Weintrauben,Polynome,Tableaux

Axel Kohnert
Universität Bayreuth
Lehrstuhl II für Mathematik
Postfach 101251
W-8580 Bayreuth

E-mail: axel@btm2x2.mat.uni-bayreuth.de

Juli 1990

Contents

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer neuen kombinatorischen Interpretation von Polynomen, die sich im Zusammenhang mit Schubertpolynomen ergeben. Dies sind insbesondere Schurpolynome und Gaußpolynome. Bei den neuen kombinatorischen Objekten, den Weintrauben, handelt es sich um 0-1-Matrizen. Mittels einer sehr einfachen Operation kann aus einem Startobjekt w eine endliche Menge von Weintrauben erzeugt werden. Diese Menge $S(w)$ kann dann als Polynom oder als Menge von Tableaux interpretiert werden. Diese Grundlagen werden in Kapitel I definiert.

Schubertpolynome sind Polynome in mehreren Variablen und wurden erstmals von Lascoux und Schützenberger in einer 1982 erschienen Arbeit definiert. Sie werden durch Permutationen indiziert, und im Falle von Permutationen mit einem einzigen Abstieg sind es Schurpolynome. Auf diese Zusammenhänge wird im Kapitel II eingegangen. Da es für Schurpolynome die bekannte kombinatorische Interpretation als Summe von Tableaux mit gegebenem Umriß und gegebenem maximalem Eintrag gibt, stellt sich die Frage nach einer Interpretation der Schubertpolynome. Diese Frage wurde von Lascoux und Schützenberger in einer Arbeit aus dem Jahr 1988 beantwortet. Ein Schubertpolynom ist demnach eine Vereinigung von Tableauxmengen T_I, wobei jede einzelne Menge eine Teilmenge einer Tableauxmenge eines Schurpolynoms ist und verschiedene Mengen aus Tableaux mit verschiedenen Umriß bestehen können.

Im Kapitel III werden spezielle Weintrauben w definiert, sodaß man die Schurpolynome, Gaußpolynome und auch die Schiefschurpolynome als $S(w)$ erhält. Hierbei wird $S(w)$ wie oben erwähnt als Polynom interpretiert. Dies ermöglicht z.B. einen einfachen Algorithmus zur Erzeugung aller Schieftableaux. Ferner gelingt es auch, die Menge T_I in der Form $S(w)$ darzustellen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Kerber und Herrn Dr. Lascoux sehr herzlich für die Betreuung während der Erstellung dieser Arbeit danken.

Chapter 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Objekte definiert. Dabei handelt es sich hauptsächlich um den Begriff Weintraube und um verschiedene Operationen, die Weintrauben manipulieren. Wichtig ist auch der Übergang von Weintrauben zu Tableaux und Polynomen, der hier definiert wird.

1.1 Diagramme und Weintrauben

Zuerst definieren wir ein allgemeines Diagramm. Ein Spezialfall davon wird dann eine Weintraube sein. Eine Abbildung

$$\underline{m} \times \underline{n} \longrightarrow \{0, ..., k-1\}$$

heißt **k-stelliges** $\underline{m} \times \underline{n}$ **- Diagramm**.

Bei k-stelligen Diagrammen sollte man stets an die folgende graphische Darstellung denken, die von der üblichen Matrixschreibweise abweicht. Man bildet Zeilen und Spalten im ersten Quadranten und trägt die Werte des Diagramms entsprechend ein. Zum Beispiel sei $(i, j) \mapsto (i \cdot j) \bmod 3$ ein 3-stelliges $\underline{2} \times \underline{3}$ Diagramm. Diesem Diagramm wird folgendes Bild zugeordnet. (In der linken Spalte und der untersten Zeile stehen die Zeilen bzw. Spaltennummer.)

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Dafür schreiben wir auch, wenn wie üblich die Zeilen und Spaltennumerierung nicht eingetragen wird, und auch die Einträge 0 nicht aufgeführt werden:

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \quad .$$

Hierbei ist die Numerierung der Spalten von links nach rechts und die Numerierung der Zeilen von unten nach oben zu beachten. Wir werden im weiteren

keinen Unterschied zwischen Diagrammen und ihrer graphischen Darstellung machen. So ergeben im Zusammenhang mit Diagrammen auch *links, rechts, oben* und *unten* einen selbstverständlichen Sinn. Ferner werden Diagramme als gleich betrachtet, wenn sie im gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen und im übrigen Teil den Wert 0 haben, d.h. ihre verkürzten graphischen Darstellungen gleich sind.
Im folgenden werden meist 2 stelllige Diagramme untersucht. In diesem Fall wird bei der graphischen Darstellung statt der 1 ein $\circ$ verwendet. Felder ohne Eintrag werden manchmal mit "-"markiert. Dies ist nützlich, um Leerzeilen am unteren Rand zu erkennen. Zur Verdeutlichung dieser Definitionen betrachten wir das folgende Beispiel: Das Diagramm

$$\begin{array}{rcl} \underline{5}\times\underline{5} & \rightarrow & \{0,1\} \\ (i,j) & \mapsto & (i\cdot j) \bmod 2 \end{array}$$

hat die graphische Darstellung:

$$\begin{array}{c} 10101 \\ 00000 \\ 10101 \\ 00000 \\ 10101 \end{array} = \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \\ - - - - - \\ \circ - \circ - \circ \\ - - - - - \\ \circ - \circ - \circ \end{array}.$$

