

## **Isolation der Verformungseffekte in Ritzelwellen: Durchbiegung, Torsion und Zahndeformation**

**Martin Neidnicht, Florian Nützel, Frank Rieg**

Universität Rostock, Fakultät für Angewandte Naturwissenschaften

Lehrstuhl Konstruktionslehre und CAD

Universitätsstraße 30, 95440 Bayreuth

Email: martin.neidnicht@uni-bayreuth.de; Internet: <http://www.konstruktionslehre.uni-bayreuth.de>

**Inhalt:** *In der Praxis sind technische Bauteile häufig komplexen Belastungsszenarien mit überlagerten Beanspruchungen ausgesetzt, die sich in einer superponierten Bauteilreaktion niederschlagen. Am Beispiel von Ritzelwellen, die insbesondere im Windenergieumfeld enormen mechanischen Belastungen ausgesetzt sind, wird im vorliegenden Beitrag ein Verfahren hergeleitet, welches zur Auflösung der resultierenden Einzeleffekte Durchbiegung, Torsion und Zahndeformation dient. Diese Synthese der Deformationsanteile wird durch sukzessive aufeinander aufbauende Modellierungen von Finite-Elemente-Analysen (FEA) sowie durch konsequente Anwendung des Superpositionsprinzips erreicht. Sie kann in der Folge beispielsweise zu einer Zahnkontaktdefinition mit verbesserter Genauigkeit genutzt werden. Die vorgestellte Vorgehensweise wurde mit dem FEA-Programm Z88 Aurora durchgeführt und soll im Rahmen eines Forschungsvorhabens der Forschungsvereinigung Antriebstechnik (FVA) systematisch zur Anwendung gebracht werden.*

**Abstract:** *In practice, often technical components are exposed to complex stress scenarios with superimposed loads, which are reflected by combined reactions, too. Using the example of the pinion shaft, which is charged especially in the wind energy environment with enormous mechanical stresses, in this paper a method is derived, which is used to resolve the resulting individual effects deflection, torsion and tooth deformation. This synthesis of the deformation components is achieved by successively modeling of finite element analysis (FEA) and rigorous application of the superposition principle. The results can then be used for example to define a tooth contact with improved accuracy. The presented procedure was performed using the FEA program and Z88 Aurora and will be systematically applied as a part of a research project of the German Research Association for Drive technology (FVA).*

**Stichwörter:** *Ritzelwelle, Windkraftgetriebe, Finite-Elemente-Analyse, komplexe Belastung, Zahnkontakt,*

**Keywords:** *Pinion shaft, wind power transmission, finite element analysis, complex loading, tooth contact*

## 1 Einleitung

Aufgrund der kombinierten Funktion von Ritzelwellen zur Drehmomentübertragung und -Wandlung, ergibt sich eine ebenfalls überlagerte und im Vergleich zu einfacheren Verzahnungen komplexere Belastungsreaktion. Infolge des Zahneingriffs sowie der Lagerung kommt es zu einer Superposition der elastischen Wellenverformungen mit Deformationen im Zahnkontaktbereich. Insbesondere bei Bauteilen mit großen Abmessungen, wie sie beispielsweise im Windenergieanlagen [3,4] zum Einsatz kommen, sind Effekte wie Durchbiegung und Torsion signifikant im oder über dem Einflussbereich der Zahnverformung zu erwarten und somit nicht vernachlässigbar.

Diese Tatsache macht eine Analyse mit immanenter Berücksichtigung aller Wechselwirkungen notwendig. Die prinzipielle Unabhängigkeit der Verformungsergebnisse von Art und Herkunft des hervorrufenden Effektes macht die Finite-Elemente-Analyse (FEA) zu einem geeigneten Werkzeug hierfür. Um trotz der überlagerten Gesamtverformung, eine Aussage darüber treffen zu können, welche konstruktiven Maßnahmen zur Weiterentwicklung ergriffen werden müssen, ist eine detaillierte Kenntnis der Einzelreaktionen wie Wellendurchbiegung, -torsion bzw. den lokalen Verformungen im Zahnkontaktbereich nötig. So wird beispielsweise die Kontaktdefinition im Verzahnungsbereich erst durch zuverlässige Kenntnis von Verlagerung und Deformation der Zahnflanken möglich. Auch gegebenenfalls zu berücksichtigende Schiefstellungen der Lager können erst durch Isolation der Verkipfung des Wellenquerschnitts an den Lagerstellen zur Auslegung verwendet werden.

