



# Berechnungen in der Antriebstechnik: Reduktion elastischer Strukturen und Anwendung verschiedener Koppelbedingungen

17. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

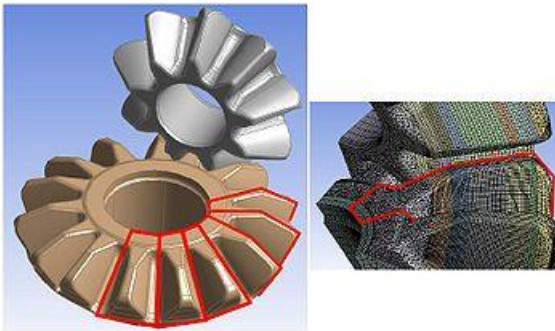
Universität Bayreuth, 16.09.2015

D. Billenstein, F. Nützel, C. Glenk, F. Rieg



## Reduktion

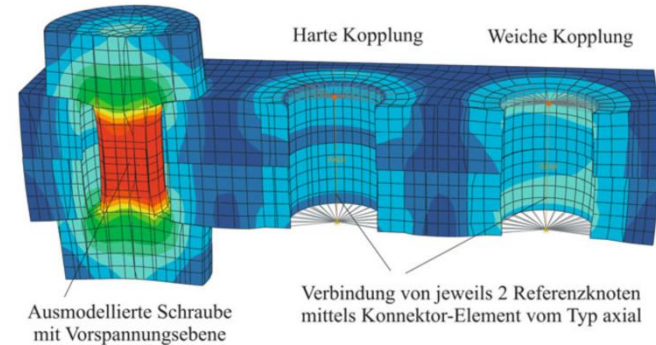
### Substrukturtechnik



Quelle: [9]

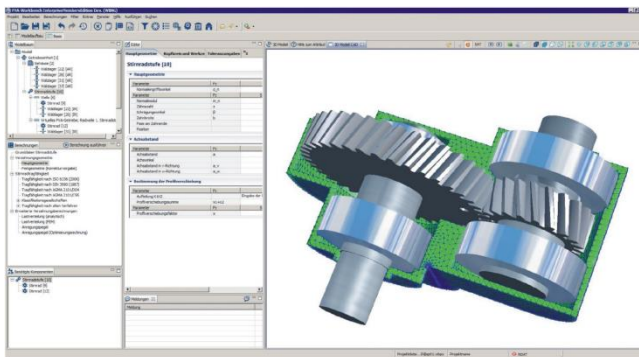
## Koppelbedingung

### Schraubenvorspannung



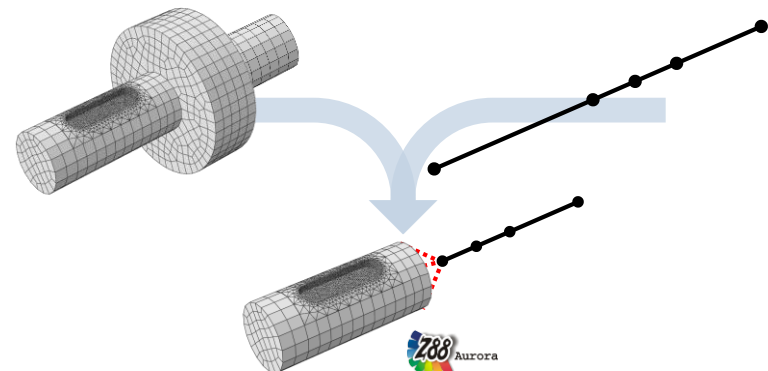
Quelle: [4]

## Kopplung von Simulationmethoden

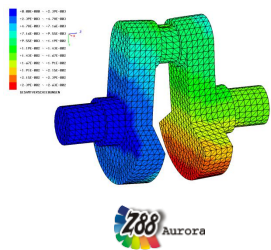
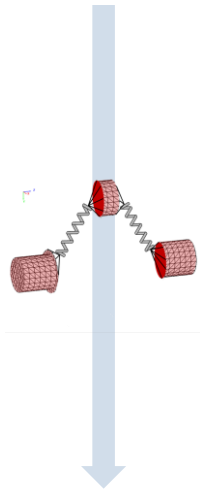
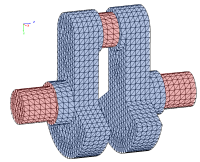


Quelle: [11]

## Kopplung unterschiedlicher Elemente



2



## Reduktion

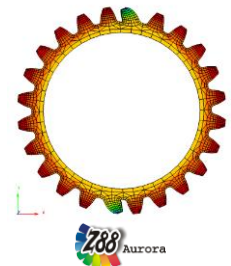
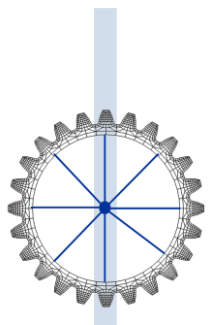
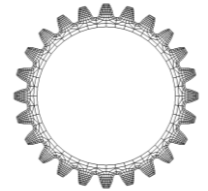
---

- 1) Motivation
- 2) Theorie
- 3) Anwendungsbeispiel

## Koppelbedingung

---

- 1) Motivation
- 2) Theorie
- 3) Anwendungsbeispiel



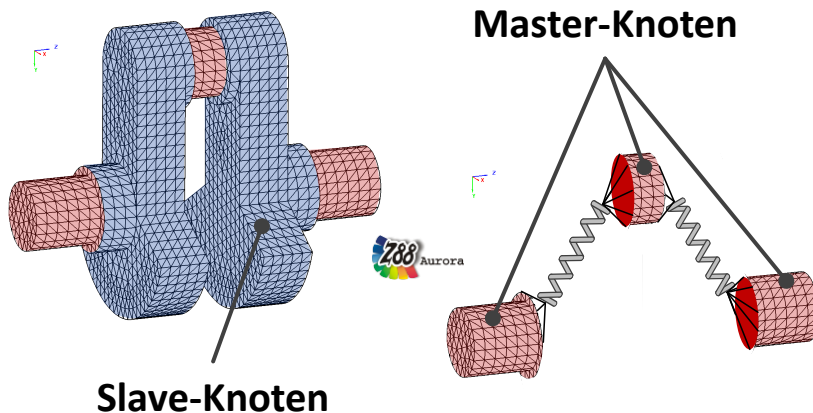


### Wann ist eine Reduktion des FE-Modells sinnvoll?

- Komplexe FEM-Modelle mit vielen Details und Freiheitsgraden
- Einsparen von Rechenzeit bei der Berechnung mehrerer Lastfälle
- Kopplung verschiedener Simulationsmethoden, z.B. FEA und MKS

### Arten der FE-Reduktion

- **Statische Reduktion**
- Dynamische Reduktion

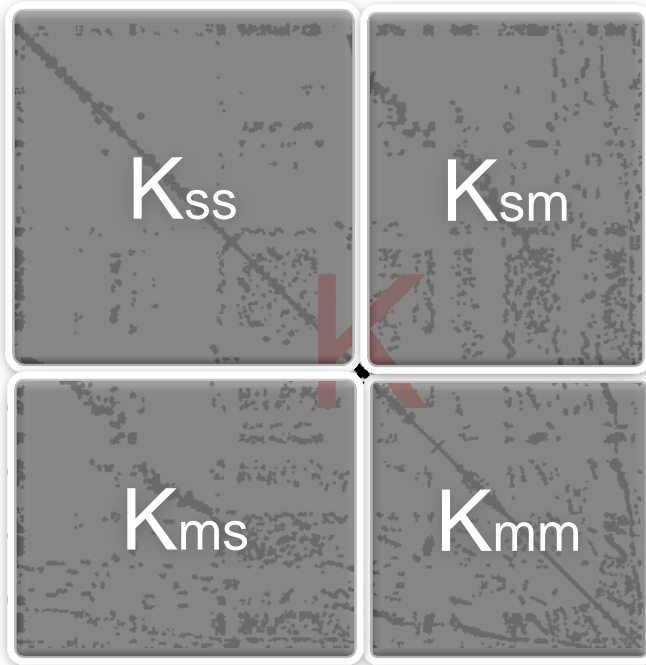


### Eigenschaften der statischen Reduktion

- Kein Verlust von Steifigkeitsinformationen
- Exakte Lösung
- Auswahl der Master- und Slave-Knoten im Vorfeld
- Master-Knoten für Randbedingungen und zur Auswertung
- Wiederherstellung der kondensierten Slave-Knoten