Dies könnte aber auch die graphische Darstellung des Diagramms

$$\begin{array}{rcl} \underline{6}\times\underline{6} & \rightarrow & \{0,1\} \\ (i,j) & \mapsto & (i\cdot j) \bmod 2 \end{array}$$

sein, da beide Diagramme im Schnitt ihrer Definitionsbereich übereinstimmen, und das zweite Diagramm außerhalb des gemeinsamen Definitionsbereichs den Wert 0 hat.
Im weiteren werden wir meistens weder die Größe noch die Stelligkeit eines Diagramms erwähnen. Das Diagramm sei groß genug, und die Stelligkeit ergibt sich aus der graphischen Darstellung (meistens $k = 2$). Wir definieren jetzt die grundlegende kombinatorische Struktur in dieser Arbeit
Weintrauben sind 2-stellige Diagramme.
In der Definition spielt die Größe des Diagramms keine Rolle, sie sei nur groß genug. Man kann Weintrauben als Äquivalenzklasse von Diagrammen mit gleicher graphischer Darstellung betrachten. Man versteht unter einer Weintraube die graphische Darstellung von 2-stelligen Diagrammen, so sind die beiden obigen Diagramme die gleiche Weintraube.
Die graphische Darstellung einer Weintrauben w ist stets wie folgt: falls der Wert $w(a,b) = 0$, so erfolgt kein Eintrag, falls der Wert $w(a,b) = 1$, so erfolgt die Eintragung eines $\circ$. Dieser Kreis wird auch als Stein oder Eintrag bezeichnet. Eine Ausnahme ist die Verwendung von "$-$" falls $w(a,b) = 0$ um manchmal Leerzeilen zu markieren, die sonst nicht erkennbar wären.
Mit WT wird die Menge aller Weintrauben bezeichnet.

Die folgende **Operation** s_i auf der Menge WT ist fundamental, und wird daher auch ausführlich an Beispielen erläutert. s_i nimmt den Stein in der Zeile i, der am weitesten rechts steht und schiebt ihn mit allen Steinen die direkt darunter stehen eine Zeile nach unten, sofern dies möglich ist, d.h. falls in einer Zeile darunter, in der gleichen Spalte ein freier Platz ist. Eine typische Anwendung dieser Operation (im Beispiel s_3) ist folgender Schritt:

$$\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ & \circ \\ - & - \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \circ & \\ & \circ \\ - & \circ \end{array}$$

Eine exakte Definition wird nun vorgenommen. Sei w eine Weintraube. Wir betrachten eine beliebige Zeile i dieser Weintraube. Falls in der Zeile i kein Eintrag $\circ$ ist, so ist $s_i(w) = w$. Sei also o.E. ein Eintrag $\circ$ in der Zeile i. Wir betrachten nun den Eintrag $\circ$ in der Zeile i, der am weitesten rechts steht, sei dieser in der Spalte j. Für diesen ersten Teil der Operation definieren wir die Funktion:

$$maxcolumn(i, w) := \begin{cases} 0 & \text{falls in der Zeile } i \text{ von } w \text{ kein Eintrag } \circ \text{ ist} \\ j & \text{sonst, wobei } j \text{ die maximale Nummer einer Spalte} \\ & \text{von } w \text{ mit einem Eintrag } \circ \text{ in der Zeile } i \text{ ist} \end{cases}$$

Sei $j := maxcolumn(i, w)$. Betrachten wir nun die Zeilen unterhalb der Zeile i. Falls bereits $i = 1$, so gilt auch $s_i(w) = w$. Sei also o.E. $i > 1$. Wir suchen nun ausgehend von der Zeile i die erste Zeile unterhalb, in der in der Spalte j kein Eintrag ist. Dazu definieren wir die Funktion:

$$maxrow(i, w) := \begin{cases} 0 & \text{falls } maxcolumn(i, w) = 0 \text{ ist} \\ 0 & \text{falls in allen Zeilen unterhalb von} \\ & i \text{ in der Spalte } maxcolumn(i, w) \text{ ein Eintrag ist} \\ k & \text{sonst, wobei } k \text{ die Nummer der obersten Zeile} \\ & \text{unterhalb von } i \text{ ist, in der in der} \\ & \text{Spalte } maxcolumn(i, w) \text{ kein Eintrag ist} \end{cases}$$

Sei $k = maxrow(i, w)$, also $s_i(w) = w$ falls $k = 0$. Nun betrachten wir den Fall, daß s_i die Weintraube verändert. Sei also $k > 0$ und nach Definition $< i$, Wir definieren für $j = maxcolumn(i, w)$

$$s_i(w)(a, b) := \begin{cases} 0 & a = i \text{ und } b = j \\ 1 & a = k \text{ und } b = j \\ w(a, b) & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei (a, b) zulässige Koordinaten im Diagramm seien. Insgesamt ergibt dies folgende Definition:

Sei w Weintraube, (a, b) zulässige Koordinaten , $i \in \mathbf{N}_+$.