Im vorgelegten Beitrag wird aufgezeigt, wie sich durch Kombination geeigneter FEA-Modellierungen die zunächst überlagerten Effekte voneinander trennen lassen. Mit Hilfe der vorgestellten Vorgehensweise können die Deformationen jedes Punktes der Ritzelwellengeometrie bzgl. Herkunft zugeordnet werden.

Abbildung 1 zeigt ein Beispielbauteil, das einer Planetenritzelwelle eines Windanlagengetriebes [3] nachempfunden wurde. Das antreibende Drehmoment wirkt auf die mittige, breite Verzahnung; der Abtrieb erfolgt am zweiten Zahnrad um 180° bzgl. Drehachse versetzt. Die unter Last zu erwartende starke Lageänderung der Verzahnungsbereiche infolge der Wellendurchbiegung und -Torsion (vgl. Abbildung 5) macht deutlich, dass diese elastischen Deformationen des Verzahnungsumfeldes bei der Auslegung quantifiziert und berücksichtigt werden müssen.

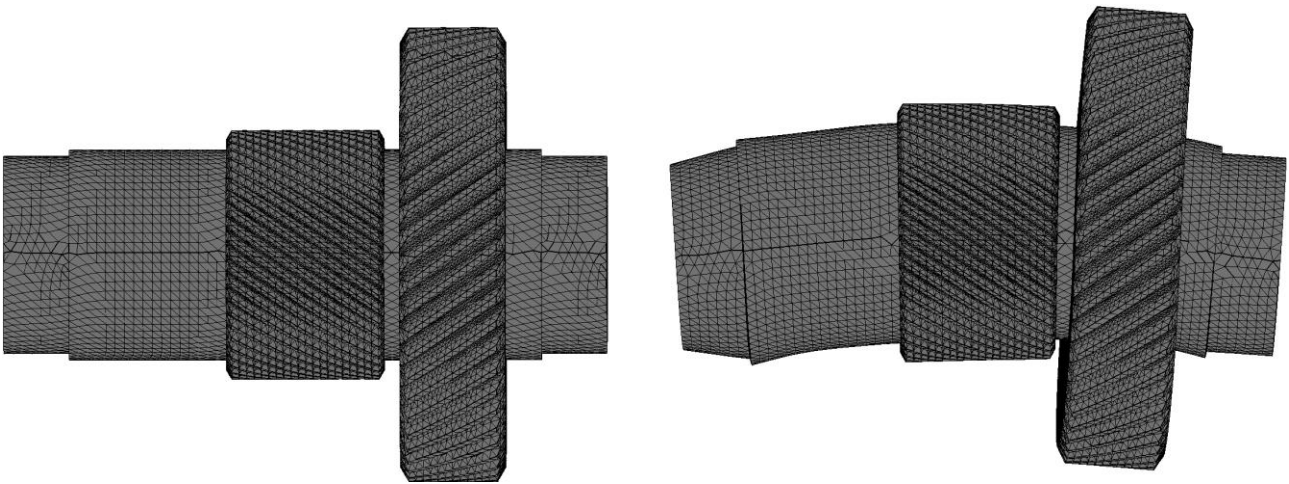


Abbildung 1: FE-Netz einer Planetenritzelwelle im Originalzustand (links) und infolge der Belastung elastisch verformt und überzeichnet (rechts); Festlager links, Loslager rechts.

## 2 Theoretische Grundlagen

Eine grundlegende Annahme von Berechnungsverfahren Hooke'scher Elastizität in der technischen Mechanik ist das sogenannte Superpositionsprinzip. Hierauf basierende Rechenvorschriften bilden gleichermaßen die Grundlage von analytischer Balkentheorie [6] sowie auch der linearen, strukturmechanischen FEA. So lässt sich im Falle linearer Elastizität die Suche nach einer energieminimierenden Lösung der FE-Variationsrechnung auf ein lineares Gleichungssystem der Form (1) zurückführen [1,2].

$$K \cdot \mathbf{u}_{ges} = \mathbf{F}_{ges} \Leftrightarrow K \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (1)$$

