

Die Korrelation von Modell- und Modellierungsparametern in der Kontaktanalyse bei Maschinenelementen

**Nützel, Florian; Alber-Laukant, Bettina; Neidnicht, Martin; Wehmann, Christoph;
Rieg, Frank**

Universität Bayreuth, Fakultät für Angewandte Naturwissenschaften

Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD

Universitätsstraße 30, 95447 Bayreuth

Email: Florian.Nuetzel@uni-bayreuth.de; Internet: <http://www.konstruktionslehre.uni-bayreuth.de>

Inhalt: Das mechanisch nichtlineare Verhalten von Maschinenelementen im Kontakt kann sehr gut mittels der Finite-Elemente-Analyse (FEA) abgebildet werden. Mit Hilfe einer Dependency-Structure-Matrix (DSM) sollen die komplexen Wechselwirkungen und Abhängigkeiten der die FE-Kontaktanalyse beeinflussenden Parameter aus Modellbildung und Modellierung strukturiert werden. Dadurch ist es möglich, einzelne Einflussparameter zu isolieren und zu untersuchen. Am Beispiel einer Stirnradstufe wird die Abhängigkeit von FE-Diskretisierung und Kontaktbereich analysiert und anschließend bewertet.

Abstract: The nonlinear mechanical behaviour of machine elements in contact can be very well mapped by using the finite element analysis (FEA). With the help of a dependency structure matrix (DSM), the complex interactions and dependencies of influencing modelling parameters within the FE contact analysis can be structured. So it is possible to isolate individual parameters of modeling to investigate dependencies. Here, an example of a spur is analyzed and evaluated with the focus on the dependency of FE discretization and contact area.

Stichwörter: Finite-Elemente-Analyse, Kontaktberechnung, Dependency-Structure-Matrix.

Keywords: Finite Element Analysis, Contact Calculation, Dependency Structure Matrix.

1 Einleitung

Analytische Ansätze oder Mehrkörpersimulationen können in vielen Fällen die komplexen Wechselwirkungen des elastischen Verhaltens von Maschinenelementen im Kontakt nicht mehr ausreichend exakt abbilden. Zur Erfassung des stark nichtlinearen Verhaltens der Maschinenelemente in der Kontaktzone können numerische Verfahren, wie die Finite-Elemente-Analyse (FEA) herangezogen werden, um den Konstrukteur im Entwicklungsprozess bei solchen Fragestellungen zu unterstützen.

Grundlage einer belastbaren Kontaktanalyse in der FEA ist eine der Aufgabenstellung angepassten Modellbildung. Besonders sensitiv sind die Ergebnisse gegenüber der

Modellierung des Kontaktbereichs. Je nach Geometrie, verwendetem Material, FE-Netzparameter oder Kontaktdefinition können die Berechnungsergebnisse stark variieren [1, 2, 3, 4]. Die Festlegung der geeigneten Modellierungsparameter ist in vielen Fällen nicht trivial. Deshalb stellt sich im Vorfeld der Simulation die Frage nach einer für die Kontaktanalyse sinnvollen Modellierung. In diesem Zusammenhang wird exemplarisch an Stirnrädern die Übertragbarkeit und Korrelation von Modell- auf FE-Modellierungsparameter diskutiert. Zur Darstellung dieser komplexen Abhängigkeiten in der FE-Kontaktanalyse wird eine Dependency-Structure-Matrix (DSM) verwendet [4]. Auf Grundlage der DSM erfolgt eine Untersuchung des Einflusses von Diskretisierungsgrad auf Kontaktbereich am Beispiel von Zahnrädern.