$$s_i(w)(a,b) := \begin{cases} w(a,b) & \text{falls } maxrow(i,w) = 0. \\ w'(a,b) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$w'(a,b) := \begin{cases} 0 & a = i \text{ und } b = maxcolumn(i,w) \\ 1 & a = maxrow(i,w) \text{ und } b = maxcolumn(i,w). \\ w(a,b) & \text{sonst} \end{cases}$$

Statt $s_i(w)$ wird auch manchmal die Bezeichnung $s_{i,maxrow(i,w)}(w)$ verwendet. Damit soll angedeutet werden in welcher Zeile ein neuer Stein erscheint. Die nochmals erweiterte Notation $s_{i,maxrow(i,w)}^{maxcolumn(i,w)}(w)$ verwendet man, wenn auch noch der Spaltenindex mit angegeben werden soll. Diese Definition werden wir anhand des nachfolgenden Beispiels ausführlich erläutern. Ausgehend von einer Startweintraube w werden alle möglichen Operationen s_i angewandt. Sei

$$w = \begin{array}{cccc} - & - & \circ & - \\ - & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & - \\ - & - & - & - \end{array} .$$

Betrachten wir zuerst $s_3(w)$, $maxcolumn(3,w)$ ist dann 4, da in der Zeile 3 der Stein, der am weitesten rechts ist, in der Spalte mit der Nummer 4 ist. $maxrow(3,w)$ ergibt dann 2, da in der Spalte 4 der erste freie Platz unterhalb der Zeile 3 in der in der Zeile 2 ist, und daher ist

$$s_{3,2}^4(w) = \begin{array}{cccc} - & - & \circ & - \\ - & \circ & \circ & - \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ - & - & - & - \end{array} .$$

Analog berechnet man für $maxcolumn(4,w) = 3, maxrow(4,w) = 1$ und daher ist

$$s_{4,1}^3(w) = \begin{array}{cccc} - & - & - & - \\ - & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & - \\ - & - & \circ & - \end{array} .$$

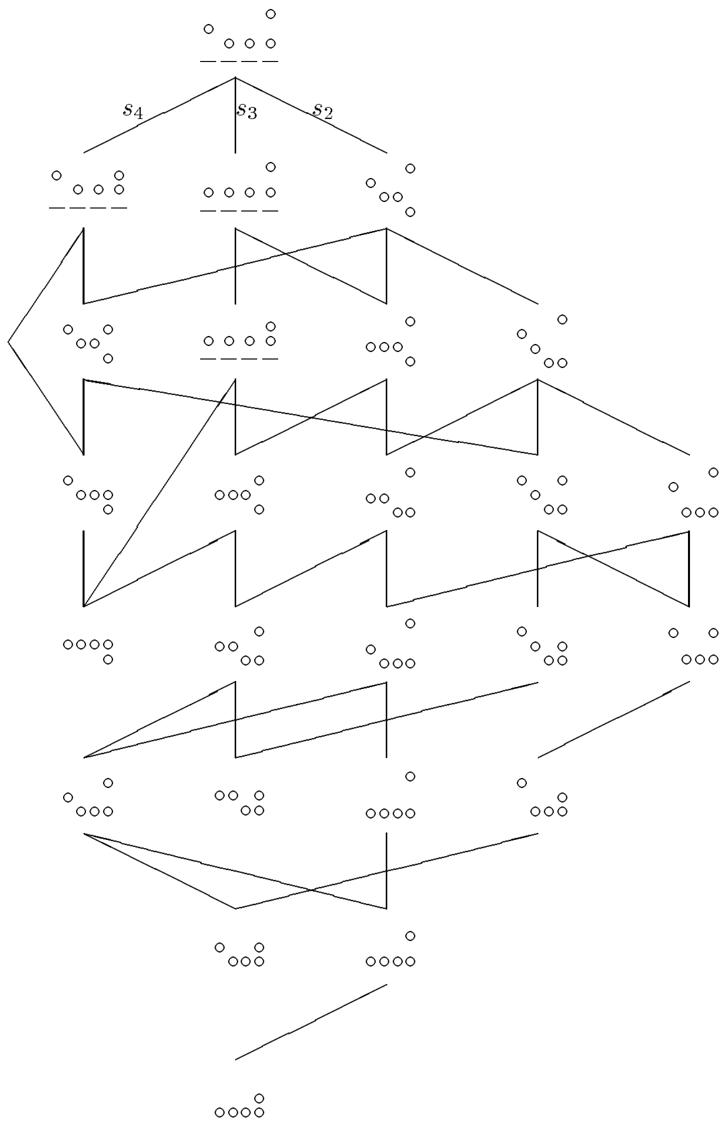
Diese Operation, bei der ein Stein mehrere Zeilen tiefer gesetzt wird, bezeichnen wir manchmal als **Durchschieben**. Für $s_2(w)$ ergibt sich noch folgende Weintraube:

$$s_{2,1}^3(w) = \begin{array}{cccc} - & - & \circ & - \\ - & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & - & - \\ - & - & \circ & - \end{array} .$$

Alle anderen s_i, d.h. für $i \neq 2, 3, 4$, sind die Identität da für alle diese Fälle $maxrow(i, w) = 0$ ist.

