0,0,0],A4)
  1X[0,0,0,2] +1X[0,4,0,0] +1X[2,0,2,0] +1X[4,2,0,0]
+1X[8,0,0,0]

```

```

sym_tensor(6,[2,0,0,0],A4)
  1X[ 0,0,4,0] +1X[ 0,2,0,2] +1X[ 0,6,0,0] +1X[ 2,0,0,0]
+1X[ 2,2,2,0] +1X[ 4,0,0,2] +1X[ 4,4,0,0] +1X[ 6,0,2,0]
+1X[ 8,2,0,0] +1X[12,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[0,2,0,0],A4)
  1X[0,0,0,2] +1X[0,2,0,1] +1X[0,4,0,0] +1X[2,0,2,0]

```

```

sym_tensor(3,[0,2,0,0],A4)
  1X[0,0,0,3] +1X[0,0,4,0] +2X[0,2,0,2] +1X[0,4,0,1]
+1X[0,6,0,0] +1X[1,0,2,0] +1X[1,1,0,1] +1X[1,2,1,1]
+1X[2,0,0,0] +1X[2,0,2,1] +1X[2,1,1,0] +1X[2,2,2,0]
+1X[4,0,0,2]

```

```

sym_tensor(4,[0,2,0,0],A4)
  2X[0,0,0,4] +3X[0,0,2,0] +2X[0,1,3,0] +3X[0,2,0,3]
+2X[0,2,1,1] +1X[0,2,4,0] +3X[0,4,0,2] +1X[0,6,0,1]
+1X[0,8,0,0] +2X[1,0,2,1] +2X[1,1,0,2] +2X[1,1,1,0]
+1X[1,1,3,1] +1X[1,2,1,2] +2X[1,2,2,0] +2X[1,3,0,1]
+1X[1,4,1,1] +2X[2,0,0,1] +3X[2,0,2,2] +3X[2,1,1,1]
+3X[2,2,0,0] +2X[2,2,2,1] +1X[2,3,1,0] +1X[2,4,2,0]
+1X[3,0,0,2] +1X[3,1,1,2] +1X[3,1,2,0] +1X[3,2,0,1]
+1X[4,0,1,1] +1X[4,0,4,0] +1X[4,2,0,2] +1X[6,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,1,0,0],A4)
  1X[0,0,2,0] +1X[1,1,1,0] +1X[2,0,0,1] +1X[2,2,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[1,1,0,0],A4)
  1X[0,0,3,0] +1X[0,1,1,1] +1X[0,2,0,0] +1X[0,3,1,0]
+1X[1,0,0,2] +1X[1,0,1,0] +1X[1,1,2,0] +1X[1,2,0,1]
+2X[2,0,1,1] +1X[2,1,0,0] +1X[2,2,1,0] +1X[3,0,2,0]
+1X[3,1,0,1] +1X[3,3,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[1,1,0,0],A4)
  2X[0,0,1,1] +1X[0,0,4,0] +1X[0,1,2,1] +3X[0,2,0,2]
+2X[0,2,1,0] +1X[0,4,0,1] +2X[1,0,1,2] +3X[1,0,2,0]
+3X[1,1,0,1] +2X[1,1,3,0] +3X[1,2,1,1] +2X[1,3,0,0]
+1X[1,4,1,0] +2X[2,0,0,0] +3X[2,0,2,1] +2X[2,1,0,2]
+4X[2,1,1,0] +2X[2,2,2,0] +1X[2,3,0,1] +3X[3,0,0,1]
+3X[3,1,1,1] +1X[3,2,0,0] +1X[3,3,1,0] +2X[4,0,0,2]
+1X[4,0,1,0] +1X[4,1,2,0] +1X[4,2,0,1] +1X[4,4,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,0,1,0],A4)
  1X[0,0,0,2] +1X[0,2,0,1] +1X[1,0,1,1] +1X[1,1,0,0]
+1X[2,0,2,0] +1X[3,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[1,0,1,0],A4)
  1X[0,0,0,3] +1X[0,0,1,1] +2X[0,1,0,0] +1X[0,1,2,1]
+2X[0,2,1,0] +2X[1,0,1,2] +1X[1,0,2,0] +4X[1,1,0,1]
+1X[1,2,1,1] +1X[2,0,2,1] +1X[2,1,0,2] +2X[2,1,1,0]
+1X[3,0,0,1] +1X[3,0,3,0] +1X[4,0,1,0]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,1,0],A4)
  2X[0,0,0,4] +2X[0,0,1,2] +5X[0,0,2,0] +4X[0,1,0,1]
+1X[0,1,2,2] +2X[0,1,3,0] +2X[0,2,0,3] +5X[0,2,1,1]
+1X[0,3,0,0] +1X[0,4,0,2] +2X[1,0,0,0] +2X[1,0,1,3]
+5X[1,0,2,1] +7X[1,1,0,2] +8X[1,1,1,0] +1X[1,1,3,1]
+1X[1,2,1,2] +3X[1,2,2,0] +2X[1,3,0,1] +5X[2,0,0,1]
+3X[2,0,2,2] +1X[2,0,3,0] +1X[2,1,0,3] +7X[2,1,1,1]
+5X[2,2,0,0] +1X[2,2,2,1] +4X[3,0,0,2] +2X[3,0,1,0]
+1X[3,0,3,1] +1X[3,1,1,2] +2X[3,1,2,0] +1X[3,2,0,1]
+2X[4,0,1,1] +1X[4,0,4,0] +1X[4,1,0,0] +1X[5,0,2,0]
+1X[6,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,0,0,1],A4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,1,1,0] +1X[1,0,0,1] +1X[2,0,0,2]

sym_tensor(3,[1,0,0,1],A4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,1,0,2] +1X[0,1,1,0] +2X[1,0,0,1]
  +1X[1,1,1,1] +1X[2,0,0,2] +1X[2,0,1,0] +1X[3,0,0,0]

sym_tensor(4,[1,0,0,1],A4)
  2X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,1] +1X[0,1,0,2] +2X[0,1,1,0]
  +1X[0,2,2,0] +3X[1,0,0,1] +1X[1,1,0,3] +2X[1,1,1,1]
  +1X[1,2,0,0] +3X[2,0,0,2] +1X[2,0,1,0] +1X[2,1,1,2]
  +1X[3,0,0,3] +1X[3,0,1,1] +1X[4,0,0,4]

sym_tensor(5,[1,0,0,1],A4)
  2X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,1] +3X[0,1,0,2] +3X[0,1,1,0]
  +1X[0,2,1,2] +1X[0,2,2,0] +1X[0,3,0,1] +4X[1,0,0,1]
  +1X[1,0,2,2] +1X[1,0,3,0] +2X[1,1,0,3] +4X[1,1,1,1]
  +1X[1,2,0,0] +1X[1,2,2,1] +4X[2,0,0,2] +3X[2,0,1,0]
  +1X[2,1,0,4] +2X[2,1,1,2] +1X[2,1,2,0] +1X[2,2,0,1]
  +3X[3,0,0,3] +2X[3,0,1,1] +1X[3,1,1,3] +1X[4,0,0,4]
  +1X[4,0,1,2] +1X[5,0,0,5]

sym_tensor(6,[1,0,0,1],A4)
  3X[0,0,0,0] +1X[0,0,1,3] +2X[0,0,2,1] +3X[0,1,0,2]
  +5X[0,1,1,0] +1X[0,1,3,1] +1X[0,2,0,4] +2X[0,2,1,2]
  +3X[0,2,2,0] +1X[0,3,0,1] +1X[0,3,3,0] +6X[1,0,0,1]
  +2X[1,0,2,2] +1X[1,0,3,0] +4X[1,1,0,3] +8X[1,1,1,1]
  +2X[1,2,0,0] +1X[1,2,1,3] +2X[1,2,2,1] +1X[1,3,0,2]
  +1X[1,3,1,0] +7X[2,0,0,2] +3X[2,0,1,0] +1X[2,0,2,3]
  +1X[2,0,3,1] +2X[2,1,0,4] +5X[2,1,1,2] +2X[2,1,2,0]
  +2X[2,2,0,1] +1X[2,2,2,2] +5X[3,0,0,3] +4X[3,0,1,1]
  +1X[3,1,0,0] +1X[3,1,0,5] +2X[3,1,1,3] +1X[3,1,2,1]
  +1X[3,2,0,2] +3X[4,0,0,4] +2X[4,0,1,2] +1X[4,0,2,0]
  +1X[4,1,1,4] +1X[5,0,0,5] +1X[5,0,1,3] +1X[6,0,0,6]

sym_tensor(2,[0,1,1,0],A4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,1] +1X[0,1,1,0] +1X[0,2,2,0]
  +1X[1,0,0,1] +1X[1,1,1,1] +1X[1,2,0,0] +1X[2,0,0,2]

sym_tensor(3,[0,1,1,0],A4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,1,3] +2X[0,0,2,1] +2X[0,1,0,2]
  +4X[0,1,1,0] +1X[0,1,3,1] +1X[0,2,1,2] +3X[0,2,2,0]
  +1X[0,3,0,1] +1X[0,3,3,0] +2X[1,0,0,1] +2X[1,0,2,2]
  +1X[1,0,3,0] +1X[1,1,0,3] +6X[1,1,1,1] +2X[1,2,0,0]
  +1X[1,2,2,1] +1X[1,3,0,2] +1X[1,3,1,0] +2X[2,0,0,2]
  +2X[2,0,1,0] +1X[2,0,3,1] +1X[2,1,1,2] +1X[2,1,2,0]
  +2X[2,2,0,1] +1X[3,0,0,3] +1X[3,0,1,1] +1X[3,1,0,0]

```



```

sym_tensor(4,[0,1,1,0],A4)
  3X[0,0,0,0] + 4X[0,0,1,3] +10X[0,0,2,1] + 2X[0,0,4,2]
  +7X[0,1,0,2] +11X[0,1,1,0] + 2X[0,1,2,3] + 7X[0,1,3,1]
  +3X[0,2,0,4] +10X[0,2,1,2] +13X[0,2,2,0] + 1X[0,2,4,1]
  +7X[0,3,0,1] + 1X[0,3,2,2] + 3X[0,3,3,0] + 1X[0,4,0,3]
  +3X[0,4,1,1] + 1X[0,4,4,0] + 6X[1,0,0,1] + 2X[1,0,1,4]
+11X[1,0,2,2] + 7X[1,0,3,0] + 9X[1,1,0,3] +24X[1,1,1,1]
  +3X[1,1,3,2] + 3X[1,1,4,0] +10X[1,2,0,0] + 3X[1,2,1,3]
+10X[1,2,2,1] + 6X[1,3,0,2] + 7X[1,3,1,0] + 1X[1,3,3,1]
  +1X[1,4,1,2] + 1X[1,4,2,0] +11X[2,0,0,2] + 7X[2,0,1,0]
  +3X[2,0,2,3] + 6X[2,0,3,1] + 1X[2,1,0,4] +13X[2,1,1,2]
+10X[2,1,2,0] + 1X[2,1,4,1] +11X[2,2,0,1] + 2X[2,2,2,2]
  +1X[2,2,3,0] + 3X[2,3,1,1] + 2X[2,4,0,0] + 4X[3,0,0,3]
  +9X[3,0,1,1] + 1X[3,0,4,0] + 4X[3,1,0,0] + 2X[3,1,1,3]
  +3X[3,1,2,1] + 3X[3,2,0,2] + 2X[3,2,1,0] + 1X[4,0,0,4]

```

```

sym_tensor(2,[0,1,0,1],A4)
  1X[0,0,0,3] +1X[0,0,1,1] +1X[0,2,0,2] +1X[1,0,2,0]
+1X[1,1,0,1] +1X[2,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[0,1,0,1],A4)
  2X[0,0,1,0] +1X[0,1,0,4] +2X[0,1,1,2] +2X[0,1,2,0]
+1X[0,2,0,1] +1X[0,3,0,3] +1X[1,0,0,3] +4X[1,0,1,1]
+1X[1,1,0,0] +1X[1,1,2,1] +1X[1,2,0,2] +1X[1,2,1,0]
+1X[2,0,1,2] +2X[2,1,0,1] +1X[3,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,1,0,1],A4)
  2X[0,0,0,1] +1X[0,0,0,6] +1X[0,0,1,4] +5X[0,0,2,2]
+1X[0,0,3,0] +2X[0,1,0,3] +8X[0,1,1,1] +5X[0,2,0,0]
+1X[0,2,0,5] +2X[0,2,1,3] +3X[0,2,2,1] +1X[0,3,0,2]
+2X[0,3,1,0] +1X[0,4,0,4] +5X[1,0,0,2] +4X[1,0,1,0]
+1X[1,0,2,3] +2X[1,0,3,1] +2X[1,1,0,4] +7X[1,1,1,2]
+5X[1,1,2,0] +5X[1,2,0,1] +1X[1,2,2,2] +1X[1,3,0,3]
+1X[1,3,1,1] +4X[2,0,0,3] +7X[2,0,1,1] +1X[2,0,4,0]
+2X[2,1,0,0] +1X[2,1,1,3] +1X[2,1,2,1] +3X[2,2,0,2]
+1X[2,2,1,0] +1X[3,0,1,2] +2X[3,0,2,0] +2X[3,1,0,1]
+2X[4,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[0,0,1,1],A4)
  1X[0,0,2,2] +1X[0,1,1,1] +1X[0,2,0,0] +1X[1,0,0,2]
sym_tensor(3,[0,0,1,1],A4)
  1X[0,0,1,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,0,3,3] +1X[0,1,0,1]
+1X[0,1,2,2] +1X[0,1,3,0] +1X[0,2,0,3] +1X[0,2,1,1]
+1X[0,3,0,0] +1X[1,0,1,3] +1X[1,0,2,1] +2X[1,1,0,2]
+1X[1,1,1,0] +1X[2,0,0,1]

```

```

sym_tensor(4,[0,0,1,1],A4)
  2X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,3] +2X[0,0,3,1] +1X[0,0,4,4]
+1X[0,1,0,4] +4X[0,1,1,2] +2X[0,1,2,0] +1X[0,1,3,3]
+1X[0,1,4,1] +3X[0,2,0,1] +1X[0,2,1,4] +2X[0,2,2,2]
+2X[0,3,1,1] +1X[0,4,0,0] +3X[1,0,0,3] +3X[1,0,1,1]
+1X[1,0,2,4] +1X[1,0,3,2] +1X[1,0,4,0] +2X[1,1,0,0]
+3X[1,1,1,3] +3X[1,1,2,1] +3X[1,2,0,2] +1X[1,2,1,0]
+2X[2,0,0,4] +2X[2,0,1,2] +3X[2,0,2,0] +2X[2,1,0,1]

```

```

sym_tensor(5,[0,0,1,1],A4)
  1X[0,0,0,0] + 2X[0,0,0,5] + 5X[0,0,1,3] + 5X[0,0,2,1]
+1X[0,0,3,4] + 2X[0,0,4,2] + 1X[0,0,5,0] + 1X[0,0,5,5]
+6X[0,1,0,2] + 4X[0,1,1,0] + 1X[0,1,1,5] + 5X[0,1,2,3]
+5X[0,1,3,1] + 1X[0,1,4,4] + 1X[0,1,5,2] + 3X[0,2,0,4]
+8X[0,2,1,2] + 5X[0,2,2,0] + 1X[0,2,2,5] + 2X[0,2,3,3]
+1X[0,2,4,1] + 4X[0,3,0,1] + 1X[0,3,1,4] + 2X[0,3,2,2]
+1X[0,3,3,0] + 1X[0,4,0,3] + 2X[0,4,1,1] + 1X[0,5,0,0]
+2X[1,0,0,1] + 5X[1,0,1,4] + 9X[1,0,2,2] + 4X[1,0,3,0]
+1X[1,0,3,5] + 1X[1,0,4,3] + 1X[1,0,5,1] + 8X[1,1,0,3]
+12X[1,1,1,1] + 3X[1,1,2,4] + 4X[1,1,3,2] + 2X[1,1,4,0]
+3X[1,2,0,0] + 1X[1,2,0,5] + 5X[1,2,1,3] + 4X[1,2,2,1]
+4X[1,3,0,2] + 2X[1,3,1,0] + 4X[2,0,0,2] + 4X[2,0,1,0]
+2X[2,0,1,5] + 4X[2,0,2,3] + 4X[2,0,3,1] + 3X[2,1,0,4]
+7X[2,1,1,2] + 4X[2,1,2,0] + 4X[2,2,0,1] + 2X[3,0,0,3]
+3X[3,0,1,1] + 1X[3,1,0,0]

```

#### Liste 1.1.4 : A5

```

sym_tensor(2,[2,0,0,0,0],A5)
  1X[0,2,0,0,0] +1X[4,0,0,0,0]
sym_tensor(3,[2,0,0,0,0],A5)
  1X[0,0,2,0,0] +1X[2,2,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0]
sym_tensor(4,[2,0,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,2,0]+1X[0,4,0,0,0]+1X[2,0,2,0,0]+1X[4,2,0,0,0]
+1X[8,0,0,0,0]

sym_tensor(5,[2,0,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,0,2]+1X[0,2,2,0,0]+1X[2,0,0,2,0]+1X[2,4,0,0,0]
+1X[4,0,2,0,0]+1X[6,2,0,0,0]+1X[10,0,0,0,0]
sym_tensor(2,[0,2,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,2,0]+1X[0,2,0,1,0]+1X[0,4,0,0,0] +1X[2,0,2,0,0]
sym_tensor(3,[0,2,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,3,0]+1X[0,0,4,0,0]+1X[0,1,0,1,0]
+2X[0,2,0,2,0] +1X[0,3,0,0,0]+1X[0,4,0,1,0]+1X[0,6,0,0,0]
+1X[1,0,2,0,1] +1X[1,1,0,1,1]+1X[1,2,1,1,0]+1X[2,0,0,0,2]
+1X[2,0,2,1,0] +1X[2,1,1,0,1]+1X[2,2,2,0,0]+1X[4,0,0,2,0]

sym_tensor(4,[0,2,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,1,0]+2X[0,0,0,4,0]+3X[0,0,2,0,2]+3X[0,1,0,2,0]
+1X[0,1,1,0,1]+2X[0,1,3,0,1]+3X[0,2,0,0,0]+3X[0,2,0,3,0]
+2X[0,2,1,1,1]+1X[0,2,4,0,0]+3X[0,3,0,1,0]+3X[0,4,0,2,0]
+1X[0,5,0,0,0]+1X[0,6,0,1,0]+1X[0,8,0,0,0]+1X[1,0,0,1,1]
+2X[1,0,2,1,1]+1X[1,0,3,0,0]+2X[1,1,0,2,1]+2X[1,1,1,0,2]
+3X[1,1,1,1,0]+1X[1,1,3,1,0]+2X[1,2,0,0,1]+1X[1,2,1,2,0]
+2X[1,2,2,0,1]+2X[1,3,0,1,1]+1X[1,3,1,0,0]+1X[1,4,1,1,0]
+2X[2,0,0,1,2]+2X[2,0,1,0,1]+3X[2,0,2,2,0]+3X[2,1,1,1,1]
+2X[2,1,2,0,0]+3X[2,2,0,0,2]+2X[2,2,2,1,0]+1X[2,3,1,0,1]
+1X[2,4,2,0,0]+1X[3,0,0,2,1]+2X[3,0,1,1,0]+1X[3,1,0,0,1]
+1X[3,1,1,2,0]+1X[3,1,2,0,1]+1X[3,2,0,1,1]+1X[4,0,0,0,0]
+1X[4,0,1,1,1]+1X[4,0,4,0,0]+1X[4,1,0,1,0]+1X[4,2,0,2,0]
+1X[6,0,0,0,2]

```

**sym\_tensor(2,[0,0,2,0,0],A5)**

1X[0,0,0,0,0] +1X[0,0,4,0,0] +1X[0,1,0,1,0]  
+1X[0,2,0,2,0] +1X[1,0,2,0,1] +1X[2,0,0,0,2]

**sym\_tensor(3,[0,0,2,0,0],A5)**

1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,1,1,1]+3X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,4,0,0]  
+1X[0,0,6,0,0]+1X[0,1,0,0,2]+1X[0,1,1,2,1]+2X[0,1,2,1,0]  
+1X[0,2,0,1,2]+1X[0,2,1,0,1]+1X[0,2,2,2,0]+1X[0,4,0,0,2]  
+1X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,1,1,2]+1X[1,0,1,2,0]+2X[1,0,2,0,1]  
+1X[1,0,4,0,1]+2X[1,1,0,1,1]+1X[1,1,1,0,0]+1X[1,1,2,1,1]  
+1X[1,2,0,2,1]+1X[1,2,1,1,0]+1X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,0,4,0]  
+2X[2,0,2,0,2]+1X[2,1,0,2,0]+1X[2,1,1,0,1]+1X[2,2,0,0,0]  
+1X[3,0,0,0,3]

**sym\_tensor(4,[0,0,2,0,0],A5)**

3X[0,0,0,0,0] + 1X[0,0,0,2,2] + 3X[0,0,0,3,0]  
+ 1X[0,0,0,6,0] + 2X[0,0,1,0,3] + 4X[0,0,1,1,1]  
+ 2X[0,0,2,0,0] + 3X[0,0,2,2,2] + 3X[0,0,3,1,1]  
+ 6X[0,0,4,0,0] + 1X[0,0,6,0,0] + 1X[0,0,8,0,0]  
+ 1X[0,1,0,0,2] + 6X[0,1,0,1,0] + 2X[0,1,0,4,0]  
+ 2X[0,1,1,1,3] + 7X[0,1,1,2,1] + 6X[0,1,2,0,2]  
+ 6X[0,1,2,1,0] + 1X[0,1,3,2,1] + 3X[0,1,4,1,0]  
+ 3X[0,2,0,0,4] + 4X[0,2,0,1,2] +10X[0,2,0,2,0]  
+ 4X[0,2,1,0,1] + 1X[0,2,1,3,1] + 2X[0,2,2,1,2]  
+ 2X[0,2,2,2,0] + 2X[0,2,3,0,1] + 1X[0,2,4,2,0]  
+ 3X[0,3,0,0,0] + 3X[0,3,0,3,0] + 2X[0,3,1,0,3]  
+ 3X[0,3,1,1,1] + 1X[0,4,0,0,2] + 2X[0,4,0,1,0]  
+ 1X[0,4,0,4,0] + 1X[0,4,2,0,2] + 1X[0,6,0,0,0]  
+ 1X[1,0,0,0,1] + 2X[1,0,0,2,3] + 2X[1,0,0,3,1]  
+ 7X[1,0,1,1,2] + 4X[1,0,1,2,0] +11X[1,0,2,0,1]  
+ 1X[1,0,2,3,1] + 2X[1,0,3,1,2] + 2X[1,0,3,2,0]  
+ 3X[1,0,4,0,1] + 1X[1,0,6,0,1] + 3X[1,1,0,0,3]  
+ 9X[1,1,0,1,1] + 1X[1,1,0,4,1] + 4X[1,1,1,0,0]  
+ 3X[1,1,1,2,2] + 3X[1,1,1,3,0] + 2X[1,1,2,0,3]  
+ 9X[1,1,2,1,1] + 3X[1,1,3,0,0] + 1X[1,1,4,1,1]  
+ 2X[1,2,0,1,3] + 6X[1,2,0,2,1] + 5X[1,2,1,0,2]  
+ 7X[1,2,1,1,0] + 2X[1,2,2,2,1] + 1X[1,2,3,1,0]  
+ 2X[1,3,0,0,1] + 1X[1,3,1,1,2] + 1X[1,3,1,2,0]  
+ 1X[1,3,2,0,1] + 1X[1,4,0,1,1] + 6X[2,0,0,0,2]  
+ 1X[2,0,0,1,0] + 1X[2,0,0,3,2] + 1X[2,0,0,4,0]  
+ 2X[2,0,1,1,3] + 5X[2,0,1,2,1] + 5X[2,0,2,0,2]  
+ 6X[2,0,2,1,0] + 1X[2,0,2,4,0] + 3X[2,0,4,0,2]  
+ 7X[2,1,0,1,2] + 4X[2,1,0,2,0] + 7X[2,1,1,0,1]  
+ 1X[2,1,1,3,1] + 1X[2,1,2,1,2] + 2X[2,1,2,2,0]  
+ 2X[2,1,3,0,1] + 1X[2,2,0,0,0] + 3X[2,2,0,2,2]  
+ 3X[2,2,1,1,1] + 3X[2,2,2,0,0] + 1X[2,3,0,0,2]  
+ 1X[3,0,0,0,3] + 3X[3,0,0,1,1] + 2X[3,0,1,0,0]  
+ 2X[3,0,1,3,0] + 3X[3,0,2,0,3] + 2X[3,0,2,1,1]  
+ 2X[3,1,0,2,1] + 2X[3,1,1,0,2] + 2X[3,1,1,1,0]  
+ 2X[3,2,0,0,1] + 2X[4,0,0,0,4] + 3X[4,0,0,2,0]

```

sym_tensor(2,[1,1,0,0,0],A5)
  1X[0,0,2,0,0]+1X[1,1,1,0,0]+1X[2,0,0,1,0]+1X[2,2,0,0,0]

sym_tensor(3,[1,1,0,0,0],A5)
  1X[0,0,3,0,0]+1X[0,1,1,1,0]+1X[0,2,0,0,1]+1X[0,3,1,0,0]
  +1X[1,0,0,2,0]+1X[1,0,1,0,1]+1X[1,1,2,0,0]+1X[1,2,0,1,0]
  +2X[2,0,1,1,0]+1X[2,1,0,0,1]+1X[2,2,1,0,0]+1X[3,0,0,0,0]
  +1X[3,0,2,0,0]+1X[3,1,0,1,0]+1X[3,3,0,0,0]

sym_tensor(4,[1,1,0,0,0],A5)
  2X[0,0,1,1,1]+1X[0,0,4,0,0]+2X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,2,1,0]
  +3X[0,2,0,2,0]+2X[0,2,1,0,1]+1X[0,3,0,0,0]+1X[0,4,0,1,0]
  +2X[1,0,1,2,0]+3X[1,0,2,0,1]+3X[1,1,0,1,1]+3X[1,1,1,0,0]
  +2X[1,1,3,0,0]+3X[1,2,1,1,0]+2X[1,3,0,0,1]+1X[1,4,1,0,0]
  +2X[2,0,0,0,2]+1X[2,0,0,1,0]+3X[2,0,2,1,0]+2X[2,1,0,2,0]
  +4X[2,1,1,0,1]+1X[2,2,0,0,0]+2X[2,2,2,0,0]+1X[2,3,0,1,0]
  +3X[3,0,0,1,1]+2X[3,0,1,0,0]+3X[3,1,1,1,0]+1X[3,2,0,0,1]
  +1X[3,3,1,0,0]+2X[4,0,0,2,0]+1X[4,0,1,0,1]+1X[4,1,0,0,0]
  +1X[4,1,2,0,0]+1X[4,2,0,1,0]+1X[4,4,0,0,0]

sym_tensor(5,[1,1,0,0,0],A5)
  1X[0,0,0,0,3] + 1X[0,0,0,1,1] + 1X[0,0,1,0,0]
  +1X[0,0,1,3,0] + 3X[0,0,2,1,1] + 1X[0,0,3,0,0]
  +1X[0,0,5,0,0] + 4X[0,1,0,2,1] + 4X[0,1,1,0,2]
  +7X[0,1,1,1,0] + 2X[0,1,3,1,0] + 4X[0,2,0,0,1]
  +4X[0,2,1,2,0] + 5X[0,2,2,0,1] + 4X[0,3,0,1,1]
  +4X[0,3,1,0,0] + 1X[0,3,3,0,0] + 2X[0,4,1,1,0]
  +1X[0,5,0,0,1] + 2X[1,0,0,1,2] + 4X[1,0,0,2,0]
  +5X[1,0,1,0,1] + 4X[1,0,2,2,0] + 4X[1,0,3,0,1]
  +1X[1,1,0,0,0] + 3X[1,1,0,3,0] +12X[1,1,1,1,1]
  +7X[1,1,2,0,0] + 2X[1,1,4,0,0] + 5X[1,2,0,0,2]
  +9X[1,2,0,1,0] + 4X[1,2,2,1,0] + 4X[1,3,0,2,0]
  +5X[1,3,1,0,1] + 2X[1,4,0,0,0] + 1X[1,4,2,0,0]
  +1X[1,5,0,1,0] + 4X[2,0,0,2,1] + 6X[2,0,1,0,2]
  +9X[2,0,1,1,0] + 4X[2,0,3,1,0] + 6X[2,1,0,0,1]
  +7X[2,1,1,2,0] + 8X[2,1,2,0,1] + 9X[2,2,0,1,1]
  +6X[2,2,1,0,0] + 2X[2,2,3,0,0] + 4X[2,3,1,1,0]
  +2X[2,4,0,0,1] + 1X[2,5,1,0,0] + 2X[3,0,0,0,0]
  +2X[3,0,0,3,0] + 8X[3,0,1,1,1] + 6X[3,0,2,0,0]
  +1X[3,0,4,0,0] + 5X[3,1,0,0,2] + 7X[3,1,0,1,0]
  +5X[3,1,2,1,0] + 4X[3,2,0,2,0] + 5X[3,2,1,0,1]
  +1X[3,3,0,0,0] + 2X[3,3,2,0,0] + 1X[3,4,0,1,0]
  +4X[4,0,0,0,1] + 3X[4,0,1,2,0] + 3X[4,0,2,0,1]
  +5X[4,1,0,1,1] + 3X[4,1,1,0,0] + 1X[4,1,3,0,0]
  +3X[4,2,1,1,0] + 1X[4,3,0,0,1] + 1X[4,4,1,0,0]
  +2X[5,0,0,0,2] + 2X[5,0,0,1,0] + 1X[5,0,2,1,0]
  +2X[5,1,0,2,0] + 1X[5,1,1,0,1] + 1X[5,2,0,0,0]
  +1X[5,2,2,0,0] + 1X[5,3,0,1,0] + 1X[5,5,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[1,0,1,0,0],A5)**  
 1X[0,0,0,2,0]+1X[0,1,0,0,0] +1X[0,2,0,1,0]+1X[1,0,1,1,0]  
 +1X[1,1,0,0,1]+1X[2,0,2,0,0] +1X[3,0,0,0,1]

**sym\_tensor(3,[1,0,1,0,0],A5)**  
 1X[0,0,0,3,0]+1X[0,0,1,1,1]+2X[0,0,2,0,0]+2X[0,1,0,0,2]  
 +2X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,2,1,0]+2X[0,2,1,0,1]+1X[0,3,0,0,0]  
 +1X[1,0,0,0,1]+2X[1,0,1,2,0]+1X[1,0,2,0,1]+4X[1,1,0,1,1]  
 +3X[1,1,1,0,0]+1X[1,2,1,1,0]+3X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,2,1,0]  
 +1X[2,1,0,2,0]+2X[2,1,1,0,1]+1X[2,2,0,0,0]+1X[3,0,0,1,1]  
 +2X[3,0,1,0,0]+1X[3,0,3,0,0]+1X[4,0,1,0,1]

**sym\_tensor(4,[1,0,1,0,0],A5)**  
 1X[0,0,0,0,2] + 3X[0,0,0,1,0] + 2X[0,0,0,4,0]  
 +2X[0,0,1,2,1] + 5X[0,0,2,0,2] + 4X[0,0,2,1,0]  
 +4X[0,1,0,1,2] + 9X[0,1,0,2,0] +10X[0,1,1,0,1]  
 +1X[0,1,2,2,0] + 2X[0,1,3,0,1] + 7X[0,2,0,0,0]  
 +2X[0,2,0,3,0] + 5X[0,2,1,1,1] + 3X[0,2,2,0,0]  
 +1X[0,3,0,0,2] + 6X[0,3,0,1,0] + 1X[0,4,0,2,0]  
 +2X[1,0,0,0,3] + 8X[1,0,0,1,1] + 4X[1,0,1,0,0]  
 +2X[1,0,1,3,0] + 5X[1,0,2,1,1] + 4X[1,0,3,0,0]  
 +7X[1,1,0,2,1] + 8X[1,1,1,0,2] +15X[1,1,1,1,0]  
 +1X[1,1,3,1,0] +11X[1,2,0,0,1] + 1X[1,2,1,2,0]  
 +3X[1,2,2,0,1] + 2X[1,3,0,1,1] + 2X[1,3,1,0,0]  
 +5X[2,0,0,1,2] + 7X[2,0,0,2,0] +12X[2,0,1,0,1]  
 +3X[2,0,2,2,0] + 1X[2,0,3,0,1] + 4X[2,1,0,0,0]  
 +1X[2,1,0,3,0] + 7X[2,1,1,1,1] + 6X[2,1,2,0,0]  
 +5X[2,2,0,0,2] + 5X[2,2,0,1,0] + 1X[2,2,2,1,0]  
 +4X[3,0,0,2,1] + 2X[3,0,1,0,2] + 9X[3,0,1,1,0]  
 +1X[3,0,3,1,0] + 6X[3,1,0,0,1] + 1X[3,1,1,2,0]  
 +2X[3,1,2,0,1] + 1X[3,2,0,1,1] + 1X[3,2,1,0,0]  
 +3X[4,0,0,0,0] + 2X[4,0,1,1,1] + 2X[4,0,2,0,0]  
 +1X[4,0,4,0,0] + 1X[4,1,0,0,2] + 3X[4,1,0,1,0]  
 +1X[5,0,0,0,1] + 1X[5,0,2,0,1] + 1X[6,0,0,0,2]

**sym\_tensor(2,[1,0,0,1,0],A5)**  
 1X[0,0,0,0,2] +1X[0,1,1,0,1] +1X[1,0,0,1,1]  
 +1X[1,0,1,0,0] +1X[2,0,0,2,0] +1X[2,1,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[1,0,0,1,0],A5)**  
 1X[0,0,0,0,3]+1X[0,0,0,1,1]+2X[0,0,1,0,0]+1X[0,0,3,0,0]  
 +1X[0,1,0,2,1]+1X[0,1,1,0,2]+2X[0,1,1,1,0]+2X[0,2,0,0,1]  
 +2X[1,0,0,1,2]+1X[1,0,0,2,0]+4X[1,0,1,0,1]+1X[1,1,0,0,0]  
 +1X[1,1,1,1,1]+1X[1,2,0,1,0]+1X[2,0,0,2,1]+1X[2,0,1,0,2]  
 +2X[2,0,1,1,0]+2X[2,1,0,0,1]+1X[3,0,0,0,0]+1X[3,0,0,3,0]  
 +1X[3,1,0,1,0]

**sym\_tensor(4,[1,0,0,1,0],A5)**  
 2X[0,0,0,0,4]+2X[0,0,0,1,2]+5X[0,0,0,2,0]+5X[0,0,1,0,1]  
 +1X[0,0,2,1,2]+1X[0,0,2,2,0]+1X[0,0,3,0,1]+3X[0,1,0,0,0]  
 +1X[0,1,0,2,2]+2X[0,1,0,3,0]+2X[0,1,1,0,3]+8X[0,1,1,1,1]