2 Korrelation von Modell- und Modellierungsparametern

2.1 Theoretische Grundlagen der DSM

Die DSM [4, 5] ist eine systematische Methode zur Visualisierung und Analyse von Bestandteilen und Abhängigkeiten zwischen einzelnen Aufgaben oder Einflussgrößen. In einer quadratischen Matrix werden Parameter aufgetragen und ihre Bezüge zueinander dargestellt. Dieses Verfahren kann zur Produktentwicklung, Planung/Organisation des Entwicklungsprozesses oder für komplexe Produktarchitekturen herangezogen werden. Im Modell werden jeder Einflussgröße eine Zeile und eine Spalte zugeordnet, jeweils in der gleichen Reihenfolge. Von oben nach unten werden die Größen genannt, welche von der vorangegangenen Aufgabe abhängig sind. Von rechts nach links ergibt sich der Input der Einflussgröße A auf die Größe B. Die Hauptdiagonale bleibt leer. Durch die Auftragung in Matrixform können Informationsflüsse und die Repräsentation komplexer Abhängigkeiten dargestellt werden. Sensible Bereiche werden so lokalisiert.

Werden zur Dokumentation von Zusammenhängen nur Kreuze verwendet, wird von einer binären DSM gesprochen. Bild 1 zeigt mögliche Beziehungen:

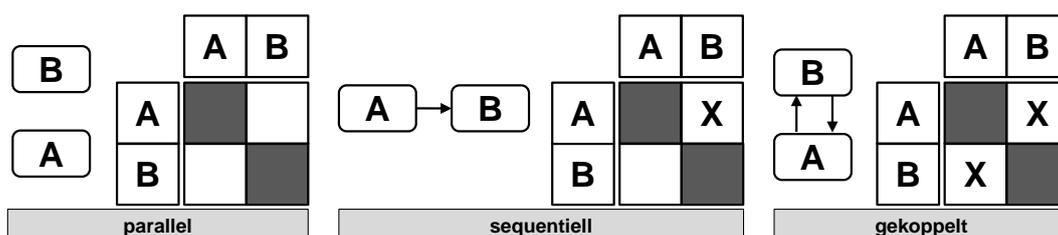


Bild 1: Beziehungen in einer DSM nach [4]

Es ist weiterhin möglich, zusätzliche Gewichtungen der Beziehungen in numerischen DSM darzustellen oder das System statisch bzw. dynamisch, also zeitunabhängig bzw. zeitabhängig zu betrachten.

Nach der Phase der Eintragung der Beziehungen in die Matrix werden zur Klärung von Abhängigkeiten verschiedene Algorithmen zur Konditionierung der Matrix angewandt. Es stehen Sequenzierung, Partitionierung und Clustering zur Verfügung. Je nach Art der Anwendung sind andere Sortierverfahren sinnvoll.

Bei zeitlich aufeinanderfolgenden sequenziellen Eigenschaften ist nur jeweils ein Dreieck der Matrix gefüllt (Upstreaming). Ein Eintrag in der anderen Dreiecksmatrix weist darauf hin, dass eine frühere Einflussgröße von einer später spezifizierten abhängt (Downstreaming). Wenn die Matrix nicht so umsortiert werden kann, dass nur eine Dreiecksmatrix vorhanden ist, sind die jeweiligen Einflussparameter miteinander gekoppelt. Diese Methoden geben über die Abhängigkeiten der einzelnen Einträge Aufschluss. Zwei Aufgaben sind parallel, wenn es keine Markierungen gibt, die sie verknüpfen.

2.2 DSM zur Charakterisierung einer FE-Kontaktanalyse

Zur Charakterisierung der einzelnen Schritte der FE-Kontaktanalyse wird im Folgenden eine DSM angefertigt. Sie visualisiert die komplexen Verknüpfungen einzelner Modell- und Modellierungsparametern.

Zunächst werden Parameter der FE-Kontaktberechnung definiert. Sie bilden die Achsen der DSM. Zu den Modellparametern, die die Basis zur FE-Simulation bilden, zählen neben der Geometrie die Materialparameter und Lasten sowie die Vorgaben zur Kontaktberechnung. Diese werden nach [1] in Normalkontakt und Tangentialkontakt unterschieden. Die Modellierungsparameter gliedern sich in solche, die die Kontaktdefinition abbilden und in allgemeinere, die die FE-Definition beschreiben. Diese Gliederung stellt jedoch keine Konvention dar und dient in diesem Beispiel der besseren Strukturierung. Die FE-Definition setzt sich in dieser Darstellung zusammen aus der FE-Diskretisierung, mit Elementtyp und Netzfeinheit, dem Materialmodell und dem FE-Solver. Der Parameter FE-Solver ist stark vereinfacht gegliedert und umfasst alle zur Lösung des Gleichungssystems notwendigen Informationen und Einflüsse. Die FE-Kontaktdefinition gliedert sich in Kontaktsuche, Kontaktinitialisierung, Festlegung der Kontaktzone zwischen den Kontaktkörpern, Reibgesetz zur Konkretisierung der Wechselwirkung der Oberflächen und Kontakt-