Es soll noch eine anschauliche Beschreibung dieses Verfahrens gegeben werden. Man kann die $\circ$ als Kugeln sehen, die ein minimales Stück nach unten fallen, wenn man sie anstößt. Die Operation s_i ist ein Anstoßen am rechten Rand in der Zeile i. Es passiert nichts, wenn keine Kugel in der Zeile i ist. ($maxcolumn = 0$) Es passiert auch nichts, wenn unterhalb der rechtesten Kugel in der Zeile i bis an den unteren Rand weitere Kugeln liegen, dann kann diejenige in der Zeile i nicht mehr nach unten fallen. ($maxrow = 0$) Ansonsten fällt die Kugel nach unten und schiebt alle darunter liegenden Kugeln mit nach unten in die erste freie Zeile, nämlich die Zeile $maxrow$.

Abschließend noch ein größeres Beispiel, auf das später noch öfter Bezug genommen wird, welches man sich also genau anschauen sollte. Es werden, ausgehend von einer Startweintraube, solange die s_i angewandt, wie sie eine neue Weintraube liefern. Um Leerzeilen, die nicht klar sind, anzudeuten verwenden wir $-$. Weintrauben sind durch eine Linie verbunden, falls die untere aus der oberen mittels einer Operation s_i hervorgeht.



Den Weintrauben, die mittels der Operationen s_i erzeugt wurden, wurden Schichten im Bild zugeordnet, dies geschah nach folgender Vorschrift: wurden bei einer Operation i Steine verschoben, so ist die neue Weintraube i Schichten tiefer im Bild. Außerdem wurden zum besseren Verständnis beim ersten Schritt die Operation neben die Verbindungslinie geschrieben.

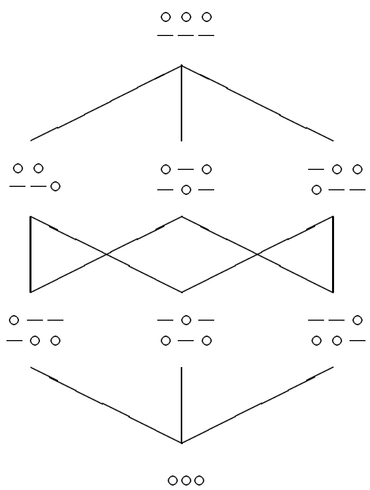
Es wird nun eine Verallgemeinerung der Operation s_i definiert. Es wird nicht nur der rechteste Stein in der Zeile i nach unten geschoben, sondern der Stein in der Spalte j, sofern hier einer ist, und *direkt* darunter ein freier Platz ist. Die formale Definition: es sei w eine Weintraube, i sei ein zulässiger Zeilenindex, j sei ein zulässiger Spaltenindex.

$$r_i^j(w)(a,b) := \begin{cases} w(a,b) & \text{falls } w(i,j) = 0 \\ w(a,b) & \text{falls } i > 1 \text{ und } w(i-1,j) = 1 \\ \tilde{w}(a,b) & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei

$$\tilde{w}(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{falls } a = i \text{ und } b = j \\ 1 & \text{falls } a = i-1 \text{ und } b = j \\ w(a,b) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Betrachten wir das folgende Beispiel, welches analog dem vorherigen Beispiel, ausgehend von einer Startweintraube die r_i^j solange wie möglich anwendet.



1.2 Weintrauben und Polynome

Es wird gezeigt, wie einer Weintraube ein einzelnes Monom zugeordnet werden kann, und dann auch einer endlichen Menge von Weintrauben ein Polynom. Dies ist eine sehr wichtige Operation, denn man wird später sehen, daß man auf diese Weise verschiedene bekannte und wichtige Klassen von Polynomen erhält.

1.2.1 Definitionen

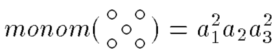
Sei w eine Weintraube mit n Zeilen, sei n_i die Anzahl der Einträge $\circ$ in den Zeilen $i = 1, ..., n$ dann ist

$$a_1^{n_1} \cdots a_n^{n_n}$$

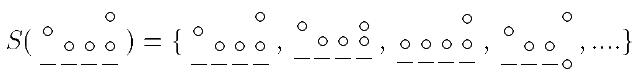
ein Monom aus $\mathbf{N}[\ a_1, ..., a_n\ ]$, es wird mit

$$monom(w)$$

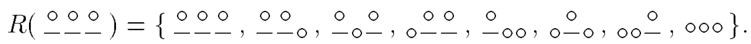
bezeichnet. So gilt zum Beispiel:



Statt des Alphabets $a_1, a_2, ..$ verwenden wir auch oft das Alphabet $a, b, ...$ Es folgen weitere Definitionen, sei dabei w eine Weintraube:
$S(w) := \{\tilde{w}|$ es existieren $i_1, ..., i_k \in \mathbf{N}$ sodaß $\tilde{w} = s_{i_k}(...s_{i_1}(w)...)\}$
$R(w) := \{\tilde{w}|$ es existieren $i_1, ..., i_k$ und $j_1, ..., j_k \in \mathbf{N}$ sodaß
$\tilde{w} = r_{i_k}^{j_k}(...r_{i_1}^{j_1}(w)...)\}$.
Man bemerkt sofort, daß z.B. die Weintraube w zu den beiden Mengen $R(w)$ und $S(w)$ gehört, da die s_i bzw. r_i^j für fast alle Indizes die Identität sind. Als ein erstes Beispiel betrachten wir die beiden Beispiele am Ende der Abschnitte über die Operationen s_i und r_i^j. Die in den beiden Beispielen verwendete Darstellung in Schichten, und die Andeutung der Operationen durch Verbindungslinien bezeichnen wir als **Bild** von $R(w)$, bzw. $S(w)$. Die Beispiele zeigen die Berechnung von



bzw.