+3X[0,1,2,0,0]+ 4X[0,2,0,0,2]+7X[0,2,0,1,0]+1X[0,2,2,0,2]  
 +1X[0,3,0,2,0]+ 1X[0,4,0,0,0]+3X[1,0,0,1,3]+5X[1,0,0,2,1]  
 +9X[1,0,1,0,2]+10X[1,0,1,1,0]+1X[1,0,3,1,0]+9X[1,1,0,0,1]  
 +1X[1,1,0,3,1]+ 2X[1,1,1,1,2]+3X[1,1,1,2,0]+3X[1,1,2,0,1]  
 +1X[1,2,0,0,3]+ 5X[1,2,0,1,1]+3X[1,2,1,0,0]+2X[2,0,0,0,0]  
 +3X[2,0,0,2,2]+ 1X[2,0,0,3,0]+1X[2,0,1,0,3]+8X[2,0,1,1,0]  
 +6X[2,0,2,0,0]+ 6X[2,1,0,0,2]+6X[2,1,0,1,0]+1X[2,1,1,2,1]  
 +1X[2,2,0,2,0]+ 1X[2,2,1,0,1]+4X[3,0,0,0,1]+1X[3,0,0,3,1]  
 +1X[3,0,1,1,2]+ 2X[3,0,1,2,0]+1X[3,0,2,0,1]+3X[3,1,0,1,1]  
 +2X[3,1,1,0,0]+ 1X[4,0,0,0,2]+2X[4,0,0,1,0]+1X[4,0,0,4,0]  
 +1X[4,1,0,2,0]+ 1X[4,2,0,0,0]

sym\_tensor(5,[1,0,0,1,0],A5)

2X[0,0,0,0,5] + 5X[0,0,0,1,3] +11X[0,0,0,2,1]  
 +16X[0,0,1,0,2] +16X[0,0,1,1,0] + 1X[0,0,1,4,0]  
 +1X[0,0,2,1,3] +4X[0,0,2,2,1] + 5X[0,0,3,0,2]  
 +4X[0,0,3,1,0] +14X[0,1,0,0,1] + 3X[0,1,0,2,3]  
 + 6X[0,1,0,3,1] + 3X[0,1,1,0,4] +19X[0,1,1,1,2]  
 +17X[0,1,1,2,0] +21X[0,1,2,0,1] + 1X[0,1,4,0,1]  
 + 9X[0,2,0,0,3] +27X[0,2,0,1,1] +16X[0,2,1,0,0]  
 + 1X[0,2,1,2,2] + 1X[0,2,1,3,0] + 1X[0,2,2,0,3]  
 + 3X[0,2,2,1,1] + 1X[0,2,3,0,0] + 1X[0,3,0,1,3]  
 + 3X[0,3,0,2,1] + 3X[0,3,1,0,2] + 4X[0,3,1,1,0]  
 + 2X[0,4,0,0,1] + 4X[1,0,0,0,0] + 4X[1,0,0,1,4]  
 +11X[1,0,0,2,2] +12X[1,0,0,3,0] +17X[1,0,1,0,3]  
 +42X[1,0,1,1,1] +17X[1,0,2,0,0] + 1X[1,0,2,2,2]  
 + 1X[1,0,2,3,0] + 1X[1,0,3,0,3] + 3X[1,0,3,1,1]  
 + 1X[1,0,4,0,0] +26X[1,1,0,0,2] +33X[1,1,0,1,0]  
 + 2X[1,1,0,3,2] + 2X[1,1,0,4,0] + 4X[1,1,1,1,3]  
 +14X[1,1,1,2,1] +11X[1,1,2,0,2] +14X[1,1,2,1,0]  
 + 1X[1,2,0,0,4] +15X[1,2,0,1,2] +15X[1,2,0,2,0]  
 +21X[1,2,1,0,1] + 1X[1,2,2,1,2] + 5X[1,3,0,0,0]  
 + 1X[1,3,0,3,0] + 1X[1,3,1,1,1] + 1X[1,4,0,1,0]  
 +12X[2,0,0,0,1] + 4X[2,0,0,2,3] + 7X[2,0,0,3,1]  
 + 3X[2,0,1,0,4] +21X[2,0,1,1,2] +20X[2,0,1,2,0]  
 +23X[2,0,2,0,1] + 1X[2,0,3,2,0] +12X[2,1,0,0,3]  
 +36X[2,1,0,1,1] + 1X[2,1,0,4,1] +20X[2,1,1,0,0]  
 + 2X[2,1,1,2,2] + 3X[2,1,1,3,0] + 1X[2,1,2,0,3]  
 + 4X[2,1,2,1,1] + 1X[2,1,3,0,0] + 1X[2,2,0,1,3]  
 + 6X[2,2,0,2,1] + 4X[2,2,1,0,2] + 6X[2,2,1,1,0]  
 + 4X[2,3,0,0,1] +11X[3,0,0,0,2] +14X[3,0,0,1,0]  
 + 3X[3,0,0,3,2] + 1X[3,0,0,4,0] + 2X[3,0,1,1,3]  
 + 9X[3,0,1,2,1] + 4X[3,0,2,0,2] + 9X[3,0,2,1,0]  
 +10X[3,1,0,1,2] + 9X[3,1,0,2,0] +14X[3,1,1,0,1]  
 + 1X[3,1,1,3,1] + 3X[3,2,0,0,0] + 1X[3,2,0,3,0]  
 + 1X[3,2,1,1,1] + 1X[3,3,0,1,0] + 2X[4,0,0,0,3]  
 + 9X[4,0,0,1,1] + 1X[4,0,0,4,1] + 7X[4,0,1,0,0]  
 + 1X[4,0,1,2,2] + 2X[4,0,1,3,0] + 1X[4,0,2,1,1]  
 + 3X[4,1,0,2,1] + 1X[4,1,1,0,2] + 3X[4,1,1,1,0]  
 + 2X[4,2,0,0,1] + 1X[5,0,0,1,2] + 2X[5,0,0,2,0]  
 + 1X[5,0,0,5,0] + 2X[5,0,1,0,1] + 1X[5,1,0,0,0]  
 + 1X[5,1,0,3,0] + 1X[5,2,0,1,0]

```

sym_tensor(2,[1,0,0,0,1],A5
    1X[0,0,0,0,0]+1X[0,1,0,1,0]+1X[1,0,0,0,1]+1X[2,0,0,0,2]

sym_tensor(3,[1,0,0,0,1],A5)
    1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,2,0,0]+1X[0,1,0,0,2]+1X[0,1,0,1,0]
    +2X[1,0,0,0,1]+1X[1,1,0,1,1]+1X[2,0,0,0,2]+1X[2,0,0,1,0]
    +1X[3,0,0,0,3]

sym_tensor(4,[1,0,0,0,1],A5)
    2X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,1,1,1]+1X[0,1,0,0,2]+3X[0,1,0,1,0]
    +1X[0,2,0,2,0]+3X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,2,0,1]+1X[1,1,0,0,3]
    +2X[1,1,0,1,1]+1X[1,1,1,0,0]+3X[2,0,0,0,2]+1X[2,0,0,1,0]
    +1X[2,1,0,1,2]+1X[3,0,0,0,3]+1X[3,0,0,1,1]+1X[4,0,0,0,4]

sym_tensor(5,[1,0,0,0,1],A5)
    2X[0,0,0,0,0]+2X[0,0,1,1,1]+2X[0,0,2,0,0]+3X[0,1,0,0,2]
    +3X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,2,1,0]+1X[0,2,0,1,2]+1X[0,2,0,2,0]
    +1X[0,2,1,0,1]+5X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,1,1,2]+1X[1,0,1,2,0]
    +1X[1,0,2,0,1]+2X[1,1,0,0,3]+5X[1,1,0,1,1]+2X[1,1,1,0,0]
    +1X[1,2,0,2,1]+4X[2,0,0,0,2]+3X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,2,0,2]
    +1X[2,1,0,0,4]+2X[2,1,0,1,2]+1X[2,1,0,2,0]+1X[2,1,1,0,1]
    +3X[3,0,0,0,3]+2X[3,0,0,1,1]+1X[3,1,0,1,3]+1X[4,0,0,0,4]
    +1X[4,0,0,1,2]+1X[5,0,0,0,5]

sym_tensor(6,[1,0,0,0,1],A5)
    4X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,3,0]+1X[0,0,1,0,3]+3X[0,0,1,1,1]
    +2X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,4,0,0]+4X[0,1,0,0,2]+7X[0,1,0,1,0]
    +1X[0,1,1,2,1]+1X[0,1,2,0,2]+1X[0,1,2,1,0]+1X[0,2,0,0,4]
    +2X[0,2,0,1,2]+4X[0,2,0,2,0]+2X[0,2,1,0,1]+1X[0,3,0,0,0]
    +1X[0,3,0,3,0]+6X[1,0,0,0,1]+3X[1,0,1,1,2]+2X[1,0,1,2,0]
    +4X[1,0,2,0,1]+4X[1,1,0,0,3]+9X[1,1,0,1,1]+3X[1,1,1,0,0]
    +1X[1,1,2,1,1]+1X[1,2,0,1,3]+2X[1,2,0,2,1]+1X[1,2,1,0,2]
    +1X[1,2,1,1,0]+8X[2,0,0,0,2]+4X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,1,1,3]
    +1X[2,0,1,2,1]+1X[2,0,2,0,2]+1X[2,0,2,1,0]+2X[2,1,0,0,4]
    +6X[2,1,0,1,2]+2X[2,1,0,2,0]+3X[2,1,1,0,1]+1X[2,2,0,2,2]
    +5X[3,0,0,0,3]+4X[3,0,0,1,1]+1X[3,0,1,0,0]+1X[3,0,2,0,3]
    +1X[3,1,0,0,5]+2X[3,1,0,1,3]+1X[3,1,0,2,1]+1X[3,1,1,0,2]
    +3X[4,0,0,0,4]+2X[4,0,0,1,2]+1X[4,0,0,2,0]+1X[4,1,0,1,4]
    +1X[5,0,0,0,5]+1X[5,0,0,1,3]+1X[6,0,0,0,6]

sym_tensor(2,[0,1,1,0,0],A5)
    1X[0,0,0,0,2] +1X[0,0,2,1,0] +1X[0,1,1,0,1]
    +1X[0,2,2,0,0] +1X[1,0,0,1,1] +1X[1,0,1,0,0]
    +1X[1,1,1,1,0] +1X[1,2,0,0,1] +1X[2,0,0,2,0]

```

```

sym_tensor(3,[0,1,1,0,0],A5)
  1X[0,0,0,0,3]+1X[0,0,0,1,1]+2X[0,0,1,0,0]+1X[0,0,1,3,0]
+2X[0,0,2,1,1]+2X[0,0,3,0,0]+2X[0,1,0,2,1]+4X[0,1,1,0,2]
+5X[0,1,1,1,0]+1X[0,1,3,1,0]+4X[0,2,0,0,1]+1X[0,2,1,2,0]
+3X[0,2,2,0,1]+1X[0,3,0,1,1]+2X[0,3,1,0,0]+1X[0,3,3,0,0]
+2X[1,0,0,1,2]+3X[1,0,0,2,0]+5X[1,0,1,0,1]+2X[1,0,2,2,0]
+1X[1,0,3,0,1]+2X[1,1,0,0,0]+1X[1,1,0,3,0]+6X[1,1,1,1,1]
+3X[1,1,2,0,0]+2X[1,2,0,0,2]+4X[1,2,0,1,0]+1X[1,2,2,1,0]
+1X[1,3,0,2,0]+1X[1,3,1,0,1]+2X[2,0,0,2,1]+2X[2,0,1,0,2]
+4X[2,0,1,1,0]+1X[2,0,3,1,0]+3X[2,1,0,0,1]+1X[2,1,1,2,0]
+1X[2,1,2,0,1]+2X[2,2,0,1,1]+1X[2,2,1,0,0]+1X[3,0,0,0,0]
+1X[3,0,0,3,0]+1X[3,0,1,1,1]+1X[3,0,2,0,0]+1X[3,1,0,0,2]
+1X[3,1,0,1,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,1,1,0,0],A5)
  3X[0,0,0,0,4] + 5X[0,0,0,1,2] +10X[0,0,0,2,0]
+10X[0,0,1,0,1] + 4X[0,0,1,3,1] +10X[0,0,2,1,2]
+10X[0,0,2,2,0] +13X[0,0,3,0,1] + 2X[0,0,4,2,0]
+ 5X[0,1,0,0,0] + 7X[0,1,0,2,2] +13X[0,1,0,3,0]
+11X[0,1,1,0,3] +38X[0,1,1,1,1] +17X[0,1,2,0,0]
+ 2X[0,1,2,3,0] + 7X[0,1,3,1,1] + 4X[0,1,4,0,0]
+16X[0,2,0,0,2] +25X[0,2,0,1,0] + 3X[0,2,0,4,0]
+10X[0,2,1,2,1] +13X[0,2,2,0,2] +15X[0,2,2,1,0]
+ 1X[0,2,4,1,0] + 7X[0,3,0,1,2] +13X[0,3,0,2,0]
+17X[0,3,1,0,1] + 1X[0,3,2,2,0] + 3X[0,3,3,0,1]
+ 6X[0,4,0,0,0] + 1X[0,4,0,3,0] + 3X[0,4,1,1,1]
+ 2X[0,4,2,0,0] + 1X[0,4,4,0,0] + 2X[0,5,0,1,0]
+ 6X[1,0,0,1,3] +19X[1,0,0,2,1] +24X[1,0,1,0,2]
+28X[1,0,1,1,0] + 2X[1,0,1,4,0] +11X[1,0,2,2,1]
+ 7X[1,0,3,0,2] +15X[1,0,3,0,2] +20X[1,1,0,0,1]
+ 9X[1,1,0,3,1] +24X[1,1,1,1,2] +31X[1,1,1,2,0]
+36X[1,1,2,0,1] + 3X[1,1,3,2,0] + 3X[1,1,4,0,1]
+10X[1,2,0,0,3] +37X[1,2,0,1,1] +21X[1,2,1,0,0]
+ 3X[1,2,1,3,0] +10X[1,2,2,1,1] + 6X[1,2,3,0,0]
+ 6X[1,3,0,2,1] + 7X[1,3,1,0,2] +12X[1,3,1,1,0]
+ 1X[1,3,3,1,0] + 4X[1,4,0,0,1] + 1X[1,4,1,2,0]
+ 1X[1,4,2,0,1] + 2X[2,0,0,0,0] +11X[2,0,0,2,2]
+ 9X[2,0,0,3,0] + 7X[2,0,1,0,3] +37X[2,0,1,1,1]
+21X[2,0,2,0,0] + 3X[2,0,2,3,0] + 6X[2,0,3,1,1]
+ 3X[2,0,4,0,0] +19X[2,1,0,0,2] +23X[2,1,0,1,0]
+ 1X[2,1,0,4,0] +13X[2,1,1,2,1] +10X[2,1,2,0,2]
+17X[2,1,2,1,0] + 1X[2,1,4,1,0] +11X[2,2,0,1,2]
+13X[2,2,0,2,0] +20X[2,2,1,0,1] + 2X[2,2,2,2,0]
+ 1X[2,2,3,0,1] + 4X[2,3,0,0,0] + 3X[2,3,1,1,1]
+ 1X[2,3,2,0,0] + 2X[2,4,0,0,2] + 1X[2,4,0,1,0]
+ 8X[3,0,0,0,1] + 4X[3,0,0,3,1] + 9X[3,0,1,1,2]
+13X[3,0,1,2,0] +13X[3,0,2,0,1] + 1X[3,0,4,0,1]
+ 4X[3,1,0,0,3] +17X[3,1,0,1,1] +10X[3,1,1,0,0]
+ 2X[3,1,1,3,0] + 3X[3,1,2,1,1] + 2X[3,1,3,0,0]
+ 3X[3,2,0,2,1] + 2X[3,2,1,0,2] + 4X[3,2,1,1,0]
+ 3X[3,3,0,0,1] + 3X[4,0,0,0,2] + 5X[4,0,0,1,0]
+ 1X[4,0,0,4,0] + 1X[4,0,1,2,1] + 3X[4,0,2,0,2]
+ 2X[4,0,2,1,0] + 2X[4,1,0,1,2] + 3X[4,1,0,2,0]
+ 3X[4,1,1,0,1] + 2X[4,2,0,0,0] + 2X[5,0,0,1,1]

```



**sym\_tensor(2,[0,1,0,1,0],A5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,3,0]+1X[0,0,1,1,1]+2X[0,1,0,1,0]  
+1X[0,2,0,2,0]+1X[0,3,0,0,0]+1X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,2,0,1]  
+1X[1,1,0,1,1]+1X[1,1,1,0,0]+1X[2,0,0,0,2]

sym\_tensor(3,[0,1,0,1,0],A5)

2X[0,0,0,0,0] +3X[0,0,0,3,0] +2X[0,0,1,0,3]  
+5X[0,0,1,1,1]+2X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,4,0,0]+3X[0,1,0,0,2]  
+8X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,0,4,0]+2X[0,1,1,2,1]+2X[0,1,2,0,2]  
+2X[0,1,2,1,0]+1X[0,2,0,1,2]+5X[0,2,0,2,0]+4X[0,2,1,0,1]  
+3X[0,3,0,0,0]+1X[0,3,0,3,0]+1X[0,4,0,1,0]+2X[1,0,0,0,1]  
+1X[1,0,0,3,1]+4X[1,0,1,1,2]+4X[1,0,1,2,0]+5X[1,0,2,0,1]  
+1X[1,1,0,0,3]+9X[1,1,0,1,1]+5X[1,1,1,0,0]+1X[1,1,2,1,1]  
+1X[1,2,0,2,1]+1X[1,2,1,0,2]+2X[1,2,1,1,0]+1X[1,3,0,0,1]  
+3X[2,0,0,0,2]+3X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,1,2,1]+2X[2,0,2,1,0]  
+2X[2,1,0,1,2]+1X[2,1,0,2,0]+4X[2,1,1,0,1]+1X[3,0,0,0,3]  
+1X[3,0,0,1,1]+2X[3,0,1,0,0]

sym\_tensor(4,[0,1,0,1,0],A5)

5X[0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,1,4] + 8X[0,0,0,2,2]  
+14X[0,0,0,3,0] + 1X[0,0,0,6,0] +11X[0,0,1,0,3]  
+32X[0,0,1,1,1] + 1X[0,0,1,4,1] +10X[0,0,2,0,0]  
+ 5X[0,0,2,2,2] + 2X[0,0,2,3,0] + 1X[0,0,3,0,3]  
+ 8X[0,0,3,1,1] + 5X[0,0,4,0,0] +15X[0,1,0,0,2]  
+30X[0,1,0,1,0] + 2X[0,1,0,3,2] + 8X[0,1,0,4,0]  
+ 8X[0,1,1,1,3] +26X[0,1,1,2,1] +24X[0,1,2,0,2]  
+22X[0,1,2,1,0] + 1X[0,1,4,1,0] + 5X[0,2,0,0,4]  
+22X[0,2,0,1,2] +35X[0,2,0,2,0] + 1X[0,2,0,5,0]  
+32X[0,2,1,0,1] + 2X[0,2,1,3,1] + 3X[0,2,2,1,2]  
+ 2X[0,2,2,2,0] + 3X[0,2,3,0,1] +14X[0,3,0,0,0]  
+ 1X[0,3,0,2,2] + 6X[0,3,0,3,0] + 2X[0,3,1,0,3]  
+ 9X[0,3,1,1,1] + 2X[0,3,2,0,0] + 2X[0,4,0,0,2]  
+ 8X[0,4,0,1,0] + 1X[0,4,0,4,0] + 1X[0,5,0,2,0]  
+ 1X[0,6,0,0,0] +11X[1,0,0,0,1] + 5X[1,0,0,2,3]  
+14X[1,0,0,3,1] + 4X[1,0,1,0,4] +36X[1,0,1,1,2]  
+32X[1,0,1,2,0] +41X[1,0,2,0,1] + 1X[1,0,2,3,1]  
+ 2X[1,0,3,1,2] + 3X[1,0,3,2,0] + 2X[1,0,4,0,1]  
+18X[1,1,0,0,3] +58X[1,1,0,1,1] + 2X[1,1,0,4,1]  
+32X[1,1,1,0,0] + 7X[1,1,1,2,2] + 9X[1,1,1,3,0]  
+ 5X[1,1,2,0,3] +20X[1,1,2,1,1] + 8X[1,1,3,0,0]  
+ 5X[1,2,0,1,3] +21X[1,2,0,2,1] +20X[1,2,1,0,2]  
+26X[1,2,1,1,0] + 1X[1,2,2,2,1] +14X[1,3,0,0,1]  
+ 1X[1,3,0,3,1] + 1X[1,3,1,1,2] + 2X[1,3,1,2,0]  
+ 1X[1,3,2,0,1] + 2X[1,4,0,1,1] + 1X[1,4,1,0,0]  
+20X[2,0,0,0,2] +15X[2,0,0,1,0] + 4X[2,0,0,3,2]  
+ 2X[2,0,0,4,0] + 7X[2,0,1,1,3] +20X[2,0,1,2,1]  
+17X[2,0,2,0,2] +24X[2,0,2,1,0] + 1X[2,0,4,0,2]  
+ 2X[2,1,0,0,4] +28X[2,1,0,1,2] +22X[2,1,0,2,0]  
+36X[2,1,1,0,1] + 1X[2,1,1,3,1] + 1X[2,1,2,1,2]  
+ 3X[2,1,2,2,0] + 2X[2,1,3,0,1] + 8X[2,2,0,0,0]  
+ 3X[2,2,0,2,2] + 1X[2,2,0,3,0] + 1X[2,2,1,0,3]  
+ 7X[2,2,1,1,1] + 5X[2,2,2,0,0] + 4X[2,3,0,0,2]  
+ 2X[2,3,0,1,0] + 6X[3,0,0,0,3] +18X[3,0,0,1,1]  
+11X[3,0,1,0,0] + 1X[3,0,1,2,2] + 2X[3,0,1,3,0]

+ 2X[3,0,2,0,3] + 5X[3,0,2,1,1] + 1X[3,0,3,0,0]  
 + 2X[3,1,0,1,3] + 5X[3,1,0,2,1] + 7X[3,1,1,0,2]  
 + 8X[3,1,1,1,0] + 5X[3,2,0,0,1] + 2X[4,0,0,0,4]  
 + 2X[4,0,0,1,2] + 5X[4,0,0,2,0] + 4X[4,0,1,0,1]  
 + 2X[4,1,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,1,0,0,1],A5)**

1X[0,0,0,1,2] + 1X[0,0,1,0,1] + 1X[0,2,0,0,2]  
 + 1X[1,0,1,1,0] + 1X[1,1,0,0,1] + 1X[2,0,0,0,0]

sym\_tensor(3,[0,1,0,0,1],A5)

1X[0,0,0,0,3]+1X[0,0,0,1,1]+2X[0,0,1,0,0]+1X[0,0,3,0,0]  
 +1X[0,1,0,1,3]+1X[0,1,0,2,1]+2X[0,1,1,0,2]+2X[0,1,1,1,0]  
 +1X[0,2,0,0,1]+1X[0,3,0,0,3]+2X[1,0,0,1,2]+2X[1,0,0,2,0]  
 +4X[1,0,1,0,1]+1X[1,1,0,0,0]+1X[1,1,1,1,1]+1X[1,2,0,0,2]  
 +1X[1,2,0,1,0]+1X[2,0,1,0,2]+1X[2,0,1,1,0]+2X[2,1,0,0,1]  
 +1X[3,0,0,0,0]

sym\_tensor(4,[0,1,0,0,1],A5)

2X[0,0,0,0,2] + 3X[0,0,0,1,0] + 1X[0,0,0,2,4]  
 + 1X[0,0,0,4,0] + 2X[0,0,1,1,3] + 3X[0,0,1,2,1]  
 + 6X[0,0,2,0,2] + 3X[0,0,2,1,0] + 2X[0,1,0,0,4]  
 + 6X[0,1,0,1,2] + 7X[0,1,0,2,0] + 10X[0,1,1,0,1]  
 + 1X[0,1,3,0,1] + 5X[0,2,0,0,0] + 1X[0,2,0,1,4]  
 + 1X[0,2,0,2,2] + 1X[0,2,0,3,0] + 2X[0,2,1,0,3]  
 + 3X[0,2,1,1,1] + 1X[0,2,2,0,0] + 1X[0,3,0,0,2]  
 + 2X[0,3,0,1,0] + 1X[0,4,0,0,4] + 4X[1,0,0,0,3]  
 + 9X[1,0,0,1,1] + 5X[1,0,1,0,0] + 1X[1,0,1,2,2]  
 + 1X[1,0,2,0,3] + 3X[1,0,2,1,1] + 1X[1,0,3,0,0]  
 + 3X[1,1,0,1,3] + 5X[1,1,0,2,1] + 8X[1,1,1,0,2]  
 + 8X[1,1,1,1,0] + 5X[1,2,0,0,1] + 1X[1,2,1,1,2]  
 + 1X[1,3,0,0,3] + 1X[1,3,0,1,1] + 1X[2,0,0,0,4]  
 + 6X[2,0,0,1,2] + 4X[2,0,0,2,0] + 9X[2,0,1,0,1]  
 + 1X[2,0,2,2,0] + 2X[2,1,0,0,0] + 1X[2,1,1,0,3]  
 + 2X[2,1,1,1,1] + 1X[2,1,2,0,0] + 3X[2,2,0,0,2]  
 + 1X[2,2,0,1,0] + 1X[3,0,0,2,1] + 1X[3,0,1,0,2]  
 + 2X[3,0,1,1,0] + 3X[3,1,0,0,1] + 2X[4,0,0,0,0]

sym\_tensor(5,[0,1,0,0,1],A5)

4X[0,0,0,0,1] + 1X[0,0,0,1,5] + 3X[0,0,0,2,3]  
 + 5X[0,0,0,3,1] + 7X[0,0,1,0,4] + 20X[0,0,1,1,2]  
 + 16X[0,0,1,2,0] + 17X[0,0,2,0,1] + 1X[0,0,3,1,2]  
 + 1X[0,0,3,2,0] + 1X[0,0,4,0,1] + 14X[0,1,0,0,3]  
 + 33X[0,1,0,1,1] + 1X[0,1,0,2,5] + 1X[0,1,0,3,3]  
 + 1X[0,1,0,4,1] + 16X[0,1,1,0,0] + 3X[0,1,1,1,4]  
 + 6X[0,1,1,2,2] + 4X[0,1,1,3,0] + 9X[0,1,2,0,3]  
 + 14X[0,1,2,1,1] + 4X[0,1,3,0,0] + 2X[0,2,0,0,5]  
 + 9X[0,2,0,1,3] + 15X[0,2,0,2,1] + 20X[0,2,1,0,2]  
 + 17X[0,2,1,1,0] + 1X[0,2,3,0,2] + 12X[0,3,0,0,1]  
 + 1X[0,3,0,1,5] + 1X[0,3,0,2,3] + 1X[0,3,0,3,1]  
 + 2X[0,3,1,0,4] + 3X[0,3,1,1,2] + 1X[0,3,1,2,0]

```

+ 1X[0,3,2,0,1] + 1X[0,4,0,0,3] + 2X[0,4,0,1,1]
+ 1X[0,4,1,0,0] + 1X[0,5,0,0,5] +12X[1,0,0,0,2]
+14X[1,0,0,1,0] + 2X[1,0,0,2,4] + 4X[1,0,0,3,2]
+ 2X[1,0,0,4,0] + 2X[1,0,1,0,5] +14X[1,0,1,1,3]
+21X[1,0,1,2,1] +23X[1,0,2,0,2] +21X[1,0,2,1,0]
+ 1X[1,0,4,1,0] + 9X[1,1,0,0,4] +36X[1,1,0,1,2]
+27X[1,1,0,2,0] +42X[1,1,1,0,1] + 1X[1,1,1,2,3]
+ 1X[1,1,1,3,1] + 1X[1,1,2,0,4] + 4X[1,1,2,1,2]
+ 3X[1,1,2,2,0] + 3X[1,1,3,0,1] +11X[1,2,0,0,0]
+ 3X[1,2,0,1,4] + 6X[1,2,0,2,2] + 3X[1,2,0,3,0]
+ 9X[1,2,1,0,3] +14X[1,2,1,1,1] + 4X[1,2,2,0,0]
+ 7X[1,3,0,0,2] + 6X[1,3,0,1,0] + 1X[1,3,1,1,3]
+ 1X[1,4,0,0,4] + 1X[1,4,0,1,2] +11X[2,0,0,0,3]
+26X[2,0,0,1,1] +16X[2,0,1,0,0] + 1X[2,0,1,1,4]
+ 4X[2,0,1,2,2] + 3X[2,0,1,3,0] + 4X[2,0,2,0,3]
+11X[2,0,2,1,1] + 5X[2,0,3,0,0] + 1X[2,1,0,0,5]
+10X[2,1,0,1,3] +15X[2,1,0,2,1] +21X[2,1,1,0,2]
+19X[2,1,1,1,0] + 1X[2,1,2,2,1] +11X[2,2,0,0,1]
+ 1X[2,2,1,0,4] + 2X[2,2,1,1,2] + 1X[2,2,1,2,0]
+ 1X[2,2,2,0,1] + 3X[2,3,0,0,3] + 2X[2,3,0,1,1]
+ 2X[3,0,0,0,4] +12X[3,0,0,1,2] + 9X[3,0,0,2,0]
+17X[3,0,1,0,1] + 1X[3,0,2,1,2] + 1X[3,0,2,2,0]
+ 1X[3,0,3,0,1] + 5X[3,1,0,0,0] + 1X[3,1,0,2,2]
+ 1X[3,1,0,3,0] + 2X[3,1,1,0,3] + 4X[3,1,1,1,1]
+ 1X[3,1,2,0,0] + 4X[3,2,0,0,2] + 3X[3,2,0,1,0]
+ 1X[4,0,0,2,1] + 3X[4,0,1,0,2] + 3X[4,0,1,1,0]
+ 4X[4,1,0,0,1] + 2X[5,0,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[0,0,1,1,0],A5)**

```

1X[0,0,1,0,1]+1X[0,0,2,2,0]+1X[0,1,1,1,1]+1X[0,1,2,0,0]
+1X[0,2,0,0,2]+1X[1,0,0,2,1]+1X[1,0,1,1,0]+1X[1,1,0,0,1]
+1X[2,0,0,0,0]

```

sym\_tensor(3,[0,0,1,1,0],A5)

```

1X[0,0,0,0,3]+2X[0,0,0,1,1]+2X[0,0,1,0,0]+1X[0,0,1,2,2]
+2X[0,0,1,3,0]+1X[0,0,2,0,3]+3X[0,0,2,1,1]+2X[0,0,3,0,0]
+1X[0,0,3,3,0]+1X[0,1,0,1,3]+4X[0,1,0,2,1]+4X[0,1,1,0,2]
+5X[0,1,1,1,0]+1X[0,1,2,2,1]+1X[0,1,3,0,2]+1X[0,1,3,1,0]
+3X[0,2,0,0,1]+1X[0,2,0,3,1]+1X[0,2,1,1,2]+1X[0,2,1,2,0]
+2X[0,2,2,0,1]+1X[0,3,0,0,3]+1X[0,3,0,1,1]+1X[0,3,1,0,0]
+3X[1,0,0,1,2]+4X[1,0,0,2,0]+5X[1,0,1,0,1]+1X[1,0,1,3,1]
+1X[1,0,2,1,2]+3X[1,0,2,2,0]+1X[1,0,3,0,1]+1X[1,1,0,0,0]
+2X[1,1,0,2,2]+1X[1,1,0,3,0]+1X[1,1,1,0,3]+6X[1,1,1,1,1]
+2X[1,1,2,0,0]+2X[1,2,0,0,2]+2X[1,2,0,1,0]+1X[2,0,0,1,3]
+2X[2,0,0,2,1]+2X[2,0,1,0,2]+4X[2,0,1,1,0]+2X[2,1,0,0,1]
+1X[3,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,0,1,1,0],A5)
  2X[0,0,0,0,2] + 5X[0,0,0,1,0] + 2X[0,0,0,2,4]
+ 4X[0,0,0,3,2] + 6X[0,0,0,4,0] +10X[0,0,1,1,3]
+21X[0,0,1,2,1] +21X[0,0,2,0,2] +17X[0,0,2,1,0]
+ 1X[0,0,2,3,2] + 2X[0,0,2,4,0] + 2X[0,0,3,1,3]
+ 6X[0,0,3,2,1] + 3X[0,0,4,0,2] + 4X[0,0,4,1,0]
+ 1X[0,0,4,4,0] + 5X[0,1,0,0,4] +23X[0,1,0,1,2]
+25X[0,1,0,2,0] + 1X[0,1,0,4,2] + 2X[0,1,0,5,0]
+28X[0,1,1,0,1] + 4X[0,1,1,2,3] +12X[0,1,1,3,1]
+ 2X[0,1,2,0,4] +17X[0,1,2,1,2] +15X[0,1,2,2,0]
+15X[0,1,3,0,1] + 1X[0,1,3,3,1] + 1X[0,1,4,1,2]
+ 1X[0,1,4,2,0] +10X[0,2,0,0,0] + 3X[0,2,0,1,4]
+13X[0,2,0,2,2] +13X[0,2,0,3,0] +13X[0,2,1,0,3]
+31X[0,2,1,1,1] + 1X[0,2,1,4,1] +10X[0,2,2,0,0]
+ 2X[0,2,2,2,2] + 1X[0,2,2,3,0] + 3X[0,2,3,1,1]
+ 2X[0,2,4,0,0] + 9X[0,3,0,0,2] +13X[0,3,0,1,0]
+ 1X[0,3,0,4,0] + 2X[0,3,1,1,3] + 3X[0,3,1,2,1]
+ 3X[0,3,2,0,2] + 2X[0,3,2,1,0] + 1X[0,4,0,0,4]
+ 1X[0,4,0,1,2] + 3X[0,4,0,2,0] + 2X[0,4,1,0,1]
+ 8X[1,0,0,0,3] +20X[1,0,0,1,1] + 3X[1,0,0,3,3]
+ 4X[1,0,0,4,1] +10X[1,0,1,0,0] + 3X[1,0,1,1,4]
+20X[1,0,1,2,2] +17X[1,0,1,3,0] +13X[1,0,2,0,3]
+36X[1,0,2,1,1] + 1X[1,0,2,4,1] +13X[1,0,3,0,0]
+ 1X[1,0,3,2,2] + 3X[1,0,3,3,0] + 1X[1,0,4,0,3]
+ 3X[1,0,4,1,1] + 2X[1,1,0,0,5] +17X[1,1,0,1,3]
+37X[1,1,0,2,1] +37X[1,1,1,0,2] +38X[1,1,1,1,0]
+ 3X[1,1,1,3,2] + 3X[1,1,1,4,0] + 3X[1,1,2,1,3]
+10X[1,1,2,2,1] + 6X[1,1,3,0,2] + 7X[1,1,3,1,0]
+19X[1,2,0,0,1] + 3X[1,2,0,2,3] + 6X[1,2,0,3,1]
+ 1X[1,2,1,0,4] +13X[1,2,1,1,2] +10X[1,2,1,2,0]
+11X[1,2,2,0,1] + 4X[1,3,0,0,3] + 9X[1,3,0,1,1]
+ 4X[1,3,1,0,0] + 3X[2,0,0,0,4] +19X[2,0,0,1,2]
+16X[2,0,0,2,0] + 2X[2,0,0,4,2] +24X[2,0,1,0,1]
+ 2X[2,0,1,2,3] + 7X[2,0,1,3,1] + 3X[2,0,2,0,4]
+10X[2,0,2,1,2] +13X[2,0,2,2,0] + 7X[2,0,3,0,1]
+ 5X[2,1,0,0,0] + 2X[2,1,0,1,4] +11X[2,1,0,2,2]
+ 7X[2,1,0,3,0] + 9X[2,1,1,0,3] +24X[2,1,1,1,1]
+10X[2,1,2,0,0] +11X[2,2,0,0,2] + 7X[2,2,0,1,0]
+ 4X[3,0,0,1,3] +10X[3,0,0,2,1] + 7X[3,0,1,0,2]
+11X[3,0,1,1,0] + 6X[3,1,0,0,1] + 3X[4,0,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[0,0,1,0,1],A5)**

```

  1X[0,0,0,1,0]+1X[0,0,2,0,2] +1X[0,1,0,2,0]+1X[0,1,1,0,1]
+1X[0,2,0,0,0]+1X[1,0,0,0,3] +1X[1,0,0,1,1]

