

# 20 Fragen und Antworten zu Rechenschwäche





UNIVERSITÄT  
BAYREUTH

# 20 Fragen und Antworten zu Rechenschwäche

Prof. Dr. Volker Ulm

# Impressum

## Mathematikdidaktik im Kontext

Heft 1

20 Fragen und Antworten zu Rechenschwäche

Bayreuth, 2017

## Autor

Prof. Dr. Volker Ulm  
Universität Bayreuth  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Universitätsstraße 30  
95440 Bayreuth

Telefon: 0921/55-3267

E-Mail: [volker.ulm@uni-bayreuth.de](mailto:volker.ulm@uni-bayreuth.de)

Web: [www.dmi.uni-bayreuth.de](http://www.dmi.uni-bayreuth.de)  
[www.zlb.uni-bayreuth.de](http://www.zlb.uni-bayreuth.de)

## Herausgeber

Carsten Miller und Volker Ulm  
Universität Bayreuth  
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik  
Universitätsstraße 30  
95440 Bayreuth

[www.dmi.uni-bayreuth.de](http://www.dmi.uni-bayreuth.de)

## Fotos

contrastwerkstatt – fotolia.com

GEFÖRDERT VOM



Bundesministerium  
für Bildung  
und Forschung

Die Universität Bayreuth wird im Rahmen der gemeinsamen „Qualitäts-offensive Lehrerbildung“ von Bund und Ländern aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung gefördert.

# Inhalt

Vorwort .....	4
1. Frage: Welche Grundvorstellungen sollten Schüler zu natürlichen Zahlen und Rechenoperationen entwickeln? .....	5
2. Frage: Was ist zählendes Rechnen und warum ist dies mittelfristig problematisch? .....	8
3. Frage: Warum ist das Stellenwertsystem nützlich und schwierig? .....	9
4. Frage: Was ist Rechenschwäche? .....	10
5. Frage: Welche Hinweise gibt es für ein Vorliegen von Rechenschwäche? .....	11
6. Frage: Wie viele Schüler haben Rechenschwäche? .....	13
7. Frage: Warum sind Diskrepanzdefinitionen bzgl. IQ für schulische Ziele ungeeignet? .....	14
8. Frage: Warum sind schematisierte Rechentests wenig geeignet, um Rechenschwäche zu diagnostizieren? .....	16
9. Frage: Wie lässt sich Rechenschwäche durch „Denkanalyse“ förderorientiert diagnostizieren? .....	17
10. Frage: Welche Ursachen gibt es für Rechenschwäche? .....	18
11. Frage: Warum hilft nur Üben nicht? .....	20
12. Frage: Wie kann Rechenschwäche zu einem Teufelskreis führen? .....	21
13. Frage: Wie können rechenschwache Schüler gefördert werden? .....	22
14. Frage: Wie kann man einer Rechenschwäche vorbeugen? .....	25
15. Frage: Welche Organisationsformen fachbezogener Förderung gibt es im Schulsystem? .....	27
16. Frage: Kann bzw. sollte bei rechenschwachen Kindern zeitweise auf Notengebung verzichtet werden? .....	29
17. Frage: Ist die Wiederholung einer Jahrgangsstufe sinnvoll? .....	30
18. Frage: Ist es sinnvoll, bei Schülern mit Rechenschwäche bis einschließlich Abitur auf Noten bei Anforderungen mit Zahlen zu verzichten? .....	31
19. Frage: Wer ist primär für die Förderung von Kindern mit Rechenschwäche zuständig? .....	33
20. Frage: Wie ist der Markt privater Anbieter für Diagnose und Förderung bei Rechenschwäche einzuschätzen? .....	34
Literatur .....	36

## Vorwort

Rechenschwäche ist kein Schicksal und keine Krankheit (vgl. Gaidoschik 2015, S. 9). Welche Vorstellungen ein Kind zu Zahlen hat, welche Denkweisen es beim Rechnen einsetzt, wie ein Kind mit Schreibweisen für Zahlen umgeht, all dies ist Ergebnis von Lernprozessen. Den Kindern begegnen Zahlen im Alltag und in der Schule, sie entwickeln dazu Vorstellungen und Denkstrategien – unter Anleitung von Lehrkräften, Eltern und Geschwistern, aber auch ganz alleine. Es ist normal, dass hierbei sowohl tragfähige Vorstellungen entstehen, als auch solche, die in Sackgassen führen. Eine Aufgabe der Schule ist es, Lernprozesse der Kinder zu fördern, bei denen tragfähige Grundvorstellungen zu Zahlen und zu Rechenoperationen entwickelt sowie nicht zielführende Vorstellungen und Strategien überwunden werden.

Es ist klar, dass diese Lernprozesse von Kind zu Kind höchst unterschiedlich erfolgen, denn die Kinder sind – wie auch die Menschen im Allgemeinen – in vielfältigster Hinsicht verschieden. Im Sinne dieser Diversität ist gar nicht zu erwarten, dass alle Schüler das Rechnen so lernen, wie es Lehrpläne und Schulbücher idealtypisch vorsehen.

In der Mathematikdidaktik – der Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik – ist die Thematik der Rechenschwäche seit Jahrzehnten bearbeitet.

- Es gibt elaborierte Theorien, um das Phänomen der Rechenschwäche begrifflich zu fassen und zu verstehen.
- Es gibt umfassend erprobte Konzepte, um die individuellen Schwierigkeiten beim einzelnen Kind differenziert und mit Bezug auf mathematisches Denken festzustellen.
- Schließlich das Wichtigste für die Kinder: Es gibt bewährte und leicht zugängliche Förderkonzepte, um Schülern bei der Überwindung von Rechenschwäche wirksam zu helfen.

Im Folgenden wird dieser Themenkomplex auf 20 Fragen zugespitzt, sie werden aus Sicht der Mathematikdidaktik beantwortet.

Dabei steht primär die Schule als gemäß der Bayerischen Verfassung festgelegter Ort für das Lehren und Lernen im Fokus. Es ist eine zentrale Aufgabe des Staates und des Schulsystems, alle Kinder – insbesondere auch diejenigen mit Rechenschwäche – möglichst optimal zu fördern. Dazu ist die Schule da. Die Schlüsselpersonen hierfür sind die Lehrkräfte in der Schule. Sie sind Fachleute für fachbezogenes Lehren und Lernen – aufgrund ihrer beruflichen Expertise und auf Basis ihrer langjährigen Aus- und Fortbildung in ihren Fächern, den Fachdidaktiken und den Erziehungswissenschaften.

Dementsprechend ist die vorliegende Handreichung in erster Linie für Lehrkräfte geschrieben. Sie soll Mut machen, die Thematik der Diagnose, der Überwindung bzw. der Vermeidung von Rechenschwäche als ureigenste Angelegenheit der Schule zu sehen und entsprechend offensiv und wirkungsvoll anzugehen.

# 1. Frage: Welche Grundvorstellungen sollten Schüler zu natürlichen Zahlen und Rechenoperationen entwickeln?

Ein verständnisvoller Umgang mit natürlichen Zahlen basiert entscheidend darauf, welche Vorstellungen man zu Zahlen besitzt. Dementsprechend wird im Folgenden geklärt, welche Vorstellungen Schüler zu natürlichen Zahlen und zu Grundrechenarten entwickeln sollten. Dies ist der Schlüssel, um Phänomene der Rechenschwäche zu verstehen, Schwierigkeiten von Schülern zu diagnostizieren und darauf aufbauend Schülern durch Fördermaßnahmen zu helfen.

## Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen

Mathematikunterricht zielt darauf ab, dass Lernende zu den erarbeiteten Begriffen „tragfähige Vorstellungen“ aufbauen und sie den Begriffen „inhaltliche Bedeutungen“ geben, sodass sie mit den Begriffen „verständnisvoll umgehen“ können. Wie lassen sich derartige Beschreibungen fachbezogen weiter konkretisieren? In der Mathematikdidaktik und der Pädagogik hat sich hierzu der Begriff der „Grundvorstellungen“ seit etwa 200 Jahren etabliert (vgl. Hofe, v. 1995, 1996).

Eine **Grundvorstellung** zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.

Durch Grundvorstellungen können fachliche Aspekte eines mathematischen Begriffs erfasst und in Bezug zu sinnhaften Kontexten mit Bedeutung versehen werden. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass man mit einem Begriff verständnisvoll umgehen kann. Wir konkretisieren dies nun für die natürlichen Zahlen und die Grundrechenarten.

## Anzahlvorstellung zu natürlichen Zahlen

Den Zahlbegriff „fünf“ sollten Schüler gedanklich etwa mit einer Zusammenfassung von fünf Objekten verbinden – wie z. B. einem Muster aus fünf Punkten oder einer Menge aus fünf Murmeln. Dabei sollte ihnen gleichzeitig bewusst sein, dass es nicht auf die Art oder die Eigenschaften der Objekte ankommt, sondern nur auf die Anzahl. Derartige Vorstellungen werden entwickelt, indem die Lernenden z. B. Mengen handelnd zusammenstellen, mit ihnen umgehen und sie zeichnerisch darstellen. Eine natürliche Zahl wird also verstanden als Anzahl der Elemente einer Menge.

Mit der **Anzahlvorstellung** (= **Kardinalzahlvorstellung**) wird eine natürliche Zahl verstanden als Anzahl von Objekten. Damit geben Zahlen Antworten auf die Frage: „Wie viele?“

## Reihenfolgevorstellung zu natürlichen Zahlen

Zahlen stellen auch eine Reihenfolge her. Wenn man Gegenstände durchzählt mit „eins, zwei, drei, vier, fünf“, dann steht die „fünf“ für den Fünften in der Reihe. Der Fünfte kommt nach dem Vierten und vor dem Sechsten. Diese Bedeutung von Zahlen zur Kennzeichnung einer Position innerhalb einer geordneten Reihe führt zur Reihenfolgevorstellung.

Mit der **Reihenfolgevorstellung** (= **Ordinalzahlvorstellung**) werden natürliche Zahlen als Positionen in einer geordneten Reihe verstanden. Damit geben Zahlen Antworten auf die Frage: „Der wievielte?“

Die Position in einer Reihe wird sprachlich ausgedrückt mit Worten wie etwa „auf Platz Nr. 5“ oder „der Fünfte“.

Beide Vorstellungen zu natürlichen Zahlen – die Reihenfolgevorstellung und die Anzahlvorstellung – sowie ein flexibler Wechsel zwischen beiden Vorstellungen sind essentiell für einen verständnisvollen Umgang mit Zahlen. Wenn Kinder etwa fünf Gegenstände der Reihe nach abzählen und dabei jedem Gegenstand eine Nummer zuweisen (z. B. „eins, zwei, drei, vier, fünf“), dann bezeichnet die „fünf“ gemäß der Reihenfolgevorstellung zunächst den fünften Gegenstand. Wesentlich ist aber auch der gedankliche Wechsel zur Anzahlvorstellung, dass damit die abgezählte Menge fünf Objekte umfasst.

## Grundvorstellungen zu Rechenoperationen auf Basis der Anzahlvorstellung

Auf der Anzahlvorstellung können *Grundvorstellungen für Operationen mit Zahlen*, d. h. für die Grundrechenarten, aufbauen (vgl. z. B. Padberg, Benz 2011, S. 87 ff., Hasemann, Gasteiger 2014, S. 118 ff.). Daraus lassen sich dann wiederum Rechenstrategien entwickeln, begründen und verstehen.

### ▪ Addition

Die grundlegende Vorstellung zur Addition „ $5 + 3 = 8$ “ ist die des **Zusammenfügens** disjunkter Mengen. Zwei Beispiele:

- Laura hat 5 Murmeln, Max hat 3 Murmeln. Wie viele Murmeln haben sie zusammen?
- Laura hat 5 Murmeln und bekommt noch 3 weitere Murmeln. Wie viele hat sie dann?

Die Rechnung „ $5 + 3 = 8$ “ abstrahiert diese Situationen. Umgekehrt geben die Situationen und die damit verbundene Grundvorstellung des Zusammenfügens von Mengen der Addition „ $5 + 3$ “ und dem Rechenergebnis eine inhaltliche Bedeutung und damit einen Sinn.

### ▪ Subtraktion

Mit einer Subtraktion wie etwa „ $8 - 5 = 3$ “ sollten Schüler auf jeden Fall zwei Grundvorstellungen verbinden:

- Die naheliegendste Grundvorstellung ist die des **Wegnehmens**. In Sachsituationen sind etwa 8 Kinder im Zimmer, davon gehen dann 5 Kinder hinaus. Eine Schülerin hat 8 Bonbons und gibt einer Mitschülerin 5 Bonbons ab. Der Wert der Differenz „ $8 - 5$ “ gibt jeweils an, wie viele übrig bleiben.
- Eine weitere Grundvorstellung zur Subtraktion ist die des **Unterschieds**. Ein Beispiel: Laura hat 8 Murmeln, Max hat 5 Murmeln. Wie viele Murmeln hat Laura mehr? Der Wert der Differenz „ $8 - 5$ “ gibt hier einen Unterschied an, d. h. wie viele es mehr sind.

Beide Grundvorstellungen geben der Subtraktion „ $8 - 5$ “ eine inhaltliche Bedeutung und damit Sinn.

### ▪ Multiplikation

Die Beschäftigung mit Sachsituationen sollte zur Entwicklung von zwei typischen Grundvorstellungen zur Multiplikation wie etwa „ $5 \cdot 3 = 15$ “ führen:

- Eine Grundvorstellung verbindet die Multiplikation mit **zeitlich-sukzessiven Handlungen**. Es wird etwa fünfmal eine Handlung mit jeweils drei Objekten in gleicher Weise ausgeführt. Ein Beispiel: Max geht fünfmal in den Keller und holt jeweils drei Flaschen Wasser. Wie viele Flaschen hat er insgesamt geholt?
- Eine andere Grundvorstellung verknüpft die Multiplikation mit **räumlich-simultanen Anordnungen**. Es ist keine Handlung notwendig, sondern die Objekte sind in strukturierter Weise bereits vorhanden. Ein Beispiel: Auf dem Tisch liegen 5 Würfel, jeder Würfel zeigt 3 Augen. Wie viele Augen sind es insgesamt? Als sehr klar strukturierte Visualisierung des Produkts „ $5 \cdot 3$ “ eignet sich etwa ein rechteckiges Muster aus fünfmal drei Punkten (siehe Abbildung).



## ▪ Division

Mit einer Division wie „ $15 : 5 = 3$ “ lassen sich Situationen von zweierlei Struktur charakterisieren, die entsprechend zu zwei Grundvorstellungen zum Dividieren führen sollten:

- Das Dividieren sollte mit der Grundvorstellung des **Verteilens** verknüpft werden. Ein Beispiel: Fünfzehn Kinder verteilen sich gleichmäßig in fünf Räume. Wie viele Kinder sind in jedem Raum?  
Hierbei werden also Objekte gruppiert. Es ist bekannt, wie viele Gruppen es gibt. Gefragt wird, wie groß jede einzelne Gruppe ist.
- Die zweite Grundvorstellung des Dividierens ist die des **Aufteilens**. Ein Beispiel: Fünfzehn Kinder bilden Fünfergruppen. Wie viele Gruppen entstehen dabei?  
Auch hier werden Objekte gruppiert. Es ist bekannt, wie groß jede einzelne Gruppe ist. Gefragt wird, wie viele Gruppen es gibt.

