

Über eine Erweiterung der Methode von Soshnikov zur Untersuchung des größten Eigenwerts auf unsymmetrische Verteilungen

von der Fakultät für
Mathematik, Physik und Informatik
der Universität Bayreuth
genehmigte Abhandlung

von Felix Grimme aus Witten

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Tag der Einreichung: 14.02.2013
Tag des Kolloquiums: 20.03.2013

1. Gutachter: Prof. Dr. Thomas Kriecherbauer
2. Gutachter: Prof. Dr. Peter Eichelsbacher
3. Gutachter: Prof. Dr. Werner Kirsch

Über eine Erweiterung der Methode von Soshnikov zur Untersuchung des größten Eigenwerts auf unsymmetrische Verteilungen

Seit der Entdeckung des Halbkreisgesetzes durch Wigner werden reell-symmetrische Zufallsmatrix-Ensembles untersucht. Soshnikov hat in einer bahnbrechenden Arbeit gezeigt, dass für Wigner-Ensembles $A_n = (\xi_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ mit symmetrisch verteilten Einträgen die Verteilung des größten Eigenwerts in einer geeigneten Skalierung für $n \rightarrow \infty$ universelles Verhalten zeigt und schwach gegen die Tracy-Widom-Verteilung, die Verteilung des Gauß'schen orthogonalen Ensembles, konvergiert. Für den Beweis nutzt Soshnikov die Momentenmethode. Hierbei wird die Analyse der Verteilungsfunktion des größten Eigenwerts auf die Analyse von Erwartungswerten von Spuren hoher Matrixpotenzen zurückgeführt (die Exponenten wachsen mit $n^{2/3}$). Die Spuren werden via $\text{tr} A_n^p = \sum_{(i_0, \dots, i_{p-1}) \in [n]^p} \xi_{i_0, i_1} \xi_{i_1, i_2} \cdots \xi_{i_{p-1}, i_0}$ als Summe über geschlossene Pfade kombinatorisch interpretiert. In der Analyse gilt es herauszufinden, welche Klassen von Pfaden (die mit den Momenten der Matrixeinträge in Verbindung stehen) die Spuren in der Asymptotik $n \rightarrow \infty$ dominieren. Es stellt sich heraus das dies Pfade sind, die jede ihrer Kanten genau zweimal durchlaufen. Das bedeutet, dass die Spuren asymptotisch nur von den für alle Matrixeinträge gleichen zweiten Momenten abhängen, sie sind also asymptotisch für alle betrachteten Ensembles universell.

Diese Methode wird in der vorliegenden Arbeit auf Wigner-Ensembles mit nicht notwendig symmetrischen Verteilungen der Einträge erweitert. Die Kombinatorik ist in diesem Fall komplexer. Resultat der Arbeit ist, dass die Methode von Soshnikov funktioniert, wenn folgende Bedingungen an die Matrixeinträge erfüllt sind:

- Die ersten und dritten Momente sind 0.
- Für die 97. Momente existiert eine in n gleichmäßige Schranke.

An extension of Soshnikov's method for analysing extremal eigenvalues to the class of non-symmetric distributions

Since Wigner's discovery of the semi-circle law real symmetric matrix ensembles have been studied extensively. In his groundbreaking work, Soshnikov proved that in the limit $n \rightarrow \infty$ the distribution of the largest eigenvalue of Wigner-Ensembles $A_n = (\xi_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ with symmetrically distributed entries follows a universal distribution and converges weakly to the Tracy-Widom law, that has first been established in the classical case of the Gaussian Orthogonal Ensemble. Soshnikov's proof uses and extends significantly the moment method. The key idea is to connect the distribution of the largest eigenvalue to the behaviour of the expectations of traces of large powers of the matrices (the exponents grow of order $n^{2/3}$). Through $\text{tr} A_n^p = \sum_{(i_0, \dots, i_{p-1}) \in [n]^p} \xi_{i_0, i_1} \xi_{i_1, i_2} \cdots \xi_{i_{p-1}, i_0}$ the traces can be interpreted combinatorically as sums indexed by closed paths. The key issue in the analysis is to identify which paths contribute asymptotically to the trace. Here the moments of the matrix entries play a crucial role. As it turns out the leading contribution is given by those paths in which every edge occurs exactly twice. This implies that asymptotically the traces only depend on the second moments of the matrix entries. In a nutshell this explains universality.

The main goal of this work is to extend the method described above to the case of non-symmetrically distributed matrix entries that leads to more involved combinatorics. The main result is that the method and results of Soshnikov hold true in this case, if the following two conditions hold:

- The first and third moments of the matrix entries vanish.
- The 97th moments of the entries are bounded uniformly.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
I Der Weg zur Tracy-Widom-Verteilung	10
I.1 Wigner-Ensembles und Verteilungsfunktionen	10
I.2 Faktorielle Momente und die Verteilungsfunktion	12
I.3 Spuren als Laplacetransformierte eines Maßes	16
I.4 Universelle Verteilung des größten Eigenwerts	21
II Spuren von Matrixpotenzen	24
II.1 Pfadnomenklatur	24
II.2 Geschlossene Pfade und markierte Zeitpunkte	25
II.3 Offene Zeitpunkte und Selbstschnitte	29
II.4 Beiträge von Pfaden auf Wigner-Matrizen	32
II.5 Irrfahrten und Dyck-Pfade	35
II.6 Pfade und ihre zugeordneten Irrfahrten	41
II.7 Maxima von Dyck-Pfaden: exponentielle Momente	45
II.8 Spuren von Matrixpotenzen	54
<hr/>	
Anhang	70
A.1 Stetigkeitssatz für die Laplacetransformierte	70
A.2 Hilfssätze	73
Literatur	76

Notation

Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $[n] := \{1, \dots, n\}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ und eine Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir $x \circ \sigma := (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Für eine Menge A sei

$$\chi_A(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A, \end{cases}$$

die Indikatorfunktion von A . Mit $f_*\mu$ bezeichnen wir das Bildmaß von μ bezüglich f . Für $z \in \mathbb{C}^n$ sei $|z| := |z_1| + \dots + |z_n|$. Für eine Menge A bezeichne $|A|$ ihre Kardinalität. Für $x \in \mathbb{R}$ seien $\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ und $\lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq x\}$. Ferner schreiben wir gelegentlich $0 := (0, \dots, 0)$ und $1 := (1, \dots, 1)$.

Einleitung

Die Theorie zufälliger Matrizen begann in den Zwanzigerjahren des vergangenen Jahrhunderts in der Statistik, wurde dann aber zunächst in der Physik weiterentwickelt. Seit etwa 20 Jahren sind zufällige Matrizen wieder verstärkt in den Blickpunkt mathematischer Forschung getreten. Ein wesentlicher Grund hierfür war die Entdeckung von Verteilungsfunktionen lokaler Eigenwertstatistiken in einer Reihe mathematischer Modelle. Einen aktuellen Überblick über diese Entwicklung findet man in [1]. Ein Beispiel, das für historische Entwicklung von besonderer Bedeutung war, ist die Verteilung des größten Eigenwerts einer zufälligen Matrix, die unerwartet in der Beschreibung zufälliger Wachstumsmodelle auftrat (siehe [1], Kapitel 38).

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Analyse der Verteilungsfunktion des größten Eigenwerts einer speziellen Klasse zufälliger Matrizen, die nach Eugene Wigner, Pionier des Gebiets und Entdecker des Wigner'schen Halbkreisgesetzes [32–34], benannt sind. Es handelt sich hierbei um reell-symmetrische Matrizen, deren Einträge unabhängige Zufallsvariablen sind, soweit die Symmetrie das erlaubt. Häufig werden Matrizen untersucht, deren Einträge identisch verteilt sind, oder es werden zumindest Annahmen über die ersten beiden Momente der Einträge gemacht. Außerdem gibt es verwandte Ensembles komplex-hermitescher oder selbstdualer quaternionischer Matrizen, auf die hier aber nicht weiter eingegangen wird. Konkret sind die von uns betrachteten zufälligen Matrizen in folgenden allgemeinen Rahmen eingebettet:¹

Definition 1. Sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq i \leq j \leq n$ seien $\xi_{ij}^{(n)}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Dann heißt die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Produktmaße $\mu_n := \bigotimes_{i \leq j} \xi_{ij}^{(n)} * \mathbb{P}$ ein reell-symmetrisches Ensemble.

Wir setzen für $1 \leq j < i \leq n$ noch $\xi_{ij} := \xi_{ji}$ und bezeichnen mit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der dem Wigner-Ensemble zugeordneten Zufallsvariablen

$$W_n := \begin{pmatrix} \xi_{11}^{(n)} & \xi_{12}^{(n)} & \cdots & \xi_{1n}^{(n)} \\ \xi_{21}^{(n)} & \xi_{22}^{(n)} & \cdots & \xi_{2n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n1}^{(n)} & \xi_{n2}^{(n)} & \cdots & \xi_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit Werten in der Menge der symmetrischen $n \times n$ -Matrizen (die Spalten- und Zeilenzahl wächst also mit jedem Folgenglied).

Wir beschreiben nun Ergebnis und Methode der bahnbrechenden Arbeit von Soshnikov [25] über die Verteilung des größten Eigenwerts, die Grundlage und Inspiration für die vorliegende Arbeit war. Soshnikov hat in [25] u. a. eine Teilklasse von reell-symmetrischen Wigner-Ensembles untersucht. Dafür führen wir hier einen (sonst nicht gebräuchlichen) Begriff ein:

Definition 2. Ein Ensemble wie in Definition 1 heißt Soshnikov-Wigner-Ensemble, wenn $\sigma, c > 0$ existieren, so dass für fast alle n gilt

¹siehe Definition 3 auf Seite 6 für die in dieser Arbeit betrachtete spezielle Situation

- (i) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)2} = \sigma^2$, falls $i \neq j$,
- (iii) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)2k} \leq (c \cdot k)^k$,
- (iv) $(\xi_{ij}^{(n)})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sind unabhängig.

In der Situation von Definition 2 setzen wir

$$A_n := \frac{W_n}{2\sigma\sqrt{n}}. \quad (2)$$

Die unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_{ij}^{(n)} \sim \mathcal{N}(0, (1 + \delta_{ij})/4)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, definieren ein Soshnikov-Wigner-Ensemble. Es handelt sich um das klassische seit Wigner untersuchte Gauß'sche orthogonale Ensemble (GOE), welches mithilfe der Methode der orthogonalen Polynome, d. h. in diesem Fall mithilfe von Hermite-Polynomen, studiert werden kann. Insbesondere konnte man für GOE zeigen, dass die Verteilungsfunktion des größten Eigenwerts,

$$F_n(s) := \mathbb{P}\left(\text{kein Eigenwert von } A_n \text{ ist größer als } 1 + \frac{s}{2n^{2/3}}\right), \quad (3)$$

für $n \rightarrow \infty$ einen (absolut-)stetigen Limes hat, dessen Dichte eine Darstellung über Painlevé-Funktionen besitzt, siehe [30, 31]. Wie allgemein üblich wollen wir die Grenzverteilung in dieser Arbeit durch

$$F_{\text{TW}}(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_{n, \text{GOE}}(s) \quad (4)$$

notieren und Tracy-Widom-Verteilung nennen. Soshnikov hat in [25], aufbauend auf Arbeiten von Sinai und Soshnikov [21, 22], gezeigt, dass die Verteilung F_n des größten Eigenwerts für alle Soshnikov-Wigner-Ensembles gegen die Tracy-Widom-Verteilung konvergiert.

Der von Soshnikov verwendete Beweis beruht darauf, dass die Verteilungsfunktion F_n für $n \rightarrow \infty$ durch die Asymptotik von

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k \text{tr} A_n^{p_{n,m}} \quad (5)$$

bestimmt ist, wobei die Exponenten $p_{n,m}$ proportional zu $n^{2/3}$ wachsen. Um an dieser Stelle etwas Substantielles über die Methode aussagen zu können, kommt man nicht umhin, einige Notationen und Begriffe zur Verfügung zu stellen: Die Spur

$$\text{tr} A_n^p = \frac{1}{(2\sigma\sqrt{n})^p} \sum_{(i_0, \dots, i_{p-1}) \in [n]^p} \xi_{i_0, i_1} \xi_{i_1, i_2} \dots \xi_{i_{p-1}, i_0} \quad (6)$$

wird als Summe über geschlossene Pfade $\gamma = (i_0, i_1, \dots, i_{p-1}, i_0)$ aufgefasst. Dabei gilt $\gamma(t) = i_t$ für $0 \leq t \leq p-1$ und $\gamma(p) = i_0$. Wir definieren die Pfadmenge

$$\mathcal{P}_{n,p} := \{\gamma: \{0, \dots, p\} \rightarrow [n] \mid \gamma(0) = \gamma(p)\}, \quad (7)$$

so dass gilt

$$\operatorname{tr} A_n^p = \frac{1}{(2\sigma\sqrt{n})^p} \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p}} \xi_\gamma \quad (8)$$

mit der Abkürzung

$$\xi_\gamma := \prod_{t=1}^p \xi_{\gamma(t-1), \gamma(t)}. \quad (9)$$

Wir nennen ξ_γ den Beitrag des Pfades γ zur Spur $\operatorname{tr} A_n^p$. Die Werte $\gamma(t)$ von γ heißen Vertices und eine Menge $\{i, j\}$ von zwei Vertices (ein- oder zweielementig) heißt Kante. Folglich nennen wir

$$\mathcal{E}^\gamma := \{\{\gamma(t-1), \gamma(t)\} \mid t = 0, \dots, p\} \quad (10)$$

die Menge der Kanten von γ und

$$T^\gamma(\{i, j\}) := |\{t \mid \{\gamma(t-1), \gamma(t)\} = \{i, j\}\}|, \quad (11)$$

die Häufigkeit einer Kante $\{i, j\}$. Der Faktor ξ_{ij} kommt so zur Potenz $T^\gamma(\{i, j\})$ im Beitrag ξ_γ des Pfades γ vor. Wie in (5) erwähnt, müssen auch Produkte von Spuren von Matrixpotenzen untersucht werden. In Verallgemeinerung von (7) definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}^k$

$$\mathcal{P}_{n,k,p} := \mathcal{P}_{n,p_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{n,p_k}. \quad (12)$$

Ferner setzen wir für ein k -Tupel $\gamma \in \mathcal{P}_{n,k,p}$ von Pfaden

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{k,\gamma} &:= \bigcup_{m=1}^k \mathcal{E}^{\gamma^m}, \\ \mathcal{E}_2^{k,\gamma} &:= \{\{i, j\} \mid \sum_{m=1}^k T^{\gamma^m}(\{i, j\}) = 2 \wedge i \neq j\} \end{aligned} \quad (13)$$

und definieren damit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,k,p}^{(2)} &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,k,p} \mid \mathcal{E}^{k,\gamma} = \mathcal{E}_2^{k,\gamma}\}, \\ \hat{\mathcal{P}}_{n,k,p} &:= \mathcal{P}_{n,k,p} \setminus \mathcal{P}_{n,k,p}^{(2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Wir unterscheiden also Pfade (oder für $k > 1$ Tupel von Pfaden) danach, ob jede ihrer Kanten zweimal auftritt. Schließlich definieren wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} x_{n,k}(p) &:= \mathbb{E} \prod_{m=1}^k \operatorname{tr} A_n^{p_m} = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{n,k,p}} \frac{\mathbb{E}(\xi_{\gamma_1} \dots \xi_{\gamma_k})}{(2\sigma\sqrt{n})^{|p|}}, \\ y_{n,k}(p) &:= \sum_{\gamma \in \hat{\mathcal{P}}_{n,k,p}} \frac{|\mathbb{E}(\xi_{\gamma_1} \dots \xi_{\gamma_k})|}{(2\sigma\sqrt{n})^{|p|}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Wir greifen den vor (5) gefassten Gedanken wieder auf. Die Idee ist zu zeigen, dass für $p_n \in \mathbb{N}^k$ mit Komponenten $p_{n,m}$, die proportional zu $n^{2/3}$ wachsen, gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,k}(p_n) = 0$. Daraus folgt nämlich, dass $x_{n,k}(p_n)$ asymptotisch bestimmt ist durch die Beiträge der Pfade aus $\mathcal{P}_{n,k,p_n}^{(2)}$. Insbesondere gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k}(p_n) = 0$, wenn $(|p_n|)_n$ eine Folge ungerader Zahlen ist. Nach (15) und (14) zerfällt der Beitrag $\mathbb{E} \xi_\gamma$ für $\gamma \in \mathcal{P}_{n,k,p_n}^{(2)}$ wegen Bedingung (iv) in

Definition 2 in ein Produkt von zweiten Momenten der ξ_{ij} , für die $\{i, j\} \in \mathcal{E}^{k, \gamma}$ ist. Die Varianz ist jedoch für alle Matrixeinträge gleich σ^2 gewählt, siehe Bedingung (ii) in Definition 2. Es gilt also einfach $\mathbb{E} \xi_\gamma = \sigma^{|p_n|}$ und damit für große n

$$x_{n,k}(p_n) \approx \frac{|\mathcal{P}_{n,k,p_n}^{(2)}|}{(2\sqrt{n})^{|p_n|}}. \quad (16)$$

Die rechte Seite von (16) ist offenbar unabhängig von den konkreten Verteilungen der Matrixeinträge. Sofern nun der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,k}(p_n)$ für eines der betrachteten Wigner-Ensembles existiert, so existiert er für all diese Ensembles und hat den immergleichen Wert. Soshnikov erhält mit GOE ein solches Referenz-Ensemble, das erstens in der Menge der Soshnikov-Wigner-Ensembles liegt und für das zweitens die in Rede stehenden Limiten (aus anderen Gründen²) existieren. Dieses universelle Verhalten überträgt sich auf die Verteilung des größten Eigenwerts.

Wie wird nun $y_{n,k}(p_n)$ analysiert? Soshnikovs Strategie ist es, zunächst den Fall $k = 1$ zu behandeln, um anschließend den Fall $k > 1$ darauf zurückzuführen. Betrachte also

$$y_{n,1}(p_n) = \frac{1}{(2\sigma\sqrt{n})^{p_n}} \sum_{\gamma \in \hat{\mathcal{P}}_{n,1,p_n}} |\mathbb{E} \xi_\gamma|. \quad (17)$$

Die Aufgabe besteht darin, einerseits die Beiträge durch geeignete Schranken abzuschätzen und andererseits die Zahl der Pfade zu kontrollieren, so dass im Zusammenspiel gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,1}(p_n) = 0$. Das wesentliche kombinatorische Ordnungsprinzip ist wie folgt: Jedem Pfad γ wird ein Dyck-Pfad X^γ gleicher Länge zugeordnet, der genau dann steigt, wenn Kanten im Pfad γ zum ersten, dritten, fünften, \dots Mal auftreten. Auf dieser in der Arbeit [12] von Füredi und Komlós eingeführten Kodierung einer Teilinformation des Pfades γ gründet sich die von Sinai und Soshnikov entwickelte Kombinatorik, die probate Begriffe für die Analyse von (17) bereitstellt.

An dieser Stelle soll auf einige Lücken in der Argumentation von [25] hingewiesen werden:

- (a) Für den von Soshnikov gewählten Weg, Universalität zu beweisen, wie oben ausgeführt, ist entscheidend, dass GOE unter den betrachteten Ensembles ist. Das ist mit Bedingung (iii) in Definition 2 sichergestellt.³ Ein so starkes Momentenwachstum ist jedoch schwer in die kombinatorische Behandlung von (17) einzubauen. Soshnikov verweist hierzu in [25] auf Lemma 1 in [22]. Dessen Beweis ist jedoch unklar.
- (b) Für eine gewisse Teilklasse von Pfaden γ wird behauptet, dass die zugehörigen Dyck-Pfade von spezieller Natur und daher selten sind. Daraus ergibt sich letztlich, dass die Beiträge der Pfade aus dieser Klasse zu vernachlässigen sind (vgl. die Einleitung von [14]).
- (c) Sinai und Soshnikov präsentieren in der Arbeit [21] (dort wird die Situation $p_{n,m} = o(\sqrt{n})$ behandelt) eine Methode, wie der Fall $k > 1$

²siehe Lemma 4 in [25]

³Die geraden Momente der Normalverteilung sind $\mathbb{E} \xi_{ij}^{2k} = (2k-1)!!/4^k \leq (k/2)^k$.

auf den Fall $k = 1$ zurückgeführt werden kann. Allerdings wird in den nachfolgenden Arbeiten [22, 25] nicht beschrieben, wie diese Technik an die Erfordernisse höherer Matrixpotenzen anzupassen ist. Hier besteht weiterer Klärungsbedarf.

Obwohl die Methode von [25] in einer Reihe weiterer Arbeiten [11, 14, 16, 20, 26] auf verwandte Matrixmodelle angewendet wurden, wird nur die Problematik von Punkt (b) in [14, 16] thematisiert. Das in (a) angesprochene Problem taucht in [14, 20] zunächst nicht auf, da hier mit einem Abschneideverfahren das Wachstum der Momente reduziert wird. Allerdings werden in diesen Arbeiten keine stichhaltigen Argumente geliefert, warum sich die erhaltenen Ergebnisse auf GOE anwenden lassen (siehe Abschnitt 4.5 in [14] bzw. Abschnitt 7 in [20]).

Wir lösen das Problem (a) wie folgt: Wir verwenden die Abschneidetechnik aus [14], um die Kombinatorik ohne Zuhilfenahme von Lemma 1 aus [22] durchführen zu können. Zwar lassen sich diese durch das Abschneiden erhaltenen Ensembles nicht auf der Ebene der Spuren von Matrixpotenzen mit GOE vergleichen, dennoch zeigen wir im ersten Teil der Arbeit, dass mithilfe von Kompaktheitsargumenten der Vergleich auf der Ebene der Verteilungsfunktion des größten Eigenwerts gelingt.

Khorunzhiy beschreibt in [14] eine Lücke im Beweis von Soshnikov und stellt in Abschnitt 5 seiner Arbeit einen Weg vor, auf dem diese geschlossen werden kann. Diesen Ideen folgend wird hier ein etwas vereinfachtes Verfahren angegeben (siehe Abschnitt II.6).

Der Punkt (c) wird in keiner der Arbeiten [14, 16, 20, 22, 25] thematisiert und konnte auch im Rahmen dieser Dissertation nicht behandelt werden. Diese unbefriedigende Situation soll hier betont werden. Deshalb wird die benötigte Aussage, dass die Größe (5) auch im Fall $k > 1$ asymptotisch nur von den Varianzen der Verteilungen abhängt in dieser Arbeit als Vermutung formuliert (siehe Seite 7, Vermutung 5). Alle Aussagen, die von der Gültigkeit dieser Vermutung abhängen, sind mit einem Stern gekennzeichnet (konkret sind das Lemma* 17, Korollar* 18, Satz* 20, Satz* 21).

Eigentliches Ziel der Arbeit ist nicht das Füllen dieser Lücken, sondern vielmehr die Erweiterung der Methode auf den Fall nicht notwendig symmetrischer Verteilungen der Matrixeinträge. Um die Ergebnisse der Arbeit zu formulieren, geben wir zunächst die Definitionen der hier betrachteten Wigner-Ensembles an:

Definition 3. Sei $q > 0$. Ein Zufallsmatrix-Ensemble wie in Definition 1 heißt Wigner-Ensemble erster Art (zum Parameter q), wenn $\sigma, H > 0$ existieren, so dass für fast alle n gilt

- (i) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)} = 0$,
- (ii) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)2} = \sigma^2$, falls $i \neq j$,
- (iii) $\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)3} = 0$, falls $i \neq j$,
- (iv) $\mathbb{E} |\xi_{ij}^{(n)}|^q \leq \sigma^q H$,
- (v) $(\xi_{ij}^{(n)})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sind unabhängig.

Definition 4. Sei $\alpha > 0$. Ein Zufallsmatrix-Ensemble wie in Definition 1 heißt Wigner-Ensemble zweiter Art (zum Parameter α), wenn $\sigma, \eta > 0$ existieren, so dass für fast alle n gilt

- (i) $|\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)}| \leq \begin{cases} \sigma n^{-(1/4+\eta)}, & \text{falls } i = j, \\ \sigma n^{-(1/2+2\eta)}, & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$
- (ii) $|\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)2} - \sigma^2| \leq \sigma^2 n^{-(2/3+\eta)}$, falls $i \neq j$,
- (iii) $|\mathbb{E} \xi_{ij}^{(n)3}| \leq \sigma^3 n^{-(1/4+\eta)}$, falls $i \neq j$,
- (iv) $|\xi_{ij}^{(n)}| \leq \sigma n^\alpha$,
- (v) $(\xi_{ij}^{(n)})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sind unabhängig.

Auch in der Situation der Definitionen 3 oder 4 setzen wir

$$A_n := \frac{W_n}{2\sigma\sqrt{n}}, \quad (18)$$

vgl. (2). Die Varianzen der Einträge von A_n außerhalb der Hauptdiagonalen sind dann – bis auf Fluktuationen der Größenordnung $n^{-(5/3+\eta)}$ im Falle der Wigner-Ensembles zweiter Art – normiert auf $1/(4n)$. Ferner übernehmen wir die Definition der Verteilungsfunktion (3). Jetzt können wir die Hauptresultate formulieren.

Mit den Abkürzungen $x_n := x_{n,1}$ und $y_n := y_{n,1}$, vgl. (15), gilt:

Satz 67. Seien $0 < u < v < \infty$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger ganzer Zahlen mit $u \leq p_n/n^{2/3} \leq v$. Für ein Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter $0 < \alpha < 1/48$ gilt:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(p_n) = 0$,
- (ii) $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n(p_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n(p_n) < \infty$.

Die Verallgemeinerung von Satz 67 auf den Fall $k > 1$ notieren wir, wie bereits gesagt, als Vermutung:

Vermutung 5. Gegeben seien ein Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter $0 < \alpha < 1/48$ und $0 < u < v < \infty$. Es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Folgen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{N}^k mit $u \leq p_{n,m}/n^{2/3} \leq v$, $1 \leq m \leq k$, gilt:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n,k}(p_n) = 0$,
- (ii) $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_{n,k}(p_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_{n,k}(p_n) \leq C^k$.

Aus dieser Vermutung folgen:

Satz* 20. Für alle Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter $0 < \alpha < 1/48$, konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Tracy-Widom-Verteilung.

Satz* 21. Für alle Wigner-Ensemble erster Art zum Parameter $q > 96$ konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Tracy-Widom-Verteilung.

Man beachte, dass weder in den Arbeiten [14, 16, 20, 22, 25] noch in der interessanten Variante [10, 23, 24] der Fall nicht notwendig symmetrischer Verteilungen behandelt wird. Worin besteht die Schwierigkeit der Erweiterung? Wir erläutern das für $k = 1$: Im Fall, dass alle ungeraden Momente verschwinden, genügt es, gerade Pfade zu betrachten (das sind Pfade, für die $T(\{i, j\})$ mit jeder Kante $\{i, j\}$ gerade ist). Für alle anderen Pfade γ folgt nämlich aus der Unabhängigkeit der Matrixeinträge $\mathbb{E}\xi_\gamma = 0$, sie leisten also keinen Beitrag. Das stimmt im Fall nicht notwendig symmetrischer Verteilungen nicht mehr, es tragen viel mehr Pfade zu den Spuren von Matrixpotenzen bei. Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich daraus, dass durch das Abschneideverfahren Verteilungen mit nichtverschwindenden ersten und dritten Momenten erzeugt werden. Deshalb müssen die Wigner-Ensembles zweiter Art aus Definition 4 betrachtet werden.

Soshnikov und Péché haben in [18, 19] versucht, die Methode auf den Fall von Wigner-Ensembles mit nicht notwendig symmetrischen Verteilungen zu verallgemeinern. Sie haben gleich Verteilungen mit nichtverschwindendem dritten Moment betrachtet und versucht, ähnlich wie in der Folge von Arbeiten von Sinai und Soshnikov [21, 22] und Soshnikov [25], für eine möglichst große Potenz der Matrizen zu zeigen, dass die Varianzen die Spuren asymptotisch dominieren. Das ist dort für Exponenten n^κ mit $\kappa < 6/11$ gelungen, was allerdings nicht ausreicht, um zu zeigen, dass für $n \rightarrow \infty$ der größte Eigenwert der Tracy-Widom-Verteilung gehorcht, dafür braucht man $\kappa = 2/3$.

Neue, spektakuläre Ergebnisse zur Universalität lokaler Eigenwertstatistiken für Wigner-Ensembles wurden vor wenigen Jahren von Erdős, Schlein, Yau et al. und davon unabhängig von Tao, Vu erzielt (siehe [7, 8] für einen Überblick). Im Mittelpunkt steht die gewonnene Einsicht, dass lokale Eigenwertstatistiken durch wenige Momente der Verteilungen bestimmt sind. Die Ergebnisse wurden zunächst für das Innere des Spektrums erzielt. In [6, 9, 29] werden entsprechende Resultate auch für extremale Eigenwerte (auch verallgemeinerter) Wigner-Ensembles formuliert.

Sehr interessant ist in dieser Hinsicht das Preprint [17]. Dort wird eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben, unter der die Verteilungsfunktion eines Wigner-Ensembles mit unabhängigen identisch verteilten Matrixeinträgen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 (nur beschränkte Varianz für die Diagonaleinträge) gegen die Tracy-Widom-Verteilung konvergiert. Demnach ist das genau dann der Fall, wenn gilt: $\lim_{s \rightarrow \infty} s^4 \mathbb{P}(|\xi_{12}| \geq s) = 0$.

Die in diesen Arbeiten verwendete Beweismethode erlaubt jedoch keinen Zugriff auf die Verteilungsfunktionen lokaler Eigenwertstatistiken. Stattdessen wird für die Ensembles gezeigt, dass sie die gleichen Verteilungen besitzen wie die klassischen Gauß'schen Ensembles. Dagegen kann man Hoffnung haben, mit einer Weiterentwicklung der Methode von Soshnikov eine direkte kombinatorische Charakterisierung der Verteilungsfunktion zu gewinnen. Das kann erstens von Nutzen sein, wenn Ensembles untersucht werden, die außerhalb der Symmetrieklassen der klassischen Gauß'schen Ensembles liegen. Zweitens können sich Anwendungen in der freien Wahrscheinlichkeitstheorie von Voiculescu ergeben.

Die vorliegende Arbeit ist zweigeteilt. In Teil I wird gezeigt, dass aus der Gültigkeit von Vermutung 5 für ein Wigner-Ensemble folgt, dass die Verteilung des größten Eigenwerts schwach gegen die Tracy-Widom-Verteilung konvergiert:

Im Zentrum von Abschnitt I.1 steht die Abschneide-Konstruktion aus [20]. Es wird ein Kriterium angegeben, wann das Abschneiden die Verteilungsfunktionen (zumindest asymptotisch) nicht beeinflusst. In Abschnitt I.2 wird die Verteilungsfunktion mittels eines aus den Randverteilungen der Eigenwerte abgeleiteten Maßes $\mu_{n,k}$ dargestellt, um im Abschnitt I.3 zu sehen, dass die beidseitige Laplacetransformierte dieses Maßes asymptotisch durch $x_{n,k}$ beschrieben wird. Aus der Beschränktheit der $x_{n,k}$ (Vermutung 5) wird in Abschnitt I.4 die Konvergenz der Laplacetransformierten auf einer abzählbaren Menge über ein Teilfolgenargument nachgewiesen. Ein Stetigkeitssatz für die Laplacetransformierte (der im Anhang A.1 mithilfe funktionentheoretischer Argumente aus dem Stetigkeitssatz von Levy gewonnen wird) liefert die schwache Konvergenz der Maße $\mu_{n,k}$ und damit die Konvergenz der Verteilungsfunktionen.

Teil II ist der (kombinatorische) Beweis von Satz 67.

In den Abschnitten II.1–II.3 sind die Sprechweisen für die Pfadkombinatorik zusammengestellt. Da einige der von Soshnikov für die Kombinatorik geprägten Begriffe an die Situation symmetrischer Verteilungen und damit gerader Pfade angepasst sind, werden alle Begriffe hier nochmal definiert, und zwar für die Situation beliebiger (geschlossener) Pfade. Das hat eine gewisse Wiederholung zur Folge, andererseits hat es sich als sehr nützlich erwiesen, einen präzisen formalen Begriffsapparat zur Verfügung zu haben, um die Kombinatorik (die in der Situation nicht notwendig symmetrischer Verteilungen an Komplexität gewinnt) zu beherrschen. Auf die grundlegenden Propositionen 28, 30 und 34 gehen im Folgenden viele Aussagen über Pfade zurück. Durchgehend wird die besondere Rolle des Startpunkts eines Pfades beachtet. Abschnitt II.4 ist der Abschätzung des Beitrags eines Pfades zur Spur gewidmet. Die Güte dieser Abschätzung bestimmt das kombinatorische Vorgehen in Abschnitt II.8. Abschnitt II.5 ist die Sammlung der für diese Arbeit benötigten Abschätzungen an Kardinalitäten von Mengen von Irrfahrten. Eine dieser Abschätzungen (Satz 45) ebnet zusammen mit Abschnitt II.6 (Satz 57) den Weg herum um die von Khorunzhiy in [14] erwähnte (und ebenda in Abschnitt 5 geschlossene) Beweislücke in [25]. Von Abschnitt II.7 wird lediglich Satz 59 benötigt. Es ist die Aussage, dass alle exponentiellen Momente des Maximums (skalierter) Dyck-Pfade existieren. Der hier gegebene elementare Beweis beruht auf einem doppelten Teleskopsummentrick (Lemma 65), insbesondere wird nichts über stochastische Prozesse verwendet. Ausgangspunkt war die Arbeit [13] von Kaigh. Einen alternativen Beweis findet man etwa in [15]. In Abschnitt II.8 werden die Vorbereitungen aus den vorherigen Abschnitten von Teil II verwendet, um im Fall $k = 1$ die Gültigkeit von Vermutung 5 nachzuweisen (Satz 67). Das in [21, 22, 25] entwickelte kombinatorische Konstruktions- und Abzählverfahren für Pfade wird hier an die Situation nicht notwendig symmetrischer Verteilungen angepasst und als Baukastensystem modularisiert, das Reihenfolge und Trennung der Konstruktionsschritte betont. Nur in diesem Abschnitt finden die Hilfssätze aus Anhang A.2 Anwendung.