Dabei wurde bei der Menge $S(w)$ wegen der Übersichtlichkeit nur die die Weintrauben in der ersten Schicht unterhalb der sog. Startweintraube aufgeführt.
Die beiden folgenden Eigenschaften von $R(w)$ und $S(w)$ sind klar:
1. Die beiden Mengen sind endlich.
2. Es gilt $S(w) \subseteq R(w)$, da sich jedes s_i als Folge von r_i^j schreiben läßt.
Als ein sehr wichtiger Operator wird für eine Weintraube w definiert:

$$pol(w) := \sum_{\tilde{w} \in S(w)} monom(\tilde{w}).$$

Ist w eine Weintraube, deren oberster Eintrag in der Zeile n ist, so ergibt die Operation *pol* ein Polynom aus $\mathbf{N}[a_1, ..., a_n]$. Oft werden wir auch das Alphabet $a, b, c, ..$ statt der a_i verwenden. Ein weitere wichtige Definition ist

$$qmonom(w) := monom(w)(1, q, q^2, ...),$$

also die q-Spezialisierung des Monoms (d.h. Ersetzen der a_i durch q^{i-1}) und analog:

$$qpol(w) := pol(w)(1, q, q^2, ...).$$

Ferner werden wir die Bezeichnung $pol(W), qpol(W)$, wobei W eine Menge von Weintrauben sei, verwenden, wobei $\sum_{w \in W} monom(w)$ gemeint ist. Der Wert $qmonom(w)$ wird als **q-Gewicht** der Weintraube w bezeichnet.
Die Operation $s_i = s_{i,k}$ vermindert den Exponenten von q in $qmonom(w)$ um $i - k$, bzw. die Operation r_i^j um genau 1. Die Operationen sind im gewissen Sinne 'angepaßt' an die q-Spezialisierung. In einer Schicht des Bildes von $S(w)$, bzw $R(w)$ sind die Weintrauben mit gleichen q-Gewicht, und die oberste Schicht hat das höchste Gewicht.

Zur Berechnung der Polynome betrachten wir das Beispiel $R(\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-})$ aus dem Abschnitt r_i^j. Dann ist

$$pol(R(\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-})) = b^3 + 3b^2a + 3ba^2 + a^3$$

und

$$qpol(R(\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-})) = q^3 + 3q^2 + 3q + 1.$$

Verwendet man die Menge $S(\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-}\overset{\circ}{-})$, so erhält man die Polynome

$$b^3 + b^2a + ba^2 + a^3 \quad \text{bzw.} \quad q^3 + q^2 + q + 1,$$

wie man leicht nachrechnet.

1.2.2 Herleitungen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von $S(w)$ sind Wege innerhalb des Bildes von $S(w)$, also die wiederholte Anwendung der Operation s_i.
Sei w eine Weintraube. Unter einer **Herleitung** für $\tilde{w} \in S(w)$ versteht man eine Folge von $s_{i_1}, ..., s_{i_k}$ mit

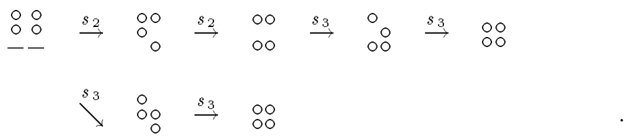
$$\tilde{w} = s_{i_k}(...(s_{i_1}(w))...).$$

Man spricht dann von einer Herleitung von w nach $\tilde{w}$, oder auch von einer Herleitung von $\tilde{w}$ aus w.
Für eine Herleitung verwendet man die Bezeichnung

$$w \longrightarrow \tilde{w}$$

Eine wichtige Frage ist die Definition einer *kanonischen* Herleitung. D.h. die Definition einer Vorschrift, die es erlaubt, zu einer Startweintraube w für jede

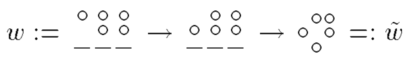
Weintraube $\tilde{w} \in S(w)$ eine Herleitung anzugeben. Dies wird in späteren Abschnitten für bestimmte Klassen von Startweintrauben gelingen.
Es ist klar, daß eine Herleitung nicht unbedingt eindeutig ist. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:



Dies sind die beiden Herleitungen s_2, s_2, s_3, s_3 und s_3, s_3.

1.2.3 Distanz-Diagramme

Sei w eine Weintraube, sei $\tilde{w} \in R(w)$. Folgende Operation ergeben z.B. ein Element aus $R(w)$.