positiv definite, symmetrische Matrix



**Ziel:**  $K u = F$  in reduziertes System überführen

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_s \\ F_m \end{pmatrix} !$$

$$K_{ss} u_s + K_{sm} u_m = 0 \quad \Rightarrow \quad u_s = -K_{ss}^{-1} K_{sm} u_m$$

$$u = \begin{pmatrix} u_s \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{ss}^{-1} K_{sm} \\ I \end{pmatrix} u_m = T u_m$$

$$\Rightarrow K u = \begin{pmatrix} K_{ss} & K_{sm} \\ K_{ms} & K_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -K_{ss}^{-1} K_{sm} \\ I \end{pmatrix} u_m = K T u_m = F$$

$$K T u_m = F \quad | * T^T \text{ (von links)}$$

$$\boxed{\underbrace{T^T K T}_{K_{red}} u_m = \underbrace{T^T F}_{F_m}}$$



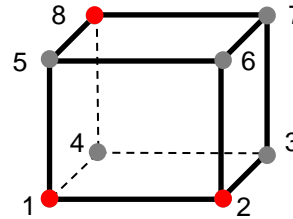
### Einheitslasten

Gezielte Aufgabe einer Einheitslast auf die zu reduzierenden Freiheitsgrade

$$Ku = F$$

$$\begin{pmatrix} x & & & & & & & \\ & x & & & & & & \\ & & x & & & & & \\ \vdots & & & x & & & & \\ \vdots & & & & x & & & \\ & & & & & x & & \\ & & & & & & x & \\ x & & \dots & \dots & & & & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

Statische Bestimmtheit ohne die Reduktionsknoten notwendig



### Einheitsverschiebungen

Gezielte Aufgabe einer Einheitsverschiebung auf die zu reduzierenden Freiheitsgrade (Lagerung der anderen Reduktions-FG)

$$Ku = F$$

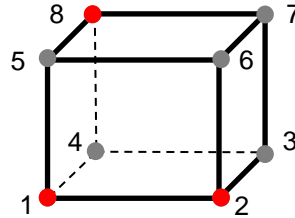
$$\begin{pmatrix} S & & & & & & & \\ & S & & & & & & \\ & & x & & & & & \\ \vdots & & & x & & & & \\ \vdots & & & & x & & & \\ & & & & & x & & \\ x & & \dots & \dots & & & x & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}$$

mit S: Skalierungsfaktor der Randbedingungen



### Einheitslasten

Gezielte Aufgabe einer Einheitslast auf die zu reduzierenden Freiheitsgrade



$$Ku = F$$

$$\begin{pmatrix} x & & & & & & & & \\ & x & & & & & & & \\ & & x & & & & & & \\ \vdots & & & x & & & & & \\ \vdots & & & & x & & & & \\ & & & & & x & & & \\ & & & & & & x & & \\ x & & \dots & \dots & & & & x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ F_3 & F_3 & F_3 \\ F_4 & F_4 & F_4 \\ F_5 & F_5 & F_5 \\ F_6 & F_6 & F_6 \\ F_7 & F_7 & F_7 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Statische Bestimmtheit ohne die Reduktionsknoten notwendig

$$u_{red} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

Elementweise Invertierung von  $u_{red}$  führt zu  $K_{red}$

$$u_{red}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_{11}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \frac{1}{u_{n1}} & \dots & \dots & \frac{1}{u_{nn}} \end{pmatrix}$$

mit n: reduzierende FG

$$K_{red} = \alpha u_{red}^{-1}$$

### Einheitsverschiebungen

Gezielte Aufgabe einer Einheitsverschiebung auf die zu reduzierenden Freiheitsgrade (Lagerung der anderen Reduktions-FG)

$$Ku = F$$

$$\begin{pmatrix} S & & & & & & & & \\ & S & & & & & & & \\ & & x & & & & & & \\ \vdots & & & x & & & & & \\ \vdots & & & & x & & & & \\ & & & & & x & & & \\ x & & \dots & \dots & & & & x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha S & 0 & 0 \\ 0 & \alpha S & 0 \\ F_3 & F_3 & F_3 \\ F_4 & F_4 & F_4 \\ F_5 & F_5 & F_5 \\ F_6 & F_6 & F_6 \\ F_7 & F_7 & F_7 \\ 0 & 0 & \alpha S \end{pmatrix}$$

mit S: Skalierungsfaktor der Randbedingungen

$u_{knoten}$

Berechnung der Knotenkräfte mit  $Ku_{knoten} = F_{knoten}$

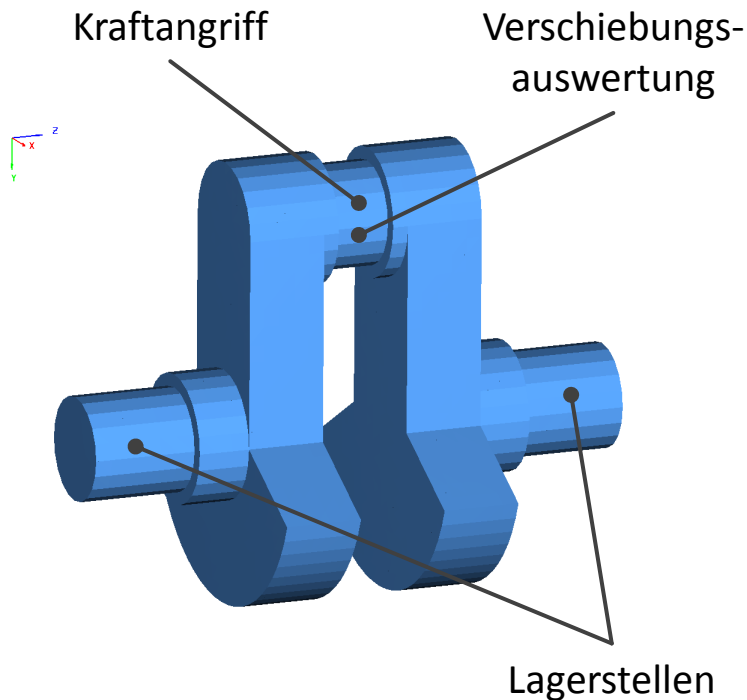
$$F_{knoten} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$

$$K_{red} = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$$



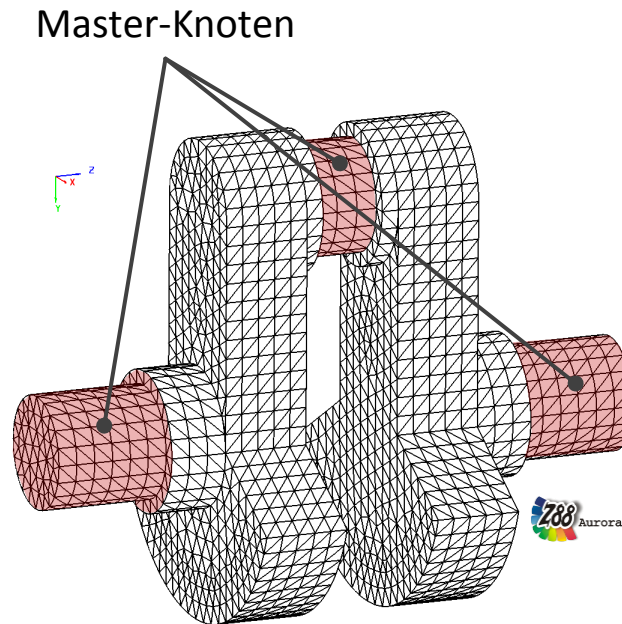
### Kurbelwelle

- Steifigkeitsbasierte Auslegung
- Berechnung mehrerer Kurbelwinkel
- Auswertung der Durchbiegung