I Der Weg zur Tracy-Widom-Verteilung

I.1 Wigner-Ensembles und Verteilungsfunktionen

Sei $\alpha > 0$. Für ein Wigner-Ensemble erster Art mit Bezeichnungen wie in Definition 3 definieren wir die Zufallsvariablen $\bar{\xi}_{ij}^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\bar{\xi}_{ij}^{(n)}(\omega) := \xi_{ij,\alpha,\sigma}^{(n)}(\omega) := \begin{cases} \xi_{ij}^{(n)}(\omega), & \text{falls } |\xi_{ij}^{(n)}(\omega)| \leq \sigma n^\alpha, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (19)$$

Das zugehörige Zufallsmatrix-Ensemble bezeichnen wir mit $(\bar{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.⁴ Diese Abschneideverfahren stammt aus [14]. Mithilfe von (19) konstruieren wir aus Wigner-Ensembles erster Art Wigner-Ensembles zweiter Art, genauer:

Proposition 6. *Sei $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Wigner-Ensemble erster Art zum Parameter $q \geq 4$ (Bezeichnungen wie in Definition 3). Sei ferner $\alpha > 2/q$. Dann ist $(\bar{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter α .*

Beweis. Bedingungen (iv) und (v) aus Definition 4 sind nach Konstruktion erfüllt. Es sind noch die Bedingungen (i)–(iii) zu überprüfen. Wir schätzen mit der Dreiecksungleichung ab. Aus den Bedingungen (i) und (iv) in Definition 3 folgt

$$|\mathbb{E} \bar{\xi}_{ij}^{(n)}| \leq \left| \int_{|x| > \sigma n^\alpha} x d\xi_{ij}^{(n)*} \mathbb{P} \right| \leq \frac{\mathbb{E} |\xi_{ij}^{(n)}|^q}{(\sigma n^\alpha)^{q-1}} \leq \frac{\sigma H}{n^{\alpha(q-1)}}. \quad (20)$$

Analog erhalten wir aus (ii) und (iv)

$$|\mathbb{E} \bar{\xi}_{ij}^{(n)2} - \sigma^2| \leq \frac{\sigma^2 H}{n^{\alpha(q-2)}} \quad (21)$$

und aus (iii) und (iv)

$$|\mathbb{E} \bar{\xi}_{ij}^{(n)3}| \leq \frac{\sigma^3 H}{n^{\alpha(q-3)}}. \quad (22)$$

Aus $q \geq 4$, $\alpha > 2/q$ und $\eta < 1/4$ folgen

$$\alpha(q-1) > \frac{1}{2} + 2\eta, \quad \alpha(q-2) > \frac{2}{3} + \eta, \quad \alpha(q-3) > \frac{1}{4} + \eta \quad (23)$$

und damit die Bedingungen (i)–(iii) aus Definition 4. \square

Wir setzen $\mathbb{W}_n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq \dots \leq x_n\}$. Für ein Wigner-Ensemble sei $\lambda^{(n)} : \Omega \rightarrow \mathbb{W}_n$ die Zufallsvariable, für die $\lambda_k^{(n)}(\omega)$, $k = 1, \dots, n$, die Eigenwerte von $A_n(\omega)$ sind, wobei jeder gemäß seiner Vielfachheit vorkommt. Die gemeinsame Verteilung der (geordneten) Eigenwerte von A_n ist also $\lambda^{(n)*} \mathbb{P}$, die Verteilung von $\lambda^{(n)}$. Wir definieren auf \mathbb{R}^n die symmetrisierte Version P_n der gemeinsamen Verteilung der Eigenwerte durch

$$P_n(A) := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{(n)*} \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{W}_n \mid x \circ \sigma \in A\}). \quad (24)$$

⁴Man beachte, dass auch die Zufallsvariablen $\bar{\xi}_{ij}^{(n)}$, $1 \leq i < j \leq n$, unabhängig sind! Durch Weglassen von α, σ aus der Notation sind keine Missverständnisse zu befürchten.

Es gilt für alle Mengen $M \subseteq \mathbb{W}_n$ und $\tilde{M} := \bigcup_{\sigma \in S_n} \{x \circ \sigma \mid x \in M\}$ und für alle Permutationen $\tau \in S_n$

$$M = \{x \in \mathbb{W}_n \mid x \circ \tau \in \tilde{M}\} \quad (25)$$

und damit

$$P_n(\tilde{M}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \lambda^{(n)} * \mathbb{P}(\{x \in \mathbb{W}_n \mid x \circ \sigma \in \tilde{M}\}) = \lambda^{(n)} * \mathbb{P}(M). \quad (26)$$

Für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt das Wigner'sche Halbkreisgesetz. Wir interessieren uns dafür, wie der größte Eigenwert um 1, den rechten Rand des Spektrums, verteilt ist. Dafür setzen wir $I_{n,s} := (1 + \frac{s}{2n^{2/3}}, \infty)$. Um zu zählen, wieviele Eigenwerte in $I_{n,s}$ liegen (Eigenwerte werden mit ihrer Vielfachheit gezählt), definieren wir $\nu_{n,s}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}_0$ durch

$$\nu_{n,s}(x) := |\{j \in [n] \mid x_j \in I_{n,s}\}|. \quad (27)$$

Damit definieren wir die Funktion $F_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ durch

$$F_n(s) := P_n(\nu_{n,s}^{-1}(\{0\})). \quad (28)$$

Offenbar ist F_n eine Verteilungsfunktion, die wir Verteilung des größten Eigenwerts (von A_n) nennen.

Wir wollen Wigner-Ensembles erster Art durch Wigner-Ensembles zweiter Art approximieren, siehe Proposition 6. Die beiden folgenden Propositionen präzisieren diese Idee. Wir setzen noch

$$B_n := B_{n,\alpha} := \{\omega \in \Omega \mid \exists(i, j): \xi_{ij}^{(n)}(\omega) \neq \bar{\xi}_{ij}^{(n)}(\omega)\}. \quad (29)$$

Aus der Konstruktion (19) abgeleitete Größen notieren wir weiterhin mit einem Querstrich (etwa $\bar{\mu}_n, \bar{\lambda}^{(n)}, \bar{F}_n, \dots$).

Proposition 7. *Für alle Wigner-Ensembles gilt: $\|F_n - \bar{F}_n\|_\infty \leq \mathbb{P}(B_n)$.*

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir kürzen ab

$$\begin{aligned} L_{n,s} &:= (\nu_{n,s} \circ \lambda^{(n)})^{-1}(\{0\}), \\ \bar{L}_{n,s} &:= (\nu_{n,s} \circ \bar{\lambda}^{(n)})^{-1}(\{0\}). \end{aligned} \quad (30)$$

Wegen $\lambda^{(n)}|_{\Omega \setminus B_n} = \bar{\lambda}^{(n)}|_{\Omega \setminus B_n}$ gilt $L_{n,s} \cap (\Omega \setminus B_n) = \bar{L}_{n,s} \cap (\Omega \setminus B_n)$. Es ist also

$$F_n(s) - \bar{F}_n(s) = \mathbb{P}(L_{n,s}) - \mathbb{P}(\bar{L}_{n,s}) = \mathbb{P}(L_{n,s} \cap B_n) - \mathbb{P}(\bar{L}_{n,s} \cap B_n) \quad (31)$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 8. *Für alle Wigner-Ensembles erster Art zum Parameter q und $\alpha > 2/q$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{n,\alpha}) = 0$.*

Beweis. Wegen der Unabhängigkeit der $\xi_{ij}^{(n)}$, $1 \leq i \leq j \leq n$, gilt

$$\mathbb{P}(\forall(i, j): \xi_{ij}^{(n)} = \bar{\xi}_{ij}^{(n)}) = \prod_{i \leq j} \mathbb{P}(\xi_{ij}^{(n)} = \bar{\xi}_{ij}^{(n)}) \quad (32)$$

Damit folgt

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \prod_{i \leq j} \left(1 - \mathbb{P}\left(\xi_{ij}^{(n)} \neq \bar{\xi}_{ij}^{(n)}\right)\right). \quad (33)$$

Mit der Markov-Ungleichung und Bedingung (iv) aus Definition 3 erhalten wir

$$\mathbb{P}\left(\xi_{ij}^{(n)} \neq \bar{\xi}_{ij}^{(n)}\right) = \mathbb{P}\left(|\xi_{ij}^{(n)}(\omega)| > \sigma n^\alpha\right) \leq \frac{\mathbb{E}|\xi_{ij}^{(n)}|^q}{(\sigma n^\alpha)^q} \leq \frac{H}{n^{\alpha q}}. \quad (34)$$

Setzen wir (34) in (33) ein, so führt die Bernoulli-Ungleichung auf

$$\mathbb{P}(B_n) \leq 1 - \left(1 - \frac{H}{n^{\alpha q}}\right)^{n(n+1)/2} \leq \frac{H}{2} \frac{n(n+1)}{n^{\alpha q}} \quad (35)$$

und $\alpha q > 2$ liefert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_n) = 0$, wie gewünscht. \square

Beispiel 9. (Gauß'sches orthogonales Ensemble) Die unabhängigen Zufallsvariablen $\xi_{ij}^{(n)} \sim \mathcal{N}(0, (1 + \delta_{ij})/4)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, definieren ein Wigner-Ensemble erster Art (zu jedem Parameter $q > 0$), das Gauß'sche orthogonale Ensemble. Seine Verteilungsfunktion $F_{\text{TW}}(s) := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s)$, vgl. Seite 3, heißt Tracy-Widom-Verteilung. Nach Proposition 6 ergibt die Konstruktion 19 für jedes $\alpha > 0$ ein Wigner-Ensemble zweiter Art, dessen Verteilungsfunktion wir mit $\bar{F}_{n, \text{GOE}}$ bezeichnen wollen. Aus den Propositionen 7 und 8 folgt, dass dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\bar{F}_{n, \text{GOE}} - F_{\text{TW}}\|_\infty = 0$.

I.2 Faktorielle Momente und die Verteilungsfunktion

In diesem Abschnitt wird erst eine Darstellung der Verteilungsfunktion $F_n(s)$ des größten Eigenwerts über alle faktoriellen Momente von $\nu_{n,s}$ angegeben. Anschließend geht es darum, die faktoriellen Momente aus (skalierten) Randverteilungen der Eigenwerte zu gewinnen.

Satz 10. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $\nu_{n,s}$ und F_n wie in (27) und (28) gilt die Darstellung:

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbb{E} \binom{\nu_{n,s}}{k}. \quad (36)$$

Beweis. Für jede Funktion ϕ mit $\phi(0) = 1$ und $\phi(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$ ist $F_n(s) = \mathbb{E}(\phi(\nu_{n,s}))$. Das folgt aus den Definitionen von F_n und $\nu_{n,s}$. Wir wählen

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{x}{k}. \quad (37)$$

Es ist $\phi(0) = 1$ und für $n \in \mathbb{N}$ ist mit dem binomischen Lehrsatz

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \phi(n), \quad (38)$$

d. h. ϕ hat die benötigten Eigenschaften. Wegen $\nu_{n,s} \leq n$ und $\binom{\nu_{n,s}}{k} = 0$ für $k > \nu_{n,s}$ gilt schließlich

$$F_n(s) = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\nu_{n,s}} (-1)^k \binom{\nu_{n,s}}{k} = \mathbb{E} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\nu_{n,s}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathbb{E} \binom{\nu_{n,s}}{k} \quad (39)$$

und damit die Behauptung. \square

Wir bezeichnen die faktoriellen Momente von $\nu_{n,s}$ mit

$$E_{n,s}(k) := \mathbb{E}(\nu_{n,s}(\nu_{n,s} - 1) \dots (\nu_{n,s} - k + 1)) \quad (40)$$

Sei $k \leq n$. Wir definieren die Verteilung $\rho_{n,k}$ auf \mathbb{R}^k vermöge

$$\rho_{n,k}(A) := \frac{n!}{(n-k)!} P_n(A \times \mathbb{R}^{n-k}) \quad (41)$$

für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$, für die $A \times \mathbb{R}^{n-k}$ eine P_n -messbare Menge ist. Somit ist $\rho_{n,k}$ bis auf den Vorfaktor die Randverteilung von k Eigenwerten. Wir definieren die Skalierung $f_{n,k} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$f_{n,k}(x) := 2n^{2/3}(x-1), \quad (42)$$

und ferner das Bildmaß von $\rho_{n,k}$ unter $f_{n,k}$:

$$R_{n,k} := f_{n,k*} \rho_{n,k}. \quad (43)$$

Außerdem definieren wir noch für alle $1 \leq j_1, \dots, j_k \leq n$ die Projektionen

$$\pi_{j_1, \dots, j_k}(x) := (x_{j_1}, \dots, x_{j_k}). \quad (44)$$

Der Zusammenhang zwischen den faktoriellen Momenten und den Randverteilungen ist wie folgt:

Lemma 11. *Seien $s \in \mathbb{R}$ und $n, k \in \mathbb{N}$. Mit den Bezeichnungen aus (40) und (43) gilt:*

$$E_{n,s}(k) = R_{n,k}((s, \infty)^k) \quad (45)$$

Beweis. Es gilt die Darstellung

$$\binom{\nu_{n,s}}{k} = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \chi_{I_{n,s}^k} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k}. \quad (46)$$

Die Symmetrie von P_n liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_{n,s}^k} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} dP_n = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_{n,s}^k} \circ \pi_{1, \dots, k} dP_n. \quad (47)$$

Aus (40), (46) und (47) folgt

$$\begin{aligned} E_{n,s}(k) &= k! \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I_{n,s}^k} \circ \pi_{1, \dots, k} dP_n \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \int_{I_{n,s}^k \times \mathbb{R}^{n-k}} dP_n \\ &= \int_{I_{n,s}^k} d\rho_{n,k}. \end{aligned} \quad (48)$$

Mit $\rho_{n,k}(I_{n,s}^k) = R_{n,k}((s, \infty)^k)$ erhalten wir die Behauptung. \square

Wir definieren für $n, p \in \mathbb{N}$ die Abbildung $T_{n,p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_{n,p}(x) := \sum_{j=1}^n x_j^p. \quad (49)$$

Das ist die symmetrisierte Version der Spur $\text{tr } A_n^p$, der Zusammenhang mit $T_{n,p}$ ist die Transformationsformel, siehe Proposition 12. Sei dazu ι die (wohldefinierte) Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{W}_n$ mit $\iota(x) = x \circ \sigma$ für ein $\sigma \in S_n$.⁵ Für $M \subseteq \mathbb{W}_n$ gilt $\iota^{-1}(M) = \tilde{M}$ und damit

$$\iota_* P_n(M) = P_n(\iota^{-1}(M)) = P_n(\tilde{M}). \quad (50)$$

Es ist also $\iota_* P_n = \lambda^{(n)}_* \mathbb{P}$, siehe (26).

Proposition 12. Für $n, k \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}^k$ gilt: $\mathbb{E} \prod_{j=1}^k \text{tr } A_n^{p_j} = \mathbb{E} \prod_{j=1}^k T_{n,p_j}$.

Beweis. Es ist $\text{tr } A_n^{p_j} = T_{n,p_j} \circ \lambda^{(n)}$. Mit der Transformationsformel folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \prod_{j=1}^k T_{n,p_j} \circ \lambda^{(n)} d\mathbb{P} &= \int_{\mathbb{W}_n} \prod_{j=1}^k T_{n,p_j} d\lambda^{(n)}_* \mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{W}_n} \prod_{j=1}^k T_{n,p_j} d\iota_* P_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^k T_{n,p_j} \circ \iota dP_n \end{aligned} \quad (51)$$

und dann wegen $T_{n,p_j} \circ \iota = T_{n,p_j}$ die Behauptung. \square

Wir setzen $\varepsilon_n := \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Eigenwerte außerhalb des Intervalls $I_n := B_{1+\varepsilon_n}(0)$ zu finden ist unwahrscheinlich:

Proposition 13. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit den obigen Bezeichnungen:

$$P_n(\mathbb{R}^n \setminus I_n) \leq e^{-\frac{1}{2}n^{1/6}} \mathbb{E} \text{tr } A_n^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}. \quad (52)$$

Beweis. Anwenden der Markov-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} P_n(\mathbb{R}^n \setminus I_n) &\leq P_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid T_{n,2\lfloor n^{2/3} \rfloor}(x) \geq (1+\varepsilon_n)^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}\}\right) \\ &\leq \frac{\mathbb{E} T_{n,2\lfloor n^{2/3} \rfloor}}{(1+\varepsilon_n)^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}}. \end{aligned} \quad (53)$$

Für genügend große n ist der Nenner nach unten beschränkt durch $e^{\frac{1}{2}n^{1/6}}$ und somit folgt die Behauptung aus Proposition 12. \square

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^k$ die Abbildung $h_{k,t} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch $h_{k,t}(x) = e^{\langle t, x \rangle}$. Nachfolgend stellen wir die faktoriellen Momente von $\nu_{n,s}$ näherungsweise mithilfe eines Maßes $\mu_{n,k,t}$ und einer Testfunktion $g_{k,s,t}$ dar, t ist dabei beliebig und parametrisiert diese Darstellungen. Wir werden schlussendlich nur $t = 1 = (1, \dots, 1)$ benötigen.

⁵ ι sortiert die Komponenten von x aufsteigend.

Lemma 14. Seien $s \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^k$. Ferner definieren wir

$$\begin{aligned} g_{k,s,t} &= h_{k,-t} \chi_{(s,\infty)^k}, \\ \mu_{n,k,t} &= h_{k,t} \chi_{f_{n,k}(I_n^k)} R_{n,k}. \end{aligned} \quad (54)$$

Es gilt:

$$E_{n,s}(k) = \int_{\mathbb{R}^k} g_{k,s,t} d\mu_{n,k,t} + O(n^k e^{-\frac{1}{2}n^{1/6}}) \quad (55)$$

Beweis. Aus Lemma 11 folgt mit (54)

$$E_{n,s}(k) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{(s,\infty)^k} dR_{n,k} = \int_{\mathbb{R}^k} g_{k,s,t} d\mu_{n,k,t} + \int_{\mathbb{R}^k \setminus f_{n,k}(I_n^k)} \chi_{(s,\infty)^k} dR_{n,k}. \quad (56)$$

Der Rest des Beweises besteht also aus der Aufgabe, das letzte Integral geeignet abzuschätzen. Es ist wegen $\chi_{(s,\infty)^k} \leq 1$ beschränkt durch

$$\rho_{n,k}(\mathbb{R}^k \setminus I_n^k) = \frac{n!}{(n-k)!} P_n\left((\mathbb{R}^k \setminus I_n^k) \times \mathbb{R}^{n-k}\right) \leq n^k P_n(\mathbb{R}^n \setminus I_n^n) \quad (57)$$

und die Behauptung folgt aus Proposition 13 und Satz 67. \square

Die diesen Abschnitt abschließende Proposition dient dazu, eine Majorante für die faktoriellen Momente $E_{n,s}(k)$ zu konstruieren. Die Gültigkeit von Vermutung 5 vorausgesetzt, impliziert sie, dass es eine Funktion $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$E_{n,s}(k) \leq M(s)^k. \quad (58)$$

Proposition 15. Seien $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$E_{n,s}(k) \leq 2(e^{2|s|})^k \mathbb{E}(\operatorname{tr} A_n^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor})^{k+2}. \quad (59)$$

Beweis. Die Zufallsvariable $\nu_{n,s}$ ist ganzzahlig. Wir haben

$$E_{n,s}(k) = \sum_{j=k}^n j(j-1)\dots(j-k+1) P_n(\nu_{n,s} = j), \quad (60)$$

weil die Summanden für $j < k$ den Faktor 0 enthalten. Wir schätzen ab:

$$P_n(\nu_{n,s} = j) \leq P_n(\nu_{n,s} \geq j) \leq P_n\left(T_{n,2\lfloor n^{2/3} \rfloor} \geq j\left(1 + \frac{s}{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}\right)^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}\right) \quad (61)$$

Für genügend große n gilt $\left(1 + \frac{s}{2\lfloor n^{2/3} \rfloor}\right)^{2\lfloor n^{2/3} \rfloor} \geq e^{-2|s|}$, und mit der Markov-Ungleichung folgt

$$P_n(\nu_{n,s} = j) \leq e^{2|s|} \frac{\mathbb{E} T_{n,2\lfloor n^{2/3} \rfloor}^{k+2}}{j^{k+2}}. \quad (62)$$

Aus Proposition 12 und $\sum_{j \geq 1} j^{-2} \leq 2$ folgt die Behauptung. \square

I.3 Spuren als Laplacetransformierte eines Maßes

In diesem Abschnitt stellen wir den Zusammenhang zwischen den Spuren von k -fachen Produkten von Matrixpotenzen und den in (54) definierten Maßen her. Zu Beginn führen wir die dafür wesentliche Größe ein: Wir definieren für $n, k \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}^k$ die Abbildungen $H_{n,k,t}, S_{n,k,t} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ durch

$$\begin{aligned} H_{n,k,t} &:= (h_{k,t} \circ f_{n,k}) \chi_{I_n^k}, \\ S_{n,k,t} &:= \sum_{j \in [n]^k : |\{j_1, \dots, j_k\}|=k} H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k}. \end{aligned} \quad (63)$$

Mit dem folgenden Lemma sehen wir, dass $S_{n,k,t}$ die beidseitigen Laplacetransformierten obiger Maße sind. In der hier formulierte Aussage genügt es wieder, sich den Fall $\tau = 1 = (1, \dots, 1)$ vorzustellen:

Lemma 16. *Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $t, \tau \in \mathbb{R}^k$ gilt:*

$$\mathbb{E} S_{n,k,t+\tau} = \int_{\mathbb{R}^k} h_{k,t} d\mu_{n,k,\tau} \quad (64)$$

Beweis. Mit der Definition in (63) folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_{n,k,t+\tau} &= \int_{\mathbb{R}^n} S_{n,k,t+\tau} dP_n \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} \int_{\mathbb{R}^n} (h_{k,t+\tau} \chi_{f_{n,k}(I_n^k)}) \circ f_{n,k} \circ \pi_{j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(k)}} dP_n \end{aligned} \quad (65)$$

Wegen der Symmetrie von P_n sind die Summanden in (65) gleich

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h_{k,t+\tau} \chi_{f_{n,k}(I_n^k)}) \circ f_{n,k} \circ \pi_{1, \dots, k} dP_n \quad (66)$$

und es folgt mit (41), (43) und $h_{k,t+\tau} = h_{k,t} h_{k,\tau}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} S_{n,k,t+\tau} &= \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^n} (h_{k,t+\tau} \chi_{f_{n,k}(I_n^k)}) \circ f_{n,k} \circ \pi_{1, \dots, k} dP_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} h_{k,t} h_{k,\tau} \chi_{f_{n,k}(I_n^k)} dR_{n,k}. \end{aligned} \quad (67)$$

Das ist die Behauptung. \square

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ die Abbildung $T_{n,t,I} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$T_{n,t,I}(x) := \sum_{j=1}^n x_j^{2 \lfloor tn^{2/3} \rfloor} (1+x_j) \chi_I(x_j), \quad (68)$$

die in engem Zusammenhang mit (49) stehen. Das nächste Lemma verbindet in vier Schritten die Spuren k -facher Produkte Potenzen von A_n mit k -fachen Produkten der Größe $S_{n,1,t}$. Die Gültigkeit hängt an der Gültigkeit von Vermutung 5.

Lemma* 17. Seien $k \in \mathbb{N}$, $0 < u < v < \infty$ und $0 < \alpha < 1/48$. Für alle $t \in \mathbb{R}_+^k$ mit $u < t_m < v$, $1 \leq m \leq k$, und alle Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter α gelten:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,\mathbb{R}} = \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} \mathbb{E} \prod_{m=1}^k \text{tr} A_n^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + \delta_m} \\
\text{(ii)} \quad & \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,I_n} = \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,\mathbb{R}} + O\left(e^{-\frac{1}{4}n^{1/6}}\right) \\
\text{(iii)} \quad & \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,B_{\varepsilon_n}(1)} = \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,I_n} + O(n^{-1/2}) \\
\text{(iv)} \quad & \mathbb{E} \prod_{m=1}^k S_{n,1,t_m} = \frac{1}{2^k} \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,B_{\varepsilon_n}(1)} + O(n^{-1/3})
\end{aligned}$$

Beweis. Wir beginnen mit der Aussage (i). Nach den Definitionen in (49) und (68) gilt $T_{n,t_m,\mathbb{R}} = T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor+1}$. Proposition 12 liefert

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,\mathbb{R}} = \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} \mathbb{E} \prod_{m=1}^k T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + \delta_m} = \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} \mathbb{E} \prod_{m=1}^k \text{tr} A_n^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + \delta_m}. \quad (69)$$

Für den Beweis von Aussage (ii) setzen wir

$$I(\beta) := \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \beta = 0, \\ I_n, & \text{falls } \beta = 1. \end{cases} \quad (70)$$

Damit und mit $T_{n,t_m,I_n} = T_{n,t_m,\mathbb{R}} - T_{n,t_m,\mathbb{R} \setminus I_n}$ gilt

$$\prod_{m=1}^k T_{n,t_m,I_n} = \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,\mathbb{R}} + \sum_{\beta \in \{0,1\}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}} (-1)^{|\beta|} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,\mathbb{R} \setminus I(\beta_m)}. \quad (71)$$

Wir müssen den Erwartungswert der Summe auf der rechten Seite von (71) abschätzen. Aus $|1+x_j| < 2+x_j^2$ und $\chi_{\mathbb{R} \setminus I}(x_j) \leq \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I^n}(x)$ für alle Teilmengen $I \subseteq \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
|T_{n,t_m,\mathbb{R} \setminus I}(x)| & \leq \sum_{j=1}^n x_j^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} |1+x_j| \chi_{\mathbb{R} \setminus I}(x_j) \\
& \leq \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I^n}(x) (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor}(x) + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor+2}(x)).
\end{aligned} \quad (72)$$

Für $\beta \in \{0,1\}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}$ gibt es wenigstens ein $1 \leq m \leq k$ mit $I(\beta_m) = I_n$. Daraus folgt mit (72)

$$\begin{aligned}
\prod_{m=1}^k |T_{n,t_m,\mathbb{R} \setminus I(\beta_m)}| & \leq \prod_{m=1}^k \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I(\beta_m)^n} (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor+2}) \\
& \leq \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I_n^n} \prod_{m=1}^k (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor+2}).
\end{aligned} \quad (73)$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k |T_{n,t_m, \mathbb{R} \setminus I(\beta_m)}| \leq \sqrt{\mathbb{E} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I_n^n}} \sqrt{\mathbb{E} \prod_{m=1}^k (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + 2})^2}. \quad (74)$$

Nach Proposition 13 gilt

$$\mathbb{E} \chi_{\mathbb{R}^n \setminus I_n^n} = P_n(\mathbb{R}^n \setminus I_n) \leq e^{-\frac{1}{2}n^{1/6}} \mathbb{E} \operatorname{tr} A_n^{2n^{2/3}}. \quad (75)$$

Nach Vermutung 5 gibt es eine Konstante C , so dass mit (74) und (75) gilt

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k |T_{n,t_m, \mathbb{R} \setminus I(\beta_m)}| \leq \sqrt{e^{-\frac{1}{2}n^{1/6}} C(3C)^{2k}} \quad (76)$$

und folglich

$$\left| \mathbb{E} \sum_{\beta \in \{0,1\}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}} (-1)^{|\beta|} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m, \mathbb{R} \setminus I(\beta_m)} \right| \leq (2^k - 1) \sqrt{C} (3C)^k e^{-\frac{1}{4}n^{1/6}}. \quad (77)$$

Für den Beweis von Aussage (iii) setzen wir

$$J(\beta) := \begin{cases} I_n, & \text{falls } \beta = 0, \\ J_n, & \text{falls } \beta = 1, \\ B_{\varepsilon_n}(-1), & \text{falls } \beta = -1. \end{cases} \quad (78)$$

Damit und mit $T_{n,t_m, B_{\varepsilon_n}(1)} = T_{n,t_m, I_n} - T_{n,t_m, J_n} - T_{n,t_m, B_{\varepsilon_n}(-1)}$ gilt

$$\prod_{m=1}^k T_{n,t_m, B_{\varepsilon_n}(1)} = \prod_{m=1}^k T_{n,t_m, I_n} + \sum_{\beta \in \{-1,0,1\}^k \setminus \{(0,\dots,0)\}} (-1)^{|\beta|} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m, J(\beta_m)}. \quad (79)$$

Wir müssen den Erwartungswert der Summe auf der rechten Seite von (79) abschätzen. Analog zu (72) folgt für alle Teilmengen $I \subseteq \mathbb{R}$

$$|T_{n,t_m, I}(x)| \leq \sum_{j=1}^n x_j^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} |1 + x_j| \leq (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor}(x) + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + 2}(x)). \quad (80)$$

Wir verbessern diese Abschätzung in speziellen Situationen: Für alle $x_j \in J_n$ gilt $|x_j| \leq 1 - \varepsilon_n$ und folglich erstens $|1 + x_j| \leq 2$ und zweitens $\ln|x_j| \leq \ln(1 - \varepsilon_n) \leq -\varepsilon_n$. Damit folgt

$$|T_{n,t_m, J_n}(x)| \leq 2 \sum_{j=1}^n e^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor \ln|x_j|} \chi_{J_n}(x_j) \leq 2ne^{-2\varepsilon_n \lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} \leq 2ne^{-\frac{\varepsilon}{2}n^{1/6}}. \quad (81)$$

Für alle $x_j \in B_{\varepsilon_n}(-1)$ ist $|1 + x_j| \leq \varepsilon_n$ und somit

$$\begin{aligned} |T_{n,t_m, B_{\varepsilon_n}(-1)}(x)| &\leq \varepsilon_n \sum_{j=1}^n x_j^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} = \varepsilon_n T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor}(x) \\ &\leq \varepsilon_n (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor}(x) + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + 2}(x)). \end{aligned} \quad (82)$$

Sei $\beta \in \{-1, 0, 1\}^k$ mit $\beta_m = -1$ für wenigstens ein $1 \leq m \leq k$. Aus (80) und (82) folgt

$$\prod_{m=1}^k |T_{n,t_m,J(\beta_m)}| \leq \varepsilon_n \prod_{m=1}^k (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + 2}) \quad (83)$$

Sei $\beta \in \{-1, 0, 1\}^k$ mit $\beta_{m_0} = 1$ für wenigstens ein $1 \leq m_0 \leq k$. Aus (80) und (81) folgt

$$\prod_{m=1}^k |T_{n,t_m,J(\beta_m)}| \leq 2ne^{-\frac{\mu}{2}n^{1/6}} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq m_0}}^k (2T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} + T_{n,2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + 2}) \quad (84)$$

Aus (83), (84) und $2ne^{-\frac{\mu}{2}n^{1/6}} \leq \varepsilon_n$ folgt: Nach Vermutung 5 gibt es eine Konstante C , so dass für alle $\beta \in \{-1, 0, 1\}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ gilt

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k |T_{n,t_m,J(\beta_m)}| \leq \varepsilon_n (3C)^k. \quad (85)$$

Es ist also

$$\left| \mathbb{E} \sum_{\beta \in \{-1, 0, 1\}^k \setminus \{(0, \dots, 0)\}} (-1)^{|\beta|} \prod_{m=1}^k T_{n,t_m,J(\beta_m)} \right| \leq (3^k - 1)(3C)^k \varepsilon_n. \quad (86)$$

Zum Beweis der Aussage (iv): Für $x_j \in B_{\varepsilon_n}(1)$ gilt $|f_{n,1}(x_j)| < n^{1/6}$, also

$$\ln x_j = \ln \left(1 + \frac{f_{n,1}(x_j)}{2n^{2/3}} \right) = \frac{f_{n,1}(x_j)}{2n^{2/3}} + O(1/n). \quad (87)$$

Mit $\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor = t_m n^{2/3} (1 + O(n^{-2/3}))$ erhalten wir

$$x_j^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor} = e^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor \ln x_j} = e^{t_m f_{n,1}(x_j)} (1 + O(n^{-1/3})). \quad (88)$$

Für $x_j \in B_{\varepsilon_n}(1)$ ist ferner $1 + x_j = 2 + O(n^{-1/2})$. Damit und mit (88) ist

$$\prod_{m=1}^k T_{n,t_m,B_{\varepsilon_n}(1)}(x) = 2^k (1 + O(n^{-1/3})) \prod_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^n e^{t_m f_{n,1}(x_{j_m})} \chi_{B_{\varepsilon_n}(1)}(x_{j_m}). \quad (89)$$

Nach (80), (89) und Vermutung 5 gilt für alle $1 \leq k' \leq k$

$$\left| \mathbb{E} \prod_{m=1}^{k'} \sum_{j_m=1}^n (e^{t_m f_{n,1}} \chi_{B_{\varepsilon_n}(1)}) \circ \pi_{j_m} \right| \leq \left(\frac{3d}{2} \right)^{k'} (1 + O(n^{-1/3})). \quad (90)$$

Definitionsgemäß ist

$$S_{n,1,t_m}(x) = \sum_{j=1}^n e^{t_m f_{n,1}(x_j)} \chi_{I_n}(x_j). \quad (91)$$

Für $x_j \leq 1 - \varepsilon_n$ gilt $f(x_j) \leq -n^{1/6}$ und damit

$$\sum_{j=1}^n e^{t_m f_{n,1}(x_j)} \chi_{I_n \setminus B_{\varepsilon_n}(1)}(x_j) \leq n e^{-un^{1/6}}. \quad (92)$$

Wir haben also

$$S_{n,1,t_m} = \sum_{j=1}^n (e^{t_m f_{n,1}} \chi_{B_{\varepsilon_n}(1)}) \circ \pi_j + O(ne^{-un^{1/6}}). \quad (93)$$

Wegen (90) gilt damit auch

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k S_{n,1,t_m} = \mathbb{E} \prod_{m=1}^k \sum_{j_m=1}^n (e^{t_m f_{n,1}} \chi_{B_{\varepsilon_n}(1)}) \circ \pi_{j_m} + O(ne^{-un^{1/6}}). \quad (94)$$

Aus (89) und (90) folgt die Behauptung. \square

Wir fassen die vier Aussagen von Lemma 17 zusammen:

Korollar* 18. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $0 < u < v < \infty$ und $0 < \alpha < 1/48$. Für alle $t \in \mathbb{R}_+^k$ mit $u < t_m < v$, $1 \leq m \leq k$, und alle Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter α gilt:*

$$\mathbb{E} \prod_{m=1}^k S_{n,1,t_m} = \frac{1}{2^k} \sum_{\delta \in \{0,1\}^k} \mathbb{E} \prod_{m=1}^k \text{tr} A_n^{2\lfloor t_m n^{2/3} \rfloor + \delta_m} + O(n^{-1/3}) \quad (95)$$

$S_{n,k,t}$ lässt sich rekursiv aus $S_{n,1,t'}$ gewinnen. Dabei steht t' für Summen einiger der t_i , genauer:

Proposition 19. *Seien $k \leq n \in \mathbb{N}$ und $t = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Für eine Teilmenge $Q \subseteq [k]$ setzen wir $t_Q := \sum_{q \in Q} t_q$. Es gilt:⁶*

$$S_{n,k,t} = \prod_{q=1}^k S_{n,1,t_q} - \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{\substack{m\text{-Partitionen} \\ \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ von } [k]}} S_{n,m,(t_{Q_1}, \dots, t_{Q_m})} \quad (96)$$

Beweis. Mit $h_{k,t} = \prod_{q=1}^k h_{1,t_q} \circ \pi_q$ und $\chi_{I_n^k} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} = \prod_{q=1}^k \chi_{I_n} \circ \pi_{j_q}$ erhalten wir

$$H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} = \prod_{q=1}^k (h_{1,t_q} \circ \pi_q \circ f_{n,k} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k}) (\chi_{I_n} \circ \pi_{j_q}) \quad (97)$$

und $\pi_q \circ f_{n,k} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} = f_{n,1} \circ \pi_q \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} = f_{n,1} \circ \pi_{j_q}$ liefert

$$H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} = \prod_{q=1}^k H_{n,1,t_q} \circ \pi_{j_q}. \quad (98)$$

⁶Für eine gegebene m -Partition $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ ist die Größe $S_{n,m,(t_{Q_1}, \dots, t_{Q_m})}$ wohldefiniert, es gilt nämlich $S_{n,m,t} = S_{n,m,t \circ \sigma}$ für jede Permutation $\sigma \in S_m$.