bedingungen zur FE-Diskretisierung [1, 3]. Als Ausgabegrößen werden die ermittelten Verschiebungen, die Spannungsverteilung und die berechneten Kräfte und Momente aufgeführt.

Je nach Art der Anwendung können die DSM unterschiedlich sortiert werden [5]. In dem hier erläuterten Beispiel ist es nicht sinnvoll, durch Partitionierung der Matrix die Ausgabeparameter der Simulation in der zeitlichen Abfolge vor die Modellparameter zu ordnen. In den vorliegenden komplexen Multikomponentenbeziehungen ist nur das Clustern eine sinnvolle Strukturierungsmöglichkeit. Die zeitliche Abfolge der FE-Kontaktanalyse bleibt somit direkt in der DSM erhalten. Bild 2 zeigt eine DSM für die FE-Kontaktanalyse.

		Modell					Modellierung								Ausgaben			
		Vorgaben			Kontakt		FE-Definition				Kontakt-Definition							
		Geometrie	Material	Lasten	Tangentiaik.	Normalk.	Netzfeinheit	FE-Typ	Mat-modell	FE-Solver	Reibgesetz	Initialisierung	Suche	Kontaktzone	Bedingung	Verschiebung	Spannung	Kraft/Moment
Modell	Vorgaben	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	Kontakt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	FE-Definition	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
	Kontakt-Definition	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>									
	Ausgaben	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>													

Bild 2: DSM FE-Kontaktanalyse, erstellt mit [6]

2.3 Analyse der DSM zur FE-Kontaktanalyse

Die DSM aus Bild 2 zeigt den starken sequentiellen Charakter der FE-Kontaktanalyse. Dabei ist hauptsächlich die obere Dreiecksmatrix gefüllt (Upstreaming). Es existieren jedoch auch einige Parameter, die zeitlich frühere Einflussgrößen beeinflussen. Die Modellparameter sind unabhängig voneinander.

Zur Beschreibung der Korrelation von Modell- und Modellierungsparametern muss die Untermatrix Modellparameter – Modellierungsparameter betrachtet werden. Dazu kann aus der DSM abgelesen werden, dass die Geometrie die Diskretisierungseigenschaften, Elementtyp und Vernetzungsgrad festlegen und die Materialparameter das Materialmodell für die FEA kalibrieren. Die Lasten der FEA spiegeln sich direkt im zu lösenden Gleichungssystem als diskretisierter Kraftvektor wieder [7]. Speziell für die FE-Kontaktanalyse ist die Untermatrix Modellparameter – Kontaktdefinition von Interesse. Die Materialparameter liefern Informationen für das Reibgesetz der Kontaktflächen [8]. Das Reibgesetz ist wiederum abhängig von den Kontaktvorgaben (Normal- und Tangentialkontakt). Einerseits wird es nur dann in die Lösung der Kontaktanalyse eingehen, wenn Tangentialkontakt vorausgesetzt ist und andererseits erfolgt in diesem Fall die Entscheidung der Relativbewegung der Kontaktflächen zueinander, mit Haften und Gleiten, durch z.B. das Coulombsche Reibungsgesetz mit Normalkraft und den entsprechenden Reibungskoeffizienten für Haft- und Gleitreibung [8].