Hierbei seien mit  $\mathbf{F}_i$  Einzellasten (insbes. Zahneingriffskräfte) gekennzeichnet, die auf die Ritzelwelle mit Bauteilsteifigkeit  $\mathbf{K}$  wirken. Aufgrund der Linearität lässt sich analog auch die Deformation  $\mathbf{u}_{ges}$  als Summe der von Einzelverformungen  $\mathbf{u}_i$  darstellen. Definitionsgemäß ist wie in (2) sichergestellt, dass die Vektoren  $\mathbf{u}_i$  die jeweiligen Lösungsvektoren der Einzel-Gleichungssysteme mit rechter Seite  $\mathbf{F}_i$  sind.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = K^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \Rightarrow \mathbf{u}_{ges} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n K_i^{-1} \cdot \mathbf{F}_i \quad (2)$$

Doch nicht nur äußere Kräfte  $\mathbf{F}_i$  haben einen Einfluss auf die Gestalt des deformierten Bauteils; auch Fixierungen durch Lagerungen müssen berücksichtigt werden und finden sich innerhalb der Steifigkeitsmatrix wieder. Die somit potentiell je Lastfall unterschiedlichen Matrizen  $\mathbf{K}_i$  müssen demnach ebenfalls in die Superposition einbezogen werden. Mit der beschriebenen Vorgehensweise ist es folglich möglich, die FE-

Knotentransformationen unter Last bzgl. vordefinierter Lastfälle aufzuspalten. Im nächsten Schritt sollen die muss dafür Sorge getragen werden, dass die Teildeformationen tatsächlich eine technische Repräsentation widerspiegeln. Hierzu werden ausgehend von Bauteileigenschaften und Belastungsszenario verschiedene Modellierungen der Randbedingungen formuliert, die im Falle der Ritzelwelle eine Trennung zwischen Biegungs-, Torsions- und Zahneingriffsdeformationen erlauben.

### 3 Randbedingungs-Formulierung zur Isolation der Verformungseffekte

Ausgangsbasis jeder Modellierung des betrachteten Lastfalls ist eine möglichst realitätsnahe Wiedergabe der Lagerstellen und Krafteingriffe aus dem Belastungsszenario. Für das Beispiel aus Abbildung 1 wurden etwa die Lagerungen an den beiden Wellenenden durch Multi-Point-Constraints (MPC's, vgl. [2]) modelliert, die eine axiale Rotation bei gleichzeitiger Fixierung radialer Deformationen erlauben. Zugunsten der statischen Bestimmtheit wurde die Verzahnung des Stirnrades im Eingriffsbereich radial fixiert, die gesamte Drehmomentdifferenz wirkt dann im Eingriffsfeld der breiten Verzahnung. Diese Randbedingungen charakterisieren gemeinsam die Modellierungsvariante 1, welche Torsion (T), Biegung (B) und Zahndeformationen (Z) erlaubt.

Randbedingung	FE-Repräsentation	Variante 1 (T + B + Z)	Variante 2 (T + Z)	Variante 3 (Z)
Lager links	Einzel-MPC zur Drehachse	X	X	X
Lager rechts	Einzel-MPC zur Drehachse	X	X	X
Fixierung der Torsion: Abtrieb	Radialfixierung im Zahneingriff	X	X	X
Momenteinleitung: Antrieb	Normalkraft im Zahneingriff	X	X	X
Keine Durchbiegung der Welle	Mehrere MPC's zur Drehachse		X	X
Keine Torsion der Welle	Radiale Fixierung des Innendurchmessers			X

Abbildung 2: Übersicht der verwendeten Randbedingungen für die Varianten 1 - 3

### 3.1 Erweiterungen des ursprünglichen Szenarios

Zur nachträglichen Verwertung des in (2) beschriebenen Zusammenhangs werden nun zwei weitere Modellierungen formuliert, deren resultierende FE-Knotenverschiebungen durch wechselseitige Subtraktion die Synthese der Einzeleffekte (T, B, Z) ermöglichen. Für Variante 2 werden zusätzlich alle Innendurchmesser in ihrer Lage sowie ihrer konzentrischen Form fixiert, um den Effekt der Biegung von Wellenquerschnitt und Drehachse (B) zu eliminieren. Dies wird durch quasi-starre MPC's zwischen jedem der FE-Knoten auf der Welleninnenseite und Punkten auf der Drehachse erreicht.