Die Anzahlvorstellung ist die Basis für tragfähige Grundvorstellungen zu den Grundrechenarten mit natürlichen Zahlen.

Auch mit der Reihenfolgevorstellung für natürliche Zahlen können Grundvorstellungen zu den Grundrechenarten entwickelt werden. So lässt sich die Addition mit dem Vorwärtszählen in einer geordneten Reihe und die Subtraktion mit dem Rückwärtszählen gedanklich verbinden. Derartige Vorstellungen und Zählverfahren entwickeln Kinder im Vorschul- und Schulalter in der Regel ganz natürlich. Allerdings sind solche Zählverfahren nur bei kleinen Zahlen praktikabel. Schüler, die nur zählend rechnen können, scheitern, wenn der Zahlenbereich größer wird – beispielsweise im Tausenderraum (vgl. Abschnitt 2). Deshalb ist es eine fundamentale Aufgabe des Mathematikunterrichts der ersten Schuljahre, Grundvorstellungen zu den Grundrechenarten zu entwickeln, die auf der Anzahlvorstellung natürlicher Zahlen aufbauen.



## 2. Frage: Was ist zählendes Rechnen und warum ist dies mittelfristig problematisch?

Der zählende Zugang zu Zahlen und zum Rechnen ist ganz normal in der Entwicklung im Vorschulalter und in der ersten Jahrgangsstufe. Mit der Reihenfolgevorstellung zählen Kinder Objekte in ihrer Umwelt ab. Dabei lernen sie die Zahlwörter und die Zahlwortreihe.

Man kann mit der Reihenfolgevorstellung auch rechnen, indem man (z. B. mit Verwendung der Finger) zählt. Beispielsweise kann man die Aufgabe  $4 + 2$  durch Zählen an den Fingern lösen. Man zählt bis vier und dann noch zwei Positionen weiter: „1, 2, 3, 4“ — „5, 6“. Das Ergebnis ist 6.

Die Schwierigkeiten bei derartigem zählenden Rechnen sind offenkundig:

- Man verzählt sich leicht.
- Wenn die Zahlen größer werden (z. B.  $58 + 74$ ), ist dies praktisch nicht mehr zu schaffen.
- Beim Addieren und Subtrahieren kann man sich über Vorwärts- und Rückwärtszählen bei kleinen Zahlen noch helfen. Aber man hat wenig Chancen, tieferes Verständnis für das Multiplizieren und das Dividieren zu entwickeln.

Um diese Schwierigkeiten klar herauszustellen, machen wir ein Gedankenexperiment (vgl. Spiegel, Selter 2003, S. 88):

Hierzu ersetzen wir die Zahlen durch Buchstaben – und zwar genau in der Reihenfolge des Alphabets, d. h.  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ ,  $d = 4$ , etc.

Zum Alphabet  $a, b, c, d, e, f, g, \dots$  haben wir etwa Vorstellungen, wie sie Schüler mit Rechenschwäche von Zahlen haben. Es ist eine geordnete Reihe. Man kann die Buchstaben der Reihe nach aufsagen, also vorwärts und etwas mühsamer auch rückwärts zählen.

Mit den Buchstaben können Mengen von Gegenständen abgezählt werden, etwa so:  $a, b, c, d, e$ . Wir können mit kleinen Zahlen durch Zählen auch Addieren und Subtrahieren. Um etwa  $d + b$  zu berechnen, zählen wir vorwärts: „ $a, b, c, d$ “ — „ $e, f$ “. Das Ergebnis ist  $f$ .

Aber was ist  $i + k$ ? Man scheitert an der eigenen Konzentrationsfähigkeit.

Was ist  $t$  geteilt durch  $e$ ? Dazu kann man kaum Vorstellungen aufbauen. Man könnte versuchen, die Rechnung „ $t$  geteilt durch  $e$  ist  $d$ .“ auswendig zu lernen. (Die Übersetzung wäre  $20 : 5 = 4$ .)

Vor genau diesen Schwierigkeiten stehen Kinder, die zählend rechnen.

- Die selbst zurechtgelegten Zählstrategien funktionieren irgendwann nicht mehr, weil die Zahlen zu groß sind und das Zählen zu kompliziert ist.
- Das Auswendiglernen von Rechnungen (wie etwa das kleine Einmaleins) schafft man nicht mehr, weil man keine Querverbindungen zwischen den vielen Rechnungen sieht.

Nach den Erfahrungen von Schipper (2005, S. 20) ist nahezu jedes Kind mit Rechenschwäche ein zählender Rechner. Dies bedeutet nicht, dass diese Kinder über keinerlei andere Rechenstrategien verfügen. Andere Strategien sind ggf. nur nicht ausreichend gefestigt und werden entsprechend nicht systematisch genutzt. Insbesondere bei schwierig erscheinenden Aufgaben fallen die Schüler auf das scheinbar sicherere Zählen zurück.

Ein zählender Zugang zu Zahlen ist normal. Allerdings ist zählendes Rechnen nur in einem kleinen Zahlenbereich (bis etwa 20) zielführend. Deshalb ist es eine zentrale Lernaufgabe für Schüler der ersten Jahrgangsstufen, das zählende Rechnen zu überwinden und durch andere Rechenstrategien zu ersetzen.

### 3. Frage: Warum ist das Stellenwertsystem nützlich und schwierig?

Eine wesentliche Stärke unseres Dezimalsystems ist, dass man mit zehn Ziffern jede beliebige, noch so große Zahl darstellen kann. (Im römischen Zahlensystem ist dies beispielsweise nicht möglich.) Zudem kann man mit großen Zahlen rechnen, indem man systematisch nur mit einzelnen Ziffern rechnet. Warum funktioniert dies so gut in Stellenwertsystemen bzw. in unserem Dezimalsystem?

#### Darstellen von Zahlen

Ein zentrales Prinzip in unserem Dezimalsystem ist das Bündelungsprinzip: Zehn Einer werden zu einem Zehner gebündelt, zehn Zehner werden zu einem Hunderter gebündelt, zehn Hunderter ergeben einen Tausender etc. Damit ist die Schreibweise „258“ die Kurzform für „zwei Hunderter, 5 Zehner und 8 Einer“.

Allgemein ist das Charakteristische eines Stellenwertsystems:

- Die Position einer Ziffer gibt an, auf welche Bündelart sie sich bezieht (Einer, Zehner, Hunderter, etc.).
- Der Wert einer Ziffer gibt an, wie viele Bündel der jeweiligen Art gemeint sind.

Grundlegend für diese Sicht auf Zahlen ist die Anzahlvorstellung bzw. Kardinalzahlvorstellung („Wie viele?“, vgl. Abschnitt 1). Es geht um die Größe von Bündeln und die Anzahl von Bündeln.

Zehn ist nicht einfach nur die Nummer nach Neun und vor Elf, sondern Zehn steht für ein Bündel aus zehn Einern. In einer Zahl wie „58“ steht die Ziffer „5“ für fünf Zehner und die „8“ für acht Einer. Hätte man nur die Reihenfolgevorstellung, wäre „58“ lediglich die Position zwischen „57“ und „59“.

Die Schwierigkeiten des Dezimalsystems sind offensichtlich: Es handelt sich um eine komprimierte, recht abstrakte Schreibweise. Die Bedeutung einer einzelnen Ziffer kann nur aus dem Zusammenhang des Zahlworts erschlossen werden, jede Ziffer trägt nur einen Beitrag zum Wert der Zahl bei. Zudem erfordert ein Verständnis für das Stellenwertsystem die Entwicklung der Anzahlvorstellung für natürliche Zahlen. Die Reihenfolgevorstellung von Zahlen und zählendes Rechnen führen hier nicht weiter.

Diese Aspekte sind für Lehrkräfte von zentraler Bedeutung, um die Schwierigkeiten von Kindern mit Rechenschwäche einzuordnen, zielgerichtete Fördermaßnahmen zu entwickeln bzw. möglichst Rechenschwäche erst gar nicht entstehen zu lassen.

#### Rechnen mit Zahlen

Nur mit der Anzahlvorstellung und dem Stellenwertsystem gewinnt man einen Zugang zum Rechnen mit größeren Zahlen – beim Kopfrechnen ebenso wie bei halbschriftlichen und schriftlichen Verfahren.

Eine Addition wie  $258 + 374$  erschließt sich nicht durch Weiterzählen, sondern durch die Gliederung der Zahlen in Hunderter, Zehner und Einer und ein weiteres Arbeiten mit diesen Bündeln – im Kopf oder auf Papier. Entsprechend ist es bei der Subtraktion, der Multiplikation und der Division.

Es ist gerade eine Stärke des Stellenwertsystems, dass man darin mit großen Zahlen rechnen kann, indem man sich systematisch auf die Ziffern an den einzelnen Stellen fokussiert und diese miteinander verrechnet. Die halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren basieren auf diesem Prinzip.

Verständnis für das Stellenwertsystem ist ein entscheidender Schlüssel für Orientierung im Zahlenraum und für tragfähige Rechenstrategien.

## 4. Frage: Was ist Rechenschwäche?

Nicht jeder Schüler entwickelt in den ersten Jahren der Grundschulzeit die Vorstellungen und Denkweisen zu Zahlen und Rechenoperationen, die einer Durchschnittsentwicklung entsprechen. Dies ist angesichts der Verschiedenheit der Schüler auch ganz normal. Es gibt dabei Schüler, die insbesondere in den Jahrgangsstufen 1 und 2 so wenig tragfähige Vorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen entwickeln, dass sie mit Zahlen kaum verständnisvoll und in der Folge substantiell falsch umgehen.

Dabei hat nicht jeder Schüler, der Fehler beim Rechnen macht, automatische Rechenschwäche. Fehler gehören zu jedem Prozess des Erlernens komplexer Fähigkeiten dazu. Jeder, der Laufen, Sprechen, Schreiben, Radfahren, Musizieren lernt, macht beim Lernen Fehler. Aus Fehlern kann man lernen, bei erfolgreichem Weiterlernen verschwinden Fehler auch wieder.

Ein tiefliegendes Problem entsteht beim Rechnenlernen, wenn Grundvorstellungen zu Zahlen – insbesondere die Anzahlvorstellung – und zu Rechenoperationen (vgl. Abschnitt 1) nicht oder nicht tragfähig ausgebildet wurden und sich fehlerhafte Denkweisen beim Umgang mit Zahlen derart verfestigt haben, dass ein einfaches „Weiterlernen“ und „Mitlernen“ im Klassenverband nicht zu einer Verbesserung führt. Für Schüler mit derartigen Schwierigkeiten hat sich im deutschsprachigen Raum in der Mathematikdidaktik und in pädagogischen Kontexten der Begriff der Rechenschwäche etabliert.

**Rechenschwäche** ist ein Mangel an tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen. Er führt zu substantiell fehlerhaften Denkweisen beim Umgang mit Zahlen.

Kinder mit Rechenschwäche haben dauerhafte und schwerwiegende Schwierigkeiten beim Rechnenlernen, die durch undifferenziertes Weiterlernen im regulären Unterricht nicht ausgeglichen werden können. Sie brauchen eine spezielle fachdidaktische und pädagogische Förderung.

### Weitere Begriffe für Rechenschwäche

Für Schwierigkeiten beim Rechnen wurde in den vergangenen Jahrzehnten eine Fülle von Begriffen gebildet. Eine Auflistung von etwa 40 solcher Begriffe geben Lorenz, Radatz (1993, S. 17), z. B. Akalkulie, Anarithmie, Arithmastenie, Dyskalkulie, Kalkulasthenie, Zahlen-Aphasie ...

De facto bedeuten alle diese Begriffe das Gleiche. Dabei wird durch ans Griechische und Lateinische angelehnte Bezeichnungen versucht, das Phänomen in den Bereich der Krankheiten zu rücken. Dies erscheint teils durchaus mit der Absicht verbunden, die Zuständigkeit für dieses Phänomen der Rechenschwäche der Schule zu nehmen und an private „Institute für Dyskalkulie“, „Zentren für Arithmastenie“ oder andere kommerzielle Einrichtungen mit fantasievoller Namensgebung zu verlagern (Lorenz 2003 b, S. 103).

Bei der Bezeichnung des Phänomens sollte man auch an das Kind denken. Wie wirkt ein bedrohlich klingender Begriff wie Arithmastenie, Dyskalkulie oder Kalkulasthenie auf ein Kind, das diesen Begriff zugeschrieben bekommt?

Mittlerweile ist in der Mathematikdidaktik und in pädagogischen Kontexten der Begriff der Rechenschwäche verbreitet. Der Begriff drückt klar aus, worum es geht. Eine Schwäche – in diesem Fall ein Mangel an tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen – kann durch gezieltes Training gemindert oder sogar überwunden werden. Der Entstehung einer Schwäche kann sogar vorgebeugt werden. Dabei wird der Begriff der Rechenschwäche als synonym angesehen zu den vielen anderen Begriffen wie Rechenstörung oder Dyskalkulie.

## 5. Frage: Welche Hinweise gibt es für ein Vorliegen von Rechenschwäche?

Schipper (2005, S. 20 f.) kristallisiert auf Basis langjähriger Arbeit in einer Beratungs- und Förderstelle für rechenschwache Kinder an der Universität Bielefeld vier Symptomfelder von Rechenschwäche heraus:

### Verfestigtes zählendes Rechnen

Zählendes Rechnen (vgl. Abschnitt 2) ist im Vorschulalter und in der ersten Jahrgangsstufe ganz normal. Wie in Abschnitt 2 dargestellt, entstehen aber schwerwiegende Probleme, wenn es einem Kind nicht gelingt, sich allmählich vom zählenden Rechnen zu lösen und andere Rechenstrategien aufzubauen. Bei nahezu jedem Kind mit Rechenschwierigkeiten hat sich zählendes Rechnen verfestigt. Dabei kann es durchaus sein, dass das Kind auch andere Rechenstrategien kennt und gelegentlich nutzt. Sie sind allerdings nicht ausreichend gefestigt und werden entsprechend nicht systematisch genutzt. Vor allem bei schwierig erscheinenden Aufgaben fällt das Kind auf das scheinbar sicherere Zählen zurück.

### Einseitige Vorstellungen von Zahlen und Operationen

Essentiell für das Rechnen mit größeren Zahlen sind gemäß den Abschnitten 1 und 3 die Anzahlvorstellung von natürlichen Zahlen und darauf aufbauendes Verständnis für das Dezimalsystem als Stellenwertsystem sowie für die Grundrechenarten. Schüler mit Rechenschwäche greifen – insbesondere, wenn sie unsicher sind, – eher auf die *Reihenfolgevorstellung* zurück. Damit können sie die Struktur des Dezimalsystems für eine Orientierung im Zahlenbereich und für das Rechnen nicht sinnvoll nutzen. Sie haben erhebliche Probleme bei der Entwicklung von Grundvorstellungen für Rechenoperationen und von Rechenstrategien, da diese vor allem auf der Anzahlvorstellung für natürliche Zahlen aufbauen (vgl. Abschnitt 1).

### Probleme bei Richtungsunterscheidung

Ein hoher Prozentsatz von Kindern mit Rechenschwäche ist auch noch im zweiten Schuljahr und danach nicht sicher bei der Unterscheidung von links und rechts bzw. von Richtungen. Diese Fähigkeit ist aber eine wichtige Voraussetzung für erfolgreiches Mathematiklernen, denn viele Arbeitsmittel und Veranschaulichungen im Mathematikunterricht basieren auf Richtungen (z. B. Zahlenstrahl, Hunderter-Tafel, Rechenrahmen).

