

# Kontaktberechnung von Maschinenelementen mit nicht konformen Netzen in der Finite Elemente Analyse

Florian Nützel, Martin Neidnicht, Bernd Roith, Christoph Wehmann, Frank Rieg

Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Universitätsstraße 30, 95440 Bayreuth

Email: Florian.Nuetzel@uni-bayreuth.de

Internet: <http://www.konstruktionslehre.uni-bayreuth.de>

**Inhalt:** Die Berechnung verschiedener zu Baugruppen verknüpfter oder in Wechselwirkung stehender Bauteile ist sehr komplex. Dadurch wird der Einsatz der Finite Elemente Analyse erforderlich. Am Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD wird deshalb ein vollkommen finite Elemente basiertes Kontaktberechnungsmodul entwickelt, welches diese Anforderungen erfüllt. Der vorliegende Beitrag behandelt die Diskretisierung und Berechnung von in Kontakt stehenden Stirnrädern bei geringer Verformung. Die Formulierung der Kontaktrandbedingungen erfolgt mit Hilfe zweier Verfahren basierend auf der Lagrange- Multiplikatorregel.

**Abstract:** The calculation of different components connected to an assembly or interacting with each other is very difficult. For this reason the application of the finite element analysis is required. Based on this fact a module for finite element contact problems is developed at the department of Engineering Design and CAD. The presented article describes the discretisation and calculation of small deformed, interacting spur wheels. The contact constraints are formulated with two different methods based on Lagrange multipliers.

**Stichwörter:** Finite Elemente Analyse, Kontakt, Stirnrad, Lagrange-Multiplikatorregel.

**Keywords:** Finite Element Analysis, contact, spur wheel, Lagrange Multiplier Method.

## 1 Einleitung

Die Finite Elemente Analyse (FEA) ist ein Standardwerkzeug in der Produkt- und Prozessentwicklung bei der Berechnung von Fragestellungen über die analytischen Lösungsverfahren hinaus. Viele Kenntnisse prozess- und produktrelevanter Einflussgrößen können im Vorfeld simuliert und für die Abschätzung kritischer Designparameter gewonnen werden.

In der Simulation von Prozessen und Strukturen treten häufig Wechselwirkungen zwischen den Oberflächen verschiedener Körper auf. Hierzu zählen die Berechnung ganzer Baugruppen oder lokale Netzverfeinerungen in bereits diskretisierten Strukturen zur Steigerung der Abbildungsgenauigkeit.

Kontaktprobleme lassen sich in folgende Punkte gliedern: Die Kontaktsuche zwischen den diskretisierten Kontaktflächen der beteiligten Körper, die Definition der entsprechenden Kontaktrandbedingungen, die Berechnung der Kontaktaufgabe und die Kontaktverfolgung unter Berücksichtigung der Änderung des Diskretisierungszustands.

Dieser Beitrag behandelt die Umsetzung eines vollkommen finite Elemente basierten Kontaktberechnungsverfahren mit dem FE-Solver Z88CON am Beispiel von Stirnrädern. Die Berechnung der Tragfähigkeit von Stirnrädern nach DIN 3990 ist sehr umfangreich und für eine erste Abschätzung überdimensioniert. Vielmehr soll das skizzierte Verfahren eine rasche qualitative Einordnung der Tragfähigkeit mittels der FE-basierten Kontaktberechnung ermöglichen. Die verwendete Geometrie ist idealisiert, d.h. Verzahnungsfehler wie Fluchtungsfehler, Breitenballigkeit, usw. werden nicht berücksichtigt. Die Beanspruchung wird als statisch angenommen [1]. Abbildung 1 zeigt die Zahnfußbeanspruchung zu Beginn des Zahneingriffs. Bei Versagen der Stirnräder würde eine Schädigung im Bereich der Biegezugspannung  $\sigma_F$  entstehen [2].

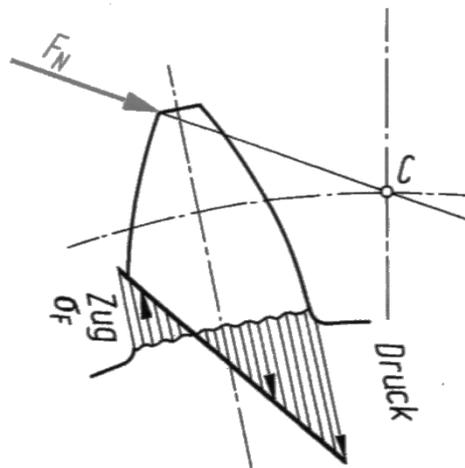


Abbildung 1: Biegebeanspruchung des Zahnfußes [2]

## 2 FE-Formulierung des Kontaktbereichs

Die FE-Kontaktberechnung der Stirnräder liefert geringe Verformungen der diskretisierten Geometrie, sodass die Theorie der geometrischen Linearität vorausgesetzt wird [3]. In der Kontaktfläche der Zahnflanken besteht erwartungsgemäß keine große Verformung. Die FE-basierte Kontaktberechnung ist, wie oben beschrieben, in vier Teilbereiche gegliedert.