```

**sym\_tensor(3,[0,0,1,0,1],A5)**

```

  1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,0,3,0]+2X[0,0,1,0,3]+3X[0,0,1,1,1]
+2X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,3,0,3]+3X[0,1,0,0,2]+2X[0,1,0,1,0]
+1X[0,1,1,2,1]+1X[0,1,2,0,2]+1X[0,1,2,1,0]+1X[0,2,0,1,2]
+2X[0,2,1,0,1]+1X[0,3,0,0,0]+1X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,1,0,4]
+2X[1,0,1,1,2]+2X[1,0,1,2,0]+1X[1,0,2,0,1]+1X[1,1,0,0,3]
+4X[1,1,0,1,1]+1X[1,1,1,0,0]+2X[2,0,0,1,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,0,1,0,1],A5)
  3X[0,0,0,0,4] + 4X[0,0,0,1,2] + 7X[0,0,0,2,0]
+ 4X[0,0,1,0,1] + 1X[0,0,1,2,3] + 2X[0,0,1,3,1]
+ 2X[0,0,2,0,4] + 6X[0,0,2,1,2] + 3X[0,0,2,2,0]
+ 4X[0,0,3,0,1] + 1X[0,0,4,0,4] + 3X[0,1,0,0,0]
+ 3X[0,1,0,1,4] + 5X[0,1,0,2,2] + 6X[0,1,0,3,0]
+ 9X[0,1,1,0,3] +15X[0,1,1,1,1] + 4X[0,1,2,0,0]
+ 1X[0,1,2,2,2] + 1X[0,1,3,0,3] + 1X[0,1,3,1,1]
+ 7X[0,2,0,0,2] + 9X[0,2,0,1,0] + 1X[0,2,0,4,0]
+ 1X[0,2,1,1,3] + 1X[0,2,1,2,1] + 3X[0,2,2,0,2]
+ 1X[0,2,2,1,0] + 1X[0,3,0,1,2] + 2X[0,3,0,2,0]
+ 2X[0,3,1,0,1] + 2X[0,4,0,0,0] + 1X[1,0,0,0,5]
+ 6X[1,0,0,1,3] +11X[1,0,0,2,1] +12X[1,0,1,0,2]
+10X[1,0,1,1,0] + 1X[1,0,2,0,5] + 2X[1,0,2,1,3]
+ 3X[1,0,2,2,1] + 1X[1,0,3,0,2] + 2X[1,0,3,1,0]
+ 8X[1,1,0,0,1] + 1X[1,1,0,2,3] + 2X[1,1,0,3,1]
+ 2X[1,1,1,0,4] + 7X[1,1,1,1,2] + 5X[1,1,1,2,0]
+ 5X[1,1,2,0,1] + 4X[1,2,0,0,3] + 7X[1,2,0,1,1]
+ 2X[1,2,1,0,0] + 1X[2,0,0,0,0] + 1X[2,0,0,0,6]
+ 1X[2,0,0,1,4] + 5X[2,0,0,2,2] + 1X[2,0,0,3,0]
+ 2X[2,0,1,0,3] + 8X[2,0,1,1,1] + 5X[2,0,2,0,0]
+ 5X[2,1,0,0,2] + 4X[2,1,0,1,0] + 2X[3,0,0,0,1]

```

**Liste 1.1.5 : A6**

```

sym_tensor(2,[2,0,0,0,0,0],A6)
  1X[0,2,0,0,0,0] +1X[4,0,0,0,0,0]
sym_tensor(3,[2,0,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,2,0,0,0] +1X[2,2,0,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0,0]
sym_tensor(4,[2,0,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,4,0,0,0,0] +1X[2,0,2,0,0,0]
+1X[4,2,0,0,0,0] +1X[8,0,0,0,0,0]
sym_tensor(5,[2,0,0,0,0,0],A6)
  1X[ 0,0,0,0,2,0] +1X[ 0,2,2,0,0,0] +1X[ 2,0,0,2,0,0]
+1X[ 2,4,0,0,0,0] +1X[ 4,0,2,0,0,0] +1X[ 6,2,0,0,0,0]
+1X[10,0,0,0,0,0]
sym_tensor(6,[2,0,0,0,0,0],A6)
  1X[ 0,0,0,0,0,2] +1X[ 0,0,4,0,0,0] +1X[ 0,2,0,2,0,0]
+1X[ 0,6,0,0,0,0] +1X[ 2,0,0,0,2,0] +1X[ 2,2,2,0,0,0]
+1X[ 4,0,0,2,0,0] +1X[ 4,4,0,0,0,0] +1X[ 6,0,2,0,0,0]
+1X[ 8,2,0,0,0,0] +1X[12,0,0,0,0,0]

sym_tensor(2,[0,2,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,2,0,0]+1X[0,2,0,1,0,0] +1X[0,4,0,0,0,0]
+1X[2,0,2,0,0,0]

sym_tensor(3,[0,2,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,3,0,0] +1X[0,0,4,0,0,0]
+1X[0,1,0,1,0,1] +2X[0,2,0,2,0,0] +1X[0,3,0,0,0,1]
+1X[0,4,0,1,0,0] +1X[0,6,0,0,0,0] +1X[1,0,2,0,1,0]
+1X[1,1,0,1,1,0] +1X[1,2,1,1,0,0] +1X[2,0,0,0,2,0]
+1X[2,0,2,1,0,0] +1X[2,1,1,0,1,0] +1X[2,2,2,0,0,0]
+1X[4,0,0,2,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,2,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,1,0,2] +2X[0,0,0,4,0,0] +3X[0,0,2,0,2,0]
+3X[0,1,0,2,0,1] +1X[0,1,1,0,1,1] +1X[0,1,1,1,0,0]
+2X[0,1,3,0,1,0] +3X[0,2,0,0,0,2] +3X[0,2,0,3,0,0]
+2X[0,2,1,1,1,0] +1X[0,2,4,0,0,0] +3X[0,3,0,1,0,1]
+3X[0,4,0,2,0,0] +1X[0,5,0,0,0,1] +1X[0,6,0,1,0,0]
+1X[0,8,0,0,0,0] +1X[1,0,0,1,1,1] +2X[1,0,1,0,1,0]
+2X[1,0,2,1,1,0] +1X[1,0,3,0,0,1] +1X[1,1,0,0,0,1]
+2X[1,1,0,2,1,0] +2X[1,1,1,0,2,0] +3X[1,1,1,1,0,1]
+1X[1,1,2,0,0,0] +1X[1,1,3,1,0,0] +2X[1,2,0,0,1,1]
+1X[1,2,0,1,0,0] +1X[1,2,1,2,0,0] +2X[1,2,2,0,1,0]
+2X[1,3,0,1,1,0] +1X[1,3,1,0,0,1] +1X[1,4,1,1,0,0]
+1X[2,0,0,0,0,0] +2X[2,0,0,1,2,0] +2X[2,0,1,0,1,1]
+1X[2,0,1,1,0,0] +3X[2,0,2,2,0,0] +1X[2,1,0,0,1,0]
+3X[2,1,1,1,1,0] +2X[2,1,2,0,0,1] +3X[2,2,0,0,2,0]
+1X[2,2,1,0,0,0] +2X[2,2,2,1,0,0] +1X[2,3,1,0,1,0]
+1X[2,4,2,0,0,0] +1X[3,0,0,2,1,0] +2X[3,0,1,1,0,1]
+1X[3,1,0,0,1,1] +1X[3,1,1,2,0,0] +1X[3,1,2,0,1,0]
+1X[3,2,0,1,1,0] +1X[4,0,0,0,0,2] +1X[4,0,1,1,1,0]
+1X[4,0,4,0,0,0] +1X[4,1,0,1,0,1] +1X[4,2,0,2,0,0]
+1X[6,0,0,0,2,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,1,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,2,0,0,0] +1X[1,1,1,0,0,0] +1X[2,0,0,1,0,0]
+1X[2,2,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[1,1,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,3,0,0,0] +1X[0,1,1,1,0,0] +1X[0,2,0,0,1,0]
+1X[0,3,1,0,0,0] +1X[1,0,0,2,0,0] +1X[1,0,1,0,1,0]
+1X[1,1,2,0,0,0] +1X[1,2,0,1,0,0] +2X[2,0,1,1,0,0]
+1X[2,1,0,0,1,0] +1X[2,2,1,0,0,0] +1X[3,0,0,0,0,1]
+1X[3,0,2,0,0,0] +1X[3,1,0,1,0,0] +1X[3,3,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[1,1,0,0,0,0],A6)
  2X[0,0,1,1,1,0] +1X[0,0,4,0,0,0] +2X[0,1,0,1,0,1]
+1X[0,1,2,1,0,0] +3X[0,2,0,2,0,0] +2X[0,2,1,0,1,0]
+1X[0,3,0,0,0,1] +1X[0,4,0,1,0,0] +2X[1,0,1,2,0,0]
+3X[1,0,2,0,1,0] +3X[1,1,0,1,1,0] +3X[1,1,1,0,0,1]
+2X[1,1,3,0,0,0] +1X[1,2,0,0,0,0] +3X[1,2,1,1,0,0]
+2X[1,3,0,0,1,0] +1X[1,4,1,0,0,0] +2X[2,0,0,0,2,0]
+1X[2,0,0,1,0,1] +1X[2,0,1,0,0,0] +3X[2,0,2,1,0,0]
+2X[2,1,0,2,0,0] +4X[2,1,1,0,1,0] +1X[2,2,0,0,0,1]
+2X[2,2,2,0,0,0] +1X[2,3,0,1,0,0] +3X[3,0,0,1,1,0]
+2X[3,0,1,0,0,1] +1X[3,1,0,0,0,0] +3X[3,1,1,1,0,0]
+1X[3,2,0,0,1,0] +1X[3,3,1,0,0,0] +2X[4,0,0,2,0,0]
+1X[4,0,1,0,1,0] +1X[4,1,0,0,0,1] +1X[4,1,2,0,0,0]
+1X[4,2,0,1,0,0] +1X[4,4,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(5,[1,1,0,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,0,3,0] + 1X[0,0,0,1,1,1] + 1X[0,0,0,2,0,0]
+1X[0,0,1,0,0,2] + 1X[0,0,1,0,1,0] + 1X[0,0,1,3,0,0]
+3X[0,0,2,1,1,0] + 1X[0,0,3,0,0,1] + 1X[0,0,5,0,0,0]
+4X[0,1,0,2,1,0] + 4X[0,1,1,0,2,0] + 7X[0,1,1,1,0,1]
+3X[0,1,2,0,0,0] + 2X[0,1,3,1,0,0] + 4X[0,2,0,0,1,1]
+3X[0,2,0,1,0,0] + 4X[0,2,1,2,0,0] + 5X[0,2,2,0,1,0]
+4X[0,3,0,1,1,0] + 4X[0,3,1,0,0,1] + 1X[0,3,3,0,0,0]
+1X[0,4,0,0,0,0] + 2X[0,4,1,1,0,0] + 1X[0,5,0,0,1,0]
+2X[1,0,0,1,2,0] + 4X[1,0,0,2,0,1] + 5X[1,0,1,0,1,1]
+4X[1,0,1,1,0,0] + 4X[1,0,2,2,0,0] + 4X[1,0,3,0,1,0]
+1X[1,1,0,0,0,2] + 3X[1,1,0,0,1,0] + 3X[1,1,0,3,0,0]
+12X[1,1,1,1,1,0] + 7X[1,1,2,0,0,1] + 2X[1,1,4,0,0,0]
+5X[1,2,0,0,2,0] + 9X[1,2,0,1,0,1] + 5X[1,2,1,0,0,0]
+4X[1,2,2,1,0,0] + 4X[1,3,0,2,0,0] + 5X[1,3,1,0,1,0]
+2X[1,4,0,0,0,1] + 1X[1,4,2,0,0,0] + 1X[1,5,0,1,0,0]
+4X[2,0,0,2,1,0] + 6X[2,0,1,0,2,0] + 9X[2,0,1,1,0,1]
+4X[2,0,2,0,0,0] + 4X[2,0,3,1,0,0] + 6X[2,1,0,0,1,1]
+6X[2,1,0,1,0,0] + 7X[2,1,1,2,0,0] + 8X[2,1,2,0,1,0]
+9X[2,2,0,1,1,0] + 6X[2,2,1,0,0,1] + 2X[2,2,3,0,0,0]
+2X[2,3,0,0,0,0] + 4X[2,3,1,1,0,0] + 2X[2,4,0,0,1,0]
+1X[2,5,1,0,0,0] + 2X[3,0,0,0,0,2] + 2X[3,0,0,0,1,0]
+2X[3,0,0,3,0,0] + 8X[3,0,1,1,1,0] + 6X[3,0,2,0,0,1]
+1X[3,0,4,0,0,0] + 5X[3,1,0,0,2,0] + 7X[3,1,0,1,0,1]
+4X[3,1,1,0,0,0] + 5X[3,1,2,1,0,0] + 4X[3,2,0,2,0,0]
+5X[3,2,1,0,1,0] + 1X[3,3,0,0,0,1] + 2X[3,3,2,0,0,0]
+1X[3,4,0,1,0,0] + 4X[4,0,0,0,1,1] + 3X[4,0,0,1,0,0]
+3X[4,0,1,2,0,0] + 3X[4,0,2,0,1,0] + 5X[4,1,0,1,1,0]
+3X[4,1,1,0,0,1] + 1X[4,1,3,0,0,0] + 1X[4,2,0,0,0,0]
+3X[4,2,1,1,0,0] + 1X[4,3,0,0,1,0] + 1X[4,4,1,0,0,0]
+2X[5,0,0,0,2,0] + 2X[5,0,0,1,0,1] + 1X[5,0,1,0,0,0]
+1X[5,0,2,1,0,0] + 2X[5,1,0,2,0,0] + 1X[5,1,1,0,1,0]
+1X[5,2,0,0,0,1] + 1X[5,2,2,0,0,0] + 1X[5,3,0,1,0,0]
+1X[5,5,0,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[1,0,0,0,1,0],A6)**

```

  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,1,0,1,0,1] +1X[1,0,0,0,1,1]
+1X[1,0,0,1,0,0] +1X[2,0,0,0,2,0] +1X[2,0,1,0,0,0]

```

**sym\_tensor(3,[1,0,0,0,1,0],A6)**

```

  1X[0,0,0,0,0,3] +1X[0,0,0,0,1,1] +2X[0,0,0,1,0,0]
+1X[0,0,1,2,0,0] +1X[0,0,2,0,0,2] +1X[0,1,0,0,2,1]
+1X[0,1,0,1,0,2] +2X[0,1,0,1,1,0] +2X[0,1,1,0,0,1]
+1X[0,2,0,0,0,0] +2X[1,0,0,0,1,2] +1X[1,0,0,0,2,0]
+4X[1,0,0,1,0,1] +1X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,1,0,1,1,1]
+1X[1,1,1,0,1,0] +1X[1,2,0,0,0,1] +1X[2,0,0,0,2,1]
+1X[2,0,0,1,0,2] +2X[2,0,0,1,1,0] +2X[2,0,1,0,0,1]
+1X[2,1,0,0,0,0] +1X[3,0,0,0,3,0] +1X[3,0,1,0,1,0]
+1X[4,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,0,0,1,0],A6)
  2X[0,0,0,0,0,4] + 2X[0,0,0,0,1,2] + 5X[0,0,0,0,2,0]
+5X[0,0,0,1,0,1] + 3X[0,0,1,0,0,0] + 1X[0,0,1,1,1,2]
+1X[0,0,1,1,2,0] + 2X[0,0,1,2,0,1] + 3X[0,0,2,0,1,1]
+2X[0,0,2,1,0,0] + 1X[0,1,0,0,2,2] + 2X[0,1,0,0,3,0]
+3X[0,1,0,1,0,3] + 8X[0,1,0,1,1,1] + 3X[0,1,0,2,0,0]
+6X[0,1,1,0,0,2] + 9X[0,1,1,0,1,0] + 4X[0,2,0,0,0,1]
+1X[0,2,0,2,0,2] + 1X[0,2,1,0,2,0] + 1X[0,2,2,0,0,0]
+1X[0,3,0,0,1,1] + 3X[1,0,0,0,1,3] + 5X[1,0,0,0,2,1]
+9X[1,0,0,1,0,2] +10X[1,0,0,1,1,0] +10X[1,0,1,0,0,1]
+1X[1,0,1,2,1,0] + 1X[1,0,2,0,1,2] + 1X[1,0,2,1,0,1]
+4X[1,1,0,0,0,0] + 1X[1,1,0,0,3,1] + 2X[1,1,0,1,1,2]
+3X[1,1,0,1,2,0] + 3X[1,1,0,2,0,1] + 1X[1,1,1,0,0,3]
+6X[1,1,1,0,1,1] + 4X[1,1,1,1,0,0] + 2X[1,2,0,0,0,2]
+5X[1,2,0,0,1,0] + 3X[2,0,0,0,2,2] + 1X[2,0,0,0,3,0]
+1X[2,0,0,1,0,3] + 8X[2,0,0,1,1,1] + 6X[2,0,0,2,0,0]
+7X[2,0,1,0,0,2] + 6X[2,0,1,0,1,0] + 7X[2,1,0,0,0,1]
+1X[2,1,0,1,2,1] + 1X[2,1,1,0,2,0] + 1X[2,1,1,1,0,1]
+1X[2,2,0,0,1,1] + 1X[2,2,0,1,0,0] + 1X[3,0,0,0,3,1]
+1X[3,0,0,1,1,2] + 2X[3,0,0,1,2,0] + 1X[3,0,0,2,0,1]
+3X[3,0,1,0,1,1] + 2X[3,0,1,1,0,0] + 1X[3,1,0,0,0,2]
+3X[3,1,0,0,1,0] + 1X[4,0,0,0,0,1] + 1X[4,0,0,0,4,0]
+1X[4,0,1,0,2,0] + 1X[4,0,2,0,0,0] + 1X[5,0,0,0,1,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,0,0,0,0,1],A6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,1,0,0,1,0] +1X[1,0,0,0,0,1]
+1X[2,0,0,0,0,2]

```

```

sym_tensor(3,[1,0,0,0,0,1],A6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,1,1,0,0] +1X[0,1,0,0,0,2]
+1X[0,1,0,0,1,0] +2X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,1,0,0,1,1]
+1X[2,0,0,0,0,2] +1X[2,0,0,0,1,0] +1X[3,0,0,0,0,3]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,0,0,0,1],A6)
  2X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,1,0,1,1] +1X[0,0,1,1,0,0]
+1X[0,1,0,0,0,2] +3X[0,1,0,0,1,0] +1X[0,2,0,0,2,0]
+3X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,0,1,1,0,1] +1X[1,1,0,0,0,3]
+2X[1,1,0,0,1,1] +1X[1,1,0,1,0,0] +3X[2,0,0,0,0,2]
+1X[2,0,0,0,1,0] +1X[2,1,0,0,1,2] +1X[3,0,0,0,0,3]
+1X[3,0,0,0,1,1] +1X[4,0,0,0,0,4]

```

```

sym_tensor(5,[1,0,0,0,0,1],A6)
  2X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,2,0,1] +2X[0,0,1,0,1,1]
+2X[0,0,1,1,0,0] +3X[0,1,0,0,0,2] +4X[0,1,0,0,1,0]
+1X[0,1,1,1,1,0] +1X[0,2,0,0,1,2] +1X[0,2,0,0,2,0]
+1X[0,2,0,1,0,1] +5X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,0,1,0,1,2]
+1X[1,0,1,0,2,0] +2X[1,0,1,1,0,1] +1X[1,0,2,0,0,0]
+2X[1,1,0,0,0,3] +5X[1,1,0,0,1,1] +2X[1,1,0,1,0,0]
+1X[1,2,0,0,2,1] +4X[2,0,0,0,0,2] +3X[2,0,0,0,1,0]
+1X[2,0,1,1,0,2] +1X[2,1,0,0,0,4] +2X[2,1,0,0,1,2]
+1X[2,1,0,0,2,0] +1X[2,1,0,1,0,1] +3X[3,0,0,0,0,3]
+2X[3,0,0,0,1,1] +1X[3,1,0,0,1,3] +1X[4,0,0,0,0,4]
+1X[4,0,0,0,1,2] +1X[5,0,0,0,0,5]

```



```

sym_tensor(6,[1,0,0,0,0,1],A6)
  4X[0,0,0,0,0,0] + 1X[0,0,0,1,2,0] + 1X[0,0,0,2,0,1]
+1X[0,0,1,0,0,3] + 4X[0,0,1,0,1,1] + 4X[0,0,1,1,0,0]
+1X[0,0,2,2,0,0] + 4X[0,1,0,0,0,2] + 7X[0,1,0,0,1,0]
+1X[0,1,1,0,2,1] + 1X[0,1,1,1,0,2] + 2X[0,1,1,1,1,0]
+1X[0,1,2,0,0,1] + 1X[0,2,0,0,0,4] + 2X[0,2,0,0,1,2]
+4X[0,2,0,0,2,0] + 2X[0,2,0,1,0,1] + 1X[0,2,1,0,0,0]
+1X[0,3,0,0,3,0] + 7X[1,0,0,0,0,1] + 1X[1,0,0,2,0,2]
+1X[1,0,0,2,1,0] + 3X[1,0,1,0,1,2] + 2X[1,0,1,0,2,0]
+5X[1,0,1,1,0,1] + 1X[1,0,2,0,0,0] + 4X[1,1,0,0,0,3]
+10X[1,1,0,0,1,1] + 4X[1,1,0,1,0,0] + 1X[1,1,1,1,1,1]
+1X[1,2,0,0,1,3] + 2X[1,2,0,0,2,1] + 1X[1,2,0,1,0,2]
+1X[1,2,0,1,1,0] + 8X[2,0,0,0,0,2] + 4X[2,0,0,0,1,0]
+1X[2,0,1,0,1,3] + 1X[2,0,1,0,2,1] + 2X[2,0,1,1,0,2]
+1X[2,0,1,1,1,0] + 1X[2,0,2,0,0,1] + 2X[2,1,0,0,0,4]
+6X[2,1,0,0,1,2] + 2X[2,1,0,0,2,0] + 3X[2,1,0,1,0,1]
+1X[2,2,0,0,2,2] + 5X[3,0,0,0,0,3] + 4X[3,0,0,0,1,1]
+1X[3,0,0,1,0,0] + 1X[3,0,1,1,0,3] + 1X[3,1,0,0,0,5]
+2X[3,1,0,0,1,3] + 1X[3,1,0,0,2,1] + 1X[3,1,0,1,0,2]
+3X[4,0,0,0,0,4] + 2X[4,0,0,0,1,2] + 1X[4,0,0,0,2,0]
+1X[4,1,0,0,1,4] + 1X[5,0,0,0,0,5] + 1X[5,0,0,0,1,3]
+1X[6,0,0,0,0,6]

```

```

sym_tensor(2,[0,1,0,0,1,0],A6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,1,2,0] +1X[0,0,1,0,1,1]
+1X[0,0,1,1,0,0] +2X[0,1,0,0,1,0] +1X[0,2,0,0,2,0]
+1X[0,2,1,0,0,0] +1X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,0,1,1,0,1]
+1X[1,1,0,0,1,1] +1X[1,1,0,1,0,0] +1X[2,0,0,0,0,2]

```

```

sym_tensor(3,[0,1,0,0,1,0],A6)
  2X[0,0,0,0,0,0] + 1X[0,0,0,0,3,1] + 1X[0,0,0,1,1,2]
+4X[0,0,0,1,2,0] + 3X[0,0,0,2,0,1] + 2X[0,0,1,0,0,3]
+7X[0,0,1,0,1,1] + 6X[0,0,1,1,0,0] + 1X[0,0,2,2,0,0]
+1X[0,0,3,0,0,2] + 3X[0,1,0,0,0,2] + 8X[0,1,0,0,1,0]
+1X[0,1,0,1,3,0] + 1X[0,1,0,2,1,1] + 2X[0,1,1,0,2,1]
+2X[0,1,1,1,0,2] + 4X[0,1,1,1,1,0] + 3X[0,1,2,0,0,1]
+1X[0,2,0,0,1,2] + 5X[0,2,0,0,2,0] + 5X[0,2,0,1,0,1]
+4X[0,2,1,0,0,0] + 1X[0,3,0,0,3,0] + 1X[0,3,1,0,1,0]
+3X[1,0,0,0,0,1] + 2X[1,0,0,1,2,1] + 2X[1,0,0,2,0,2]
+3X[1,0,0,2,1,0] + 4X[1,0,1,0,1,2] + 5X[1,0,1,0,2,0]
+8X[1,0,1,1,0,1] + 3X[1,0,2,0,0,0] + 1X[1,1,0,0,0,3]
+10X[1,1,0,0,1,1] + 7X[1,1,0,1,0,0] + 1X[1,1,1,1,1,1]
+1X[1,1,2,0,1,0] + 1X[1,2,0,0,2,1] + 1X[1,2,0,1,0,2]
+2X[1,2,0,1,1,0] + 2X[1,2,1,0,0,1] + 1X[1,3,0,0,0,0]
+3X[2,0,0,0,0,2] + 3X[2,0,0,0,1,0] + 1X[2,0,0,3,0,0]
+1X[2,0,1,0,2,1] + 1X[2,0,1,1,0,2] + 2X[2,0,1,1,1,0]
+2X[2,0,2,0,0,1] + 2X[2,1,0,0,1,2] + 1X[2,1,0,0,2,0]
+4X[2,1,0,1,0,1] + 1X[2,1,1,0,0,0] + 1X[3,0,0,0,0,3]
+1X[3,0,0,0,1,1] + 2X[3,0,0,1,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,2,0,0,0] +1X[1,0,0,0,1,0]
sym_tensor(3,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,1,0,0,1] +1X[0,0,3,0,0,0] +1X[1,0,1,0,1,0]
  +1X[2,0,0,0,0,0]
sym_tensor(4,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,2,0,0,1] +1X[0,0,4,0,0,0]
  +1X[0,1,0,1,0,1] +1X[1,0,0,1,0,0] +1X[1,0,2,0,1,0]
  +1X[2,0,0,0,2,0] +1X[2,0,1,0,0,0]

sym_tensor(5,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,0,0,2] +1X[0,0,3,0,0,1]
  +1X[0,0,5,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1] +1X[0,1,1,1,0,1]
  +1X[1,0,1,0,1,1] +1X[1,0,1,1,0,0] +1X[1,0,3,0,1,0]
  +1X[1,1,0,0,1,0] +1X[2,0,1,0,2,0] +1X[2,0,2,0,0,0]
  +1X[3,0,0,0,1,0]

sym_tensor(6,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,0,1,2,0,0] +2X[0,0,2,0,0,2]
  +1X[0,0,4,0,0,1] +1X[0,0,6,0,0,0] +1X[0,1,0,1,1,0]
  +1X[0,1,1,0,0,1] +1X[0,1,2,1,0,1] +1X[0,2,0,0,0,0]
  +1X[1,0,0,0,1,2] +1X[1,0,0,1,0,1] +1X[1,0,2,0,1,1]
  +1X[1,0,2,1,0,0] +1X[1,0,4,0,1,0] +1X[1,1,0,1,1,1]
  +1X[1,1,1,0,1,0] +1X[2,0,0,1,1,0] +1X[2,0,1,0,0,1]
  +1X[2,0,2,0,2,0] +1X[2,0,3,0,0,0] +1X[3,0,0,0,3,0]
  +1X[3,0,1,0,1,0] +1X[4,0,0,0,0,0]

sym_tensor(7,[0,0,1,0,0,0],A6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,1,0,0,3] +1X[0,0,1,0,1,1]
  +1X[0,0,1,1,0,0] +1X[0,0,2,2,0,0] +2X[0,0,3,0,0,2]
  +1X[0,0,5,0,0,1] +1X[0,0,7,0,0,0] +1X[0,1,0,0,1,0]
  +1X[0,1,1,1,0,2] +1X[0,1,1,1,1,0] +1X[0,1,2,0,0,1]
  +1X[0,1,3,1,0,1] +1X[0,2,0,0,2,0] +1X[0,2,1,0,0,0]
  +1X[1,0,0,2,1,0] +1X[1,0,1,0,1,2] +2X[1,0,1,1,0,1]
  +1X[1,0,3,0,1,1] +1X[1,0,3,1,0,0] +1X[1,0,5,0,1,0]
  +1X[1,1,0,0,1,1] +1X[1,1,0,1,0,0] +1X[1,1,1,1,1,1]
  +1X[1,1,2,0,1,0] +1X[2,0,0,0,0,2] +1X[2,0,1,0,2,1]
  +1X[2,0,1,1,1,0] +1X[2,0,2,0,0,1] +1X[2,0,3,0,2,0]
  +1X[2,0,4,0,0,0] +1X[2,1,0,0,2,0] +1X[2,1,0,1,0,1]
  +1X[3,0,0,1,0,0] +1X[3,0,1,0,3,0] +1X[3,0,2,0,1,0]
  +1X[4,0,0,0,2,0] +1X[4,0,1,0,0,0]

```

**Liste 1.1.6 : A7**

sym\_tensor(2,[0,0,1,0,0,0,0],A7)  
1X[0,0,2,0,0,0,0] +1X[1,0,0,0,1,0,0]

sym\_tensor(3,[0,0,1,0,0,0,0],A7)  
1X[0,0,1,0,0,1,0] +1X[0,0,3,0,0,0,0] +1X[1,0,1,0,1,0,0]  
+1X[2,0,0,0,0,0,1]

sym\_tensor(4,[0,0,1,0,0,0,0],A7)  
1X[0,0,0,0,0,2,0] +1X[0,0,2,0,0,1,0] +1X[0,0,4,0,0,0,0]  
+1X[0,1,0,1,0,1,0] +1X[1,0,0,1,0,0,1] +1X[1,0,1,0,0,0,0]  
+1X[1,0,2,0,1,0,0] +1X[2,0,0,0,2,0,0] +1X[2,0,1,0,0,0,1]

sym\_tensor(5,[0,0,1,0,0,0,0],A7)  
1X[0,0,0,2,0,0,1] +1X[0,0,1,0,0,2,0] +1X[0,0,1,1,0,0,0]  
+1X[0,0,3,0,0,1,0] +1X[0,0,5,0,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1,1]  
+1X[0,1,1,1,0,1,0] +1X[1,0,0,0,0,1,0] +1X[1,0,1,0,1,1,0]  
+1X[1,0,1,1,0,0,1] +1X[1,0,2,0,0,0,0] +1X[1,0,3,0,1,0,0]  
+1X[1,1,0,0,1,0,1] +1X[1,1,0,1,0,0,0] +1X[2,0,0,0,1,0,0]  
+1X[2,0,1,0,2,0,0] +1X[2,0,2,0,0,0,1] +1X[3,0,0,0,1,0,1]

sym\_tensor(6,[0,0,1,0,0,0,0],A7)  
1X[0,0,0,1,0,0,2] +1X[0,0,0,1,0,1,0] +1X[0,0,1,2,0,0,1]  
+2X[0,0,2,0,0,2,0] +1X[0,0,2,1,0,0,0] +1X[0,0,4,0,0,1,0]  
+1X[0,0,6,0,0,0,0] +1X[0,1,0,1,1,0,1] +1X[0,1,0,2,0,0,0]  
+1X[0,1,1,0,0,1,1] +1X[0,1,1,0,1,0,0] +1X[0,1,2,1,0,1,0]  
+1X[0,2,0,0,0,0,2] +1X[1,0,0,0,1,2,0] +1X[1,0,0,1,0,1,1]  
+1X[1,0,0,1,1,0,0] +2X[1,0,1,0,0,1,0] +1X[1,0,2,0,1,1,0]  
+1X[1,0,2,1,0,0,1] +1X[1,0,3,0,0,0,0] +1X[1,0,4,0,1,0,0]  
+1X[1,1,0,0,0,0,1] +1X[1,1,0,1,1,1,0] +1X[1,1,1,0,1,0,1]  
+1X[1,1,1,1,0,0,0] +1X[2,0,0,0,0,0,0] +1X[2,0,0,1,1,0,1]  
+1X[2,0,1,0,0,1,1] +2X[2,0,1,0,1,0,0] +1X[2,0,2,0,2,0,0]  
+1X[2,0,3,0,0,0,1] +1X[2,1,0,0,0,1,0] +1X[3,0,0,0,3,0,0]  
+1X[3,0,1,0,1,0,1] +1X[4,0,0,0,0,0,2]

**Liste 1.1.7 : A8**