### Fragen

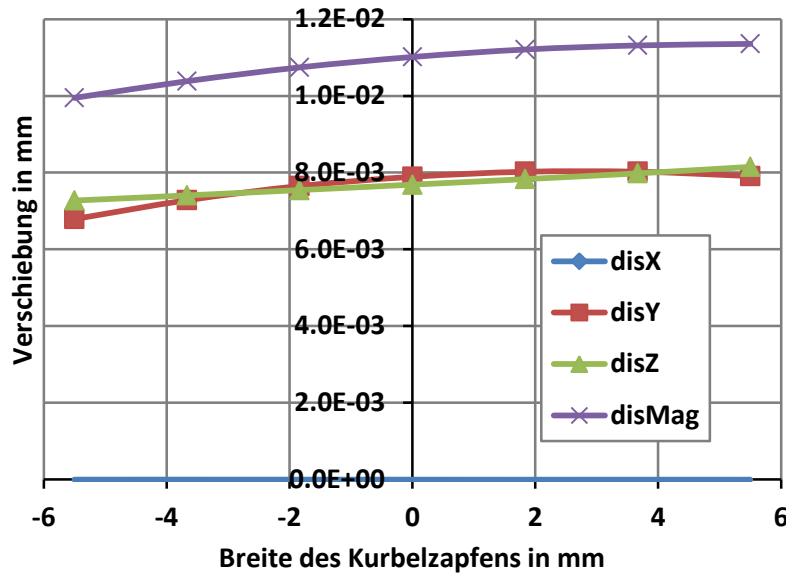
- Durchbiegung des Kurbelzapfens
- Standard-FEA vs. FEA mit reduziertem Modell



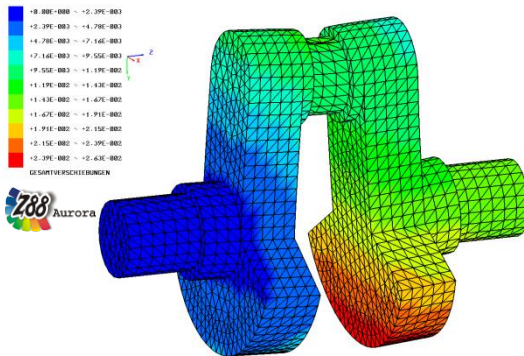
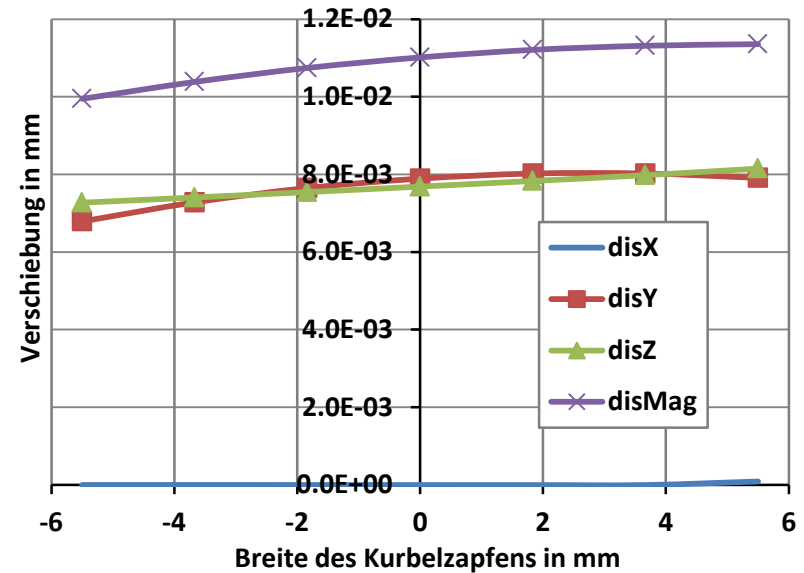