### Intermodalitätsprobleme

Informationen können auf verschiedene Arten dargestellt werden: durch Handlungen, mit Bildern und mit Symbolen (z. B. Buchstaben oder Zahlen). Beim Mathematiklernen in der Schule finden regelmäßige Wechsel zwischen diesen Darstellungsarten statt: Die Schüler handeln mit Material, sie zeichnen Bilder dazu und betrachten Bilder im Buch, sie formulieren Situationen sprachlich, lesen Texte und stellen Rechnungen auf. Derartige wechselseitige Übersetzungen von Handlungen, Bildern und Symbolen gelingen Schülern mit Rechenschwäche oft nicht. Damit hat für sie die Welt der Anschauungsmaterialien mit der Welt der Rechenaufgaben scheinbar wenig zu tun.

## Relevanz solcher Kategorisierungen

Diese genannten vier Symptombfelder sind so zu verstehen, dass erfahrungsgemäß viele Schüler mit Rechenschwäche typischerweise Probleme in einem oder mehreren dieser Felder zeigen. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass die Erscheinungsformen von Rechenschwäche von Kind zu Kind höchst unterschiedlich ausgeprägt sein können – entsprechend der Komplexität des Phänomens der Rechenschwäche und seiner möglichen Ursachen (vgl. Abschnitt 10). Nicht alle rechenschwachen Kinder zeigen Auffälligkeiten in den vier Symptombfeldern, umgekehrt sind nicht alle Kinder mit Problemen in den vier Feldern automatisch rechenschwach.

Dennoch ist fachdidaktisches Wissen über typische Erscheinungsformen von Rechenschwäche ausgesprochen wertvoll für Lehrkräfte, um für dieses Phänomen sensibilisiert zu sein, um Probleme von Kindern erkennen und einordnen zu können sowie um auf Basis weiterer Analysen des mathematischen Denkens der Kinder (vgl. Abschnitt 9) fachdidaktisch fundierte Förderangebote konzipieren und durchführen zu können (vgl. Abschnitt 13).

## Differenziertere Merkmalsbeschreibungen

Gaidoschik (2015, S. 22-64) beschreibt sehr differenziert, ausführlich und auf die einzelnen Jahrgangsstufen der Grundschule bezogen, welche Indizien auf eine Rechenschwäche hinweisen können.

Für eine Lehrkraft bietet eine solche Beschreibung Orientierung, worauf man bei der Analyse der Denkwege von Kindern achten kann, um Rechenschwäche möglichst frühzeitig zu erkennen. Gleichzeitig geben derartige Merkmalsbeschreibungen konkrete Anhaltspunkte für Fördermaßnahmen zur Überwindung von Rechenschwäche bzw. – im Idealfall – für eine frühzeitige Förderung von Kindern, um Rechenschwäche erst gar nicht entstehen zu lassen (vgl. Abschnitte 13 und 14).

Für Schüler der ersten Jahrgangsstufe stellt Gaidoschik (2015, S. 23-41) folgende typische Erscheinungsformen von Rechenschwäche ausführlich dar:

- basale Teilleistungsstörungen (z. B. räumliche Wahrnehmung)
- Schwierigkeiten im Klassifizieren
- Unklarheit über die Begriffe „gleich viel“, „mehr“ und „weniger“
- fehlende Eins-zu-eins-Zuordnung, Zählfehler
- einseitiges ordinales Zahlenverständnis: Zahlen als „Rangplätze“ gedacht
- Zählen statt Rechnen
- unzureichendes Operationsverständnis
- Schwierigkeiten mit zweistelligen Zahlen

Entsprechende differenzierte Merkmalsbeschreibungen werden von Gaidoschik (2015, S. 41-64) auch für die anderen Jahrgangsstufen mit sehr konkretem Bezug zum jeweiligen Unterrichtsstoff im Fach Mathematik angegeben. Dabei betont aber auch er, dass solche Merkmalskataloge lediglich idealisierte Beschreibungen typischer Probleme rechenschwacher Kinder darstellen. Im Einzelfall ist immer eine sensible, fachdidaktisch fundierte Analyse der Denkwege der Kinder erforderlich.

Rechenschwäche kann sich in einer Vielfalt an Erscheinungsformen zeigen. Diagnosebemühungen sollten entsprechend breit konzipiert sein.

## 6. Frage: Wie viele Schüler haben Rechenschwäche?

Die Frage nach der Anzahl der Schüler mit Rechenschwäche ist für die Bildungspolitik und die Bildungsverwaltung von wesentlicher Bedeutung, um entsprechende (Personal-)Ressourcen zur Förderung der Schüler einplanen zu können.

Man muss sich dabei allerdings bewusst sein, dass eine Grenzziehung, wer als rechenschwach und wer als „normal“ gilt, zu einem gewissen Grad auch immer willkürlich ist. Dies hat mehrere Gründe:

- Rechenfähigkeit ist ein komplexes Konstrukt. Für die vielfältigen Anforderungen beim Rechnen sind vielfältige kognitive Prozesse erforderlich. Man kann die Rechenfähigkeit eines Menschen nicht einfach „messerscharf“ auf einer eindimensionalen Skala messen wie etwa die Körpergröße oder das Gewicht. Jedes Diagnoseverfahren bietet jeweils nur eine Perspektive auf die Rechenfähigkeiten eines Menschen. Dies betrifft insbesondere die verschiedenen, verfügbaren Rechentests (vgl. Abschnitt 8). Damit steckt bereits in der Konzeption jedes Diagnoseverfahrens und in seiner Anwendung eine gewisse Willkür, auch wenn man sich dabei auf Theorien und normative Setzungen stützt.
- Des Weiteren besteht eine gewisse Willkür darin, wie die Ergebnisse von Diagnoseverfahren interpretiert werden. Dies betrifft insbesondere die Entscheidung, wann ein Ergebnis als „normal“ und wann es als „nicht normal“ angesehen wird. Bei der Grenze zwischen „normal“ und „rechenschwach“ kann man sich natürlich auf Konventionen einigen, allerdings sind solche Konventionen letztlich willkürliche Grenzziehungen. (Dies ist analog zu Fragen wie: Wie viel Prozent der Bevölkerung sind hochbegabt, wie viel Prozent sind zu dick, wie viel Prozent sind zu groß?) Dennoch sind solche Grenzziehungen natürlich wichtig und praxisrelevant, weil dadurch etwa Fördermaßnahmen begründet werden können.

Aufgrund dieser Freiheiten in der Grenzziehung schwanken in der einschlägigen Fachliteratur die Angaben zum Anteil rechenschwacher Schüler in der Grundschule im Bereich von 2 % bis 20 % (vgl. z. B. Spiegel, Selter 2003, S. 87).

Dabei ist zu beachten, dass es inhaltlich bei Rechenschwäche um arithmetische Fähigkeiten der Grundschulmathematik geht. Deshalb ist vor allem von Interesse, wie hoch der Anteil in der Population der Grundschüler ist. Bei passgenauer Förderung lässt sich die Rechenschwäche im Lauf der Grundschulzeit und ggf. in den Jahrgangsstufen 5 und 6 in der Vielzahl der Fälle beheben bzw. deutlich reduzieren (vgl. Abschnitt 13).

Im Folgenden wird die Begriffsbildung in Abschnitt 1 zugrunde gelegt. Es geht also um Schüler, die einen substanziellen Mangel an tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen aufweisen. Sie haben derart schwerwiegende Schwierigkeiten beim Rechnenlernen, dass diese durch undifferenziertes Weiterlernen im regulären Unterricht nicht ausgeglichen werden können. Diese Kinder brauchen differenzierte Förderung im Unterricht und über den regulären Unterricht hinaus.

Für diese Zielgruppe lässt sich als Fazit der entsprechenden Angaben in der Fachliteratur als Faustregel feststellen:

Von Rechenschwäche betroffen sind etwa 5 % der Grundschüler. Dies entspricht also im Schnitt etwa einem Kind pro Klasse.

Bei gut 400.000 Grundschulern in Bayern sind dies in absoluten Zahlen also gut 20.000 Grundschüler.

## 7. Frage: Warum sind Diskrepanzdefinitionen bzgl. IQ für schulische Ziele ungeeignet?

Es gibt Ansätze zur Definition und Attestierung von Rechenschwäche, die auf einer Diskrepanz zwischen Messwerten für Rechenfähigkeiten und Messwerten für Intelligenz basieren.

In den 1990er Jahren hat die WHO folgende Definition von Rechenstörungen veröffentlicht:

„Rechenstörung: Diese Störung besteht in einer umschriebenen Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft vor allem die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie oder Differential- und Integralrechnung benötigt werden.“ (DIMDI 1994, S. 374)

Mit Bezug auf diese WHO-Definition lässt sich ein sehr simples Diagnoseverfahren für Rechenschwäche durchführen:

Kinder nehmen an einem Intelligenztest und an einem Rechentest teil. In jedem Test wird ein Messwert ermittelt. Wenn der Messwert des Rechentests deutlich schlechter als der Messwert des Intelligenztests ist (z. B. 1,5 Standardabweichungen), dann wird das Attest „Rechenschwäche“ erteilt.

Dieses Verfahren ist formal, mechanistisch und relativ einfach durchzuführen. Es wird aber seit Ende der 1990er Jahre von Seiten der Mathematikdidaktik einhellig abgelehnt, da es pädagogisch und didaktisch unsinnig ist. Die Kritikpunkte z. B. von Gaidoschik (2015, S. 10 ff.), Gasteiger (2016, S. 1), Lorenz (2003, S. 14 ff.), Moser-Opitz (2013, S. 16 ff.) und Schipper (2005, S. 18 f.) sind:

- Wenn ein Schüler den Rechentest *und* den IQ-Test schlecht bearbeitet, wird der geforderte Unterschied zwischen beiden Tests nicht erreicht. Das Label „Rechenschwäche“ wird also nicht vergeben, obwohl die Rechenfähigkeiten gering sind. Wenn dies Auswirkungen auf die mathematische Förderung der Schüler hat, ist dies ungerecht. Alle Schüler mit schwerwiegenden Problemen beim Rechnenlernen sollten spezifisch gefördert werden, nicht nur solche mit hoher Testintelligenz.
- Die Definition ist theoretisch problematisch, denn Intelligenz ist ein vielschichtiges Konstrukt, das auch mathematische Fähigkeiten als Bestandteil hat. Je nach Wahl des Intelligenztests fällt die Korrelation zwischen beiden Tests unterschiedlich aus. Damit hängt die Frage, ob jemand Rechenschwäche attestiert bekommt, von der durchaus willkürlichen Auswahl des IQ-Tests und des Rechentests ab.
- Schüler mit schwerwiegenden Problemen beim Rechnenlernen gelangen bei mangelnder Förderung leicht in einen Teufelskreis, der Misserfolg in vielfältigen Bereichen zur Folge hat: Die Minderleistungen im Rechnen führen trotz intensiven Übens zu Misserfolg in der Schule, zu Schulunlust und damit auch zu Misserfolg in anderen Fächern und beim allgemeinen Lernfortschritt (vgl. Abschnitt 12). Dadurch schneiden die Schüler auch dann in Intelligenztests schlecht ab, wenn es um allgemeine Fähigkeiten geht und etwa mathematische Fähigkeiten ausgeklammert werden. Dann besteht aber nicht die geforderte Diskrepanz zwischen den Ergebnissen des Rechentests und des IQ-Tests. Nach der WHO-Definition kann also eine Rechenschwäche paradoxerweise nicht attestiert werden.
- IQ-Tests und schematisierte Rechentests bestehen in der Regel aus Aufgaben mit jeweils einer einzigen Lösung, die zu bestimmen ist (vgl. Abschnitt 8). Bei der Auswertung wird schematisch gezählt, wie viele Ergebnisse richtig sind. Die Anzahl der richtigen Ergebnisse wird in den Testwert umgerechnet. Es wird mit den Tests in der Regel nicht erfasst, *wie* die Schüler

zu den Endergebnissen der Aufgaben gelangen. Es interessiert nicht, wie das Kind denkt, sondern nur, ob die Ergebnisse richtig sind. So ist es beispielsweise möglich, dass sich ein Schüler eine fehlerhafte Rechenstrategie angeeignet hat und er diese konsequent und systematisch bei allen Aufgaben anwendet. Dennoch sind alle Endergebnisse falsch. Der Rechentest fällt also sehr schlecht aus. Die Ursache, d. h. die fehlerhafte Rechenstrategie, wird dabei nicht analysiert.

- Die WHO-Definition suggeriert, Rechenschwäche sei – ähnlich wie Intelligenz – eine zeitlich relativ stabile Personeneigenschaft. Dies ist aber falsch. Bei vielen Kindern kann Rechenschwäche durch einen zielgerichteten Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und zu Operationen mit Zahlen behoben werden.  
Ein Beispiel aus der Praxis: Ein Schüler hatte von einem Klinikum Dyskalkulie attestiert bekommen. Das Kind besuchte daraufhin ein Jahr lang die staatliche „Beratungs- und Förderstelle für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Lernen von Mathematik“ in Augsburg (vgl. Abschnitt 15). Danach waren die notwendigen Grundvorstellungen zu Zahlen und zu Operationen mit Zahlen aufgebaut und damit die Rechenschwäche überwunden.
- Die WHO-Definition suggeriert, man könne in der Schule „höhere Mathematik“ wie Algebra, Trigonometrie, Geometrie oder Differential- und Integralrechnung erfolgreich betreiben, auch wenn man keine tragfähigen Vorstellungen zu natürlichen Zahlen und Operationen mit diesen besitzt. Dies ist aus Sicht der Mathematik und der Mathematikdidaktik falsch. Das Rechnen mit Brüchen und negativen Zahlen, das Rechnen mit Variablen und Termen, Berechnungen in der Trigonometrie und der Geometrie und das Rechnen mit Funktionen (z. B. Ableiten, Integrieren) bauen ganz zentral auf dem Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Es ist ein Irrglaube anzunehmen, Schüler mit erheblichen Schwierigkeiten beim Rechnen mit natürlichen Zahlen würden vor diesen Schwierigkeiten in der höheren Mathematik nicht ebenso stehen. Dazu nur einige, wenige Beispiele:
  - *Brüche*: Wenn ein Schüler verstehen soll, was  $\frac{3}{8}$  bedeutet, braucht er die Anzahlvorstellung zu natürlichen Zahlen (vgl. Abschnitt 1). (Wenn etwa 3 von 8 Schülern Mädchen sind, dann geht es hierbei um Anzahlen und nicht um Rangplätze – wie der Dritte oder der Achte).  
Die Grundrechenarten für Brüche werden in Jahrgangsstufe 6 auf die Grundrechenarten für natürliche Zahlen aus der Grundschule zurückgeführt. Um zu verstehen, was  $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = 3 \text{ Achtel} + 4 \text{ Achtel}$  ist, sollte man natürlich vorher verstanden haben, was  $3 + 4$  ist.
  - *Negative Zahlen*: Um zu verstehen, was  $(-3) + (-4)$  ist, braucht man Verständnis für  $3 + 4$ .
  - *Terme*: Um zu verstehen, was  $3x + 4x$  ist, muss man verstanden haben, was  $3 + 4$  ist.
  - *Funktionen*: Zum Differenzieren und Integrieren von Funktionen wie etwa  $f(x) = 7x^8$  benötigt man Vorstellungen zum Rechnen mit natürlichen Zahlen.