```
sym_tensor(2,[0,0,1,0,0,0,0,0],A8)
  1X[0,0,2,0,0,0,0,0] +1X[1,0,0,0,1,0,0,0]

sym_tensor(3,[0,0,1,0,0,0,0,0],A8)
  1X[0,0,1,0,0,1,0,0] +1X[0,0,3,0,0,0,0,0] +1X[1,0,1,0,1,0,0,0]
  +1X[2,0,0,0,0,0,1,0]

sym_tensor(4,[0,0,1,0,0,0,0,0],A8)
  1X[0,0,0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,2,0,0,1,0,0] +1X[0,0,4,0,0,0,0,0]
  +1X[0,1,0,1,0,1,0,0] +1X[1,0,0,1,0,0,1,0] +1X[1,0,1,0,0,0,0,1]
  +1X[1,0,2,0,1,0,0,0] +1X[2,0,0,0,2,0,0,0] +1X[2,0,1,0,0,0,1,0]
  +1X[3,0,0,0,0,0,0,0]

sym_tensor(4,[0,0,1,0,0,0,0,0],A8)
  1X[0,0,0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,2,0,0,1,0,0] +1X[0,0,4,0,0,0,0,0]
  +1X[0,1,0,1,0,1,0,0] +1X[1,0,0,1,0,0,1,0] +1X[1,0,1,0,0,0,0,1]
  +1X[1,0,2,0,1,0,0,0] +1X[2,0,0,0,2,0,0,0] +1X[2,0,1,0,0,0,1,0]
  +1X[3,0,0,0,0,0,0,0]

sym_tensor(5,[0,0,1,0,0,0,0,0],A8)
  1X[0,0,0,2,0,0,1,0] +1X[0,0,1,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,1,0,0,0,1]
  +1X[0,0,3,0,0,1,0,0] +1X[0,0,5,0,0,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1,1,0]
  +1X[0,1,0,1,0,0,0,0] +1X[0,1,1,1,0,1,0,0] +1X[1,0,0,0,0,1,0,1]
  +1X[1,0,1,0,1,1,0,0] +1X[1,0,1,1,0,0,1,0] +1X[1,0,2,0,0,0,0,1]
  +1X[1,0,3,0,1,0,0,0] +1X[1,1,0,0,1,0,1,0] +1X[1,1,0,1,0,0,0,1]
  +1X[2,0,0,0,1,0,0,1] +1X[2,0,0,1,0,0,0,0] +1X[2,0,1,0,2,0,0,0]
  +1X[2,0,2,0,0,0,1,0] +1X[3,0,0,0,1,0,1,0] +1X[3,0,1,0,0,0,0,0]
```

**Liste 1.2.1 : B2**

**Liste 1.2 : Br**

**sym\_tensor(2,[2,0],B2)**  
1X[0,0] +1X[0,4] +1X[2,0] +1X[4,0]

**sym\_tensor(2,[0,2],B2)**  
1X[0,0] +1X[0,4] +1X[1,0] +1X[2,0]

**sym\_tensor(2,[1,1],B2)**  
2X[0,2] +1X[1,2] +1X[2,2]

**sym\_tensor(3,[1,1],B2)**  
1X[0,1] +2X[0,3] +1X[0,5] +2X[1,1] +2X[1,3] +2X[2,1]  
+1X[2,3] +1X[3,1] +1X[3,3]

**Liste 1.2.2 : B3**

**sym\_tensor(2,[2,0,0],B3)**  
1X[0,0,0] +1X[0,2,0] +1X[2,0,0] +1X[4,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0],B3)**  
1X[0,0,0] +1X[0,0,4] +1X[0,2,0] +2X[2,0,0] +1X[2,1,0]  
+1X[2,2,0] +1X[4,0,0] +1X[6,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,2],B3)**  
1X[0,0,0] +1X[0,0,2] +1X[0,0,4] +1X[0,2,0] +1X[1,1,0]  
+1X[2,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,1,0],B3)**  
1X[0,0,0] +1X[0,0,2] +1X[0,2,0] +1X[2,0,0]

**sym\_tensor(2,[1,0,1],B3)**  
1X[0,0,0] +2X[0,0,2] +1X[0,2,0] +1X[1,0,2] +1X[1,1,0]  
+1X[2,0,0] +1X[2,0,2]

### Liste 1.2.3 : B4

**sym\_tensor(2,[2,0,0,0],B4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,2,0,0] +1X[2,0,0,0] +1X[4,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0,0],B4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,0] +1X[0,2,0,0] +2X[2,0,0,0]  
+1X[2,1,0,0] +1X[2,2,0,0] +1X[4,0,0,0] +1X[6,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0,0],B4)**

2X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,4] +1X[0,0,2,0] +3X[0,2,0,0]  
+1X[0,4,0,0] +1X[1,1,1,0] +3X[2,0,0,0] +1X[2,0,2,0]  
+1X[2,1,0,0] +2X[2,2,0,0] +3X[4,0,0,0] +1X[4,1,0,0]  
+1X[4,2,0,0] +1X[6,0,0,0] +1X[8,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,2],B4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,4] +1X[0,0,2,0]  
+1X[0,1,1,0] +1X[0,2,0,0] +1X[1,0,0,0] +1X[1,0,0,2]  
+1X[2,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[1,0,0,1],B4)**

1X[0,0,0,0] +2X[0,0,0,2] +1X[0,1,1,0] +1X[0,2,0,0]  
+1X[1,0,0,0] +1X[1,0,0,2] +1X[1,0,1,0] +1X[1,1,0,0]  
+1X[2,0,0,0] +1X[2,0,0,2] +1X[3,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[1,0,0,1],B4)**

2X[0,0,0,1] +3X[0,0,0,3] +4X[0,0,1,1] +6X[0,1,0,1]  
+1X[0,1,0,3] +2X[0,1,1,1] +2X[0,2,0,1] +6X[1,0,0,1]  
+3X[1,0,0,3] +5X[1,0,1,1] +7X[1,1,0,1] +1X[1,1,1,1]  
+1X[1,2,0,1] +5X[2,0,0,1] +1X[2,0,0,3] +2X[2,0,1,1]  
+3X[2,1,0,1] +2X[3,0,0,1] +1X[3,0,0,3] +1X[4,0,0,1]

**sym\_tensor(4,[1,0,0,1],B4)**

5X[0,0,0,0] +17X[0,0,0,2] + 9X[0,0,0,4] +11X[0,0,1,0]  
+14X[0,0,1,2] +15X[0,0,2,0] + 1X[0,0,2,2] + 1X[0,0,3,0]  
+5X[0,1,0,0] +24X[0,1,0,2] + 1X[0,1,0,4] +25X[0,1,1,0]  
+7X[0,1,1,2] + 3X[0,1,2,0] +17X[0,2,0,0] +12X[0,2,0,2]  
+7X[0,2,1,0] + 1X[0,2,2,0] + 2X[0,3,0,0] + 1X[0,3,1,0]  
+1X[0,4,0,0] + 6X[1,0,0,0] +31X[1,0,0,2] + 7X[1,0,0,4]  
+22X[1,0,1,0] +17X[1,0,1,2] +11X[1,0,2,0] +15X[1,1,0,0]  
+29X[1,1,0,2] + 1X[1,1,0,4] +22X[1,1,1,0] + 3X[1,1,1,2]  
+2X[1,1,2,0] +12X[1,2,0,0] + 5X[1,2,0,2] + 3X[1,2,1,0]  
+2X[1,3,0,0] +11X[2,0,0,0] +28X[2,0,0,2] + 4X[2,0,0,4]  
+20X[2,0,1,0] + 7X[2,0,1,2] + 7X[2,0,2,0] +12X[2,1,0,0]  
+12X[2,1,0,2] +11X[2,1,1,0] + 1X[2,1,1,2] + 8X[2,2,0,0]  
+1X[2,2,0,2] + 7X[3,0,0,0] +13X[3,0,0,2] + 1X[3,0,0,4]  
+8X[3,0,1,0] + 2X[3,0,1,2] + 1X[3,0,2,0] + 6X[3,1,0,0]  
+3X[3,1,0,2] + 2X[3,1,1,0] + 1X[3,2,0,0] + 5X[4,0,0,0]  
+3X[4,0,0,2] + 1X[4,0,0,4] + 2X[4,0,1,0] + 1X[4,1,0,0]  
+1X[5,0,0,0] + 1X[5,0,0,2] + 1X[6,0,0,0]

#### Liste 1.2.4 : B5

**sym\_tensor(2,[2,0,0,0,0],B5)**

1X[0,0,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0] +1X[2,0,0,0,0]  
+1X[4,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0,0,0],B5)**

1X[0,0,0,0,0] +1X[0,0,2,0,0] +1X[0,2,0,0,0]  
+2X[2,0,0,0,0] +1X[2,1,0,0,0] +1X[2,2,0,0,0]  
+1X[4,0,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0,0,0],B5)**

2X[0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,2,0] +1X[0,0,2,0,0]  
+3X[0,2,0,0,0] +1X[0,4,0,0,0] +1X[1,1,1,0,0]  
+3X[2,0,0,0,0] +1X[2,0,2,0,0] +1X[2,1,0,0,0]  
+2X[2,2,0,0,0] +3X[4,0,0,0,0] +1X[4,1,0,0,0]  
+1X[4,2,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0] +1X[8,0,0,0,0]

**sym\_tensor(5,[2,0,0,0,0],B5)**

2X[ 0,0,0,0,0] +1X[ 0,0,0,0,4] +1X[ 0,0,0,2,0]  
+3X[ 0,0,2,0,0] +4X[ 0,2,0,0,0] +1X[ 0,2,2,0,0]  
+1X[ 0,4,0,0,0] +1X[ 1,0,1,1,0] +2X[ 1,1,1,0,0]  
+1X[ 1,2,1,0,0] +5X[ 2,0,0,0,0] +1X[ 2,0,0,2,0]  
+2X[ 2,0,2,0,0] +3X[ 2,1,0,0,0] +5X[ 2,2,0,0,0]  
+1X[ 2,3,0,0,0] +1X[ 2,4,0,0,0] +1X[ 3,1,1,0,0]  
+4X[ 4,0,0,0,0] +1X[ 4,0,2,0,0] +2X[ 4,1,0,0,0]  
+2X[ 4,2,0,0,0] +3X[ 6,0,0,0,0] +1X[ 6,1,0,0,0]  
+1X[ 6,2,0,0,0] +1X[ 8,0,0,0,0] +1X[10,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,1,0,0,0],B5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,0]+1X[0,2,0,0,0]+1X[2,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,1,0,0,0],B5)**

1X[0,0,0,0,2] +2X[0,1,0,0,0] +1X[0,1,0,1,0]  
+1X[0,3,0,0,0] +1X[1,0,1,0,0] +1X[2,1,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[0,1,0,0,0],B5)**

2X[0,0,0,0,0] +2X[0,0,0,1,0] +1X[0,0,0,2,0]  
+1X[0,0,1,0,0] +1X[0,0,2,0,0] +1X[0,1,0,0,2]  
+3X[0,2,0,0,0] +1X[0,2,0,1,0] +1X[0,4,0,0,0]  
+1X[1,0,0,0,2] +1X[1,0,1,0,0] +1X[1,1,1,0,0]  
+2X[2,0,0,0,0] +1X[2,0,0,1,0] +1X[2,2,0,0,0]  
+1X[4,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,0,1],B5)**

1X[0,0,0,0,2] +1X[0,1,0,0,0] +1X[1,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,0,0,0,1],B5)**

1X[0,0,0,0,1] +1X[0,0,0,0,3]+1X[0,1,0,0,1]+1X[1,0,0,0,1]

**sym\_tensor(4,[0,0,0,0,1],B5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,0,2]+1X[0,0,0,0,4]+1X[0,0,0,1,0]  
+1X[0,0,1,0,0]+1X[0,1,0,0,2]+1X[0,2,0,0,0]+1X[1,0,0,0,2]  
+1X[1,1,0,0,0]+1X[2,0,0,0,0]

**Liste 1.3 : Cr**

**Liste 1.3.1 : C3**

**sym\_tensor(2,[2,0,0],C3)**

1X[0,0,0] +1X[0,1,0] +1X[0,2,0] +1X[4,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0],C3)**

1X[0,0,2] +1X[1,0,1] +2X[2,0,0] +1X[2,1,0] +1X[2,2,0]  
+1X[6,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0],C3)**

2X[0,0,0] +2X[0,1,0] +3X[0,2,0] +1X[0,3,0] +1X[0,4,0]  
+1X[1,1,1] +1X[2,0,2] +1X[2,1,0] +1X[3,0,1] +2X[4,0,0]  
+1X[4,1,0] +1X[4,2,0] +1X[8,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,2,0],C3)**

1X[0,0,0] +1X[0,1,0] +2X[0,2,0] +1X[0,3,0] +1X[0,4,0]  
+1X[1,1,1] +1X[2,0,2] +1X[3,0,1] +1X[4,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,2,0],C3)**

2X[0,0,0] +1X[0,0,2] +1X[0,0,4] +2X[0,1,0] +1X[0,1,2]  
+6X[0,2,0] +1X[0,2,2] +5X[0,3,0] +3X[0,4,0] +1X[0,5,0]  
+1X[0,6,0] +2X[1,0,1] +1X[1,0,3] +5X[1,1,1] +4X[1,2,1]  
+2X[1,3,1] +5X[2,0,2] +3X[2,1,0] +2X[2,1,2] +3X[2,2,0]  
+1X[2,2,2] +1X[2,3,0] +4X[3,0,1] +3X[3,1,1] +1X[3,2,1]  
+3X[4,0,0] +2X[4,1,0] +2X[4,2,0]

**sym\_tensor(2,[1,1,0],C3)**

1X[0,0,2] +2X[1,0,1] +1X[1,1,1] +2X[2,0,0]  
+2X[2,1,0] +1X[2,2,0]

**sym\_tensor(3,[1,1,0],C3)**

3X[0,0,1] +1X[0,0,3] +5X[0,1,1] +3X[0,2,1] +1X[0,3,1]  
+2X[1,0,0] +3X[1,0,2] +6X[1,1,0] +1X[1,1,2] +7X[1,2,0]  
+2X[1,3,0] +6X[2,0,1] +5X[2,1,1] +1X[2,2,1] +4X[3,0,0]  
+1X[3,0,2] +5X[3,1,0] +2X[3,2,0] +1X[3,3,0] +2X[4,0,1]  
+1X[5,0,0]

**sym\_tensor(4,[1,1,0],C3)**

3X[0,0,0]+ 6X[0,0,2]+ 1X[0,0,4]+13X[0,1,0]+10X[0,1,2]  
+24X[0,2,0]+ 4X[0,2,2]+18X[0,3,0]+ 9X[0,4,0]+ 2X[0,5,0]  
+18X[1,0,1]+ 5X[1,0,3]+36X[1,1,1]+ 2X[1,1,3]+23X[1,2,1]  
+ 6X[1,3,1]+ 1X[1,4,1]+ 7X[2,0,0]+19X[2,0,2]+27X[2,1,0]  
+10X[2,1,2]+25X[2,2,0]+ 2X[2,2,2]+11X[2,3,0]+ 2X[2,4,0]  
+24X[3,0,1]+20X[3,1,1]+ 7X[3,2,1]+ 1X[3,3,1]+15X[4,0,0]  
+ 3X[4,0,2]+17X[4,1,0]+ 1X[4,1,2]+ 9X[4,2,0]+ 2X[4,3,0]  
+ 1X[4,4,0]+ 4X[5,0,1]+ 2X[5,1,1]+ 1X[6,0,0]+ 1X[6,1,0]



**Liste 1.3.2 : C4**

```

sym_tensor(2,[2,0,0,0],C4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,1,0,0] +1X[0,2,0,0] +1X[4,0,0,0]

sym_tensor(3,[2,0,0,0],C4)
  1X[0,0,2,0] +1X[1,0,1,0] +2X[2,0,0,0] +1X[2,1,0,0]
  +1X[2,2,0,0] +1X[6,0,0,0]

sym_tensor(4,[2,0,0,0],C4)
  2X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,1] +1X[0,0,0,2] +2X[0,1,0,0]
  +1X[0,1,0,1] +3X[0,2,0,0] +1X[0,3,0,0] +1X[0,4,0,0]
  +1X[1,1,1,0] +1X[2,0,2,0] +1X[2,1,0,0] +1X[3,0,1,0]
  +2X[4,0,0,0] +1X[4,1,0,0] +1X[4,2,0,0] +1X[8,0,0,0]

sym_tensor(2,[0,1,0,0],C4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,1] +1X[0,1,0,0] +1X[0,2,0,0]

sym_tensor(3,[0,1,0,0],C4)
  1X[0,0,0,0] +2X[0,1,0,0] +1X[0,1,0,1] +1X[0,2,0,0]
  +1X[0,3,0,0] +1X[1,0,1,0]

sym_tensor(4,[0,1,0,0],C4)
  2X[0,0,0,0] +2X[0,0,0,1] +1X[0,0,0,2] +2X[0,1,0,0]
  +1X[0,1,0,1] +3X[0,2,0,0] +1X[0,2,0,1] +1X[0,3,0,0]
  +1X[0,4,0,0] +1X[1,0,1,0] +1X[1,1,1,0]

sym_tensor(5,[0,1,0,0],C4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,1] +4X[0,1,0,0] +3X[0,1,0,1]
  +1X[0,1,0,2] +3X[0,2,0,0] +1X[0,2,0,1] +3X[0,3,0,0]
  +1X[0,3,0,1] +1X[0,4,0,0] +1X[0,5,0,0] +2X[1,0,1,0]
  +1X[1,0,1,1] +2X[1,1,1,0] +1X[1,2,1,0]

sym_tensor(6,[0,1,0,0],C4)
  3X[0,0,0,0] +3X[0,0,0,1] +2X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,3]
  +1X[0,0,2,0] +4X[0,1,0,0] +3X[0,1,0,1] +1X[0,1,0,2]
  +6X[0,2,0,0] +4X[0,2,0,1] +1X[0,2,0,2] +4X[0,3,0,0]
  +1X[0,3,0,1] +3X[0,4,0,0] +1X[0,4,0,1] +1X[0,5,0,0]
  +1X[0,6,0,0] +2X[1,0,1,0] +1X[1,0,1,1] +3X[1,1,1,0]
  +1X[1,1,1,1] +2X[1,2,1,0] +1X[1,3,1,0] +1X[2,0,0,1]
  +1X[2,0,2,0]

sym_tensor(7,[0,1,0,0],C4)
  2X[0,0,0,0] +2X[0,0,0,1] +1X[0,0,0,2] +6X[0,1,0,0]
  +6X[0,1,0,1] +3X[0,1,0,2] +1X[0,1,0,3] +1X[0,1,2,0]
  +6X[0,2,0,0] +4X[0,2,0,1] +1X[0,2,0,2] +7X[0,3,0,0]
  +4X[0,3,0,1] +1X[0,3,0,2] +4X[0,4,0,0] +1X[0,4,0,1]
  +3X[0,5,0,0] +1X[0,5,0,1] +1X[0,6,0,0] +1X[0,7,0,0]
  +4X[1,0,1,0] +3X[1,0,1,1] +1X[1,0,1,2] +5X[1,1,1,0]
  +2X[1,1,1,1] +4X[1,2,1,0] +1X[1,2,1,1] +2X[1,3,1,0]
  +1X[1,4,1,0] +1X[2,0,2,0] +1X[2,1,0,1] +1X[2,1,2,0]

```

**sym\_tensor(2,[0,0,1,0],C4)**  
 1X[0,0,2,0] +1X[1,0,1,0] +1X[2,0,0,0]

sym\_tensor(3,[0,0,1,0],C4)  
 1X[0,0,1,0] +1X[0,0,3,0] +1X[0,1,1,0] +1X[1,0,0,1]  
 +1X[1,0,2,0] +1X[1,1,0,0] +1X[1,1,0,1] +1X[2,0,1,0]  
 +1X[3,0,0,0]

sym\_tensor(4,[0,0,1,0],C4)  
 1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,0,4,0]  
 +2X[0,1,0,0] +2X[0,1,0,1] +1X[0,1,2,0] +3X[0,2,0,0]  
 +1X[0,2,0,1] +1X[0,3,0,0] +2X[1,0,1,0] +2X[1,0,1,1]  
 +1X[1,0,3,0] +2X[1,1,1,0] +1X[1,1,1,1] +2X[2,0,0,1]  
 +2X[2,0,2,0] +1X[2,1,0,0] +2X[3,0,1,0] +1X[4,0,0,0]

**Liste 1.3.3 : C5**

**sym\_tensor (2,[0,1,0,0,0],C5)**  
 1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,0]+1X[0,1,0,0,0]+1X[0,2,0,0,0]

sym\_tensor (3,[0,1,0,0,0],C5)  
 1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,0]+2X[0,1,0,0,0]+1X[0,1,0,1,0]  
 +1X[0,2,0,0,0]+1X[0,3,0,0,0]+1X[1,0,1,0,0]

sym\_tensor (4,[0,1,0,0,0],C5)  
 2X[0,0,0,0,0]+2X[0,0,0,1,0]+1X[0,0,0,2,0]+3X[0,1,0,0,0]  
 +2X[0,1,0,1,0]+3X[0,2,0,0,0]+1X[0,2,0,1,0]+1X[0,3,0,0,0]  
 +1X[0,4,0,0,0]+1X[1,0,0,0,1]+1X[1,0,1,0,0]+1X[1,1,1,0,0]

sym\_tensor (5,[0,1,0,0,0],C5)  
 2X[0,0,0,0,0]+3X[0,0,0,1,0]+1X[0,0,0,2,0]+1X[0,0,1,0,1]  
 +4X[0,1,0,0,0]+4X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,0,2,0]+4X[0,2,0,0,0]  
 +2X[0,2,0,1,0]+3X[0,3,0,0,0]+1X[0,3,0,1,0]+1X[0,4,0,0,0]  
 +1X[0,5,0,0,0]+1X[1,0,0,0,1]+3X[1,0,1,0,0]+1X[1,0,1,1,0]  
 +1X[1,1,0,0,1]+2X[1,1,1,0,0]+1X[1,2,1,0,0]

sym\_tensor (6,[0,1,0,0,0],C5)  
 3X[0,0,0,0,0]+5X[0,0,0,1,0]+3X[0,0,0,2,0]+1X[0,0,0,3,0]  
 +1X[0,0,1,0,1]+1X[0,0,2,0,0]+6X[0,1,0,0,0]+7X[0,1,0,1,0]  
 +2X[0,1,0,2,0]+1X[0,1,1,0,1]+7X[0,2,0,0,0]+5X[0,2,0,1,0]  
 +1X[0,2,0,2,0]+5X[0,3,0,0,0]+2X[0,3,0,1,0]+3X[0,4,0,0,0]  
 +1X[0,4,0,1,0]+1X[0,5,0,0,0]+1X[0,6,0,0,0]+2X[1,0,0,0,1]  
 +1X[1,0,0,1,1]+3X[1,0,1,0,0]+2X[1,0,1,1,0]+2X[1,1,0,0,1]  
 +4X[1,1,1,0,0]+1X[1,1,1,1,0]+1X[1,2,0,0,1]+2X[1,2,1,0,0]  
 +1X[1,3,1,0,0]+1X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,2,0,0]

Liste 1.3.4 : C6

**sym\_tensor (2,[0,1,0,0,0,0],C6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,1,0,0,0,0]  
+1X[0,2,0,0,0,0]

**sym\_tensor (3,[0,1,0,0,0,0],C6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,1] +1X[0,0,0,1,0,0]  
+2X[0,1,0,0,0,0] +1X[0,1,0,1,0,0] +1X[0,2,0,0,0,0]  
+1X[0,3,0,0,0,0] +1X[1,0,1,0,0,0]

**sym\_tensor (4,[0,1,0,0,0,0],C6)**

2X[0,0,0,0,0,0] +3X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,0,0,2,0,0]  
+3X[0,1,0,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1] +2X[0,1,0,1,0,0]  
+3X[0,2,0,0,0,0] +1X[0,2,0,1,0,0] +1X[0,3,0,0,0,0]  
+1X[0,4,0,0,0,0] +1X[1,0,0,0,1,0] +1X[1,0,1,0,0,0]  
+1X[1,1,1,0,0,0]

**sym\_tensor (5,[0,1,0,0,0,0],C6)**

2X[0,0,0,0,0,0] +2X[0,0,0,0,0,1] +3X[0,0,0,1,0,0]  
+1X[0,0,0,1,0,1] +1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,0,1,0]  
+5X[0,1,0,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1] +5X[0,1,0,1,0,0]  
+1X[0,1,0,2,0,0] +4X[0,2,0,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0,1]  
+2X[0,2,0,1,0,0] +3X[0,3,0,0,0,0] +1X[0,3,0,1,0,0]  
+1X[0,4,0,0,0,0] +1X[0,5,0,0,0,0] +2X[1,0,0,0,1,0]  
+3X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,0,1,1,0,0] +1X[1,1,0,0,1,0]  
+2X[1,1,1,0,0,0] +1X[1,2,1,0,0,0]

**sym\_tensor (6,[0,1,0,0,0,0],C6)**

4X[0,0,0,0,0,0] +2X[0,0,0,0,0,1] +1X[0,0,0,0,0,2]  
+7X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,0,0,1,0,1] +4X[0,0,0,2,0,0]  
+1X[0,0,0,3,0,0] +2X[0,0,1,0,1,0] +1X[0,0,2,0,0,0]  
+6X[0,1,0,0,0,0] +4X[0,1,0,0,0,1] +8X[0,1,0,1,0,0]  
+1X[0,1,0,1,0,1] +2X[0,1,0,2,0,0] +1X[0,1,1,0,1,0]  
+8X[0,2,0,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0,1] +6X[0,2,0,1,0,0]  
+1X[0,2,0,2,0,0] +5X[0,3,0,0,0,0] +1X[0,3,0,0,0,1]  
+2X[0,3,0,1,0,0] +3X[0,4,0,0,0,0] +1X[0,4,0,1,0,0]  
+1X[0,5,0,0,0,0] +1X[0,6,0,0,0,0] +3X[1,0,0,0,1,0]  
+1X[1,0,0,1,1,0] +4X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,0,1,0,0,1]  
+2X[1,0,1,1,0,0] +3X[1,1,0,0,1,0] +4X[1,1,1,0,0,0]  
+1X[1,1,1,1,0,0] +1X[1,2,0,0,1,0] +2X[1,2,1,0,0,0]  
+1X[1,3,1,0,0,0] +1X[2,0,0,1,0,0] +1X[2,0,2,0,0,0]

Liste 1.4 : Dr

Liste 1.4.1 : D4

**sym\_tensor(2,[0,1,0,0],D4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,2,0,0]  
+1X[2,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[2,0,0,0],D4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,2,0,0] +1X[2,0,0,0] +1X[4,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0,0],D4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,2] +1X[0,2,0,0] +2X[2,0,0,0]  
+1X[2,1,0,0] +1X[2,2,0,0] +1X[4,0,0,0] +1X[6,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0,0],D4)**

2X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,4] +1X[0,0,2,2] +1X[0,0,4,0]  
+3X[0,2,0,0] +1X[0,4,0,0] +1X[1,1,1,1] +3X[2,0,0,0]  
+1X[2,0,2,2] +1X[2,1,0,0] +2X[2,2,0,0] +3X[4,0,0,0]  
+1X[4,1,0,0] +1X[4,2,0,0] +1X[6,0,0,0] +1X[8,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,2,0],D4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,2,0] +1X[0,0,4,0] +1X[0,2,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,0,2,0],D4)**

1X[0,0,0,0] +2X[0,0,2,0] +1X[0,0,4,0] +1X[0,0,6,0]  
+1X[0,1,2,0] +1X[0,2,0,0] +1X[0,2,2,0] +1X[2,0,0,2]

**sym\_tensor(4,[0,0,2,0],D4)**

2X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,4] +3X[0,0,2,0] +3X[0,0,4,0]  
+1X[0,0,6,0] +1X[0,0,8,0] +1X[0,1,2,0] +1X[0,1,4,0]  
+3X[0,2,0,0] +2X[0,2,2,0] +1X[0,2,4,0] +1X[0,4,0,0]  
+1X[1,1,1,1] +1X[2,0,0,2] +1X[2,0,2,2] +1X[4,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,2],D4)**

1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,4] +1X[0,2,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,0,0,2],D4)**

1X[0,0,0,0] +2X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,4] +1X[0,0,0,6]  
+1X[0,1,0,2] +1X[0,2,0,0] +1X[0,2,0,2] +1X[2,0,2,0]

**sym\_tensor(4,[0,0,0,2],D4)**

2X[0,0,0,0] +3X[0,0,0,2] +3X[0,0,0,4] +1X[0,0,0,6]  
+1X[0,0,0,8] +1X[0,0,4,0] +1X[0,1,0,2] +1X[0,1,0,4]  
+3X[0,2,0,0] +2X[0,2,0,2] +1X[0,2,0,4] +1X[0,4,0,0]  
+1X[1,1,1,1] +1X[2,0,2,0] +1X[2,0,2,2] +1X[4,0,0,0]

```

sym_tensor(2,[1,0,1,0],D4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,2,0,0]
  +1X[1,0,1,1] +1X[2,0,0,0] +1X[2,0,2,0]
sym_tensor(2,[1,0,0,1],D4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,2,0,0]
  +1X[1,0,1,1] +1X[2,0,0,0] +1X[2,0,0,2]

sym_tensor(2,[0,0,1,1],D4)
  1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[0,0,2,0] +1X[0,0,2,2]
  +1X[0,2,0,0] +1X[1,0,1,1] +1X[2,0,0,0]

```

**Liste 1.4.2 : D5**

```

sym_tensor(2,[0,1,0,0,0],D5)
  1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,1]+1X[0,2,0,0,0]+1X[2,0,0,0,0]

sym_tensor(3,[0,1,0,0,0],D5)
  1X[0,0,0,1,1]+2X[0,1,0,0,0]+1X[0,1,0,1,1]
  +1X[0,3,0,0,0]+1X[1,0,1,0,0]+1X[2,1,0,0,0]

sym_tensor(4,[0,1,0,0,0],D5)
  2X[0,0,0,0,0]+2X[0,0,0,1,1]+1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,2,0,0]
  +1X[0,1,0,0,0]+1X[0,1,0,1,1]+3X[0,2,0,0,0]+1X[0,2,0,1,1]
  +1X[0,4,0,0,0]+1X[1,0,0,0,2]+1X[1,0,0,2,0]+1X[1,0,1,0,0]
  +1X[1,1,1,0,0]+2X[2,0,0,0,0]+1X[2,0,0,1,1]+1X[2,2,0,0,0]
  +1X[4,0,0,0,0]

sym_tensor(5,[0,1,0,0,0],D5)
  1X[0,0,0,0,0]+2X[0,0,0,1,1]+1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,1,0,2]
  +1X[0,0,1,2,0]+4X[0,1,0,0,0]+4X[0,1,0,1,1]+1X[0,1,0,2,2]
  +1X[0,1,2,0,0]+1X[0,2,0,0,0]+1X[0,2,0,1,1]+3X[0,3,0,0,0]
  +1X[0,3,0,1,1]+1X[0,5,0,0,0]+1X[1,0,0,0,2]+1X[1,0,0,2,0]
  +4X[1,0,1,0,0]+1X[1,0,1,1,1]+1X[1,1,0,0,2]+1X[1,1,0,2,0]
  +2X[1,1,1,0,0]+1X[1,2,1,0,0]+1X[2,0,0,1,1]+3X[2,1,0,0,0]
  +1X[2,1,0,1,1]+1X[2,3,0,0,0]+1X[3,0,1,0,0]+1X[4,1,0,0,0]

sym_tensor(6,[0,1,0,0,0],D5)
  3X[0,0,0,0,0]+5X[0,0,0,1,1]+3X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,0,3,3]
  +1X[0,0,1,0,2]+1X[0,0,1,2,0]+4X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,2,1,1]
  +2X[0,1,0,0,0]+5X[0,1,0,1,1]+1X[0,1,0,2,2]+1X[0,1,1,0,2]
  +1X[0,1,1,2,0]+7X[0,2,0,0,0]+5X[0,2,0,1,1]+1X[0,2,0,2,2]
  +1X[0,2,2,0,0]+1X[0,3,0,0,0]+1X[0,3,0,1,1]+3X[0,4,0,0,0]
  +1X[0,4,0,1,1]+1X[0,6,0,0,0]+3X[1,0,0,0,2]+1X[1,0,0,1,3]
  +3X[1,0,0,2,0]+1X[1,0,0,3,1]+3X[1,0,1,0,0]+3X[1,0,1,1,1]
  +2X[1,1,0,0,2]+2X[1,1,0,2,0]+5X[1,1,1,0,0]+1X[1,1,1,1,1]
  +1X[1,2,0,0,2]+1X[1,2,0,2,0]+2X[1,2,1,0,0]+1X[1,3,1,0,0]
  +4X[2,0,0,0,0]+4X[2,0,0,1,1]+1X[2,0,0,2,2]+2X[2,0,2,0,0]
  +2X[2,1,0,0,0]+1X[2,1,0,1,1]+4X[2,2,0,0,0]+1X[2,2,0,1,1]
  +1X[2,4,0,0,0]+1X[3,0,0,0,2]+1X[3,0,0,2,0]+1X[3,0,1,0,0]
  +1X[3,1,1,0,0]+2X[4,0,0,0,0]+1X[4,0,0,1,1]+1X[4,2,0,0,0]
  +1X[6,0,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[2,0,0,0,0],D5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,2,0,0,0]+1X[2,0,0,0,0]+1X[4,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0,0,0],D5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,2,0,0]+1X[0,2,0,0,0]+2X[2,0,0,0,0]  
+1X[2,1,0,0,0]+1X[2,2,0,0,0]+1X[4,0,0,0,0]+1X[6,0,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0,0,0],D5)**

2X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,2,0,0]+3X[0,2,0,0,0]  
+1X[0,4,0,0,0]+1X[1,1,1,0,0]+3X[2,0,0,0,0]+1X[2,0,2,0,0]  
+1X[2,1,0,0,0]+2X[2,2,0,0,0]+3X[4,0,0,0,0]+1X[4,1,0,0,0]  
+1X[4,2,0,0,0]+1X[6,0,0,0,0]+1X[8,0,0,0,0]

**sym\_tensor(5,[2,0,0,0,0],D5)**

2X[ 0,0,0,0,0] +1X[ 0,0,0,0,4] +1X[ 0,0,0,2,2]  
+1X[ 0,0,0,4,0] +3X[ 0,0,2,0,0] +4X[ 0,2,0,0,0]  
+1X[ 0,2,2,0,0] +1X[ 0,4,0,0,0] +1X[ 1,0,1,1,1]  
+2X[ 1,1,1,0,0] +1X[ 1,2,1,0,0] +5X[ 2,0,0,0,0]  
+1X[ 2,0,0,2,2] +2X[ 2,0,2,0,0] +3X[ 2,1,0,0,0]  
+5X[ 2,2,0,0,0] +1X[ 2,3,0,0,0] +1X[ 2,4,0,0,0]  
+1X[ 3,1,1,0,0] +4X[ 4,0,0,0,0] +1X[ 4,0,2,0,0]  
+2X[ 4,1,0,0,0] +2X[ 4,2,0,0,0] +3X[ 6,0,0,0,0]  
+1X[ 6,1,0,0,0] +1X[ 6,2,0,0,0] +1X[ 8,0,0,0,0]  
+1X[10,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,2,0],D5)**