### Volles FE-Modell

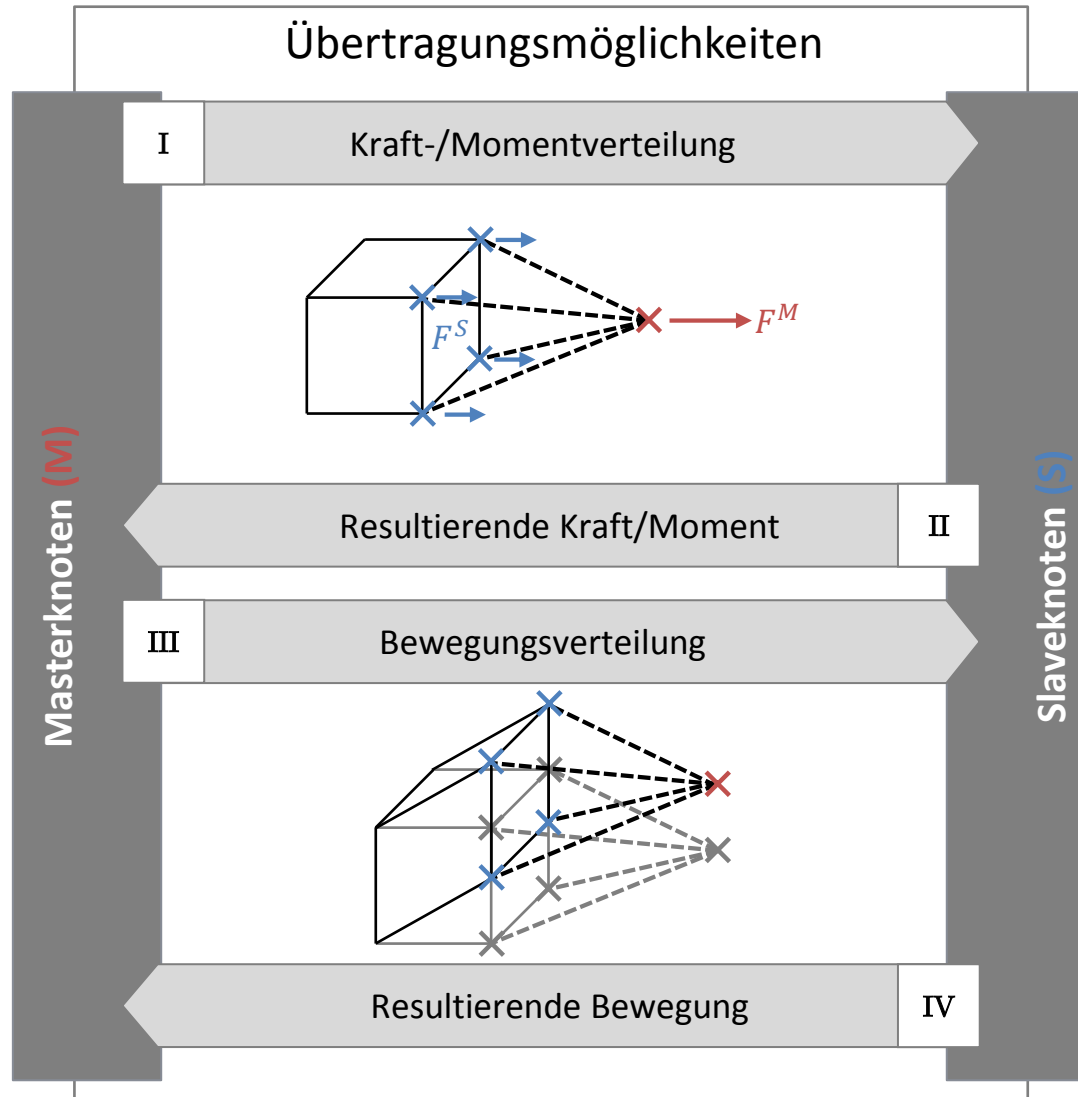


### Reduziertes FE-Modell



### Vergleich der Berechnungsmethoden

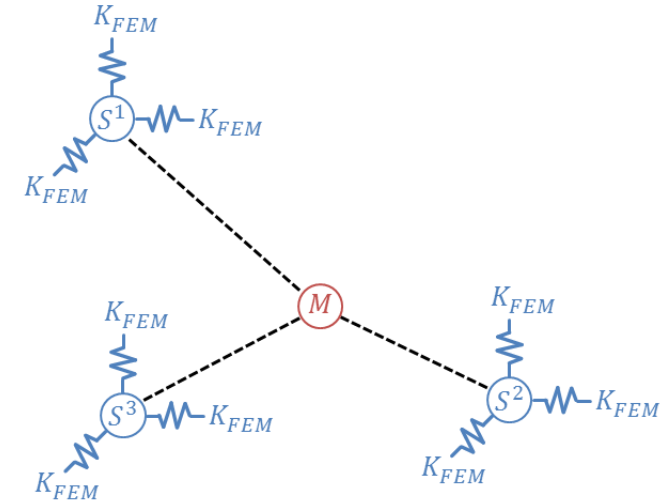
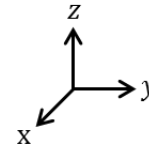
- Übereinstimmung der Verschiebungsergebnisse
- Numerische Schwankung im Bereich  $< 3\%$





### Arten von Koppelbedingung

- Multi Freedom Constraint (MFC): Imaginäre, masselose Verbindung von zwei oder mehreren Verschiebungskomponenten
  - Weiche Kopplung
  - Starre Kopplung
- Strukturelemente (Balken, Stäbe, ...)



### Einbaumöglichkeiten von MFCs

Transformations-Verfahren	Lagrange-Verfahren	Penalty-Verfahren
$[T^T K T][u] = [T^T F]$	$\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$	$[K + P_C][u] = [F]$

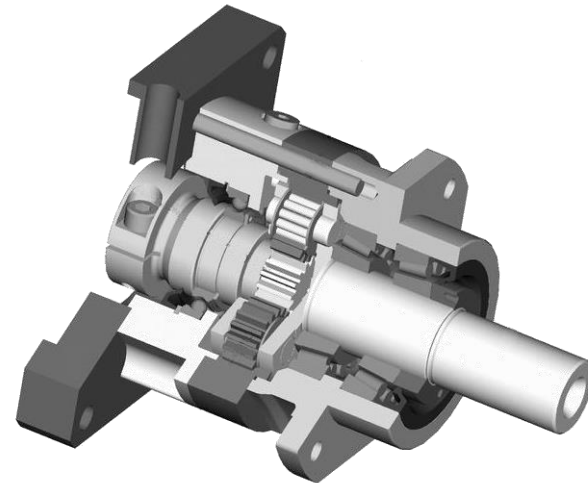


### Planetenrad

- Zusammenhang zwischen Verformungsverhalten bzw. Belastungen und Planetenrad und Planetenradlagerung bei dünnen Radkränzen
- Bei direkt gelagerten, dünnwandigen Planeten sind gerade diese gegenseitigen Abhängigkeiten aber nicht mehr vernachlässigbar

### Fragen

- Realistische Modellierung der Planetenradlagerung
- Wahl der FE-Randbedingungen
- Verformungsverhalten des Planetenrads

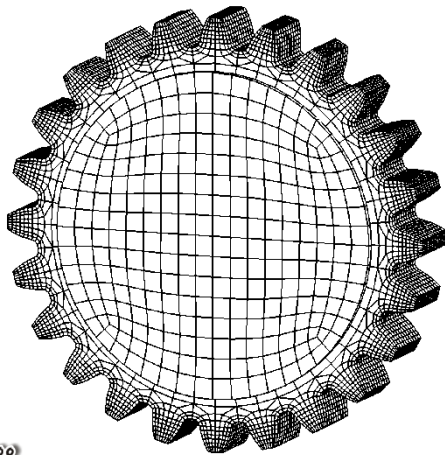


Quelle: [10]



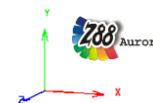
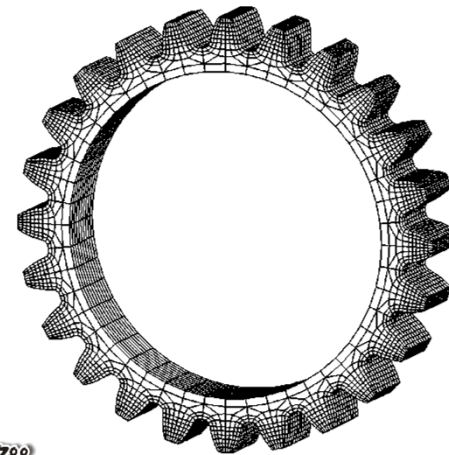
### FE-Modell Referenz

- Planetenradbolzen wird mitmodelliert
- Festhaltung in der Eingriffslinie
- Kontaktbedingung: Reibungsfrei
- Aufgabe des Drehmoments in der Planetenradbohrung



### FE-Modell Kopplung

- Planetenradbolzen wird nicht modelliert
- Festhaltung in der Eingriffslinie
- Übertragung des Drehmoments und Kompensation des Bolzens mittels Koppelbedingungen
- Koppelbedingungen: Weich, Starr

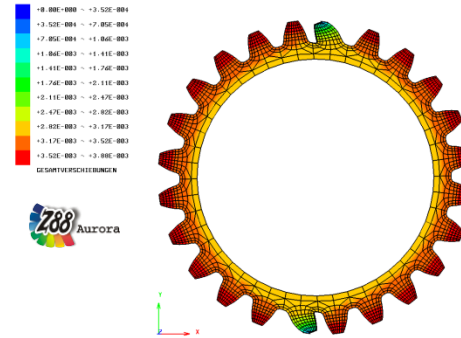


Quelle: [8]



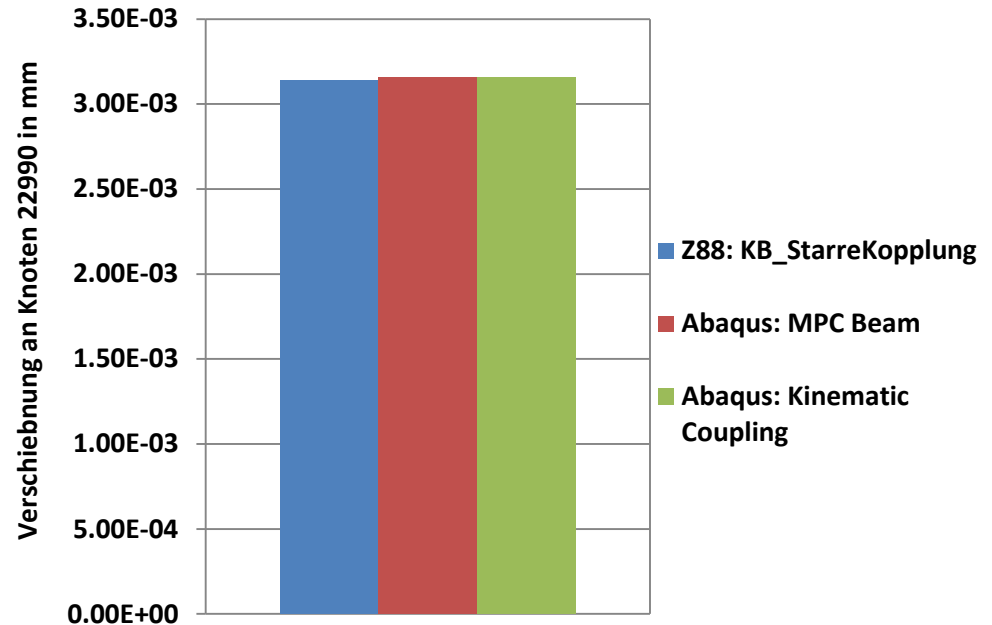
### Modellierungsvarianten

- Z88: Starre Koppelung
- ABAQUS: MPC Beam, Kinematic Coupling



### Fazit

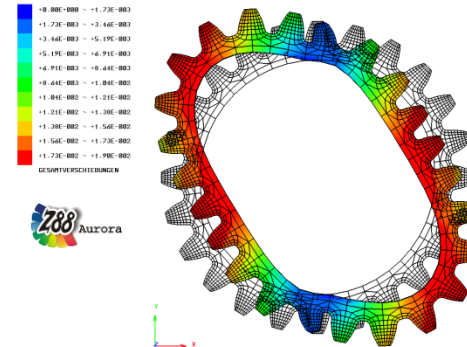
- MPC Beam und Kinematic Coupling (alle Freiheitsgrade verbunden) in Abaqus identisch
- Versteifung der Planetenradbohrung
- Maximale relative Abweichung zwischen der starren Kopplung in Z88 und Abaqus ist betragsmäßig 0,548 %