Definitionen für Rechenschwäche, mit denen nur dann Rechenschwäche attestiert wird, wenn der IQ wesentlich höher als die Rechenleistung ist, sind in Bezug auf schulische Bildungs- und Erziehungsziele unnützlich.



## 8. Frage: Warum sind schematisierte Rechentests wenig geeignet, um Rechenschwäche zu diagnostizieren?

Schematisierte Rechentests enthalten Folgen kurzer Aufgaben, die jeweils spezifische arithmetische Fähigkeiten erfordern (z. B. Addieren, Subtrahieren, Größenvergleich, Erfassung von Anzahlen, Sachaufgaben). Solche Rechentests zur Feststellung von Rechenschwäche werden von Verlagen verkauft. Die Art der Aufgaben unterscheidet sich nicht von üblichen Aufgaben aus Schulbüchern und Übungsmaterialien. Die Auswertung dieser Tests erfolgt schematisch. Schüler füllen die Tests auf Papier aus oder bearbeiten sie an einem Computer. Es wird bei den Aufgaben lediglich das Endergebnis auf richtig oder falsch überprüft. Aus der Anzahl der richtigen bzw. falschen Endergebnisse wird eine Aussage über die Rechenfähigkeiten getroffen. Bei einer Durchführung am Computer kann dies automatisiert erfolgen.

Solche Rechentests sind von den Erstellern in der Regel bereits auf eine große Stichprobe (mehrere hundert oder über tausend Personen) angewendet worden. Dadurch können individuelle Testergebnisse eines Schülers mit den Daten dieser Stichprobe verglichen werden. In der Folge erhält man Angaben, wie ein getesteter Schüler bei der Ermittlung von Rechenergebnissen im Vergleich zur Gesamtpopulation der Gleichaltrigen steht.

*Wie ein Schüler beim Rechnen denkt, welche Grundvorstellungen er zu Zahlen und zu Rechenoperationen hat, welche Strategien er beim Rechnen (im Kopf) nutzt, all dies wird in derartig schematisierten Rechentests nicht erfasst. Deshalb haben solche Rechentests nur eine sehr beschränkte Aussagekraft in Bezug auf die Diagnose von Rechenschwäche. Man stellt zwar fest, dass ein Schüler etwa überdurchschnittlich viele fehlerhafte Rechenergebnisse produziert und ggf. auch, bei welchen Aufgabentypen dies besonders der Fall ist, man bekommt aber keine Hinweise darauf, warum dies so ist. Eine Diagnose hat aber nur dann einen wirklichen Wert, wenn sie als Grundlage für zielgerichtete, inhaltliche Fördermaßnahmen dienen kann. Um einem Schüler zu helfen, ist es deshalb gerade wichtig, zu ergründen und zu analysieren, welche (Fehl-)Vorstellungen und welche (fehlerhaften) Strategien er beim Rechnen verwendet. Kurz: Es ist eine mathematikdidaktische Analyse der Denkwege des Kindes erforderlich (vgl. Abschnitt 9).*

Eine Abgrenzung: Neben schematisierten Rechentests gibt es auch Tests, die etwa als förderdiagnostische Tests oder als lösungsprozessanalytische Tests bezeichnet werden. Hier führt der Testleiter etwa ein strukturiertes Gespräch mit dem Kind durch, stellt dabei mathematische Aufgaben, beobachtet die Bearbeitungsprozesse unter fachdidaktischen Gesichtspunkten und notiert seine Beobachtungen. Ein Beispiel hierfür ist der Jenaer Rechentest (JRT). Mit derartigen Tests wird versucht, die Denkwege von Kindern differenziert zu ergründen, um darauf aufbauend eine inhaltlich passgenaue Förderung anschließen zu können.

Schematisierte Rechentests enthalten kurze arithmetische Aufgaben verschiedener Typen. Registriert wird der Anteil richtiger Endergebnisse. Das individuelle Testresultat kann zur Gesamtpopulation Gleichaltriger in Bezug gesetzt werden. Die Rechenwege werden in der Regel nicht erfasst.

Damit geben derartige Rechentests keinen Aufschluss darüber, welche (Fehl-)Vorstellungen und welche (fehlerhaften) Strategien ein Schüler beim Rechnen nutzt. Solche Informationen sind jedoch für eine langfristig wirkungsvolle, auf die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen abzielende Förderung essentiell.

## 9. Frage: Wie lässt sich Rechenschwäche durch „Denkanalyse“ förderorientiert diagnostizieren?

Mathematisches Denken ist aufgrund der inhaltlichen Komplexität der Mathematik ein vielschichtiger Prozess. Schüler mit Rechenschwäche haben wenig tragfähige Vorstellungen zu Zahlen und zu Operationen mit Zahlen. Sie haben sich ggf. falsche, nicht zielführende Strategien zum Rechnen zu-rechtgelegt (vgl. Abschnitt 1).

Ziel einer Diagnose sollte sein, die Vorstellungen und Denkweisen der Schüler zu ergründen. Nur dies kann dann Grundlage für eine passgenaue Förderung der Schüler sein. Es genügt also nicht, nur in einem Rechentest die Anzahl fal-scher Endergebnisse zu zählen. Vielmehr kommt es darauf an, Einblicke zu gewinnen, *wie* die Kinder denken.

Zielführend ist etwa, die Kinder beim Rechnen zu beobachten und sie zu „lautem Denken“ an-zuregen, d. h. sie sollen ihre Gedanken beim Rechnen sprachlich ausdrücken. Dies kann durch Impulse angestoßen werden wie etwa:

- „Erkläre, wie Du rechnest!“ oder
- „Wie hast Du das gerechnet?“

### Beispiel

$$\begin{array}{ll} 86 - 38 = 52 & 53 - 37 = 24 \\ 34 + 48 = 72 & 63 - 35 = 32 \\ 52 - 16 = 44 & 72 - 46 = 38 \end{array}$$

Ein Schüler verfolgt systematisch die Strategie, Zehner- und Einerstellen getrennt zu verrechnen und bei Subtraktionen das Kleinere vom Größeren abzuziehen (aus Schipper 2005, S. 10).

Die Schüler erhalten dazu Aufgaben zu verschiedenen Anforderungsbereichen der Arithmetik. Ein sehr differenziertes und umfassendes Konzept stellt beispielsweise Gaidoschik dar. In seinem Buch „Rechenschwäche – Dyskalkulie“ (Gaidoschik, 2015, S. 22 ff.) werden für jede der vier Jahrgangsstufen der Grundschule „Symptome“ bzw. fehlerhafte Denkweisen beschrieben, die rechenschwache Schüler typischerweise zeigen. Im Buch „Rechenschwäche vorbeugen“ (Gaidoschik, 2016) ist dies für die Arithmetik in der ersten Jahrgangsstufe noch weiter konkretisiert. Hier findet sich eine Fülle von sehr konkreten Impulsen für Gespräche mit Schülern, um inhaltlich und mit Bezug zur Mathematik zu analysieren, wie die Kinder beim Rechnen denken („Denkanalyse“). Auf diese Weise können Fehl-vorstellungen und fehlerhafte Rechenstrategien aufgedeckt werden.

Ein standardisierter Rechentest schafft dies nicht. Er kann zwar aufzeigen, bei welchen Aufgabenty-pen falsche Ergebnisse entstehen, aber nicht warum.

Für fundierte Diagnostik braucht man also Personen, die sehr genau wissen, worauf es bei der Ent-wicklung von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen ankommt. Die Fachleute für solche inhaltlichen Analysen von mathematischen Denkprozessen der Kinder sind Per-sonen, die eine Ausbildung in Mathematikdidaktik im Bereich der Arithmetik besitzen, also insbeson-dere Grundschullehrkräfte, Förderlehrkräfte und Sonderpädagogen.

Rechenschwäche lässt sich durch eine inhaltliche Analyse der mathematischen Denkprozesse von Kindern beim Rechnen feststellen und individuell genauer abgrenzen. Dies ist Vorausset-zung und Grundlage für eine passgenaue Förderung der Kinder, die auf die Entwicklung tragfä-higer Vorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen abzielt.

## 10. Frage: Welche Ursachen gibt es für Rechenschwäche?

Es gibt nicht die eine, klar abgrenzbare Ursache von Rechenschwäche. Nach Gaidoschik (2015, S. 14 ff.), Lorenz (2003 b, S. 106 ff.) und Schipper (2005, S. 24 ff.) lassen sich Risikofaktoren in Ursachenfeldern identifizieren. Sie begünstigen die Entstehung von Rechenschwäche – insbesondere, wenn mehrere Risikofaktoren zusammentreffen. Allerdings führt nicht jeder Risikofaktor zwangsläufig zu einer Rechenschwäche im Sinne eines kausalen Zusammenhangs. Diese Risikofaktoren werden in der genannten Fachliteratur ausführlich dargestellt, im Folgenden kann nur ein verkürzter Einblick gegeben werden.

### Ursachenbereich „Kind“

- *Individueller Entwicklungsverlauf:* Es ist ganz normal, dass sich Kinder unterschiedlich entwickeln. (So sind wir Menschen gemacht.) In der Grundschulzeit können zwischen Kindern gleichen Alters Entwicklungsunterschiede bestehen, die durchaus bis zu fünf Jahren einer „Durchschnittsentwicklung“ entsprechen. Dies trifft in der Schule auf Regelungen zu fachlichem Lernen z. B. in Lehrplänen und Schulbüchern. Es ist dabei durchaus normal, dass ein Kind in der ersten Jahrgangsstufe in seiner kognitiven Entwicklung noch nicht so weit ist, um tragfähige Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen gemäß Lehrplan aufzubauen. Auf solche Entwicklungsunterschiede muss das Schulsystem flexibel reagieren (vgl. Abschnitte 13 bis 15).
- *Fehlerhafte Vorstellungen und Rechenstrategien:* Wenn Kinder – z. B. aufgrund ihres aktuellen Entwicklungsstandes – die Lernangebote in der Schule zum Rechnen noch nicht adäquat nutzen können, legen sie sich selbst eigene Vorstellungen und Strategien zum Rechnen zu recht, die ggf. nicht zielführend und nicht erweiterbar sind. Die Diagnose und Förderung muss dann bei diesen individuellen Vorstellungen und Strategien ansetzen, sie aufdecken und sie zu tragfähigen Vorstellungen und Rechenstrategien weiterentwickeln (vgl. Abschnitt 13).
- *Psychische Faktoren:* Das Selbstbild eines Kindes, sein Selbstbewusstsein, Emotionen und Motivationen haben einen maßgeblichen Einfluss auf das Lernen und werden umgekehrt auch durch Erfahrungen beim Lernen beeinflusst. Bei ungünstigen Voraussetzungen des Kindes kann ein sich verstärkender „Teufelskreis Rechenschwäche“ entstehen (vgl. Abschnitt 12): Minderleistungen im Fach Mathematik wird mit verstärktem Üben begegnet. Wenn pures Üben aber nur fehlerhafte Zahlenvorstellungen und Rechenstrategien verfestigt, ohne dass an tragfähigen Vorstellungen und Strategien gearbeitet wird, dann werden die Misserfolge nur noch größer. Je nach psychischer Verfassung des Kindes können Selbstzweifel, negative Emotionen, Schulunlust und ein negatives Selbstbild des Kindes die Folge sein. Dies wiederum wirkt auf die Rechenschwäche verstärkend und kann zu Abneigung, Angst, Denkblockaden oder Aggression gegenüber allem, was mit Zahlen zu tun hat, führen. Ohne eine Förderung des Kindes, die den Gesamtkomplex der Rechenschwäche mit seinem Ursachengeflecht im Blick hat, wird die Rechenschwäche nicht verschwinden.
- *Basale Teilleistungsstörungen:* Das Lernen von Mathematik baut darauf auf, dass Kinder mathemathikhaltige Situationen wahrnehmen und kognitiv verarbeiten. Hierbei sind insbesondere das Sehen, das Hören, das Fühlen und die Verknüpfung verschiedener Sinneseindrücke nötig. Im kognitiven Bereich sind etwa räumliche Orientierung, die Unterscheidung von Richtungen und die Unterscheidung von Vorder- und Hintergrund nötig. Störungen in diesen Bereichen können natürlich das Lernen – insbesondere auch des Rechnens – behindern. Allerdings bestehen hier keine einfachen, kausalen Wenn-Dann-Beziehungen. Rechnen in seiner Gesamtkomplexität ist mehr als die Summe „basaler Teilleistungen“. Schwächen in einem Bereich können durch Stärken in anderen Bereichen ausgeglichen werden. Dennoch

bedürfen Schüler mit Defiziten bzw. Entwicklungsverzögerungen in diesen Bereichen besonderer Förderung (z. B. auch durch Ergotherapie oder Psychomotorik).

## Ursachenbereich „Schule“

Auch das Schulsystem und der Mathematikunterricht können für die Entstehung von Rechenschwäche (mit-)verantwortlich sein. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn im Unterricht

- nicht ausreichend auf die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen der Kinder durch differenzierende Lernangebote eingegangen wird,
- nicht genügend Gewicht auf die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen gelegt wird – insbesondere mit dem Ziel der Ablösung vom zählenden Rechnen (vgl. Abschnitt 2),
- Rechenstrategien nicht eng mit zugehörigen Grundvorstellungen – insbesondere auf Basis der Anzahlvorstellung zu natürlichen Zahlen – verbunden werden (vgl. Abschnitt 1),
- keine ausreichende Förderung grundlegender Fähigkeiten zur Entwicklung von Zahlenverständnis erfolgt (z. B. Mengenerfassung, Links-/Rechts-Unterscheidung, vgl. Abschnitt 5),
- Bezüge zwischen Anschauungsmitteln für das Rechnen und abstrakten Darstellungen nicht intensiv genug hergestellt werden (Modalitätstransfer, vgl. Abschnitt 5),
- Denk- und Rechenprozesse von Schülern nicht differenziert erfasst werden (vgl. Abschnitt 9) und
- Kinder mit Rechenproblemen nicht verständnisorientiert gefördert werden (vgl. Abschnitt 13).

Rechenschwäche kann also auch durch schlechten Mathematikunterricht hervorgerufen werden.

## Ursachenbereich „Familiäres Umfeld“

Die Eltern bzw. die Familie haben natürlich erheblichen Einfluss und damit auch Verantwortung für die Entwicklung von Kindern. Wenn Eltern beispielsweise die allgemeine kognitive Entwicklung von Kindern nicht adäquat unterstützen, entstehen dadurch selbstverständlich Hemmnisse für schulisches Lernen in allen Bereichen – insbesondere im Bereich der Sprache, des Sachwissens und der Mathematik. „So ist es für das Mathematiklernen z. B. von großer Bedeutung, dass die Kinder in der vorschulischen Zeit ausreichend Gelegenheit hatten, sich auf spielerische Weise arithmetische und räumliche Erfahrungen anzueignen.“ (Schipper 2005, S. 25)

Eltern können aber auch durch gutgemeinte Hilfen zu einer Verschärfung von Rechenschwäche beitragen. Dies ist etwa der Fall, wenn Eltern den Schülern „Rechentricks“ beibringen, die nur schematisch ausgeführt werden und nicht mit entsprechenden Vorstellungen verbunden werden (z. B. stellenweises Addieren und Subtrahieren, vgl. Beispiel in Abschnitt 9). Solche „Rechentricks“ stehen oft im Gegensatz zu den didaktischen Bemühungen der Grundschullehrkraft, Vorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen aufzubauen und systematisch Verständnis für Strategien zu entwickeln. Die Schüler scheinen mit den „Rechentricks“ der Eltern vordergründig schneller zu Rechenergebnissen zu kommen. Allerdings führt dies zu vollständigem Scheitern, wenn die Schüler in Situationen kommen, in denen die „Rechentricks“ nicht mehr funktionieren. Dann steckt man durch das Lernen von „Rechentricks“ in einer Sackgasse, die ein gründliches „Umlernen“ erfordert, welches von rechenschwachen Schülern in der Regel nicht selbstständig geleistet werden kann.