Damit sind die Kontaktvorgaben auch eine direkte Eingangsgröße für die Kontaktbedingungen. Diese können z.B. mittels Lagrange-Multiplikator-, Augmented-Lagrange-, Perturbed-Lagrange-, Penalty- oder Nitsche-Methode realisiert werden [1, 2]. Modellierungsparameter, sowohl die der Kontaktdefinition als auch die FE-Definition liefern dagegen keine Informationen für die Modellparameter. Die Modellierungsparameter untereinander zeigen hingegen Up- und Downstreaming-Effekte. Wechselseitige Abhängigkeiten zeigt die DSM innerhalb der Parameter zur FE-Definition. Dabei haben die Diskretisierung beschreibenden Größen Netzfeinheit und Elementtyp mehrere Abhängigkeiten. Sie stellen Eingangsgrößen für den FE-Solver sowie die Kontaktsuche und Kontaktinitialisierung dar und stehen gleichzeitig in einer gekoppelten Beziehung mit der Kontaktbedingung. In 2.4 soll die indirekte sequentielle Abhängigkeit des Vernetzungsgrades von der Belastung an einem Beispiel näher erläutert werden. Die Parameter der Kontaktdefinition sind hauptsächlich sequentiell abhängig und folgen dem Ablauf Kontaktsuche, Kontaktinitialisierung, Kontakt-

zone und Kontaktbedingung. Eine Ausnahme stellt die Kontaktbedingung dar, die in indirekt gekoppelter Abhängigkeit mit dem Reibgesetz steht, da je nach maximaler Reibkapazität der Kontaktfläche, berechnet aus den Kontaktkräften, die Kontaktbedingung verändert und die Iteration erneut durchzuführen ist [8]. In der Untermatrix FE-Definition – Kontaktdefinition zeigt sich, dass die Kontaktbedingung im besonderen Maße die frühere Einflussgröße der Vernetzung beeinflusst. Je nach Diskretisierung des Kontaktbereichs muss der Vernetzungsgrad und der Elementtyp entsprechend gewählt werden. So ist bei Knoten-Segment-Kontakt der Diskretisierungsgrad höher zu wählen als bei Segment-Segment-Kontakt, um eine ausreichend genaue Beschreibung des Kontaktbereichs zu erzielen [2, 3]. Genauso stellen die Verschiebungen eine Eingangsgröße für die nächste Iteration der Kontaktberechnung dar.

2.4 Anwendung der DSM zur Untersuchung des Einflusses von Diskretisierungsgrad auf den Kontaktbereich am Beispiel von Stirnrädern

Am Beispiel einer Stirnradstufe soll eine in der DSM gezeigte Korrelation von Modell- und Modellierungsparameter analysiert und bewertet werden. Dafür wird die indirekt gekoppelte Abhängigkeit von Vernetzungsgrad, Kontaktzone und Belastung näher erläutert (Bild 3).