Daraus folgt

$$S_{n,k,t} = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_k=1}^n \prod_{q=1}^k H_{n,1,t_q} \circ \pi_{j_q} - R = \prod_{q=1}^k S_{n,1,t_q} - R \quad (99)$$

mit

$$\begin{aligned} R &= \sum_{j \in [n]^k: |\{j_1, \dots, j_k\}| < k} H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} \\ &= \sum_{m=1}^{k-1} \sum_{\substack{m\text{-Partitionen} \\ \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ von } [k]}} \sum_{j \in [n]_{\{Q_1, \dots, Q_m\}}^k} H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k}, \end{aligned} \quad (100)$$

wobei wir für eine m -Partition $\{Q_1, \dots, Q_m\}$ von $[k]$

$$[n]_{\{Q_1, \dots, Q_m\}}^k := \{j \in [n]^k \mid j_p = j_q \Leftrightarrow \exists i: \{p, q\} \subseteq Q_i\} \quad (101)$$

gesetzt haben. Für die Summanden in (100) gilt mit (98) und $q_i := \min Q_i$

$$\begin{aligned} H_{n,k,t} \circ \pi_{j_1, \dots, j_k} &= \prod_{i=1}^m \prod_{q \in Q_i} H_{n,1,t_q} \circ \pi_{j_q} = \prod_{i=1}^m H_{n,1,t_{Q_i}} \circ \pi_{j_{q_i}} \\ &= H_{n,m,(t_{Q_1}, \dots, t_{Q_m})} \circ \pi_{j_{q_1}, \dots, j_{q_m}}. \end{aligned} \quad (102)$$

Die j -Summe in (100) ist also gleich

$$\sum_{j \in [n]^m: |\{j_1, \dots, j_m\}| = m} H_{n,m,(t_{Q_1}, \dots, t_{Q_m})} \circ \pi_{j_1, \dots, j_m}, \quad (103)$$

wie gewünscht. \square

Es existieren ganze Zahlen $Z(k, m)$, so dass nach Ausführen der Rekursionsgleichung aus Proposition 19 die Darstellung

$$S_{n,k,t} = \sum_{m=1}^k Z(k, m) \sum_{\substack{m\text{-Partitionen} \\ \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ von } [k]}} \prod_{j=1}^m S_{n,1,t_{Q_j}} \quad (104)$$

gilt.⁷

I.4 Universelle Verteilung des größten Eigenwerts

In der Situation von Vermutung 5 folgt aus Bedingung (ii) in Definition 4 für alle $\gamma \in \mathcal{P}_{n,k,p_n}^{(2)}$

$$\mathbb{E} \xi_{\gamma_1} \dots \xi_{\gamma_k} = \sigma^{|p_n|} (1 + O(kv n^{-\eta})), \quad (105)$$

vgl. Satz 35. Mit den Definitionen in (15) und Vermutung 5 selbst gilt

$$\left| x_{n,k}(p_n) - \frac{|\mathcal{P}_{n,k,p_n}^{(2)}|}{(2\sqrt{n})^{|p_n|}} \right| \leq y_{n,k}(p_n) + O(vkC^k n^{-\eta}). \quad (106)$$

⁷Konkret gilt: $Z(k, m) = (-1)^{k-m} (k-m)!$. Es reicht hier aber von der Existenz der Zahlen $Z(k, m)$ zu wissen.

Die Größen $x_{n,k}(p_n)$ hängen also für $n \rightarrow \infty$ gar nicht mehr vom konkreten Wigner-Ensemble ab! Dieser Umstand wird gemeinhin mit dem (etwas schillernden) Begriff „Universalität“ beschrieben. Um für ein $s \in \mathbb{R}$ zu zeigen, dass die Folge $(F_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, reicht es nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz und mit der Darstellung von F_n nach Satz 10,

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{n,s}(k)}{k!}, \quad (107)$$

Folgendes nachzuweisen:

- (i) $(E_{n,s}(k))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert für alle $k \in \mathbb{N}$.
- (ii) Es gibt eine Konstante $C(s)$, so dass $E_{n,s}(k) \leq C(s)^k$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 15 liefert die Aussage (ii). Es bleibt die in Aussage (i) geforderte Konvergenz zu zeigen.

Satz* 20. Für alle Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter $0 < \alpha < 1/48$, konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Tracy-Widom-Verteilung.

Beweis. Sei $s \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass jede Teilfolge von $(F_n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge besitzt, die gegen $F_{\text{TW}}(s)$ konvergiert (dann konvergiert auch $F_n(s)$ gegen $F_{\text{TW}}(s)$).

Wir definieren die Menge

$$Y := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times (\mathbb{Q} \cap B_{k-\frac{1}{2}}(k))^k \times \{0, 1\}^k \quad (108)$$

und für $(k, t, \delta) \in Y$

$$X_n(k, t, \delta) := x_{n,k}(2 \lfloor tn^{2/3} \rfloor + \delta). \quad (109)$$

Weil Y abzählbar ist gibt es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \rightarrow Y$. Durch die streng monoton wachsende Abbildung $n^{(0)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sei eine beliebige Teilfolge $(F_{n_i^{(0)}})_{i \in \mathbb{N}}$ vorgegeben. Nach Vermutung 5(ii) lässt sich rekursiv für alle $j \in \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung $n^{(j)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ finden, so dass für das Tripel $\phi(j) =: (k, t, \delta) \in Y$ und $n^{(j)} := n^{(j-1)} \circ n^{(j)}$ die Folge $(X_{n_i^{(j)}}(k, t, \delta))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert die aus diesen Folgen konstruierte Diagonalfolge $(X_{n_i^{(j)}}(k, t, \delta))_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $(k, t, \delta) \in Y$.

Man beachte, dass der Grenzwert dieser Diagonalfolge wegen (106) nicht vom betrachteten Wigner-Ensemble abhängt.

Mit Korollar 18 folgt aus 104

$$\mathbb{E} S_{n,k,t} = \sum_{m=1}^k \frac{Z(k,m)}{2^m} \sum_{\delta \in \{0,1\}^m} \sum_{\substack{m\text{-Partitionen} \\ \{Q_1, \dots, Q_m\} \text{ von } [k]}} X_n(m, t_{Q_j}, \delta) + O(n^{-1/3}). \quad (110)$$

Nach (110) konvergiert dann die Folge $(\mathbb{E} S_{n_i^{(j)},k,t})_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $(k, t) \in Y'$ mit

$$Y' := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{k\} \times (\mathbb{Q} \cap B_{\frac{1}{2}}(1))^k. \quad (111)$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ fest aber beliebig. Nach Lemma 16 konvergiert die Folge der beidseitigen Laplace-Transformierten $(\tilde{\mu}_{n_l^{(l)},k,1}(t))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $t \in (\mathbb{Q} \cap B_{\frac{1}{2}}(0))^k$. Aus Satz 74 folgt dann, dass die Folge $(\mu_{n_l^{(l)},k,1})_{l \in \mathbb{N}}$ schwach konvergiert gegen ein endliches Maß ν_k .

Nach [28] (Satz 17.D.4) folgt aus der schwachen Konvergenz, dass für jede beschränkte messbare Funktion $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, die außerhalb einer ν_k -Nullmenge stetig ist, gilt:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} g d\mu_{n_l^{(l)},k,1} = \int_{\mathbb{R}^k} g d\nu_k \quad (112)$$

Sei $H_s := (s, \infty)^k$. Dann ist $g_{k,s,1}$, siehe (54), stetig in $\mathbb{R}^k \setminus \partial H_s$. Da $\mathbb{R}^k = \biguplus_{s \in \mathbb{R}} \partial H_s$ gilt, gibt es eine abzählbare Menge $U_k \subset \mathbb{R}$ mit $\nu_k(\partial H_s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus U_k$. Für diese s gilt wegen Lemma 14 und (112), dass die Folge $(E_{n_l^{(l)},s}(k))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Mit $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ gilt folglich für alle $s \in \mathbb{R} \setminus U$ und alle $k \in \mathbb{N}$, dass die Folge $(E_{n_l^{(l)},s}(k))_{l \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Wegen

$$F_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{n,s}(k)}{k!} \quad (113)$$

konvergiert nach (58) auch die Folge $(F_{n_l^{(l)}}(s))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus U$. Mit Beispiel 9 folgt

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F_{n_l^{(l)}}(s) = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{F}_{n_l^{(l)},\text{GOE}}(s) = F_{\text{TW}}(s) \quad (114)$$

für alle $s \in \mathbb{R} \setminus U$ und weil F_{TW} stetig ist, gilt sogar

$$\lim_{l \rightarrow \infty} F_{n_l^{(l)}}(s) = F_{\text{TW}}(s) \quad (115)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Schließlich gilt damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(s) = F_{\text{TW}}(s) \quad (116)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. □

Satz* 21. *Für alle Wigner-Ensemble erster Art zum Parameter $q > 96$ konvergiert $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Tracy-Widom-Verteilung.*

Beweis. Wir wählen ein α mit $2/q < \alpha < 1/48$ und verwenden nacheinander die Propositionen 6, 7, 8 und Satz 20. □

II Spuren von Matrixpotenzen

II.1 Pfadnomenklatur

Für die in dieser Arbeit auftretende Kombinatorik vereinbaren wir einige Sprechweisen und Notationen: Für eine Menge V und $p \in \mathbb{N}_0$ heißt eine Abbildung $\gamma : \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow V$ ein Pfad auf V . Wir nennen die Elemente von V Vertices oder Ecken, die Elemente von $\{\{i, j\} \mid i, j \in V\}$ Kanten und die Elemente von $V \times V$ gerichtete Kanten. Einelementige Kanten heißen Schlingen. Wir interpretieren $t = 0, 1, \dots, p$ als diskrete Zeitpunkte und fassen alle Zeitpunkte außer 0 in der Menge $\mathfrak{T}^\gamma := \{1, 2, \dots, p\}$ zusammen; $\gamma(0)$ heißt Startpunkt. Wir nennen $p^\gamma := p$ die Länge des Pfades und im Fall $\gamma(0) = \gamma(p)$ heißt der Pfad geschlossen. Für $t \in \mathfrak{T}^\gamma$ bezeichne $s_t^\gamma := (\gamma(t-1), \gamma(t))$ den Schritt zum Zeitpunkt t entlang der Kante $e_t^\gamma := \{\gamma(t-1), \gamma(t)\}$. Wir setzen noch $-s_t^\gamma := (\gamma(t), \gamma(t-1))$. Es seien

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^\gamma &:= \{ \gamma(t) \mid t = 0, 1, \dots, p \}, \\ \mathcal{E}^\gamma &:= \{ e_t^\gamma \mid t = 1, 2, \dots, p \}, \end{aligned} \quad (117)$$

vgl. (10), die Menge der Vertices bzw. Kanten von γ . Ein Schritt s_t^γ mit $\gamma(t-1) = \gamma(t)$ ist ein Schritt entlang einer Schlinge und heißt Nullschritt. Wir setzen

$$\mathcal{L}^\gamma := \{ t \mid \gamma(t-1) = \gamma(t) \} \quad (118)$$

Für alle Teilmengen von Zeitpunkten, die mit einem Frakturbuchstaben bezeichnet sind, etwa $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}^\gamma$, verwenden wir folgende Notationen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(t) &= \{ \tau \mid \tau \leq t \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}_a(j) &= \{ \tau \mid \gamma(\tau) = j \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}_d(j) &= \{ \tau \mid \gamma(\tau-1) = j \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}_a(j, t) &= \{ \tau \mid \tau \leq t \text{ und } \gamma(\tau) = j \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}_d(j, t) &= \{ \tau \mid \tau \leq t \text{ und } \gamma(\tau-1) = j \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}(i, j) &= \{ \tau \mid s_\tau^\gamma = (i, j) \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}(i, j, t) &= \{ \tau \mid \tau \leq t \text{ und } s_\tau^\gamma = (i, j) \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}(\{i, j\}) &= \{ \tau \mid e_\tau^\gamma = \{i, j\} \} \cap \mathfrak{A} \\ \mathfrak{A}(\{i, j\}, t) &= \{ \tau \mid \tau \leq t \text{ und } e_\tau^\gamma = \{i, j\} \} \cap \mathfrak{A} \end{aligned} \quad (119)$$

Die Kardinalitäten dieser Mengen seien mit dem entsprechenden Antiquabuchstaben bezeichnet. Es ist demnach z. B. $T^\gamma(\{i, j\}) = |\mathfrak{T}^\gamma(\{i, j\})|$, vgl. (11).

Bemerkung 22. Die Indices a und d sollen andeuten, dass Zeitpunkte gemeint sind, zu denen der Pfad in einem Vertex ankommt bzw. ihn verlässt. So sollte man beispielsweise $\mathfrak{A}_a^\gamma(j)$ lesen als die Menge aller Zeitpunkte in \mathfrak{T}^γ , zu denen der Pfad γ im Vertex j ankommt. Es ist $\mathfrak{A}_d^\gamma(i, t) \cap \mathfrak{A}_a^\gamma(j, t) = \mathfrak{T}^\gamma(i, j, t)$ und der Durchschnitt $\mathfrak{A}_a^\gamma(j, t) \cap \mathfrak{A}_d^\gamma(j, t) = \mathfrak{T}^\gamma(j, j, t)$ enthält die Zeitpunkte der Nullschritte im Vertex j bis zur Zeit t . In einem Nullschritt in j verlässt der Pfad also den Vertex j und gleichzeitig kommt er in j an. Für alle Vertices j

und Zeitpunkte t gilt

$$T_a^\gamma(j, t) - T_d^\gamma(j, t) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \gamma(0) = j \neq \gamma(t), \\ 0, & \text{falls } \gamma(0) = j = \gamma(t) \text{ oder } \gamma(0) \neq j \neq \gamma(t), \\ 1, & \text{falls } \gamma(0) \neq j = \gamma(t), \end{cases} \quad (120)$$

weil sich für einen Pfad γ Ankommen im Vertex j und Verlassen von j stets abwechseln oder beides zugleich geschieht (Nullschritte). Mit Ausnahme des Startpunktes kommt der Pfad in jedem anderen Vertex zuerst an bevor er ihn verlassen kann. Insbesondere gilt offenbar für alle j und t

$$|T_a^\gamma(j, t) - T_d^\gamma(j, t)| \leq 1. \quad (121)$$

Der Pfad γ heißt gerade bezüglich $\{i, j\}$, falls $T^\gamma(\{i, j\})$ gerade ist. Er heißt gerade, wenn er bezüglich jeder Kante gerade ist. Wir definieren

$$q^\gamma := |\{ \{i, j\} \mid \gamma \text{ ist nicht gerade bzgl. } \{i, j\} \}|, \quad (122)$$

um ein Maß für die (Un-)Geradheit eines Pfades zu haben. Für alle Pfade γ ist $q^\gamma \leq p^\gamma$. Ferner ist q^γ genau dann gerade, wenn p^γ gerade ist. Für gerade Pfade ist $q^\gamma = 0$.

Gelegentlich sollen neue Pfade durch Einschränken des Definitionsbereichs konstruiert werden. Dazu führen wir folgende Notationen ein: Für einen Pfad γ und Zeitpunkte $t_1 \leq t_2$ bezeichne $\gamma_{[t_1, t_2]}$ den Pfad der Länge $t_2 - t_1$, gegeben durch

$$\gamma_{[t_1, t_2]}(t) = \gamma(t_1 + t). \quad (123)$$

Gilt zusätzlich $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, so bezeichne $\gamma_{[[t_1, t_2]]}$ den Pfad der Länge $p^\gamma - (t_2 - t_1)$, gegeben durch

$$\gamma_{[[t_1, t_2]]}(t) = \begin{cases} \gamma(t), & \text{falls } t \leq t_1, \\ \gamma(t + t_2 - t_1), & \text{falls } t > t_1. \end{cases} \quad (124)$$

Wir sagen dann auch, der Pfad $\gamma_{[[t_1, t_2]]}$ entsteht aus γ durch Entfernen der Schritte $s_{t_1+1}^\gamma, s_{t_1+2}^\gamma, \dots, s_{t_2}^\gamma$. Gibt es in obiger Situation zwei Zeitpunkte $t_3 \leq t_4$ mit $\gamma(t_3) = \gamma(t_4)$ und $t_2 \leq t_3$, so schreiben wir

$$\gamma_{[[t_1, t_2]], [t_3, t_4]} := (\gamma_{[[t_3, t_4]])_{[[t_1, t_2]]} \quad (125)$$

für den Pfad, aus dem die Intervalle $[t_1, t_2]$ und $[t_3, t_4]$ entfernt wurden. Die Notation wird für weitere Intervalle entsprechend fortgeführt.

Alle Größen, die einem Pfad γ zugeordnet sind, tragen den hochgestellten Index γ . Wenn kein Zweifel besteht, von welchem Pfad die Rede ist, wird er gelegentlich weggelassen.

II.2 Geschlossene Pfade und markierte Zeitpunkte

Es werden geschlossene Pfade und insbesondere gerade geschlossene Pfade eine wichtige Rolle spielen.

Definition 23. Sei γ ein Pfad, i und j seien Vertices und t ein Zeitpunkt. Die Kante $\{i, j\}$ heißt *offen zur Zeit t oder t -offen*, falls $T^\gamma(\{i, j\}, t)$ ungerade ist. Andernfalls heißt sie *geschlossen zur Zeit t oder t -geschlossen*.

Für einen geraden Pfad γ sind alle Kanten geschlossen zur Zeit p^γ . Die Größe

$$\Lambda^\gamma(j, t) := |\{i \mid \{i, j\} \text{ ist } t\text{-offen}\}| \quad (126)$$

zählt die zur Zeit t offenen Kanten am Vertex j . Überraschend einfach gewinnt man nun:

Satz 24. *Gerade Pfade sind geschlossen.*

Beweis. Sei γ ein gerader Pfad der Länge $2s+2r$ mit insgesamt $2r$ Nullschritten. Wir entfernen alle Nullschritte aus γ und bezeichnen den verbleibenden Pfad der Länge $2s$ mit γ' . Dann ist $\mathcal{V}^\gamma = \mathcal{V}^{\gamma'}$, $\gamma(0) = \gamma'(0)$ und $\gamma(2s+2r) = \gamma'(2s)$. Für alle Vertices j mit Ausnahme des Startpunktes gilt, dass $\Lambda^{\gamma'}(j, t)$ ungerade ist für alle t mit $\gamma'(t) = j$, weil γ' keine Nullschritte besitzt (siehe auch Bemerkung 22). Da γ' gerade ist, muss $\Lambda^{\gamma'}(\gamma'(2s), 2s) = 0$ und damit $\gamma'(2s)$ der Startpunkt sein. \square

Bemerkung 25. Die Gedanken von Bemerkung 22 fortführend, ergänzen wir: Sei γ ein Pfad, j ein Vertex und t ein Zeitpunkt mit der Eigenschaft $\Lambda^\gamma(j, t) = 0$. Dann ist $j = \gamma(0)$ genau dann, wenn $j = \gamma(t)$ ist.

Definition 26. Sei γ ein Pfad. Der Zeitpunkt $t \in \mathfrak{T}^\gamma$ heißt *markiert*, falls die Kante e_t t -offen ist. Andernfalls heißt er *unmarkiert*.

Bemerkung 27. Ein Zeitpunkt t ist also markiert, wenn der Schritt s_t der erste, dritte, fünfte usw. entlang der Kante e_t ist. Ist er der zweite, vierte, sechste usw., so ist der Zeitpunkt unmarkiert. Mit anderen Worten: An markierten Zeitpunkten werden Kanten geöffnet, an unmarkierten werden sie geschlossen. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^\gamma &:= \{t \mid t \text{ ist markiert}\}, \\ \mathfrak{U}^\gamma &:= \{t \mid t \text{ ist unmarkiert}\}. \end{aligned} \quad (127)$$

Man könnte in Versuchung geraten, den Zeitpunkt 0 künstlich zu den markierten Zeitpunkten zu zählen, um zu erreichen, dass für alle Vertices j , eines Pfades γ , ohne den Startpunkt ausnehmen zu müssen, gilt: $\min\{t \mid \gamma(t) = j\}$ ist markiert. Wir wollen jedoch dieser Versuchung widerstehen und betonen stattdessen lieber den besonderen Charakter des Startpunktes, der sich in vielen Situationen etwas anders verhält als die übrigen Vertices und deshalb einer gesonderten Behandlung bedarf. *Der Zeitpunkt 0 ist also weder markiert noch unmarkiert.*

Alle Begrifflichkeiten, die Zeitpunkte charakterisieren, werden genauso für die Schritte eines Pfades verwendet. So ist etwa der Schritt s_t markiert genau dann, wenn t es ist.

Es ist $U^\gamma(t) \leq M^\gamma(t)$, weil sogar kantenweise $U^\gamma(\{i, j\}, t) \leq M^\gamma(\{i, j\}, t)$ gilt. Für gerade Pfade der Länge $2s$ gibt es genau s markierte und s unmarkierte

Zeitpunkte. Für alle Pfade γ gilt

$$\begin{aligned} p^\gamma &= M^\gamma + U^\gamma, & \text{bzw.} & & M^\gamma &= (p^\gamma + q^\gamma)/2, \\ q^\gamma &= M^\gamma - U^\gamma, & & & U^\gamma &= (p^\gamma - q^\gamma)/2. \end{aligned} \quad (128)$$

Die Zahl der ungeraden Kanten, $q^\gamma = M^\gamma - U^\gamma$, ist zugleich die Zahl der offenen Kanten zur Zeit p^γ . Mehr Detailinformation liefert die folgende Proposition. Zuvor setzen wir noch:

$$\Lambda_\ell^\gamma(j, t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{j\} \text{ } t\text{-offen,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (129)$$

Proposition 28. *Für alle Pfade γ , Vertices j und Zeitpunkte t gilt:*

- (i) $U_d^\gamma(j, t) \leq M_d^\gamma(j, t)$,
- (ii) $U_a^\gamma(j, t) \leq M_a^\gamma(j, t)$,
- (iii) $\Lambda^\gamma(\gamma(t), t) \leq 2M_a^\gamma(\gamma(t), t) \leq 2M_d^\gamma(\gamma(t), t)$.

Etwas spezieller gilt für geschlossene Pfade

- (iv) $M_a^\gamma(j) - U_d^\gamma(j) = (\Lambda^\gamma(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell^\gamma(j, p^\gamma))/2$,
- (v) $M_d^\gamma(j) - U_a^\gamma(j) = (\Lambda^\gamma(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell^\gamma(j, p^\gamma))/2$,

d. h. $\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma)$ ist stets gerade. Ist γ zusätzlich gerade bezüglich aller Kanten in j , ist also $\Lambda^\gamma(j, p^\gamma) = 0$, so gilt

- (vi) $M_a^\gamma(j) = U_d^\gamma(j)$,
- (vii) $M_d^\gamma(j) = U_a^\gamma(j)$.

Diese beiden Gleichungen gelten genau dann für alle Vertices j , wenn γ ein gerader Pfad ist.

Beweis. Die Differenz der markierten und unmarkierten Schritte in einem Vertex j ist gerade die Zahl der offenen Kanten in j , wobei Schlingen doppelt gezählt werden:

$$(M_a(j, t) + M_d(j, t)) - (U_a(j, t) + U_d(j, t)) = \Lambda(j, t) + \Lambda_\ell(j, t). \quad (130)$$

Nach Bemerkung 22 gilt für die Differenz der in j ankommenden und der j verlassenden Schritte

$$(M_a(j, t) + U_a(j, t)) - (M_d(j, t) + U_d(j, t)) = \varepsilon, \quad (131)$$

mit einem $|\varepsilon| \leq 1$. Addieren von (130) und (131) führt auf

$$2(M_a(j, t) - U_d(j, t)) = \Lambda(j, t) + \Lambda_\ell(j, t) + \varepsilon. \quad (132)$$

Für $j = \gamma(t)$ ist $\varepsilon \geq 0$, siehe Bemerkung 22, und damit $\Lambda(\gamma(t), t) \leq 2M_a(\gamma(t), t)$. Subtrahieren wir (131) von (130), so liefert das

$$2(M_d(j, t) - U_a(j, t)) = \Lambda(j, t) + \Lambda_\ell(j, t) - \varepsilon. \quad (133)$$

Wir erhalten aus (132) und (133) wegen $\Lambda(j, t) + \Lambda_\ell(j, t) \geq 0$ die Abschätzungen

$$M_a(j, t) - U_d(j, t) \geq \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad M_d(j, t) - U_a(j, t) \geq -\varepsilon/2 \quad (134)$$

und wegen der Ganzzahligkeit von $M_a(j, t)$ und $U_d(j, t)$ bzw. $M_d(j, t)$ und $U_a(j, t)$ ergibt sich schließlich $M_a(j, t) \geq U_d(j, t)$ und $M_d(j, t) \geq U_a(j, t)$.

Zum Zeitpunkt $t = p^\gamma$ ist für geschlossene Pfade $\varepsilon = 0$, weil geschlossene Pfade am Ende jeden Vertex genauso oft verlassen haben, wie sie ihn angelaufen haben. Dann folgt aus (132) und (133) sofort

$$M_a(j) - U_d(j) = (\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma))/2 = M_d(j) - U_a(j) \quad (135)$$

Der Zusatz für gerade Pfade ergibt sich aus $0 \leq \Lambda_\ell(j, p^\gamma) \leq \Lambda(j, p^\gamma) = 0$. \square

Die nachfolgende Definition von Sinai und Soshnikov [21] ist *das* zentrale Ordnungsprinzip für die Kombinatorik.

Definition 29. Seien γ ein Pfad und j ein Vertex. Dann heißt $M_a^\gamma(j)$ die **O r d n u n g v o n j** . Jeder Pfad γ induziert eine disjunkte Zerlegung der Vertexmenge, indem Vertices gleicher Ordnung zusammengefasst werden. Wir definieren für $k \geq 0$

$$N_k^\gamma := \{j \mid M_a^\gamma(j) = k\} \quad \text{und} \quad n_k^\gamma := |N_k^\gamma|. \quad (136)$$

Die Folge $(n_0^\gamma, n_1^\gamma, \dots)$ heißt der **T y p v o n γ** .

Unmittelbar erhalten wir:

Proposition 30. *Sei γ ein Pfad auf $\{1, 2, \dots, n\}$. Es gelten:*

$$(i) \quad \mathcal{V}^\gamma = \bigcup_{k \geq 1} N_k^\gamma \cup \{\gamma(0)\},$$

$$(ii) \quad \sum_{k \geq 0} n_k^\gamma = n,$$

$$(iii) \quad \sum_{k \geq 1} k n_k^\gamma = \frac{p^\gamma + q^\gamma}{2}.$$

Beweis. Die Identitäten (i) und (ii) ergeben sich direkt aus Definition 29. Da es genau $(p + q)/2$ markierte Zeitpunkte gibt, siehe Bemerkung 27, gilt

$$\frac{p + q}{2} = M = \sum_{j \in \mathcal{V}^\gamma} M_a(j) = \sum_{k \geq 1} \sum_{j \in N_k} M_a(j) = \sum_{k \geq 1} \sum_{j \in N_k} k = \sum_{k \geq 1} k n_k. \quad (137)$$

Das ist Gleichung (iii). \square

In Anlehnung an Definition 29 wollen wir $M(\{i, j\})$ die Ordnung der Kante $\{i, j\}$ nennen. Es gilt stets $M(i, j) \leq M_a(j)$ und damit $M(\{i, j\}) \leq M(i, j) + M(j, i) \leq M_a(i) + M_a(j)$.⁸

⁸Im Fall $i \neq j$ gilt natürlich sogar $M(\{i, j\}) = M(i, j) + M(j, i)$.

II.3 Offene Zeitpunkte und Selbstschnitte

Die folgenden Definitionen gehen auf Sinai und Soshnikov [21, 22] zurück.

Definition 31. Sei γ ein Pfad. Ein markierter Zeitpunkt t heißt *offen*, falls $\Lambda^\gamma(\gamma(t), t) > 1$ ist. Ein unmarkierter Zeitpunkt t heißt *offen*, falls $\Lambda^\gamma(\gamma(t-1), t-1) > 1$ ist. Wir definieren

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^\gamma &:= \{t \in \mathfrak{M}^\gamma \mid t \text{ ist offen}\}, \\ \mathfrak{R}^\gamma &:= \{t \in \mathfrak{U}^\gamma \mid t \text{ ist offen}\}.\end{aligned}\tag{138}$$

Definition 32. Sei γ ein Pfad und j ein Vertex. Ein markierter Zeitpunkt t mit $\gamma(t) = j$ heißt *Selbstschnitt in j (von γ)*, falls ein markiertes $\tau < t$ mit $\gamma(\tau) = j$ existiert. Wir definieren

$$\mathfrak{S}^\gamma := \{t \mid t \text{ ist Selbstschnitt in } \gamma(t)\}.\tag{139}$$

Für einen Vertex j sind alle Zeitpunkte $t \in \mathfrak{M}_a(j) \setminus \min \mathfrak{M}_a(j)$ Selbstschnitte, also alle markierten Zeitpunkte, an denen der Pfad den Vertex j erreicht, bis auf den ersten. Insgesamt ist die Menge der markierten Zeitpunkte somit disjunkt zerlegt in die Selbstschnitte einerseits und die Zeitpunkte, an denen Vertices zum ersten Mal markiert angelaufen werden andererseits. Die Zahl der Selbstschnitte ist folglich

$$S^\gamma = \sum_{k \geq 2} (k-1)n_k^\gamma.\tag{140}$$

Wie bereits angedeutet, verhält sich der Startpunkt eines Pfades gelegentlich anders als seine übrigen Vertices, und zwar insbesondere dann, wenn er nicht die Ordnung null hat. Wir führen dafür ein:

$$\delta_k^\gamma := \begin{cases} 1, & \text{falls } M_a^\gamma(\gamma(0)) \geq k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}\tag{141}$$

Ist ein offener markierter Zeitpunkt t nicht Selbstschnitt, so ist $\gamma(t) = i_0$ der Startpunkt und $t = \min \mathfrak{M}_a(i_0)$. Mit höchstens einer Ausnahme sind also offene markierte Zeitpunkte bereits Selbstschnitte, d. h. es gilt:

$$R^\gamma \leq \delta_1 + |\mathfrak{S}^\gamma \cap \mathfrak{R}^\gamma|\tag{142}$$

Wir notieren im Anschluss an die Bemerkungen 22 und 25:

Bemerkung 33. Außer im Startpunkt sind markierte Nullschritte stets offene Selbstschnitte. Im Startpunkt hingegen sind ankommende markierte Schritte, die keine Nullschritte sind, stets offen. Für $j \neq i_0$ gilt also:

$$\mathfrak{L}_a(j) \cap \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{R}_a(j) \cap \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{R}_a(i_0)\tag{143}$$

Ein unmarkierter Schritt s_{t+1} , der unmittelbar auf einen nicht offenen markierten Schritt folgt, ist festgelegt durch $s_{t+1} = -s_t$. Folgt hingegen auf einen offenen markierten Zeitpunkt ein unmarkierter Schritt, so ist dieser unmarkierte Schritt offen. Ziel dieses Abschnitts ist es nun zu zeigen, dass die Zahl der offenen unmarkierten Zeitpunkte im Wesentlichen durch die Zahl der offenen markierten Zeitpunkte beschränkt ist. Damit es offene unmarkierte Zeitpunkte und damit

Vertices, an denen mehrere offene Kanten zugleich hängen, geben kann, müssen diese Kanten irgenwann geöffnet worden sein. Das passiert gerade bei offenen markierten Zeitpunkten. Etwas allgemeiner gilt dieser Zusammenhang sogar punktweise. Im Anschluss an Proposition 28 formulieren wir:

Proposition 34. *Seien γ ein geschlossener Pfad und $j \in \mathcal{V}^\gamma$ ein Vertex. Setzen wir $i_0 := \gamma(0)$, dann gilt $K_d^\gamma(j) \leq (1 + \delta_{j,i_0})R_d^\gamma(j)$ und folglich insbesondere $K^\gamma \leq R^\gamma + R_a^\gamma(i_0) \leq 2R^\gamma$.⁹*

Beweis. Sei $p^\gamma > 0$, andernfalls ist die Behauptung trivial.