Rechenschwäche kann durch vielfältige Risikofaktoren entstehen. Sie können in der Person des Kindes, im schulischen Unterricht oder in der Familie begründet sein. Nicht jeder Risikofaktor führt zwangsläufig zu einer Rechenschwäche. Das Wissen um Risikofaktoren kann helfen, Diagnosen und Fördermaßnahmen für rechenschwache Kinder passgenau zu gestalten.

## 11. Frage: Warum hilft nur Üben nicht?

Üben ist wichtig für das Lernen von Mathematik. Durch Üben wird inhaltliches Wissen gefestigt (z. B. Zahlzerlegungen, Einmaleins), durch Üben werden aber auch Rechenstrategien verankert und Rechenverfahren automatisiert.

Von daher wäre es naheliegend, Schüler mit Rechenschwäche verstärkt zum Üben anzuhalten (auch im Rahmen von Nachhilfe), in der Hoffnung, dass dadurch der „Knoten“ irgendwann platzt.

Solch eine Sichtweise greift jedoch zu kurz und kann dem Kind sogar mehr schaden als nützen.

Entscheidend ist, was das Kind beim Üben denkt. Gemäß der Begriffsbildung in Abschnitt 4 verfügen Kinder mit Rechenschwäche über keine tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen. Dies führt zu substanzial fehlerhaften Denkweisen beim Umgang mit Zahlen. Die Schüler sind in der Regel dem zählenden Rechnen verhaftet und nutzen dabei eher die Reihenfolgevorstellung natürlicher Zahlen als die Anzahlvorstellung.

Wenn das Kind einfach nur verstärkt üben soll, ohne dass zuvor oder gleichzeitig systematisch an tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen gearbeitet wird, dann wird das Kind allenfalls bestehende fehlerhafte Zahlenvorstellungen und wenig zielführende Rechenstrategien verfestigen oder es wird zunehmend Rechnungen verständnislos auswendig lernen.

Die Folgen sind offensichtlich: Das verstärkte Üben von Unverstandenen führt nicht wirklich weiter, die fehlerhaften Denkweisen bleiben erhalten, in ungewohnten Rechensituationen – z. B. in neuen Zahlenräumen bzw. in höheren Jahrgangsstufen – wird das Kind scheitern, weil transferfähiges Wissen fehlt.

Abgesehen von diesen mathematikbezogenen Problemen können sich sehr ernsthafte Folge- und Begleitprobleme ergeben. Die ständigen Misserfolge beim Rechnen – trotz großer eigener Anstrengung und vieler Bemühungen der Umwelt – können zu Selbstzweifeln des Kindes, einem negativen Selbstbild, genereller Lernunlust, Schulangst bis hin zu schweren psychischen Problemen führen. In Abschnitt 12 wird dieser „Teufelskreis Rechenschwäche“ weiter ausgeführt.

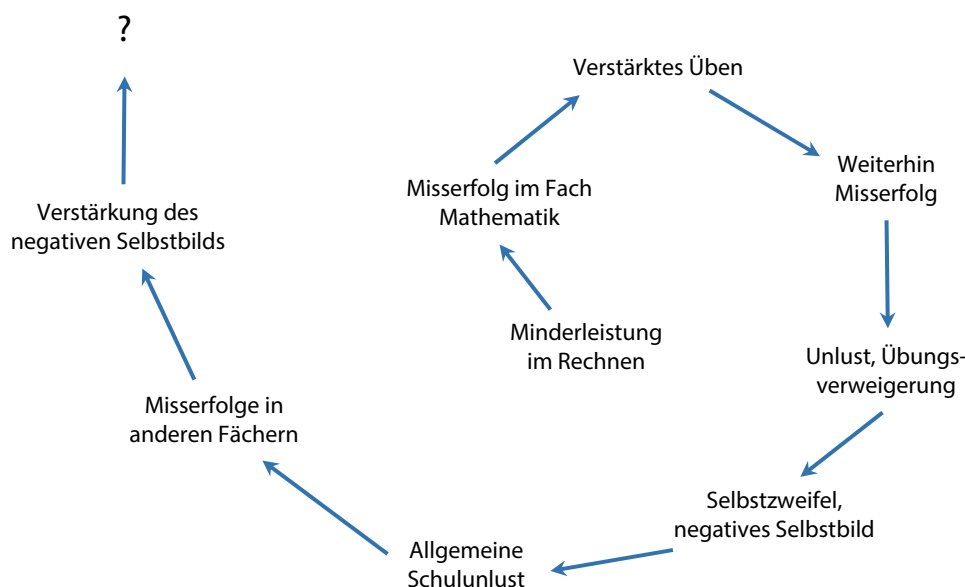
Üben hat für rechenschwache Kinder nur dann Sinn, wenn dies gleichzeitig und bewusst mit der Entwicklung von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen sowie darauf aufbauenden Rechenstrategien verbunden ist (beispielsweise zur Überwindung von zählendem Rechnen).

Üben ohne eine solche Entwicklung von Verständnis festigt nur Fehlvorstellungen und fehlerhafte Denkweisen. Die Probleme rechenschwacher Kinder würden dann nur verschärft.

## 12. Frage: Wie kann Rechenschwäche zu einem Teufelskreis führen?

Gaidoschik (2015, S. 11) beschreibt, wie Schüler in einen „Teufelskreis Rechenschwäche“ geraten können:

- Ein Kind hat Minderleistungen im Rechnen aufgrund von Fehlvorstellungen zu Zahlen und fehlerhaften Rechenstrategien.
- Das Kind soll verstärkt üben. Es wird dabei aber nicht systematisch an tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen gearbeitet. Durch pures Üben werden nur bestehende fehlerhafte Zahlenvorstellungen und Rechenstrategien verfestigt.
- Die Misserfolge beim Rechnen werden dadurch nur noch größer. Auch ein Mehr an Üben hilft nicht wirklich weiter.
- Das Kind erhält regelmäßig die Rückmeldung, dass es nicht rechnen kann.
- Dies führt zu Unlust und Übungsverweigerung zunächst im Fach Mathematik.
- Als Folge entstehen generelle Selbstzweifel, negative Emotionen, ein negatives Selbstbild des Kindes und mangelndes Selbstbewusstsein – weit über das Fach Mathematik hinaus.
- Dies führt zu allgemeiner Schulunlust, Frustration, Lernverweigerung und ggf. Verhaltensauffälligkeiten auch in anderen Fächern.
- In der Folge hat das Kind dauerhafte Misserfolge auch in Fächern, in denen zunächst gar keine Probleme bestanden.
- Dies verstärkt wiederum das negative Selbstbild des Kindes. Ernsthaftige psychische Probleme können die Folge sein.



Ohne eine Förderung des Kindes, die das Kind in seiner Gesamtpersönlichkeit sieht, ist ein Ausweg aus einem derartigen Teufelskreis kaum möglich. Ein Förderstrang muss dabei den Gesamtkomplex der Rechenschwäche mit seinem Ursachengeflecht (vgl. Abschnitt 10) angreifen und auf die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen sowie darauf basierender Rechenstrategien abzielen. Daneben ist bei psychischen Problemen des Kindes die Hilfe entsprechender Therapeuten aus dem medizinischen Bereich erforderlich.

Rechenschwäche kann zu einem Teufelskreis führen, der Misserfolge in vielen Fächern, generelle Schulunlust, ein negatives Selbstbild und psychische Probleme hervorrufen kann.

## 13. Frage: Wie können rechenschwache Schüler gefördert werden?

Das Phänomen der Rechenschwäche weist eine hohe Komplexität auf, denn

- Rechnen ist ein sehr komplexer kognitiver Prozess,
- die Ursachen von Rechenschwäche können sehr vielfältig sein (vgl. Abschnitt 10),
- Rechenschwäche kann Wirkungen auf verschiedenen Ebenen hervorrufen (vgl. Abschnitt 12).

Dementsprechend gibt es keine „einheitliche Standardförderung“ für rechenschwache Kinder. Vielmehr ist auf Basis einer differenzierten Diagnose der Schwierigkeiten und ihrer Ursachen eine individuelle Förderung nötig. Gemäß den Ursachenkomplexen aus den Abschnitten 5 und 10 ist für Schüler mit Rechenschwäche beispielsweise Folgendes von Bedeutung:

### Fachbezogene Förderung

Der Schlüssel zur Überwindung von Rechenschwäche ist der Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen sowie die Entwicklung zielführender Rechenstrategien.

- Wenn ein Schüler etwa in der Reihenfolgevorstellung von Zahlen verhaftet ist (vgl. Abschnitt 1), sollte eine behutsame, fachdidaktisch fundierte Weiterentwicklung seiner Zahlenvorstellungen in Richtung von Anzahlvorstellungen erfolgen. Auf dieser Basis sollte dann Verständnis für das Stellenwertsystem und die Dezimalschreibweise aufgebaut werden.
- Wenn ein Schüler das zählende Rechnen verfestigt hat, dann ist eine fachdidaktisch fundierte Weiterentwicklung seiner Rechenstrategien erforderlich. Hierbei sind fachliche Zusammenhänge zwischen Zahlen und Rechnungen entscheidend (z. B. Zerlegen von Zahlen, Verdoppeln, Halbieren, Nachbaraufgaben, Tauschaufgaben etc.).

Hierzu gibt es eine Fülle an fachdidaktisch fundierten Konzepten und Materialien, die für jede Lehrkraft leicht zugänglich sind. Beispiele sind die Werke von Gaidoschik (2014, 2015, 2016), von Wittmann, Müller (2015) als Teil des Programms „Mathe 2000+“ oder auch die Standard-Schulbücher samt Begleitmaterialien der Lehrmittelverlage. Sie können unmittelbar in der Schulpraxis zur fachbezogenen Förderung der Kinder eingesetzt werden. Entscheidend ist dabei, *wie* man mit den Materialien arbeitet. Ziel muss die Entwicklung von Vorstellungen und von Verständnis für Zahlen und das Rechnen sein. Fehlendes Verständnis kann nicht durch Üben ersetzt werden. Ein Üben ohne Verständnis führt nur zur Verfestigung von Fehlerstrategien oder zum verständnislosen Auswendiglernen von Rechnungen (vgl. Abschnitt 11).

Exemplarisch werden einige Schlagworte zu Fördermaßnahmen aus Gaidoschik (2016) aufgezählt. Sie sind dort sehr konkret und sehr leicht nachvollziehbar beschrieben:

- Aufmerksamkeit der Kinder auf Anzahlen lenken
- Die Fragen „Wie viele?“ und „Der wievielte?“ unterscheiden
- Anzahlen vergleichen, ohne zu zählen
- Anzahlen mit den Fingern unmittelbar zeigen
- Zahlen im Zehnerfeld darstellen
- Ziffern-Üben mit Zahlen-Denken verbinden
- Sprech- und Schreibweisen zum Zerlegen und Ergänzen von Zahlen entwickeln
- Zuerst handeln, dann schreiben
- Materialien verdeckt einsetzen
- Innere Bilder von Handlungen aufbauen
- Handlungen in Schrift übersetzen und wieder zurück
- Zahlen zerlegen mit System

- Verdoppeln und halbieren auf verschiedenen Wegen
- Durch Automatisierung sichere Stützpunkte schaffen
- Freude am geschickten Rechnen vermitteln
- Bündel bilden und entbündeln
- Bedeutung des stellengerechten Schreibens vermitteln
- Rechenstrategien bewusstmachen
- Messen und schätzen

## Verständnis für die psychische Notlage des Kindes

In Abschnitt 12 wurde skizziert, welche ernsthafte Folgeprobleme – weit über das Fach Mathematik hinaus – eine Rechenschwäche hervorrufen kann (z. B. Selbstzweifel, negatives Selbstbild, Schulunlust, Lernverweigerung, Verhaltensauffälligkeiten, ...). Gaidoschick (2015, S. 120 f.) betont, dass Lehrkräfte hierauf mit emotionaler Wärme reagieren sollten, um dem Kind bei der Überwindung seiner als persönlich erlebten Krise zu helfen. Negative Rückmeldungen sollten soweit möglich vermieden werden, um den „Teufelskreis Rechenschwäche“ (vgl. Abschnitt 12) nicht noch weiter zu verstärken. Stattdessen sollten individuelle Fortschritte des Kindes mit sachbezogenem Lob gewürdigt werden, um durch positive Rückmeldungen Mut und Kraft für weitere Lernanstrengungen zu geben.

## Kurzfristige Entlastungen

Die Überwindung einer Rechenschwäche stellt für ein Kind eine gewaltige kognitive Herausforderung dar. Einerseits soll es an Problemen arbeiten, die thematisch mit dem aktuellen Schulstoff evtl. gar nichts mehr zu tun haben und bei denen die Mitschüler die entsprechenden Lernprozesse bereits in Vorjahren vollzogen haben. Andererseits kommt aber zudem auch im regulären Unterricht ständig Neues auf das Kind zu. Beim Lernen des Neuen ist das Kind gegenüber Mitschülern wiederum im Nachteil, weil Verstehensgrundlagen aus vorigem Unterricht bzw. Vorjahren fehlen. Dadurch entsteht leicht eine dauerhafte Überlastung des Kindes, die eine Überwindung der Rechenschwäche sehr gefährden kann.

Im Einzelfall sollte deshalb von der jeweiligen Lehrkraft geprüft werden, wie dem Kind zeitweise Entlastungen von anderen schulischen Anforderungen gewährt werden können. Dies kann beispielsweise sein:

- zeitweise auf Notengebung verzichten (vgl. Abschnitt 16),
- zeitweise den neuen Lernstoff im Fach Mathematik für das Kind im Vergleich zu den Mitschülern reduzieren, bis Verstehensgrundlagen aufgearbeitet sind,
- zeitweise den Unterricht für das Kind in anderen Fächern reduzieren, um damit während der regulären Schulzeit Freiräume für individuelle Fördermaßnahmen zur Überwindung der Rechenschwäche zu gewinnen,
- zeitweise zusätzliche Hilfsmittel im Klassenunterricht bereitstellen (z. B. Einmaleins-Tabelle), damit sich das Kind mit diesen Hilfen leichter am regulären Unterricht beteiligen kann – wobei es das mit dem Kind zu vereinbarende Ziel ist, die vorübergehenden Hilfestellungen durch individuelle Fördermaßnahmen und ein Aufarbeiten der Rückstände überflüssig zu machen.

## Förderung von Wahrnehmung und Motorik

Wie bereits in Abschnitt 10 beschrieben, baut das Lernen von Mathematik darauf auf, dass Kinder mathemathikhaltige Situationen wahrnehmen und kognitiv verarbeiten. Im Bereich der Wahrnehmung sind insbesondere das Sehen, das Hören, das Fühlen und die Verknüpfung verschiedener Sinneindrücke nötig. Hierauf bauen Handlungen beispielsweise mit didaktischen Materialien auf, um mathematische Zusammenhänge im wörtlichen Sinne zu begreifen. Darüber hinaus sind im kogni-



tiven Bereich etwa räumliche Orientierung, die Unterscheidung von Richtungen und die Unterscheidung von Vorder- und Hintergrund nötig. Störungen in diesen Bereichen können natürlich das Lernen – insbesondere auch des Rechnens – behindern.