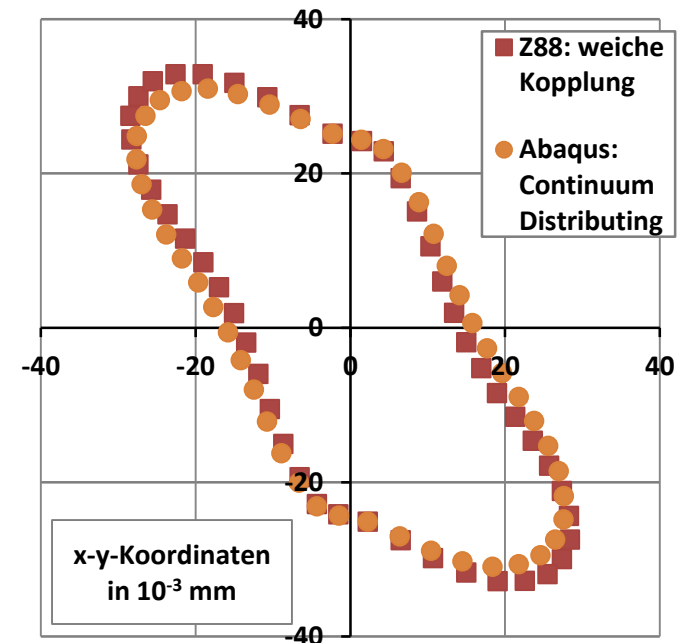
### Modellierungsvarianten

- Z88: Weiche Kopplung
- ABAQUS: Continuum Distributing Coupling



### Fazit

- Verformung der Planetenradbohrung zulässig (keine Einbringung einer Steifigkeit durch die Kopplung)
- Maximale relative Abweichung zwischen der weichen Kopplung in Z88 und Abaqus ist betragsmäßig 4,924 %



# Koppelbedingung

## Referenz vs. Kopplung in Z88

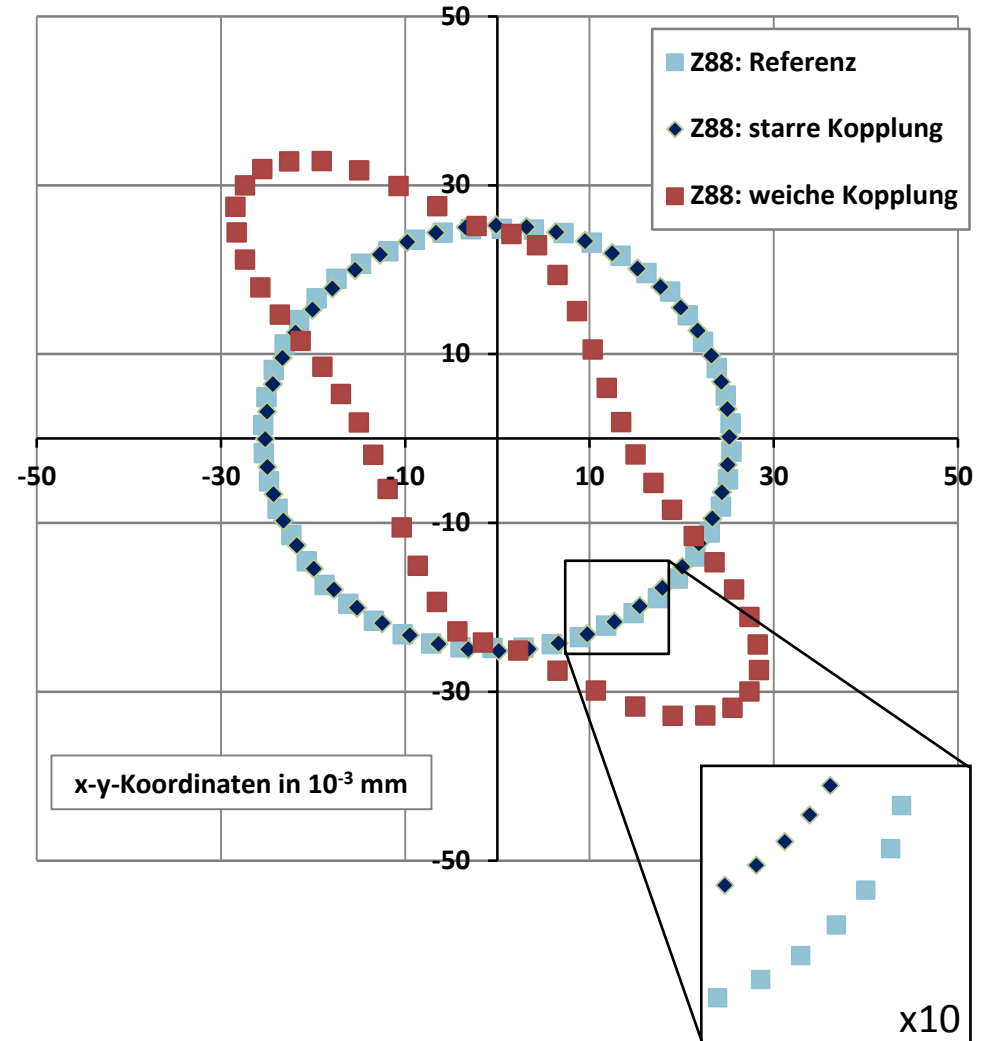


### Modellierungsvarianten

- Weiche Kopplung
- Starre Kopplung
- Referenz

### Fazit

- Weiche Kopplung zu elastisch
- Ideale Biegesteifigkeit der starren Kopplung verhindert Rotation der Verzahnung
- Ideale radiale Steifigkeit der starren Kopplung verhindert Aufweitung der Planetenradbohrung







## Reduktion

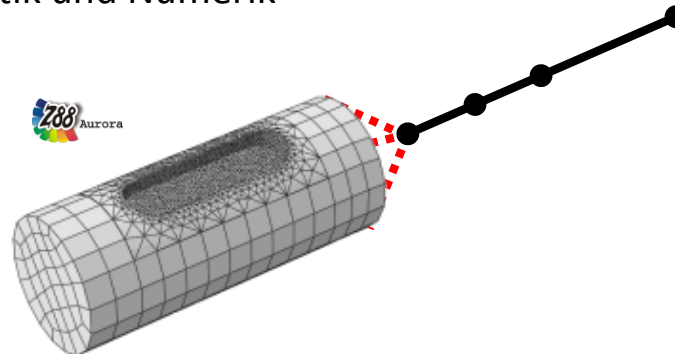
- Drei Reduktionsverfahren in Z88 umgesetzt und validiert
- Schnellere Berechnung mehrerer Lastfälle bei gleicher Ergebnisgüte

## Koppelbedingung

- Weiche und starre Kopplung in Z88 umgesetzt und validiert
- Unterschiedliche Methoden der Drehmomentaufbringung