Fall 1: $j \neq i_0$. Zur Abkürzung setzen wir

$$\begin{aligned} A &:= \mathfrak{M}_a(j) \setminus \mathfrak{R}_a(j), \\ B &:= \mathfrak{U}_d(j) \setminus \mathfrak{K}_d(j). \end{aligned} \tag{144}$$

Es enthält A all jene Zeitpunkte, an denen der Pfad markiert in j ankommt während alle Kanten in j geschlossen sind. Die Menge B fasst die nicht offenen unmarkierten Zeitpunkte von j aus zusammen. Es gelten

- (i) $t \in A \Rightarrow [\Lambda(j, t-1) = 0 \text{ und } \gamma(t-1) \neq j]$ (siehe Bemerkung 25).
- (ii) $[\gamma(t-1) = j \text{ und } \Lambda(j, t) = 0] \Rightarrow [\Lambda(j, t-1) = 1 \text{ und } t \in B]$.

Wir zeigen

$$|A| \leq |B| + (\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma))/2, \tag{145}$$

wobei wir gleich $A \neq \emptyset$ annehmen, denn im Fall $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen.

Sei zunächst $\Lambda(j, p^\gamma) = 0$. Wir definieren auf A die Abbildung b durch

$$a \mapsto b(a) := \begin{cases} \max \mathfrak{T}_d(j), & \text{falls } a = \min \mathfrak{T}_a(j), \\ \max \mathfrak{T}_d(j, a-1), & \text{sonst.} \end{cases} \tag{146}$$

und zeigen: $b(A) \subseteq B$ und $b : A \rightarrow B$ ist injektiv. Wir bemerken noch, dass b wohldefiniert ist: Im Fall $a = \min \mathfrak{T}_a(j)$ folgt das aus der vorausgesetzten Geschlossenheit von γ , es ist $\mathfrak{T}_d(j) \neq \emptyset$, im Fall $a > \min \mathfrak{T}_a(j)$ folgt mit (i) $\gamma(a-1) \neq j$ und damit $\mathfrak{T}_d(j, a-1) \neq \emptyset$. Nach Konstruktion von $b(a)$ ist $\gamma(b(a)-1) = j$. Nach (ii) bleibt noch $\Lambda(j, b(a)) = 0$ zu zeigen, um nachzuweisen, dass $b(a) \in B$ ist. Das folgt im Fall $a = \min \mathfrak{T}_a(j)$ unmittelbar aus $\Lambda(j, p^\gamma) = 0$. Falls $a > \min \mathfrak{T}_a(j)$ ist, folgern wir aus $\gamma(a-1) \neq j$ und der Definition von $b(a)$, dass $\gamma(t) \neq j$ ist für alle $b(a) \leq t \leq a-1$. Demzufolge ist $\Lambda(j, b(a)) = \Lambda(j, a-1) = 0$. Damit haben wir $b(a) \in B$ gezeigt. Seien $a_1 < \dots < a_n$ die Zeitpunkte aus A . Es ist $b(a_1) \geq a_n$ und $a_{k-1} \leq b(a_k) \leq a_k - 1$ für $2 \leq k \leq n$. Folglich ist b injektiv und wir haben $|A| \leq |B|$.

Sei nun $\Lambda(j, p^\gamma) > 0$. Mit Proposition 28 folgt $\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma) \geq 2$. Wir machen die Zuordnung $a \mapsto b(a)$ nun genauso wie zuvor falls $a \neq \min \mathfrak{T}_a(j)$ ist. Dann haben wir

$$|A| \leq |B| + 1 \leq |B| + (\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma))/2. \tag{147}$$

⁹Die Abschätzung ist optimal. Für ein beliebiges $r \in \mathbb{N}$ kann man einen Pfad γ mit $K^\gamma = 2R^\gamma = 2r$ konstruieren (man durchlaufe etwa den Pfad $(1, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 1)$ r mal).

Zusammenfassend erhalten wir damit und mit Proposition 28 die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned} K_d(j) &= U_d(j) - |B| \\ &\leq U_d(j) + (\Lambda(j, p^\gamma) + \Lambda_\ell(j, p^\gamma))/2 - |A| = M_a(j) - |A| = R_a(j). \end{aligned} \quad (148)$$

Fall 2: $j = i_0$. Als erstes stellen wir fest, dass $t \in \mathfrak{M}_a(i_0)$ ein offener markierter Zeitpunkt ist, sofern es sich nicht um einen Nullschritt handelt, siehe Bemerkung 33. Es ist also $\mathfrak{M}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L} = \mathfrak{R}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L}$. Wenn wir aus γ alle Nullschritte entfernen, ergibt sich mit Proposition 28 $|\mathfrak{M}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L}| \geq |\mathfrak{U}_d(i_0) \setminus \mathfrak{L}|$ und damit

$$|\mathfrak{K}_d(i_0) \setminus \mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{U}_d(i_0) \setminus \mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{M}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L}| = |\mathfrak{R}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L}| \leq R_a(i_0). \quad (149)$$

Wir müssen nur noch $|\mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}|$ abschätzen. Dazu ordnen wir jedem Zeitpunkt $t \in \mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}$ einen Zeitpunkt $r(t) \in \mathfrak{R}_a(i_0)$ zu. Sei also $t \in \mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}$. Dann ist $t_0 := \max \mathfrak{T}(\{i_0\}, t-1) \in \mathfrak{M}_a(i_0)$ und es ist entweder $t_0 \in \mathfrak{R}_a(i_0)$ oder $\Lambda(i_0, t_0) = 1$. Im ersten Fall setzen wir einfach $r(t) := t_0$. Im zweiten Fall folgt aus $t \in \mathfrak{K}_d(i_0)$ aber auch $\Lambda(i_0, t-1) \geq 2$. Angenommen $\mathfrak{M}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1] = \emptyset$. Mit Bemerkung 22 folgt wegen $\gamma(t_0) = \gamma(t-1) = i_0$

$$\begin{aligned} 0 &= T_a(i_0, t-1) - T_d(i_0, t-1) \\ &= T_a(i_0, t_0) + |\mathfrak{T}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| - (T_d(i_0, t_0) + |\mathfrak{T}_d(i_0) \cap [t_0+1, t-1]|) \\ &= |\mathfrak{T}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| - |\mathfrak{T}_d(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| \end{aligned} \quad (150)$$

und dann mit der gerade gemachten Annahme

$$\begin{aligned} |\mathfrak{U}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| &= |\mathfrak{T}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| \\ &= |\mathfrak{T}_d(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| \geq |\mathfrak{M}_d(i_0) \cap [t_0+1, t-1]|. \end{aligned} \quad (151)$$

Wir erhalten den Widerspruch

$$\begin{aligned} 2 &\leq \Lambda(i_0, t-1) = \Lambda(i_0, t_0) + |\mathfrak{M}_d(i_0) \cap [t_0+1, t-1]| \\ &\quad - |(\mathfrak{U}_a(i_0) \cup \mathfrak{U}_d(i_0)) \cap [t_0+1, t-1]| \quad (152) \\ &\leq \Lambda(i_0, t_0) = 1. \end{aligned}$$

Wir setzen $r(t) := \min \mathfrak{M}_a(i_0) \cap [t_0+1, t-1]$ und es ist $r(t) \in \mathfrak{M}_a(i_0) \setminus \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{R}_a(i_0)$, siehe Bemerkung 33. Seien $t_1 < \dots < t_n$ die Zeitpunkte in $\mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}$. Es ist $r(t_1) < t_1$ und $t_{k-1} < r(t_k) < t_k$ für $2 \leq k \leq n$. Damit ist die Abbildung $r : \mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{R}_a(i_0)$ injektiv. Folglich gilt $|\mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}| \leq R_a(i_0)$ und wir erhalten

$$|\mathfrak{K}_d(i_0)| = |\mathfrak{K}_d(i_0) \setminus \mathfrak{L}| + |\mathfrak{K}_d(i_0) \cap \mathfrak{L}| \leq 2R_a(i_0). \quad (153)$$

Die Fälle $j \neq i_0$ und $j = i_0$ zusammengenommen ergeben die Behauptung. \square

II.4 Beiträge von Pfaden auf Wigner-Matrizen

Für einen Pfad γ teilen wir die Kantenmenge \mathcal{E}^γ auf in (vgl. (13))

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^\gamma &= \{ \{i, j\} \mid T(\{i, j\}) = 1 \vee (T(\{i, j\}) = 3 \wedge i \neq j) \}, \\ \mathcal{E}_2^\gamma &= \{ \{i, j\} \mid T(\{i, j\}) = 2 \wedge i \neq j \}, \\ \mathcal{E}_3^\gamma &= \{ \{i, j\} \mid T(\{i, j\}) \geq 2 \wedge i = j \}, \\ \mathcal{E}_4^\gamma &= \{ \{i, j\} \mid T(\{i, j\}) \geq 4 \wedge i \neq j \}.\end{aligned}\tag{154}$$

Zur Abkürzung schreiben wir für eine Wigner-Matrix W_n wie in Definition 4 und einen Pfad γ auf $[n]$

$$\xi_\gamma := \prod_{t=1}^{p^\gamma} \xi_{\gamma(t-1), \gamma(t)},\tag{155}$$

vgl. (9). Dann ist $\mathbb{E} \xi_\gamma = \sigma^{p^\gamma} E_1 E_2 E_3 E_4$ mit

$$E_k = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_k^\gamma} \mathbb{E} \left(\frac{\xi_{ij}}{\sigma} \right)^{T(\{i, j\})}, \quad k = 1, 2, 3, 4.\tag{156}$$

Wir schätzen zunächst E_2 ab:

Satz 35. *Sei $v > 0$. Gegeben sei eine Wigner-Matrix W_n wie in Definition 4 und ein Pfad γ auf $[n]$ mit $p^\gamma \leq vn^{2/3}$. Für $n \geq v^{1/\eta}$ gilt $|E_2 - 1| \leq vn^{-\eta}$. Ist insbesondere γ gerade und $\mathcal{E}^\gamma = \mathcal{E}_2^\gamma$, so gilt $\mathbb{E} \xi_\gamma = \sigma^{p^\gamma} (1 + O(vn^{-\eta}))$.*

Beweis. Sei $\{i, j\} \in \mathcal{E}_2$. Aus Bedingung (ii) in Definition 4 folgt

$$1 - \frac{1}{n^{2/3+\eta}} \leq \mathbb{E} \left(\frac{\xi_{ij}}{\sigma} \right)^2 \leq 1 + \frac{1}{n^{2/3+\eta}}\tag{157}$$

und damit wegen $p^\gamma \leq vn^{2/3}$

$$1 - vn^{-\eta} \leq \left(1 - \frac{1}{n^{2/3+\eta}} \right)^{vn^{2/3}} \leq E_2 \leq \left(1 + \frac{1}{n^{2/3+\eta}} \right)^{\frac{v}{2}n^{2/3}} \leq 1 + vn^{-\eta},\tag{158}$$

falls $n \geq v^{1/\eta}$. \square

Um in einer allgemeineren Situation als der von Satz 35 den Beitrag $\mathbb{E} \xi_\gamma$ eines Pfades γ abzuschätzen, wollen wir die markierten Zeitpunkte erfassen, die Schlingen oder Kanten höherer Ordnung erzeugen. Für eine Kante $\{i, j\}$, $i \neq j$ sind das genau die $M(\{i, j\}) - 1$ markierten Zeitpunkte t mit $e_t = \{i, j\}$ und $t \neq \min \mathfrak{M}(\{i, j\})$. Dabei soll noch die Vertexordnung von $\gamma(t)$ berücksichtigt werden. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}'_k{}^\gamma &:= \{ t \in \mathfrak{M}^\gamma \cap \mathfrak{L}^\gamma \mid M_a^\gamma(\gamma(t)) = k \}, \\ \mathfrak{m}'_k{}^\gamma &:= \{ t \in \mathfrak{M}^\gamma \setminus \mathfrak{L}^\gamma \mid M_a^\gamma(\gamma(t)) = k, T^\gamma(e_t^\gamma, t) > 1 \}.\end{aligned}\tag{159}$$

Die Menge $\mathfrak{m}'_k{}^\gamma$ enthält alle markierten Zeitpunkte, bei denen der Pfad γ entlang einer schon bestehenden Kante in einem Vertex k -ter Ordnung ankommt. Wir setzen noch

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}_k{}^\gamma &:= \mathfrak{l}'_k{}^\gamma \cap \mathfrak{S}^\gamma, \\ \mathfrak{m}_k{}^\gamma &:= \mathfrak{m}'_k{}^\gamma \cap \mathfrak{S}^\gamma.\end{aligned}\tag{160}$$

Insbesondere ist also $l_1^\gamma = m_1^\gamma = \emptyset$ und folglich $l_1^\gamma = m_1^\gamma = 0$. Wir kürzen ab: $l_*^\gamma := \sum_{k=2}^\omega l_k^\gamma$, $m_*^\gamma := \sum_{k=2}^\omega m_k^\gamma$, $S_\infty^\gamma := \sum_{k>\omega} (k-1)n_k$, wobei $\omega \geq 1$ ein zunächst unbestimmter Parameter sei, dessen Wert erst später, nämlich im Beweis von Satz 67, konkretisiert wird.

Lemma 36. *Für jeden Pfad γ gilt*

$$\sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}^\gamma} (M^\gamma(\{i,j\}) - (1 - \delta_{ij})) = \sum_{k \geq 1} (l'_k + m'_k) \leq \delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + S_\infty^\gamma, \quad (161)$$

siehe (141).

Beweis. Unmittelbar aus (159) folgen

$$\bigcup_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}: \\ i=j}} \mathfrak{M}(\{i,j\}) = \bigcup_{k \geq 1} l'_k, \quad \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}: \\ i=j}} M(\{i,j\}) = \sum_{k \geq 1} l'_k \quad (162)$$

und ebenso

$$\bigcup_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}: \\ i \neq j}} \mathfrak{M}(\{i,j\}) \setminus \{\min \mathfrak{M}(\{i,j\})\} = \bigcup_{k \geq 1} m'_k, \quad \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}: \\ i \neq j}} (M(\{i,j\}) - 1) = \sum_{k \geq 1} m'_k. \quad (163)$$

Es verbleibt noch die behauptete Ungleichung zu zeigen. Sei i_0 der Startpunkt von γ . Alle Zeitpunkte $t \in \bigcup_{k \geq 1} (l'_k \cup m'_k)$, $t \neq \min \mathfrak{M}_a(i_0)$, sind Selbstschnitte. Es ist also

$$\sum_{k \geq 1} (l'_k + m'_k) \leq \delta_1 + \sum_{k \geq 2} (l_k + m_k). \quad (164)$$

Weil es in allen Vertices der Ordnung k genau $k-1$ Selbstschnitte gibt, gilt $l_k + m_k \leq (k-1)n_k$ und damit die Behauptung. \square

Sei γ ein Pfad. Wir definieren:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1^\gamma &:= |\{ \{i,j\} \mid T^\gamma(\{i,j\}) = 1 \wedge i = j \}|, \\ \bar{q}_1^\gamma &:= |\{ \{i,j\} \mid T^\gamma(\{i,j\}) = 1 \wedge i \neq j \}|, \\ \bar{q}_3^\gamma &:= |\{ \{i,j\} \mid T^\gamma(\{i,j\}) = 3 \wedge i \neq j \}|, \\ q_{13}^\gamma &:= \tilde{q}_1^\gamma + 2\bar{q}_1^\gamma + \bar{q}_3^\gamma. \end{aligned} \quad (165)$$

Satz 37. *Sei $v > 0$. Gegeben sei eine Wigner-Matrix W_n mit Einträgen ξ_{ij} wie in Definition 4 und ein Pfad γ auf $[n]$ mit $p^\gamma \leq vn^{2/3}$. Dann gilt für $n \geq v^{1/\eta}$:*

$$|\mathbb{E} \xi_\gamma| \leq 2\sigma^{p^\gamma} n^{4\alpha(\delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + S_\infty^\gamma) - (1/4 + \eta)q_{13}^\gamma} \quad (166)$$

Beweis. Wir schätzen E_1 ab. Aus den Eigenschaften (i) und (iii) in Definition 4 folgt

$$\begin{aligned} |E_1| &= \prod_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}_1: \\ T(\{i,j\}) = 1 \wedge i=j}} \left| \mathbb{E} \left(\frac{\xi_{ij}}{\sigma} \right) \right| \prod_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}_1: \\ T(\{i,j\}) = 1 \wedge i \neq j}} \left| \mathbb{E} \left(\frac{\xi_{ij}}{\sigma} \right) \right| \prod_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{E}_1: \\ T(\{i,j\}) = 3 \wedge i \neq j}} \left| \mathbb{E} \left(\frac{\xi_{ij}}{\sigma} \right) \right|^3 \\ &\leq \left(\frac{1}{n^{1/4+\eta}} \right)^{\tilde{q}_1} \left(\frac{1}{n^{1/2+2\eta}} \right)^{\bar{q}_1} \left(\frac{1}{n^{1/4+\eta}} \right)^{\bar{q}_3} = n^{-(1/4+\eta)q_{13}} \end{aligned} \quad (167)$$

Satz 35 liefert $|E_2| \leq 2$. Aus Eigenschaft (iv) in Definition 4 folgt

$$|E_3| \leq \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_3} n^{\alpha T(\{i,j\})} \leq n^{2\alpha \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_3} M(\{i,j\})} \quad (168)$$

Für $\{i,j\} \in \mathcal{E}_4$ gilt $M(\{i,j\}) \geq 2$ und damit

$$T(\{i,j\}) \leq 2M(\{i,j\}) \leq 4(M(\{i,j\}) - 1). \quad (169)$$

Für E_4 erhalten wir also

$$|E_4| \leq n^{4\alpha \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_4} (M(\{i,j\}) - 1)}. \quad (170)$$

Zusammenfassend haben wir gezeigt

$$|\mathbb{E} \xi_\gamma| = |\sigma^{p^\gamma} E_1 E_2 E_3 E_4| \leq 2\sigma^{p^\gamma} n^{-(1/4+\eta)q_{13}+4\alpha \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\gamma} (M(\{i,j\}) - (1-\delta_{ij}))} \quad (171)$$

und mit Lemma 36 folgt die Behauptung. \square

Nachfolgend, als Korollar zu Lemma 36, der zentrale Satz über die Zahl ungerader Kanten:

Satz 38. *Für jeden Pfad γ gilt*

$$2q^\gamma \leq q_{13}^\gamma + \delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + S_\infty^\gamma. \quad (172)$$

Beweis. Für alle ungeraden Kanten $\{i,j\} \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1$ gilt $M(\{i,j\}) \geq 3 - \delta_{ij}$ und damit $2 \leq M(\{i,j\}) - 1 + \delta_{ij}$. Es ist also

$$\begin{aligned} 2(q - |\mathcal{E}_1|) &\leq \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1} (M(\{i,j\}) - (1 - \delta_{ij})) \\ &\leq \sum_{\{i,j\}: M(\{i,j\}) \geq 2 \wedge i=j} M(\{i,j\}) + \sum_{\{i,j\}: M(\{i,j\}) \geq 3 \wedge i \neq j} (M(\{i,j\}) - 1). \end{aligned} \quad (173)$$

Es ist $|\mathcal{E}_1| = \hat{q}_1 + \bar{q}_1 + \bar{q}_3$. Mit

$$\hat{q}_1 \leq \sum_{\{i,j\}: M(\{i,j\})=1 \wedge i=j} M(\{i,j\}) \quad (174)$$

und

$$\bar{q}_3 \leq \sum_{\{i,j\}: M(\{i,j\})=2 \wedge i \neq j} (M(\{i,j\}) - 1) \quad (175)$$

folgt

$$2q - \hat{q}_1 - 2\bar{q}_1 - \bar{q}_3 \leq \sum_{\{i,j\}: i=j} M(\{i,j\}) + \sum_{\{i,j\}: i \neq j} (M(\{i,j\}) - 1), \quad (176)$$

also

$$2q \leq q_{13} + \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}} (M(\{i,j\}) - (1 - \delta_{ij})) \quad (177)$$

Lemma 36 liefert die Behauptung. \square

Proposition 39. Für jeden Pfad γ mit $\mathcal{E}^\gamma \neq \mathcal{E}_2^\gamma$ ist $q_{13}^\gamma + \delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + S_\infty^\gamma > 0$.

Beweis. Sei $\{i, j\} \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$. Aus $\{i, j\} \in \mathcal{E}_1$ folgt $q_{13} \geq |\mathcal{E}_1| > 0$. Aus $\{i, j\} \in \mathcal{E}_3$ folgt $\sum_{k \geq 1} l'_k \geq |\mathcal{E}_3| > 0$. Aus $\{i, j\} \in \mathcal{E}_4$ folgt $\sum_{k \geq 1} m'_k \geq |\mathcal{E}_4| > 0$. Es ist also $q_{13} + \sum_{k \geq 1} l'_k + m'_k > 0$ und mit der Ungleichung in Lemma 36 folgt die Behauptung. \square

Weiter definieren wir für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{r}_k^\gamma := \{t \in \mathfrak{R}^\gamma \cap \mathfrak{S}^\gamma \setminus \mathfrak{L} \mid M_a^\gamma(\gamma(t)) = k, T^\gamma(e_t^\gamma, t) = 1\} \quad (178)$$

und $r_*^\gamma := \sum_{k=2}^\omega r_k^\gamma$. Insbesondere ist $\mathfrak{r}_1^\gamma = \emptyset$ und somit $r_1^\gamma = 0$. Im Anschluss an Proposition 34 formulieren wir:

Lemma 40. Sei γ ein Pfad und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt:

- (i) $\{t \in \mathfrak{R}^\gamma \cap \mathfrak{S}^\gamma \mid M_a^\gamma(\gamma(t)) = k\} \subseteq \mathfrak{l}_k^\gamma \cup \mathfrak{m}_k^\gamma \cup \mathfrak{r}_k^\gamma$
- (ii) $\sum_{j: M_a^\gamma(j)=k} R_a^\gamma(j) \leq \delta_k^\gamma - \delta_{k+1}^\gamma + l_k^\gamma + m_k^\gamma + r_k^\gamma$

Ist γ zusätzlich geschlossen, so gilt:

- (iii) $\sum_{j: M_a(j) \leq \omega} K_d^\gamma(j) \leq 2(\delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + r_*^\gamma)$
- (iv) $K^\gamma \leq 2(\delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma + r_*^\gamma + S_\infty^\gamma) \leq 2(1 + S^\gamma)$.

Beweis. Zu (i): Der Fall $k = 1$ ist trivial, denn für $t \in \mathfrak{S}$ ist $M_a(\gamma(t)) \geq 2$. Sei also $t \in \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ und $M_a(\gamma(t)) = k \geq 2$. Aus $\gamma(t-1) = \gamma(t)$ folgt $t \in \mathfrak{l}_k$. Sei nun $\gamma(t-1) \neq \gamma(t)$ und $x := T(e_t, t)$. Aus $x > 1$ folgt $t \in \mathfrak{m}_k$, aus $x = 1$ folgt $t \in \mathfrak{r}_k$ und damit die Inklusion (i). Mit den Argumenten, die zu (142) geführt haben, und

$$\delta_k^\gamma - \delta_{k+1}^\gamma := \begin{cases} 1, & \text{falls } M_a^\gamma(\gamma(0)) = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (179)$$

folgt (ii) aus (i). Mit Proposition 34 ergeben sich (iii) und (iv) aus (ii). \square

II.5 Irrfahrten und Dyck-Pfade

Für einen Pfad γ soll die Abfolge markierter und unmarkierter Zeitpunkte festgehalten werden. Diese Idee stammt von Füredi und Komlós [12] und wurde dann von Sinai und Soshnikov [21] aufgegriffen. Zu diesem Zweck definieren wir die Abbildungen $\Theta^\gamma : \mathfrak{T}^\gamma \rightarrow \{-1, 1\}$ und $X^\gamma : \{0, \dots, p^\gamma\} \rightarrow \mathbb{Z}$ vermöge

$$\Theta^\gamma(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } t \text{ markiert,} \\ -1, & \text{falls } t \text{ unmarkiert} \end{cases} \quad \text{und} \quad X^\gamma(t) := \sum_{\tau=1}^t \Theta^\gamma(\tau). \quad (180)$$

Nach Konstruktion und den in Bemerkung 27 gemachten Beobachtungen hat $X := X^\gamma$ mit $p := p^\gamma$ und $q := q^\gamma$ die Eigenschaften

- (i) $X(0) = 0$,

(ii) $|X(t) - X(t-1)| = 1$ für alle $1 \leq t \leq p$.

(iii) $X(p) = q$,

(iv) $X(t) \geq 0$ für alle $0 \leq t \leq p$.

Wir nennen einen Pfad $X : \{0, \dots, p\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit den obigen Eigenschaften (i) und (ii) eine Irrfahrt der Länge p . Gilt zusätzlich (iii), heißt X Irrfahrt vom Typ (p, q) , gilt (iv), so sprechen wir von einer nichtnegativen Irrfahrt. Nichtnegative Irrfahrten vom Typ $(2s, 0)$ heißen Dyck-Pfade der Länge $2s$. Das Buch von Stanley [27] enthält eine umfangreiche Sammlung kombinatorischer Fragestellungen, in denen Dyck-Pfade eine Rolle spielen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p &:= \{ \text{Irrfahrten der Länge } p \}, \\ \mathcal{B}_{p,q} &:= \{ \text{Irrfahrten vom Typ } (p, q) \}, \\ \mathcal{C}_s &:= \{ \text{Dyck-Pfade der Länge } 2s \}, \\ \mathcal{D}_{p,q} &:= \{ \text{nichtnegative Irrfahrten vom Typ } (p, q) \}. \end{aligned} \tag{181}$$

Es ist also $\mathcal{C}_s = \mathcal{D}_{2s,0}$. Für eine Irrfahrt X der Länge p und Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq p$ sei die Einschränkung $X_{(t_1, t_2)} : \{0, 1, \dots, t_2 - t_1\} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch

$$X_{(t_1, t_2)}(t) := X(t + t_1) - X(t_1). \tag{182}$$

Das ist eine Irrfahrt der Länge $t_2 - t_1$. Es ist nützlich, Irrfahrten mit ihren Graphen, $\{(t, X(t)) \mid t = 0, 1, \dots, p\}$, zu identifizieren, um eine geeignete geometrische Vorstellung zu erhalten. Für ein Beispiel siehe Abbildung 1. Dieser Anschauung Rechnung tragend nennen wir $X(t)$ auch die Höhe der Irrfahrt X zur Zeit t . Ferner sei $X_{\max} := \max_t X(t)$.

Festzuhalten ist, dass wir jedem Pfad γ der Länge p einen ebensolangen Pfad $X^\gamma \in \mathcal{D}_{p^\gamma, q^\gamma}$ zuordnen, Für Mengen von Irrfahrten, die mit großen kalligraphischen Buchstaben bezeichnet sind, vereinbaren wir wieder die Konvention, ihre Kardinalitäten mit den entsprechenden großen Antiquabuchstaben zu notieren. Wie viele Irrfahrten vom Typ (p, q) gibt es? Nach insgesamt p Schritten muss der Pfad auf der Höhe q sein, er muss also $(p+q)/2$ -mal steigen und $(p-q)/2$ -mal fallen, folglich ist

$$B_{p,q} = \binom{p}{(p-q)/2}. \tag{183}$$

Wir bestimmen die Anzahl der Dyck-Pfade (siehe [27]):

Satz 41. *Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Die Zahl der Dyck-Pfade der Länge $2s$ ist gegeben durch*

$$C_s = \frac{(2s)!}{(s+1)!s!} = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s}. \tag{184}$$

Beweis. Im Fall $s = 0$ ist die Formel offenbar richtig: $C_0 = 1$. Für $1 \leq k \leq s$ sei $C_s(k) := |\{X \in \mathcal{C}_s \mid X(t) > 0 \text{ für } 1 \leq t \leq 2k-1 \text{ und } X(2k) = 0\}|$ die Zahl der Dyck-Pfade, deren kleinste positive Nullstelle $2k$ ist. Diese Bedingung legt die Schritte $s_1 = (0, 1)$ und $s_{2k} = (1, 0)$ für alle diese Pfade fest, und die Einschränkung $X_{(1, 2k-1)}$ eines solchen Pfades ist ein Dyckpfad der Länge $2k-2$. Die Einschränkung $X_{(2k, 2s)}$, der verbleibende Teil des ursprünglichen Pfades

nach der Nullstelle $2k$, ist einfach ein Dyck-Pfad der Länge $2s - 2k$. Es ergibt sich folglich $C_s(k) = C_{k-1}C_{s-k}$ und somit die Rekursion

$$C_s = \sum_{k=1}^s C_s(k) = \sum_{k=1}^s C_{k-1}C_{s-k}. \quad (185)$$

Die erzeugende Funktion $g(x) := \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s$ der Zahlenfolge C_0, C_1, \dots konvergiert wegen $C_s \leq B_{2s} = 2^{2s}$ wenigstens für $|x| < 1/4$. Die obige Rekursion liefert schließlich die Bestimmungsgleichung

$$g(x)^2 = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s C_k C_{s-k} x^k x^{s-k} = \frac{1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+1} x^{s+1} = \frac{1}{x} (g(x) - 1). \quad (186)$$

Auflösen ergibt für $x \neq 0$ zunächst $g(x) = (1 \pm \sqrt{1 - 4x})/(2x)$, weil aber g um 0 analytisch ist, muss $g(x) = (1 - \sqrt{1 - 4x})/(2x)$ sein. Entwickeln von g in eine Potenzreihe um 0 liefert die Behauptung. \square

Die Zahlen C_s heißen Catalan-Zahlen (siehe z.B. Stanley). Immer wieder wird gebraucht:

Proposition 42. *Für die Catalan-Zahlen C_s gelten die Abschätzungen*

$$(i) \quad \frac{1}{4} \frac{4^s}{s^{3/2}} \leq C_s \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^s}{s^{3/2}}, \quad \text{für alle } s \geq 1,$$

$$(ii) \quad C_s \leq \frac{4^s}{(s+1)^{3/2}}, \quad \text{für alle } s \geq 0$$

und für $s \rightarrow \infty$ gilt die asymptotische Gleichheit¹⁰ $C_s \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^s}{s^{3/2}}$.

Beweis. Wir berechnen zunächst die Asymptotik. Mit der Stirlingformel ergibt sich direkt

$$C_s = \frac{(2s)!}{(s+1)s!^2} \sim \frac{1}{s} \left(\frac{2s}{e}\right)^{2s} \sqrt{2\pi 2s} \left(\left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s}\right)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^s}{s^{3/2}}. \quad (187)$$

Um Ungleichung (i) zu erhalten zeigen wir nun, dass die Folge der Zahlen $c_s := C_s s^{3/2}/4^s$ monoton wächst. Wegen $c_1 = 1/4$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} c_s = 1/\sqrt{\pi}$ folgt dann die Behauptung. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{c_{s+1}}{c_s} &= \frac{(2s+2)(2s+1)}{(s+2)(s+1)} \frac{(s+1)^{3/2}}{4s^{3/2}} = \frac{2s+1}{2s+4} \left(1 + \frac{1}{s}\right)^{3/2} \\ &\geq \left(1 - \frac{3}{2s+4}\right) \left(1 + \frac{3}{2s}\right) = 1 + \frac{3}{2s(2s+4)} > 1 \end{aligned} \quad (188)$$

Dabei wurde genutzt, dass für alle $x \geq 0$ die Abschätzung $(1+x)^{3/2} - (1+3x/2) \geq 0$ gilt, was man durch Ableiten der linken Seite und Einsetzen von

¹⁰Zwei Folgen (a_n) und (b_n) heißen asymptotisch gleich, falls die Folge der Quotienten (a_n/b_n) gegen 1 konvergiert.