Bei Variante 3 werden alle vorgenannten Randbedingungen schließlich um eine vollständige Fixierung des Innendurchmessers erweitert, welche zusätzlich Drehungen der Querschnitte (T) ausschließt. Alle verbleibenden Deformationen werden sämtlich als Zahnverformung (Z) deklariert, auch wenn sie abseits vom Verzahnungsbereich auftreten können. Diese erweiterte Definition erlaubt folglich eine Rückführung von Verformungen im Auslauf- und Anschlussbereich von Verzahnungen auf die hervorrufenden Eingriffskräfte.

### 3.2 Überlagerung und Synthese der Einzelverformungsanteile

Sobald die aus den beschriebenen Modellierungen resultierenden FE-Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}^{BTZ}$ ,  $\mathbf{u}^{TZ}$  und  $\mathbf{u}^Z$  ermittelt sind, können durch deren Kombination auch die verbleibenden Einzeleffekte Torsion  $\mathbf{u}^T$  und Biegung  $\mathbf{u}^B$  ermittelt werden. So gilt für jeden Knoten  $i$  in den drei Freiheitsgraden  $j = 1, 2, 3$ :

$$\mathbf{u}_{i,j}^B = \mathbf{u}_{i,j}^{BTZ} - \mathbf{u}_{i,j}^{TZ} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{u}_{i,j}^T = \mathbf{u}_{i,j}^{TZ} - \mathbf{u}_{i,j}^Z. \quad (3)$$

Abbildung 3 zeigt den Deformationsbetrag von FE-Knoten entlang einer Messlinie, die sich über die komplette Wellenlänge erstreckt. Diese befindet sich an jeder z-Koordinate am äußersten Bauteilradius, was sich insbesondere im Bereich des Stirnrades ( $75 \leq z \leq 150$ ) in einer vergleichsweise starken Biegungskomponente niederschlägt. Infolge des größeren Radius hat dort die berechnete Verkippung des Stirnschnittes eine dominante Verschiebung in Achsrichtung zufolge. Die ebenfalls in diesem Intervall wirksame Fixierung in Radialrichtung spiegelt sich in einem lokalen Torsionsverlauf nahe null wieder. Die Zahnverformung im Eingriffsfeld der mittigen Verzahnung ( $-60 \leq z \leq 60$ ) kann ebenfalls beobachtet werden.