## Ausblick

- Untersuchung der Koppelbedingungen zur Verbindung von Struktur- und Kontinuumselementen
- Verbindung der Reduktionssolver mit verschiedenen Koppelbedingungen zur Zusammenführung von Analytik und Numerik





# Anhang

# Reduktion

## Exemplarischer Würfel



Reduktionsknoten

Quadratisches Tetraeder-Netz  
(101627 Knoten und 70628 Elementen)

$K_{red}$  mit Z88

$K_{red}$  mit Abaqus

100% Z88Aurora gestartet. C:\Z88AuroraV2\win\start111

Quelle: [8]

19

# Reduktion

## Exemplarischer Würfel



### $K_{red}$ Z88

9,28335000E+04											
3,81654000E+04	9,04405000E+04										
1,62041000E+04	1,32280000E+04	3,79676000E+04									
-2,42828000E+04	-1,73782000E+04	-1,33705000E+04	8,79843000E+04								
1,78479000E+04	-3,73932000E+04	1,67572000E+04	-3,42935000E+04	9,14938000E+04							
-1,62041000E+04	-1,32280000E+04	-3,79676000E+04	1,33705000E+04	-1,67572000E+04	3,79676000E+04						
-3,68203000E+04	1,48820000E+04	1,37811000E+04	-2,73888000E+04	3,62527000E+04	-1,37811000E+04	8,79550000E+04					
-2,09212000E+04	-2,47202000E+04	-1,67486000E+04	3,74594000E+04	-3,07325000E+04	1,67486000E+04	-3,45316000E+04	8,92894000E+04				
-1,62041000E+04	-1,32280000E+04	-3,79676000E+04	1,33705000E+04	-1,67572000E+04	3,79676000E+04	-1,37811000E+04	1,67486000E+04	3,79676000E+04			
-3,17304000E+04	-3,56692000E+04	-1,66147000E+04	-3,63126000E+04	-1,98071000E+04	1,66147000E+04	-2,37459000E+04	1,79933000E+04	1,66147000E+04	9,17889000E+04		
-3,50921000E+04	-2,83271000E+04	-1,32366000E+04	1,42122000E+04	-2,33681000E+04	1,32366000E+04	-1,66032000E+04	-3,38367000E+04	1,32366000E+04	3,74830000E+04	8,55319000E+04	
1,62041000E+04	1,32280000E+04	3,79676000E+04	-1,33705000E+04	1,67572000E+04	-3,79676000E+04	1,37811000E+04	-1,67486000E+04	-3,79676000E+04	-1,66147000E+04	-1,32366000E+04	3,79676000E+04

### $K_{red}$ Abaqus

9,28335169E+04											
3,81653694E+04	9,04405308E+04										
1,62041410E+04	1,32280113E+04	3,79675732E+04									
-2,42828349E+04	-1,73781748E+04	-1,33705327E+04	8,79842318E+04								
1,78478567E+04	-3,73931816E+04	1,67571895E+04	-3,42934453E+04	9,14937608E+04							
-1,62041410E+04	-1,32280113E+04	-3,79675732E+04	1,33705327E+04	-1,67571895E+04	3,79675732E+04						
-3,68202908E+04	1,48819797E+04	1,37810598E+04	-2,73887851E+04	3,62527225E+04	-1,37810598E+04	8,79549930E+04					
-2,09211562E+04	-2,47202512E+04	-1,67486075E+04	3,74593997E+04	-3,07324545E+04	1,67486075E+04	-3,45315495E+04	8,92893782E+04				
-1,62041410E+04	-1,32280113E+04	-3,79675732E+04	1,33705327E+04	-1,67571895E+04	3,79675732E+04	-1,37810598E+04	1,67486075E+04	3,79675732E+04			
-3,17303912E+04	-3,56691744E+04	-1,66146681E+04	-3,63126117E+04	-1,98071339E+04	1,66146681E+04	-2,37459171E+04	1,79933059E+04	1,66146681E+04	9,17889201E+04		
-3,50920700E+04	-2,83270980E+04	-1,32365933E+04	1,42122203E+04	-2,33681247E+04	1,32365933E+04	-1,66031527E+04	-3,38366726E+04	1,32365933E+04	3,74830024E+04	8,55318953E+04	
1,62041410E+04	1,32280113E+04	3,79675732E+04	-1,33705327E+04	1,67571895E+04	-3,79675732E+04	1,37810598E+04	-1,67486075E+04	-3,79675732E+04	-1,66146681E+04	-1,32365933E+04	3,79675732E+04

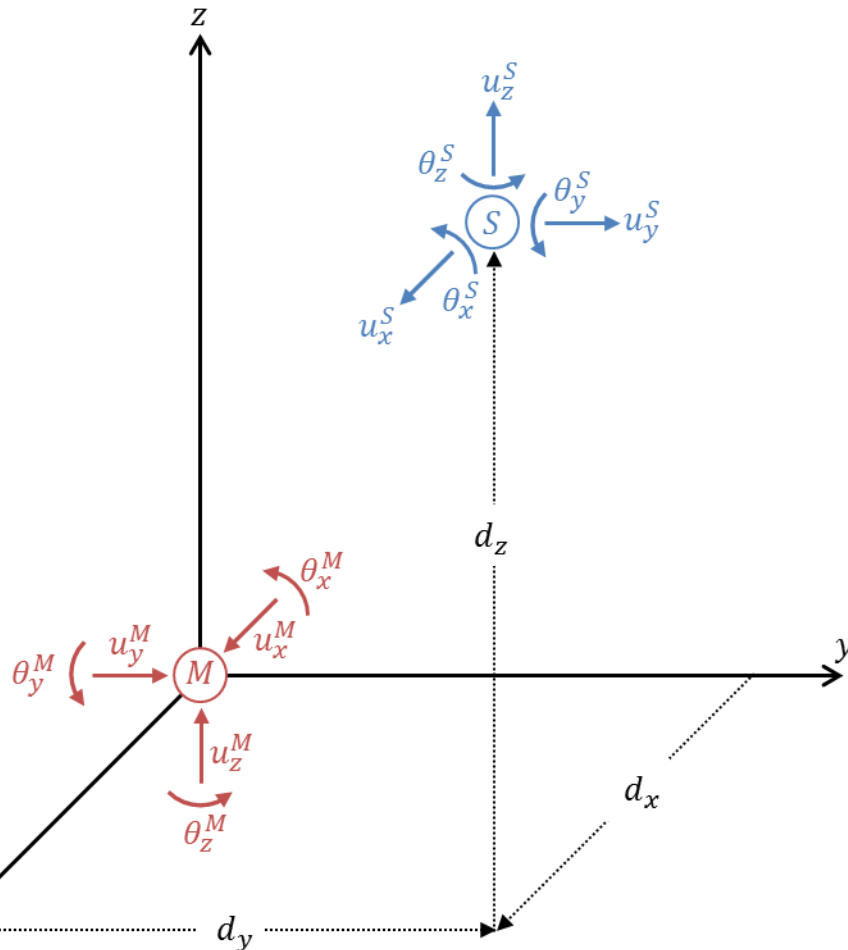
$$\frac{(K_{red,Z88,i,j} - K_{red,Abaqus,i,j})}{K_{red,Abaqus,i,j}} =$$