$x = 0$ nachrechnet. Ungleichung (ii) zeigt man für $s = 0, 1, 2$ direkt durch explizites Ausrechnen. Für $s \geq 3$ erhält man sie wegen $s \geq (3/4)(s+1)$ mit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{s^{3/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{((3/4)(s+1))^{3/2}} = \sqrt{\frac{64}{27\pi}} \frac{1}{(s+1)^{3/2}} < \frac{1}{(s+1)^{3/2}} \quad (189)$$

aus Ungleichung (i). \square

Um Kontrolle über die Zahl der Nullstellen der Dyck-Pfade zu haben, definieren wir

$$\mathcal{C}_s^\nu := \{ X \in \mathcal{C}_s \mid X \text{ hat genau } \nu \text{ Nullstellen} \}. \quad (190)$$

Proposition 43. *Für Zahlen $s, \nu \in \mathbb{N}_0$ gilt:*¹¹

$$\frac{C_s^\nu}{C_s} \leq \nu^{5/2} \left(\frac{\zeta(3/2)}{4} \right)^{\nu-2} \leq 268 \left(\frac{3}{4} \right)^\nu \quad (191)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die erste Ungleichung. Sie ist in den Fällen $\nu = 0$ und $\nu > s + 1$ wegen $C_s^\nu = 0$ trivial. Im Fall $\nu = 1$ folgt $s = 0$ oder $C_s^\nu = 0$. In der ersten Situation rechnet man die Abschätzung direkt nach, in der zweiten ist sie wieder trivial. Sei also $2 \leq \nu \leq s + 1$. Weil für Pfade in \mathcal{C}_s^ν die Schritte unmittelbar vor und nach den Nullstellen festgelegt sind, gilt unter Verwendung von Ungleichung (ii) aus Proposition 42 für alle $1 \leq k \leq s$

$$C_s^{k+1} = \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \\ \text{mit } \sum_i s_i = s}} \prod_{i=1}^k C_{s_i-1} \leq 4^{s-k} \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k \\ \text{mit } \sum_i s_i = s}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{s_i^{3/2}}. \quad (192)$$

Die Summation auf der rechten Seite lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_k) \\ \text{mit } \sum_i s_i = s}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{s_i^{3/2}} &\leq \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_k) \\ \text{mit } \sum_i s_i = s \\ \text{und } \max_i s_i = s_j}} \frac{1}{s_j^{3/2}} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{1}{s_i^{3/2}} \\ &\leq \left(\frac{k}{s} \right)^{3/2} \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{(s_1, \dots, s_k) \\ \text{mit } \sum_i s_i = s \\ i \neq j}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{s_i^{3/2}} \\ &\leq \left(\frac{k}{s} \right)^{3/2} \sum_{j=1}^k \sum_{\bar{s}_1=1}^{\infty} \dots \sum_{\bar{s}_{k-1}=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\bar{s}_i^{3/2}} = \frac{k^{5/2}}{s^{3/2}} \zeta(3/2)^{k-1}. \end{aligned} \quad (193)$$

Mit Ungleichung (i) aus Proposition 42 erhält man für den abzuschätzenden Quotienten

$$\frac{C_s^\nu}{C_s} \leq \left(\frac{4}{\zeta(3/2)} \right)^2 \nu^{5/2} \left(\frac{\zeta(3/2)}{4} \right)^\nu \leq \alpha \left(\frac{3}{4} \right)^\nu \quad (194)$$

¹¹Es ist $\zeta(3/2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} + \int_n^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; $n = 4$ z. B. liefert $\zeta(3/2) \leq 1 + 1/\sqrt{8} + 1/\sqrt{27} + 1/8 + 1 < 2 + (1 + \sqrt{8})/8 + 1/5 < 2,7$. Der genaue Wert ist $\zeta(3/2) = 2,612375\dots$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante α . Das Maximum der Funktion $x \mapsto x^{5/2}a^x$, $0 < a < 1$, auf \mathbb{R}^+ ist $(5/(2e \log(1/a)))^{5/2}$, also gilt

$$\frac{C_s^\nu}{C_s} \leq \left(\frac{4}{\zeta(3/2)} \right)^2 \left(\frac{5}{2e \log(3/\zeta(3/2))} \right)^{5/2} \left(\frac{3}{4} \right)^\nu = 267,1136 \dots \left(\frac{3}{4} \right)^\nu \quad (195)$$

und damit die Behauptung. \square

Es interessieren uns nichtnegative Irrfahrten, aus denen sich durch Einschranken auf Intervalle Dyck-Pfade mit einer bestimmten Zahl von Nullstellen gewinnen lassen. Dazu definieren wir

$$\mathcal{F}_{p,q}^\nu(t_1, t_2) := \{ X \in \mathcal{D}_{p,q} \mid X_{(t_1, t_2)} \in \mathcal{C}_{(t_2 - t_1)/2}^\nu \} \quad (196)$$

und fur $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}_{p,q}^{m,n} := \begin{cases} \mathcal{D}_{p,q}, & \text{falls } n < m \\ \bigcup_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^m \\ |\nu| = n}} \bigcup_{t_{11} \leq t_{12} < t_{21} \leq t_{22} < \dots < t_{m1} \leq t_{m2}} \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_{p,q}^{\nu_i}(t_{i1}, t_{i2}), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (197)$$

Es ist also $\mathcal{F}_{p,q}^{m,n}$ die Menge der nichtnegativen Irrfahrten X vom Typ (p, q) , fur die ein $\nu \in \mathbb{N}^m$ mit $|\nu| = n$ existiert, so dass fur alle $i = 1, \dots, m$ durch Einschranken auf geeignete disjunkte Intervalle $[t_{i1}, t_{i2}]$ und Verschieben um $X(t_{i1})$ nach unten Dyck-Pfade mit genau ν_i Nullstellen konstruiert werden konnen. Es gelten:

- (i) $\mathcal{F}_{p,q}^{n,n} = \mathcal{D}_{p,q}$, falls $1 \leq n \leq p + 1$,
- (ii) $\mathcal{F}_{p,q}^{m,n} = \emptyset$, falls $m \leq n$ und $n > p + 1$.

Daraus und aus der Definition von $\mathcal{F}_{p,q}^{m,n}$ folgt:

Proposition 44. *Fur alle $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $\mathcal{F}_{p,q}^{m,n+1} \subseteq \mathcal{F}_{p,q}^{m,n} \subseteq \mathcal{F}_{p,q}^{m+1,n}$.*

Satz 45. *Fur $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $p \geq q$ mit $D_{p,q} > 0$ gilt:*

$$\frac{F_{p,q}^{m,n}}{D_{p,q}} \leq (18(p+1))^{3m} \left(\frac{3}{4} \right)^n \quad (198)$$

Beweis. Im Fall $n < m$ oder $n > p + 1$ rechnet man die Ungleichung direkt nach. Im Fall $1 \leq m \leq n \leq p + 1$ zeigen wir sogar

$$\frac{F_{p,q}^{m,n}}{D_{p,q}} \leq \left(268 e^3 \frac{n(p+1)^2}{m^3} \right)^m \left(\frac{3}{4} \right)^n. \quad (199)$$

Seien $0 \leq t_{11} \leq t_{12} < t_{21} \leq t_{22} < \dots < t_{m1} \leq t_{m2} \leq p$, so dass $t_{i2} - t_{i1}$ gerade ist fur alle $1 \leq i \leq m$ und $A \neq \emptyset$ fur

$$A := \{ X \in \mathcal{D}_{p,q} \mid X(t_{i1}) = X(t_{i2}) \text{ fur alle } 1 \leq i \leq m \}. \quad (200)$$

Auf A wird durch

$$X \sim Y \Leftrightarrow X_{[[t_{11}, t_{12}], \dots, [t_{m1}, t_{m2}]]} = Y_{[[t_{11}, t_{12}], \dots, [t_{m1}, t_{m2}]]} \quad (201)$$

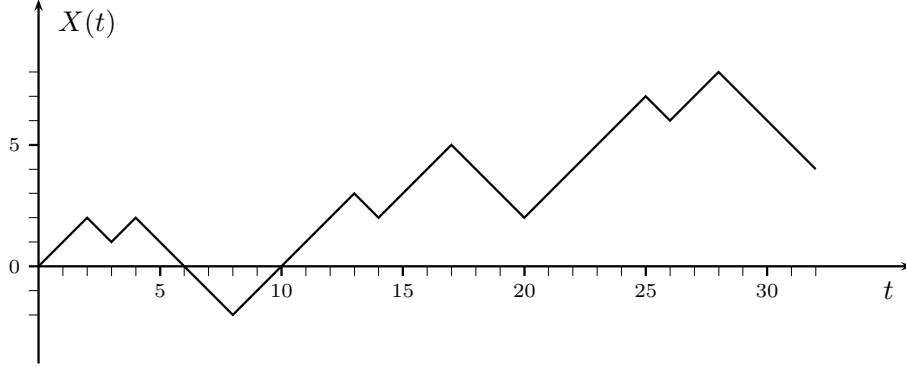


Abbildung 1: Das Bild dient dazu, die eingeführten Pfadklassen zu veranschaulichen. Es zeigt eine Irrfahrt X . Ferner sind z. B. die Einschränkungen $X_{(0,6)}$ und $X_{(1,5)}$ Dyck-Pfade, $X_{(10,30)}$ ist eine nichtnegative Irrfahrt vom Typ $(20, 6)$. Weiter ist $X_{(12,20)} \in \mathcal{C}_4^3$ und damit $X_{(8,25)} \in \mathcal{F}_{17,9}^{1,3}$.

eine Äquivalenzrelation erklärt (Notation siehe (125)). Seien A_j die zugehörigen Äquivalenzklassen, also $A = \bigsqcup A_j$. Sie enthalten jeweils Pfade, die sich nur in den Intervallen $[t_{i1} + 1, t_{i2}]$ voneinander unterscheiden. Sei $\nu \in \mathbb{N}^m$ mit $|\nu| = n$. Wir setzen

$$B := \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_{p,q}^{\nu_i}(t_{i1}, t_{i2}) \quad (202)$$

Es gilt wegen $|B \cap A_j| = \prod_{i=1}^m C_{(t_{i2}-t_{i1})/2}^{\nu_i}$ und $|A_j| \geq \prod_{i=1}^m C_{(t_{i2}-t_{i1})/2}$ und Proposition 43 für alle j

$$\frac{|B \cap A_j|}{|A_j|} \leq \prod_{i=1}^m \frac{C_{(t_{i2}-t_{i1})/2}^{\nu_i}}{C_{(t_{i2}-t_{i1})/2}} \leq 268^m \left(\frac{3}{4}\right)^n. \quad (203)$$

Damit, mit $D_{p,q} \geq |A|$ und Lemma 46, angewandt auf $B \subseteq A$, folgt

$$\frac{|B|}{D_{p,q}} \leq \frac{|B \cap A|}{|A|} \leq 268^m \left(\frac{3}{4}\right)^n. \quad (204)$$

Im Fall $A = \emptyset$ gilt diese Ungleichung trivialerweise. Es gibt höchstens $\binom{p+1}{m}^2$ Möglichkeiten $t_{11}, t_{21}, \dots, t_{m1}$ und $t_{12}, t_{22}, \dots, t_{m2}$ auszuwählen. Die Zahl der Möglichkeiten ν zu wählen ist beschränkt durch $\binom{n}{m-1}$. Das führt auf:

$$\begin{aligned} \frac{F_{p,q}^{m,n}}{D_{p,q}} &\leq \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{N}^m \\ |\nu|=n}} \sum_{t_{11} \leq t_{12} < \dots < t_{m1} \leq t_{m2}} \frac{|\bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_{p,q}^{\nu_i}(t_{i1}, t_{i2})|}{D_{p,q}} \\ &\leq \binom{n}{m-1} \binom{p+1}{m}^2 268^m \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &\leq \frac{n^m}{m!} \frac{(p+1)^{2m}}{m!^2} 268^m \left(\frac{3}{4}\right)^n. \end{aligned} \quad (205)$$

Daraus folgt mit $m! \geq (m/e)^m$ die Behauptung. \square

Wir formulieren noch den gerade im Beweis verwendeten Hilfssatz:

Lemma 46. *Sei A eine Menge und $(A_j)_{j \in J}$, eine Zerlegung von A in Teilmengen, d. h. $\bigsqcup_{j \in J} A_j = A$. Ferner sei $c \geq 0$ und $B \subseteq A$, so dass $|B \cap A_j| \leq c|A_j|$ gilt für alle $j \in J$. Dann gilt auch $|B| \leq c|A|$.*

Beweis. Wir erhalten direkt: $|B| = |B \cap A| = |B \cap (\bigsqcup A_j)| = |\bigsqcup (B \cap A_j)| = \sum |B \cap A_j| \leq c \sum |A_j| = c|A|$. \square

Proposition 47. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Für jede nichtnegative Funktion f auf \mathbb{R} gilt*

$$\sum_{X \in \mathcal{F}_{p,q}^{m,n}} f(X_{\max}) \leq \sum_{X \in \mathcal{F}_{p+q,0}^{m,n}} f(X_{\max}) \quad (206)$$

Beweis. Die Abbildung $\phi : \mathcal{D}_{p,q} \rightarrow \mathcal{D}_{p+q,0}$,

$$\phi(X)(t) = \begin{cases} X(t), & \text{falls } 0 \leq t \leq p, \\ q - t, & \text{falls } p < t, \end{cases} \quad (207)$$

ist offensichtlich injektiv. Ferner gilt $\phi(X)_{\max} = X_{\max}$ und damit

$$\sum_{X \in \mathcal{F}_{p,q}^{m,n}} f(X_{\max}) = \sum_{X \in \mathcal{F}_{p,q}^{m,n}} f(\phi(X)_{\max}) = \sum_{X \in \phi(\mathcal{F}_{p,q}^{m,n})} f(X_{\max}) \quad (208)$$

Aus $\phi(\mathcal{F}_{p,q}^{m,n}) \subseteq \mathcal{F}_{p+q,0}^{m,n}$ folgt die Behauptung. \square

Aus der Injektivität der im Beweis vom Proposition 47 konstruierten Abbildung ϕ folgt auch

$$D_{p,q} \leq D_{p+q,0}. \quad (209)$$

II.6 Pfade und ihre zugeordneten Irrfahrten

Dieser Abschnitt vereinfacht das von Khorunzhiy [14] (dort Abschnitt 4.3) vorgeschlagene Konzept der „broken tree structure instants“. Dieser Begriff wird hier nicht gebraucht. Der in Definition 31 eingeführte Begriff des offenen unmarkierten Zeitpunkts ist in der Handhabung viel einfacher. Die Ideen dazu entstanden jedoch aus dem Studium Khorunzhiys Arbeit.

Die folgenden Begriffe sind zwar nicht nötig, um den Hauptsatz dieses Abschnitts, Satz 57, zu formulieren, sie helfen jedoch den Beweis zu strukturieren.

Definition 48. Seien γ ein Pfad und $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq p^\gamma$. Dann heißt der Pfad $\gamma_{[t_1, t_2]}$ Teilpfad von γ , falls sich die markiert-unmarkiert-Struktur von γ auf $\gamma_{[t_1, t_2]}$ überträgt, d. h. falls $\Theta^{\gamma_{[t_1, t_2]}}(t) = \Theta^\gamma(t_1 + t)$ gilt für alle $t \in \mathfrak{T}^{\gamma_{[t_1, t_2]}}$, siehe (180).

Definition 49. Ein Pfad γ mit $\mathfrak{R}^\gamma = \emptyset$ heißt *b a u m a r t i g*, siehe Def. 31.

Die folgende Proposition liefert ein hinreichendes Kriterium dafür, wann geschlossene Pfade gerade sind und ist somit in gewisser Weise eine teilweise Umkehrung von Satz 24.

Proposition 50. *Es sei γ ein geschlossener baumartiger Pfad und der Zeitpunkt p^γ sei unmarkiert. Ferner sei $p^\gamma = \min\{t > 0 \mid \gamma(t) = \gamma(0)\}$.¹² Dann ist γ gerade.*

Beweis. Wir zeigen für alle $p \in \mathbb{N}_0$: Alle Pfade γ mit $p^\gamma = p$, die die Voraussetzung aus Proposition 50 erfüllen, sind gerade.

Induktion über p . Im Fall $p \in \{0, 1\}$ gibt es keine Pfade γ , die die Voraussetzung erfüllen, denn der Zeitpunkt p^γ ist nicht unmarkiert. Die Behauptung gilt trivialerweise. Für $p = 2$ ist die Aussage offenbar richtig: Unter den Voraussetzungen von Proposition 50 gilt für einen Pfad γ mit $p^\gamma = 2$ nämlich $\gamma(0) = \gamma(2) \neq \gamma(1)$. Solche Pfade sind gerade.

Induktionsschritt: Sei $p \geq 3$. Angenommen, die Behauptung sei bewiesen für alle Pfade der Länge $p - 1$. Sei nun γ ein Pfad der Länge $p^\gamma = p$. Sei $\tau := \min \mathcal{U}^\gamma$. Weil γ baumartig ist, folgt $s_\tau = -s_{\tau-1}$ und somit $\gamma(\tau - 2) = \gamma(\tau)$. Es ist $\tau \neq p$. Andernfalls wäre wegen $p \geq 3$ nämlich $\tau - 2 \geq 1$ und $\gamma(\tau - 2) = \gamma(\tau) = \gamma(p^\gamma)$, also $p^\gamma \neq \min\{t > 0 \mid \gamma(t) = \gamma(0)\}$. Widerspruch. Der Pfad $\gamma' := \gamma|_{[\tau-2, \tau]}$ ist geschlossen und baumartig und wegen $\tau \neq p$ wissen wir auch, dass $p^{\gamma'}$ unmarkiert ist. Ferner bleibt $p^{\gamma'} = \min\{t > 0 \mid \gamma'(t) = \gamma'(0)\}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist γ' gerade und folglich auch γ , wegen $T^\gamma(\{i, j\}) \equiv T^{\gamma'}(\{i, j\}) \pmod{2}$ für alle Kanten $\{i, j\}$. \square

Proposition 51. *Für einen Pfad γ seien $0 \leq t_1 < t_2 \leq p^\gamma$ Zeitpunkte, so dass $\mathfrak{K}^\gamma \cap [t_1 + 1, t_2] = \emptyset$ ist und $\gamma' := \gamma|_{[t_1, t_2]}$ ein Teilpfad von γ . Dann ist γ' ein baumartiger Pfad.*

Beweis. Angenommen der Pfad γ' wäre nicht baumartig. Dann gibt es einen offenen unmarkierten Zeitpunkt $t \in [1, t_2 - t_1] \cap \mathcal{U}^{\gamma'}$, es ist also $\Lambda^{\gamma'}(\gamma'(t - 1), t - 1) > 1$. Aus der Teilpfadeigenschaft von γ' folgt aber sofort

$$\Lambda^\gamma(\gamma(t_1 + t - 1), t_1 + t - 1) \geq \Lambda^{\gamma'}(\gamma'(t - 1), t - 1) > 1 \quad (210)$$

weil Schritte, die Kanten bzgl. γ' öffnen, diese auch bzgl. γ öffnen. Damit ist $t_1 + t$ ein offener unmarkierter Zeitpunkt bzgl. γ . Widerspruch. \square

Den für den Beweis des unten stehenden Satzes 57 benötigten Hauptgedanken bereiten wir in folgendem Lemma vor:

Lemma 52. *Es seien γ ein Pfad und $0 \leq t_1 < t_2 \leq p^\gamma$ zwei Zeitpunkte mit $\mathfrak{K}^\gamma \cap [t_1 + 1, t_2] = \emptyset$. Ferner seien $t_1 + 1$ markiert, t_2 unmarkiert und $t_2 = \min\{\tau > t_1 \mid \gamma(\tau) = \gamma(t_1)\}$. Dann ist der Pfad $\gamma|_{[t_1, t_2]}$ ein gerader baumartiger Teilpfad von γ .*

Beweis. Zur Abkürzung schreiben wir wieder $\gamma' := \gamma|_{[t_1, t_2]}$. Wir müssen zeigen, dass γ' ein Teilpfad von γ ist. Nach Proposition 51 ist er dann schon baumartig und damit nach Proposition 50 auch gerade.

Wir zeigen induktiv: $\Theta^\gamma(t_1 + t) = \Theta^{\gamma'}(t)$ für alle $t = 1, 2, \dots, t_2 - t_1$. Induktionsanfang $t = 1$: Es ist nach Voraussetzung $\Theta^\gamma(t_1 + 1) = 1$, und weil der erste Schritt eines Pfades immer markiert ist, gilt auch $\Theta^{\gamma'}(1) = 1$.

¹²Ohne diese auf den ersten Blick vielleicht überflüssig scheinende Voraussetzung ist die Aussage falsch. Man betrachte etwa den Pfad $(1, 1, 2, 1)$.

Induktionsschritt $t \rightarrow t+1$ (für $t < t_2 - t_1$): Angenommen $\Theta^\gamma(t_1 + t + 1) = 1$, aber $\Theta^{\gamma'}(t+1) = -1$. Dann gibt es ein maximales $\tau < t+1$ mit $e_\tau^{\gamma'} = e_{t+1}^{\gamma'}$. Es ist $\Theta^{\gamma'}(\tau) = 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit auch $\Theta^\gamma(t_1 + \tau) = 1$. Ferner ist wegen $[e_s^{\gamma'} = e_{t+1}^{\gamma'} \Leftrightarrow e_{t_1+s}^\gamma = e_{t_1+t+1}^\gamma]$ auch $\tau = \max\{s < t+1 \mid e_{t_1+s}^\gamma = e_{t_1+t+1}^\gamma\}$. Dann können aber nicht zugleich $\Theta^\gamma(t_1 + t + 1) = 1$ und $\Theta^\gamma(t_1 + \tau) = 1$ gelten, denn zwischen zwei markierten Schritten entlang einer Kante muss es einen unmarkierten geben. Widerspruch. Bislang ist nur verwendet worden, dass $t_1 + 1$ markiert ist.

Angenommen $\Theta^\gamma(t_1 + t + 1) = -1$, aber $\Theta^{\gamma'}(t+1) = 1$. Da der Pfad γ' nach Voraussetzung nicht vor dem Zeitpunkt $t_2 - t_1$ zu seinem Startpunkt zurückkehrt, gilt $\Lambda^\gamma(\gamma'(t), t) \geq 1$, siehe Bemerkung 25, d. h. es gibt bzgl. γ' eine t -offene Kante in $\gamma'(t)$. Nach Induktionsvoraussetzung muss sie auch $(t_1 + t)$ -offen bzgl. γ sein. Der unmarkierte Schritt $s_{t_1+t+1}^\gamma$ kann nicht entlang dieser Kante verlaufen, weil die Kante $e_{t_1+t+1}^\gamma$ seit t_1 das erste Mal vorkommt (sonst gäbe es ein maximales $\tau < t+1$ mit $e_\tau^{\gamma'} = e_{t+1}^{\gamma'}$ und folglich wäre $\Theta^{\gamma'}(\tau) = -1$ und $\Theta^\gamma(t_1 + \tau) = 1$, im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung). Dann ist aber $\Lambda^\gamma(\gamma(t_1 + t), t_1 + t) \geq 2$ und damit $t_1 + t + 1$ ein offener unmarkierter Zeitpunkt bzgl. γ . Widerspruch. \square

Proposition 53. *Sei γ ein Pfad und $0 \leq \tau \leq p^\gamma$ ein Zeitpunkt mit $X^\gamma(\tau) = 0$, siehe (180). Dann ist $\gamma_{[0,\tau]}$ ein gerader Pfad.*

Beweis. Wegen $X^\gamma(t) = M^\gamma(t) - U^\gamma(t)$ für alle t ist $M^\gamma(\tau) = U^\gamma(\tau)$. Wegen $M^\gamma(\{i, j\}, \tau) \geq U^\gamma(\{i, j\}, \tau)$ für alle Kanten $\{i, j\}$ und

$$\sum_{\{i,j\}} M^\gamma(\{i, j\}, \tau) = M^\gamma(\tau) = U^\gamma(\tau) = \sum_{\{i,j\}} U^\gamma(\{i, j\}, \tau) \quad (211)$$

muss folglich $M^\gamma(\{i, j\}, \tau) = U^\gamma(\{i, j\}, \tau)$ für alle Kanten $\{i, j\}$ gelten, d. h. $\gamma_{[0,\tau]}$ ist gerade. \square

Proposition 54. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 52 ist $X_{(t_1, t_2)}^\gamma = X^{\gamma_{[t_1, t_2]}}$ ein Dyck-Pfad mit genau den zwei Nullstellen 0 und $t_2 - t_1$.*

Beweis. Zunächst folgt aus Lemma 52, dass $X_{(t_1, t_2)}^\gamma = X^{\gamma_{[t_1, t_2]}}$ ein Dyck-Pfad ist. Hätte dieser eine weitere Nullstelle $0 < t_0 < t_2 - t_1$, dann wäre nach Proposition 53 der Pfad $\gamma_{[t_1, t_1+t_0]}$ gerade, also nach Satz 24 geschlossen und somit $\gamma(t_1 + t_0) = \gamma(t_1)$ im Widerspruch zu $t_2 = \min\{\tau > t_1 \mid \gamma(\tau) = \gamma(t_1)\}$. \square

Das führt auf:

Lemma 55. *Seien γ ein Pfad, j ein Vertex und $t_1 \leq t_2$ Zeitpunkte mit*

- (i) $(t_1 + 1) \in \mathfrak{M}_d^\gamma(j)$,
- (ii) $t_2 \in \mathfrak{U}_d^\gamma(j)$,
- (iii) $[t_1 + 1, t_2] \cap (\mathfrak{M}_d^\gamma(j) \cup \mathfrak{U}_d^\gamma(j) \cup \mathfrak{R}^\gamma) = \emptyset$.

Dann gilt: $X_{(t_1, t_2)}^\gamma \in \mathfrak{C}_{(t_2-t_1)/2}^\mu$ mit $\mu = 1 + |\mathfrak{M}_d^\gamma(j) \cap [t_1 + 1, t_2]|$.

Beweis. Im Fall $t_1 = t_2$ ist die Aussage wegen $[t_1 + 1, t_2] = \emptyset$ trivial. Sei also $t_1 < t_2$ und damit $t_1 + 1 < t_2$. Dann ist $\mu \geq 2$. Wir bezeichnen mit $t_1 + 1 = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{\mu-1} < t_2$ die Zeitpunkte in $\mathfrak{M}_d(j) \cap [t_1 + 1, t_2]$. Dann sind die Zeitpunkte $\eta_i := \tau_{i+1} - 1$ für $i = 1, 2, \dots, \mu - 2$ und $\eta_{\mu-1} := t_2$ allesamt in $\mathfrak{U}_a(j) \cap [t_1 + 1, t_2]$. Mit $\eta_0 := t_1$ gilt nach Lemma 52 für jedes $i = 1, 2, \dots, \mu - 1$, dass $\gamma_{[\eta_{i-1}, \eta_i]}$ ein gerader baumartiger Teilpfad ist und mit Proposition 54, dass $X_{(\eta_{i-1}, \eta_i)}$ ein Dyck-Pfad mit genau zwei Nullstellen ist. Aneinanderhängen all dieser $\mu - 1$ Dyck-Pfade liefert die Behauptung. \square

Für einen Pfad γ definieren wir

$$\begin{aligned} a^\gamma &:= \max_{j \in \mathcal{V}^\gamma} M_a^\gamma(j), \\ d^\gamma &:= \max_{j \in \mathcal{V}^\gamma} M_d^\gamma(j) \end{aligned} \tag{212}$$

Proposition 56. *Für jeden Pfad γ gilt $a^\gamma \leq 1 + S^\gamma$.*

Beweis. Für einen Vertex j mit $M_a^\gamma(j) = a^\gamma$ sind die Zeitpunkte $t \in \mathfrak{M}_d^\gamma(j)$ alle Selbstschnitte bis auf den ersten. \square

Der Hauptsatz dieses Abschnitts lautet nun:

Satz 57. *Für jeden Pfad γ ist $X^\gamma \in \mathfrak{F}_{p^\gamma, q^\gamma}^{1+2a^\gamma+K^\gamma, d^\gamma-a^\gamma}$. Insbesondere ist damit auch $X^\gamma \in \mathfrak{F}_{p^\gamma, q^\gamma}^{5+4S^\gamma, d^\gamma-S^\gamma-1}$.*

Beweis. Sei j ein Vertex mit $M_d(j) = d$. Auf $\widetilde{\mathfrak{M}}_d(j) := \mathfrak{M}_d(j) \setminus \mathfrak{M}_a(j)$ wird durch

$$s \sim t :\Leftrightarrow [\min(s, t), \max(s, t)] \cap (\mathfrak{M}_a(j) \cup \mathfrak{U}_d(j) \cup \mathfrak{R}) = \emptyset \tag{213}$$

eine Äquivalenzrelation erklärt. Die $n := |\widetilde{\mathfrak{M}}_d(j)|$ Zeitpunkte in $\widetilde{\mathfrak{M}}_d(j)$ verteilen sich auf m Äquivalenzklassen J_i , $1 \leq i \leq m$. Für alle $1 \leq i \leq m$ wenden wir Lemma 55 an auf $t_1 = \min J_i - 1$, $t_2 = \max J_i - 1$. Mit $n = \sum_i |J_i|$ folgt: $X^\gamma \in \mathfrak{F}_{p^\gamma, q^\gamma}^{m, n}$. Nach Proposition 28 gilt $m \leq M_a(j) + U_d(j) + K + 1 \leq 2a + K + 1$. Damit und mit $n \geq d - a$ ergibt sich die erste Behauptung aus Proposition 44. Der Zusatz folgt erneut aus Proposition 44 unter Verwendung von Lemma 40 und Proposition 56. \square

Proposition 58. *Sei γ ein baumartiger Pfad und t ein unmarkierter Zeitpunkt. Dann gilt: $\Lambda^\gamma(\gamma(t-1), t-1) = 1$.*

Beweis. Sei t unmarkiert. Da γ baumartig ist, folgt $\Lambda(\gamma(t-1), t-1) \leq 1$. Ferner wissen wir, dass $X^\gamma(t-1) > 0$ ist. Angenommen $\Lambda(\gamma(t-1), t-1) = 0$. Dann ist auch $t-1$ unmarkiert (sonst wäre $\Lambda(\gamma(t-1), t-1) \geq 1$) und damit $t \geq 3$. Außerdem folgt $\gamma(t-1) = \gamma(0)$ mit Bemerkung 25. Ohne Einschränkung sei $t-1 = \min\{\tau > 0 \mid \gamma(\tau) = \gamma(0)\}$. Dann ist $\gamma_{[0, t-1]}$ nach Lemma 52 gerade und es gilt somit $X^\gamma(t-1) = 0$. Widerspruch. \square

II.7 Maxima von Dyck-Pfaden: exponentielle Momente

Wir definieren für alle $\lambda > 0$ und alle ganzen Zahlen $s \geq 0$

$$E_s(\lambda) := \frac{1}{C_s} \sum_{X \in \mathcal{C}_s} \exp\left(\lambda \frac{X_{\max}}{\sqrt{2s}}\right). \quad (214)$$

Ziel der Untersuchungen dieses Abschnitts ist der folgende Hauptsatz.

Satz 59. *Für alle $\lambda > 0$ gibt es ein $d = d(\lambda) = d_{59}(\lambda) < \infty$, so dass für alle ganzen Zahlen $s \geq 0$ gilt: $E_s(\lambda) \leq d$.*

Stochastisch interpretiert bedeutet Satz 59, dass die exponentiellen Momente von $X \mapsto X_{\max}/\sqrt{2s}$ (bezüglich einer Gleichverteilung auf \mathcal{C}_s) gleichförmig in s beschränkt sind. Wir setzen

$$\mathcal{C}_s(x) := \{X \in \mathcal{C}_s \mid X_{\max} < x\} \quad (215)$$

und definieren die Verteilungsfunktion

$$G_s(x) := P(\{X \in \mathcal{C}_s \mid X_{\max} < x\}) = \frac{C_s(x)}{C_s}. \quad (216)$$

Sie hat die folgenden offensichtlichen Eigenschaften:

- (i) $G_s(x) = 0$ für alle $x \leq 0$,
- (ii) $G_s(x) = 1$ für alle $x > s$,
- (iii) G_s ist linksstetig, stückweise konstant und springt bei $0, 1, \dots, s$.

Es gilt also

$$\begin{aligned} E_s(\lambda) &= \sum_{k=0}^s \exp\left(\lambda \frac{k}{\sqrt{2s}}\right) (G_s(k+1) - G_s(k)) \\ &= \sum_{k=0}^s \exp\left(\lambda \frac{k}{\sqrt{2s}}\right) (1 - G_s(k)) - \sum_{k=1}^{s+1} \exp\left(\lambda \frac{(k-1)}{\sqrt{2s}}\right) (1 - G_s(k)) \\ &= \left(1 - \exp\left(-\lambda \frac{1}{\sqrt{2s}}\right)\right) \sum_{k=1}^s \exp\left(\lambda \frac{k}{\sqrt{2s}}\right) (1 - G_s(k)) \\ &\quad + 1 - G_s(0) - \exp\left(\lambda \frac{s}{\sqrt{2s}}\right) (1 - G_s(s+1)) \end{aligned} \quad (217)$$

und wegen obiger Eigenschaften (i) und (ii) und $1 - e^{-y} \leq y$ ist

$$E_s(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2s}} \sum_{k=1}^s \exp\left(\lambda \frac{k}{\sqrt{2s}}\right) (1 - G_s(k)). \quad (218)$$

Wir suchen eine Darstellung für die Verteilungsfunktion G_s . Wir definieren für $a, b \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{B}_{p,q}(a, b) = \{X \in \mathcal{B}_{p,q} \mid a < \min_t X(t) \leq \max_t X(t) < b\}. \quad (219)$$

Damit ist

$$G_s(k) = \frac{C_s(k)}{C_s} = \frac{B_{2s,0}(-1,k)}{C_s}. \quad (220)$$

Entscheidend ist der folgende Satz aus dem Buch von Billingsley ([3], S. 78).