Natürlich bedürfen Schüler mit Entwicklungsverzögerungen bzw. Defiziten in diesen Bereichen besonderer Förderung. Hier kann neben den Förderangeboten von Seiten des Schulsystems (z. B. durch Förderlehrkräfte oder Sonderpädagogen) etwa Ergotherapie, Physiotherapie oder psychomotorische Förderung hilfreich sein (vgl. z. B. Zimmer 2010).

## Einbezug der Erziehungsberechtigten

Die Familie eines Kindes hat erheblichen Einfluss auf die Lernentwicklung des Kindes. Sie kann lernerunterstützend wirken (z. B. durch eine Wertschätzung schulischen Lernens, durch eine Stärkung der Persönlichkeit des Kindes oder durch die Gestaltung eines lernförderlichen Umfelds). Die Familie kann schulische Anstrengungen aber auch hemmen oder konterkarieren (z. B. durch eine Geringschätzung schulischen Lernens, durch die Vermittlung eines negativen Selbstbildes an das Kind oder durch „Nachhilfe“ mit verständnislos anzuwendenden „Rechentricks“ von geringer Tragweite, vgl. Abschnitt 10).

Deshalb sollten Erziehungsberechtigte über schulische Maßnahmen und deren Hintergründe zur Überwindung von Rechenschwäche stets informiert werden. Im Idealfall arbeiten Schule und Familie dabei Hand in Hand.

## Psychische Hilfe

In Abschnitt 12 wurde der „Teufelskreis Rechenschwäche“ dargestellt. Wenn die Rechenschwäche mit psychischen Problemen verquickt ist (z. B. Schulangst, negatives Selbstkonzept, Depression, Aggression), so sind neben Schulpsychologen auch außerschulische medizinische bzw. psychologische Therapieeinrichtungen einzubinden.

In jedem Fall sollten alle an der Förderung des Kindes beteiligten Einrichtungen und Personen eng zusammenarbeiten.

Der Schlüssel zur Überwindung von Rechenschwäche ist der Aufbau von mathematischem Verständnis, insbesondere von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen sowie Einsicht in Rechenstrategien. Dazu ist gezielte mathematikdidaktische Förderung des Kindes nötig.

Je nach Situation des Kindes sollte diese durch weitere Begleitmaßnahmen (z. B. zur Verminderung von schulischem Stress) unterstützt werden.

## 14. Frage: Wie kann man einer Rechenschwäche vorbeugen?

Wie in Abschnitt 10 dargestellt, ist das Ursachengeflecht zur Entstehung von Rechenschwäche komplex. Es wäre einseitig und ungerecht, die Gründe für Rechenschwäche nur „im Kind“ zu suchen.

### Guter, verständnisfördernder Mathematikunterricht

Auf Basis langjähriger Arbeit mit rechenschwachen Kindern kommt Gaidoschik (2016) zu folgendem Ergebnis:

Es „drängt sich bei der Förderarbeit mit sogenannten ‚rechenschwachen‘ Kindern erschreckend oft der Eindruck auf, dass diese vieles einfach deshalb nicht können, weil sie dafür bislang *keine entsprechende Förderung* erhalten haben. Zumindest bei diesen Kindern ist ‚Rechenschwäche‘ nicht Ausdruck einer prinzipiellen Beeinträchtigung, sondern Ergebnis davon, dass wichtige Anregungen bislang unterblieben sind“ (S. 9).

Daraus ergeben sich in Kombination mit den Überlegungen aus den vorhergehenden Abschnitten unmittelbare Folgerungen für didaktische Maßnahmen zur Vermeidung von Rechenschwäche in Kindertagesstätten und Grundschulen.

Mit Sensibilität für den aktuellen Entwicklungsstand des Kindes sollten bereits *vor* dem Rechnenlernen etwa die Wahrnehmung mathemathikhaltiger Situationen, die Orientierung im Raum, das Erfassen von Raumlagebeziehungen sowie das Erfassen und Vergleichen von Anzahlen (Mengenvorstellung) in vielfältiger Weise gefördert werden.

*Beim* Rechnenlernen kommt es entscheidend darauf an, dass tragfähige Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen sowie Verständnis für Rechenstrategien (vgl. Abschnitt 1) aufgebaut werden, damit Rechenschwäche möglichst erst gar nicht entsteht. Exemplarisch seien folgende Maßnahmen zur Vermeidung von Rechenschwäche genannt, die Gaidoschik (2015, S. 65 ff.) ausführlich darstellt:

- Frühzeitiges Absichern der Eins-zu-eins-Zuordnung sowie der quantitativen Grundbegriffe „gleich viel“, „mehr“ und „weniger“
- Frühzeitige Überprüfung des Zahlenverständnisses
- Aufbau eines „Fingerbildes“ der Zahlen bis 10
- Erarbeitungsmaterial als „Leiter“ statt als „Krücke“
- Aufbau von Zahlwissen und Rechenfertigkeit im Zahlenraum bis 10 durch „vergleichendes Rechnen“
- Zahlenzerlegungen durch Einsicht in die Zerlegungshandlung
- Gezieltes „Automatisieren“ mithilfe einer Lernkartei
- Vermeidung von Missverständnissen am Zahlenstrahl
- Absichern des Zehner-Einer-Verständnisses
- Frühzeitige Vermeidung von zählendem Rechnen im Zahlenraum bis 20 bzw. 100
- Aufbau eines „inneren Stellenrasters“ gegen den „Zifferntausch“
- Gezieltes Hör-Training
- Bündelungsgedanken handelnd erarbeiten
- Vermeidung von Störungen beim Zehnerüber- und -unterschreiten
- Erarbeitung des Zahlenstrahls als Längendarstellung der Zahlen
- Absichern des Operationsverständnisses für die Grundrechenarten
- Größtmöglicher zeitlicher Spielraum für die Automatisierung des Einmaleins
- Automatisieren des Einmaleins mit Schwerpunkt auf Querverbindungen
- Lernen des Einmaleins erst nach Absichern aller rechnerischen Voraussetzungen

Im Mathematikunterricht muss Raum dafür bestehen, dass sich Schüler in mathematischen Situationen erproben und sie ggf. (Fehl-)Vorstellungen äußern, um dadurch tragfähige Vorstellungen zu entwickeln.

### **Förderung allgemeiner kognitiver und motorischer Fähigkeiten**

Wie bereits in Abschnitt 10 beschrieben, ist es eine entscheidende Voraussetzung für das Lernen von Mathematik, dass Kinder mathemathikhaltige Situationen wahrnehmen und kognitiv verarbeiten. Ein Handeln mit didaktischen (Anschauungs-)Materialien kann nur zu intendierten mathematischen Denk- und Lernprozessen führen, wenn die Schüler auch die erforderlichen motorischen und kognitiven Fähigkeiten besitzen (z. B. räumliche Orientierung, Unterscheidung von Richtungen, Mengenvorstellungen).

Vielfältige Frühförderung im Vorschulalter (z. B. durch Spielen in der dreidimensionalen Welt) – zuhause und in der Kindertagesstätte – erleichtert eine entsprechende individuelle Entwicklung. Bei Entwicklungsverzögerungen des Kindes können gezielte Therapien (z. B. Ergotherapie, Physiotherapie oder psychomotorische Förderung) helfen, Risiken zur Entstehung von Rechenschwäche zu vermeiden.

Guter, verständnisfördernder Mathematikunterricht ist ein entscheidender Schlüssel zur Vorbeugung von Rechenschwäche.

Daneben sollten das Elternhaus und (vor-)schulische Bildungseinrichtungen die natürliche Entwicklung allgemeiner kognitiver und motorischer Fähigkeiten bestmöglich unterstützen.

## 15. Frage: Welche Organisationsformen fachbezogener Förderung gibt es im Schulsystem?

In Bezug auf die Organisation fachbezogener Förderung für rechenschwache Kinder sind verschiedene Formen sinnvoll – insbesondere auch in Kombination.

### Binnendifferenzierender Unterricht

Guter Mathematikunterricht geht auf die Vielfalt der Schüler ein und berücksichtigt insbesondere ihre unterschiedlichen Fähigkeiten. Dementsprechend sollte der reguläre Mathematikunterricht auch bewusst dafür genutzt werden, Schüler mit Rechenschwäche fachbezogen zu fördern, um ihre Defizite zu überwinden. Dazu sind binnendifferenzierende Unterrichtsmethoden in der Mathematikdidaktik seit Jahren etabliert. Zwei Beispiele:

- Beim Konzept der natürlichen Differenzierung erhalten Schüler in offenen Lernumgebungen Impulse für mathematisches Arbeiten (vgl. z. B. Hirt, Wälti 2008). Bei dieser Form der Differenzierung arbeiten alle Schüler einer Klasse am gleichen Thema. Die zugehörigen Arbeitsaufträge zeichnen sich allerdings durch inhaltliche Offenheit aus. Die Schüler können verschiedene Aspekte eines Themas bearbeiten, sie können dabei in verschiedene Richtungen gehen und auf verschiedenen Niveaus lernen. Dadurch kann jeder Schüler an seine individuellen mathematischen Kompetenzen anknüpfen und diese weiterentwickeln. Leistungsschwächere Schüler gehen dabei etwa einfacheren Aspekten des Themas nach, haben aber persönliche Erfolgserlebnisse, wenn sie eigene Ideen gewinnen und diese in der Klassengemeinschaft vorstellen dürfen. Sie machen dadurch im Mathematikunterricht die Erfahrung: Ich kann etwas! Dies fördert in Bezug auf das Fach Mathematik Selbstbewusstsein und Ich-Stärke, es schafft positive Emotionen und Motivation. Leistungsstärkere Schüler können währenddessen komplexeren Aspekten des Themas nachgehen und auf höherem Niveau lernen. So werden rechenschwache Kinder und besonders leistungsstarke Kinder im regulären Unterricht gleichzeitig und gemeinsam gefördert. Methodisch ist in derart gestaltetem Unterricht ein flexibler Wechsel aus Phasen der Einzelarbeit, Partnerarbeit, Kleingruppenarbeit, Präsentationen und Diskussionen im Klassenplenum sowie Zusammenfassungen und Ergebnissicherungen durch die Lehrkraft sinnvoll.
- Eine andere Form der Binnendifferenzierung liegt vor, wenn die Schüler im Klassenverband an unterschiedlichen Themen arbeiten. Auch dies kann natürlich für Schüler mit Rechenschwäche sehr sinnvoll sein. Während sich der Großteil der Klasse etwa mit einer Freiarbeit – ggf. auch in einem anderen Fach – beschäftigt, kann sich die Lehrkraft Schülern mit Rechenschwäche zuwenden und diesen gezielte Förderung (vgl. Abschnitt 13) zukommen lassen.

### Einzel- und Kleingruppenförderung im Vormittagsunterricht

Bei allen Maßnahmen der Binnendifferenzierung im regulären Unterricht kann es für rechenschwache Kinder ein entscheidender Vorteil sein, wenn sie zeitweise aus dem regulären Vormittagsunterricht herausgenommen werden und einzeln oder in einer Kleingruppe individuell gefördert werden. Dies ist insbesondere dann geboten, wenn eine erhebliche Diskrepanz zwischen den Fähigkeiten der rechenschwachen Kinder und dem Unterrichtsstoff des regulären Mathematikunterrichts besteht – also insbesondere in den Jahrgangsstufen 2, 3 und 4. Den Schülern fehlen etwa Grundvorstellungen, die sie in Jahrgangsstufe 1 hätten entwickeln sollen. Die zugehörige spezifische Förderung außerhalb des Klassenverbands sollte durch Lehrkräfte erfolgen, also etwa Grundschullehrkräfte, Förderlehrkräfte und Sonderpädagogen. Sie sind Fachleute für den Aufbau von Vorstellungen für Zahlen und die Entwicklung von Verständnis für Rechenstrategien.

## Beratungs- und Förderstellen für Kinder mit Rechenschwäche im Schulbereich

Es gibt mittlerweile in Bayern staatliche Beratungs- und Förderstellen für Schüler mit Rechenschwäche. Seit Beginn des Schuljahrs 2017/18 sind Strukturen geschaffen und personelle Ressourcen bereitgestellt, um solche Stellen in jedem Regierungsbezirk in Bayern einzurichten. An diese Stellen wenden sich Lehrkräfte und Eltern, wenn die Rechenschwäche von Kindern besonders stark ausgeprägt ist oder auch wenn die Grundschule der Kinder keine passende Förderung anbieten kann.

Diese Beratungs- und Förderstellen sind jeweils an Grundschulen oder auch an Schulämter angeschlossen; hier arbeiten Grundschullehrkräfte und Förderlehrkräfte vor- und/oder nachmittags mit Kindern mit Rechenschwäche. Auf Basis einer fachbezogenen Diagnose werden gezielt Grundvorstellungen zu Zahlen und zum Rechnen aufgebaut. Die Schüler gewinnen Selbstvertrauen und ein positives Selbstkonzept, wenn sie allmählich merken, dass auch sie in der Lage sind, tragfähige Vorstellungen zu Zahlen zu entwickeln und damit zunehmend sicherer zu rechnen. Die Dauer der Förderung reicht von mehreren Monaten bis hin zu ein oder zwei Jahren. Des Weiteren finden in diesen Stellen Eltern und Lehrkräfte rechenschwacher Kinder Beratung und Hilfe zur Unterstützung der Kinder.

Bestehende Beispiele für solche Stellen sind folgende:

- In Augsburg wurde die *„Beratungs- und Förderstelle für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten im Lernen von Mathematik“* im Jahr 2012 an der Grundschule *„Bildungshaus Westpark“* auf Initiative der Universität Augsburg und in Kooperation mit der Regierung von Schwaben und der Stadt Augsburg gegründet. Nähere Informationen unter:  
[www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/beratungsstelle/](http://www.math.uni-augsburg.de/prof/dida/beratungsstelle/)
- In der Stadt und im Landkreis Bayreuth wurde im Zuge des Prozesses *„Bildungsregion Bayreuth“* und unter Federführung der Staatlichen Schulämter Bayreuth an fünf Grundschulen eine *„Fördereinrichtung Mathe“* geschaffen. Siehe:  
[www.bildungsregion-bayreuth.de](http://www.bildungsregion-bayreuth.de)  
[www.schulamt-bayreuth.de/start/mint-philmal/](http://www.schulamt-bayreuth.de/start/mint-philmal/)

Der primäre Ort zur Diagnose und Förderung von Kindern mit Rechenschwäche ist die Schule. Eine besondere Bedeutung haben hierbei binnendifferenzierender Unterricht, Einzel- und Kleingruppenförderung sowie staatliche Beratungs- und Förderstellen für rechenschwache Kinder.