Man bezeichnet nun im Ausgangdiagramm w die Einträge durch ihren Abstand zu ihrer Position in der Endweintraube $\tilde{w}$. Im obigen Beispiel ist dies:

$$\begin{array}{r} 000 \\ 00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 100 \\ 00 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 100 \\ 10. \end{array}$$

Sei w eine Weintraube, $\tilde{w} \in R(w)$, so heißt obige Schreibweise **Distanz-Notation** von w bezüglich $\tilde{w}$, das zugehörige Diagramm heißt **Distanz-Diagramm** $D(w, \tilde{w})$. Die Summe über das Distanzdiagramm heißt **Distanz** von w nach $\tilde{w}$, und wird mit

$$dist(w, \tilde{w})$$

bezeichnet. Diese Zahl ist gerade der Abstand zwischen den Schichten von w und $\tilde{w}$ im Bild von $R(w)$.

Viele mögliche Füllungen einer Weintraube w mit Zahlen aus $\mathbf{N}$ ergeben kein Distanzdiagramm, z.B. ist

$$\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ - \end{array}.$$

kein Distanzdiagramm. Oder sie ergeben eine Endweintraube, die nicht in $S(w)$ liegt, so zum Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ - & - & - \end{array}.$$

Man identifiziert ein Distanzdiagramm $D(w, \tilde{w})$ manchmal mit der Weintraube $\tilde{w}$ so sagt man z.B.:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ - & - & - \end{array} \notin S\left(\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ - & - & - \end{array} \right).$$

Wir halten noch fest, daß eine Konfiguration

$$\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ - & - \end{array}$$

ohne ein Durchschieben von oben in der ersten Spalte nie zu einer Konfiguration der Form

$$\begin{array}{cc} - & \circ \\ \vdots & \\ \circ & \end{array}$$

werden kann. Dies führt zu folgendem Satz.

1.2.1 Satz: Sei $D := D(w, \tilde{w})$ ein Distanzdiagramm. Sei $D_{i,j} =: \odot$ ein Eintrag > 0, so daß sämtliche Einträge in der gleichen Spalte darüber nicht bis in die Zeile von $\odot$ geschoben werden. Sei nun $D_{i,j+k} =: \otimes$ ein Eintrag rechts von $\odot$ in der gleichen Zeile, aber mit kleineren Wert. Dann gilt

$$\tilde{w} \notin S(w)$$

Beweis: Es gilt für alle Weintrauben in $S(w)$, daß der Stein $\odot$ stets oberhalb von $\otimes$ oder aber höchstens in der gleichen Zeile wie $\otimes$ liegt. Dies liegt daran, daß der Stein $\odot$ wegen der Voraussetzung, daß die Einträge darüber nicht in die Zeile von $\odot$ geschoben werden, nicht von oben vorbei geschoben werden kann. Die Weintraube $\tilde{w}$ erfüllt aber nicht diese Eigenschaft der Weintrauben aus $S(w)$.

So gilt zum Beispiel:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & \\ 0 & & & \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \notin S\left(\begin{array}{cccc} \circ & \circ & \circ & \\ \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \right)$$

da in der vierten Zeile der linke Stein mit dem Wert 3 nicht tiefer als der Stein rechts daneben (mit dem Wert 2) gelangen kann.

1.3 Permutationen

In dieser Arbeit werden die Permutationen $\pi \in S_n$ stets in Listenschreibweise $\pi = [\pi_1, ..., \pi_n]$ mit $\pi_i := \pi(i)$ dargestellt. Permutationen werden von rechts nach links multipliziert. In diesem Abschnitt wird die Verbindung zwischen Permutationen und Weintrauben geschaffen, und es werden Eigenschaften der symmetrischen Gruppe untersucht, die sich aus der Tatsache ergeben, daß die symmetrische Gruppe eine Coxetergruppe ist.

1.3.1 Permutationen und Weintrauben

Jeder Permutation $\pi \in S_n$ läßt sich ein 2-stelliges $n \times n$ Diagramm zuordnen. Dies geschieht nach folgender Vorschrift. An der Stelle (i, j) des Diagramms ist ein Eintrag $\times$ falls $\pi_i = j$. Dieses Diagramm heißt **Rothediagramm** einer Permutation. Dazu folgendes Beispiel: Sei $\pi = [5, 4, 1, 3, 2]$, dann sieht das zugehörige Rothediagramm wie folgt aus:

$$\begin{array}{c|ccccc}
5 & & \times & & & \\
4 & & & \times & & \\
3 & \times & & & & \\
2 & & & & \times & \\
1 & & & & & \times \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Diese Art von Diagramm ist schon sehr alt. Die älteste Quelle ist eine Arbeit von Rothe aus dem Jahre 1800.[Ro1800] Bereits Rothe verwendete diese Diagramme, um Inversionen zu zählen. Dazu die folgende Vorschrift:
An die Stelle (i, j) des Rothediagramms kommt ein Kreis, wenn das einzige Kreuz in der Zeile weiter rechts, und das einzige Kreuz in der Spalte oberhalb ist. Man erhält so ein 3-stelliges $\underline{n} \times \underline{n}$ Diagramm, das **Inversionsdiagramm**. Das Inversionsdiagramm hat drei verschiedene Einträge, die mit $\circ$, $\times$ oder durch keinen Eintrag graphisch dargestellt werden. Im obigen Beispiel ergibt sich das folgende Inversionsdiagramm:

$$\begin{array}{c|ccccc}
5 & & \times & & & \\
4 & & \circ & \times & & \\
3 & \times & & & & \\
2 & \circ & \circ & \circ & \times & \\
1 & \circ & \circ & \circ & \circ & \times \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