Satz 60. (Billingsley) Sei $p \in \mathbb{N}_0$. Für ganze Zahlen a, b, q mit $a \leq 0 \leq b$ und $a < q < b$ gilt:

$$B_{p,q}(a, b) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p,q+2m(b-a)} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p,2b-q+2m(b-a)}. \quad (221)$$

Beweis. Als erstes bemerken wir, dass die obigen Summen tatsächlich endliche Summen sind. Es ist nämlich $B_{p,q} = 0$ für $|q| > p$.

Induktion über p . Wir überprüfen die Formel für $p = 0$: Wegen

$$B_{0,q} = \begin{cases} 1, & \text{falls } q = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (222)$$

und $|2(b-a)| > |q|$ ist

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{0,q+2m(b-a)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } q = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (223)$$

Ebenso ist wegen $2b - q \neq 0$ und $|2(b-a)| > |2b - q|$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{0,2b-q+2m(b-a)} = 0. \quad (224)$$

Induktionsschluss von $p - 1$ auf p : Im Fall $a = 0$ oder $b = 0$ steht auf beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung einfach 0. Für die linke Seite ist das trivial, für die rechte gilt es wegen der Symmetrie $B_{p,q} = B_{p,-q}$. Wir können also gleich $a < 0 < b$ annehmen. Es gilt erstens

$$B_{p,q} = B_{p-1,q-1} + B_{p-1,q+1}. \quad (225)$$

Für den ersten Schritt eines Pfades gibt es zwei Möglichkeiten. Der Rest ist dann ein um 1 kürzerer Pfad. Somit und wegen $a < 0 < b$ gilt zweitens

$$B_{p,q}(a, b) = B_{p-1,q-1}(a-1, b-1) + B_{p-1,q+1}(a+1, b+1). \quad (226)$$

Zusammen damit liefert die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} B_{p,q}(a, b) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p-1,q-1+2m(b-a)} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p-1,2b-q-1+2m(b-a)} \\ &\quad + \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p-1,q+1+2m(b-a)} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p-1,2b-q+1+2m(b-a)} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p,q+2m(b-a)} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{p,2b-q+2m(b-a)}. \end{aligned} \quad (227)$$

Das ist die Behauptung. \square

Der obige Beweis ist zwar eine relativ einfache Möglichkeit, die Gültigkeit von Satz 60 zu überprüfen, man erfährt dabei jedoch nichts über seine Herkunft. Wir wollen deshalb noch kurz andeuten, wie man die Formel kombinatorisch konstruiert. Es mögen also die Voraussetzungen von Satz 60 gelten. Die Idee ist, das Spiegelungsprinzip zu verwenden: Wir definieren die zwei komplementären Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{p,q}(b) &:= \{ X \in \mathcal{B}_{p,q} \mid \max_t X(t) < b \} \quad \text{und} \\ {}^c\mathcal{B}_{p,q}(b) &:= \mathcal{B}_{p,q} \setminus \mathcal{B}_{p,q}(b). \end{aligned} \quad (228)$$

Sei X ein Pfad in ${}^c\mathcal{B}_{p,q}(b)$ und $t_b = \min\{ t \mid X(t) = b \}$ der erste Zeitpunkt, an dem der Pfad die Höhe b erreicht. Dann ist der Pfad X_b , der gegeben ist durch

$$X_b(t) = \begin{cases} X(t), & \text{falls } t \leq t_b, \\ 2X(t_b) - X(t), & \text{falls } t > t_b, \end{cases} \quad (229)$$

in der Menge $\mathcal{B}_{p,2b-q}$. Er entsteht aus X , indem wir den Teil rechts von t_b an der Linie $X = b$ spiegeln. Die Zuordnung ${}^c\mathcal{B}_{p,q}(b) \rightarrow \mathcal{B}_{p,2b-q}$, $X \mapsto X_b$, ist wegen $q \leq b$ bijektiv und damit gilt ${}^c\mathcal{B}_{p,q}(b) = \mathcal{B}_{p,2b-q}$.¹³ Zu jedem Pfad $X \in \mathcal{B}_{p,q}$ definieren wir die Folge von Zeitpunkten

$$\begin{aligned} t_1 &:= \min\{ t \mid X(t) \in \{a, b\} \}, \\ t_{j+1} &:= \min\{ t > t_j \mid X(t) \in \{a, b\} \text{ und } X(t) \neq X(t_j) \} \quad \text{für } j \geq 1, \end{aligned} \quad (230)$$

soweit sie existiert. Wir ordnen jedem Pfad X die Folge $f^X := (X(t_1), X(t_2), \dots)$ zu. Mit ihrer Hilfe können wir nun eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}_{p,q}$ erklären: Zwei Pfade $X, Y \in \mathcal{B}_{p,q}$ seien äquivalent, falls $f^X = f^Y$ gilt. Die Äquivalenzklassen schreiben wir als $\mathcal{B}_{p,q}^f$. Weil sie die Menge $\mathcal{B}_{p,q}$ zerlegen, gilt für die Kardinalitäten:

$$B_{p,q} = B_{p,q}^{(\emptyset)} + B_{p,q}^{(a)} + B_{p,q}^{(b)} + B_{p,q}^{(a,b)} + B_{p,q}^{(b,a)} + B_{p,q}^{(a,b,a)} + B_{p,q}^{(b,a,b)} + \dots \quad (231)$$

Spiegeln wir von einem Pfad $X \in \mathcal{B}_{p,q}^{(b)} \cup \mathcal{B}_{p,q}^{(a,b)}$ den Teil rechts der Stelle, an der er das erste mal die Höhe b erreicht, an der Linie $X = b$, so erhalten wir einen Pfad in $\mathcal{B}_{p,2b-q}(b + (b - a))$. Diese Abbildung ist bijektiv. Also ist

$$B_{p,q}^{(b)} + B_{p,q}^{(a,b)} = B_{p,2b-q}(b + (b - a)). \quad (232)$$

Da $a \leq q$ gilt, ergibt sich mit dem Spiegelungsprinzip

$$B_{p,q}^{(b)} + B_{p,q}^{(a,b)} = B_{p,2b-q} - B_{p,q+2(b-a)}. \quad (233)$$

Wegen der Symmetrie des Problems ist nach Vertauschen von a und b

$$B_{p,q}^{(a)} + B_{p,q}^{(b,a)} = B_{p,2b-q-2(b-a)} - B_{p,q-2(b-a)}. \quad (234)$$

Sei nun X ein Pfad in $\mathcal{B}_{p,q}^{(b,a,b)} \cup \mathcal{B}_{p,q}^{(a,b,a,b)}$. Zuerst spiegeln wir wieder den Teil rechts der Stelle t_b , an der er das erste mal die Höhe b erreicht, an der Linie $X = b$. Im gespiegelten Pfad suchen wir nun die Stelle t_{2b-a} , an der der Pfad das erste Mal die Höhe $b + (b - a)$ erreicht. Der Teil rechts von t_{2b-a} wird an der

¹³Diese Identität nennt man Spiegelungsprinzip.

Linie $X = 2b - a$ gespiegelt. Schließlich suchen wir in diesem durch zweifaches Spiegeln entstandenen Pfad die Stelle t_{3b-2a} und spiegeln rechts davon an der Linie $X = 3b - 2a$. Wir erhalten so einen Pfad in $\mathcal{B}_{p,2b-q+2(b-a)}(b + 3(b-a))$. Diese Konstruktion $\mathcal{B}_{p,q}^{(b,a,b)} \cup \mathcal{B}_{p,q}^{(a,b,a,b)} \rightarrow \mathcal{B}_{p,2b-q+2(b-a)}(b + 3(b-a))$ ist bijektiv, wir erhalten

$$\begin{aligned} B_{p,q}^{(b,a,b)} + B_{p,q}^{(a,b,a,b)} &= B_{p,2b-q+2(b-a)}(b + 3(b-a)) \\ &= B_{p,2b-q+2(b-a)} - B_{p,q+4(b-a)} \end{aligned} \quad (235)$$

und wieder nach Vertauschen von a und b ist

$$B_{p,q}^{(a,b,a)} + B_{p,q}^{(b,a,b,a)} = B_{p,2b-q-4(b-a)} - B_{p,q-4(b-a)}. \quad (236)$$

Fahren wir auf diese Weise fort und lösen wir Gleichung (231) nach $B_{p,q}^{(0)} = B_{p,q}(a, b)$ auf, ergibt sich die Darstellung aus Satz 60.

Eine unmittelbare Folgerung von Satz 60 ist nun:

Korollar 61. *Für ganze Zahlen $s \geq 1$, $k \geq 2$ und $\tilde{G}_s(k) := G_{s-1}(k-1)$ gilt:*

$$\tilde{G}_s(k) = 1 + 2 \sum_{m \in k \cdot \mathbb{N}} \frac{s - 2m^2}{s + m} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{s-j}{s+j}. \quad (237)$$

Beweis. Wir wenden die Formel aus Satz 60 an. Es ist

$$C_{s-1} \cdot \tilde{G}_s(k) = B_{2s-2,0}(-1, k-1) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{2s-2,2mk} - \sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{2s-2,2k-2+2mk}. \quad (238)$$

Nach Indexverschiebung schreiben wir $\sum_{m \in \mathbb{Z}} B_{2s-2,2mk-2}$ für die zweite Summe. Nutzen wir die Symmetrie $B_{p,q} = B_{p,-q}$ aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} C_{s-1} \cdot \tilde{G}_s(k) &= B_{2s-2,0} - B_{2s-2,2} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (2B_{2s-2,2mk} - B_{2s-2,2mk-2} - B_{2s-2,2mk+2}). \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir die Formel $B_{p,q} = \binom{p}{(p-q)/2}$, siehe Seite 36. Für die Terme vor der Summe ergibt sich

$$B_{2s-2,0} - B_{2s-2,2} = \binom{2s-2}{s-1} - \binom{2s-2}{s-2} = \frac{1}{s} \binom{2s-2}{s-1} = C_{s-1}, \quad (239)$$

siehe Satz 41, und für die Summanden mit $s \geq mk + 2$:

$$\begin{aligned}
& 2B_{2s-2,2mk} - B_{2s-2,2mk-2} - B_{2s-2,2mk+2} \\
&= 2 \binom{2s-2}{s-mk-1} - \binom{2s-2}{s-mk} - \binom{2s-2}{s-mk-2} \\
&= \frac{(2s-2)!}{(s-mk)!(s+mk)!} \left(2(s-mk)(s+mk) - (s+mk)(s+mk-1) \right. \\
&\quad \left. - (s-mk)(s-mk-1) \right) \\
&= \frac{(2s-2)!(2s-4(mk)^2)}{(s-mk)!(s+mk)!} \\
&= C_{s-1} \cdot 2 \frac{s-2(mk)^2}{s+mk} \frac{(s-1)!}{(s-mk)!} \frac{s!}{(s+mk-1)!} \\
&= C_{s-1} \cdot 2 \frac{s-2(mk)^2}{s+mk} \prod_{j=1}^{mk-1} \frac{s-j}{s+j}
\end{aligned} \tag{240}$$

In den Fällen $s \leq mk - 1$, $s = mk$ und $s = mk + 1$ prüft man die Gleichheit von erster und letzter Zeile obiger Rechnung direkt nach. Der Reihe nach erhält man $0 = 0$, $-1 = -1$ und $4 - 2s = 4 - 2s$. Einsetzen und Umsummieren liefert die Behauptung. \square

Für den Beweis von Lemma 65 brauchen wir noch einige Hilfssätze:

Proposition 62. *Es seien $a < \xi < b$ reelle Zahlen. Für eine im Intervall $[a, \xi]$ monoton steigende und im Intervall $[\xi, b]$ monoton fallende nichtnegative reellwertige Funktion f gilt die Abschätzung*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a, b]} f(k) \leq \max_{x \in [a, b]} f(x) + \int_a^b f(x) dx. \tag{241}$$

Beweis. Der Fall $\mathbb{Z} \cap [a, b] = \emptyset$ ist trivial. Sei also $\mathbb{Z} \cap [a, b] \neq \emptyset$ und $\hat{\xi}$ eine Maximalstelle von $f|_{\mathbb{Z} \cap [a, b]}$. Dann ist $f|_{[k, k+1]} \geq f(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z} \cap [a, \hat{\xi})$ und $f|_{[k-1, k]} \geq f(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z} \cap (\hat{\xi}, b]$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a, b]} f(k) &= f(\hat{\xi}) + \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a, \hat{\xi})} f(k) + \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap (\hat{\xi}, b]} f(k) \\
&\leq f(\hat{\xi}) + \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap [a, \hat{\xi})} \int_k^{k+1} f(x) dx + \sum_{k \in \mathbb{Z} \cap (\hat{\xi}, b]} \int_{k-1}^k f(x) dx \\
&\leq f(\hat{\xi}) + \int_a^{\hat{\xi}} f(x) dx + \int_{\hat{\xi}}^b f(x) dx \\
&\leq \max_{x \in [a, b]} f(x) + \int_a^b f(x) dx.
\end{aligned} \tag{242}$$

Das ist die Behauptung. \square

Proposition 63. *Es sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_k = 0$ für fast alle k ,¹⁴ so dass für ein $\xi \in \mathbb{N}$ gilt: $a_k \leq a_{k+1}$ für $k < \xi$ und $a_k \geq a_{k+1}$ für $k \geq \xi$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{\substack{k=l \\ \text{step } l}}^{\infty} a_k := \sum_{k \in l \cdot \mathbb{N}} a_k \leq a_{\max(l, \xi)} + \frac{1}{l} \sum_{k=l}^{\infty} a_k. \quad (243)$$

Beweis. Sei $\tilde{\xi} \in l \cdot \mathbb{N}$ mit $a_{\tilde{\xi}} = \max_{k \in l \cdot \mathbb{N}} a_k$. Wegen der stückweisen Monotonie der Folge hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} l \cdot \sum_{\substack{k=l \\ \text{step } l}}^{\infty} a_k &= la_{\tilde{\xi}} + \sum_{\substack{k=l \\ \text{step } l}}^{\tilde{\xi}-l} la_k + \sum_{\substack{k=\tilde{\xi}+l \\ \text{step } l}}^{\infty} la_k \\ &\leq la_{\tilde{\xi}} + \sum_{\substack{k=l \\ \text{step } l}}^{\tilde{\xi}-l} (a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+l-1}) \\ &\quad + \sum_{\substack{k=\tilde{\xi}+l \\ \text{step } l}}^{\infty} (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_{k-l+1}) \\ &= la_{\tilde{\xi}} + \sum_{k=l}^{\tilde{\xi}-1} a_k + \sum_{k=\tilde{\xi}+1}^{\infty} a_k = (l-1)a_{\tilde{\xi}} + \sum_{k=l}^{\infty} a_k. \end{aligned} \quad (244)$$

Es ist stets $a_{\tilde{\xi}} \leq a_{\xi}$, im Fall $l \geq \xi$ gilt sogar $a_{\tilde{\xi}} = a_l$. Damit folgt nach Teilen durch l die Behauptung. \square

Proposition 64. *Für ganze Zahlen $m \geq 0$ und $n \geq 1$ gilt:*

$$\prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{m^2}{2n} + \frac{m}{2n}\right). \quad (245)$$

Beweis. Der Fall $m \geq n$ ist für $m \geq 2$ trivial, für $m = n = 1$ rechnet man direkt. Für $m < n$ gilt wegen $\ln(1+x) \leq x$ für alle $x > -1$

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{m-1} \ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq -\sum_{k=1}^{m-1} \frac{k}{n} = -\frac{m(m-1)}{2n} \quad (246)$$

und damit folgt die Behauptung. \square

Wir können jetzt den Hauptgedanken des Beweises von Satz 59 formulieren:

Lemma 65. *Für jedes $\lambda > 0$ ist*

$$\sup_{s \geq 1} \frac{\lambda}{\sqrt{2s}} \sum_{k=1}^s e^{\lambda k / \sqrt{2s}} (1 - G_s(k)) < \infty. \quad (247)$$

¹⁴Auf die Voraussetzung $a_k = 0$ für fast alle k kann verzichtet werden. Die Aussage gilt auch im Falle divergenter Reihen.

Beweis. Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass

$$\sup_{s \geq s_0} \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=2}^{\infty} e^{\lambda k / \sqrt{s}} (1 - \tilde{G}_s(k)) < \infty \quad (248)$$

ist für ein $s_0 \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\pi_m := \prod_{j=1}^m \frac{s-j}{s+j}. \quad (249)$$

Zunächst betrachten wir nach Korollar 61 die Größe

$$(1 - \tilde{G}_s(k))/2 = \sum_{m \in k \cdot \mathbb{N}} a_m \quad \text{mit} \quad a_m = \frac{2m^2 - s}{s+m} \pi_{m-1}. \quad (250)$$

Wir wollen Proposition 63 anwenden. Dazu müssen wir die Monotonieeigenschaften der Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ untersuchen. Sofort sieht man, dass $a_m = 0$ ist für $m \geq s+1$, weil das Produkt π_{m-1} in der obigen Darstellung von a_m dann den Faktor 0 enthält. In allen anderen Fällen interessiert uns das Vorzeichen von

$$a_{m+1} - a_m = \left(\frac{2(m+1)^2 - s}{s+m+1} \frac{s-m}{s+m} - \frac{2m^2 - s}{s+m} \right) \pi_{m-1} \quad (251)$$

Die Klammer ist gleich

$$\frac{(2(m+1)^2 - s)(s-m) - (2m^2 - s)(s+m+1)}{(s+m)(s+m+1)}. \quad (252)$$

Der Zähler dieses Bruches ist gleich $(2m+1)(3s - 2m^2 - 2m)$. Er wechselt das Vorzeichen genau einmal, und zwar bei $m_0 = (-1 + \sqrt{1+6s})/2$ von Plus nach Minus. Die Folge $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ erfüllt damit die Voraussetzung von Proposition 63 mit $\xi = \lceil m_0 \rceil$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=2}^{\infty} e^{\lambda k / \sqrt{s}} (1 - \tilde{G}_s(k)) \\ & \leq \frac{2}{\sqrt{s}} \sum_{k=2}^{\infty} e^{\lambda k / \sqrt{s}} \left(a_{\max(\lceil m_0 \rceil, k)} + \frac{1}{k} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{2m^2 - s}{s+m} \pi_{m-1} \right). \end{aligned} \quad (253)$$

Wir schätzen $a_{\max(\lceil m_0 \rceil, k)}$ weiter ab, indem wir die Fälle $\max(\lceil m_0 \rceil, k) = \lceil m_0 \rceil$ und $\max(\lceil m_0 \rceil, k) = k$ getrennt behandeln. Es gilt

$$a_{\lceil m_0 \rceil} \leq \frac{2\lceil m_0 \rceil^2 - s}{s + \lceil m_0 \rceil} \leq \frac{2(m_0 + 1)^2}{s} - 1 \leq 5 \quad (254)$$

wegen $2(m_0 + 1)^2 = 1 + \sqrt{1+6s} + 3s \leq 6s$ für $s \geq s_0 \geq 2$. Mithilfe von Proposition 64 und unter Verwendung von $a_k = 0$ für $k \geq s+1$ erhalten wir außerdem $\pi_{k-1} \leq e \cdot e^{-k^2/(2s)}$ und somit

$$a_k = \frac{2k^2 - s}{s+k} \pi_{k-1} \leq 2e \frac{k^2}{s} e^{-k^2/(2s)}. \quad (255)$$

Die entscheidende Beobachtung¹⁵ ist nun

$$\pi_m - \pi_{m-1} = \pi_{m-1} \left(\frac{s-m}{s+m} - 1 \right) = \pi_{m-1} \frac{-2m}{s+m}. \quad (256)$$

Damit berechnen wir die Teleskopsumme

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^s \frac{2m^2}{s+m} \pi_{m-1} &= \sum_{m=k}^s m (\pi_{m-1} - \pi_m) \\ &= \sum_{m=k}^s m \pi_{m-1} - \sum_{m=k+1}^{s+1} (m-1) \pi_{m-1} \\ &= k \pi_{k-1} - s \pi_s + \sum_{m=k+1}^s \pi_{m-1} \\ &= (k-1) \pi_{k-1} + \sum_{m=k}^s \pi_{m-1}. \end{aligned} \quad (257)$$

Wir wiederholen den Trick

$$\begin{aligned} \sum_{m=k}^s \frac{2m^2 - s}{s+m} \pi_{m-1} &= (k-1) \pi_{k-1} + \sum_{m=k}^s \left(1 - \frac{s}{s+m} \right) \pi_{m-1} \\ &= (k-1) \pi_{k-1} + \sum_{m=k}^s \frac{m}{s+m} \pi_{m-1} \\ &= (k-1) \pi_{k-1} - \frac{1}{2} \sum_{m=k}^s (\pi_m - \pi_{m-1}) \\ &= (k-1/2) \pi_{k-1} \end{aligned} \quad (258)$$

und setzen das Ergebnis in Ungleichung (253) ein. Mit den Abschätzungen (254) und (255) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{k=2}^{\infty} e^{\lambda k/\sqrt{s}} (1 - \tilde{G}_s(k)) \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{s}} \sum_{k=2}^{\infty} e^{\lambda k/\sqrt{s}} (a_{\max(\lceil m_0 \rceil, k)} + \pi_{k-1}) \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{s}} \left(\sum_{k=2}^{\lceil m_0 \rceil} e^{\lambda k/\sqrt{s}} (5+1) + \sum_{k=\lceil m_0 \rceil+1}^{\infty} e^{\lambda k/\sqrt{s}} (2ek^2/s + e) e^{-k^2/(2s)} \right) \\ &\leq \frac{12}{\sqrt{s}} \lceil m_0 \rceil e^{\lambda \lceil m_0 \rceil/\sqrt{s}} + \frac{2e}{\sqrt{s}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2}{s} + 1 \right) \exp \left(\lambda \frac{k}{\sqrt{s}} - \frac{k^2}{2s} \right) \end{aligned} \quad (259)$$

¹⁵gemeinsam mit Peter Otte, Ruhr-Universität Bochum

Der $\lceil m_0 \rceil$ -Term ist gleichmäßig in s beschränkt. Den noch verbleibenden Rest schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k^2}{s} + 1 \right) \exp \left(\lambda \frac{k}{\sqrt{s}} - \frac{k^2}{2s} \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \lambda\sqrt{s} \rfloor} \left(\frac{2k^2}{s} + 1 \right) \exp \left(\lambda \frac{k}{\sqrt{s}} \right) \\
& \quad + \sum_{k=\lceil \lambda\sqrt{s} \rceil}^{\infty} \left(\frac{2k^2}{s} + 1 \right) \exp \left(-\frac{(k - \lambda\sqrt{s})^2}{2s} + \frac{\lambda^2}{2} \right) \\
& \leq \lambda\sqrt{s} (2\lambda^2 + 1) e^{\lambda^2} + e^{\lambda^2/2} \sum_{k=\lceil \lambda\sqrt{s} \rceil}^{\infty} \left(\frac{2k^2}{s} + 1 \right) \exp \left(-\frac{(k - \lceil \lambda\sqrt{s} \rceil)^2}{2s} \right)
\end{aligned} \tag{260}$$

Wir müssen uns nur noch um die Summe über k kümmern. Nach Indexverschiebung ist sie gleich

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2(k + \lceil \lambda\sqrt{s} \rceil)^2}{s} + 1 \right) \exp \left(-\frac{k^2}{2s} \right) \leq c_1 \sqrt{s} + c_2 \sum_{k=\lceil \lambda\sqrt{s} \rceil}^{\infty} \frac{k^2}{s} \exp \left(-\frac{k^2}{2s} \right) \tag{261}$$

mit Konstanten c_1, c_2 , die nur von λ abhängen. Die letzte Summe ist wiederum nach oben beschränkt durch $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ mit $f(x) = x^2/s \exp(-x^2/(2s))$. Die Ableitung

$$f'(x) = \frac{x}{s} \left(2 - \frac{x^2}{s} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2s} \right) \tag{262}$$

ist zunächst positiv und für $x > \sqrt{2s}$ dann negativ. Nach Proposition 62 ist somit für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n f(k) \leq \max_x f(x) + \int_0^{\infty} f(x) dx \leq \frac{2}{e} + \sqrt{s} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{e} + \sqrt{s} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{263}$$

und damit

$$\sum_{k=\lceil \lambda\sqrt{s} \rceil}^{\infty} \frac{k^2}{s} \exp \left(-\frac{k^2}{2s} \right) \leq \frac{2}{e} + \sqrt{s} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{264}$$

Zurückeinsetzen der Abschätzungen (264) in (261), (261) in (260) und (260) in (259) liefert das Gewünschte. \square

Satz 59 ist damit bewiesen. Der Vollständigkeit halber notieren wir zum Abschluss dieses Abschnitts:

Beweis von Satz 59. Wir kombinieren (218) und Lemma 65. \square

II.8 Spuren von Matrixpotenzen

Dieser Abschnitt umfasst den kombinatorischen Beweis des Hauptresultats der Arbeit, Satz 67 (siehe auch Seite 7). Bereits in der Einleitung haben wir in (6) gesehen, dass wir die Spur einer Matrixpotenz als Summe über geschlossene Pfade auffassen können. Betrachten wir den Erwartungswert dieser Summe, so sind die Summanden gerade die Beiträge $\mathbb{E}\xi_\gamma$ der einzelnen Pfade. Wir wollen zeigen, dass Pfade γ , mit $\mathcal{E}^\gamma \neq \mathcal{E}_2^\gamma$, einen Beitrag leisten, der (für $n \rightarrow \infty$) vernachlässigbar ist. Das kombinatorische Abschätzverfahren ist nun folgendermaßen. Zuerst wird ein Satz von Pfadparametern aus der Liste

$$d^\gamma, a^\gamma, \delta_1^\gamma, q^\gamma, q_{1,3}^\gamma, K^\gamma, X^\gamma, S^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma, n_k^\gamma \quad (265)$$

festgelegt. Jetzt sind zwei Fragen zu beantworten. Erstens: Wieviele Pfade gibt es zu diesem Satz von Parametern? Zweitens: Wie groß sind ihre Beiträge? Letzteres beantwortet Satz 37 durch Angabe einer oberen Schranke. In diesem Abschnitt wird ein Konstruktionsverfahren angegeben, das dann die erste Frage durch Angabe einer geeigneten oberen Schranke für die Anzahl dieser Pfade beantwortet. Anschließend wird über alle Pfadparameter-Konfigurationen summiert, für die wenigstens einer der sechs Parameter

$$\delta_1^\gamma, q_{1,3}^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma, S_\infty^\gamma \quad (266)$$

größer als 0 ist. Proposition 39 stellt nämlich sicher, dass diese Bedingung für alle Pfade γ mit $\mathcal{E}^\gamma \neq \mathcal{E}_2^\gamma$ erfüllt ist.

Die Wohldefiniertheit des Konstruktionsverfahrens sichert das folgende Lemma. Mit den Bezeichnungen von Stanley ([27], S. 293 ff.) formulieren wir:

Lemma 66. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und T ein Baum mit Wurzel v_0 und Länge $\leq n$. Seien ferner $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$. Zu jeder Folge von Vertices v_0, v_1, \dots, v_l , für die v_l ein Blatt von T und v_i ein Nachfolger von v_{i-1} ist, $1 \leq i \leq l$,¹⁶ gebe es eine Permutation $\sigma \in S_n$, so dass v_{i-1} höchstens $p_{\sigma(i)}$ Nachfolger besitzt, $1 \leq i \leq l$. Dann hat T höchstens $p_1 p_2 \dots p_n$ Blätter.*

Beweis. Induktion über n . Der Fall $n = 1$ ist trivial. Induktionsschritt von n nach $n + 1$: Für jedes Blatt b von T seien $(v_0(b), v_1(b), \dots, v_{l_b}(b))$ die (eindeutig bestimmte) Folge von Vertices mit

- (i) $v_0(b) = v_0$,
- (ii) $v_{l_b}(b) = b$,
- (iii) für alle $1 \leq i \leq l_b$ ist $v_i(b)$ Nachfolger von $v_{i-1}(b)$,

und $\sigma_b \in S_{n+1}$ eine Permutation, so dass $v_{i-1}(b)$ höchstens $p_{\sigma_b(i)}$ Nachfolger besitzt, $1 \leq i \leq l_b$. Wir wählen $1 \leq k \leq n + 1$ so, dass gilt

$$p_k = \min\{p_{\sigma_b(1)} \mid b \text{ ist Blatt von } T\}. \quad (267)$$

Für jedes Blatt b sei $\tau_b \in S_{n+1}$ die Transposition, die k und $\sigma_b(1)$ vertauscht. Wir setzen $\sigma'_b := \tau_b \circ \sigma_b$. Dann ist wegen

$$p_{\sigma'_b(\sigma_b^{-1}(k))} = p_{\tau(k)} = p_{\sigma_b(1)} \geq p_k = p_{\sigma_b(\sigma_b^{-1}(k))} \quad (268)$$

¹⁶Man stelle sich einen Pfad durch den Baum von der Wurzel zu einem Blatt vor.

auch σ'_b eine Permutation mit den geforderten Eigenschaften. Darüberhinaus gilt $p_{\sigma'_b(1)} = p_k$ für alle Blätter b .

Durch Entfernen der Wurzel v_0 von T erhalten wir also höchstens p_k Bäume der Länge $\leq n$ mit den Nachfolgern von v_0 als Wurzeln, die nach Induktionsvoraussetzung jeweils höchstens $\frac{p_1 \cdots p_{n+1}}{p_k}$ Blätter besitzen (wir wählen dazu die Permutationen $\sigma_b^* \in S_n$ mit $\sigma_b^*(j) = \sigma'_b(j+1)$). \square

Für $n, p \in \mathbb{N}$ setzen wir (vgl. (7), (14))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{n,p} &:= \{\text{geschlossene Pfade der Länge } p \text{ auf } \{1, \dots, n\}\}, \\ \mathcal{P}_{n,p}^{(2)} &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid \mathcal{E}^\gamma = \mathcal{E}_2^\gamma\}, \\ \hat{\mathcal{P}}_{n,p} &:= \mathcal{P}_{n,p} \setminus \mathcal{P}_{n,p}^{(2)}, \end{aligned} \tag{269}$$

siehe Seite 24 und (154). Ferner definieren wir für A_n wie in (18)

$$\begin{aligned} x_n(p) &:= \mathbb{E} \operatorname{tr} A_n^p = \sum_{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p}} \frac{\mathbb{E} \xi_\gamma}{(2\sigma\sqrt{n})^p}, \\ y_n(p) &:= \sum_{\gamma \in \hat{\mathcal{P}}_{n,p}} \frac{|\mathbb{E} \xi_\gamma|}{(2\sigma\sqrt{n})^p}, \end{aligned} \tag{270}$$

vgl. 15.

Wir setzen noch $M_\infty^\gamma := \sum_{k>\omega} kn_k^\gamma$, $S_*^\gamma := S^\gamma - S_\infty^\gamma$ und $x_*^\gamma := l_*^\gamma + m_*^\gamma + r_*^\gamma$.

Satz 67. *Seien $0 < u < v < \infty$ und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger ganzer Zahlen mit $u \leq p_n/n^{2/3} \leq v$. Für ein Wigner-Ensemble zweiter Art zum Parameter $0 < \alpha < 1/48$ gilt:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(p_n) = 0$,
- (ii) $0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n(p_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n(p_n) < \infty$.

Beweis. Unmittelbar aus Teilaussage (i) und (269), (270) folgt, dass gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n(p_n) \geq 0. \tag{271}$$

Ohne Einschränkung gelte $u \leq 1 \leq v$.

Im Verlauf des Beweises sind einige zunächst unbestimmte Parameter geeignet einzustellen, damit die Abschätzungen funktionieren. Um gleich eine richtige Größenvorstellung zu haben, geben wir schon hier die Bedingungen an, nach denen die Parameter zu wählen sind:

$$\begin{aligned} 0 < \beta &\leq \frac{1 - 48\alpha}{8}, & \omega &> \frac{24}{1 - 48\alpha} - 1, \\ 0 < \varepsilon &< \frac{1 - 48\alpha}{12}, & c &\geq 2(6ve^2)^{\omega+1}, \\ 0 < \varrho &< \frac{1 - 48\alpha}{8}. \end{aligned} \tag{272}$$

Dabei ist ω der zunächst unbestimmt gelassene Parameter aus den Definitionen von l_*, m_*, r_*, S_∞ . Die Bedingungen an α ergeben sich ebenso aus diesem

Beweis, daher behandeln wir auch α zunächst als unbestimmt. Um die Rechnungen durchsichtig zu halten, werden wir die Parameter nie konkret wählen. Stattdessen werden wir in Randnotizen über die Bedingungen an sie buchführen.