## 16. Frage: Kann bzw. sollte bei rechenschwachen Kindern zeitweise auf Notengebung verzichtet werden?

Ein konkretes Beispiel: Stellen wir uns vor, ein Schüler hat in den Jahrgangsstufen 1 und 2 keine tragfähigen Vorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen aufgebaut, er hat Strategien des zählenden Rechnens verfestigt und Rechnungen – soweit möglich – auswendig gelernt. In Jahrgangsstufe 3 steht er nun vor scheinbar unüberwindbaren Problemen: Anhand seiner Zahlenvorstellungen kann er nicht mit dem Stellenwertsystem arbeiten, mit selbst zurechtgelegten Rechenstrategien scheitert er im Bereich größerer Zahlen. Verstärktes Üben führt zu keinerlei Besserung, weil grundlegendes Verständnis fehlt. Als Folge entstehen Prüfungsangst, Schulunlust und ein negatives Selbstkonzept in einem „Teufelskreis Rechenschwäche“ (vgl. Abschnitt 12). Das Kind bedarf also einer sorgfältigen Diagnose der Schwierigkeiten und einer passgenauen Förderung (vgl. Abschnitte 9 und 13).

Aus pädagogischen Gründen kann es dabei sinnvoll sein, zeitweise auf Leistungsbewertungen durch Noten im regulären Mathematikunterricht zu verzichten. Die Leistungsbewertungen brächten nur das (bereits bekannte) Ergebnis, dass der Schüler am aktuellen Stoff scheitert. Für den Schüler würde die psychische Belastung durch die negativen Rückmeldungen unnötig verstärkt.

Den rechtlichen Rahmen für einen zeitweisen Verzicht auf Leistungsbewertungen bietet § 11 Abs. 2 der Grundschulordnung GrSO:

„Die Lehrerkonferenz kann entscheiden, dass in begründeten Einzelfällen aus pädagogischen Gründen auf eine Bewertung der Leistungen durch Noten zeitweilig verzichtet wird; die Erziehungsberechtigten sind vorher anzuhören.“

Der Begriff „zeitweilig“ ist dabei etwa so zu verstehen, dass sich das Aussetzen der Leistungsbewertung auf eine vorübergehende Phase der intensiven Individualförderung des Schülers bezieht, aber nicht dauerhaft ist (vgl. Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst 2016, S. 12 f.).

Das maßgebliche Gremium für eine Entscheidung über Benotungsverzicht ist also die Lehrerkonferenz. Dabei sollte die Lehrerkonferenz die Gesamtsituation des Schülers im Blick haben und sich von pädagogischen und didaktischen Überlegungen leiten lassen. Vorgelegte Atteste schulexterner Dienstleister (vgl. Abschnitt 20) haben hierbei nicht zwingend Bedeutung.

Durch den zeitweiligen Verzicht auf Leistungsbewertungen kann eine positive Entwicklung des Schülers begünstigt werden, indem negative Rückmeldungen zum Leistungsstand reduziert werden.

Stattdessen sollte der Schüler möglichst ermunternde Rückmeldungen erhalten, wenn er in Bezug auf seine individuellen Fähigkeiten Fortschritte macht. Auf diese Weise können das Selbstbild des Schülers und sein Vertrauen in eigene Fähigkeiten gestärkt werden.

## 17. Frage: Ist die Wiederholung einer Jahrgangsstufe sinnvoll?

Die Frage nach dem Sinn des Wiederholens einer Jahrgangsstufe bei Rechenschwäche kann nicht einfach mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden. Hier ist natürlich die Gesamtsituation des Kindes – seine individuelle Entwicklung, seine psychische Lage, sein Stand in allen Fächern u. v. m. – differenziert zu berücksichtigen. Im Hinblick auf das Problem der Rechenschwäche gibt Gaidoschik (2015, S. 128 f.) insbesondere Folgendes zu bedenken:

- Nur die bloße Wiederholung einer Jahrgangsstufe ist für sich genommen noch kein Beitrag zur Überwindung einer Rechenschwäche. Ein rechenschwachtes Kind wird verfestigte, falsche Denkweisen nicht einfach dadurch überwinden, dass derselbe Stoff noch ein zweites Mal im Klassenverband behandelt wird. Es besteht die Gefahr, dass das Kind beim zweiten Durchgang und durch die weitere Übung fehlerhafte Denkweisen weiter verfestigt, unverstandene Regeln und Rechnungen weiter auswendig lernt. Dies kann zu Beginn des wiederholten Schuljahres durchaus Erleichterung und kurzzeitige Erfolge schaffen – allein durch den Erfahrungsvorsprung gegenüber Mitschülern. Allerdings wird die Ursache der Rechenschwäche dadurch nicht behoben. Gegen Ende des wiederholten Schuljahres treten die tief liegenden Probleme der Rechenschwäche wieder zu Tage. Letztlich war dann die Wiederholung eine Verschwendung von Lebenszeit des Kindes.
- Damit die Wiederholung eines Schuljahres wirklich sinnvoll wird, muss die zusätzliche Lernzeit bewusst und gezielt zur Überwindung von mathematischen Fehlvorstellungen und ggf. psychischen Blockaden bzw. – positiv formuliert – zum Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen, zur Entwicklung fundierter Rechenstrategien und ggf. zur Verbesserung des Selbstbildes und des Selbstbewusstseins genutzt werden.
- Für eine solche fachdidaktisch-pädagogisch gestaltete Förderung schafft ein zusätzliches Schuljahr natürlich einen erheblichen zeitlichen Spielraum. Dieser sollte aber von Anfang an für auf das Kind individuell bezogene Maßnahmen genutzt werden (vgl. Abschnitt 13). Insbesondere sind dabei differenzierende Lernangebote – im regulären Unterricht sowie im Rahmen von Einzel- und Kleingruppenförderung am Vormittag – erforderlich (vgl. Abschnitt 15). Die nötige Lernzeit kann dabei etwa dadurch geschaffen werden, dass das Kind zeitweise an Unterricht in anderen Fächern nicht teilnimmt, bei denen es das Klassenziel bereits im Vorjahr erreicht hat.
- Durch ein Wiederholen kann die in Abschnitt 13 beschriebene „Doppelbelastung“ für das Kind vermieden werden. Bei einem Vorrücken in die nächste Jahrgangsstufe müsste es einerseits Probleme der Rechenschwäche aufarbeiten, die thematisch weit vor dem aktuellen Schulstoff liegen. Andererseits kommen zudem im regulären Unterricht ständig neue Anforderungen auf das Kind zu. Hierfür fehlen aber Verstehensgrundlagen aus vorigem Unterricht bzw. Vorjahren. Insgesamt entsteht dadurch leicht eine dauerhafte Notlage für das Kind, die eine Überwindung der Rechenschwäche sehr gefährden kann.
- Wenn allerdings auf Basis einer differenzierten Analyse der Lernschwierigkeiten des Kindes (vgl. Abschnitt 9) und pädagogisch-didaktischer Überlegungen angenommen werden kann, dass das Kind eine Rechenschwäche auch bei einem Vorrücken überwinden kann, dann sollte dieser Weg dem Kind durchaus eröffnet werden. Hierbei ist eine gezielte, differenzierte Förderung – wie in den Abschnitten 13 und 15 beschrieben – unerlässlich.

Die Wiederholung einer Jahrgangsstufe kann substanzielle zeitliche Freiräume schaffen, um an Verstehensgrundlagen zur Überwindung einer Rechenschwäche zu arbeiten. Diese Zeit muss dann aber durch differenzierte Lernangebote gezielt zum Aufbau entsprechender Grundvorstellungen und zum Abbau fehlerhafter Denkweisen genutzt werden.

## 18. Frage: Ist es sinnvoll, bei Schülern mit Rechenschwäche bis einschließlich Abitur auf Noten bei Anforderungen mit Zahlen zu verzichten?

Bei einer Diagnose von Rechenschwäche, die sich auf die Denkprozesse der Schüler gründet (vgl. Abschnitt 9), und bei darauf aufbauender Förderung, die auf tragfähige Vorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen abzielt (vgl. Abschnitt 13), kann Rechenschwäche bei der großen Mehrheit der Kinder überwunden werden.

Es bleibt die Frage, wie mit Kindern und Jugendlichen umgegangen werden sollte, die derart starke Beeinträchtigungen ihres kognitiven Apparats (vgl. Abschnitt 10) haben, dass selbst bei langanhaltender, systematischer Förderung die Rechenschwäche bestehen bleibt. Es liegt dann also eine – mehr oder weniger ausgeprägte – geistige Behinderung vor, die durch Förderung nicht ausgeglichen werden kann. Auch für diese Schüler bietet das vielfältig differenzierte bayerische Schulsystem je nach kognitiver Leistungsfähigkeit passende Schularten und Schulabschlüsse.

In diesem Zusammenhang wird von Lobbyverbänden die Forderung erhoben, bei Schülern mit Rechenschwäche müssten die Anforderungen des Gymnasiums geändert werden. Leistungen, in denen Verständnis für Zahlen und für den Umgang mit Zahlen erforderlich sind, dürften nicht in Bewertungen einfließen. Hierfür wird fälschlicherweise und anmaßend der Begriff „Notenschutz“ aus Art. 52 Abs. 5 BayEUG verwendet. Dies solle ggf. bis zum Abitur gehen, d. h. für ein Erreichen des Abiturs dürften Leistungen, in denen Zahlenverständnis nötig ist, nicht gefordert werden.

Solche Forderungen von Lobbyverbänden sind, wenn man die Folgen bedenkt, in vielfältiger Hinsicht unsinnig und verantwortungslos. Gründe hierfür sind:

- Das Abitur bescheinigt gewisse kognitive Fähigkeiten, bei denen Fähigkeiten zum Umgang mit Zahlen integraler Bestandteil sind. Das Abitur bescheinigt dadurch insbesondere die kognitiven Voraussetzungen, um ein akademisches Studium zu absolvieren. Würde man in einem „Dyskalkulie-Abitur“ Fähigkeiten zum Umgang mit Zahlen ausklammern, könnte man die allgemeine Hochschulreife nicht mehr bescheinigen, denn diese Fähigkeiten werden in einer Vielzahl von Studiengängen und Berufen benötigt (z. B. Wirtschaftswissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Naturwissenschaften, Psychologie, Medizin, Pharmazie, Jura, ...).
- Wenn man dennoch mit einem „Dyskalkulie-Abitur“ die allgemeine Hochschulzugangsberechtigung vergeben würde, dann würde eine vorhandene Rechenschwäche vielfältige, ernsthafte Folgeprobleme für das Individuum, aber auch für die Gesellschaft als Ganzes verursachen. Nur als Beispiele:
  - Studierende in Studiengängen, die Zahlenverständnis erfordern, haben Misserfolge im Studium. Dies führt zu Fragen, ob dann auch im Studium – wie in der Schule – auf Leistungserhebungen verzichtet werden muss, in denen Vorstellungen von Zahlen gefordert sind („Notenschutz“ im Studium).
  - In der Folge würden in Berufsfeldern, in denen auch ein verantwortungsvoller Umgang mit Zahlen erforderlich ist (z. B. Wirtschaftswissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Naturwissenschaften, Psychologie, Medizin, Pharmazie, Jura, ...), auch Personen arbeiten, denen grundlegendes Verständnis für Zahlen fehlt. Daraus können ernsthafte Gefahren für Mitmenschen entstehen. Das Schulsystem hätte in seiner Funktion zur Vergabe von Berechtigungen auf Basis von Fähigkeiten versagt.
- Es wäre also naheliegend, mit einem „Dyskalkulie-Abitur“ nicht die allgemeine Hochschulzugangsberechtigung zu vergeben. Dies führt zu sehr ernsthafte Folgefragen, welche Studiengänge und in der Folge welche Berufsfelder erlaubt und welche nicht erlaubt sind.



So gibt es beispielsweise Studiengänge, für deren erfolgreiches Absolvieren man keine Rechenfähigkeiten braucht. Ein Beispiel ist das Studium des Lehramts an Grundschulen. In diesem Studiengang muss man in Bayern Mathematik als Didaktikfach studieren. Dabei geht es um das Lehren und Lernen von Mathematik in der Grundschule im Rahmen von Lehrveranstaltungen zur Fachdidaktik. Man kann diesen pädagogisch-didaktischen Studiengang allerdings gut absolvieren, ohne selbst Rechenfähigkeiten zu besitzen. Rechenfähigkeiten werden im Studium für das Grundschullehramt nicht abgeprüft (denn die Studierenden besitzen ja das Abitur).

In der Folge könnte man mit „Dyskalkulie-Abitur“ ein gutes Erstes und Zweites Staatsexamen für das Lehramt an Grundschulen ablegen. Bei entsprechendem Notenschnitt könnte eine Einstellung in den Schuldienst wohl nicht verwehrt werden. Man hätte dann Grundschullehrkräfte mit Rechenschwäche, die selbst Aufgaben wie „ $83 - 27$ “ nicht sicher lösen können, aber Schülern entsprechendes Verständnis vermitteln sollen. Will der Staat und will die Gesellschaft eine solche Entwicklung?

Nun war dies nur ein Beispiel für einen Studiengang. Entsprechende Fragen müssten für eine Vielzahl an Studiengängen beantwortet werden. Muss ein Wirtschaftswissenschaftler, ein Ingenieur, ein Lebensmittelchemiker, ein Psychologe, ein Arzt, ein Apotheker, ein Richter, ... tragfähige Vorstellungen von Zahlen besitzen?

- Der Hinweis von Lobbyverbänden, es gebe bereits bei Legasthenie eine Nichtberücksichtigung der Rechtschreibung in Leistungserhebungen und dies müsse analog auf Zahlenverständnis übertragen werden, ist nicht stichhaltig. Die Bedeutung von Rechtschreibung und von Zahlenverständnis sind bei näherer Betrachtung grundverschieden. Mit einer Rechtschreibschwäche ist der Betroffene kaum daran gehindert, in Wissenschaftsbereiche erfolgreich einzudringen und entsprechende Berufe zu ergreifen. Pointiert formuliert: Man kann mit Legasthenie sogar Schriftsteller werden, man muss nur die Manuskripte von einem Lektor auf Rechtschreibfehler hin korrigieren lassen. Rechtschreibschwache Leistungen können also in nahezu allen Berufsfeldern ausgeglichen werden. Bei fehlendem Zahlenverständnis ist Entsprechendes – wie oben erläutert – nicht möglich. Zahlenverständnis ist viel enger mit den fachbezogenen Anforderungen des jeweiligen Studien- und Berufsfeldes verwoben, als dies bei der Rechtschreibung der Fall ist.
- Rechnen ist nur eine Facette mathematischen Denkens. Eine andere Facette ist etwa Raumvorstellung. Räumliches Vorstellungsvermögen bezeichnet „die Fähigkeit, in der Vorstellung räumlich zu sehen und zu denken“ (Grüßing 2002, S. 37). Dies umfasst die Wahrnehmung räumlicher Situationen, die Entwicklung von Bildern in der Vorstellung sowie den gedanklichen Umgang mit Vorstellungsbildern inklusive ihrer Modifikation. In der Psychologie und der Mathematikdidaktik wurden in den vergangenen 80 Jahren vielfältige Theorien entwickelt, die das komplexe Konstrukt der Raumvorstellung strukturieren (vgl. z. B. Thurstone 1950, Linn, Petersen 1985, Maier 1999). Räumliches Vorstellungsvermögen entwickelt sich im Kindes- und Jugendalter. Es gibt Tests zur Erfassung des räumlichen Vorstellungsvermögens. Insbesondere können Schwächen in der Fähigkeit zur Raumvorstellung gut mit Tests erfasst und diagnostiziert werden. Räumliches Vorstellungsvermögen wird in verschiedenen Fächern gefordert und gefördert, insbesondere in Mathematik, Physik, Chemie und Kunst. Räumliches Vorstellungsvermögen ist also eine kognitive Fähigkeit, die viele Parallelen zu Rechenfähigkeit besitzt. Wenn Schüler mit Rechenschwäche besondere Vorteile bei der Leistungsbewertung erhalten sollten, wäre es nicht zu rechtfertigen, Schülern mit Raumvorstellungsschwäche entsprechende Vorteile zu verwehren.