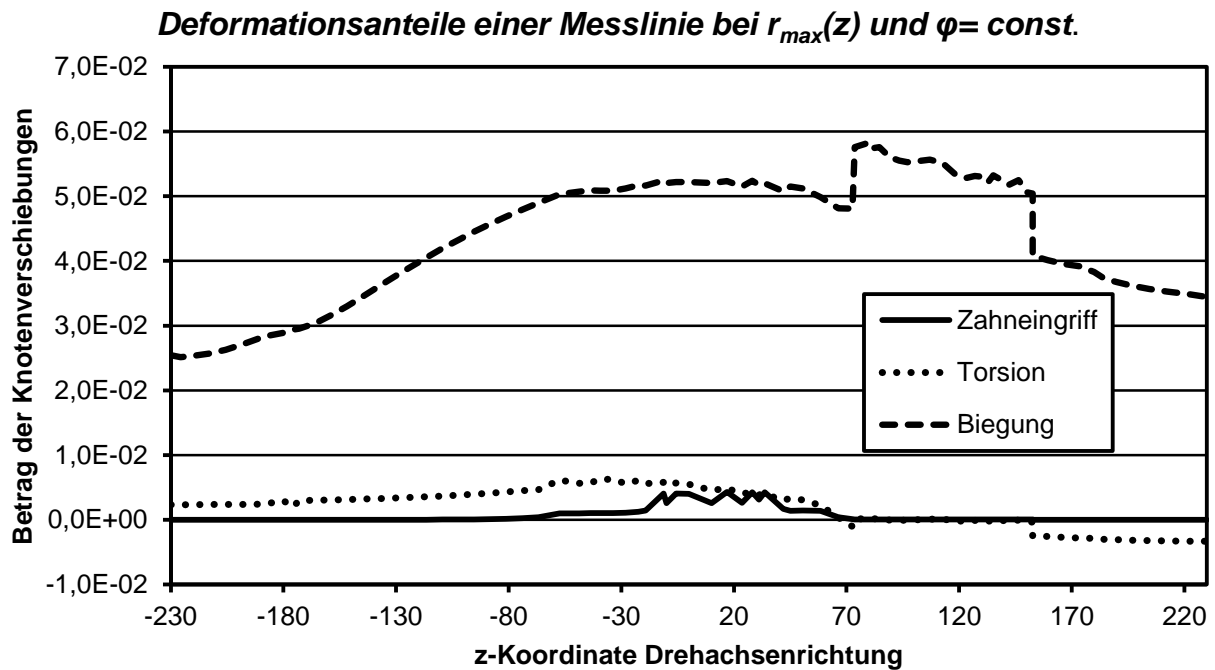


Abbildung 3: Anteile der Deformationseffekte entlang einer FE-Knotenkette am Wellenaußenrand

Generell trägt in dem betrachteten Beispiel die Verkipfung und Ovalisierung der Wellenquerschnitte am deutlichsten zur Verformung durch Biegung bei. Abbildung 4 illustriert, wie stark die Abweichungen zur ursprünglich kreisförmigen Gestalt sind.

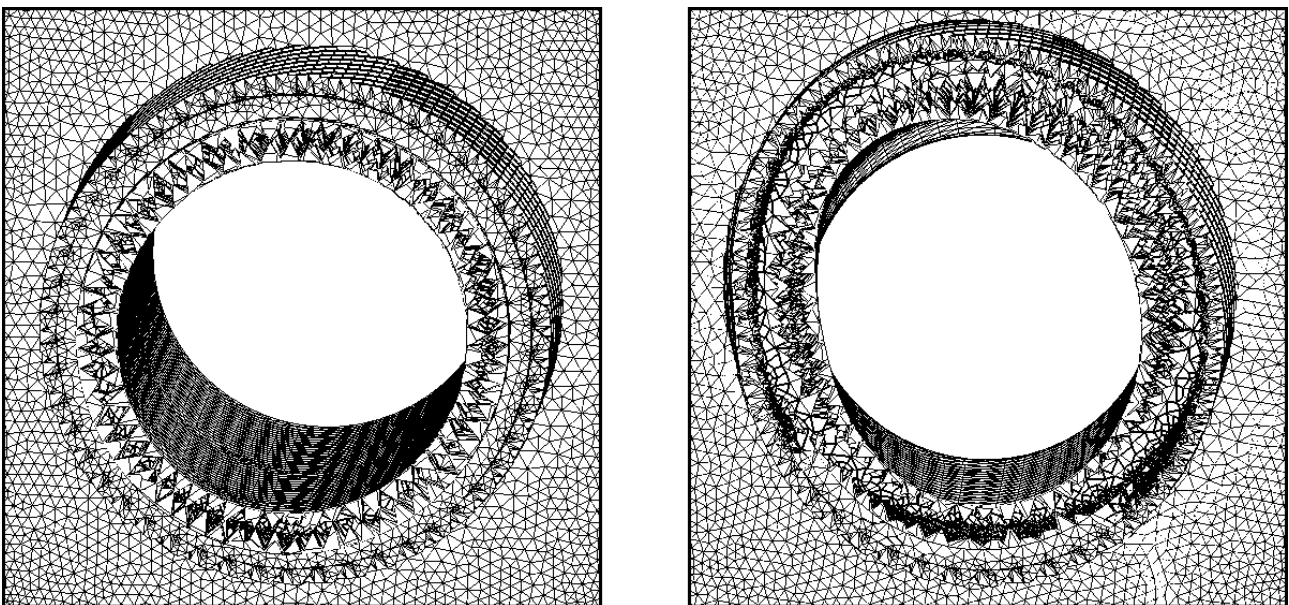


Abbildung 4: Ovalisierung und Verkipfung (rechts) der Beispielritzelwelle am vormals konzentrischen (links) Innendurchmesser

Da auch die Wellenquerschnitte an den Lagerungen eine Schrägstellung erfahren und die Biegungsverformung an den Messpunkten auf dem Außendurchmesser dargestellt ist, schneidet der Biegungsverlauf nicht bei null. Dennoch kann das Festlager (links,  $-230 \leq z \leq -180$ ) anhand der kleineren Deformation vom Loslager unterschieden werden.