Wir schreiben p statt p_n und beginnen mit dem Beweis von Teilaussage (i) des Satzes. Für die Teilmengen (siehe (140), (160), (178), (212))

$$\begin{aligned}
P_1 &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \geq c \frac{p^2}{n}\}, \\
P_2 &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \leq c \frac{p^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \geq p^\beta\}, \\
P_3 &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \leq c \frac{p^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \leq p^\beta, a^\gamma > \omega\}, \\
P_4 &:= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \leq c \frac{p^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \leq p^\beta, a^\gamma \leq \omega, q_{13}^\gamma + \delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma > 0\}
\end{aligned} \tag{273}$$

von $\mathcal{P}_{n,p}$ gilt nach Proposition 39: $\hat{\mathcal{P}}_{n,p} \subseteq (P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4)$. Auf $\mathcal{P}_{n,p}$ definieren wir die vier Abbildungen

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma) &:= (d^\gamma, q^\gamma, q_{13}^\gamma, X^\gamma, S^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, n_{\omega+1}^\gamma, n_{\omega+2}^\gamma, \dots), \\
f_2(\gamma) &:= (d^\gamma, a^\gamma, q^\gamma, q_{13}^\gamma, K^\gamma, X^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma, n_{\omega+1}^\gamma, n_{\omega+2}^\gamma, \dots), \\
f_3(\gamma) &:= (q^\gamma, q_{13}^\gamma, X^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma, n_{\omega+1}^\gamma, n_{\omega+2}^\gamma, \dots), \\
f_4(\gamma) &:= (\delta_1^\gamma, q^\gamma, q_{13}^\gamma, X^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma).
\end{aligned} \tag{274}$$

Für $w \in W_i := f_i(P_i)$ sei ferner $C_i(w) := \sup_{\gamma \in f_i^{-1}(\{w\})} |\mathbb{E} \xi_\gamma|$. Allein aufgrund der Überdeckungseigenschaft der P_i (und unabhängig von der konkreten Wahl der f_i) gilt

$$\sum_{\gamma \in \hat{\mathcal{P}}_{n,p}} |\mathbb{E} \xi_\gamma| \leq \sum_{i=1}^4 \sum_{w \in W_i} \sum_{\gamma \in f_i^{-1}(\{w\})} |\mathbb{E} \xi_\gamma| \leq \sum_{i=1}^4 \sum_{w \in W_i} C_i(w) |f_i^{-1}(\{w\})| \tag{275}$$

und wir haben die Behauptung (i) bewiesen, wenn wir für $i = 1, 2, 3, 4$ zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W_i} g_i(w) = 0 \quad \text{mit} \quad g_i(w) := \frac{C_i(w)}{\sigma^p} \frac{|f_i^{-1}(\{w\})|}{(2\sqrt{n})^p}. \tag{276}$$

Dafür sind jeweils $C_i(w)$ und $|f_i^{-1}(\{w\})|$ geeignet abzuschätzen. Für $C_i(w)$ werden wir Satz 37 verwenden. Für $|f_i^{-1}(\{w\})|$, die Zahl der Pfade zu einer durch $w \in W_i$ vorgegebenen Konfiguration von Pfadparametern, konstruieren wir aus folgendem Baukastensystem für jedes i ein Abzählverfahren, mit dessen Hilfe wir abschätzen, und zwar gemäß dieser Tabelle:

i	Abzählverfahren, bestehend aus den Modulen
1	1—2—3a—4a—5a—6a—7a
2	1—2—3b—4b—5b—6a—7b
3	1—2—3b—4b—5b—6a—7c
4	3c—4b—5b—6b—7d
5	3c—4b—5b—6a—7e

Die letzte Zeile der Tabelle wird erst im Beweis von Teilaussage (ii) gebraucht.

Wie wird $|f_i^{-1}(\{w\})|$ abgeschätzt? Modulbaukasten:

1. Unter den M markierten Zeitpunkten wähle aus, welche Zeitpunkte zu den Vertices der Ordnung $> \omega$ gehören. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$\binom{M}{M_\infty} \quad (277)$$

2. Lege fest, welche der Zeitpunkte, die zu Vertices der Ordnung $> \omega$ gehören, je einem Vertex zugeordnet sind. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten dafür ist höchstens

$$\binom{M_\infty}{\underbrace{\omega+1, \dots, \omega+1}_{n_{\omega+1}}, \underbrace{\omega+2, \dots, \omega+2}_{n_{\omega+2}}, \dots} \prod_{k>\omega} \frac{1}{n_k!} \quad (278)$$

- 3a. Lege fest, an welchen der $M - M_\infty$ markierten Zeitpunkten, die den Vertices der Ordnung $\leq \omega$ zugeordnet sind, die S_* Selbstschnitte stattfinden und wo unter diesen welche der $l_* + m_*$ speziellen Selbstschnitte sind. Dafür gibt es

$$\binom{M - M_\infty}{S_*} \binom{S_*}{S_* - l_* - m_*, l_*, m_*} \quad (279)$$

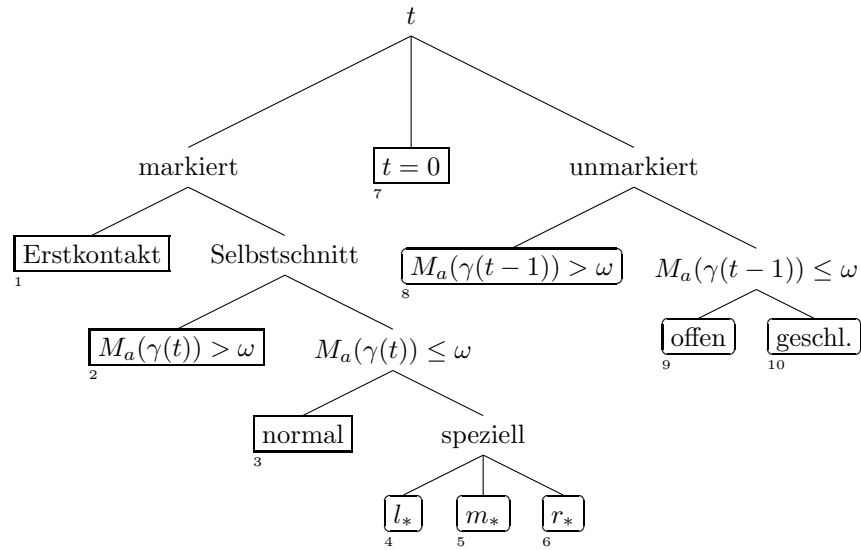
- 3b. Lege fest, an welchen der $M - M_\infty$ markierten Zeitpunkten, die den Vertices der Ordnung $\leq \omega$ zugeordnet sind, Selbstschnitte stattfinden und wo unter diesen welche speziellen Selbstschnitte sind. Dafür summieren wir

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M - M_\infty} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{x_*} \leq S_*} \binom{x_*}{l_*, m_*, r_*} \quad (280)$$

- 3c. Lege fest, an welchen der M markierten Zeitpunkten Selbstschnitte stattfinden und wo unter diesen welche speziellen Selbstschnitte sind. Dafür summieren wir

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{x_*} \leq S_*} \binom{x_*}{l_*, m_*, r_*} \quad (281)$$

Jetzt ist über jeden markierten Zeitpunkt t bekannt, zu welchem der Blätter 1–6 in unten stehendem Baum er gehört (wobei es Blatt 6 im Fall $i = 1$ nicht gibt). Dabei heißt ein Zeitpunkt t mit $t = \min \mathfrak{M}_a(\gamma(t))$ Erstkontakt.



Zuerst wählen wir die Vertices bei Zeitpunkten, die zu den Blättern 1 und 2 (Modul 4) , 3 (Modul 5), 7 (Modul 6) gehören. Begründungen zu den Abschätzungen der folgenden Module 4–7 befinden sich am Ende des Beweises.

- 4a. Wähle die Vertices bei den $M - S$ Zeitpunkten, die zu Blatt 1 gehören. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$n^{M-S} \quad (282)$$

- 4b. Wähle die Vertices bei den $M - S$ Zeitpunkten, die zu Blatt 1 gehören. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$n(n-1) \dots (n - (M - S) + 1) \quad (283)$$

Damit liegen auch die Vertices zu den Zeitpunkten von Blatt 2 fest.

- 5a. Wähle die Vertices bei den $S_* - l_* - m_*$ Zeitpunkten, die zu Blatt 3 gehören. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$M^{S_* - l_* - m_*} \quad (284)$$

- 5b. Wähle die Vertices bei den $S_* - x_*$ Zeitpunkten, die zu Blatt 3 gehören. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$\frac{j_1 \dots j_{S_*}}{j_{b_1} \dots j_{b_{x_*}}} \quad (285)$$

- 6a. Wähle den Startpunkt. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$n \quad (286)$$

6b. Wähle den Startpunkt. Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist höchstens

$$n^{1-\delta_1} M^{\delta_1} \quad (287)$$

Nun sind die Vertices bei Zeitpunkten, die zu den Blättern 1, 2, 3, 7 gehören, gewählt. Um die Vertices an den verbleibenden Zeitpunkten festzulegen, gehe den Pfad von vorne nach hinten durch (die Zeitpunkte von 0 nach p). Jeder Zeitpunkt t , an dem noch kein Vertex gewählt wurde, gehört zu einem der Blätter 4–6, wenn er markiert ist, oder 8–10, wenn er unmarkiert ist. Triff eine Wahl, sobald so ein Zeitpunkt erreicht ist. Dann ist sichergestellt, dass immer der gesamte Pfad bis $t - 1$ bekannt ist. Wir verwenden Lemma 66.

7a. Möglichkeiten, den Pfad zu vervollständigen, beschränkt durch:

$$(1 + S + d)^{m_*} (2\omega)^{2(1+S_*)} \prod_{k>\omega} (2k)^{kn_k} \quad (288)$$

7b. Möglichkeiten, den Pfad zu vervollständigen, beschränkt durch:

$$(a + d)^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(1+x_*)} \prod_{k>\omega} (2k)^{kn_k} \quad (289)$$

7c. Möglichkeiten, den Pfad zu vervollständigen, beschränkt durch:

$$(p^\beta)^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(1+x_*)} \prod_{k>\omega} (2k)^{kn_k} \quad (290)$$

7d. Möglichkeiten, den Pfad zu vervollständigen, beschränkt durch:

$$(p^\beta)^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(\delta_1+x_*)} \quad (291)$$

7e. Möglichkeiten, den Pfad zu vervollständigen, beschränkt durch:

$$(2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2r_*} \quad (292)$$

Wir beginnen mit $i = 1$. Für $w = (d, q, q_{13}, X, S, l_*, m_*, n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots) \in W_1$ sind festgelegt

$$\begin{aligned} M &= (p + q)/2, & S_\infty &= \sum_{k>\omega} (k - 1)n_k, \\ M_\infty &= \sum_{k>\omega} kn_k, & S_* &= S - S_\infty. \end{aligned} \quad (293)$$

Sei $w \in W_1$ gewählt. Mit Satz 37 ist für $n \geq n(v, \eta)$

$$\frac{C_1(w)}{\sigma^p} \leq 2n^{4\alpha(1+l_*+m_*+S_\infty)-(1/4+\eta)q_{13}} \quad (294)$$

Es verbleibt die Aufgabe, $|f_1^{-1}(\{w\})|$ abzuschätzen. Dafür verwenden wir das Abzählverfahren bestehend aus den Modulen 1., 2., 3a., 4a., 5a., 6a., 7a. aus

dem Baukasten. Wir erhalten so aus (277), (278), (279), (282), (284), (286), (288) die Abschätzung

$$|f_1^{-1}(\{w\})| \leq \frac{M^{S_*+M_\infty}}{(S_* - l_* - m_*)! l_*! m_*!} n n^{M-S} M^{S_*-l_*-m_*} (1+S+d)^{m_*} (2\omega)^{2(1+S_*)} \prod_{k>\omega} \frac{(2k)^{kn_k}}{k!^{n_k} n_k!}. \quad (295)$$

Satz 38 liefert

$$2q \leq q_{13} + 1 + l_* + m_* + S_\infty. \quad (296)$$

Damit und mit $M = (p+q)/2$ haben wir die Abschätzung

$$n^M \leq n^{p/2} n^{(q_{13}+1+l_*+m_*+S_\infty)/4} \quad (297)$$

Aus (294), (295), (297) erhalten wir mithilfe von $M \leq p$ und $k! \geq (k/3)^k$

$$g_1(w) \leq 2(2\omega)^2 \frac{n^{5/4} n^{4\alpha}}{2^p n^{\eta q_{13}}} \frac{\left((2\omega)^2 \frac{p^2}{n} \right)^{S_*-l_*-m_*}}{(S_* - l_* - m_*)!} \frac{\left((2\omega)^2 \frac{p n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{l_*}}{l_*!} \frac{\left((2\omega)^2 \frac{p(1+S+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{m_*}}{m_*!} \prod_{k>\omega} \frac{\left((6p)^k \left(\frac{n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{k-1} \right)^{n_k}}{n_k!} \quad (298)$$

Es ist $p \leq v n^{2/3}$. Wir wählen $\alpha < 1/48$. Für $k > \omega$ und $n \geq n(\alpha)$ gilt

$$\boxed{\alpha < 1/48}$$

$$(6p)^k \left(\frac{n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{k-1} \leq \frac{6vn^{2/3}}{e^{2(k-1)}} \left(6ve^2 \frac{n^{2/3} n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{k-1} \leq \frac{(6ve^2)^{\omega+1} n^{\frac{2}{3}-\omega(\frac{1}{12}-4\alpha)}}{e^{2(k-1)}}. \quad (299)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$A := (6ve^2)^{\omega+1} \quad (300)$$

und aus (298), (299), (300) erhalten wir mit $2(2\omega)^2 \leq (2e\omega)^2 \leq A$

$$g_1(w) \leq A \frac{n^{5/4} n^{4\alpha}}{2^p n^{\eta q_{13}} e^{2S}} \frac{\left(A \frac{p^2}{n} \right)^{S_*-l_*-m_*}}{(S_* - l_* - m_*)!} \frac{\left(A \frac{p n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{l_*}}{l_*!} \frac{\left(A \frac{p(S+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{m_*}}{m_*!} \prod_{k>\omega} \frac{\left(A n^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12} \right)^{n_k}}{n_k!} \quad (301)$$

Für $n \geq n(\eta)$ gilt

$$\sum_{q_{13}} n^{-\eta q_{13}} \leq \frac{1}{1-n^{-\eta}} \leq 2. \quad (302)$$

Wir verwenden den Polynomialsatz, um die Summation über l_* und m_* auszuführen. Es verbleibt

$$\sum_{w \in W_1} g_1(w) \leq 2A \frac{n^{5/4} n^{4\alpha}}{2^p} \sum_{(d,q,X,S,n_{\omega+1},n_{\omega+2},\dots)} \frac{\left(A \frac{p^2}{n} + 2A \frac{p(S+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{S_*}}{S_*! e^{2S}} \prod_{k>\omega} \frac{(A n^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12})^{n_k}}{n_k!} \quad (303)$$

Wir wählen $c \geq 2A$. Unter Verwendung von $x^{S_*}/S_*! \leq e^x$ für $x \geq 0$ können wir die erste Zeile des Summanden auf der rechten Seite von Ungleichung (303) für $n \geq n(\alpha, \omega)$ abschätzen durch

$$\boxed{c \geq 2A}$$

$$\exp\left(-S \left(2 - \frac{A}{c} - 2A \frac{pn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \leq \exp\left(-S + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \quad (304)$$

Die Summation über $n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots$ betrifft dann nur noch das Produkt in der zweiten Zeile von (303), da S_* nicht mehr vorkommt. Sei $\omega > 16/(1-48\alpha)$. Mit $n_k = 0$ für $k > p$ können wir für $n \geq n(\alpha, \omega)$ abschätzen:

$$\boxed{\omega > 16/(1-48\alpha)}$$

$$\sum_{(n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots)} \prod_{k>\omega} \frac{(A n^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12})^{n_k}}{n_k!} \leq \exp\left(\sum_{k=\omega+1}^p A n^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12}\right) \leq \exp\left(v A n^{-(\omega(1-48\alpha)-16)/12}\right) \leq 2, \quad (305)$$

wobei wir $p \leq vn^{2/3}$ verwendet haben. Es ist also

$$\sum_{w \in W_1} g_1(w) \leq 4A \frac{n^{5/4} n^{4\alpha}}{2^p} \sum_{(d,q,X,S)} \exp\left(-S + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \quad (306)$$

Wir zerlegen den Summationsbereich in 3 Teile. Mit $\sum_{(q,X)} 1 \leq \sum_q D_{p,q} \leq 2^p$ gilt erstens

$$\sum_{d \leq n^{1/3}} \sum_{(q,X,S)} \exp\left(-S + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \leq 2^p p^2 \exp\left(-\frac{p^2}{n} \left(c - 2A \frac{n^{7/12} n^{4\alpha}}{p}\right)\right) \quad (307)$$

und wegen $\alpha < 1/48$ und $p \geq un^{2/3}$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{7/12} n^{4\alpha}}{p} = 0, \quad (308)$$

woraus folgt, dass die erste Teilsumme gegen 0 konvergiert. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pd^\varepsilon n^{4\alpha}}{n^{3/4}} = 0 \quad (309)$$

für $\varepsilon < (1 - 48\alpha)/12$ ist zweitens für $n \geq n(\alpha, \omega, \varepsilon)$

$$\boxed{\varepsilon < (1 - 48\alpha)/12}$$

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq n^{1/3}} \sum_{S \geq 2d^{1-\varepsilon}} \sum_{(q, X)} \exp\left(-S + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \\ \leq 2^p p \sum_{d \geq n^{1/3}} \exp\left(-d^{1-\varepsilon} \left(2 - 2A \frac{pd^\varepsilon n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)\right) \\ \leq 2^p p^2 \exp\left(-n^{(1-\varepsilon)/3}\right). \end{aligned} \quad (310)$$

Hiermit ist auch die zweite Teilsumme abgehandelt. Sei n hinreichend groß, so dass $p \geq 18$ gilt. Für fixierte d, S liefert die Summation über q und X mit Satz 57

$$\begin{aligned} \sum_{(q, X)} 1 &\leq \sum_q F_{p, q}^{5+4S, d-S-1} \\ &\leq \sum_q D_{p, q} (18(p+1))^{3(5+4S)} (3/4)^{d-S-1} \\ &\leq 2^p (20p)^{15} \exp(13S \ln(p) - d \ln(4/3)), \end{aligned} \quad (311)$$

wobei wir $\frac{4}{3}(18p+18)^{12} \leq (20p)^{12}$ und $12 \ln(20p) \leq 13 \ln(p)$ verwendet haben. Damit ist drittens

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq n^{1/3}} \sum_{S \leq 2d^{1-\varepsilon}} \sum_{(q, X)} \exp\left(-S + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \\ \leq 2^p (20p)^{15} \sum_{d \geq n^{1/3}} \sum_{S \leq 2d^{1-\varepsilon}} \exp\left(13S \ln(p) - d \ln(4/3) + 2A \frac{pdn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \end{aligned} \quad (312)$$

Der Exponent auf der rechten Seite von Ungleichung (312) ist für $\varepsilon > 0$ und $n \geq n(\alpha, \omega, \varepsilon)$ wegen (309) und $d \geq n^{1/3}$ nach oben abgeschätzt durch

$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

$$-d^{1-\varepsilon} \left(d^\varepsilon \ln(4/3) - 26 \ln(p) - 2A \frac{pd^\varepsilon n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right) \leq -n^{(1-\varepsilon)/3} \quad (313)$$

Nach Einsetzen unserer drei Abschätzungen in (306) haben wir gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W_1} g_1(w) = 0. \quad (314)$$

Als nächstes diskutieren wir den Fall $i = 2$. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} P_2 &= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n, p} \mid S^\gamma \leq c \frac{p^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \geq p^\beta\}, \\ f_2(\gamma) &= (d^\gamma, a^\gamma, q^\gamma, q_{13}^\gamma, K^\gamma, X^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma, n_{\omega+1}^\gamma, n_{\omega+2}^\gamma, \dots) \end{aligned} \quad (315)$$

Für $w = (d, a, q, q_{13}^\gamma, K, X, S_*, l_*, m_*, r_*, n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots) \in W_2$ sind festgelegt:

$$\begin{aligned} M &= (p+q)/2, & S_\infty &= \sum_{k>\omega} (k-1)n_k, & x_* &= l_* + m_* + r_*, \\ M_\infty &= \sum_{k>\omega} kn_k, & S &= S_* + S_\infty, \end{aligned} \quad (316)$$

Analog zu (294) gilt:

$$\frac{C_2(w)}{\sigma^p} \leq 2n^{4\alpha(1+l_*+m_*+S_\infty)-(1/4+\eta)q_{13}} \quad (317)$$

Satz 38 liefert

$$\frac{1}{2^p} = \frac{2^q}{2^{p+q}} \leq \frac{2^{q_{13}+1+l_*+m_*+S_\infty}}{D_{p+q,0}}. \quad (318)$$

Um $|f_2^{-1}(\{w\})|$ abzuschätzen, müssen wir das Abzählverfahren, das wir im Fall $i = 1$ benutzt haben, verfeinern. Wir wählen stattdessen das aus den Modulen 1., 2., 3b., 4b., 5b., 6a., 7b. bestehende Abzählverfahren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |f_2^{-1}(\{w\})| &\leq \frac{M^{M_\infty} x_*!}{l_*! m_*! r_*!} n n(n-1) \dots (n - (M - S) + 1) \\ &\quad \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M - M_\infty} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{x_*} \leq S_*} \frac{j_1 \dots j_{S_*}}{j_{b_1} \dots j_{b_{x_*}}} \\ &\quad (a+d)^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(1+x_*)} \prod_{k>\omega} \frac{(2k)^{kn_k}}{k!^{n_k} n_k!}. \end{aligned} \quad (319)$$

Mit $S \leq c \frac{p^2}{n}$ und $M \leq p \leq vn^{2/3}$ gilt

$$\frac{M(S+1)}{n} \leq c \frac{p^3}{n^2} + \frac{p}{n} \leq cv^3 + v \quad (320)$$

Wir setzen $z := e^{cv^3+v}$. Damit ergibt sich aus Korollar 77

$$n(n-1) \dots (n - (M - S) + 1) \leq z n^{M-S} \exp\left(-\frac{M(M+1)}{2n}\right). \quad (321)$$

Die zweite Zeile von (319) ist nach Proposition 78 nach oben abgeschätzt durch

$$\frac{1}{(S_* - x_*)!} \left(\frac{M(M+1)}{2}\right)^{S_* - x_*} \frac{1}{x_*!} M^{x_*}, \quad (322)$$

Wir setzen $B := (12ve^2)^{\omega+1}$, siehe (300). Aus (317), (318), (319), (321), (322) mit analogem Vorgehen wie in (297), (298), (299) und mit Lemma 40 erhalten

wir analog zu (301)

$$\begin{aligned}
g_2(w) &\leq Bz \frac{n^{5/4} n^{4\alpha}}{e^K D_{p+q,0}} \exp\left(-\frac{M(M+1)}{2n}\right) \frac{\left(\frac{M(M+1)}{2n}\right)^{S_*-x_*}}{(S_*-x_*)!} \\
&\quad \left(\frac{2}{n^\eta}\right)^{q_{13}} \frac{\left(B \frac{pn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)^{l_*}}{l_*!} \frac{\left(B \frac{p(a+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)^{m_*}}{m_*!} \frac{\left(B \frac{2pX_{\max}}{n}\right)^{r_*}}{r_*!} \\
&\quad \left(\frac{((12ve^2)^a n^{-((a-1)(1-48\alpha)-8)/12})^{n_a}}{n_a!} \prod_{k=\omega+1}^{a-1} \frac{(Bn^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12})^{n_k}}{n_k!}\right)^{\delta_{a>\omega}}
\end{aligned} \tag{323}$$

mit

$$\delta_{a>\omega} := \begin{cases} 0, & \text{falls } a \leq \omega, \\ 1, & \text{falls } a > \omega. \end{cases} \tag{324}$$

Die Summation über $n_{\omega+1}, \dots, n_a$ tritt nur im Fall $a > \omega$ auf und für die Summation ist dann nur die letzte Zeile von (323) relevant. Sei also $a > \omega$. Es gilt für $\alpha < 1/48$ und $\omega > 16/(1-48\alpha)$

$$\frac{(a-1)(1-48\alpha)-8}{12a} \geq \frac{(\omega-1)(1-48\alpha)-8}{12\omega} \geq \frac{1}{2\omega} \tag{325}$$

$$\boxed{\alpha < 1/48}$$

$$\boxed{\omega > 16/(1-48\alpha)}$$

Es ist $n_a \geq 1$. Für $n \geq n(\alpha, \omega)$ erhalten wir mit (325) und Proposition 76 angewandt auf die Summe über n_a die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\sum_{(n_{\omega+1}, \dots, n_a)} \frac{((12ve^2)^a n^{-((a-1)(1-48\alpha)-8)/12})^{n_a}}{n_a!} \prod_{k=\omega+1}^{a-1} \frac{(Bn^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12})^{n_k}}{n_k!} \\
&\leq \left(\frac{12ve^2}{n^{1/(2\omega)}}\right)^a \exp\left(\left(\frac{12ve^2}{n^{1/(2\omega)}}\right)^a\right) \exp\left(\sum_{k=\omega+1}^{a-1} Bn^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12}\right) \\
&\leq 2\left(\frac{12ve^2}{n^{1/(2\omega)}}\right)^a \exp\left(vBn^{-(\omega(1-48\alpha)-16)/12}\right) \\
&\leq e^{-a}.
\end{aligned} \tag{326}$$

Die Summe über q_{13} schätzen wir für $n \geq n(\eta)$ wieder durch 2 ab, siehe (302). Ausführen der Summation über r_* , m_* , l_* und S_* liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in W_2} g_2(w) &\leq 2Bz n^{5/4} n^{4\alpha} \sum_{(d,a,q,K)} \exp\left(-K + 2B \frac{p(a+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} - a\delta_{a>\omega}\right) \\
&\quad \frac{1}{D_{p+q,0}} \sum_X \exp\left(B \frac{2pX_{\max}}{n}\right).
\end{aligned} \tag{327}$$

Wir teilen die Summation in zwei Teile. Sei zunächst $a + K \geq 2(a+d)^{1-\rho}$ für ein noch zu wählendes ρ . Die Summe über X schätzen wir ab mithilfe von

Satz 57, Proposition 47, $p + q \leq 2p \leq 2vn^{2/3}$, $\tilde{v} := \sqrt{2}v^{3/2}$ und Satz 59

$$\sum_X \exp\left(B \frac{2p X_{\max}}{n}\right) \leq \sum_{X \in \mathcal{D}_{p+q,0}} \exp\left(2\tilde{v}B \frac{X_{\max}}{\sqrt{p+q}}\right) \leq D_{p+q,0} d_{59}(2\tilde{v}B). \quad (328)$$

Wir wählen $\varrho < (1 - 48\alpha)/8$. Es gilt für $n \geq n(\alpha, \omega, \varrho)$ wegen $a\delta_{a>\omega} \geq a - \omega$ und $a + d \leq p$

$$\boxed{\varrho < (1 - 48\alpha)/8}$$

$$\begin{aligned} -K + 2B \frac{p(a+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} - a\delta_{a>\omega} &\leq -(a+K) + 2B \frac{p(a+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} + \omega \\ &\leq -(a+d)^{1-\varrho} \left(2 - 2B \frac{p(a+d)^\varrho n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) + \omega \\ &\leq -p^{\beta(1-\varrho)} \left(2 - 2B \frac{p^{1+\varrho} n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) + \omega \\ &\leq -p^{\beta(1-\varrho)} + \omega \end{aligned} \quad (329)$$

Sei nun $a + K \leq 2(a+d)^{1-\varrho}$. Die Summe über X schätzen wir besser ab, als in (328). Zunächst ist mit Satz 57 und den Propositionen 47 und 75

$$\begin{aligned} \sum_X \exp\left(B \frac{2p X_{\max}}{n}\right) &\leq \sum_{X \in \mathcal{F}_{p+q,0}^{1+2a+K,d-a}} \exp\left(2\tilde{v}B \frac{X_{\max}}{\sqrt{p+q}}\right) \\ &\leq \left(\frac{F_{p+q,0}^{1+2a+K,d-a}}{D_{p+q,0}}\right)^{1/2} \sum_{X \in \mathcal{D}_{p+q,0}} \exp\left(4\tilde{v}B \frac{X_{\max}}{\sqrt{p+q}}\right) \end{aligned} \quad (330)$$

Mit Satz 45 haben wir

$$\begin{aligned} \sum_X \exp\left(B \frac{2p X_{\max}}{n}\right) &\leq D_{p+q,0} d_{59}(4\tilde{v}B) \\ &\quad \exp\left(\frac{3}{2}(1+2a+K) \ln(37p) + \frac{d-a}{2} \ln(3/4)\right) \end{aligned} \quad (331)$$

Es ist

$$-a\delta_{a>\omega} + \frac{d-a}{2} \ln(3/4) \leq -a + \omega - (d-a) \frac{\ln(4/3)}{2} \leq \omega - (a+d) \frac{\ln(4/3)}{2} \quad (332)$$

In (327) einsetzend bleibt für hinreichend große n

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in W_2 \\ a+K \leq 2(a+d)^{1-\varrho}}} g_2(w) &\leq 2Bz d_{59}(4\tilde{v}B) n^{5/4} n^{4\alpha} \\ &\quad \sum_{\substack{(d,a,q,K) \\ a+K \leq 2(a+d)^{1-\varrho}}} \exp\left(- (a+d) \frac{\ln(4/3)}{2} + 2B \frac{p(a+d)n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right. \\ &\quad \left. + 4(a+K) \ln p + 2 \ln p + \omega\right). \end{aligned} \quad (333)$$

und der Exponent in der zweiten Zeile von (333) ist für $\varrho > 0$, $\beta > 0$ und

$$\boxed{\varrho > 0}$$

$$\boxed{\beta > 0}$$

$n \geq n(\alpha, \omega, \varrho, \beta)$ nach oben abgeschätzt durch

$$\begin{aligned} & - (a+d) \left(\frac{\ln(4/3)}{2} - 2B \frac{p n^{4\alpha}}{n^{3/4}} - \frac{8 \ln p}{(a+d)^{\varrho}} - \frac{\omega + 2 \ln p}{a+d} \right) \\ & \leq -p^{\beta} \left(\frac{1}{7} - 2B \frac{p n^{4\alpha}}{n^{3/4}} - \frac{8 \ln p}{p^{\beta \varrho}} - \frac{\omega + 2 \ln p}{p^{\beta}} \right) \leq -\frac{p^{\beta}}{8} \end{aligned} \quad (334)$$

Nach Einsetzen unserer Abschätzungen (329) und (334) in (327) haben wir wegen $\beta > 0$ gezeigt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W_2} g_2(w) = 0. \quad (335)$$

$\beta > 0$

Als nächstes diskutieren wir den Fall $i = 3$. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} P_3 &= \{ \gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^{\gamma} \leq c \frac{p^2}{n}, a^{\gamma} + d^{\gamma} \leq p^{\beta}, a^{\gamma} > \omega \}, \\ f_3(\gamma) &= (q^{\gamma}, q_{13}^{\gamma}, X^{\gamma}, S_*^{\gamma}, l_*^{\gamma}, m_*^{\gamma}, r_*^{\gamma}, n_{\omega+1}^{\gamma}, n_{\omega+2}^{\gamma}, \dots) \end{aligned} \quad (336)$$

Für $w = (q, q_{13}, X, S_*, l_*, m_*, r_*, n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots)$ verwenden wir die Abkürzungen aus (316). Es gilt wieder (318). Außerdem gilt analog zu (294) und (317):

$$\frac{C_3(w)}{\sigma^p} \leq 2n^{4\alpha(1+l_*+m_*+S_{\infty})-(1/4+\eta)q_{13}} \quad (337)$$

Wir wählen das Abzählverfahren 1., 2., 3b., 4b., 5b., 6a., 7c. aus dem Baukasten. So erhalten wir

$$\begin{aligned} |f_3^{-1}(\{w\})| &\leq \frac{M^{M_{\infty}} x_*!}{l_*! m_*! r_*!} n n(n-1) \dots (n - (M - S) + 1) \\ &\quad \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M - M_{\infty}} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{x_*} \leq S_*} \frac{j_1 \dots j_{S_*}}{j_{b_1} \dots j_{b_{x_*}}} \\ &\quad (p^{\beta})^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(1+x_*)} \prod_{k > \omega} \frac{(2k)^{kn_k}}{k!^{n_k} n_k!}. \end{aligned} \quad (338)$$

Viel einfacher als in (299) schätzen wir ab

$$(6p)^k \left(\frac{n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{k-1} \leq 6vn^{2/3} \left(6v \frac{n^{2/3} n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right)^{k-1} \quad (339)$$

Wir setzen $C := 2(2\omega)^2$. Aus (337), (338) und (318) folgt durch Summation über $q_{13}, l_*, m_*, r_*, S_*$ mit analogem Vorgehen wie zuvor, siehe insbesondere (321), (322), (302), (328)

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W_3} g_3(w) &\leq 2Cz n^{5/4} n^{4\alpha} d_{59}(\tilde{v}C) \exp \left(C \frac{p^{1+\beta} n^{4\alpha}}{n^{3/4}} \right) \\ &\quad \sum_{(n_{\omega+1}, n_{\omega+2}, \dots)} \prod_{k > \omega} \frac{(6vn^{2/3} (6vn^{-(1-48\alpha)/12})^{k-1})^{n_k}}{n_k!}. \end{aligned} \quad (340)$$