Zunächst erfolgt die Kontaktsuche. Auf Basis dieser Ergebnisse resultiert die Kontaktdefinition der diskretisierten Körper. Diese ist wegen der geringen Verformungen rein statisch und erfolgt als doppelter Knoten-Segment-Kontakt. Das heißt, die übliche Definition von Master- und Slave-Netz wird dahingehend erweitert, dass beide in Kontakt stehende Körper bis zu einem bestimmten Grad ineinander eindringen können. Für die anschließende Berechnung der Verschiebungen kommt das Lagrange-Verfahren (1) bzw. das Gestörte-Lagrange-Verfahren (2) zum Einsatz. Dafür sind die folgenden Gleichungssysteme zu lösen, die das Ergebnis der Variation der potentiellen Energie im linear elastischen Fall beschreiben.  $\mathbf{K}$  ist dabei die Gesamtsteifigkeitsmatrix,  $\mathbf{G}$  die Matrix der Kontaktrandbedingungen,  $\mathbf{H}$  die Störmatrix,  $\mathbf{u}$  sind die Verschiebungen,  $\lambda$  die Lagrange-Multiplikatoren und  $\mathbf{f}$  die externen Kräfte. Die Störmatrix  $\mathbf{H}$  ist eine Diagonalmatrix, die das Gesamtsystem positiv definit hält und die Diagonalelemente  $1/\beta$  besitzt, wobei  $\beta$  problemspezifisch gewählt werden kann. Je größer die Werte für  $\beta$  sind, desto steifer ist die Kontaktbedingung definiert. Die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda$  liefern als Lösung die Kontaktkräfte [3, 4, 5].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

### 3 Modellbildung

Um die Zahnfußtragfähigkeit zu berechnen, wird lediglich ein Zahn des Stirnrads modelliert. Die Geometrie ist vereinfacht, d.h. die Zahnflanken folgen nicht exakt einer Evolvente. Bei der Ausgangsdiskretisierung handelt es sich um eine Superstruktur im Dateiformat \*.DXF, die mit Hilfe des CAD-Konverters Z88X und des Mapped Meshers Z88N zur FE-Struktur konvertiert und vernetzt wird. Aufgrund der getroffenen vereinfachten Annahmen wird die Zahngeometrie mit quadratischen Scheiben diskretisiert. Ein einzelner Zahn besitzt 512 Elemente und 1639 Knoten [1].

Zur Kontaktberechnung wird ein Modell mit zwei Zähnen erstellt. Die Randbedingungsaufgabe erfolgt auf zwei verschiedene Arten (Abbildung 2). In beiden Fällen wird für Zahn 1 die Verschiebung in x- und y-Richtung an der Innenseite des

Radkörpers gesperrt. Zahn 2 wird drehbar gelagert, im Fall A mittels einer Stabstruktur, im Fall B mit Scheibenelementen. So kann eine bzgl. der Rotationsachse konzentrische Beweglichkeit sichergestellt werden.