1X[0,0,0,4,0]+1X[0,0,2,0,0]+1X[1,0,0,2,0] +1X[2,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,0,0,2,0],D5)**

1X[0,0,0,0,2]+1X[0,0,0,6,0]+1X[0,0,1,1,1]+1X[0,0,2,2,0]  
+1X[0,1,1,0,0]+1X[0,2,0,0,2]+1X[1,0,0,1,1]+1X[1,0,0,4,0]  
+1X[1,0,1,2,0]+1X[1,0,2,0,0]+2X[2,0,0,2,0]+1X[3,0,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[0,0,0,2,0],D5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,1]+3X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,0,8,0]  
+1X[0,0,1,3,1]+2X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,2,1,1]+1X[0,0,2,4,0]  
+1X[0,0,4,0,0]+3X[0,1,0,1,1]+1X[0,1,0,2,2]+1X[0,1,1,0,2]  
+2X[0,1,1,2,0]+3X[0,2,0,0,0]+2X[0,2,0,1,1]+1X[0,2,0,2,2]  
+1X[0,4,0,0,0]+2X[1,0,0,0,2]+1X[1,0,0,2,0]+2X[1,0,0,3,1]  
+1X[1,0,0,6,0]+3X[1,0,1,1,1]+1X[1,0,1,4,0]+2X[1,0,2,2,0]  
+1X[1,1,0,0,2]+2X[1,1,0,2,0]+2X[1,1,1,0,0]+1X[1,1,1,1,1]  
+1X[1,2,0,0,2]+1X[2,0,0,0,0]+1X[2,0,0,0,4]+2X[2,0,0,1,1]  
+3X[2,0,0,4,0]+1X[2,0,1,2,0]+3X[2,0,2,0,0]+3X[3,0,0,2,0]  
+2X[4,0,0,0,0]

```

sym_tensor(5,[0,0,0,2,0],D5)
  2X[0,0,0, 0,2] + 1X[0,0,0, 0,6] + 2X[0,0,0, 1,3]
+4X[0,0,0, 2,0] + 4X[0,0,0, 3,1] + 4X[0,0,0, 4,2]
+1X[0,0,0,10,0] + 7X[0,0,1, 1,1] + 3X[0,0,1, 2,2]
+1X[0,0,1, 5,1] + 5X[0,0,2, 0,2] + 3X[0,0,2, 2,0]
+1X[0,0,2, 3,1] + 1X[0,0,2, 6,0] + 1X[0,0,3, 1,1]
+1X[0,0,4, 2,0] + 2X[0,1,0, 0,2] + 1X[0,1,0, 1,3]
+5X[0,1,0, 2,0] + 7X[0,1,0, 3,1] + 1X[0,1,0, 4,2]
+7X[0,1,1, 0,0] +10X[0,1,1, 1,1] + 2X[0,1,1, 2,2]
+2X[0,1,1, 4,0] + 1X[0,1,2, 0,2] + 1X[0,1,2, 2,0]
+2X[0,1,3, 0,0] + 3X[0,2,0, 0,2] + 1X[0,2,0, 1,3]
+10X[0,2,0, 2,0] + 3X[0,2,0, 3,1] + 1X[0,2,0, 4,2]
+2X[0,2,1, 0,0] + 3X[0,2,1, 1,1] + 1X[0,2,2, 0,2]
+1X[0,3,0, 2,0] + 2X[0,3,1, 0,0] + 1X[0,4,0, 2,0]
+1X[1,0,0, 0,0] + 1X[1,0,0, 0,4] + 5X[1,0,0, 1,1]
+9X[1,0,0, 2,2] + 1X[1,0,0, 4,0] + 2X[1,0,0, 5,1]
+1X[1,0,0, 8,0] + 5X[1,0,1, 0,2] + 1X[1,0,1, 1,3]
+5X[1,0,1, 2,0] + 5X[1,0,1, 3,1] + 1X[1,0,1, 6,0]
+7X[1,0,2, 0,0] + 5X[1,0,2, 1,1] + 2X[1,0,2, 4,0]
+1X[1,0,3, 2,0] + 1X[1,0,4, 0,0] + 2X[1,1,0, 0,0]
+1X[1,1,0, 0,4] +12X[1,1,0, 1,1] + 4X[1,1,0, 2,2]
+3X[1,1,0, 4,0] + 4X[1,1,1, 0,2] + 7X[1,1,1, 2,0]
+1X[1,1,1, 3,1] + 4X[1,1,2, 0,0] + 1X[1,1,2, 1,1]
+5X[1,2,0, 0,0] + 5X[1,2,0, 1,1] + 2X[1,2,0, 2,2]
+1X[1,3,0, 0,0] + 1X[1,3,0, 1,1] + 7X[2,0,0, 0,2]
+5X[2,0,0, 3,1] + 3X[2,0,0, 6,0] + 1X[2,0,1, 0,0]
+8X[2,0,1, 1,1] + 2X[2,0,1, 4,0] + 5X[2,0,2, 2,0]
+3X[2,1,0, 0,2] + 1X[2,1,0, 1,3] + 4X[2,1,0, 2,0]
+5X[2,1,1, 0,0] + 2X[2,1,1, 1,1] + 3X[2,2,0, 0,2]
+1X[3,0,0, 0,0] + 4X[3,0,0, 1,1] + 4X[3,0,0, 4,0]
+3X[3,0,1, 2,0] + 4X[3,0,2, 0,0] + 1X[3,1,0, 0,0]
+5X[4,0,0, 2,0] + 2X[5,0,0, 0,0]

```

**sym\_tensor(2,[1,0,0,1,0],D5)**

```

  1X[0,0,0,0,2]+1X[0,0,0,2,0]+1X[0,1,1,0,0]+1X[1,0,0,0,0]
+1X[1,0,0,1,1]+1X[1,1,0,0,0]+1X[2,0,0,2,0]+1X[3,0,0,0,0]

```

sym\_tensor(3,[1,0,0,1,0],D5)

```

  1X[0,0,0,0,3]+1X[0,0,0,1,0]+2X[0,0,0,2,1]+2X[0,0,1,0,1]
+4X[0,1,0,1,0]+1X[0,1,0,2,1]+1X[0,1,1,0,1]+2X[0,2,0,1,0]
+3X[1,0,0,0,1]+2X[1,0,0,1,2]+1X[1,0,0,3,0]+3X[1,0,1,1,0]
+4X[1,1,0,0,1]+1X[1,1,1,1,0]+3X[2,0,0,1,0]+1X[2,0,0,2,1]
+1X[2,0,1,0,1]+2X[2,1,0,1,0]+1X[3,0,0,0,1]+1X[3,0,0,3,0]
+1X[4,0,0,1,0]

```

sym\_tensor(4,[1,0,0,1,0],D5)

```

  2X[0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,0,4] + 9X[0,0,0,1,1]
+5X[0,0,0,2,2] + 2X[0,0,0,4,0] + 4X[0,0,1,0,2]
+5X[0,0,1,2,0] +10X[0,0,2,0,0] + 1X[0,0,2,1,1]
+3X[0,1,0,0,0] +17X[0,1,0,1,1] + 1X[0,1,0,2,2]
+2X[0,1,1,0,2] + 4X[0,1,1,2,0] + 2X[0,1,2,0,0]
+9X[0,2,0,0,0] + 7X[0,2,0,1,1] + 1X[0,2,2,0,0]
+1X[0,3,0,0,0] +10X[1,0,0,0,2] + 3X[1,0,0,1,3]

```

+11X[1,0,0,2,0] + 4X[1,0,0,3,1] +12X[1,0,1,0,0]  
 +11X[1,0,1,1,1] + 9X[1,1,0,0,2] +12X[1,1,0,2,0]  
 +1X[1,1,0,3,1] +14X[1,1,1,0,0] + 2X[1,1,1,1,1]  
 +1X[1,2,0,0,2] + 3X[1,2,0,2,0] + 2X[1,2,1,0,0]  
 +7X[2,0,0,0,0] +16X[2,0,0,1,1] + 3X[2,0,0,2,2]  
 +1X[2,0,0,4,0] + 1X[2,0,1,0,2] + 3X[2,0,1,2,0]  
 +4X[2,0,2,0,0] + 8X[2,1,0,0,0] + 8X[2,1,0,1,1]  
 +1X[2,1,1,2,0] + 5X[2,2,0,0,0] + 4X[3,0,0,0,2]  
 +5X[3,0,0,2,0] + 1X[3,0,0,3,1] + 4X[3,0,1,0,0]  
 +1X[3,0,1,1,1] + 2X[3,1,0,2,0] + 1X[3,1,1,0,0]  
 +3X[4,0,0,0,0] + 2X[4,0,0,1,1] + 1X[4,0,0,4,0]  
 +1X[4,1,0,0,0] + 1X[5,0,0,2,0] + 1X[6,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[1,0,0,0,1],D5)**

1X[0,0,0,0,2]+1X[0,0,0,2,0]+1X[0,1,1,0,0]+1X[1,0,0,0,0]  
 +1X[1,0,0,1,1]+1X[1,1,0,0,0]+1X[2,0,0,0,2]+1X[3,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[1,0,0,0,1],D5)**

1X[0,0,0,0,1]+2X[0,0,0,1,2]+1X[0,0,0,3,0]+2X[0,0,1,1,0]  
 +4X[0,1,0,0,1]+1X[0,1,0,1,2]+1X[0,1,1,1,0]+2X[0,2,0,0,1]  
 +1X[1,0,0,0,3]+3X[1,0,0,1,0]+2X[1,0,0,2,1]+3X[1,0,1,0,1]  
 +4X[1,1,0,1,0]+1X[1,1,1,0,1]+3X[2,0,0,0,1]+1X[2,0,0,1,2]  
 +1X[2,0,1,1,0]+2X[2,1,0,0,1]+1X[3,0,0,0,3]+1X[3,0,0,1,0]  
 +1X[4,0,0,0,1]

**sym\_tensor(4,[1,0,0,0,1],D5)**

2X[0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,0,4] + 9X[0,0,0,1,1]  
 +5X[0,0,0,2,2] + 2X[0,0,0,4,0] + 5X[0,0,1,0,2]  
 +4X[0,0,1,2,0] +10X[0,0,2,0,0] + 1X[0,0,2,1,1]  
 +3X[0,1,0,0,0] +17X[0,1,0,1,1] + 1X[0,1,0,2,2]  
 +4X[0,1,1,0,2] + 2X[0,1,1,2,0] + 2X[0,1,2,0,0]  
 +9X[0,2,0,0,0] + 7X[0,2,0,1,1] + 1X[0,2,2,0,0]  
 +1X[0,3,0,0,0] +11X[1,0,0,0,2] + 4X[1,0,0,1,3]  
 +10X[1,0,0,2,0] + 3X[1,0,0,3,1] +12X[1,0,1,0,0]  
 +11X[1,0,1,1,1] +12X[1,1,0,0,2] + 1X[1,1,0,1,3]  
 +9X[1,1,0,2,0] +14X[1,1,1,0,0] + 2X[1,1,1,1,1]  
 +3X[1,2,0,0,2] + 1X[1,2,0,2,0] + 2X[1,2,1,0,0]  
 +7X[2,0,0,0,0] + 1X[2,0,0,0,4] +16X[2,0,0,1,1]  
 +3X[2,0,0,2,2] + 3X[2,0,1,0,2] + 1X[2,0,1,2,0]  
 +4X[2,0,2,0,0] + 8X[2,1,0,0,0] + 8X[2,1,0,1,1]  
 +1X[2,1,1,0,2] + 5X[2,2,0,0,0] + 5X[3,0,0,0,2]  
 +1X[3,0,0,1,3] + 4X[3,0,0,2,0] + 4X[3,0,1,0,0]  
 +1X[3,0,1,1,1] + 2X[3,1,0,0,2] + 1X[3,1,1,0,0]  
 +3X[4,0,0,0,0] + 1X[4,0,0,0,4] + 2X[4,0,0,1,1]  
 +1X[4,1,0,0,0] + 1X[5,0,0,0,2] + 1X[6,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,1,1],D5)**

1X[0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,1]+1X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,2,0,0]  
 +1X[0,1,0,0,0]+1X[0,1,0,1,1]+1X[0,2,0,0,0]+1X[1,0,0,0,2]  
 +1X[1,0,0,2,0]+1X[2,0,0,0,0]



```

sym_tensor(3,[0,0,0,1,1],D5)
  1X[0,0,0,0,0]+5X[0,0,0,1,1]+3X[0,0,0,2,2]+1X[0,0,0,3,3]
+2X[0,0,1,0,2]+2X[0,0,1,2,0]+3X[0,0,2,0,0]+1X[0,0,2,1,1]
+2X[0,1,0,0,0]+6X[0,1,0,1,1]+1X[0,1,0,2,2]+1X[0,1,1,0,2]
+1X[0,1,1,2,0]+2X[0,2,0,0,0]+2X[0,2,0,1,1]+1X[0,3,0,0,0]
+3X[1,0,0,0,2]+1X[1,0,0,1,3]+3X[1,0,0,2,0]+1X[1,0,0,3,1]
+4X[1,0,1,0,0]+3X[1,0,1,1,1]+2X[1,1,0,0,2]+2X[1,1,0,2,0]
+2X[1,1,1,0,0]+1X[2,0,0,0,0]+3X[2,0,0,1,1]+1X[2,1,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,0,0,1,1],D5)
  4X[0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,0,4]+15X[0,0,0,1,1]
+17X[0,0,0,2,2] + 3X[0,0,0,3,3] + 2X[0,0,0,4,0]
+1X[0,0,0,4,4] +13X[0,0,1,0,2] + 4X[0,0,1,1,3]
+13X[0,0,1,2,0] + 4X[0,0,1,3,1] +18X[0,0,2,0,0]
+8X[0,0,2,1,1] + 1X[0,0,2,2,2] + 1X[0,0,4,0,0]
+6X[0,1,0,0,0] + 1X[0,1,0,0,4] +32X[0,1,0,1,1]
+13X[0,1,0,2,2] + 1X[0,1,0,3,3] + 1X[0,1,0,4,0]
+12X[0,1,1,0,2] + 1X[0,1,1,1,3] +12X[0,1,1,2,0]
+1X[0,1,1,3,1] + 8X[0,1,2,0,0] + 1X[0,1,2,1,1]
+13X[0,2,0,0,0] +18X[0,2,0,1,1] + 3X[0,2,0,2,2]
+1X[0,2,1,0,2] + 1X[0,2,1,2,0] + 2X[0,2,2,0,0]
+4X[0,3,0,0,0] + 2X[0,3,0,1,1] + 2X[0,4,0,0,0]
+16X[1,0,0,0,2] +11X[1,0,0,1,3] +16X[1,0,0,2,0]
+1X[1,0,0,2,4] +11X[1,0,0,3,1] + 1X[1,0,0,4,2]
+16X[1,0,1,0,0] +29X[1,0,1,1,1] + 3X[1,0,1,2,2]
+3X[1,0,2,0,2] + 3X[1,0,2,2,0] + 1X[1,0,3,0,0]
+18X[1,1,0,0,2] + 4X[1,1,0,1,3] +18X[1,1,0,2,0]
+4X[1,1,0,3,1] +21X[1,1,1,0,0] + 8X[1,1,1,1,1]
+5X[1,2,0,0,2] + 5X[1,2,0,2,0] + 3X[1,2,1,0,0]
+7X[2,0,0,0,0] + 2X[2,0,0,0,4] +20X[2,0,0,1,1]
+7X[2,0,0,2,2] + 2X[2,0,0,4,0] + 4X[2,0,1,0,2]
+4X[2,0,1,2,0] + 8X[2,0,2,0,0] + 7X[2,1,0,0,0]
+10X[2,1,0,1,1] + 4X[2,2,0,0,0] + 4X[3,0,0,0,2]
+4X[3,0,0,2,0] + 2X[3,0,1,0,0] + 3X[4,0,0,0,0]

```

**Liste 1.4.3 : D6**

```

sym_tensor(2,[0,1,0,0,0,0],D6)
  1X[0,0,0,0,0,0]+1X[0,0,0,1,0,0]+1X[0,2,0,0,0,0]
+1X[2,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[0,1,0,0,0,0],D6)
  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,0,2,0] +2X[0,1,0,0,0,0]
+1X[0,1,0,1,0,0] +1X[0,3,0,0,0,0] +1X[1,0,1,0,0,0]
+1X[2,1,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,1,0,0,0,0],D6)
  2X[0,0,0,0,0,0] +3X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,0,0,2,0,0]
+1X[0,0,2,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,2] +1X[0,1,0,0,2,0]
+3X[0,2,0,0,0,0] +1X[0,2,0,1,0,0] +1X[0,4,0,0,0,0]
+1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,1,1,0,0,0]
+2X[2,0,0,0,0,0] +1X[2,0,0,1,0,0] +1X[2,2,0,0,0,0]
+1X[4,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[2,0,0,0,0,0],D6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0,0] +1X[2,0,0,0,0,0]
+1X[4,0,0,0,0,0]

sym_tensor(3,[2,0,0,0,0,0],D6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,2,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0,0]
+2X[2,0,0,0,0,0] +1X[2,1,0,0,0,0] +1X[2,2,0,0,0,0]
+1X[4,0,0,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0,0]

sym_tensor(4,[2,0,0,0,0,0],D6)
  2X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,2,0,0,0]
+3X[0,2,0,0,0,0] +1X[0,4,0,0,0,0] +1X[1,1,1,0,0,0]
+3X[2,0,0,0,0,0] +1X[2,0,2,0,0,0] +1X[2,1,0,0,0,0]
+2X[2,2,0,0,0,0] +3X[4,0,0,0,0,0] +1X[4,1,0,0,0,0]
+1X[4,2,0,0,0,0] +1X[6,0,0,0,0,0] +1X[8,0,0,0,0,0]

sym_tensor(5,[2,0,0,0,0,0],D6)
  2X[ 0,0,0,0,0,0] +1X[ 0,0,0,0,2,2] +1X[ 0,0,0,2,0,0]
+3X[ 0,0,2,0,0,0] +4X[ 0,2,0,0,0,0] +1X[ 0,2,2,0,0,0]
+1X[ 0,4,0,0,0,0] +1X[ 1,0,1,1,0,0] +2X[ 1,1,1,0,0,0]
+1X[ 1,2,1,0,0,0] +5X[ 2,0,0,0,0,0] +1X[ 2,0,0,2,0,0]
+2X[ 2,0,2,0,0,0] +3X[ 2,1,0,0,0,0] +5X[ 2,2,0,0,0,0]
+1X[ 2,3,0,0,0,0] +1X[ 2,4,0,0,0,0] +1X[ 3,1,1,0,0,0]
+4X[ 4,0,0,0,0,0] +1X[ 4,0,2,0,0,0] +2X[ 4,1,0,0,0,0]
+2X[ 4,2,0,0,0,0] +3X[ 6,0,0,0,0,0] +1X[ 6,1,0,0,0,0]
+1X[ 6,2,0,0,0,0] +1X[ 8,0,0,0,0,0] +1X[10,0,0,0,0,0]

sym_tensor(6,[2,0,0,0,0,0],D6)
  4X[ 0,0,0,0,0,0] +1X[ 0,0,0,0,0,4] +1X[ 0,0,0,0,2,2]
+1X[ 0,0,0,0,4,0] +3X[ 0,0,0,2,0,0] +5X[ 0,0,2,0,0,0]
+1X[ 0,0,4,0,0,0] +8X[ 0,2,0,0,0,0] +1X[ 0,2,0,1,0,0]
+1X[ 0,2,0,2,0,0] +2X[ 0,2,2,0,0,0] +1X[ 0,3,0,0,0,0]
+4X[ 0,4,0,0,0,0] +1X[ 0,6,0,0,0,0] +1X[ 1,0,0,1,1,1]
+2X[ 1,0,1,1,0,0] +4X[ 1,1,1,0,0,0] +1X[ 1,1,1,1,0,0]
+2X[ 1,2,1,0,0,0] +1X[ 1,3,1,0,0,0] +7X[ 2,0,0,0,0,0]
+1X[ 2,0,0,0,2,2] +2X[ 2,0,0,2,0,0] +6X[ 2,0,2,0,0,0]
+4X[ 2,1,0,0,0,0] +1X[ 2,1,2,0,0,0] +9X[ 2,2,0,0,0,0]
+1X[ 2,2,2,0,0,0] +2X[ 2,3,0,0,0,0] +2X[ 2,4,0,0,0,0]
+1X[ 3,0,1,0,0,0] +1X[ 3,0,1,1,0,0] +3X[ 3,1,1,0,0,0]
+1X[ 3,2,1,0,0,0] +8X[ 4,0,0,0,0,0] +1X[ 4,0,0,2,0,0]
+2X[ 4,0,2,0,0,0] +4X[ 4,1,0,0,0,0] +6X[ 4,2,0,0,0,0]
+1X[ 4,3,0,0,0,0] +1X[ 4,4,0,0,0,0] +1X[ 5,1,1,0,0,0]
+5X[ 6,0,0,0,0,0] +1X[ 6,0,2,0,0,0] +2X[ 6,1,0,0,0,0]
+2X[ 6,2,0,0,0,0] +3X[ 8,0,0,0,0,0] +1X[ 8,1,0,0,0,0]
+1X[ 8,2,0,0,0,0] +1X[10,0,0,0,0,0] +1X[12,0,0,0,0,0]

```

**sym\_tensor(2,[0,0,0,0,2,0],D6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,4,0] +1X[0,0,0,1,0,0]  
+1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,1,0,0,2,0] +1X[0,2,0,0,0,0]

sym\_tensor(3,[0,0,0,0,2,0],D6)

3X[0,0,0,0,2,0] +1X[0,0,0,0,4,0] +1X[0,0,0,0,6,0]  
+2X[0,0,0,1,2,0] +1X[0,0,0,2,2,0] +1X[0,0,1,0,1,1]  
+1X[0,0,2,0,0,2] +1X[0,1,0,0,0,0] +2X[0,1,0,0,2,0]  
+1X[0,1,0,0,4,0] +2X[0,1,0,1,0,0] +1X[0,1,0,1,2,0]  
+1X[0,1,0,2,0,0] +2X[0,2,0,0,2,0] +1X[0,3,0,0,0,0]  
+1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,0,1,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0]  
+1X[1,0,1,1,0,0] +1X[1,1,0,0,1,1] +1X[2,0,0,0,0,2]

sym\_tensor(4,[0,0,0,0,2,0],D6)

3X[0,0,0,0,0,0] + 1X[0,0,0,0,0,4] + 2X[0,0,0,0,2,0]  
+1X[0,0,0,0,2,2] + 6X[0,0,0,0,4,0] + 1X[0,0,0,0,6,0]  
+1X[0,0,0,0,8,0] + 6X[0,0,0,1,0,0] + 1X[0,0,0,1,0,2]  
+5X[0,0,0,1,2,0] + 3X[0,0,0,1,4,0] + 9X[0,0,0,2,0,0]  
+2X[0,0,0,2,2,0] + 1X[0,0,0,2,4,0] + 3X[0,0,0,3,0,0]  
+1X[0,0,0,4,0,0] + 4X[0,0,1,0,1,1] + 1X[0,0,1,0,1,3]  
+2X[0,0,1,0,3,1] + 3X[0,0,1,1,1,1] + 3X[0,0,2,0,0,0]  
+1X[0,0,2,0,0,2] + 1X[0,0,2,0,2,2] + 2X[0,0,2,1,0,0]  
+1X[0,0,4,0,0,0] + 4X[0,1,0,0,0,2] +10X[0,1,0,0,2,0]  
+3X[0,1,0,0,4,0] + 1X[0,1,0,0,6,0] + 4X[0,1,0,1,0,0]  
+3X[0,1,0,2,0,0] + 2X[0,1,0,2,2,0] + 5X[0,1,1,0,1,1]  
+1X[0,1,1,1,1,1] + 1X[0,1,2,0,0,2] + 6X[0,2,0,0,0,0]  
+1X[0,2,0,0,0,4] + 4X[0,2,0,0,2,0] + 3X[0,2,0,0,4,0]  
+7X[0,2,0,1,0,0] + 1X[0,2,0,1,2,0] + 3X[0,2,0,2,0,0]  
+3X[0,3,0,0,2,0] + 2X[0,4,0,0,0,0] + 4X[1,0,0,0,1,1]  
+1X[1,0,0,0,1,3] + 3X[1,0,0,0,3,1] + 7X[1,0,0,1,1,1]  
+1X[1,0,0,1,3,1] + 1X[1,0,0,2,1,1] + 1X[1,0,1,0,0,0]  
+3X[1,0,1,0,0,2] + 6X[1,0,1,0,2,0] + 1X[1,0,1,0,2,2]  
+4X[1,0,1,1,0,0] + 1X[1,0,1,1,0,2] + 2X[1,0,1,1,2,0]  
+2X[1,0,2,0,1,1] + 7X[1,1,0,0,1,1] + 2X[1,1,0,0,3,1]  
+3X[1,1,0,1,1,1] + 3X[1,1,1,0,0,0] + 1X[1,1,1,0,0,2]  
+2X[1,1,1,0,2,0] + 2X[1,1,1,1,0,0] + 2X[1,2,0,0,1,1]  
+1X[2,0,0,0,0,0] + 1X[2,0,0,0,0,2] + 1X[2,0,0,0,2,0]  
+3X[2,0,0,0,2,2] + 4X[2,0,0,1,0,0] + 2X[2,0,0,2,0,0]  
+3X[2,0,1,0,1,1] + 3X[2,0,2,0,0,0] + 2X[2,1,0,0,0,2]  
+1X[2,1,0,0,2,0] + 1X[2,2,0,0,0,0] + 1X[3,0,0,0,1,1]  
+1X[4,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,0,0,2],D6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,4] +1X[0,0,0,1,0,0]  
+1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,1,0,0,0,2] +1X[0,2,0,0,0,0]

sym\_tensor(3,[0,0,0,0,0,2],D6)

3X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,0,0,4] +1X[0,0,0,0,0,6]  
+2X[0,0,0,1,0,2] +1X[0,0,0,2,0,2] +1X[0,0,1,0,1,1]  
+1X[0,0,2,0,2,0] +1X[0,1,0,0,0,0] +2X[0,1,0,0,0,2]  
+1X[0,1,0,0,0,4] +2X[0,1,0,1,0,0] +1X[0,1,0,1,0,2]  
+1X[0,1,0,2,0,0] +2X[0,2,0,0,0,2] +1X[0,3,0,0,0,0]  
+1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,0,1,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0]  
+1X[1,0,1,1,0,0] +1X[1,1,0,0,1,1] +1X[2,0,0,0,2,0]

```

sym_tensor(4,[0,0,0,0,0,2],D6)
  3X[0,0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,0,0,2] + 6X[0,0,0,0,0,4]
+1X[0,0,0,0,0,6] + 1X[0,0,0,0,0,8] + 1X[0,0,0,0,2,2]
+1X[0,0,0,0,4,0] + 6X[0,0,0,1,0,0] + 5X[0,0,0,1,0,2]
+3X[0,0,0,1,0,4] + 1X[0,0,0,1,2,0] + 9X[0,0,0,2,0,0]
+2X[0,0,0,2,0,2] + 1X[0,0,0,2,0,4] + 3X[0,0,0,3,0,0]
+1X[0,0,0,4,0,0] + 4X[0,0,1,0,1,1] + 2X[0,0,1,0,1,3]
+1X[0,0,1,0,3,1] + 3X[0,0,1,1,1,1] + 3X[0,0,2,0,0,0]
+1X[0,0,2,0,2,0] + 1X[0,0,2,0,2,2] + 2X[0,0,2,1,0,0]
+1X[0,0,4,0,0,0] +10X[0,1,0,0,0,2] + 3X[0,1,0,0,0,4]
+1X[0,1,0,0,0,6] + 4X[0,1,0,0,2,0] + 4X[0,1,0,1,0,0]
+9X[0,1,0,1,0,2] + 1X[0,1,0,1,0,4] + 3X[0,1,0,1,2,0]
+3X[0,1,0,2,0,0] + 2X[0,1,0,2,0,2] + 5X[0,1,1,0,1,1]
+1X[0,1,1,1,1,1] + 1X[0,1,2,0,2,0] + 6X[0,2,0,0,0,0]
+4X[0,2,0,0,0,2] + 3X[0,2,0,0,0,4] + 1X[0,2,0,0,4,0]
+7X[0,2,0,1,0,0] + 1X[0,2,0,1,0,2] + 3X[0,2,0,2,0,0]
+3X[0,3,0,0,0,2] + 2X[0,4,0,0,0,0] + 4X[1,0,0,0,1,1]
+3X[1,0,0,0,1,3] + 1X[1,0,0,0,3,1] + 7X[1,0,0,1,1,1]
+1X[1,0,0,1,1,3] + 1X[1,0,0,2,1,1] + 1X[1,0,1,0,0,0]
+6X[1,0,1,0,0,2] + 3X[1,0,1,0,2,0] + 1X[1,0,1,0,2,2]
+4X[1,0,1,1,0,0] + 2X[1,0,1,1,0,2] + 1X[1,0,1,1,2,0]
+2X[1,0,2,0,1,1] + 7X[1,1,0,0,1,1] + 2X[1,1,0,0,1,3]
+3X[1,1,0,1,1,1] + 3X[1,1,1,0,0,0] + 2X[1,1,1,0,0,2]
+1X[1,1,1,0,2,0] + 2X[1,1,1,1,0,0] + 2X[1,2,0,0,1,1]
+1X[2,0,0,0,0,0] + 1X[2,0,0,0,0,2] + 1X[2,0,0,0,2,0]
+3X[2,0,0,0,2,2] + 4X[2,0,0,1,0,0] + 2X[2,0,0,2,0,0]
+3X[2,0,1,0,1,1] + 3X[2,0,2,0,0,0] + 1X[2,1,0,0,0,2]
+2X[2,1,0,0,2,0] + 1X[2,2,0,0,0,0] + 1X[3,0,0,0,1,1]
+1X[4,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,0,0,0,1,0],D6)
  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,0,2,0] +2X[0,1,0,0,0,0]
+1X[0,1,0,1,0,0] +1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0]
+1X[2,0,0,0,2,0] +1X[2,1,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[1,0,0,0,1,0],D6)
  2X[0,0,0,0,0,1] +1X[0,0,0,0,0,3] +2X[0,0,0,0,2,1]
+2X[0,0,0,1,0,1] +5X[0,0,1,0,1,0] +1X[0,0,2,0,0,1]
+4X[0,1,0,0,0,1] +1X[0,1,0,0,2,1] +1X[0,1,0,1,0,1]
+2X[0,1,1,0,1,0] +2X[0,2,0,0,0,1] +4X[1,0,0,0,1,0]
+2X[1,0,0,0,1,2] +1X[1,0,0,0,3,0] +3X[1,0,0,1,1,0]
+4X[1,0,1,0,0,1] +5X[1,1,0,0,1,0] +1X[1,1,0,1,1,0]
+1X[1,2,0,0,1,0] +4X[2,0,0,0,0,1] +1X[2,0,0,0,2,1]
+1X[2,0,0,1,0,1] +2X[2,0,1,0,1,0] +2X[2,1,0,0,0,1]
+2X[3,0,0,0,1,0] +1X[3,0,0,0,3,0] +1X[3,1,0,0,1,0]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,0,0,1,0],D6)
  3X[0,0,0,0,0,0] + 5X[0,0,0,0,0,2] + 2X[0,0,0,0,0,4]
  +5X[0,0,0,0,2,0] + 5X[0,0,0,0,2,2] + 2X[0,0,0,0,4,0]
+16X[0,0,0,1,0,0] + 4X[0,0,0,1,0,2] + 5X[0,0,0,1,2,0]
+11X[0,0,0,2,0,0] +20X[0,0,1,0,1,1] + 1X[0,0,1,1,1,1]
+11X[0,0,2,0,0,0] + 1X[0,0,2,0,2,0] + 2X[0,0,2,1,0,0]
  +3X[0,1,0,0,0,0] +17X[0,1,0,0,0,2] +18X[0,1,0,0,2,0]
  +1X[0,1,0,0,2,2] +20X[0,1,0,1,0,0] + 3X[0,1,0,1,0,2]
  +4X[0,1,0,1,2,0] + 2X[0,1,0,2,0,0] +10X[0,1,1,0,1,1]
  +3X[0,1,2,0,0,0] +15X[0,2,0,0,0,0] + 4X[0,2,0,0,0,2]
  +5X[0,2,0,0,2,0] +12X[0,2,0,1,0,0] + 1X[0,2,0,2,0,0]
  +1X[0,3,0,0,0,0] + 1X[0,3,0,0,2,0] + 1X[0,4,0,0,0,0]
+28X[1,0,0,0,1,1] + 3X[1,0,0,0,1,3] + 4X[1,0,0,0,3,1]
+11X[1,0,0,1,1,1] +17X[1,0,1,0,0,0] +11X[1,0,1,0,0,2]
+14X[1,0,1,0,2,0] +17X[1,0,1,1,0,0] + 1X[1,0,2,0,1,1]
+30X[1,1,0,0,1,1] + 1X[1,1,0,0,3,1] + 2X[1,1,0,1,1,1]
+20X[1,1,1,0,0,0] + 1X[1,1,1,0,0,2] + 3X[1,1,1,0,2,0]
  +3X[1,1,1,1,0,0] + 5X[1,2,0,0,1,1] + 3X[1,2,1,0,0,0]
  +8X[2,0,0,0,0,0] +10X[2,0,0,0,0,2] +13X[2,0,0,0,2,0]
  +3X[2,0,0,0,2,2] + 1X[2,0,0,0,4,0] +23X[2,0,0,1,0,0]
  +1X[2,0,0,1,0,2] + 3X[2,0,0,1,2,0] + 4X[2,0,0,2,0,0]
  +9X[2,0,1,0,1,1] + 6X[2,0,2,0,0,0] + 9X[2,1,0,0,0,0]
  +6X[2,1,0,0,0,2] +10X[2,1,0,0,2,0] + 9X[2,1,0,1,0,0]
  +1X[2,1,0,1,2,0] + 7X[2,2,0,0,0,0] + 1X[2,2,0,0,2,0]
  +1X[2,2,0,1,0,0] +12X[3,0,0,0,1,1] + 1X[3,0,0,0,3,1]
  +1X[3,0,0,1,1,1] + 7X[3,0,1,0,0,0] + 2X[3,0,1,0,2,0]
  +1X[3,0,1,1,0,0] + 3X[3,1,0,0,1,1] + 2X[3,1,1,0,0,0]
  +4X[4,0,0,0,0,0] + 1X[4,0,0,0,0,2] + 2X[4,0,0,0,2,0]
  +1X[4,0,0,0,4,0] + 3X[4,0,0,1,0,0] + 1X[4,1,0,0,0,0]
  +1X[4,1,0,0,2,0] + 1X[4,2,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[1,0,0,0,0,1],D6)
  1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,0,2,0] +2X[0,1,0,0,0,0]
+1X[0,1,0,1,0,0] +1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0]
+1X[2,0,0,0,0,2] +1X[2,1,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[1,0,0,0,0,1],D6)
  2X[0,0,0,0,1,0] +2X[0,0,0,0,1,2] +1X[0,0,0,0,3,0]
+2X[0,0,0,1,1,0] +5X[0,0,1,0,0,1] +1X[0,0,2,0,1,0]
+4X[0,1,0,0,1,0] +1X[0,1,0,0,1,2] +1X[0,1,0,1,1,0]
+2X[0,1,1,0,0,1] +2X[0,2,0,0,1,0] +4X[1,0,0,0,0,1]
+1X[1,0,0,0,0,3] +2X[1,0,0,0,2,1] +3X[1,0,0,1,0,1]
+4X[1,0,1,0,1,0] +5X[1,1,0,0,0,1] +1X[1,1,0,1,0,1]
+1X[1,2,0,0,0,1] +4X[2,0,0,0,1,0] +1X[2,0,0,0,1,2]
+1X[2,0,0,1,1,0] +2X[2,0,1,0,0,1] +2X[2,1,0,0,1,0]
+2X[3,0,0,0,0,1] +1X[3,0,0,0,0,3] +1X[3,1,0,0,0,1]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,0,0,0,1],D6)
  3X[0,0,0,0,0,0] + 5X[0,0,0,0,0,2] + 2X[0,0,0,0,0,4]
  +5X[0,0,0,0,2,0] + 5X[0,0,0,0,2,2] + 2X[0,0,0,0,4,0]
+16X[0,0,0,1,0,0] + 5X[0,0,0,1,0,2] + 4X[0,0,0,1,2,0]
+11X[0,0,0,2,0,0] +20X[0,0,1,0,1,1] + 1X[0,0,1,1,1,1]
+11X[0,0,2,0,0,0] + 1X[0,0,2,0,0,2] + 2X[0,0,2,1,0,0]
  +3X[0,1,0,0,0,0] +18X[0,1,0,0,0,2] +17X[0,1,0,0,2,0]
  +1X[0,1,0,0,2,2] +20X[0,1,0,1,0,0] + 4X[0,1,0,1,0,2]
  +3X[0,1,0,1,2,0] + 2X[0,1,0,2,0,0] +10X[0,1,1,0,1,1]
  +3X[0,1,2,0,0,0] +15X[0,2,0,0,0,0] + 5X[0,2,0,0,0,2]
  +4X[0,2,0,0,2,0] +12X[0,2,0,1,0,0] + 1X[0,2,0,2,0,0]
  +1X[0,3,0,0,0,0] + 1X[0,3,0,0,0,2] + 1X[0,4,0,0,0,0]
+28X[1,0,0,0,1,1] + 4X[1,0,0,0,1,3] + 3X[1,0,0,0,3,1]
+11X[1,0,0,1,1,1] +17X[1,0,1,0,0,0] +14X[1,0,1,0,0,2]
+11X[1,0,1,0,2,0] +17X[1,0,1,1,0,0] + 1X[1,0,2,0,1,1]
+30X[1,1,0,0,1,1] + 1X[1,1,0,0,1,3] + 2X[1,1,0,1,1,1]
+20X[1,1,1,0,0,0] + 3X[1,1,1,0,0,2] + 1X[1,1,1,0,2,0]
  +3X[1,1,1,1,0,0] + 5X[1,2,0,0,1,1] + 3X[1,2,1,0,0,0]
  +8X[2,0,0,0,0,0] +13X[2,0,0,0,0,2] + 1X[2,0,0,0,0,4]
+10X[2,0,0,0,2,0] + 3X[2,0,0,0,2,2] +23X[2,0,0,1,0,0]
  +3X[2,0,0,1,0,2] + 1X[2,0,0,1,2,0] + 4X[2,0,0,2,0,0]
  +9X[2,0,1,0,1,1] + 6X[2,0,2,0,0,0] + 9X[2,1,0,0,0,0]
+10X[2,1,0,0,0,2] + 6X[2,1,0,0,2,0] + 9X[2,1,0,1,0,0]
  +1X[2,1,0,1,0,2] + 7X[2,2,0,0,0,0] + 1X[2,2,0,0,0,2]
  +1X[2,2,0,1,0,0] +12X[3,0,0,0,1,1] + 1X[3,0,0,0,1,3]
  +1X[3,0,0,1,1,1] + 7X[3,0,1,0,0,0] + 2X[3,0,1,0,0,2]
  +1X[3,0,1,1,0,0] + 3X[3,1,0,0,1,1] + 2X[3,1,1,0,0,0]
  +4X[4,0,0,0,0,0] + 2X[4,0,0,0,0,2] + 1X[4,0,0,0,0,4]
  +1X[4,0,0,0,2,0] + 3X[4,0,0,1,0,0] + 1X[4,1,0,0,0,0]
  +1X[4,1,0,0,0,2] + 1X[4,2,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(2,[0,0,0,0,1,1],D6)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,2,2] +2X[0,0,0,1,0,0]
+1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,0,1,1] +1X[0,0,2,0,0,0]
+1X[0,1,0,0,0,2] +1X[0,1,0,0,2,0] +1X[0,2,0,0,0,0]
+1X[1,0,0,0,1,1] +1X[1,0,1,0,0,0] +1X[2,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(3,[0,0,0,0,1,1],D6)
  6X[0,0,0,0,1,1] + 2X[0,0,0,0,1,3] + 2X[0,0,0,0,3,1]
  +1X[0,0,0,0,3,3] + 5X[0,0,0,1,1,1] + 1X[0,0,0,2,1,1]
  +4X[0,0,1,0,0,0] + 5X[0,0,1,0,0,2] + 5X[0,0,1,0,2,0]
  +1X[0,0,1,0,2,2] + 6X[0,0,1,1,0,0] + 1X[0,0,1,1,0,2]
  +1X[0,0,1,1,2,0] + 2X[0,0,2,0,1,1] + 1X[0,0,3,0,0,0]
+10X[0,1,0,0,1,1] + 1X[0,1,0,0,1,3] + 1X[0,1,0,0,3,1]
  +3X[0,1,0,1,1,1] + 5X[0,1,1,0,0,0] + 2X[0,1,1,0,0,2]
  +2X[0,1,1,0,2,0] + 2X[0,1,1,1,0,0] + 3X[0,2,0,0,1,1]
  +1X[0,2,1,0,0,0] + 1X[1,0,0,0,0,0] + 5X[1,0,0,0,0,2]
  +5X[1,0,0,0,2,0] + 3X[1,0,0,0,2,2] + 7X[1,0,0,1,0,0]
  +2X[1,0,0,1,0,2] + 2X[1,0,0,1,2,0] + 3X[1,0,0,2,0,0]
  +6X[1,0,1,0,1,1] + 2X[1,0,2,0,0,0] + 2X[1,1,0,0,0,0]
  +3X[1,1,0,0,0,2] + 3X[1,1,0,0,2,0] + 4X[1,1,0,1,0,0]
  +1X[1,2,0,0,0,0] + 5X[2,0,0,0,1,1] + 2X[2,0,1,0,0,0]
  +1X[3,0,0,0,0,0]