Es gilt für $\alpha < 1/48$ und $n \geq n(\alpha)$ mit der geometrischen Reihe

$$\boxed{\alpha < 1/48}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k>\omega} (6vn^{-(1-48\alpha)/12})^{k-1} &= (6vn^{-(1-48\alpha)/12})^\omega \sum_{k\geq 0} (6vn^{-(1-48\alpha)/12})^k \\ &\leq 2(6vn^{-(1-48\alpha)/12})^\omega \end{aligned} \quad (341)$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k>\omega} n_k \geq 1$. Für $\omega > 8/(1-48\alpha)$ folgt mit Proposition 76, dass die letzte Zeile von (340) für $n \geq n(\alpha, \omega)$ abgeschätzt ist durch $4(6v)^{\omega+1} n^{-(\omega(1-48\alpha)-8)/12}$. Im Anschluss an (340) erhalten wir

$$\boxed{\omega > 8/(1-48\alpha)}$$

$$\sum_{w \in W_3} g_3(w) \leq 8(6v)^{\omega+1} C z d_{59}(\tilde{v}C) n^{5/4+4\alpha-(\omega(1-48\alpha)-8)/12} \exp\left(C \frac{p^{1+\beta} n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right) \quad (342)$$

Für $\beta \leq (1-48\alpha)/8$ und $\omega+1 > 24/(1-48\alpha)$ gilt

$$\boxed{\beta \leq (1-48\alpha)/8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W_3} g_3(w) = 0. \quad (343)$$

$$\boxed{\omega+1 > 24/(1-48\alpha)}$$

Als nächstes diskutieren wir den Fall $i = 4$. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} P_4 &= \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \leq c \frac{v^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \leq p^\beta, a^\gamma \leq \omega, q_{13} + \delta_1^\gamma + l_*^\gamma + m_*^\gamma > 0\}, \\ f_4(\gamma) &= (\delta_1^\gamma, q^\gamma, q_{13}^\gamma, X^\gamma, S_*^\gamma, l_*^\gamma, m_*^\gamma, r_*^\gamma) \end{aligned} \quad (344)$$

Für $w = (\delta_1, q, q_{13}, X, S_*, l_*, m_*, r_*)$ folgt mit Satz 37

$$\frac{C_4(w)}{\sigma^p} \leq 2n^{4\alpha(\delta_1+l_*+m_*)-(1/4+\eta)q_{13}} \quad (345)$$

Wir wählen das Abzählverfahren 3c., 4b., 5b., 6b., 7d., um $|f_4^{-1}(\{w\})|$ abzuschätzen. Das liefert (wir verwenden wieder die Abkürzung $x_* := l_* + m_* + r_*$)

$$\begin{aligned} |f_4^{-1}(\{w\})| &\leq \frac{x_*!}{l_*! m_*! r_*!} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{x_*} \leq S_*} \frac{j_1 \dots j_{S_*}}{j_{b_1} \dots j_{b_{x_*}}} \\ &\quad n^{1-\delta_1} M^{\delta_1} n(n-1) \dots (n-(M-S)+1) \\ &\quad (p^\beta)^{m_*} (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2(\delta_1+x_*)}. \end{aligned} \quad (346)$$

Es gilt mit $M \leq p$

$$n^{1-\delta_1} M^{\delta_1} \leq n \left(\frac{p}{n}\right)^{\delta_1}. \quad (347)$$

Analog zu (297) haben wir

$$n^M \leq n^{p/2} n^{(q_{13}+\delta_1+l_*+m_*)/4}. \quad (348)$$

Nach Voraussetzung und Lemma 38 gilt

$$1 + q \leq \max(1, 2q) \leq q_{13} + \delta_1 + l_* + m_*. \quad (349)$$

Mit $p \geq un^{2/3}$ und Proposition 42 folgt $u^{3/2}nD_{p+q,0} \leq p^{3/2}D_{p+q,0} \leq 2^{p+q+1}$ und dann analog zu (318)

$$\frac{n}{2^p} \leq \frac{2^{q+1}}{u^{3/2}D_{p+q,0}} \leq \frac{2^{q_{13}+\delta_1+l_*+m_*}}{u^{3/2}D_{p+q,0}}. \quad (350)$$

Unter Verwendung von (348) und (350) erhalten wir analog zu (323)

$$g_4(w) \leq \frac{2z}{u^{3/2}} \frac{1}{D_{p+q,0}} \exp\left(-\frac{M(M+1)}{2n}\right) \frac{\left(\frac{M(M+1)}{2n}\right)^{S_*-x_*}}{(S_*-x_*)!} \frac{\left(C \frac{pX_{\max}}{n}\right)^{r_*}}{r_*!} \\ \left(\frac{2}{n^\eta}\right)^{q_{13}} \left(C \frac{pn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)^{\delta_1} \left(C \frac{pn^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)^{l_*} \left(C \frac{p^{1+\beta}n^{4\alpha}}{n^{3/4}}\right)^{m_*}, \quad (351)$$

wobei wir im Nenner mit $l_*! \geq 1$ und $m_*! \geq 1$ abgeschätzt haben. Wir setzen

$$g_n := \frac{2}{n^\eta} + 2C \frac{pn^{4\alpha}}{n^{3/4}} + C \frac{p^{1+\beta}n^{4\alpha}}{n^{3/4}}. \quad (352)$$

Für $\beta \leq (1-48\alpha)/8$ und $n \geq n(\alpha, \beta, \eta, \omega)$ gilt $g_n \leq 1/2$. Nach Summation über S_*, r_* , Summation über X wie in (328) und Summation über $q_{13}, \delta_1, l_*, m_*$ mit Proposition 76 und (349) folgt für $n \geq n(\alpha, \beta, \eta, \omega)$

$$\beta \leq (1-48\alpha)/8$$

$$\sum_{w \in W_4} g_4(w) \leq \frac{2z}{u^{3/2}} d_{59}(\tilde{v}C) \sum_q \frac{g_n^{1+q}}{1-g_n} \leq \frac{12z}{u^{3/2}} d_{59}(\tilde{v}C) g_n \quad (353)$$

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ folgt die Aussage (i) von Satz 67.

Für den Beweis von Aussage (ii) führen wir die Notation des Beweises des ersten Teils fort. Wir setzen

$$P_5 := \{\gamma \in \mathcal{P}_{n,p} \mid S^\gamma \leq c \frac{p^2}{n}, a^\gamma + d^\gamma \leq p^\beta, a^\gamma \leq \omega, q_{13}^\gamma = \delta_1^\gamma = l_*^\gamma = m_*^\gamma = 0\}, \\ f_5(\gamma) := (X^\gamma, S_*^\gamma, r_*^\gamma), \quad (354)$$

um noch zu zeigen:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in W_5} g_5(w) < \infty. \quad (355)$$

Für $w = (X, S_*, r_*) \in W_5$ ist mit Satz 37

$$C_5(w) \leq 2\sigma^p. \quad (356)$$

Wegen Lemma 38 ist $q^\gamma = 0$ und damit p^γ gerade für $\gamma \in P_5$. Wir wählen das Abzählverfahren bestehend aus den Modulen 3c., 4b., 5b., 6a., 7e., um

$|f_5^{-1}(\{w\})|$ abzuschätzen:

$$|f_5^{-1}(\{w\})| \leq \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{S_*} \leq M} \sum_{1 \leq b_1 < \dots < b_{r_*} \leq S_*} \frac{j_1 \dots j_{S_*}}{j_{b_1} \dots j_{b_{r_*}}} \quad (357)$$

$$n n(n-1) \dots (n - (M - S) + 1) (2X_{\max})^{r_*} (2\omega)^{2r_*}.$$

Damit folgt mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Teilaussage (i) des Satzes

$$\sum_{w \in W_5} g_5(w) \leq 2z \frac{n}{2^p} \sum_{X, S_*, r_*} \exp\left(-\frac{M(M+1)}{2n}\right) \frac{\left(\frac{M(M+1)}{2n}\right)^{S_* - r_*}}{(S_* - r_*)!} \frac{\left(C \frac{pX_{\max}}{n}\right)^{r_*}}{r_*!} \quad (358)$$

Aus $p \geq un^{2/3}$ und Proposition 42 folgt $u^{3/2}nD_{p,0} \leq 2^{p+1}$ und die Summation liefert mit (328)

$$\sum_{w \in W_5} g_5(w) \leq 2z \frac{n}{2^p} D_{p,0} d_{59}(\tilde{v}C) \leq \frac{4z}{u^{3/2}} d_{59}(\tilde{v}C) \quad (359)$$

und damit die Teilaussage (ii).

Begründungen für die Abschätzungen der Module 4–7:

- 4a. Es ist $M - S$ mal ein Vertex zu wählen. Es gibt insgesamt n Vertices.
- 4b. Es ist $M - S$ mal ein Vertex zu wählen, der noch nicht im Pfad vorgekommen ist. Mit jeder Wahl verringert sich die Auswahl also um 1.
- 5a. Es muss $S_* - l_* - m_*$ mal ein Vertex gewählt werden, der im Pfad bereits vorkommt. Das sind höchstens M .
- 5b. Es muss ein Vertex der Ordnung $\leq \omega$ gewählt werden, der bereits im Pfad vorkommt.
- 6b. Es muss im Fall $\delta_1 = 1$ ein Vertex gewählt werden, der im Pfad vorkommt.
7. l_* (Blatt 4):
Faktor 1 (es gibt keine Wahl)
 m_* (Blatt 5):
Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist beschränkt durch die Zahl der Verbindungen zu anderen Vertices. Da zu jeder solchen Verbindung wenigstens ein markierter Schritt gehört, ist $a + d \leq 1 + S + d$ eine Schranke für die Wahlmöglichkeiten (siehe Proposition 56).
 r_* (Blatt 6):

Die Zahl der Wahlmöglichkeiten ist beschränkt durch die Zahl der Vertices, die an einer offenen Kante hängen. Da an einer Kante höchstens zwei Vertices hängen und die Zahl der offenen Kanten die Höhe des Dyck-Pfades bzw. des nichtnegativen Irrweges ist, ist $2X_{\max}$ eine Schranke für die Wahlmöglichkeiten.

unmarkiert, Ordnung $> \omega$ (Blatt 8):

Nach Proposition 28 gibt es an einem Vertex der Ordnung k höchstens $2k$ offene Kanten. Ebenfalls nach Proposition 28 wird ein solcher Vertex höchstens k mal unmarkiert verlassen.

unmarkiert, Ordnung $\leq \omega$, offen (Blatt 9):

An einem Vertex der Ordnung $\leq \omega$ gibt es höchstens 2ω offene Kanten. Die Situation, dass bei einem unmarkierten Schritt mehr als eine Wahlmöglichkeit besteht, tritt im Pfad höchstens $\sum_{j: M_a(j) \leq \omega} K_d(j)$ mal auf. Die Anzahl dieser Situationen ist damit nach Lemma 40 beschränkt durch $2(\delta_1 + l_* + m_* + r_*)$.

□

Anhang

A.1 Stetigkeitssatz für die Laplacetransformierte

Wir erinnern zunächst an Levys Stetigkeitssatz, hier zitiert aus [2]:

Satz 68. (Levys Stetigkeitssatz) *Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge endlicher Maße auf \mathbb{R}^k . Ist die Folge $(\hat{\mu}_n)_n$ der Fourier-Transformierten punktweise konvergent gegen eine in 0 stetige komplexwertige Funktion φ auf \mathbb{R}^k , so ist φ die Fourier-Transformierte eines (eindeutig bestimmten) endlichen Maßes μ auf \mathbb{R}^k und die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen μ .*

Ein gleichwertiger Satz soll nun für die beidseitige Laplace-Transformierte formuliert werden. Dabei orientieren wir uns an der Arbeit von Curtiss [5]. Zur Vorbereitung formulieren wir einige Hilfssätze aus der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. In diesen Sätzen wird anstelle der Holomorphie nur die partielle komplexe Differenzierbarkeit vorausgesetzt. Nach einem Satz von Hartogs (siehe [4], S. 140) sind diese Eigenschaften zwar äquivalent, Analytizität wird hier jedoch nicht gebraucht.

Lemma 69. (Identitätssatz) *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $A \subset D \cap \mathbb{R}$ eine Menge mit Häufungspunkt (in D). Sei $k \in \mathbb{N}$. Stimmen die partiell komplex differenzierbaren Funktionen $f, g : D^k \rightarrow \mathbb{C}$ auf A^k überein, so auch auf D^k .*

Beweis. Wir definieren für ganze Zahlen $0 \leq l \leq k$

$$H_l := \begin{cases} A^k, & \text{falls } l = 0, \\ D^l \times A^{k-l}, & \text{falls } 1 \leq l \leq k-1, \\ D^k, & \text{falls } l = k \end{cases} \quad (360)$$

und zeigen, dass für $0 \leq l \leq k-1$ mit $f|_{H_l} = g|_{H_l}$ auch $f|_{H_{l+1}} = g|_{H_{l+1}}$ gilt. Dann folgt die Behauptung mittels vollständiger Induktion. Sei also $f|_{H_l} = g|_{H_l}$ und sei $w = (w_1, \dots, w_k) \in H_{l+1}$ beliebig gewählt. Wir zeigen: $f(w) = g(w)$. Dazu definieren wir Funktionen $\varphi, \psi : S_b \rightarrow \mathbb{C}$ vermöge

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &:= f(w_1, \dots, w_l, \zeta, w_{l+2}, \dots, w_k), \\ \psi(\zeta) &:= g(w_1, \dots, w_l, \zeta, w_{l+2}, \dots, w_k).\end{aligned}\tag{361}$$

Diese Funktionen sind holomorph auf D und wegen $f|_{H_l} = g|_{H_l}$ stimmen sie auf A überein, also $\varphi|_A = \psi|_A$. Daraus folgt mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen in einer Veränderlichen schon $\varphi = \psi$, insbesondere gilt also $f(w) = \varphi(w_{l+1}) = \psi(w_{l+1}) = g(w)$. \square

Lemma 70. *Eine auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}^k$ lokal gleichmäßig beschränkte Folge partiell komplex differenzierbarer Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$ ist lokal gleichgradig gleichmäßig stetig.*

Beweis. Für $c = (c_1, \dots, c_k) \in D$ sei $R > 0$ so gewählt, dass der Abschluss von $V_R(c) := B_R(c_1) \times \dots \times B_R(c_k)$ noch in D liegt. Nach Voraussetzung ist

$$K := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in \overline{V_R(c)}} |f_n(z)| < \infty.\tag{362}$$

Nach k -fachem Anwenden der Cauchy-Integralformel erhalten wir für $z \in V_R(c)$ die Darstellung

$$\begin{aligned}f_n(z) &= f_n(z_1, \dots, z_k) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{\partial U_R(c_1)} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \dots \int_{\partial U_R(c_k)} \frac{1}{\zeta_k - z_k} f_n(\zeta_1, \dots, \zeta_k) d\zeta_k \dots d\zeta_1.\end{aligned}\tag{363}$$

Auf $V_{R/2}(c)$ gilt also die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial f_n}{\partial z_j} \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^k} (2\pi R)^k K \frac{4}{R^2} \left(\frac{2}{R} \right)^{k-1} = \frac{2^{k+1} K}{R}\tag{364}$$

Um lokale gleichgradig gleichmäßige Stetigkeit nachzuweisen reicht es zu zeigen, dass für alle $z, w \in V_{R/2}(c)$ und alle n eine Abschätzung der Form $|f_n(z) - f_n(w)| \leq S|z - w|$ gilt mit einer Zahl S , die nur von K, k und R abhängt. Es ist

$$f_n(z) - f_n(w) = \sum_{j=1}^k f_n(w_1, \dots, w_{j-1}, z_j, \dots, z_k) - f_n(w_1, \dots, w_j, z_{j+1}, \dots, z_k)\tag{365}$$

und für die Summanden gilt

$$\begin{aligned}& |f_n(w_1, \dots, w_{j-1}, z_j, \dots, z_k) - f_n(w_1, \dots, w_j, z_{j+1}, \dots, z_k)| \\ &= \left| \int_{z_j w_j} \frac{d}{d\zeta} f_n(w_1, \dots, w_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_k) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{2^{k+1} K}{R} |z_j - w_j|.\end{aligned}\tag{366}$$

Daraus folgt

$$|f_n(z) - f_n(w)| \leq \frac{2^{k+1}K}{R} |z - w| \quad (367)$$

für alle $z, w \in V_{R/2}(c)$. Damit ist die Folge $(f_n)_n$ lokal gleichgradig gleichmäßig stetig. \square

Lemma 71. *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge partiell komplex differenzierbarer Funktionen auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}^k$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion f auf D konvergiert. Dann ist f partiell komplex differenzierbar.*

Beweis. Sei $c \in D$ und $R > 0$ so gewählt, dass der Abschluss von $V_R(c) := B_R(c_1) \times \cdots \times B_R(c_k)$ noch in D liegt. Dann hat f_n für alle $z \in V_R(c)$ und alle $1 \leq j \leq k$ die Darstellung

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(c_j)} \frac{f_n(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_k)}{\zeta - z_j} d\zeta. \quad (368)$$

Damit ist

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{R}{R - |z_j - c_j|} \sup_{\zeta \in \partial U_R(c_j)} |f_n(\dots, \zeta, \dots) - f_m(\dots, \zeta, \dots)| \quad (369)$$

und lokal gleichmäßige Konvergenz impliziert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_R(c_j)} \frac{f(z_1, \dots, z_{j-1}, \zeta, z_{j+1}, \dots, z_k)}{\zeta - z_j} d\zeta, \quad (370)$$

d. h., f ist partiell komplex differenzierbar. \square

Lemma 72. (Satz von Montel) *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge partiell komplex differenzierbarer Funktionen auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}^k$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die lokal gleichmäßig gegen eine partiell komplex differenzierbare Funktion f auf D konvergiert.*

Beweis. Wir verwenden nacheinander Lemma 70, den Satz von Arzela-Ascoli (siehe z. B. [28], Satz 3.B.11) und Lemma 71. \square

Lemma 73. (Satz von Vitali) *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokal gleichmäßig beschränkte Folge partiell komplex differenzierbarer Funktionen auf S_b^k , die auf Q_b^k konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig auf S_b^k gegen eine partiell komplex differenzierbare Funktion f auf S_b^k .*

Beweis. In metrischen Räumen gilt: Eine Folge konvergiert genau dann gegen L , wenn jede ihrer Teilfolgen eine gegen L konvergente Teilfolge besitzt. Nach Lemma 72 besitzt aber jede Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit partiell komplex differenzierbarem Limes. Ferner stimmen diese Limiten auf Q_b^k überein, weil die Folge $(f_n|_{Q_b^k})_n$ konvergiert und damit auch jede ihrer Teilfolgen. Nach Lemma 69 stimmen dann die Limiten der Teiltfolgen schon auf ganz S_b^k überein. \square

Jetzt können wir für die beidseitige Laplace-Transformierte beweisen:

Satz 74. Sei $(\mu_n)_n$ eine Folge endlicher Maße auf \mathbb{R}^k . Ferner sei $a > 0$ und $Q_a := \mathbb{Q} \cap (-a, a)$. Die Folge $(\tilde{\mu}_n)_n$ der beidseitigen Laplace-Transformierten $\tilde{\mu}_n(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{t,x} d\mu_n(x)$ konvergiere auf Q_a^k punktweise. Dann ist $(\mu_n)_n$ schwach konvergent gegen ein (eindeutig bestimmtes) endliches Maß μ .

Beweis. Sei $0 < b < a$. Das Integral $L_n(z) := \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle z,x \rangle} d\mu_n(x)$ existiert auf S_b^k und ist dort gleichmäßig beschränkt. Es gilt nämlich für $z = u + iv \in S_b^k$

$$|L_n(z)| = \left| \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle u+iv,x \rangle} d\mu_n(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle u,x \rangle} d\mu_n(x). \quad (371)$$

Aus $e^{ux} \leq \sum_{\delta \in \{-1,1\}^k} e^{\langle \delta b, x \rangle}$ folgt $|L_n(z)| \leq \sum_{\delta \in \{-1,1\}^k} \tilde{\mu}_n(\delta b)$ und wegen der punktweisen Konvergenz von $(\tilde{\mu}_n)_n$ ist L_n gleichmäßig beschränkt auf S_b^k .

Wir zeigen, dass L_n auf S_a^k partiell komplex differenzierbar ist. Für alle $z \in S_a^{k-1}$ ist $\lambda_n(\zeta) := \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle \zeta, z \rangle, x} d\mu_n(x)$ holomorph auf S_a . Es gilt nämlich für alle kompakten Dreiecke $\Delta \subset S_a$

$$\int_{\partial\Delta} e^{\langle \zeta, z \rangle, x} dz = 0, \quad (372)$$

weil $e^{\langle \zeta, z \rangle, x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $z \in S_a^{k-1}$ eine holomorphe Funktion in ζ ist. Der Satz von Tonelli liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} \lambda_n(\zeta) d\zeta &= \int_{\partial\Delta} \int_{\mathbb{R}^k} e^{\langle \zeta, z \rangle, x} d\mu_n(x) d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\partial\Delta} e^{\langle \zeta, z \rangle, x} d\zeta d\mu_n(x) = 0, \end{aligned} \quad (373)$$

d. h., λ_n ist holomorph. Wir haben gezeigt, dass L_n nach der ersten Variablen partiell komplex differenzierbar ist. Für die anderen $k-1$ Variablen verwenden wir dasselbe Argument und erhalten, dass L_n auf S_a^k partiell komplex differenzierbar ist.

Die Folge $(L_n)_n$ ist auf dem Streifen S_b^k partiell komplex differenzierbar und gleichmäßig beschränkt. Ferner konvergiert sie auf Q_b^k . Nach Lemma 73 konvergiert $(L_n)_n$ dann gegen eine auf S_b^k partiell komplex differenzierbare Funktion L .

Die Folge der Fourier-Transformierten $\hat{\mu}_n(t) = L_n(it)$ konvergiert demnach auf ganz \mathbb{R}^k gegen $L(it)$. Nach Satz 68 ist $L(it)$ die Fourier-Transformierte eines eindeutig bestimmten endlichen Maßes μ und die Folge (μ_n) konvergiert schwach gegen μ . \square

A.2 Hilfssätze

Proposition 75. Seien $B \subseteq A \neq \emptyset$ endliche Mengen und $f : A \rightarrow [1, \infty[$ eine Abbildung. Es gilt

$$\sum_{x \in B} f(x) \leq \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{1/2} \sum_{x \in A} f(x)^2. \quad (374)$$

Beweis. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|} \sum_{x \in B} f(x) &= \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} \chi_B(x) f(x) \\ &\leq \left(\frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} \chi_B(x)^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} f(x)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{1/2} \frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} f(x)^2 \end{aligned} \quad (375)$$

wegen $\sum_{x \in A} \chi_B(x)^2 = |B|$. \square

Proposition 76. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $q := x_1 + \dots + x_n$. Es gilt:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \geq m} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!} \leq \frac{q^m}{m!} e^q. \quad (376)$$

Ist zusätzlich $q < 1$, so gilt:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha| \geq m} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq q^m \frac{1}{1-q}. \quad (377)$$

Beweis. Für alle x_1, \dots, x_n gilt mit dem Polynomialsatz

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq m} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=j} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha_i}}{\alpha_i!} &= \sum_{j \geq m} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^j}{j!} \\ &= \frac{(x_1 + \dots + x_n)^m}{m!} \sum_{j \geq 0} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^j}{j!} \frac{1}{\binom{j+m}{m}} \end{aligned} \quad (378)$$

und folglich die erste Behauptung. Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq m} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n: |\alpha|=j} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} &\leq \sum_{j \geq m} (x_1 + \dots + x_n)^j \\ &= (x_1 + \dots + x_n)^m \sum_{j \geq 0} (x_1 + \dots + x_n)^j, \end{aligned} \quad (379)$$

das liefert die zweite Behauptung. \square

Korollar 77. Für ganze Zahlen $0 \leq m \leq n$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{n!}{(n-m)!} \leq n^m \exp\left(-\frac{m^2}{2n} + \frac{m}{2n}\right). \quad (380)$$

Ist $m = s - k$ für zwei weitere ganze Zahlen $0 \leq k \leq s$, so folgt:

$$\frac{n!}{(n-(s-k))!} \leq n^{s-k} \exp\left(-\frac{s(s+1)}{2n} + \frac{s(k+1)}{n}\right). \quad (381)$$

Beweis. Ausmultiplizieren der Fakultäten führt auf

$$\frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1) = n^m \prod_{k=1}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad (382)$$

und Proposition 64 liefert die erste Ungleichung. Der Zusatz für $m = s - k$ folgt unmittelbar durch Einsetzen. \square

Proposition 78. Für ganze Zahlen $0 \leq r \leq n \leq s$ gilt:

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq s} j_1 \dots j_n \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} \frac{1}{j_{l_1} \dots j_{l_r}} \leq \frac{1}{(n-r)!} \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^{n-r} \frac{1}{r!} s^r \quad (383)$$

Beweis. Die Fälle $n = r = 0$ und $n > r = 0$ rechnet man direkt nach.¹⁷ Sei nun $r \geq 1$. Wir beginnen mit zwei Beobachtungen. Es ist erstens

$$f(j_1, \dots, j_n) = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} \frac{j_1 \dots j_n}{j_{l_1} \dots j_{l_r}} \quad (384)$$

eine symmetrische Funktion, f summiert nämlich über alle Möglichkeiten aus j_1, \dots, j_n je $n - r$ Faktoren auszuwählen deren Produkte. Eine Permutation der Argumente j_1, \dots, j_n von f ändert somit nur die Reihenfolge der Summanden. Zweitens ist

$$g(l_1, \dots, l_r) = \sum_{j_1=1}^s \dots \sum_{j_n=1}^s \frac{j_1 \dots j_n}{j_{l_1} \dots j_{l_r}} \quad (385)$$

für alle $1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n$ eine konstante Funktion mit dem Wert

$$\begin{aligned} g(l_1, \dots, l_r) &= g(1, 2, \dots, r) = \left(\sum_{j_1=1}^s \dots \sum_{j_r=1}^s 1\right) \left(\sum_{j_{r+1}=1}^s j_{r+1}\right) \dots \left(\sum_{j_n=1}^s j_n\right) \\ &= s^r \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^{n-r}. \end{aligned} \quad (386)$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq s} f(j_1, \dots, j_n) &\leq \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^s \dots \sum_{j_n=1}^s f(j_1, \dots, j_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_r \leq n} g(l_1, \dots, l_r) \\ &= \frac{1}{(n-r)!} \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^{n-r} \frac{1}{r!} s^r \end{aligned} \quad (387)$$

Das ist die Behauptung. \square

¹⁷Im Fall $r = 0$ besitzt die innere Summe genau einen Summanden, nämlich das leere Produkt. Sie ist also gleich 1. Im Fall $n = 0$ gilt zusätzlich dasselbe für die äußere Summe.

Literatur

- [1] Gernot Akemann, Jinho Baik, and Philippe Di Francesco (eds.), *The Oxford handbook of random matrix theory*, Oxford University Press, Oxford, 2011. MR2920518 (2012m:60007)
- [2] Heinz Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 5th ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002 (German). MR1902050 (2003b:60001)
- [3] Patrick Billingsley, *Convergence of probability measures*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1968. MR0233396 (38 #1718)
- [4] Salomon Bochner and William Ted Martin, *Several Complex Variables*, Princeton Mathematical Series, vol. 10, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948. MR0027863 (10,366a)
- [5] J. H. Curtiss, *A note on the theory of moment generating functions*, Ann. Math. Statistics **13** (1942), 430–433. MR0007577 (4,163f)
- [6] László Erdős, Antti Knowles, Horng-Tzer Yau, and Jun Yin, *Spectral statistics of Erdős-Rényi Graphs II: Eigenvalue spacing and the extreme eigenvalues*, Comm. Math. Phys. **314** (2012), no. 3, 587–640, DOI 10.1007/s00220-012-1527-7. MR2964770
- [7] László Erdős and Horng-Tzer Yau, *Universality of local spectral statistics of random matrices*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **49** (2012), no. 3, 377–414, DOI 10.1090/S0273-0979-2012-01372-1. MR2917064
- [8] ———, *A comment on the Wigner-Dyson-Mehta bulk universality conjecture for Wigner matrices*, Electron. J. Probab. **17** (2012), no. 28, 5, DOI 10.1214/EJP.v17-1779. MR2915664
- [9] László Erdős, Horng-Tzer Yau, and Jun Yin, *Rigidity of eigenvalues of generalized Wigner matrices*, Adv. Math. **229** (2012), no. 3, 1435–1515, DOI 10.1016/j.aim.2011.12.010. MR2871147
- [10] Ohad N. Feldheim and Sasha Sodin, *A universality result for the smallest eigenvalues of certain sample covariance matrices*, Geom. Funct. Anal. **20** (2010), no. 1, 88–123, DOI 10.1007/s00039-010-0055-x. MR2647136 (2011i:60013)
- [11] Delphine Féral and Sandrine Péché, *The largest eigenvalue of rank one deformation of large Wigner matrices*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), no. 1, 185–228, DOI 10.1007/s00220-007-0209-3. MR2291807 (2008a:82031)
- [12] Z. Füredi and J. Komlós, *The eigenvalues of random symmetric matrices*, Combinatorica **1** (1981), no. 3, 233–241, DOI 10.1007/BF02579329. MR637828 (83e:15010)
- [13] W. D. Kaigh, *An elementary derivation of the distribution of the maxima of Brownian meander and Brownian excursion*, Rocky Mountain J. Math. **8** (1978), no. 4, 641–645, DOI 10.1216/RMJ-1978-8-4-641. MR513948 (80b:60105)
- [14] Oleksiy Khorunzhiy, *High moments of large Wigner random matrices and asymptotic properties of the spectral norm*, Random Oper. Stoch. Equ. **20** (2012), no. 1, 25–68, DOI 10.1515/rose-2012-0002. MR2899796
- [15] Oleksiy Khorunzhiy and Jean-François Marckert, *Uniform bounds for exponential moment of maximum of a Dyck path*, Electron. Commun. Probab. **14** (2009), 327–333, DOI 10.1214/ECP.v14-1486. MR2535080 (2011b:60032)
- [16] O. Khorunzhiy and V. Vengerovsky, *Even Walks and Estimates of High Moments of Large Wigner Random Matrices*, ArXiv e-prints (2008).
- [17] J. Oon Lee and J. Yin, *A Necessary and Sufficient Condition for Edge Universality of Wigner matrices*, ArXiv e-prints (2012).
- [18] Sandrine Péché and Alexander Soshnikov, *Wigner random matrices with non-symmetrically distributed entries*, J. Stat. Phys. **129** (2007), no. 5-6, 857–884, DOI 10.1007/s10955-007-9340-y. MR2363385 (2008m:82046)
- [19] ———, *On the lower bound of the spectral norm of symmetric random matrices with independent entries*, Electron. Commun. Probab. **13** (2008), 280–290, DOI 10.1214/ECP.v13-1376. MR2415136 (2010c:60028)
- [20] A. Ruzmaikina, *Universality of the edge distribution of eigenvalues of Wigner random matrices with polynomially decaying distributions of entries*, Comm. Math. Phys. **261** (2006), no. 2, 277–296, DOI 10.1007/s00220-005-1386-6. MR2191882 (2006k:82093)

- [21] Ya. Sinai and A. Soshnikov, *Central limit theorem for traces of large random symmetric matrices with independent matrix elements*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **29** (1998), no. 1, 1–24, DOI 10.1007/BF01245866. MR1620151 (99f:60053)
- [22] Ya. G. Sinai and A. B. Soshnikov, *A refinement of Wigner’s semicircle law in a neighborhood of the spectrum edge for random symmetric matrices*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **32** (1998), no. 2, 56–79, 96, DOI 10.1007/BF02482597 (Russian, with Russian summary); English transl., Funct. Anal. Appl. **32** (1998), no. 2, 114–131. MR1647832 (2000c:82041)
- [23] Sasha Sodin, *The Tracy-Widom law for some sparse random matrices*, J. Stat. Phys. **136** (2009), no. 5, 834–841, DOI 10.1007/s10955-009-9813-2. MR2545551 (2011a:60035)
- [24] ———, *The spectral edge of some random band matrices*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 2223–2251, DOI 10.4007/annals.2010.172.2223. MR2726110 (2011j:60024)
- [25] Alexander Soshnikov, *Universality at the edge of the spectrum in Wigner random matrices*, Comm. Math. Phys. **207** (1999), no. 3, 697–733, DOI 10.1007/s002200050743. MR1727234 (2001i:82037)
- [26] ———, *A note on universality of the distribution of the largest eigenvalues in certain sample covariance matrices*, J. Statist. Phys. **108** (2002), no. 5–6, 1033–1056, DOI 10.1023/A:1019739414239. Dedicated to David Ruelle and Yasha Sinai on the occasion of their 65th birthdays. MR1933444 (2003h:62108)
- [27] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota; Corrected reprint of the 1986 original. MR1442260 (98a:05001)
- [28] Uwe Storch and Hartmut Wiebe, *Lehrbuch der Mathematik für Mathematiker, Informatiker und Physiker. Band III*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1993 (German). Analysis mehrerer Veränderlicher—Integrationstheorie. [Analysis in several variables—integration theory]. MR1252619 (94k:00002)
- [29] Terence Tao and Van Vu, *Random matrices: universality of local eigenvalue statistics up to the edge*, Comm. Math. Phys. **298** (2010), no. 2, 549–572, DOI 10.1007/s00220-010-1044-5. MR2669449 (2011f:60012)
- [30] Craig A. Tracy and Harold Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), no. 1, 151–174. MR1257246 (95e:82003)
- [31] ———, *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*, Comm. Math. Phys. **177** (1996), no. 3, 727–754. MR1385083 (97a:82055)
- [32] Eugene P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 548–564. MR0077805 (17,1097c)
- [33] ———, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. II*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 203–207. MR0083848 (18,771a)
- [34] ———, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math. (2) **67** (1958), 325–327. MR0095527 (20 #2029)

Herr Prof. Dr. Kriecherbauer hat in vielen Diskussionen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ich danke ihm für sein außergewöhnliches Engagement als Lehrer und als Betreuer auf das Herzlichste.