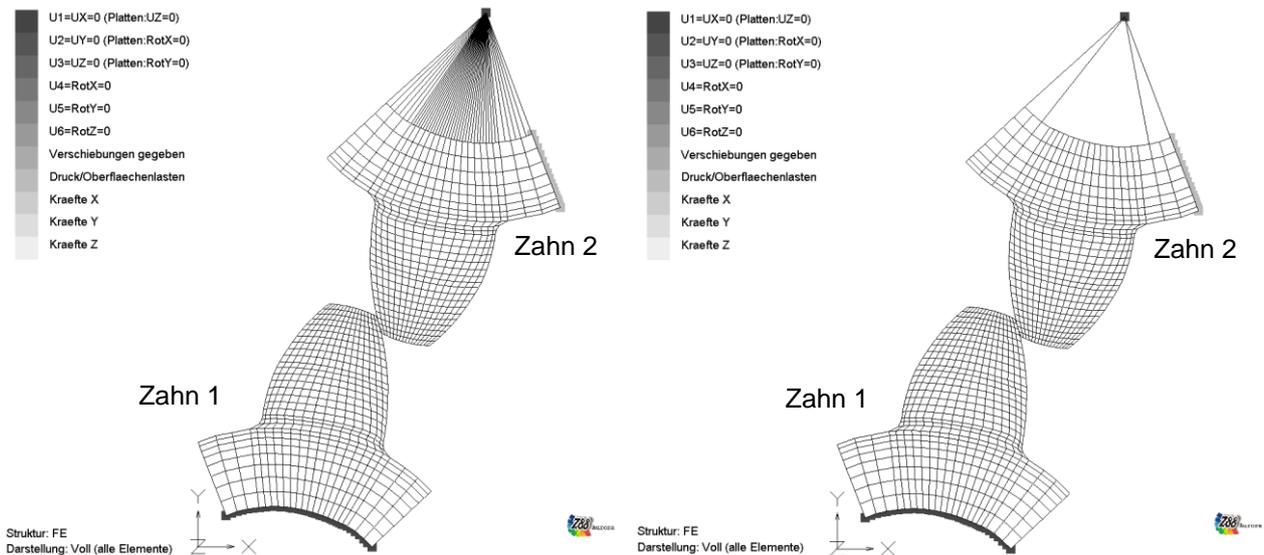


Abbildung 2: Modellbildung: Fall A (links) und Fall B (rechts)

Die Last ist als Linienlast ( $F = 12.100 \text{ N/mm}$ ) über den Querschnitt des Radkörpers des Zahns 2 aufgebracht. Die Zahnradsegmente sind aus Stahl ( $E = 206.000 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ). Die Steifigkeit der Lagerung wird variiert und die Zahnfußbeanspruchung in Abhängigkeit der Steifigkeit der jeweiligen Lagerelemente untersucht. Die Lösung der Gleichungssysteme erfolgt unter Berücksichtigung aller Randbedingungen nach dem Lagrange- bzw. nach dem Gestörten-Lagrange-Verfahren mit dem dafür modifizierten FE-Solvers Z88CON auf Basis des FE-Solvers des FE-Systems Z88 [1]. Zur Auswertung werden die Spannungen in den Eckknoten der Elemente im Zahnfuß herangezogen. Als Vergleichsspannungshypothese wird die Gestaltänderungsenergiehypothese gewählt.

## 4 Auswertung und Zusammenfassung

Zur Beurteilung der Zahnfußbeanspruchung der Kontaktberechnung wird eine spannungsoptische Aufnahme herangezogen (Abbildung 3) [6]: „Die eingetragenen Zahlen 1 bis 15,5 für Linien gleicher Hauptschubspannungen sind proportional der Spannung. Der Abbruch des Zahns ist an der Zugseite des Zahns (Randspannung 12,5) zu erwarten.“

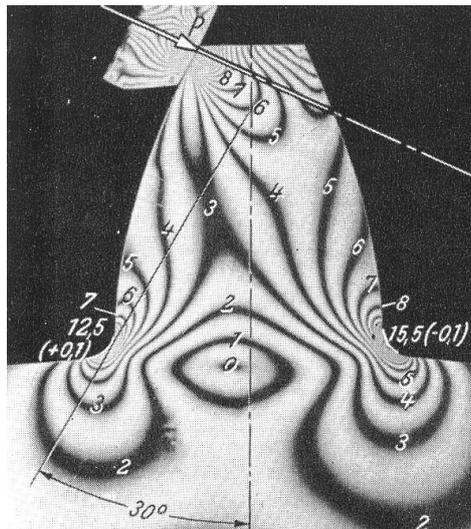


Abbildung 3: Spannungsoptische Aufnahme der Zahnfußbeanspruchung [6]

Tabelle 1 zeigt die Auswertung der Spannungen im Zahngrund von Zug- und Druckseite. Die Verifikation von FE-Berechnung und Versuch erfolgt anhand des Spannungsverhältnisses, da sich die absoluten Werte aufgrund unterschiedlicher Belastung und Materialdefinition unterscheiden. Für das Verhältnis der Spannungen von Druck- zur Zugseite im Zahngrund ergibt sich für die spannungsoptische Aufnahme nach [6]  $\sigma_D/\sigma_Z = 1,24$ . Die FE-Kontaktberechnung (Abbildung 4) liefert sowohl für die Berechnung nach dem Gestörten-Lagrange-Verfahren, als auch nach dem Lagrange-Verfahren Ergebnisse, die qualitativ die Versuchsergebnisse widerspiegeln. Abweichungen der Ergebnisse sind v.a. mit der Art der Lagermodellierung des Zahns 2 zu begründen. Mit steigender Steifigkeit der Lagerelemente (Scheiben- bzw. Stabstruktur) sinkt die Zahnfußbeanspruchung und nähert sich der des spannungsoptischen Versuchs an. Für Zahn 1 ist in beiden Fällen A und B das Spannungsverhältnis mit  $\sigma_D^A/\sigma_Z^A = 1,23$  bzw.  $\sigma_D^B/\sigma_Z^B = 1,27$  sehr nahe am Versuchsergebnis. Das Spannungsverhältnis für Zahn 2 nach Lagermodellierung Fall B zeigt bei steifer Ausführung mit  $\sigma_D^B/\sigma_Z^B = 1,29$  gute Übereinstimmung mit dem spannungsoptischen Versuch. Für die Stabstruktur (Fall A) ergibt sich ein Spannungsverhältnis zugunsten der Druckseite. Trotz dieser Abweichung zum Versuch scheint das Modell im Fall A, gerade im Bereich des Übergangs von Radkörper zu Welle, realistischer modelliert zu sein. Weitergehende Untersuchungen hinsichtlich der Lagermodellierung sind demzufolge nötig. Die Kontaktberechnung nach dem Gestörten-Lagrange- bzw. dem Lagrange-Verfahren zeigt für sehr kleine Faktoren  $\beta = 1e - 12$  keine Unterschiede im Ergebnis.