Wenn tragfähige Vorstellungen zu Zahlen aus den Anforderungen für das Abitur ausgeklammert werden, entsteht kein Abschluss, der allgemeine Hochschulreife bescheinigen und dadurch einen Zugang zur Vielfalt akademischer Berufsfelder eröffnen kann.

## 19. Frage: Wer ist primär für die Förderung von Kindern mit Rechenschwäche zuständig?

Entsprechend der Komplexität von Rechenschwäche gibt es nicht die eine „Fördertherapie“. Vielmehr ist auf Basis einer Diagnose der Schwierigkeiten eine individuelle Förderung nötig. Gemäß den Ursachenkomplexen aus Abschnitt 10 ist für Schüler mit Rechenschwäche beispielsweise Folgendes von Bedeutung:

### Fachbezogene Förderung

Wie bereits in den Abschnitten 1 und 13 erläutert, ist der Schlüssel zur Überwindung von Rechenschwäche der Aufbau von tragfähigen Grundvorstellungen zu Zahlen und Operationen mit Zahlen sowie die Entwicklung zielführender Rechenstrategien.

Für die zugehörige fachbezogene Förderung sind *Grundschullehrkräfte, Förderlehrkräfte* und *Sonderpädagogen* die Fachleute. Sie sind Experten im Anstoßen und Begleiten mathematischer Denk- und Lernprozesse von Kindern. Sie verfügen über eine fachdidaktische Ausbildung mit entsprechenden staatlichen Prüfungen und zugehörige berufliche Expertise für das Lehren und Lernen von Mathematik. Der Staat sollte primär diese Fachleute mit der mathematikbezogenen Förderung von Kindern betrauen. Gerade im Bereich der fachbezogenen Förderung erscheint es den Kindern mit Rechenschwäche gegenüber unverantwortlich, wenn sie Heilpraktikern, Kinesiologen, sonstigen selbsternannten Experten und Nachhilfeinstituten überlassen werden (vgl. Abschnitt 20).

### Wahrnehmungsprobleme oder motorische Probleme

Bereits mehrfach wurde betont, dass Probleme bei Grundfähigkeiten der Wahrnehmung und der Motorik das Lernen von Mathematik erheblich behindern können (vgl. Abschnitte 10 und 13). Hier kann spezifische Förderung von Seiten des Schulsystems angeboten werden (z. B. durch Förderlehrkräfte oder Sonderpädagogen) oder auch durch den medizinisch-therapeutischen Bereich etwa die Ergotherapie, Physiotherapie oder Psychomotorik.

### Psychische Probleme

Wenn ein Kind mit Rechenschwäche zusätzlich auch unter psychischen Problemen leidet (z. B. Schulkangst, negatives Selbstkonzept, Depression, Aggression, vgl. Abschnitt 12), so sollte neben schulpsychologischer Beratung auch außerschulische medizinische bzw. psychologische Hilfe in Anspruch genommen werden.

In jedem Fall sollten alle an der Förderung des Kindes beteiligten Einrichtungen und Personen eng zusammenarbeiten.

Die Förderung von Kindern mit Rechenschwäche ist Aufgabe des Staates. Die Fachleute für das Lehren und Lernen von Mathematik sind Grundschullehrkräfte, Förderlehrkräfte und Sonderpädagogen. Der Staat sollte die Verantwortung für die fachliche Förderung der Kinder nicht einem unkontrollierten, privatwirtschaftlichen Bereich von selbsternannten „Therapeuten“ (z. B. Heilpraktikern, Kinesiologen, Nachhilfelehrern) überlassen.

## 20. Frage: Wie ist der Markt privater Anbieter für Diagnose und Förderung bei Rechenschwäche einzuschätzen?

In Abschnitt 19 wurde betont, dass die Förderung rechenschwacher Kinder Aufgabe des Staates ist – und hier insbesondere des Schulbereichs. Der reguläre Unterricht und weitere Förderangebote des Schulsystems dienen dazu, jedem Schüler möglichst optimale Entwicklungs- und Bildungschancen zu geben. Dies gilt insbesondere für Schüler mit Rechenschwäche.

Dennoch gibt es eine bunte Vielfalt an kommerziellen Einrichtungen, die Diagnose und Förderung für Kinder mit Rechenschwäche anbieten. Hier hat sich ein freier Markt entwickelt. Es stellt sich die Frage, wie dies einzuschätzen und zu bewerten ist.

Einerseits ist es natürlich positiv, wenn rechenschwache Schüler neben der Förderung in der Schule auch noch weitere wirkungsvolle Hilfen erhalten, um die Rechenschwäche zu überwinden. Die Betonung liegt dabei auf „wirkungsvoll“, denn andererseits können schlecht konzipierte Maßnahmen ernsthafte Gefahren bergen:

- Wenn sog. Förderangebote nicht auf die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen abzielen, wird der entscheidende Schritt zur Überwindung der Probleme verfehlt (vgl. Abschnitte 1, 2 und 13).
- Ein reines Üben von Rechenaufgaben birgt die Gefahr, dass sich Fehlvorstellungen weiter verfestigen und Rechenaufgaben verständnislos auswendig gelernt werden (vgl. Abschnitt 11). In Situationen, die nicht spezifisch geübt wurden – z. B. in neuen Zahlenbereichen –, kann das Kind dann nicht auf grundlegendes Verständnis zurückgreifen und scheitert erneut.
- Wenn didaktische Materialien und Erklärungen eingesetzt werden, die im regulären Unterricht nicht verwendet werden, befindet sich das Kind im Zweifelsfall in einer Zwickmühle: Soll es bei einer Rechenaufgabe dem Weg aus der sog. „Therapieeinrichtung“ oder dem Weg aus der Schule folgen?
- Wenn die sog. Förderung nicht wirklich auf Ursachen der Rechenschwäche (vgl. Abschnitt 10) abzielt, wird das Kind mittel- und langfristig keine Erfolge spüren können. Dies kann den „Teufelskreis Rechenschwäche“ (vgl. Abschnitt 12) nur verschärfen, denn das Kind stellt dann fest, dass es trotz des hohen Zeit- und Geldaufwands beim Rechnen nicht besser wird. Dies verschärft die Problematik negativer Emotionen, allgemeiner Lern- und Schulunlust sowie eines negativen Selbstbildes.
- Schließlich stellen wirkungslose sog. Fördermaßnahmen eine unverantwortliche Vergeudung der wertvollen Lebenszeit der Kinder dar. Sie könnten diese Zeit ansonsten anders nutzen (z. B. als Freizeit und für Hobbies).

Der aktuelle Markt kommerzieller Anbieter im Bereich Rechenschwäche ist sehr unterschiedlich. Einerseits gibt es Einrichtungen, die fachdidaktisch fundierte Diagnose und Förderung anbieten und guten Gewissens empfohlen werden können. Andererseits gibt es aber auch Anbieter, bei denen zu befürchten ist, dass sie dem Kind eher schaden als nützen.

Wie können gute und schlechte kommerzielle Angebote für rechenschwache Kinder erkannt und unterschieden werden?

- Ein Anbieter sollte dezidiert herausstellen, dass er bei Diagnosemaßnahmen Denkprozesse des Kindes unter mathematikdidaktischen Gesichtspunkten erfassen und analysieren will. Dazu sind Gespräche mit dem Kind in Rechensituationen nötig („Denkanalyse“, vgl. Abschnitt 9). Ein schematisch ausgewerteter Rechentest auf Papier oder am Computer (ohne Blick auf die Rechenwege) bringt hingegen wenig Information über die wirklichen Schwierigkeiten des Kindes (vgl. Abschnitt 8).

- Auf Basis der Diagnoseergebnisse sollte ein individuelles, mathematikdidaktisch fundiertes Förderkonzept angeboten werden, das auf die Entwicklung tragfähiger Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen sowie von Verständnis für Rechenstrategien abzielt. Ein schematisiertes Förderkonzept, das für alle Kinder gleich ist, kann der Komplexität des Phänomens der Rechenschwäche und den individuellen Schwierigkeiten eines Kindes nicht gerecht werden.
- Positiv ist auch, wenn der Anbieter bereit und in der Lage ist, sich mit der Lehrkraft des Kindes fachbezogen abzustimmen.

Anbieter mit einem derart qualitativ hochwertigen Angebot gibt in Bayern und anderen Bundesländern am Markt.

Andererseits gibt es aber auch Anbieter, bei denen kaum zu erwarten ist, dass sie wirklich den Kern der Rechenschwäche beim Kind treffen und substantiell zur Überwindung der Schwierigkeiten beitragen. Auf solche Anbieter weisen etwa folgende Indizien hin:

- In den Informationsmaterialien und Webseiten der Anbieter sind nur oberflächliche Floskeln und Selbstverständlichkeiten zusammengestellt (z. B., dass die sog. Therapie durch geschultes Personal erfolgt oder dass sich die sog. Therapie nach den Bedürfnissen des Kindes richtet).
- Es werden auf den Webseiten Versatzstücke zum Thema Rechenschwäche zusammengetragen (z. B. isoliert stehende Listen von Merkmalen für Rechenschwäche, die in keinen fachdidaktischen Kontext eingebettet sind). Konkrete Informationen, wie Kindern bei der Entwicklung von tragfähigen Vorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen geholfen wird, finden sich dagegen nicht.
- Manche Angebote versprechen zwar Hilfe bei Dyskalkulie, beschränken sich dabei aber auf die Behandlung von – durchaus ernstzunehmenden – Begleitproblemen (wie Schulstress, geringer Lernmotivation, mangelnder Konzentrationsfähigkeit, Aufmerksamkeitsstörungen, geringem Selbstbewusstsein). Dabei ignorieren sie vollständig den mathematisch-fachlichen Kern der Rechenschwäche. An Grundvorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen wird nicht gearbeitet.
- Es gibt Anbieter, die Legasthenie und Dyskalkulie stets in einem Atemzug nennen und undifferenziert suggerieren, ihr sog. Therapieverfahren helfe gegen Lese-Rechtschreibschwäche und Rechenschwäche – oder sogar jede Form der Lernstörung – gleichermaßen.
- Mancher Anbieter schlägt Methoden vor, die einen medizinischen Anschein haben, aber zur Entwicklung von tragfähigen Vorstellungen zu Zahlen und Rechenoperationen nicht – oder allenfalls nur sehr, sehr indirekt – beitragen. So werden etwa „kinesiologische Übungen und Balancen“ als Verfahren bei Dyskalkulie angepriesen, um die Kommunikation zwischen beiden Gehirnhälften zu verbessern. Auch Korrekturen an der Halswirbelsäule werden als fester Bestandteil einer Behandlung von Lernstörungen gesehen. Es gibt Heilpraktiker, bei denen homöopathische Mittel im Zentrum einer sog. Dyskalkulithherapie stehen.

Auf diesem Markt wird mit den Nöten der Kinder und den Sorgen der Eltern viel Geld verdient. Die Bewertung dieser Angebote sollte unter pädagogischen und mathematikdidaktischen Gesichtspunkten erfolgen. Wenn sich Eltern hierbei überfordert fühlen, sollte die jeweilige Schule des Kindes den Eltern mit Rat zur Seite stehen.

Es gibt einen bunten Markt an kommerziellen Anbietern, die sog. Therapien bei Rechenschwäche offerieren. Darunter finden sich pädagogisch und mathematikdidaktisch fundiert arbeitende Einrichtungen. Ihre Förderung kann ergänzend zu den Maßnahmen in der Schule eine wertvolle Hilfe für rechenschwache Kinder darstellen.

Es gibt aber auch Anbieter, bei denen kaum zu erwarten ist, dass sie zur Überwindung einer Rechenschwäche beitragen können, weil die sog. Therapie keinen inhaltlich-fachlichen Bezug zu Zahlen und Rechenoperationen besitzt. Solche sog. Therapien können die wirklichen Probleme der Kinder sogar noch verschärfen.

## Literatur

- Bayerisches Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst (2016): Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen, München
- DIMDI – Deutsches Institut für medizinische Dokumentation und Information (1994, Hrsg.): ICD-10, Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme, Bd. I, Springer, Berlin, Heidelberg
- Gaidoschik, M. (2014): Einmaleins verstehen, vernetzen, merken, Strategien gegen Lernschwierigkeiten, Klett, Kallmeyer, Seelze
- Gaidoschik, M. (2015): Rechenschwäche – Dyskalkulie, Persen Verlag, Wien
- Gaidoschik, M. (2016): Rechenschwäche vorbeugen, G&G Verlag, Wien
- Gasteiger, H. (2016): Expertenbeitrag zur Handreichung „Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen“, <https://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/materialien/rechenschwierigkeiten/>
- Grüßing, M. (2002): Wieviel Raumvorstellung braucht man für Raumvorstellungsaufgaben? Strategien von Grundschulkindern bei der Bewältigung räumlich-geometrischer Anforderungen, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 34 (2), S. 37-45
- Hasemann, K., Gasteiger, H. (2014): Anfangsunterricht Mathematik, Springer Spektrum, Heidelberg
- Hirt, U., Wälti, B. (2008): Lernumgebungen im Mathematikunterricht, Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte, Klett, Kallmeyer, Seelze
- Hofe, R. vom (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg
- Hofe, R. vom (1996): Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik, in: Journal für Mathematikdidaktik, 17, Nr. 3-4, S. 238-264.
- Linn, M. C., Petersen, A. C. (1985): Emergence and Characterization of Sex Differences in Spatial Ability, A Meta-Analysis, Child Development, 56 (6), 1479-1498
- Lorenz, J. H. (2003): Lernschwache Rechner fördern, Ursachen der Rechenschwäche – Frühhinweise auf Rechenschwäche – Diagnostisches Vorgehen, Cornelsen Scriptor, Berlin
- Lorenz, J. H. (2003 b): Rechenschwäche – ein Problem der Schul- und Unterrichtsentwicklung, in: Baum, M., Wielpütz, H. (Hrsg.): Mathematik in der Grundschule, Kallmeyer, Seelze, S. 103-119
- Lorenz, J. H., Radatz, H. (1993): Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht, Schroedel, Hannover
- Maier, P. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen, Auer Verlag, Donauwörth
- Meyerhöfer, W. (2011): Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH), in: Pädagogische Rundschau, 65. Jahrgang, S. 401-426
- Moser Opitz, E. (2013): Rechenschwäche / Dyskalkulie, Haupt Verlag, Bern
- Padberg, F., Benz, Ch. (2011): Didaktik der Arithmetik für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung, Springer Spektrum, Heidelberg
- Schipper, W. (2005): Lernschwierigkeiten erkennen – verständnisvolles Lernen fördern, Handreichung zu SINUS-Transfer Grundschule, Mathematik, Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften (IPN), Kiel
- Spiegel, H., Selzer, C. (2003): Kinder & Mathematik, Kallmeyer, Seelze
- Thurstone, L. L. (1950): Some primary abilities in visual thinking, Psychometric Laboratory Research Report No. 62, University of Chicago Press, Chicago
- Wittmann, E., Müller, G. (2015): Fördern und Diagnose mit dem Blitzrechnkurs, Handreichung für die Praxis, Klett, Stuttgart
- Zimmer, R. (2010): Handbuch der Psychomotorik, Theorie und Praxis der psychomotorischen Förderung von Kindern, Herder, Freiburg