-0,0000182%											
0,0000801%	-0,0000340%										
-0,0002528%	-0,0000857%	0,0000706%									
-0,0001437%	0,0001451%	-0,0002443%	0,0000775%								
0,0002427%	0,0000491%	0,0000629%	0,0001596%	0,0000428%							
-0,0002528%	-0,0000857%	0,0000706%	-0,0002443%	0,0000629%	0,0000706%						
0,0000250%	0,0001362%	0,0002914%	0,0000543%	-0,0000621%	0,0002914%	0,0000079%					
-0,0002528%	-0,0000857%	0,0000706%	-0,0002443%	0,0000629%	0,0000706%	0,0002914%	-0,0000445%	0,0000706%			
0,0000277%	0,0000719%	0,0001917%	-0,0000323%	-0,0001714%	0,0001917%	-0,0000721%	-0,0000329%	0,0001917%	-0,0000218%		
0,0000856%	0,0000071%	0,0000503%	-0,0001428%	-0,0001058%	0,0000503%	0,0002846%	0,0000810%	0,0000503%	-0,0000064%	0,0000055%	
-0,0002528%	-0,0000857%	0,0000706%	-0,0002443%	0,0000629%	0,0000706%	0,0002914%	-0,0000445%	0,0000706%	0,0001917%	0,0000503%	0,0000706%

**Die betragsmäßig maximale Abweichung beträgt lediglich 0,0188166%.**

# Koppelbedingung

## Theorie – Starre Kopplung



Gekoppelte Freiheitsgrade des Slaveknoten beliebig wählbar

$$\begin{pmatrix} u_x^S \\ u_y^S \\ u_z^S \\ \theta_x^S \\ \theta_y^S \\ \theta_z^S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & d_z & -d_y \\ 0 & 1 & 0 & -d_z & 0 & d_x \\ 0 & 0 & 1 & d_y & -d_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^M \\ u_y^M \\ u_z^M \\ \theta_x^M \\ \theta_y^M \\ \theta_z^M \end{pmatrix}$$

Oder

$$\begin{aligned} U^S &= U^M + \theta^M \times d \\ \theta^S &= \theta^M \end{aligned}$$

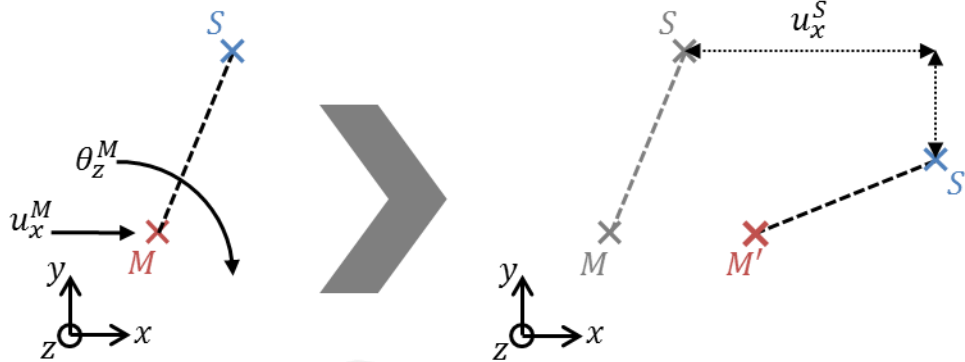
X

Quelle: [2]

21

# Koppelbedingung

## Theorie – Starre Kopplung (Herleitung)



*Drehung eines Punktes um einen anderen Punkt*

$$x_1^S = x_0^S + (x_0^S - x_0^M) \cos \theta_z^M - (y_0^S - y_0^M) \sin \theta_z^M$$

$$y_1^S = y_0^S + (x_0^S - x_0^M) \sin \theta_z^M + (y_0^S - y_0^M) \cos \theta_z^M$$

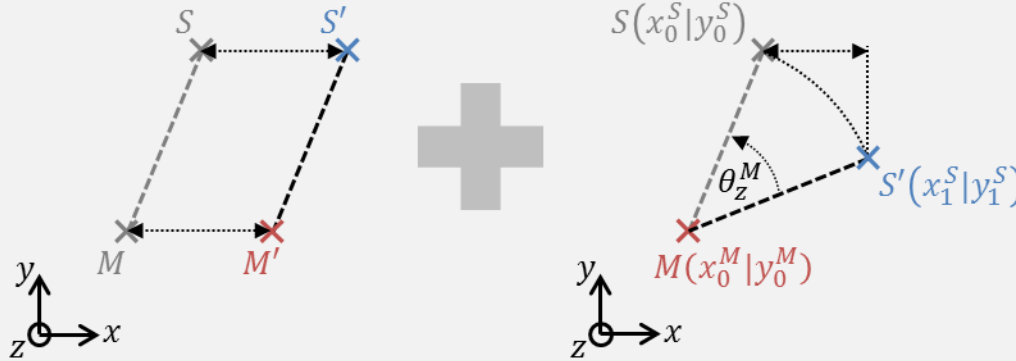
*Kleinwinkelnäherung:*

$$|\theta_z^M| \ll 1$$

$$u_x^S = u_{x,trans}^S + u_{x,rot}^S$$

$$u_{x,trans}^S = u_x^M$$

$$u_{x,rot}^S = -\theta_z^M \overbrace{(y_0^S - y_0^M)}^{d_y}$$

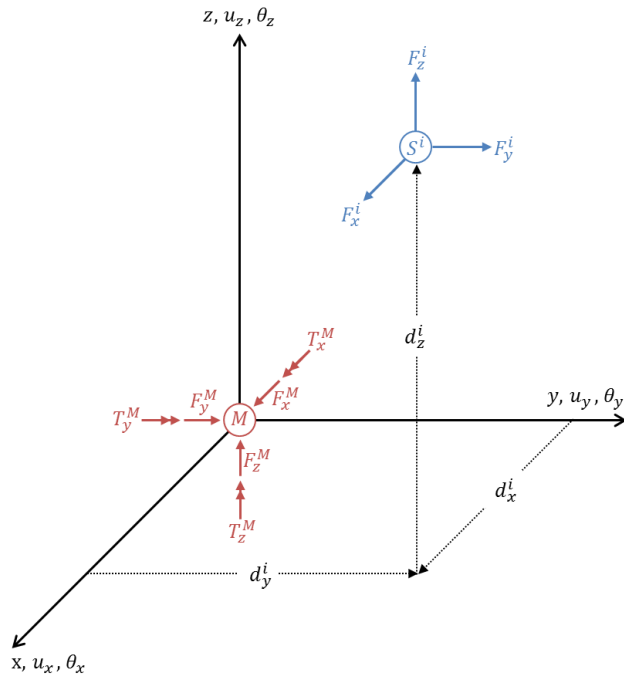


$$u_{x,rot}^S = (x_1^S - x_0^S) = -\theta_z^M \overbrace{(y_0^S - y_0^M)}^{d_y}$$

$$u_{y,rot}^S = (y_1^S - y_0^S) = \theta_z^M \overbrace{(x_0^S - x_0^M)}^{d_x}$$

# Koppelbedingung

## Theorie – Weiche Kopplung



$$R^{MM}U^M + R^{MN}U^N = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{d}_z & -\bar{d}_y \\ 0 & 1 & 0 & -\bar{d}_z & 0 & \bar{d}_x \\ 0 & 0 & 1 & \bar{d}_y & -\bar{d}_x & 0 \\ 0 & -\bar{d}_z & \bar{d}_y & \bar{e}_{yz} & 0 & 0 \\ \bar{d}_z & 0 & -\bar{d}_x & 0 & \bar{e}_{zx} & 0 \\ -\bar{d}_y & \bar{d}_x & 0 & 0 & 0 & \bar{e}_{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x^M \\ u_y^M \\ u_z^M \\ \theta_x^M \\ \theta_y^M \\ \theta_z^M \end{pmatrix} + \frac{1}{W_T} [R^{M1}R^{M2} \dots R^{MN}] \begin{bmatrix} U^1 \\ U^2 \\ \vdots \\ U^N \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{mit } R^{Mi} = \begin{pmatrix} -\omega^i & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^i & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^i \\ 0 & \omega^i d_z^i & -\omega^i d_y^i \\ -\omega^i d_z^i & 0 & \omega^i d_x^i \\ \omega^i d_y^i & -\omega^i d_x^i & 0 \end{pmatrix}, \quad U^i = \begin{pmatrix} u_x^i \\ u_y^i \\ u_z^i \end{pmatrix}$$