```

```

sym_tensor(4,[0,0,0,0,1,1],D6)
  5X[0,0,0,0,0,0] +11X[0,0,0,0,0,2] + 7X[0,0,0,0,0,4]
+11X[0,0,0,0,2,0] +32X[0,0,0,0,2,2] + 2X[0,0,0,0,2,4]
  +7X[0,0,0,0,4,0] + 2X[0,0,0,0,4,2] + 1X[0,0,0,0,4,4]
+30X[0,0,0,1,0,0] +31X[0,0,0,1,0,2] + 2X[0,0,0,1,0,4]
+31X[0,0,0,1,2,0] +12X[0,0,0,1,2,2] + 2X[0,0,0,1,4,0]
+41X[0,0,0,2,0,0] + 6X[0,0,0,2,0,2] + 6X[0,0,0,2,2,0]
  +1X[0,0,0,2,2,2] + 7X[0,0,0,3,0,0] + 1X[0,0,0,4,0,0]
+79X[0,0,1,0,1,1] +15X[0,0,1,0,1,3] +15X[0,0,1,0,3,1]
  +1X[0,0,1,0,3,3] +36X[0,0,1,1,1,1] + 1X[0,0,1,1,1,3]
  +1X[0,0,1,1,3,1] + 1X[0,0,1,2,1,1] +33X[0,0,2,0,0,0]
+16X[0,0,2,0,0,2] +16X[0,0,2,0,2,0] + 3X[0,0,2,0,2,2]
+23X[0,0,2,1,0,0] + 1X[0,0,2,1,0,2] + 1X[0,0,2,1,2,0]
  +2X[0,0,2,2,0,0] + 2X[0,0,3,0,1,1] + 2X[0,0,4,0,0,0]
  +6X[0,1,0,0,0,0] +49X[0,1,0,0,0,2] + 4X[0,1,0,0,0,4]
+49X[0,1,0,0,2,0] +31X[0,1,0,0,2,2] + 1X[0,1,0,0,2,4]
  +4X[0,1,0,0,4,0] + 1X[0,1,0,0,4,2] +54X[0,1,0,1,0,0]
+39X[0,1,0,1,0,2] +39X[0,1,0,1,2,0] + 3X[0,1,0,1,2,2]
+26X[0,1,0,2,0,0] + 3X[0,1,0,2,0,2] + 3X[0,1,0,2,2,0]
  +1X[0,1,0,3,0,0] +70X[0,1,1,0,1,1] + 4X[0,1,1,0,1,3]
  +4X[0,1,1,0,3,1] + 8X[0,1,1,1,1,1] +18X[0,1,2,0,0,0]
  +5X[0,1,2,0,0,2] + 5X[0,1,2,0,2,0] + 3X[0,1,2,1,0,0]
+24X[0,2,0,0,0,0] +22X[0,2,0,0,0,2] + 2X[0,2,0,0,0,4]
+22X[0,2,0,0,2,0] + 7X[0,2,0,0,2,2] + 2X[0,2,0,0,4,0]
+40X[0,2,0,1,0,0] + 4X[0,2,0,1,0,2] + 4X[0,2,0,1,2,0]
  +8X[0,2,0,2,0,0] +10X[0,2,1,0,1,1] + 4X[0,2,2,0,0,0]
  +3X[0,3,0,0,0,0] + 4X[0,3,0,0,0,2] + 4X[0,3,0,0,2,0]
  +2X[0,3,0,1,0,0] + 3X[0,4,0,0,0,0] +61X[1,0,0,0,1,1]
+25X[1,0,0,0,1,3] +25X[1,0,0,0,3,1] + 3X[1,0,0,0,3,3]
+75X[1,0,0,1,1,1] + 4X[1,0,0,1,1,3] + 4X[1,0,0,1,3,1]
  +8X[1,0,0,2,1,1] +32X[1,0,1,0,0,0] +54X[1,0,1,0,0,2]
  +1X[1,0,1,0,0,4] +54X[1,0,1,0,2,0] +13X[1,0,1,0,2,2]
  +1X[1,0,1,0,4,0] +64X[1,0,1,1,0,0] +12X[1,0,1,1,0,2]
+12X[1,0,1,1,2,0] + 8X[1,0,1,2,0,0] +18X[1,0,2,0,1,1]
  +4X[1,0,3,0,0,0] +84X[1,1,0,0,1,1] +11X[1,1,0,0,1,3]
+11X[1,1,0,0,3,1] +29X[1,1,0,1,1,1] +39X[1,1,1,0,0,0]
+18X[1,1,1,0,0,2] +18X[1,1,1,0,2,0] +21X[1,1,1,1,0,0]
+20X[1,2,0,0,1,1] + 7X[1,2,1,0,0,0] +11X[2,0,0,0,0,0]
+23X[2,0,0,0,0,2] + 2X[2,0,0,0,0,4] +23X[2,0,0,0,2,0]
+17X[2,0,0,0,2,2] + 2X[2,0,0,0,4,0] +42X[2,0,0,1,0,0]
+13X[2,0,0,1,0,2] +13X[2,0,0,1,2,0] +18X[2,0,0,2,0,0]
+32X[2,0,1,0,1,1] +13X[2,0,2,0,0,0] +10X[2,1,0,0,0,0]
+16X[2,1,0,0,0,2] +16X[2,1,0,0,2,0] +16X[2,1,0,1,0,0]
  +7X[2,2,0,0,0,0] +15X[3,0,0,0,1,1] + 6X[3,0,1,0,0,0]
  +4X[4,0,0,0,0,0]

```

**Liste 1.5 : G2**

```

sym_tensor(2,[2,0],G2)

```

```

  1X[0,0] +1X[0,2] +1X[1,1] +2X[2,0] +1X[4,0]

```

```

sym_tensor(2,[0,1],G2)

```

```

  1X[0,0] +1X[0,2] +1X[2,0]

```

**Liste 1.6 : F4**

Beachte : Die Nummerierung von  $F_4$  im Rechnungspaket ist verschieden von unserer Nummerierung von Tits. Siehe dort  $\Pi_2$  ( in der Liste ist das  $\Pi_3$  ),  $\Pi_4$  ( in der Liste  $\Pi_1$  ) und  $\Pi_1^2$  ( in der Liste  $\Pi_4^2$  ).

`sym_tensor(2,[0,0,1,0],F4)`

`1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,1] +2X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,3] +1X[0,0,1,1]`  
`+1X[0,0,2,0] +1X[1,0,0,1] +1X[1,0,1,0] +1X[2,0,0,0]`

`sym_tensor(3,[0,0,1,0],F4)`

`1X[0,0,0,1] +2X[0,0,0,2] +3X[0,0,0,3] +6X[0,0,1,0] +6X[0,0,1,1]`  
`+5X[0,0,1,2] +1X[0,0,1,3] +2X[0,0,2,0] +1X[0,0,2,1] +1X[0,0,3,0]`  
`+5X[0,1,0,0] +5X[0,1,0,1] +2X[0,1,0,2] +1X[0,1,1,0] +2X[1,0,0,0]`  
`+5X[1,0,0,1] +6X[1,0,0,2] +1X[1,0,0,3] +4X[1,0,1,0] +4X[1,0,1,1]`  
`+1X[1,0,2,0] +1X[1,1,0,0] +1X[1,1,0,1] +2X[2,0,0,1] +1X[2,0,1,0]`  
`+1X[3,0,0,0]`

`sym_tensor(2,[1,0,0,0],F4)`

`1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,2] +1X[2,0,0,0]`

`sym_tensor(3,[1,0,0,0],F4)`

`1X[0,0,1,0] +1X[0,1,0,0] +1X[1,0,0,0] +1X[1,0,0,2] +1X[3,0,0,0]`

`sym_tensor(2,[0,0,0,2],F4)`

`1X[0,0,0,0] +1X[0,0,0,1] +2X[0,0,0,2] +1X[0,0,0,3] +1X[0,0,0,4]`  
`+1X[0,0,1,1] +1X[0,0,2,0] +1X[1,0,1,0] +1X[2,0,0,0]`

`sym_tensor(3,[0,0,0,2],F4)`

`2X[0,0,0,0] +2X[0,0,0,1] +6X[0,0,0,2] +5X[0,0,0,3] +3X[0,0,0,4]`  
`+1X[0,0,0,5] +1X[0,0,0,6] +2X[0,0,1,0] +5X[0,0,1,1] +4X[0,0,1,2]`  
`+2X[0,0,1,3] +6X[0,0,2,0] +2X[0,0,2,1] +1X[0,0,2,2] +2X[0,1,0,0]`  
`+2X[0,1,0,1] +1X[0,1,0,2] +2X[0,1,1,0] +1X[0,2,0,0] +3X[1,0,0,1]`  
`+3X[1,0,0,2] +1X[1,0,0,3] +5X[1,0,1,0] +4X[1,0,1,1] +1X[1,0,1,2]`  
`+1X[1,1,0,0] +1X[1,1,0,1] +3X[2,0,0,0] +2X[2,0,0,1] +2X[2,0,0,2]`



**Liste 1.7 : E6**

Beachte : Die Nummerierung von  $E_6$  im Rechnungspaket ist verschieden von unserer Nummerierung von Tits. Siehe dort  $\Pi_1^2$  (in der Liste ist das  $\Pi_1^2$ ),  $\Pi_5$  (in der Liste  $\Pi_6$ ) und  $\Pi_1 \Pi_5$  (in der Liste  $\Pi_1 \Pi_6$ ).

**sym\_tensor(2,[2,0,0,0,0,0],E6)**

1X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,2,0,0,0] +1X[2,0,0,0,0,1]  
+1X[4,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[2,0,0,0,0,0],E6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,3] +1X[0,0,0,2,0,0]  
+1X[0,0,1,0,1,0] +1X[0,0,2,0,0,1] +1X[0,2,0,0,0,0]  
+1X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,1,0,0,0,1] +1X[1,1,1,0,0,0]  
+2X[2,0,0,0,0,2] +1X[2,0,1,0,0,1] +1X[2,0,2,0,0,0]  
+1X[3,0,0,0,0,0] +1X[4,0,0,0,0,1] +1X[6,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(4,[2,0,0,0,0,0],E6)**

1X[0,0,0,0,0,1] +2X[0,0,0,0,0,4] +3X[0,0,0,0,2,0]  
+1X[0,0,0,2,0,1] +2X[0,0,1,0,1,1] +3X[0,0,1,1,0,0]  
+3X[0,0,2,0,0,2] +1X[0,0,4,0,0,0] +1X[0,1,0,0,0,1]  
+1X[0,1,0,1,0,1] +2X[0,1,1,0,0,0] +1X[0,1,1,1,0,0]  
+2X[0,2,0,0,0,1] +1X[0,2,0,0,2,0] +3X[1,0,0,0,0,2]  
+1X[1,0,0,0,1,0] +2X[1,0,0,1,1,0] +3X[1,0,1,0,0,1]  
+1X[1,0,1,1,0,1] +2X[1,0,2,0,0,0] +2X[1,1,0,0,0,2]  
+3X[1,1,0,0,1,0] +3X[1,1,1,0,0,1] +1X[1,1,2,0,0,0]  
+3X[2,0,0,0,0,0] +3X[2,0,0,0,0,3] +2X[2,0,0,0,1,1]  
+1X[2,0,0,2,0,0] +1X[2,0,1,0,0,2] +2X[2,0,1,0,1,0]  
+2X[2,0,2,0,0,1] +2X[2,1,0,0,0,0] +1X[2,1,0,1,0,0]  
+3X[2,2,0,0,0,0] +3X[3,0,0,0,0,1] +1X[3,0,1,0,0,0]  
+2X[3,1,0,0,0,1] +1X[3,1,1,0,0,0] +3X[4,0,0,0,0,2]  
+1X[4,0,1,0,0,1] +1X[4,0,2,0,0,0] +1X[5,0,0,0,0,0]  
+1X[6,0,0,0,0,1] +1X[8,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[0,0,0,0,0,2],E6)**

1X[0,0,0,0,0,4] +1X[0,0,0,0,2,0] +1X[1,0,0,0,0,2]  
+1X[2,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(3,[0,0,0,0,0,2],E6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,3] +1X[0,0,0,0,0,6]  
+1X[0,0,0,0,2,2] +1X[0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,0,1,0]  
+1X[0,1,0,0,1,1] +1X[0,2,0,0,0,0] +1X[1,0,0,0,0,1]  
+1X[1,0,0,0,0,4] +1X[1,0,0,0,1,2] +1X[1,0,0,0,2,0]  
+1X[1,1,0,0,0,1] +2X[2,0,0,0,0,2] +1X[3,0,0,0,0,0]

**sym\_tensor(2,[1,0,0,0,0,1],E6)**

1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,3] +1X[0,0,0,0,1,1]  
+1X[0,0,1,0,1,0] +1X[0,1,0,0,0,0] +1X[0,2,0,0,0,0]  
+2X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,1,0,0,0,1]  
+1X[2,0,0,0,0,2] +1X[3,0,0,0,0,0]

```

sym_tensor(3,[1,0,0,0,0,1],E6)
  2X[0,0,0,0,0,0] +3X[0,0,0,0,0,3] +5X[0,0,0,0,1,1]
+5X[0,0,0,1,0,0] +1X[0,0,0,2,0,0] +4X[0,0,1,0,0,2]
+6X[0,0,1,0,1,0] +2X[0,0,2,0,0,1] +2X[0,1,0,0,0,0]
+1X[0,1,0,0,0,3] +4X[0,1,0,0,1,1] +2X[0,1,0,1,0,0]
+1X[0,1,1,0,0,2] +1X[0,1,1,0,1,0] +3X[0,2,0,0,0,0]
+1X[0,3,0,0,0,0] +8X[1,0,0,0,0,1] +1X[1,0,0,0,0,4]
+2X[1,0,0,0,1,2] +2X[1,0,0,0,2,0] +3X[1,0,0,1,0,1]
+5X[1,0,1,0,0,0] +1X[1,0,1,0,1,1] +9X[1,1,0,0,0,1]
+4X[1,1,1,0,0,0] +2X[1,2,0,0,0,1] +5X[2,0,0,0,0,2]
+4X[2,0,0,0,1,0] +2X[2,0,1,0,0,1] +1X[2,1,0,0,0,2]
+1X[2,1,0,0,1,0] +3X[3,0,0,0,0,0] +1X[3,0,0,0,0,3]
+1X[3,1,0,0,0,0] +1X[4,0,0,0,0,1]

```

```

sym_tensor(4,[1,0,0,0,0,1],E6)
  5X[0,0,0,0,0,0] +14X[0,0,0,0,0,3] + 1X[0,0,0,0,0,6]
+32X[0,0,0,0,1,1] + 1X[0,0,0,0,1,4] + 5X[0,0,0,0,2,2]
+1X[0,0,0,0,3,0] +24X[0,0,0,1,0,0] + 4X[0,0,0,1,0,3]
+16X[0,0,0,1,1,1] +13X[0,0,0,2,0,0] +34X[0,0,1,0,0,2]
+50X[0,0,1,0,1,0] + 1X[0,0,1,0,1,3] + 2X[0,0,1,0,2,1]
+5X[0,0,1,1,0,2] + 4X[0,0,1,1,1,0] +26X[0,0,2,0,0,1]
+1X[0,0,2,0,2,0] + 1X[0,0,3,0,0,0] +10X[0,1,0,0,0,0]
+14X[0,1,0,0,0,3] +42X[0,1,0,0,1,1] +31X[0,1,0,1,0,0]
+1X[0,1,0,1,1,1] +26X[0,1,1,0,0,2] +29X[0,1,1,0,1,0]
+7X[0,1,2,0,0,1] +19X[0,2,0,0,0,0] + 4X[0,2,0,0,0,3]
+9X[0,2,0,0,1,1] + 5X[0,2,0,1,0,0] + 1X[0,2,1,0,0,2]
+3X[0,2,1,0,1,0] + 6X[0,3,0,0,0,0] + 2X[0,4,0,0,0,0]
+31X[1,0,0,0,0,1] + 8X[1,0,0,0,0,4] +27X[1,0,0,0,1,2]
+26X[1,0,0,0,2,0] +50X[1,0,0,1,0,1] + 1X[1,0,0,2,0,1]
+32X[1,0,1,0,0,0] + 9X[1,0,1,0,0,3] +24X[1,0,1,0,1,1]
+16X[1,0,1,1,0,0] + 3X[1,0,2,0,0,2] + 2X[1,0,2,0,1,0]
+61X[1,1,0,0,0,1] + 2X[1,1,0,0,0,4] + 8X[1,1,0,0,1,2]
+7X[1,1,0,0,2,0] +14X[1,1,0,1,0,1] +42X[1,1,1,0,0,0]
+1X[1,1,1,0,0,3] + 2X[1,1,1,0,1,1] + 1X[1,1,1,1,0,0]
+31X[1,2,0,0,0,1] + 9X[1,2,1,0,0,0] + 3X[1,3,0,0,0,1]
+36X[2,0,0,0,0,2] + 1X[2,0,0,0,0,5] +34X[2,0,0,0,1,0]
+2X[2,0,0,0,1,3] + 3X[2,0,0,0,2,1] + 3X[2,0,0,1,0,2]
+5X[2,0,0,1,1,0] +27X[2,0,1,0,0,1] + 1X[2,0,1,0,1,2]
+5X[2,0,2,0,0,0] +22X[2,1,0,0,0,2] +26X[2,1,0,0,1,0]
+8X[2,1,1,0,0,1] + 3X[2,2,0,0,0,2] + 1X[2,2,0,0,1,0]
+14X[3,0,0,0,0,0] + 6X[3,0,0,0,0,3] + 9X[3,0,0,0,1,1]
+4X[3,0,0,1,0,0] + 2X[3,0,1,0,0,2] + 1X[3,0,1,0,1,0]
+14X[3,1,0,0,0,0] + 1X[3,1,0,0,0,3] + 1X[3,1,0,0,1,1]
+4X[3,2,0,0,0,0] + 8X[4,0,0,0,0,1] + 1X[4,0,0,0,0,4]
+1X[4,0,1,0,0,0] + 2X[4,1,0,0,0,1] + 1X[5,0,0,0,0,2]
+1X[6,0,0,0,0,0]

```

**Liste 1.8 : E7**

Beachte : Die Nummerierung von  $E_7$  im Rechnungspaket ist verschieden von unserer Nummerierung von Tits. Siehe dort  $\Pi_1^2$  (in der Liste ist das  $\Pi_7^2$ ).

```
sym_tensor(2,[0,0,0,0,0,2],E7)
  1X[0,0,0,0,0,0] +1X[0,0,0,0,0,4] +1X[0,0,0,0,0,1,0] +1X[0,0,0,0,0,2,0]
  +1X[1,0,0,0,0,0,2] +1X[2,0,0,0,0,0,0]
```

```
sym_tensor(3,[0,0,0,0,0,2],E7)
  3X[0,0,0,0,0,2] +1X[0,0,0,0,0,4] +1X[0,0,0,0,0,6] +2X[0,0,0,0,0,1,2]
  +1X[0,0,0,0,0,2,2] +1X[0,0,0,0,1,0,1] +1X[0,0,0,0,2,0,0] +1X[0,0,1,0,0,0,0]
  +1X[0,0,1,0,0,1,0] +1X[0,1,0,0,0,0,1] +1X[0,1,0,0,0,1,1] +1X[0,2,0,0,0,0,0]
  +1X[1,0,0,0,0,0,0] +2X[1,0,0,0,0,0,2] +1X[1,0,0,0,0,0,4] +2X[1,0,0,0,0,1,0]
  +1X[1,0,0,0,0,1,2] +1X[1,0,0,0,0,2,0] +1X[1,1,0,0,0,0,1] +2X[2,0,0,0,0,0,2]
  +1X[3,0,0,0,0,0,0]
```

```
sym_tensor(4,[0,0,0,0,0,2],E7)
  3X[0,0,0,0,0,0] + 2X[0,0,0,0,0,2] + 6X[0,0,0,0,0,4] + 1X[0,0,0,0,0,6]
  +1X[0,0,0,0,0,8] + 6X[0,0,0,0,0,1,0] + 5X[0,0,0,0,0,1,2] + 3X[0,0,0,0,0,1,4]
  +9X[0,0,0,0,0,2,0] + 2X[0,0,0,0,0,2,2] + 1X[0,0,0,0,0,2,4] + 3X[0,0,0,0,0,3,0]
  +1X[0,0,0,0,0,4,0] + 4X[0,0,0,0,1,0,1] + 2X[0,0,0,0,1,0,3] + 3X[0,0,0,0,1,1,1]
  +1X[0,0,0,0,2,0,0] + 1X[0,0,0,0,2,0,2] + 6X[0,0,0,1,0,0,0] + 4X[0,0,0,1,0,1,0]
  +1X[0,0,0,2,0,0,0] + 1X[0,0,1,0,0,0,0] + 6X[0,0,1,0,0,0,2] + 4X[0,0,1,0,0,1,0]
  + 2X[0,0,1,0,0,1,2] + 2X[0,0,1,0,1,0,1] + 3X[0,0,2,0,0,0,0] + 4X[0,1,0,0,0,0,1]
  +3X[0,1,0,0,0,0,3] + 7X[0,1,0,0,0,1,1] + 1X[0,1,0,0,0,1,3] + 1X[0,1,0,0,0,2,1]
  +3X[0,1,0,0,1,0,0] + 1X[0,1,0,0,1,0,2] + 1X[0,1,0,0,1,1,0] + 3X[0,1,1,0,0,0,1]
  +1X[0,2,0,0,0,0,0] + 3X[0,2,0,0,0,0,2] +10X[1,0,0,0,0,0,2] + 3X[1,0,0,0,0,0,4]
  +1X[1,0,0,0,0,0,6] + 4X[1,0,0,0,0,1,0] + 9X[1,0,0,0,0,1,2] + 1X[1,0,0,0,0,1,4]
  +3X[1,0,0,0,0,2,0] + 2X[1,0,0,0,0,2,2] + 5X[1,0,0,0,1,0,1] + 1X[1,0,0,0,1,1,1]
  +1X[1,0,0,0,2,0,0] + 3X[1,0,1,0,0,0,0] + 2X[1,0,1,0,0,0,2] + 2X[1,0,1,0,0,1,0]
  +7X[1,1,0,0,0,0,1] + 2X[1,1,0,0,0,0,3] + 3X[1,1,0,0,0,1,1] + 1X[1,1,0,0,1,0,0]
  +2X[1,2,0,0,0,0,0] + 6X[2,0,0,0,0,0,0] + 4X[2,0,0,0,0,0,2] + 3X[2,0,0,0,0,0,4]
  +7X[2,0,0,0,0,1,0] + 1X[2,0,0,0,0,1,2] + 3X[2,0,0,0,0,2,0] + 2X[2,1,0,0,0,0,1]
  +3X[3,0,0,0,0,0,2] + 2X[4,0,0,0,0,0,0]
```

## § 7. Liste 2

Die ersten fünf Potenzen sind mit dem Rechnungspaket von van Leeuwen ausgerechnet. Die weitere Potenzen sind nach den Formel in §5 berechnet.