#### 4 Praktische Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens

Von besonderer technischer Bedeutung ist wiederum die Überlagerung  $u^{BT}$  von Torsions- und Biegungsdeformationen. So kann diese lastabhängige Verlagerung der Gesamtwelle als Grundlage für eine exakte Kontaktdefinition im Verzahnungsbereich genutzt werden und die Abbildungsgenauigkeit – der in der Praxis häufig verwendeten – lastfreien Berührungdefinition stark verbessern. Ein FVA-Forschungsvorhaben der Institute von Prof. Brecher (RWTH Aachen) und Prof. Rieg (Universität Bayreuth) behandelt diese Fragestellung in Verbindung mit dem Getriebe-Auslegungsprogramm STIRAK [5].

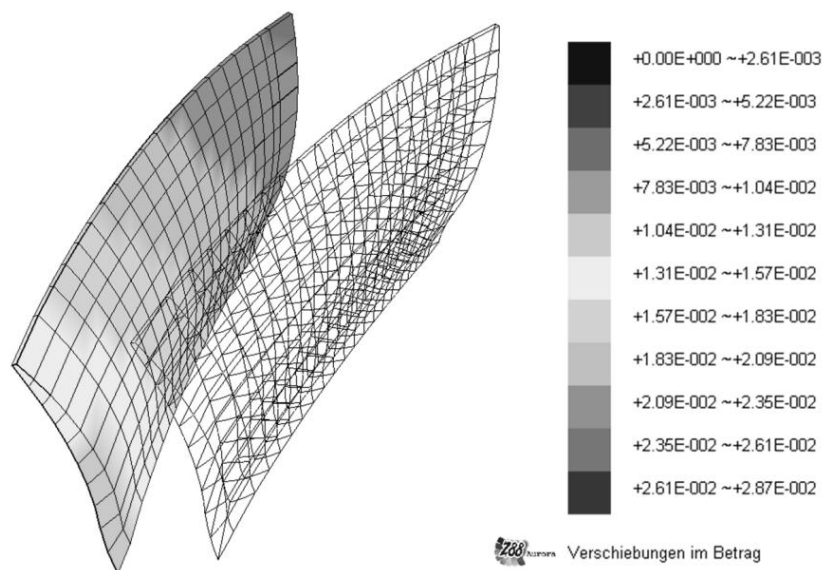


Abbildung 5: Lageabweichung einer Zahnflanke infolge von Durchbiegung und Torsion der Welle

Auch andere Methoden der Zahnkontaktanalyse verwenden im Interesse geringer Rechenzeit häufig lediglich lokal sehr begrenzte Bauteilausschnitte im Verzahnungsbereich. Für diese Methoden kann die Elastizität des Umfeldes ebenfalls als feste Verlagerung der vormals fixierten Schnittflächen berücksichtigt werden. So ist es möglich, den Simulationsumfang signifikant zu erweitern und die zur Auslegung bedeutsame Wälzsimulation erheblich praxisnäher zu gestalten.

## Literatur

- [1] Rieg, F.; Hackenschmidt, Reinhard; Finite-Elemente-Analyse für Ingenieure. 3. Aufl. München: Hanser 2009.
- [2] Bathe, K.-J.; Finite-Elemente-Methoden. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 2002.
- [3] Schutzrecht EP 1 318 329 A2 (11.06.2003). Winergy AG. Pr.: DE 10159973.
- [4] Boiger, P.: Renk Aerogear – Planetengetriebe für wirtschaftliche Windenergie. Sonderdruck aus Wind Kraft Journal, 2009.
- [5] Forschungsvereinigung Antriebstechnik e.V. (FVA) (Hrsg.): Programm FE-Stirnradkette 3.0. Frankfurt / Main: Forschungsvereinigung Antriebstechnik e. V. (FVA), 2003. – Benutzeranleitung
- [6] Gross, D.; Hauger, W.; Schnell, W.; Technische Mechanik 2. Elastostatik. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1998.