Kräftegleichgewicht:

$$\begin{cases} \left( u_x^M + \bar{d}_z \theta_y^M - \bar{d}_y \theta_z^M - \sum_{i=1}^N \frac{\omega^i}{W_T} u_x^i \right) = 0 \\ \left( u_y^M - \bar{d}_z \theta_x^M + \bar{d}_x \theta_z^M - \sum_{i=1}^N \frac{\omega^i}{W_T} u_y^i \right) = 0 \\ \left( u_z^M + \bar{d}_y \theta_x^M - \bar{d}_x \theta_y^M - \sum_{i=1}^N \frac{\omega^i}{W_T} u_z^i \right) = 0 \end{cases}$$

Momentengleichgewicht:

$$\begin{cases} \bar{e}_{yz} \theta_x^M - \bar{d}_z u_y^M + \bar{d}_y u_z^M + \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_z^i u_y^i - \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_y^i u_z^i = 0 \\ \bar{e}_{zx} \theta_y^M + \bar{d}_z u_x^M - \bar{d}_x u_z^M - \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_z^i u_x^i + \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_x^i u_z^i = 0 \\ \bar{e}_{xy} \theta_z^M - \bar{d}_y u_x^M + \bar{d}_x u_y^M + \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_y^i u_x^i - \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_x^i u_y^i = 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } W_T = \sum_{i=1}^N \omega^i$$

$$\bar{d}_x = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_x^i, \quad \bar{d}_y = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_y^i, \quad \bar{d}_z = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i d_z^i$$

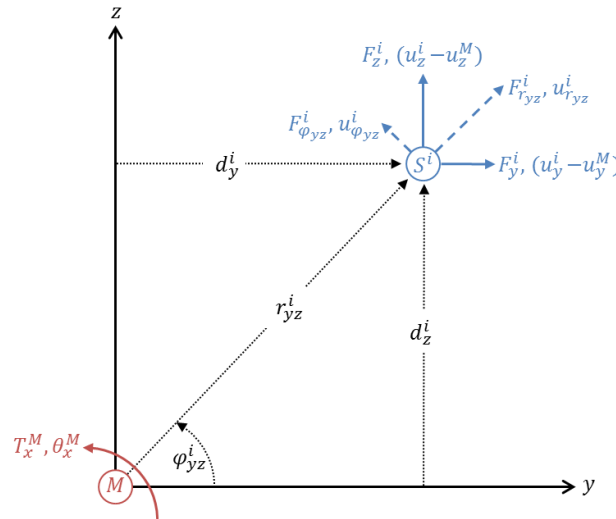
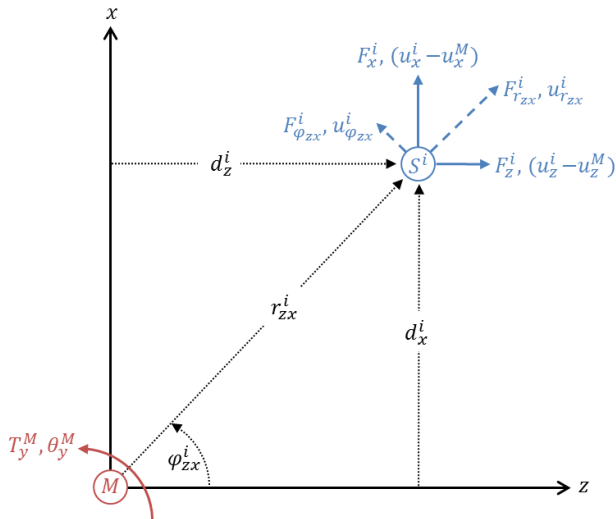
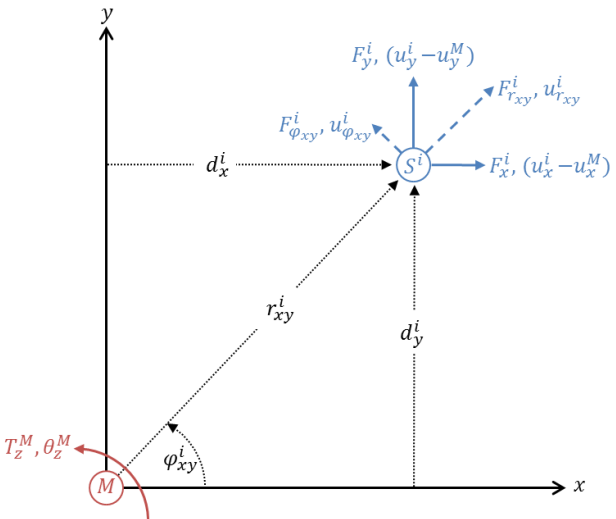
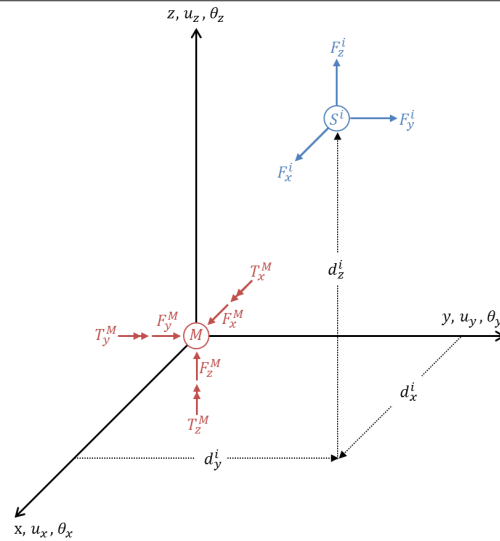
$$d_x^i = x^i - x^M \quad d_y^i = y^i - y^M \quad d_z^i = z^i - z^M$$

$$\bar{e}_{xy} = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i r_{xy}^i{}^2, \quad \bar{e}_{yz} = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i r_{yz}^i{}^2, \quad \bar{e}_{zx} = \frac{1}{W_T} \sum_{i=1}^N \omega^i r_{zx}^i{}^2$$



# Koppelbedingung

## Theorie – Weiche Kopplung (Herleitung)



Quelle: [1]



- [1] Case, B.: MYSTRAN - User Reference Manual (2011). URL: <http://www.mystran.com/Executable/MYSTRAN-Users-Manual.pdf> (Abgerufen am 02.09.2015).
- [2] Perlemuter, A.V.; Slivker, V.I.: Numerical Structural Analysis. 1. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] Felippa, C.A.: Introduction to Finite Element Methods (21.08.2015). Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado. URL: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/> (Abgerufen am 02.09.2015).
- [4] Nasdala, L.: FEM-Formelsammlung: Statik und Dynamik. 2. Aufl., Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- [5] Wissmann, J.; Sarnes, K.-D.: Finite Elemente in der Strukturmechanik. 1. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [6] Qu, Z.-Q.; Model Order Reduction Techniques with Applications in Finite Element Analysis. 1. Aufl., Springer-Verlag, London, 2004.
- [7] Cheung, Y.K.; Lo, S.H.; Leung, A.Y.T.: Finite Element Implementation. 1. Aufl., Blackwell Science Ltd, Oxford, 1996.
- [8] Rieg, F.; Hackenschmidt, R.; Alber-Laukant, B.: Finite Elemente Analyse für Ingenieure (Grundlagen und praktische Anwendungen mit Z88Aurora). 5. Aufl., Carl Hanser Verlag, München, 2014.



- [9] CADFEM GmbH: CADFEM-WikiPLUS – Substrukturtechnik (2013). URL: <http://www.esocaet.com/wikiplus/index.php/Substrukturtechnik> (Abgerufen am 06.09.2015).
- [10] Vogel Antriebstechnik GmbH: Planetengetriebe – Funktionsbeschreibung. URL: <http://www.vogel-antriebe.de/de/produkte/spielarme-planetengetriebe/planetengetriebe-funktion/> (Abgerufen am 06.09.2015).
- [11] FVA GmbH: FVA-Forschungsvorhaben 711.