Läßt man im Inversionsdiagramm die Einträge $\times$ weg, so erhält man eine Weintraube. Eine derartige Weintraube heißt *Permutationsweintraube*. Damit hat man eine Abbildung

$$rothe : \text{Permutationen} \longrightarrow \text{WT}$$

die einer beliebigen Permutation eine Weintraube zuordnet. Diese Abbildung ist nicht injektiv, da z.B. der Identität in S_n für alle n die gleiche Weintraube zugeordnet wird, nämlich die Weintraube ohne Steine, die sog. leere Weintraube. Die Weintraube, die einer Permutation π zugeordnet wird, erhält den Namen

$$w_\pi.$$

Eine wichtige Eigenschaft der Permutationsweintraube ist die folgende: Man kann aus einer Permutationsweintraube die Permutation wieder rekonstruieren. Man beginnt in der untersten Zeile und trägt in der ersten Spalte ohne $\circ$ ein $\times$ ein. So arbeitet man sich von unten nach oben hoch.

1.3.2 Der Lehmercode

Ein wichtiges Hilfsmittel bei den weiteren Untersuchungen wird der **Lehmercode** einer Permutation sein. Dabei handelt es sich um eine spezielle Inversionstabelle. Dies ist ein Werkzeug, welches bei Anwendungen von Permutationen in der Informatik weit verbreitet ist. Weitere Informationen hierzu findet man z.B. bei Knuth [Knu3] im Abschnitt 5.1.1. .

1.3.1 Definition:
Gegeben sei eine Permutation $\pi \in S_n$, welche in Listenschreibweise dargestellt wird. Dieser Permutation wird ein Vektor $L(\pi) \in \mathbf{N}^n$ zugeordnet. Dies geschieht mit der Definition:

$$L(\pi)_i := |\{j > i | \pi_j < \pi_i\}|.$$

Dieser Vektor $L(\pi)$ wird als **Lehmercode** der Permutation π bezeichnet. Man erhält ihn auch, indem man im Inversionsdiagramm die Anzahl der $\circ$ in den Zeilen zählt. Zunächst noch einige Bezeichnungen:
$L(\pi)^+$:= Vektor $L(\pi)$ ohne die Nullen am Ende.
$L(\pi)^*$:= Vektor der durch Sortieren in ansteigender Ordnung des Lehmercodes entsteht.

Gegeben sei die Permutation $[2, 3, 4, 1, 5]$, dann ist $L(2, 3, 4, 1, 5) = 1, 1, 1, 0, 0$. Der gekürzte Teil $L(2, 3, 4, 1, 5)^+$ ist $1, 1, 1$, und die Partition, die durch Sortieren entsteht ist $0, 0, 1, 1, 1$.
Der Name Lehmercode wird gewählt, da diese Notation bereits 1906 durch D. N. Lehmer [Le60] verwendet wurde. Ebenso wie mit anderen Inversionstabellen ist es auch mit dem Lehmercode möglich die Inversionen der Permutationen zu zählen. Die Summe über den Lehmercode einer Permutation π ist die Anzahl der Inversionen in π.
Wie auch bei anderen Inversionstabellen, gilt auch beim Lehmercode, daß sich die Permutation aus dem Code rekonstruieren läßt. Dies liegt daran, daß der Lehmercode eine Bijektion zwischen S_n und den Vektoren aus $\mathbf{N}^n$, die lexikographisch kleiner als $(n-1, ..., 1, 0)$ sind, ist. Betrachten wir die Rekonstruktion an folgenden Beispiel:
Gegeben sei der Lehmercode $C = 2, 3, 1, 0, 0$. Gesucht ist $L^{-1}(C)$, eine Permutation π aus S_5. Dazu bildet man eine Hilfsliste H mit den Einträgen $1, 2, 3, ..., n$.

In diesem Beispiel ist $H = 1, 2, 3, 4, 5$. Die Permutation wird nun schrittweise aufgebaut, indem man π_i gleich dem (C_i+1)-ten Element aus der Liste H setzt, und dieses Element dann aus der Liste H streicht, und die entstandene Lücke in H von rechts auffüllt. Der erste Schritt:

$$C_1 = 2 \quad \pi = 3, -, -, -, - \quad H = 1, 2, 4, 5, -.$$

Der zweite Schritt:

$$C_2 = 3 \quad \pi = 3, 5, -, -, - \quad H = 1, 2, 4, -, - \quad ,$$

u.s.w. Das Ergebnis ist $\pi = [3, 5, 2, 1, 4]$.
Hat man bereits die Weintraube der Permutation bestimmt, so erhält man den Lehmercode durch einfaches Zählen der Steine in den Zeilen. Der Permutation aus dem obigen Beispiel wird durch *rothe* die Weintraube

$$\begin{array}{llll} - & & & \\ - & & & \\ \circ & & & \\ \circ & \circ & - & \circ \\ \circ & \circ & & \end{array}$$

zugeordnet. Der Lehmercode ist, wie man durch Zählen in den Zeilen feststellt, $2, 3, 1, 0, 0$. Den Lehmercode der inversen Permutation erhält man durch Zählen der Steine in den Spalten. Im Beispiel ist dies $3, 2, 0, 1, 0$.