Tabelle 1: Verhältnis der Spannungen von Druck- zu Zugseite im Zahngrund

	Stabstruktur Fall A			Scheibenstruktur Fall B			Versuch [6]
E-Modul in N/mm <sup>2</sup>	2,06E+05	1,00E+06	1,00E+09	2,06E+05	1,00E+06	1,00E+09	-
$\sigma_D/\sigma_Z$ Zahn 1	1,28	1,24	1,23	1,46	1,33	1,27	1,24
$\sigma_D/\sigma_Z$ Zahn 2	1,59	1,53	1,49	1,67	1,40	1,29	-

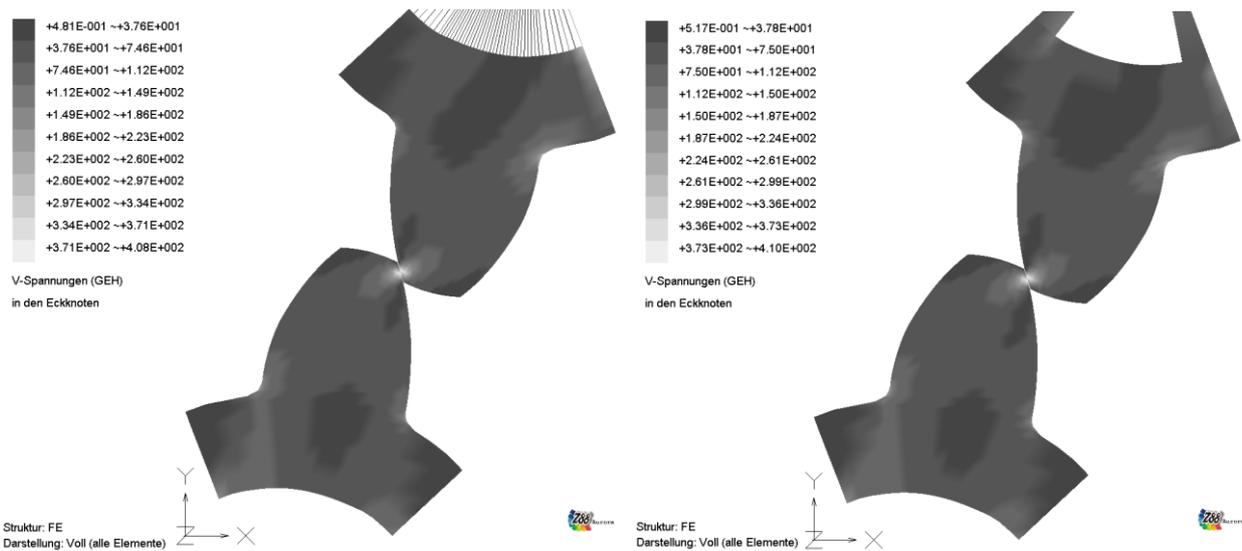


Abbildung 4: Ergebnisse der FE-Kontaktberechnung für Modellierung Fall A (links) und Fall B (rechts)

## Literatur

- [1] Rieg, Frank; Hackenschmidt, Reinhard: *Finite Elemente Analyse für Ingenieure*. 3. Auflage München, Wien: Carl Hanser Verlag, 2009.
- [2] Decker, Karl-Heinz; Kabus, Karlheinz: *Maschinenelemente*. 17. Auflage München: Carl Hanser Verlag, 2009.
- [3] Belytschko, Ted; Liu, Wing Kam; Moran, Brian: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. 1. Auflage. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2000.
- [4] Zienkiewicz, Olgierd Cecil; Taylor, Robert Love: *The Finite Element Methode: Volume 2: Solid Mechanics*. 5. Auflage Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [5] Wriggers, Peter: *Computational Contact Mechanics*. 1. Auflage Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2002.
- [6] Niemann, Gustav; Winter, Hans: *Maschinenelemente. Zweiter Band: Getriebe allgemein, Zahnradgetriebe – Grundlagen, Stirnradgetriebe*. 2. Auflage Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer Verlag, 1983.