2.1.1  $\Pi_2$  von  $A_4$  ähnlich wie [ $\Pi_2$  und  $\Pi_3$  von  $A_4$  ;  $\Pi_4$  und  $\Pi_5$  von  $D_5$  ]

$$S^2\Pi_2 = \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^3\Pi_2 = \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4$$

$$S^4\Pi_2 = \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_4^2$$

$$S^5\Pi_2 = \Pi_2^5 + \Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2\Pi_4^2$$

$$S^6\Pi_2 = \Pi_2^6 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_4^2 + \Pi_4^3$$

$$S^7\Pi_2 = \Pi_2^7 + \Pi_2^5\Pi_4 + \Pi_2^3\Pi_4^2 + \Pi_2\Pi_4^3$$

$$S^8\Pi_2 = \Pi_2^8 + \Pi_2^6\Pi_4 + \Pi_2^4\Pi_4^2 + \Pi_2^2\Pi_4^3 + \Pi_4^4$$

$$S^9\Pi_2 = \Pi_2^9 + \Pi_2^7\Pi_4 + \Pi_2^5\Pi_4^2 + \Pi_2^3\Pi_4^3 + \Pi_2\Pi_4^4$$

$$S^{10}\Pi_2 = \Pi_2^{10} + \Pi_2^8\Pi_4 + \Pi_2^6\Pi_4^2 + \Pi_2^4\Pi_4^3 + \Pi_2^2\Pi_4^4 + \Pi_4^5$$

$$S^{11}\Pi_2 = \Pi_2^{11} + \Pi_2^9\Pi_4 + \Pi_2^7\Pi_4^2 + \Pi_2^5\Pi_4^3 + \Pi_2^3\Pi_4^4 + \Pi_2\Pi_4^5$$

$$S^{12}\Pi_2 = \Pi_2^{12} + \Pi_2^{10}\Pi_4 + \Pi_2^8\Pi_4^2 + \Pi_2^6\Pi_4^3 + \Pi_2^4\Pi_4^4 + \Pi_2^2\Pi_4^5 + \Pi_4^6$$

$$S^{13}\Pi_2 = \Pi_2^{13} + \Pi_2^{11}\Pi_4 + \Pi_2^9\Pi_4^2 + \Pi_2^7\Pi_4^3 + \Pi_2^5\Pi_4^4 + \Pi_2^3\Pi_4^5 + \Pi_2\Pi_4^6$$

Liste 2.1

2.1.2  $\Pi_2$  von  $A_5$  wie [  $\Pi_2, (\Pi_4)$  von  $A_5$  ;  $\Pi_1, (\Pi_5)$  von  $E_6$  ]

$$S^2\Pi_2 = \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^3\Pi_2 = \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4 + \Pi_0$$

$$S^4\Pi_2 = \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_4^2 + \Pi_2$$

$$S^5\Pi_2 = \Pi_2^5 + \Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^6\Pi_2 = \Pi_2^6 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_4^2 + \Pi_4^3 + \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4 + \Pi_0$$

$$S^7\Pi_2 = \Pi_2^7 + \Pi_2^5\Pi_4 + \Pi_2^3\Pi_4^2 + \Pi_2\Pi_4^3 + \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_4^2 + \Pi_2$$

$$S^8\Pi_2 = \Pi_2^8 + \Pi_2^6\Pi_4 + \Pi_2^4\Pi_4^2 + \Pi_2^2\Pi_4^3 + \Pi_4^4 + \Pi_2^5 + \Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^9\Pi_2 = \Pi_2^9 + \Pi_2^7\Pi_4 + \Pi_2^5\Pi_4^2 + \Pi_2^3\Pi_4^3 + \Pi_2\Pi_4^4 \\ + \Pi_2^6 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_4^2 + \Pi_4^3 + \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4 + \Pi_0$$

$$S^{10}\Pi_2 = \Pi_2^{10} + \Pi_2^8\Pi_4 + \Pi_2^6\Pi_4^2 + \Pi_2^4\Pi_4^3 + \Pi_2^2\Pi_4^4 + \Pi_4^5 \\ + \Pi_2^7 + \Pi_2^5\Pi_4 + \Pi_2^3\Pi_4^2 + \Pi_2\Pi_4^3 + \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_4^2 + \Pi_2$$

$$S^{11}\Pi_2 = \Pi_2^{11} + \Pi_2^9\Pi_4 + \Pi_2^7\Pi_4^2 + \Pi_2^5\Pi_4^3 + \Pi_2^3\Pi_4^4 + \Pi_2\Pi_4^5 \\ + \Pi_2^8 + \Pi_2^6\Pi_4 + \Pi_2^4\Pi_4^2 + \Pi_2^2\Pi_4^3 + \Pi_4^4 + \Pi_2^5 + \Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^{12}\Pi_2 = \Pi_2^{12} + \Pi_2^{10}\Pi_4 + \Pi_2^8\Pi_4^2 + \Pi_2^6\Pi_4^3 + \Pi_2^4\Pi_4^4 + \Pi_2^2\Pi_4^5 + \Pi_4^6 \\ + \Pi_2^9 + \Pi_2^7\Pi_4 + \Pi_2^5\Pi_4^2 + \Pi_2^3\Pi_4^3 + \Pi_2\Pi_4^4 + \Pi_2^6 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_4^2 + \Pi_4^3 \\ + \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4 + \Pi_0$$

$$S^{13}\Pi_2 = \Pi_2^{13} + \Pi_2^{11}\Pi_4 + \Pi_2^9\Pi_4^2 + \Pi_2^7\Pi_4^3 + \Pi_2^5\Pi_4^4 + \Pi_2^3\Pi_4^5 + \Pi_2\Pi_4^6 \\ + \Pi_2^{10} + \Pi_2^8\Pi_4 + \Pi_2^6\Pi_4^2 + \Pi_2^4\Pi_4^3 + \Pi_2^2\Pi_4^4 + \Pi_4^5 + \Pi_2^7 + \Pi_2^5\Pi_4 + \Pi_2^3\Pi_4^2 + \Pi_2\Pi_4^3 \\ + \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_4^2 + \Pi_2$$

## Liste 2.1

### 2.1.3 $\Pi_2$ von $A_6$

$$S^2\Pi_2 = \Pi_2^2 + \Pi_4$$

$$S^3\Pi_2 = \Pi_2^3 + \Pi_2\Pi_4 + \Pi_6$$

$$S^4\Pi_2 = \Pi_2^4 + \Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_2\Pi_6 + \Pi_4^2$$

$$S^5\Pi_2 = \Pi_2^5 + \Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_6 + \Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_4\Pi_6$$

$$S^6\Pi_2 = \Pi_2^6 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_2^2\Pi_4^2 + \Pi_4^3 + \Pi_2^3\Pi_6 + \Pi_6^2 + \Pi_2\Pi_4\Pi_6$$

$$S^7\Pi_2 = \Pi_2^7 + \Pi_2^5\Pi_4 + \Pi_2^3\Pi_4^2 + \Pi_2\Pi_4^3 + \Pi_2^4\Pi_6 + \Pi_2\Pi_6^2 + \Pi_2^2\Pi_4\Pi_6 + \Pi_4^2\Pi_6$$

$$S^8\Pi_2 = \Pi_2^8 + \Pi_2^6\Pi_4 + \Pi_2^4\Pi_4^2 + \Pi_2^2\Pi_4^3 + \Pi_4^4 + \Pi_2^5\Pi_6 + \Pi_2^2\Pi_6^2 + \Pi_2^3\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_4\Pi_6^2$$

$$S^9\Pi_2 = \Pi_2^9 + \Pi_2^7\Pi_4 + \Pi_2^5\Pi_4^2 + \Pi_2^3\Pi_4^3 + \Pi_2\Pi_4^4 + \Pi_2^6\Pi_6 + \Pi_2^3\Pi_6^2 + \Pi_6^3 \\ + \Pi_2^4\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2^2\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_4^3\Pi_6 + \Pi_2\Pi_4\Pi_6^2$$

$$S^{10}\Pi_2 = \Pi_2^{10} + \Pi_2^8\Pi_4 + \Pi_2^6\Pi_4^2 + \Pi_2^4\Pi_4^3 + \Pi_2^2\Pi_4^4 + \Pi_4^5 + \Pi_2^7\Pi_6 + \Pi_2^4\Pi_6^2 + \Pi_2\Pi_6^3 \\ + \Pi_2^5\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2^3\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_2\Pi_4^3\Pi_6 + \Pi_2^2\Pi_4\Pi_6^2 + \Pi_4^2\Pi_6^2$$

$$S^{11}\Pi_2 = \Pi_2^{11} + \Pi_2^9\Pi_4 + \Pi_2^7\Pi_4^2 + \Pi_2^5\Pi_4^3 + \Pi_2^3\Pi_4^4 + \Pi_2\Pi_4^5 + \Pi_2^8\Pi_6 + \Pi_2^5\Pi_6^2 + \Pi_2^2\Pi_6^3 \\ + \Pi_2^6\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2^4\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_2^2\Pi_4^3\Pi_6 + \Pi_4^4\Pi_6 + \Pi_2^3\Pi_4\Pi_6^2 + \Pi_2\Pi_4^2\Pi_6^2 + \Pi_4\Pi_6^3$$

$$S^{12}\Pi_2 = \Pi_2^{12} + \Pi_2^{10}\Pi_4 + \Pi_2^8\Pi_4^2 + \Pi_2^6\Pi_4^3 + \Pi_2^4\Pi_4^4 + \Pi_2^2\Pi_4^5 + \Pi_4^6 + \Pi_2^9\Pi_6 + \Pi_2^6\Pi_6^2 + \Pi_2^3\Pi_6^3 + \Pi_6^4 \\ + \Pi_2^7\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2^5\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_2^3\Pi_4^3\Pi_6 + \Pi_2\Pi_4^4\Pi_6 + \Pi_2^4\Pi_4\Pi_6^2 + \Pi_2^2\Pi_4^2\Pi_6^2 + \Pi_4^3\Pi_6^2 + \Pi_2\Pi_4\Pi_6^3$$

$$S^{13}\Pi_2 = \Pi_2^{13} + \Pi_2^{11}\Pi_4 + \Pi_2^9\Pi_4^2 + \Pi_2^7\Pi_4^3 + \Pi_2^5\Pi_4^4 + \Pi_2^3\Pi_4^5 + \Pi_2\Pi_4^6 + \Pi_2^{10}\Pi_6 + \Pi_2^7\Pi_6^2 + \Pi_2^4\Pi_6^3 + \Pi_2\Pi_6^4 \\ + \Pi_2^8\Pi_4\Pi_6 + \Pi_2^6\Pi_4^2\Pi_6 + \Pi_2^4\Pi_4^3\Pi_6 + \Pi_2^2\Pi_4^4\Pi_6 + \Pi_4^5\Pi_6 + \Pi_2^5\Pi_4\Pi_6^2 + \Pi_2^3\Pi_4^2\Pi_6^2 + \Pi_2^1\Pi_4^3\Pi_6^2 \\ + \Pi_2^2\Pi_4\Pi_6^3 + \Pi_4^2\Pi_6^3$$

Liste 2.1

2.1.4  $\Pi_3$  von  $A_5$  wie [  $\Pi_3$  von  $A_5$ ;  $\Pi_3$  von  $C_3$  ;  $\Pi_6, (\Pi_5)$  von  $D_6$ ;  $\Pi_1$  von  $E_7$  ]  
 $a = \Pi_3$   $b = \Pi_1 \Pi_5$   $c = \Pi_2 \Pi_4$

$$S^2 \Pi_3 = \Pi_3^2 + \Pi_1 \Pi_5$$

$$S^3 \Pi_3 = \Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3$$

$$S^4 \Pi_3 = \Pi_3^4 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) + (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_3^2 + \Pi_0$$

$$S^5 \Pi_3 = \Pi_3^5 + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3 (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3$$

$$S^6 \Pi_3 = \Pi_3^6 + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + (\Pi_1 \Pi_5)^3 + \Pi_3^2 (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) \\ + \Pi_3^4 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) + 2\Pi_3^2 + (\Pi_1 \Pi_5)$$

$$S^7 \Pi_3 = \Pi_3^7 + \Pi_3^5 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^3 + \Pi_3^3 (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) \\ + \Pi_3^5 + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3 (\Pi_2 \Pi_4) + 2\Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3$$

$$S^8 \Pi_3 = \Pi_3^8 + \Pi_3^6 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^3 + (\Pi_1 \Pi_5)^4 + \Pi_3^4 (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_2 \Pi_4)^2 \\ + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_1 \Pi_5)^2 (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3^6 + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_2 \Pi_4) \\ + 2\Pi_3^4 + 2\Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) + (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_3^2 + \Pi_0$$

$$S^9 \Pi_3 = \Pi_3^9 + \Pi_3^7 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^5 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5)^3 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^4 + \Pi_3^5 (\Pi_2 \Pi_4) \\ + \Pi_3^3 (\Pi_2 \Pi_4)^2 + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 (\Pi_2 \Pi_4) \\ + \Pi_3^7 + \Pi_3^5 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^3 + \Pi_3^3 (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) \\ + 2\Pi_3^5 + 2\Pi_3^3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3 (\Pi_2 \Pi_4) + 2\Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3$$

$$S^{10} \Pi_3 = \Pi_3^{10} + \Pi_3^8 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^6 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5)^3 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^4 + (\Pi_1 \Pi_5)^5 + \Pi_3^6 (\Pi_2 \Pi_4) \\ + \Pi_3^2 (\Pi_2 \Pi_4)^2 + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^2 (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_1 \Pi_5)^3 (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4)^2 \\ + \Pi_3^8 + \Pi_3^6 (\Pi_1 \Pi_5) + \Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^4 + \Pi_3^4 (\Pi_2 \Pi_4) + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) \\ + 2\Pi_3^6 + 2\Pi_3^4 (\Pi_1 \Pi_5) + 2\Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5)^2 + (\Pi_1 \Pi_5)^3 + 2\Pi_3^2 (\Pi_2 \Pi_4) + (\Pi_1 \Pi_5) (\Pi_2 \Pi_4) \\ + 2\Pi_3^4 + \Pi_3^2 (\Pi_1 \Pi_5) + 2\Pi_3^2 + (\Pi_1 \Pi_5)$$

$$\begin{aligned}
S^{11}\Pi_3 &= \Pi_3^{11} + \Pi_3^9(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^5 \\
&\quad + \Pi_3^7(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^3(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^3(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3^9 + \Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^2 \\
&\quad + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3^5(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) + 2\Pi_3^7 + 2\Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5) + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^3 \\
&\quad + 2\Pi_3^3(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + 2\Pi_3^5 + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^2 \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_2\Pi_4) + 2\Pi_3^3 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{12}\Pi_3 &= \Pi_3^{12} + \Pi_3^{10}(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^8(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^6(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^5 + (\Pi_1\Pi_5)^6 \\
&\quad + \Pi_3^8(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^4(\Pi_2\Pi_4)^2 + (\Pi_2\Pi_4)^3 + \Pi_3^6(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^3(\Pi_2\Pi_4) + (\Pi_1\Pi_5)^4(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4)^2 + (\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4)^2 \\
&\quad + (\Pi_1\Pi_5)^6 + \Pi_3^{10} + \Pi_3^8(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^6(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3^6(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3^2(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + 2\Pi_3^8 + 2\Pi_3^6(\Pi_1\Pi_5) + 2\Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5)^2 + 2\Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^3 + (\Pi_1\Pi_5)^4 + 2\Pi_3^4(\Pi_2\Pi_4) + (\Pi_2\Pi_4)^2 \\
&\quad + 2\Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + (\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) + 2\Pi_3^6 + 2\Pi_3^4(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^2(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + 3\Pi_3^4 + 2\Pi_3^2(\Pi_1\Pi_5) + (\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^2 + \Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{13}\Pi_3 &= \Pi_3^{13} + \Pi_3^{11}(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^9(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^5 \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^6 + \Pi_3^9(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^5(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3(\Pi_2\Pi_4)^3 + \Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^3(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^4(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4)^2 + \Pi_3^{11} + \Pi_3^9(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5)^2 \\
&\quad + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^4 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^5 + \Pi_3^7(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^3(\Pi_2\Pi_4)^2 \\
&\quad + \Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^3(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4)^2 \\
&\quad + 2\Pi_3^9 + 2\Pi_3^7(\Pi_1\Pi_5) + 2\Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5)^2 + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^3 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^4 \\
&\quad + 2\Pi_3^5(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_2\Pi_4)^2 + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^2(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + 2\Pi_3^7 + 2\Pi_3^5(\Pi_1\Pi_5) + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^3 + 2\Pi_3^3(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + 3\Pi_3^5 + 2\Pi_3^3(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5)^2 + \Pi_3(\Pi_2\Pi_4) \\
&\quad + 2\Pi_3^3 + \Pi_3(\Pi_1\Pi_5) + \Pi_3
\end{aligned}$$



## Liste 2.2

### 2.2.1 $\Pi_4$ von $B_4$

$$S^2\Pi_4 = \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^3\Pi_4 = \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

$$S^4\Pi_4 = \Pi_4^4 + \Pi_4^2\Pi_1 + \Pi_1^2 + \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^5\Pi_4 = \Pi_4^5 + \Pi_4^3\Pi_1 + \Pi_4\Pi_1^2 + \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

$$S^6\Pi_4 = \Pi_4^6 + \Pi_4^4\Pi_1 + \Pi_4^2\Pi_1^2 + \Pi_1^3 + \Pi_4^4 + \Pi_4^2\Pi_1 + \Pi_1^2 \\ + \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^7\Pi_4 = \Pi_4^7 + \Pi_4^5\Pi_1 + \Pi_4^3\Pi_1^2 + \Pi_4\Pi_1^3 + \Pi_4^5 + \Pi_4^3\Pi_1 + \Pi_4\Pi_1^2 \\ + \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

$$S^8\Pi_4 = \Pi_4^8 + \Pi_4^6\Pi_1 + \Pi_4^4\Pi_1^2 + \Pi_4^2\Pi_1^3 + \Pi_1^4 + \Pi_4^6 + \Pi_4^4\Pi_1 + \Pi_4^2\Pi_1^2 + \Pi_1^3 \\ + \Pi_4^4 + \Pi_4^2\Pi_1 + \Pi_1^2 + \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^9\Pi_4 = \Pi_4^9 + \Pi_4^7\Pi_1 + \Pi_4^5\Pi_1^2 + \Pi_4^3\Pi_1^3 + \Pi_4\Pi_1^4 + \Pi_4^7 + \Pi_4^5\Pi_1 + \Pi_4^3\Pi_1^2 + \Pi_4\Pi_1^3 \\ + \Pi_4^5 + \Pi_4^3\Pi_1 + \Pi_4\Pi_1^2 + \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

$$S^{10}\Pi_4 = \Pi_4^{10} + \Pi_4^8\Pi_1 + \Pi_4^6\Pi_1^2 + \Pi_4^4\Pi_1^3 + \Pi_4^2\Pi_1^4 + \Pi_1^5 \\ + \Pi_4^8 + \Pi_4^6\Pi_1 + \Pi_4^4\Pi_1^2 + \Pi_4^2\Pi_1^3 + \Pi_1^4 \\ + \Pi_4^6 + \Pi_4^4\Pi_1 + \Pi_4^2\Pi_1^2 + \Pi_1^3 + \Pi_4^4 + \Pi_4^2\Pi_1 + \Pi_1^2 + \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^{11}\Pi_4 = \Pi_4^{11} + \Pi_4^9\Pi_1 + \Pi_4^7\Pi_1^2 + \Pi_4^5\Pi_1^3 + \Pi_4^3\Pi_1^4 + \Pi_4\Pi_1^5 \\ + \Pi_4^9 + \Pi_4^7\Pi_1 + \Pi_4^5\Pi_1^2 + \Pi_4^3\Pi_1^3 + \Pi_4\Pi_1^4 \\ + \Pi_4^7 + \Pi_4^5\Pi_1 + \Pi_4^3\Pi_1^2 + \Pi_4\Pi_1^3 + \Pi_4^5 + \Pi_4^3\Pi_1 + \Pi_4\Pi_1^2 \\ + \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

$$S^{12}\Pi_4 = \Pi_4^{12} + \Pi_4^{10}\Pi_1 + \Pi_4^8\Pi_1^2 + \Pi_4^6\Pi_1^3 + \Pi_4^4\Pi_1^4 + \Pi_4^2\Pi_1^5 + \Pi_1^6 \\ + \Pi_4^{10} + \Pi_4^8\Pi_1 + \Pi_4^6\Pi_1^2 + \Pi_4^4\Pi_1^3 + \Pi_4^2\Pi_1^4 + \Pi_1^5 \\ + \Pi_4^8 + \Pi_4^6\Pi_1 + \Pi_4^4\Pi_1^2 + \Pi_4^2\Pi_1^3 + \Pi_1^4 + \Pi_4^6 + \Pi_4^4\Pi_1 + \Pi_4^2\Pi_1^2 + \Pi_1^3 \\ + \Pi_4^4 + \Pi_4^2\Pi_1 + \Pi_1^2 + \Pi_4^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^{13}\Pi_4 = \Pi_4^{13} + \Pi_4^{11}\Pi_1 + \Pi_4^9\Pi_1^2 + \Pi_4^7\Pi_1^3 + \Pi_4^5\Pi_1^4 + \Pi_4^3\Pi_1^5 + \Pi_4\Pi_1^6 \\ + \Pi_4^{11} + \Pi_4^9\Pi_1 + \Pi_4^7\Pi_1^2 + \Pi_4^5\Pi_1^3 + \Pi_4^3\Pi_1^4 + \Pi_4\Pi_1^5 \\ + \Pi_4^9 + \Pi_4^7\Pi_1 + \Pi_4^5\Pi_1^2 + \Pi_4^3\Pi_1^3 + \Pi_4\Pi_1^4 + \Pi_4^7 + \Pi_4^5\Pi_1 + \Pi_4^3\Pi_1^2 + \Pi_4\Pi_1^3 \\ + \Pi_4^5 + \Pi_4^3\Pi_1 + \Pi_4\Pi_1^2 + \Pi_4^3 + \Pi_4\Pi_1 + \Pi_4$$

Liste 2.3

2.3.1  $\Pi_3$  von  $C_3$  wie [  $\Pi_3$  von  $A_5$ ;  $\Pi_3$  von  $C_3$  ;  $\Pi_6, (\Pi_5)$  von  $D_6$ ;  $\Pi_1$  von  $E_7$  ]  
 $a = \Pi_3$   $b = \Pi_1^2$   $c = \Pi_2^2$

$$S^2 \Pi_3 = \Pi_3^2 + \Pi_1^2$$

$$S^3 \Pi_3 = \Pi_3^3 + \Pi_3 \Pi_1^2 + \Pi_3$$

$$S^4 \Pi_3 = \Pi_3^4 + \Pi_3^2 \Pi_1^2 + (\Pi_1^2) + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 + \Pi_0$$

$$S^5 \Pi_3 = \Pi_3^5 + \Pi_3^3 (\Pi_1^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3 (\Pi_2^2) + \Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1^2) \\ + \Pi_3$$

$$S^6 \Pi_3 = \Pi_3^6 + \Pi_3^4 (\Pi_1^2) + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_2^2) + (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) + (\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^4 + \Pi_3^2 (\Pi_1^2) \\ + 2\Pi_3^2 + \Pi_1^2$$

$$S^7 \Pi_3 = \Pi_3^7 + \Pi_3^5 (\Pi_1^2) + \Pi_3^3 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3 (\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^3 (\Pi_2^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) \\ + \Pi_3^5 + \Pi_3^3 (\Pi_1^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3 (\Pi_2^2) \\ + 2\Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1^2) + \Pi_3$$

$$S^8 \Pi_3 = \Pi_3^8 + \Pi_3^6 (\Pi_1^2) + \Pi_3^4 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^3 + (\Pi_1^2)^4 + \Pi_3^4 (\Pi_2^2) + (\Pi_2^2)^2 \\ + \Pi_3^2 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) + (\Pi_1^2)^2 (\Pi_2^2) + \Pi_3^6 + \Pi_3^4 (\Pi_1^2) + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_2^2) \\ + 2\Pi_3^4 + 2\Pi_3^2 (\Pi_1^2) + (\Pi_1^2)^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 + \Pi_0$$

$$S^9 \Pi_3 = \Pi_3^9 + \Pi_3^7 (\Pi_1^2) + \Pi_3^5 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^3 (\Pi_1^2)^3 + \Pi_3 (\Pi_1^2)^4 + \Pi_3^5 (\Pi_2^2) + \Pi_3 (\Pi_2^2)^2 \\ + \Pi_3^3 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2)^2 (\Pi_2^2) + \Pi_3^7 + \Pi_3^5 (\Pi_1^2) + \Pi_3^3 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3 (\Pi_1^2)^3 \\ + \Pi_3^3 (\Pi_2^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) \\ + 2\Pi_3^5 + 2\Pi_3^3 (\Pi_1^2) + \Pi_3 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3 \Pi_2^2 + 2\Pi_3^3 + \Pi_3 (\Pi_1^2) + \Pi_3$$

$$S^{10} \Pi_3 = \Pi_3^{10} + \Pi_3^8 (\Pi_1^2) + \Pi_3^6 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^4 (\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^4 + (\Pi_1^2)^5 + \Pi_3^6 (\Pi_2^2) \\ + \Pi_3^2 (\Pi_2^2)^2 + \Pi_3^4 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^2 (\Pi_2^2) + (\Pi_1^2)^3 (\Pi_2^2) + \Pi_1^2 (\Pi_2^2)^2 \\ + \Pi_3^8 + \Pi_3^6 (\Pi_1^2) + \Pi_3^4 (\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^2 (\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^4 (\Pi_2^2) + \Pi_3^2 (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) \\ + 2\Pi_3^6 + 2\Pi_3^4 (\Pi_1^2) + 2\Pi_3^2 (\Pi_1^2)^2 + (\Pi_1^2)^3 + 2\Pi_3^2 (\Pi_2^2) + (\Pi_1^2) (\Pi_2^2) \\ + 2\Pi_3^4 + \Pi_3^2 (\Pi_1^2) + 2\Pi_3^2 + \Pi_1^2$$

$$\begin{aligned}
S^{11}\Pi_3 &= \Pi_3^{11} + \Pi_3^9(\Pi_1^2) + \Pi_3^7(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^4 + \Pi_3(\Pi_1^2)^5 + \Pi_3^7(\Pi_2^2) \\
&+ \Pi_3^3(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^3(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2)^2 \\
&+ \Pi_3^9 + \Pi_3^7(\Pi_1^2) + \Pi_3^5(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3(\Pi_1^2)^4 + \Pi_3^5(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_2^2)^2 \\
&+ \Pi_3^3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) \\
&+ 2\Pi_3^7 + 2\Pi_3^5(\Pi_1^2) + 2\Pi_3^3(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3(\Pi_1^2)^3 + 2\Pi_3^3(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + 2\Pi_3^5 \\
&+ 2\Pi_3^3(\Pi_1^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3(\Pi_2^2) + 2\Pi_3^3 + \Pi_3(\Pi_1^2) + \Pi_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{12}\Pi_3 &= \Pi_3^{12} + \Pi_3^{10}(\Pi_1^2) + \Pi_3^8(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^6(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^4(\Pi_1^2)^4 + \Pi_3^2(\Pi_1^2)^5 + (\Pi_1^2)^6 + \Pi_3^8(\Pi_2^2) \\
&+ \Pi_3^4(\Pi_2^2)^2 + (\Pi_2^2)^3 + \Pi_3^6(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3^4(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) + \Pi_3^2(\Pi_1^2)^3(\Pi_2^2) + (\Pi_1^2)^4(\Pi_2^2) \\
&+ \Pi_3^2(\Pi_1^2)(\Pi_2^2)^2 + (\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3^{10} + \Pi_3^8(\Pi_1^2) + \Pi_3^6(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^4(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^2(\Pi_1^2)^4 \\
&+ \Pi_3^6(\Pi_2^2) + \Pi_3^2(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3^4(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3^2(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) \\
&+ 2\Pi_3^8 + 2\Pi_3^6(\Pi_1^2) + 2\Pi_3^4(\Pi_1^2)^2 + 2\Pi_3^2(\Pi_1^2)^3 + (\Pi_1^2)^4 + 2\Pi_3^4(\Pi_2^2) + (\Pi_2^2)^2 + 2\Pi_3^2(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) \\
&+ (\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) + 2\Pi_3^6 + 2\Pi_3^4(\Pi_1^2) + \Pi_3^2(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^2(\Pi_2^2) \\
&+ 3\Pi_3^4 + 2\Pi_3^2(\Pi_1^2) + (\Pi_1^2)^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 + \Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{13}\Pi_3 &= \Pi_3^{13} + \Pi_3^{11}(\Pi_1^2) + \Pi_3^9(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^7(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^5(\Pi_1^2)^4 + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^5 + \Pi_3(\Pi_1^2)^6 \\
&+ \Pi_3^9(\Pi_2^2) + \Pi_3^5(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3(\Pi_2^2)^3 + \Pi_3^7(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3^5(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) \\
&+ \Pi_3^3(\Pi_1^2)^3(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^4(\Pi_2^2) + \Pi_3^3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2)^2 \\
&+ \Pi_3^{11} + \Pi_3^9(\Pi_1^2) + \Pi_3^7(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^4 + \Pi_3(\Pi_1^2)^5 \\
&+ \Pi_3^7(\Pi_2^2) + \Pi_3^3(\Pi_2^2)^2 + \Pi_3^5(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3^3(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^3(\Pi_2^2) \\
&+ \Pi_3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2)^2 \\
&+ 2\Pi_3^9 + 2\Pi_3^7(\Pi_1^2) + 2\Pi_3^5(\Pi_1^2)^2 + 2\Pi_3^3(\Pi_1^2)^3 + \Pi_3(\Pi_1^2)^4 + 2\Pi_3^5(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_2^2)^2 \\
&+ 2\Pi_3^3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^2(\Pi_2^2) + 2\Pi_3^7 + 2\Pi_3^5(\Pi_1^2) + 2\Pi_3^3(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3(\Pi_1^2)^3 \\
&+ 2\Pi_3^3(\Pi_2^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)(\Pi_2^2) \\
&+ 3\Pi_3^5 + 2\Pi_3^3(\Pi_1^2) + \Pi_3(\Pi_1^2)^2 + \Pi_3(\Pi_2^2) + 2\Pi_3^3 + \Pi_3(\Pi_1^2) + \Pi_3
\end{aligned}$$

## Liste 2

2.3.2  $\Pi_2$  von  $C_3$  wie [ $\Pi_2$  von  $C_3$ ;  $\Pi_1$  von  $F_4$ ;  $\Pi_1 \Pi_2$  von  $A_2$ ]

$$S^2 \Pi_2 = \Pi_2^2 + \Pi_2 + \Pi_0$$

$$S^3 \Pi_2 = \Pi_2^3 + \Pi_1 \Pi_3 + \Pi_2^2 + \Pi_2 + \Pi_0$$

$$S^4 \Pi_2 = \Pi_2^4 + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^3 + 2\Pi_2^2 + 2\Pi_2 + \Pi_0$$

$$S^5 \Pi_2 = \Pi_2^5 + \Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^4 + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) \\ + 2\Pi_2^3 + \Pi_1 \Pi_3 + 2\Pi_2^2 + 2\Pi_2 + \Pi_0$$

$$S^6 \Pi_2 = \Pi_2^6 + \Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3) + (\Pi_1 \Pi_3)^2 + \Pi_2^5 + \Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) \\ + 2\Pi_2^4 + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + 3\Pi_2^3 + \Pi_1 \Pi_3 + 3\Pi_2^2 + 2\Pi_2 + 2\Pi_0$$

$$S^7 \Pi_2 = \Pi_2^7 + \Pi_2^4 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 + \Pi_2^6 + \Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3) + 2\Pi_2^5 + 2\Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) \\ + 3\Pi_2^4 + 2\Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + 3\Pi_2^3 + \Pi_1 \Pi_3 + 3\Pi_2^2 + 3\Pi_2 + \Pi_0$$

$$S^8 \Pi_2 = \Pi_2^8 + \Pi_2^5 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + \Pi_2^7 + \Pi_2^4 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 2\Pi_2^6 + 2\Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3) + (\Pi_1 \Pi_3)^2 + 3\Pi_2^5 + 2\Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) \\ + 4\Pi_2^4 + 2\Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + 4\Pi_2^3 + (\Pi_1 \Pi_3) + 4\Pi_2^2 + 3\Pi_2 + 2\Pi_0$$

$$S^9 \Pi_2 = \Pi_2^9 + \Pi_2^6 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3)^2 + (\Pi_1 \Pi_3)^3 \\ + \Pi_2^8 + \Pi_2^5 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 2\Pi_2^7 + 2\Pi_2^4 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 + 3\Pi_2^6 + 3\Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3) + (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 4\Pi_2^5 + 3\Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) + 4\Pi_2^4 + 2\Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + 5\Pi_2^3 + 2(\Pi_1 \Pi_3) \\ + 4\Pi_2^2 + 3\Pi_2 + 2\Pi_0$$

$$S^{10} \Pi_2 = \Pi_2^{10} + \Pi_2^7 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^4 (\Pi_1 \Pi_3)^2 + \Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3)^3 \\ + \Pi_2^9 + \Pi_2^6 (\Pi_1 \Pi_3) + \Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 2\Pi_2^8 + 2\Pi_2^5 (\Pi_1 \Pi_3) + 2\Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 3\Pi_2^7 + 3\Pi_2^4 (\Pi_1 \Pi_3) + 2\Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3)^2 \\ + 4\Pi_2^6 + 3\Pi_2^3 (\Pi_1 \Pi_3) + (\Pi_1 \Pi_3)^2 + 5\Pi_2^5 + 3\Pi_2^2 (\Pi_1 \Pi_3) \\ + 6\Pi_2^4 + 3\Pi_2 (\Pi_1 \Pi_3) + 5\Pi_2^3 + (\Pi_1 \Pi_3) + 5\Pi_2^2 + 4\Pi_2 + 2\Pi_0$$

$$\begin{aligned}
S^{11}\Pi_2 &= \Pi_2^{11} + \Pi_2^8(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ \Pi_2^{10} + \Pi_2^7(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 2\Pi_2^9 + 2\Pi_2^6(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3)^2 + (\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 3\Pi_2^8 + 3\Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^2 \\
&+ 4\Pi_2^7 + 4\Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^2 + 5\Pi_2^6 + 4\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3) + (\Pi_1\Pi_3)^2 \\
&+ 6\Pi_2^5 + 4\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3) + 6\Pi_2^4 + 3\Pi_2(\Pi_1\Pi_3) \\
&+ 6\Pi_2^3 + 2(\Pi_1\Pi_3) + 5\Pi_2^2 + 4\Pi_2 + 2\Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{12}\Pi_2 &= \Pi_2^{12} + \Pi_2^9(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^6(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3)^3 + (\Pi_1\Pi_3)^4 \\
&+ \Pi_2^{11} + \Pi_2^8(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 2\Pi_2^{10} + 2\Pi_2^7(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 3\Pi_2^9 + 3\Pi_2^6(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3)^2 + (\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 4\Pi_2^8 + 4\Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^2 + 5\Pi_2^7 + 4\Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^2 \\
&+ 7\Pi_2^6 + 5\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3) + 2(\Pi_1\Pi_3)^2 + 7\Pi_2^5 + 4\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3) \\
&+ 7\Pi_2^4 + 3\Pi_2(\Pi_1\Pi_3) + 7\Pi_2^3 + 2(\Pi_1\Pi_3) + 6\Pi_2^2 + 4\Pi_2 + 3\Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{13}\Pi_2 &= \Pi_2^{13} + \Pi_2^{10}(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^7(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3)^3 + \Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^4 \\
&+ \Pi_2^{12} + \Pi_2^9(\Pi_1\Pi_3) + \Pi_2^6(\Pi_1\Pi_3)^2 + \Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 2\Pi_2^{11} + 2\Pi_2^8(\Pi_1\Pi_3) + 2\Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3)^2 + 2\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 3\Pi_2^{10} + 3\Pi_2^7(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3)^2 + 2\Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 4\Pi_2^9 + 4\Pi_2^6(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3)^2 + (\Pi_1\Pi_3)^3 \\
&+ 5\Pi_2^8 + 5\Pi_2^5(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3)^2 \\
&+ 7\Pi_2^7 + 6\Pi_2^4(\Pi_1\Pi_3) + 3\Pi_2(\Pi_1\Pi_3)^2 + 7\Pi_2^6 + 5\Pi_2^3(\Pi_1\Pi_3) + (\Pi_1\Pi_3)^2 \\
&+ 8\Pi_2^5 + 5\Pi_2^2(\Pi_1\Pi_3) + 8\Pi_2^4 + 4\Pi_2(\Pi_1\Pi_3) + 7\Pi_2^3 + 2(\Pi_1\Pi_3) + 6\Pi_2^2 + 5\Pi_2 + 2\Pi_0
\end{aligned}$$