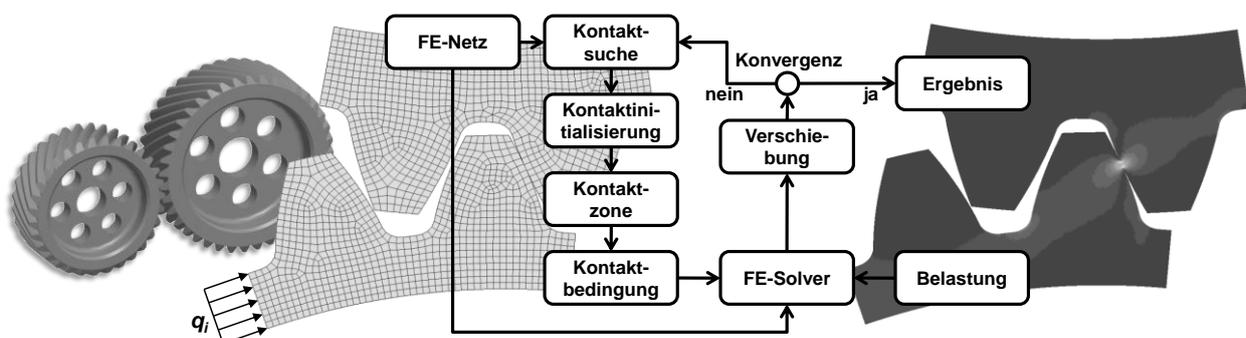


Bild 3: Stirnradstufe, FE-Modell und iterativer Lösungsprozess FE-Kontaktanalyse

Das FE-Modell besteht aus 2D-Scheibenelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen. Die Lagerung ist versteift durch Rigid-Link-Elemente. Die Berechnung erfolgt mit linear elastischem Materialmodell ($E = 206000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$), fünf verschiedenen Vernetzungsgraden $NF0,51$, $NF0,26$, $NF0,07$, $NF0,03$ und $NF0,02$ mit der jeweils mittleren Elementkantenlänge von $0,51 \text{ mm}$ bis $0,02 \text{ mm}$ und fünf Streckenlasten q_i von 400 N/mm bis 2000 N/mm , welche lastschrittweise aufgegeben werden. Die FE-Modellbildung, Berechnung und Visualisierung erfolgt mit Z88 Aurora [9] bzw. Z88CON.

3 Ergebnisse und Zusammenfassung

Die Untersuchung des Kontaktbereichs zeigt, dass mit höherem Vernetzungsgrad bei gleicher Belastung die Ausdehnung des Kontaktbereichs weniger starken Sprüngen unterworfen ist als bei niedrigeren Vernetzungsgraden. Die Begründung dafür ist die sprunghafte Zunahme der Kontaktbereichslänge mit zuvor inaktiven Kontaktknoten in Kombination mit der vergleichsweise großen mittleren Elementkantenlänge im Kontaktbereich (Bild 4, li.). Aus dem gleichen Grund vergrößert sich der Kontaktbereich mit Zunahme der Last bei konstantem Vernetzungsgrad (Bild 4, re.). Nur wenn die Last eine ausreichende Verschiebung der Kontaktknoten bewirkt, wird der zur Kontaktinitialisierung notwendige Trennabstand überschritten und der Kontaktknoten aktiv.

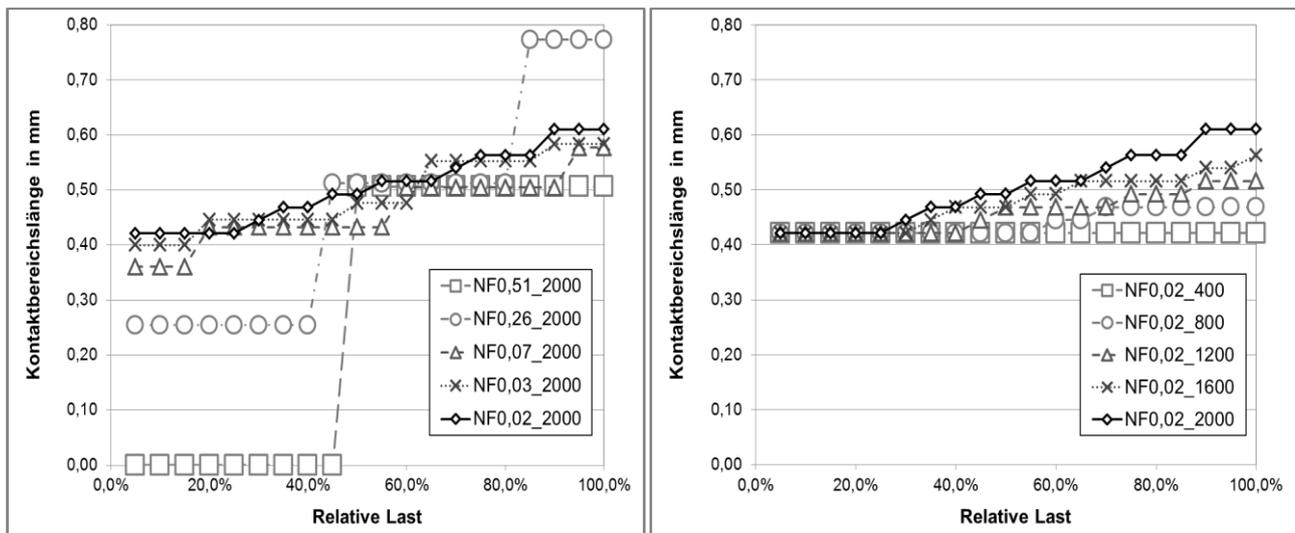


Bild 4: Vergrößerung des Kontaktbereichs in Abhängigkeit des Vernetzungsgrades bei konstanter Last (li.), Vergrößerung des Kontaktbereichs in Abhängigkeit der Last (re.)