Liste 2.4

2.4.1  $\Pi_6$  von  $D_6$  wie [  $\Pi_3$  von  $A_5$ ;  $\Pi_3$  von  $C_3$ ;  $\Pi_6, (\Pi_5)$  von  $D_6$ ;  $\Pi_1$  von  $E_7$  ]  
 $a = \Pi_6$   $b = \Pi_2$   $c = \Pi_4$

$$S^2 \Pi_6 = \Pi_6^2 + \Pi_2$$

$$S^3 \Pi_6 = \Pi_6^3 + \Pi_6 \Pi_2 + \Pi_6$$

$$S^4 \Pi_6 = \Pi_6^4 + \Pi_6^2 \Pi_2 + \Pi_2^2 + \Pi_4 + \Pi_6^2 + \Pi_0$$

$$S^5 \Pi_6 = \Pi_6^5 + \Pi_6^3 \Pi_2 + \Pi_6 \Pi_2^2 + \Pi_6 \Pi_4 + \Pi_6^3 + \Pi_2 \Pi_6 + \Pi_6$$

$$S^6 \Pi_6 = \Pi_6^6 + \Pi_6^4 \Pi_2 + \Pi_6^2 \Pi_2^2 + \Pi_2^3 + \Pi_6^2 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_6^4 + \Pi_6^2 \Pi_2 \\ + 2\Pi_6^2 + \Pi_2$$

$$S^7 \Pi_6 = \Pi_6^7 + \Pi_6^5 \Pi_2 + \Pi_6^3 \Pi_2^2 + \Pi_6 \Pi_2^3 + \Pi_6^3 \Pi_4 + \Pi_6 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_6^5 + \Pi_6^3 \Pi_2 + \Pi_6 \Pi_2^2 + \Pi_6 \Pi_4 \\ + 2\Pi_6^3 + \Pi_6 \Pi_2 + \Pi_6$$

$$S^8 \Pi_6 = \Pi_6^8 + \Pi_6^6 \Pi_2 + \Pi_6^4 \Pi_2^2 + \Pi_6^2 \Pi_2^3 + \Pi_2^4 + \Pi_6^4 \Pi_4 + \Pi_2^4 + \Pi_6^2 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_2^2 \Pi_4 \\ + \Pi_6^6 + \Pi_6^4 \Pi_2 + \Pi_6^2 \Pi_2^2 + \Pi_6^2 \Pi_4 \\ + 2\Pi_6^4 + 2\Pi_6^2 \Pi_2 + \Pi_2^2 + \Pi_4 + \Pi_6^2 + \Pi_0$$

$$S^9 \Pi_6 = \Pi_6^9 + \Pi_6^7 \Pi_2 + \Pi_6^5 \Pi_2^2 + \Pi_6^3 \Pi_2^3 + \Pi_6 \Pi_2^4 + \Pi_6^5 \Pi_4 + \Pi_6 \Pi_4^2 + \Pi_6^3 \Pi_2 \Pi_4 \\ + \Pi_6 \Pi_2^2 \Pi_4 + \Pi_6^7 + \Pi_6^5 \Pi_2 + \Pi_6^3 \Pi_2^2 + \Pi_6 \Pi_2^3 + \Pi_6^3 \Pi_4 + \Pi_6 \Pi_2 \Pi_4 \\ + 2\Pi_6^5 + 2\Pi_6^3 \Pi_2 + \Pi_6 \Pi_2^2 + \Pi_6 \Pi_4 + 2\Pi_6^3 + \Pi_6 \Pi_2 + \Pi_6$$

$$S^{10} \Pi_6 = \Pi_6^{10} + \Pi_6^8 \Pi_2 + \Pi_6^6 \Pi_2^2 + \Pi_6^4 \Pi_2^3 + \Pi_6^2 \Pi_2^4 + \Pi_2^5 + \Pi_6^6 \Pi_4 + \Pi_6^2 \Pi_4^2 + \Pi_6^4 \Pi_2 \Pi_4 + \Pi_6^2 \Pi_2^2 \Pi_4 \\ + \Pi_2^3 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_4^2 + \Pi_6^8 + \Pi_6^6 \Pi_2 + \Pi_6^4 \Pi_2^2 + \Pi_2^2 \Pi_2^3 + \Pi_6^4 \Pi_4 + \Pi_6^2 \Pi_2 \Pi_4 \\ + 2\Pi_6^6 + 2\Pi_6^4 \Pi_2 + 2\Pi_6^2 \Pi_2^2 + \Pi_2^2 + 2\Pi_6^2 \Pi_4 + \Pi_2 \Pi_4 + 2\Pi_6^4 + \Pi_6^2 \Pi_2 \\ + 2\Pi_6^2 + \Pi_2$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{11}\Pi_6 &= \Pi_6^{11} + \Pi_6^9\Pi_2 + \Pi_6^7\Pi_2^2 + \Pi_6^5\Pi_2^3 + \Pi_6^3\Pi_2^4 + \Pi_6\Pi_2^5 + \Pi_6^7\Pi_4 + \Pi_6^3\Pi_2^2 + \Pi_6^5\Pi_2\Pi_4 \\
&+ \Pi_6^3\Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_6^9 + \Pi_6^7\Pi_2 + \Pi_6^5\Pi_2^2 + \Pi_6^3\Pi_2^3 + \Pi_6\Pi_2^4 + \Pi_6^5\Pi_4 \\
&+ \Pi_6\Pi_4^2 + \Pi_6^3\Pi_2\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2^2\Pi_4 \\
&+ 2\Pi_6^7 + 2\Pi_6^5\Pi_2 + 2\Pi_6^3\Pi_2^2 + \Pi_6\Pi_2^3 + 2\Pi_6^3\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2\Pi_4 + 2\Pi_6^5 + 2\Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_6\Pi_4 \\
&+ 2\Pi_6^3 + \Pi_6\Pi_2 + \Pi_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{12}\Pi_6 &= \Pi_6^{12} + \Pi_6^{10}\Pi_2 + \Pi_6^8\Pi_2^2 + \Pi_6^6\Pi_2^3 + \Pi_6^4\Pi_2^4 + \Pi_6^2\Pi_2^5 + \Pi_6^6 + \Pi_6^8\Pi_4 \\
&+ \Pi_6^4\Pi_4^2 + \Pi_6^3 + \Pi_6^6\Pi_2\Pi_4 + \Pi_6^4\Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_6^2\Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_6^2\Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_2^2\Pi_4^2 \\
&+ \Pi_6^{10} + \Pi_6^8\Pi_2 + \Pi_6^6\Pi_2^2 + \Pi_6^4\Pi_2^3 + \Pi_6^2\Pi_2^4 + \Pi_6^6\Pi_4 + \Pi_6^2\Pi_4^2 + \Pi_6^4\Pi_2\Pi_4 + \Pi_6^2\Pi_2^2\Pi_4 \\
&+ 2\Pi_6^8 + 2\Pi_6^6\Pi_2 + 2\Pi_6^4\Pi_2^2 + 2\Pi_2^2\Pi_2^3 + \Pi_2^4 + 2\Pi_6^4\Pi_4 + \Pi_4^2 + 2\Pi_6^2\Pi_2\Pi_4 \\
&+ \Pi_2^2\Pi_4 + 2\Pi_6^6 + 2\Pi_6^4\Pi_2 + \Pi_6^2\Pi_2^2 + \Pi_6^2\Pi_4 \\
&+ 3\Pi_6^4 + 2\Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_2^2 + \Pi_4 + \Pi_6^2 + \Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{13}\Pi_6 &= \Pi_6^{13} + \Pi_6^{11}\Pi_2 + \Pi_6^9\Pi_2^2 + \Pi_6^7\Pi_2^3 + \Pi_6^5\Pi_2^4 + \Pi_6^3\Pi_2^5 + \Pi_6\Pi_2^6 + \Pi_6^9\Pi_4 + \Pi_6^5\Pi_4^2 \\
&+ \Pi_6\Pi_4^3 + \Pi_6^7\Pi_2\Pi_4 + \Pi_6^5\Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_6^3\Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2^4\Pi_4 + \Pi_6^3\Pi_2\Pi_4^2 + \Pi_6\Pi_2^2\Pi_6^2 \\
&+ \Pi_6^{11} + \Pi_6^9\Pi_2 + \Pi_6^7\Pi_2^2 + \Pi_6^5\Pi_2^3 + \Pi_6^3\Pi_2^4 + \Pi_6\Pi_2^5 + \Pi_6^7\Pi_4 + \Pi_6^3\Pi_4^2 + \Pi_6^5\Pi_2\Pi_4 \\
&+ \Pi_6^3\Pi_2^2\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2^3\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2\Pi_4^2 \\
&+ 2\Pi_6^9 + 2\Pi_6^7\Pi_2 + 2\Pi_6^5\Pi_2^2 + 2\Pi_6^3\Pi_2^3 + \Pi_6\Pi_2^4 + 2\Pi_6^5\Pi_4 + \Pi_6\Pi_4^2 + 2\Pi_6^3\Pi_2\Pi_4 \\
&+ \Pi_6\Pi_2^2\Pi_4 + 2\Pi_6^7 + 2\Pi_6^5\Pi_2 + 2\Pi_6^3\Pi_2^2 + \Pi_6\Pi_2^3 + 2\Pi_6^3\Pi_4 + \Pi_6\Pi_2\Pi_4 \\
&+ 3\Pi_6^5 + 2\Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_6\Pi_4 + 2\Pi_6^3 + \Pi_6\Pi_2 + \Pi_6
\end{aligned}$$

## Liste 2

2.4.2  $\Pi_5$  von  $D_5$  ähnlich wie [ $\Pi_2$  und  $\Pi_3$  von  $A_4$  ;  $\Pi_4$  und  $\Pi_5$  von  $D_5$  ]

$$S^2\Pi_5 = \Pi_5^2 + \Pi_1$$

$$S^3\Pi_5 = \Pi_5^3 + \Pi_5\Pi_1$$

$$S^4\Pi_5 = \Pi_5^4 + \Pi_5^2\Pi_1 + \Pi_1^2$$

$$S^5\Pi_5 = \Pi_5^5 + \Pi_5^3\Pi_1 + \Pi_5\Pi_1^2$$

$$S^6\Pi_5 = \Pi_5^6 + \Pi_5^4\Pi_1 + \Pi_1^2\Pi_1^2 + \Pi_1^3$$

$$S^7\Pi_5 = \Pi_5^7 + \Pi_5^5\Pi_1 + \Pi_5^3\Pi_1^2 + \Pi_5\Pi_1^3$$

$$S^8\Pi_5 = \Pi_5^8 + \Pi_5^6\Pi_1 + \Pi_5^4\Pi_1^2 + \Pi_5^2\Pi_1^3 + \Pi_1^4$$

$$S^9\Pi_5 = \Pi_5^9 + \Pi_5^7\Pi_1 + \Pi_5^5\Pi_1^2 + \Pi_5^3\Pi_1^3 + \Pi_5\Pi_1^4$$

$$S^{10}\Pi_5 = \Pi_5^{10} + \Pi_5^8\Pi_1 + \Pi_5^6\Pi_1^2 + \Pi_5^4\Pi_1^3 + \Pi_5^2\Pi_1^4 + \Pi_1^5$$

$$S^{11}\Pi_5 = \Pi_5^{11} + \Pi_5^9\Pi_1 + \Pi_5^7\Pi_1^2 + \Pi_5^5\Pi_1^3 + \Pi_5^3\Pi_1^4 + \Pi_5\Pi_1^5$$

$$S^{12}\Pi_5 = \Pi_5^{12} + \Pi_5^{10}\Pi_1 + \Pi_5^8\Pi_1^2 + \Pi_5^6\Pi_1^3 + \Pi_5^4\Pi_1^4 + \Pi_5^2\Pi_1^5 + \Pi_1^6$$

$$S^{13}\Pi_5 = \Pi_5^{13} + \Pi_5^{11}\Pi_1 + \Pi_5^9\Pi_1^2 + \Pi_5^7\Pi_1^3 + \Pi_5^5\Pi_1^4 + \Pi_5^3\Pi_1^5 + \Pi_5\Pi_1^6$$



2.5.1  $\Pi_1$  von  $F_4$  wie [  $\Pi_1$  von  $F_4$  ;  $\Pi_2$  von  $C_3$  ,  $\Pi_1 \Pi_2$  von  $A_2$  ]

$$S^2 \Pi_1 = \Pi_1^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^3 \Pi_1 = \Pi_1^3 + \Pi_2 + \Pi_1^2 + \Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^4 \Pi_1 = \Pi_1^4 + \Pi_1 \Pi_2 + \Pi_1^3 + 2\Pi_1^2 + 2\Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^5 \Pi_1 = \Pi_1^5 + \Pi_1^2 \Pi_2 + \Pi_1^4 + \Pi_1 \Pi_2 + 2\Pi_1^3 + \Pi_2 + 2\Pi_1^2 + 2\Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^6 \Pi_1 = \Pi_1^6 + \Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 + \Pi_1^5 + \Pi_1^2 \Pi_2 \\ + 2\Pi_1^4 + \Pi_1 \Pi_2 + 3\Pi_1^3 + \Pi_2 + 3\Pi_1^2 + 2\Pi_1 + 2\Pi_0$$

$$S^7 \Pi_1 = \Pi_1^7 + \Pi_1^4 \Pi_2 + \Pi_1 \Pi_2^2 + \Pi_1^6 + \Pi_1^3 \Pi_2 + 2\Pi_1^5 + 2\Pi_1^2 \Pi_2 \\ + 3\Pi_1^4 + 2\Pi_1 \Pi_2 + 3\Pi_1^3 + \Pi_2 + 3\Pi_1^2 + 3\Pi_1 + \Pi_0$$

$$S^8 \Pi_1 = \Pi_1^8 + \Pi_1^5 \Pi_2 + \Pi_1^2 \Pi_2^2 + \Pi_1^7 + \Pi_1^4 \Pi_2 + \Pi_1 \Pi_2^2 \\ + 2\Pi_1^6 + 2\Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 + 3\Pi_1^5 + 2\Pi_1^2 \Pi_2 + 4\Pi_1^4 + 2\Pi_1 \Pi_2 \\ + 4\Pi_1^3 + \Pi_2 + 4\Pi_1^2 + 3\Pi_1 + 2\Pi_0$$

$$S^9 \Pi_1 = \Pi_1^9 + \Pi_1^6 \Pi_2 + \Pi_1^3 \Pi_2^2 + \Pi_2^3 + \Pi_1^8 + \Pi_1^5 \Pi_2 + \Pi_1^2 \Pi_2^2 \\ + 2\Pi_1^7 + 2\Pi_1^4 \Pi_2 + \Pi_1 \Pi_2^2 + 3\Pi_1^6 + 3\Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 + 4\Pi_1^5 + 3\Pi_1^2 \Pi_2 \\ + 4\Pi_1^4 + 2\Pi_1 \Pi_2 + 5\Pi_1^3 + 2\Pi_2 + 4\Pi_1^2 + 3\Pi_1 + 2\Pi_0$$

$$S^{10} \Pi_1 = \Pi_1^{10} + \Pi_1^7 \Pi_2 + \Pi_1^4 \Pi_2^2 + \Pi_1 \Pi_2^3 + \Pi_1^9 + \Pi_1^6 \Pi_2 + \Pi_1^3 \Pi_2^2 + 2\Pi_1^8 + 2\Pi_1^5 \Pi_2 \\ + 2\Pi_1^2 \Pi_2^2 + 3\Pi_1^7 + 3\Pi_1^4 \Pi_2 + 2\Pi_1 \Pi_2^2 + 4\Pi_1^6 + 3\Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 \\ + 5\Pi_1^5 + 3\Pi_1^2 \Pi_2 + 6\Pi_1^4 + 3\Pi_1 \Pi_2 + 5\Pi_1^3 + \Pi_2 + 5\Pi_1^2 + 4\Pi_1 + 2\Pi_0$$

$$S^{11} \Pi_1 = \Pi_1^{11} + \Pi_1^8 \Pi_2 + \Pi_1^5 \Pi_2^2 + \Pi_1^2 \Pi_2^3 + \Pi_1^{10} + \Pi_1^7 \Pi_2 + \Pi_1^4 \Pi_2^2 + \Pi_1 \Pi_2^3 \\ + 2\Pi_1^9 + 2\Pi_1^6 \Pi_2 + 2\Pi_1^3 \Pi_2^2 + \Pi_2^3 + 3\Pi_1^8 + 3\Pi_1^5 \Pi_2 + 2\Pi_1^2 \Pi_2^2 \\ + 4\Pi_1^7 + 4\Pi_1^4 \Pi_2 + 2\Pi_1 \Pi_2^2 + 5\Pi_1^6 + 4\Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 + 6\Pi_1^5 + 4\Pi_1^2 \Pi_2 \\ + 6\Pi_1^4 + 3\Pi_1 \Pi_2 + 6\Pi_1^3 + 2\Pi_2 + 5\Pi_1^2 + 4\Pi_1 + 2\Pi_0$$

$$S^{12} \Pi_1 = \Pi_1^{12} + \Pi_1^9 \Pi_2 + \Pi_1^6 \Pi_2^2 + \Pi_1^3 \Pi_2^3 + \Pi_2^4 + \Pi_1^{11} + \Pi_1^8 \Pi_2 + \Pi_1^5 \Pi_2^2 + \Pi_1^2 \Pi_2^3 \\ + 2\Pi_1^{10} + 2\Pi_1^7 \Pi_2 + 2\Pi_1^4 \Pi_2^2 + \Pi_1 \Pi_2^3 + 3\Pi_1^9 + 3\Pi_1^6 \Pi_2 + 3\Pi_1^3 \Pi_2^2 + \Pi_2^3 \\ + 4\Pi_1^8 + 4\Pi_1^5 \Pi_2 + 3\Pi_1^2 \Pi_2^2 + 5\Pi_1^7 + 4\Pi_1^4 \Pi_2 + 2\Pi_1 \Pi_2^2 + 7\Pi_1^6 + 5\Pi_1^3 \Pi_2 + 2\Pi_2^2 \\ + 7\Pi_1^5 + 4\Pi_1^2 \Pi_2 + 7\Pi_1^4 + 3\Pi_1 \Pi_2 + 7\Pi_1^3 + 2\Pi_2 + 6\Pi_1^2 + 4\Pi_1 + 3\Pi_0$$

$$S^{13} \Pi_1 = \Pi_1^{13} + \Pi_1^{10} \Pi_2 + \Pi_1^7 \Pi_2^2 + \Pi_1^4 \Pi_2^3 + \Pi_1 \Pi_2^4 + \Pi_1^{12} + \Pi_1^9 \Pi_2 + \Pi_1^6 \Pi_2^2 + \Pi_1^3 \Pi_2^3 \\ + 2\Pi_1^{11} + 2\Pi_1^8 \Pi_2 + 2\Pi_1^5 \Pi_2^2 + 2\Pi_1^2 \Pi_2^3 + 3\Pi_1^{10} + 3\Pi_1^7 \Pi_2 + 3\Pi_1^4 \Pi_2^2 + 2\Pi_1 \Pi_2^3 \\ + 4\Pi_1^9 + 4\Pi_1^6 \Pi_2 + 3\Pi_1^3 \Pi_2^2 + \Pi_2^3 + 5\Pi_1^8 + 5\Pi_1^5 \Pi_2 + 3\Pi_1^2 \Pi_2^2 + 7\Pi_1^7 + 6\Pi_1^4 \Pi_2 + 3\Pi_1 \Pi_2^2 \\ + 7\Pi_1^6 + 5\Pi_1^3 \Pi_2 + \Pi_2^2 + 8\Pi_1^5 + 5\Pi_1^2 \Pi_2 + 8\Pi_1^4 + 4\Pi_1 \Pi_2 + 7\Pi_1^3 + 2\Pi_2 + 6\Pi_1^2 + 5\Pi_1 + 2\Pi_0$$

2.6.1  $\Pi_1$  von  $E_6$  wie [  $\Pi_2, (\Pi_4)$  von  $A_5$  ;  $\Pi_1, (\Pi_5)$  von  $E_6$  ]

$$S^2\Pi_1 = \Pi_1^2 + \Pi_5$$

$$S^3\Pi_1 = \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_5 + \Pi_0$$

$$S^4\Pi_1 = \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_5 + \Pi_5^2 + \Pi_1$$

$$S^5\Pi_1 = \Pi_1^5 + \Pi_1^3\Pi_5 + \Pi_1\Pi_5^2 + \Pi_1^2 + \Pi_5$$

$$S^6\Pi_1 = \Pi_1^6 + \Pi_1^4\Pi_5 + \Pi_1^2\Pi_5^2 + \Pi_5^3 + \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_5 + \Pi_0$$

$$S^7\Pi_1 = \Pi_1^7 + \Pi_1^5\Pi_5 + \Pi_1^3\Pi_5^2 + \Pi_1\Pi_5^3 + \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_5 + \Pi_5^2 + \Pi_1$$

$$S^8\Pi_1 = \Pi_1^8 + \Pi_1^6\Pi_5 + \Pi_1^4\Pi_5^2 + \Pi_1^2\Pi_5^3 + \Pi_5^4 + \Pi_1^5 + \Pi_1^3\Pi_5 + \Pi_1\Pi_5^2 + \Pi_1^2 + \Pi_5$$

$$S^9\Pi_1 = \Pi_1^9 + \Pi_1^7\Pi_5 + \Pi_1^5\Pi_5^2 + \Pi_1^3\Pi_5^3 + \Pi_1\Pi_5^4 + \Pi_1^6 + \Pi_1^4\Pi_5 + \Pi_1^2\Pi_5^2 + \Pi_5^3 \\ + \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_5 + \Pi_0$$

$$S^{10}\Pi_1 = \Pi_1^{10} + \Pi_1^8\Pi_5 + \Pi_1^6\Pi_1^2 + \Pi_1^4\Pi_5^3 + \Pi_1^2\Pi_5^4 + \Pi_5^5 + \Pi_1^7 + \Pi_1^5\Pi_5 + \Pi_1^3\Pi_5^2 + \Pi_1\Pi_5^3 \\ + \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_5 + \Pi_5^2 + \Pi_1$$

$$S^{11}\Pi_1 = \Pi_1^{11} + \Pi_1^9\Pi_5 + \Pi_1^7\Pi_5^2 + \Pi_1^5\Pi_5^3 + \Pi_1^3\Pi_5^4 + \Pi_1\Pi_5^5 + \Pi_1^8 + \Pi_1^6\Pi_5 \\ + \Pi_1^4\Pi_5^2 + \Pi_1^2\Pi_5^3 + \Pi_5^4 + \Pi_1^5 + \Pi_1^3\Pi_5 + \Pi_1\Pi_5^2 + \Pi_1^2 + \Pi_5$$

$$S^{12}\Pi_1 = \Pi_1^{12} + \Pi_1^{10}\Pi_5 + \Pi_1^8\Pi_5^2 + \Pi_1^6\Pi_5^3 + \Pi_1^4\Pi_5^4 + \Pi_1^2\Pi_5^5 + \Pi_5^6 + \Pi_1^9 + \Pi_1^7\Pi_5 \\ + \Pi_1^5\Pi_5^2 + \Pi_1^3\Pi_5^3 + \Pi_1\Pi_5^4 + \Pi_1^6 + \Pi_1^4\Pi_5 + \Pi_1^2\Pi_5^2 + \Pi_5^3 + \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_5 + \Pi_0$$

$$S^{13}\Pi_1 = \Pi_1^{13} + \Pi_1^{11}\Pi_5 + \Pi_1^9\Pi_5^2 + \Pi_1^7\Pi_5^3 + \Pi_1^5\Pi_5^4 + \Pi_1^3\Pi_5^5 + \Pi_1\Pi_5^6 + \Pi_1^{10} \\ + \Pi_1^8\Pi_5 + \Pi_1^6\Pi_5^2 + \Pi_1^4\Pi_5^3 + \Pi_1^2\Pi_5^4 + \Pi_5^5 + \Pi_1^7 + \Pi_1^5\Pi_5 + \Pi_1^3\Pi_5^2 + \Pi_1\Pi_5^3 \\ + \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_5 + \Pi_5^2 + \Pi_1$$

Liste 2.7

2.7.1  $\Pi_1$  von  $E_7$  wie [  $\Pi_3$  von  $A_5$ ;  $\Pi_3$  von  $C_3$  ;  $\Pi_6, (\Pi_5)$  von  $D_6$ ;  $\Pi_1$  von  $E_7$  ]  
 $a = \Pi_1$   $b = \Pi_6$   $c = \Pi_2$

$$S^2\Pi_1 = \Pi_1^2 + \Pi_6$$

$$S^3\Pi_1 = \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1$$

$$S^4\Pi_1 = \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_6 + \Pi_6^2 + \Pi_2 + \Pi_1^2 + \Pi_0$$

$$S^5\Pi_1 = \Pi_1^5 + \Pi_1^3\Pi_6 + \Pi_1\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_2 + \Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1$$

$$S^6\Pi_1 = \Pi_1^6 + \Pi_1^4\Pi_6 + \Pi_1^2\Pi_6^2 + \Pi_6^3 + \Pi_1^2\Pi_2 + \Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_6 + 2\Pi_1^2 + \Pi_6$$

$$S^7\Pi_1 = \Pi_1^7 + \Pi_1^5\Pi_6 + \Pi_1^3\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_6^3 + \Pi_1^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^5 + \Pi_1^3\Pi_6 + \Pi_1\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1$$

$$S^8\Pi_1 = \Pi_1^8 + \Pi_1^6\Pi_6 + \Pi_1^4\Pi_6^2 + \Pi_1^2\Pi_6^3 + \Pi_6^4 + \Pi_1^4\Pi_2 + \Pi_2^2 + \Pi_1^2\Pi_6\Pi_2 + \Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_1^6 + \Pi_1^4\Pi_6 + \Pi_1^2\Pi_6^2 + \Pi_1^2\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^4 + 2\Pi_1^2\Pi_6 + \Pi_6^2 + \Pi_2 + \Pi_1^2 + \Pi_0$$

$$S^9\Pi_1 = \Pi_1^9 + \Pi_1^7\Pi_6 + \Pi_1^5\Pi_6^2 + \Pi_1^3\Pi_6^3 + \Pi_1\Pi_6^4 + \Pi_1^5\Pi_2 + \Pi_1\Pi_2^2 + \Pi_1^3\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^2\Pi_2 \\ + \Pi_1^7 + \Pi_1^5\Pi_6 + \Pi_1^3\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_6^3 + \Pi_1^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^5 + 2\Pi_1^3\Pi_6 + \Pi_1\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_2 + 2\Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1$$

$$S^{10}\Pi_1 = \Pi_1^{10} + \Pi_1^8\Pi_6 + \Pi_1^6\Pi_6^2 + \Pi_1^4\Pi_6^3 + \Pi_1^2\Pi_6^4 + \Pi_6^5 + \Pi_1^6\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_2^2 + \Pi_1^4\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_6^2\Pi_2 \\ + \Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_1^8 + \Pi_1^6\Pi_6 + \Pi_1^4\Pi_6^2 + \Pi_1^2\Pi_6^3 + \Pi_1^4\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_6\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^6 + 2\Pi_1^4\Pi_6 + 2\Pi_1^2\Pi_6^2 + \Pi_6^3 + 2\Pi_1^2\Pi_2 + \Pi_6\Pi_2 + 2\Pi_1^4 + \Pi_1^2\Pi_6 \\ + 2\Pi_1^2 + \Pi_6$$

$$S^{11}\Pi_1 = \Pi_1^{11} + \Pi_1^9\Pi_6 + \Pi_1^7\Pi_6^2 + \Pi_1^5\Pi_6^3 + \Pi_1^3\Pi_6^4 + \Pi_1\Pi_6^5 + \Pi_1^7\Pi_3 + \Pi_1^3\Pi_2^2 + \Pi_1^5\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^3\Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^3\Pi_2 \\ + \Pi_1\Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_1^9 + \Pi_1^7\Pi_6 + \Pi_1^5\Pi_6^2 + \Pi_1^3\Pi_6^3 + \Pi_1\Pi_6^4 + \Pi_1^5\Pi_2 + \Pi_1\Pi_2^2 + \Pi_1^3\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^2\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^7 + 2\Pi_1^5\Pi_6 + 2\Pi_1^3\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_6^3 + 2\Pi_1^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6\Pi_2 + 2\Pi_1^5 + 2\Pi_1^3\Pi_6 + \Pi_1\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_2 \\ + 2\Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1$$

$$\begin{aligned}
S^{12}\Pi_1 = & \Pi_1^{12} + \Pi_1^{10}\Pi_6 + \Pi_1^8\Pi_6^2 + \Pi_1^6\Pi_6^3 + \Pi_1^4\Pi_6^4 + \Pi_1^2\Pi_6^5 + \Pi_6^6 + \Pi_1^8\Pi_2 + \Pi_1^4\Pi_2^2 + \Pi_2^3 \\
& + \Pi_1^6\Pi_2\Pi_6 + \Pi_1^4\Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_6^4\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_6^2\Pi_2^2 + \Pi_1^{10} + \Pi_1^8\Pi_6 + \Pi_1^6\Pi_6^2 \\
& + \Pi_1^4\Pi_6^3 + \Pi_1^2\Pi_6^4 + \Pi_1^6\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_2^2 + \Pi_1^4\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^2\Pi_6^2\Pi_2 \\
& + 2\Pi_1^8 + 2\Pi_1^6\Pi_6 + 2\Pi_1^4\Pi_6^2 + 2\Pi_1^2\Pi_6^3 + \Pi_6^4 + 2\Pi_1^4\Pi_2 + \Pi_2^2 + 2\Pi_1^2\Pi_6\Pi_2 + \Pi_6^2\Pi_2 + 2\Pi_1^6 + 2\Pi_1^4\Pi_6 + \Pi_1^2\Pi_6^2 \\
& + \Pi_1^2\Pi_2 + 3\Pi_1^4 + 2\Pi_1^2\Pi_6 + \Pi_6^2 + \Pi_2 + \Pi_1^2 + \Pi_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S^{13}\Pi_1 = & \Pi_1^{13} + \Pi_1^{11}\Pi_6 + \Pi_1^9\Pi_6^2 + \Pi_1^7\Pi_6^3 + \Pi_1^5\Pi_6^4 + \Pi_1^3\Pi_6^5 + \Pi_1\Pi_6^6 + \Pi_1^9\Pi_2 + \Pi_1^5\Pi_2^2 + \Pi_1\Pi_2^3 \\
& + \Pi_1^7\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^5\Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_1^3\Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^4\Pi_2 + \Pi_1^3\Pi_6\Pi_2^2 + \Pi_1\Pi_6^2\Pi_6^2 + \Pi_1^{11} + \Pi_1^9\Pi_6 + \Pi_1^7\Pi_6^2 \\
& + \Pi_1^5\Pi_6^3 + \Pi_1^3\Pi_6^4 + \Pi_1\Pi_6^5 + \Pi_1^7\Pi_2 + \Pi_1^3\Pi_2^2 + \Pi_1^5\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1^3\Pi_6^2\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6\Pi_2^2 \\
& + 2\Pi_1^9 + 2\Pi_1^7\Pi_6 + 2\Pi_1^5\Pi_6^2 + 2\Pi_1^3\Pi_6^3 + \Pi_1\Pi_6^4 + 2\Pi_1^5\Pi_2 + \Pi_1\Pi_2^2 + 2\Pi_1^3\Pi_6\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6^2\Pi_2 \\
& + 2\Pi_1^7 + 2\Pi_1^5\Pi_6 + 2\Pi_1^3\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_6^3 + 2\Pi_1^3\Pi_2 + \Pi_1\Pi_6\Pi_2 \\
& + 3\Pi_1^5 + 2\Pi_1^3\Pi_6 + \Pi_1\Pi_6^2 + \Pi_1\Pi_2 + 2\Pi_1^3 + \Pi_1\Pi_6 + \Pi_1
\end{aligned}$$

## Literaturverzeichnis

**Atiyah, M.F.- MacDonald, I.G.** : Introduction to Commutative Algebra  
Addison-Wesley 1969

**Bourbaki, Nicolas** : Lie Groups and Lie Algebras, Paris, Hermann 1972

**Beisel, Götz** : Über zwei Methoden zur Reduktion von irreduziblen Darstellungen endlichdimensionalen Liealgebren auf halbeinfache Unterhalbgebren, Diplomarbeit, Bonn 1975

**Borho, Walter** : Primitive vollprime Ideale in der einhüllenden von  $SO(n, C)$   
J.Algebra 43 , 619-654 (1976)

**Brian M** : Invariants d'un sous - groupe unipotent maximal d'un groupe semi-simple,  
Ann. Inst. Fourier , Grenoble , 33, 1 (1983).

**Chevalley, C.** : Theory of Lie Groups, Princeton, Princeton University Press 1946

**Elashvili, A.G.** : Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups . Functional Anal. Appl. 6, 44 - 53 (1972)

**Freudenthal, H. , de Vries, H.** : Linear Lie Groups , New York , London ,  
Academic Press 1969

**Helgason, Sigurdur** : Differential geometrie, Lie groups and symmetric spaces,  
New York , London Academic Press 1962

**Humphreys, J. E.** : Introduction to Lie algebras and representation theory, New York,  
Heidelberg , Berlin Springer 1972

**Hsiang, Wu-Chung and Hsiang, Wu-Yi** : Differential actions of compact connected classical groups : II , Annals of Mathematics Ser 2 , 91-92 (1970)

**Jacobson, N.** : Lie Algebras, New York, London, Sidney, Interscience Publishers 1962

**Kostant, Bertram [I]**: Lie group representations on polynomial rings, Amer. I. Math. 85 327-402 (1963)

**Kostant, B and Rallis, S [II]**. : Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. I. Math., 93 No.3 753-809 (1971)

**Kraft, H** : Geometrische Methoden der Invariantentheorie Aspekte der Mathematik D1  
Vieweg-Verlag Braunschweig 1984

**Krämer, Manfred [I]** : Hauptisotropiegruppen bei endlichen dimensionalen Darstellungen kompakter halbeinfacher Liegruppen , Diplomarbeit Bonn 1966 .

**Krämer, Manfred [II]** : Über das Verhalten von Untergruppen bei Darstellungen kompakter zusammenhängender Liegruppen , Sonderforschungsbereich 40 Theoretische Mathematik , Universität Bonn

**Krämer**, Manfred [ III ] : Eine Klassifikation bestimmter Untergruppen kompakter zusammenhängender Liegruppen , Comm. in Alg. 3. 691-737 (1975)

**Krämer** , Manfred [ IV ] : Über Untergruppen kompakter Liegruppen als Isotropiegruppen bei linearen Aktionen, Math. 2. 147 207-224 ( 1976 )

**Krämer**, Manfred [ V ] : Some tips on the decomposition of tensor product representations of compact connected Lie groups , Reports on Mathematical Physics vol.13 ,295- 304 ( 1978 )

**Krämer**, Manfred [VI] : Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Comp. Math. 38, No.2 129-153 (1979)

**Lang**, Serge : Algebra, New York, Addison Wesley (1974)

**Lepowsky**, J. : Multiplicity Formulas for Certain Semisimple Lie Groups Bulletin of the AMS, Volumen 77, No 4, 601-605 ( 1971)

**Panyushev** , D.I. : Complexity und Rank of Homogeneous Spaces Geometrie Dedicata 34 , 249-269 ( 1990 )

**Popov**, V. L . [I]: Stability criteria for the action of a semi-simple groups on a factorial manifold . Math. USSR-Izvestija 4 , 527-535 ( 1970 )

**Popov**, V, L [ II ] : Representations with a free module of covariants . Functional Anl. Appl. 10 , 242-244 ( 1977 )

**Popov**, V, L – **Vinberg** E.B Invariant Theorie .  
Teil II in Algebraic Geometry IV aus Encyclopaedia of Mathematical sciences  
Volumen 55( Eds: A:N.Parshin – IR. Shafarevich ) Springer Verlag 1994

**Van Leeuwen**, Marc A. A., Cohen, Argeh M., Lisser, Bert : A package for Lie group computations , Can . , Amsterdam 1992

**Schwarz**, Gerald W.[ I ] : Representations of simple Lie groups with regular rings of invariants, Inventiones mathematicae 49, 167-191 (1978)

**Schwarz**, Gerald W. [ II ] : Representations of simple Lie groups with a free module of covariants, Inventiones mathematicae 50, 1-12 (1978)

**Springer**,**Tonny** A. : Aktionen reductiver Gruppen auf Varietäten, in Kraft- Slodowy-Springer(ed.) "Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie"  
DMV Seminar Band 13 , Birkhäuser- Verlag 1989

**Sundaram** , Sheila : Tableaux in the representation theory of the classical Lie groups, in Invariant Theory and Tableaux (D. Stanton, Ed.), IMA Vol. Math. Appl. 19, Springer, New York, 1990, 191 - 225.

**Tits**, Jacques [ I ] : Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen, Lecture Notes in Mathematics No. 40, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1967

**Warner** , Garth [ I ] : Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I , Berlin , Heidelberg , New York Springer 1992

**Warner**, Garth [ II ]: Harmonic analysis on semi-simple Lie groups II , Berlin , Heidelberg , New York Springer 1992

**Weyl**, H. The Classical Groups, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1939 (2. ed. 1946)

**Whippman** M.L. : Branching Rules for simple Lie Groups , Journal of Mathematical Physics, vol 6, Nr10, 1534-1539 ( 1965 ).