Wird die Kontaktbereichslänge $l_{NF0,02}$ des höchsten Vernetzungsgrads $NF0,02$ als am zuverlässigsten betrachtet, kann eine Matrix (Tabelle 1) aufgestellt werden, die die Zuverlässigkeit z einer Kontaktbereichslänge l_{NF_i} für eine bestimmte Last beschreibt (1).

$$z_i = 1 - \frac{|l_{NF_i} - l_{NF0,02}|}{l_{NF0,02}} \quad (1)$$

Daraus kann abgeleitet werden, dass mit zunehmender Last auch geringere Vernetzungsgrade Ergebnisse liefern, die nur gering von denen mit höheren Vernetzungsgraden abweichen. Bei geringen Belastungen sind die höheren Vernetzungsgrade in der Zuverläss-

sigkeit jedoch überlegen. Für das berechnete Beispiel kann demnach ausgesagt werden, dass ein Vernetzungsgrad von $0,03 \text{ mm}$ mittlerer Kantenlänge im Kontaktbereich akzeptable Ergebnisse verglichen mit dem höchsten Diskretisierungsgrad bei geringer Rechenzeit liefert. Das Beispiel zeigt, dass mit Hilfe der DSM gezielt Abhängigkeiten in der komplexen FEA strukturiert, isoliert und analysiert werden können.

Tabelle 1: Beurteilung der Zuverlässigkeit des Kontaktbereichs für die Stirnradstufe aus Bild 3

Zuverlässigkeit		Streckenlast in N/mm					Mittlere Zuverlässigkeit
		400	800	1200	1600	2000	
Diskretisierungsgrad	NF0.51	0,00%	0,00%	98,14%	89,88%	82,95%	54,20%
	NF0.26	60,38%	90,63%	99,30%	90,94%	73,36%	82,92%
	NF0.07	97,32%	92,36%	97,83%	89,60%	94,51%	94,32%
	NF0.03	94,20%	95,17%	92,32%	98,16%	95,62%	95,09%
	NF0.02	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Literatur

- [1] Wriggers, P.: *Finite Element Algorithms for Contact Problems*. Archives of Computational Methods in Engineering, Volume 2 (1995), Number 4, 1-49.
- [2] Wriggers, P.: *Computational Contact Mechanics*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2006. - ISBN 978-3-540-32608
- [3] Laursen, T.A.: *Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2010. - ISBN 978-3-642-07685-5
- [4] Lindemann, U.; Maurer, M.; Braun, T.: *Structural Complexity Management: An Approach for the Field of Product Design*. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2009. - ISBN 978-3540878889
- [5] Yassine, A.A.: *An Introduction to Modeling and Analysing Complex Product Development Processes Using the Design Structure Matrix (DSM) Method*. Quaderni di Management (Italian Management Review), No.9, 2004.
- [6] Wynn, D.; Nair, S.: *Cambridge Advanced Modeller*. URL: <http://www-edc.eng.cam.ac.uk/cam/>. Stand: 15.07.2011.
- [7] Rieg, F.; Hackenschmidt, R.: *Finite Elemente Analyse für Ingenieure. Eine leicht verständliche Einführung*. 3. Aufl. München, Wien: Carl Hanser Verlag, 2009. - ISBN 978-3446402157
- [8] Bathe, K.-J.; Chaudhary, A.: *On Finite Element Analysis of large Deformation frictional Contact Problems*. North-Holland Mathematics Studies, Volume 94, 1984, Pages 123-147, Unification of Finite Element Methods.
- [9] Rieg, F.: *Z88 Aurora*. URL: <http://www.z88.de/>. Stand: 15.07.2011.