1.3.3 Die Coxetergruppe S_n

In diesem Abschnitt werden Grundbegriffe über Coxetergruppen vorausgesetzt, wie sie z.B. in [BO] vermittelt werden.
Wir bezeichnen mit σ_i die **Elementartransposition** $[1, 2, ..., i-1, i+1, i, i+2, i+3, ...]$. In Zykelschreibweise ist dies die Permutation $(i, i+1)$. Die Menge

$$\Sigma_n := \{\sigma_i | 1 \leq i \leq n-1\}$$

bildet bekanntlich ein Erzeugendensystem der symmetrischen Gruppe S_n. Dieses Erzeugendensystem Σ_n hat die weitere Eigenschaft, daß das Paar (S_n, Σ_n) eine Coxetergruppe ist. Nachfolgend werden nun einige Begriffe aus der Theorie der Coxetergruppen für den Spezialfall (S_n, Σ_n) definiert.
Sei $\pi \in S_n$. Eine **reduzierte Zerlegung** von π ist ein Produkt $\sigma_{i_k} .....\sigma_{i_1}$ von Elementartranspositionen, welches die Permutation π ergibt und die Eigenschaft hat , daß es kein kürzeres solches Produkt gibt. Die Zahl k ist die **(reduzierte) Länge** der Permutation π. Die reduzierte Länge wird mit $l(\pi)$ bezeichnet, sie ist gerade die Anzahl der Inversionen von π, was aus der unten folgenden Bemerkung sofort folgt. Es ist zu beachten, daß eine reduzierte Zerlegung im allgemeinen nicht eindeutig ist, so sind $\sigma_3\sigma_1$ und $\sigma_1\sigma_3$ reduzierte Zerlegungen von $[2, 1, 4, 3]$.

Anwendungen des Lehmercodes
Eine erste Anwendung ist die Bestimmung der Anzahl der Inversionen, die gleich der reduzierten Länge ist. Eine wichtigere Anwendung ist jedoch, daß es mittels des Lehmercodes möglich ist eine reduzierte Zerlegung zu berechnen. Dazu wird zuerst die Multiplikation mit Elementartranspositionen untersucht. Es gilt:
Sei $L = (L_1, ..., L_n)$ der Lehmercode einer Permutation $\pi \in S_n$. Dann gilt, wie man leicht nachrechnet:

$$L(\pi\sigma_i) = \begin{cases} (L_1, ..., L_{i-1}, L_{i+1}, L_i - 1, L_{i+2}, ...) & \text{falls } L_i > L_{i+1} \\ (L_1, ..., L_{i-1}, L_{i+1} + 1, L_i, L_{i+2}, ...) & \text{falls } L_i \leq L_{i+1}. \end{cases}$$

Um nun mittels dieses Hilfssatzes eine reduzierte Zerlegung von π zu berechnen, geht man wie folgt vor: Man multipliziert π solange mit Elementartranspositionen, bis man bei der Identität angelangt ist. Um zu gewährleisten, daß man eine reduzierte Zerlegung erhält, muß man beachten, daß in jedem Schritt die Anzahl der Inversionen um Eins vermindert wird. Dies liefert auch die Identität der Anzahl der Inversionen und der Länge der reduzierten Zerlegung. Zur Verdeutlichung der Berechnung der reduzierten Zerlegung betrachten wir das folgende Beispiel. Gegeben sei die Permutation $\pi = [3, 5, 2, 1, 4]$, welche bekanntlich den Lehmercode 23100 hat. Wir wenden die folgende Kette von Multiplikationen an:

$$\begin{array}{ccll} \pi & = & L^{-1}(23100) & \\ \pi\sigma_3 & = & L^{-1}(23000) & \\ \pi\sigma_3\sigma_2 & = & L^{-1}(20200) & \\ \pi\sigma_3\sigma_2\sigma_3 & = & L^{-1}(20010) & \\ \pi\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_4 & = & L^{-1}(20000) & \\ \pi\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1 & = & L^{-1}(01000) & \\ \pi\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2 & = & L^{-1}(00000) & = id_{S_5}. \end{array}$$

Eine reduzierte Zerlegung von π^{-1} ist dann $\sigma_3\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_1\sigma_2$, und da die Ordnung der Transpositionen 2 ist, ergibt das die reduzierte Zerlegung $\sigma_2\sigma_1\sigma_4\sigma_3\sigma_2\sigma_3$ von π.

1.4 Partitionen

Auch für Partitionen wird eine Verbindung zu den Weintrauben geschaffen. Man wird sogar sehen, daß es sich dabei um einen Speziallfall der Verbindung zwischen den Permutationen und den Weintrauben handelt.

1.4.1 Definitionen

Partitionen werden in dieser Arbeit als ansteigende Vektoren definiert. Eine **Partition** ist eine endliche, monoton ansteigende Folge $I = (I_1 \leq ... \leq I_l)$ von natürlichen Zahlen. Die Summe $\sum_{i=1}^{l} I_i$ ist das **Gewicht** $|I|$ der Partition. Einen einzelnen Summanden nennt man **Teil** der Partition. Die Anzahl der

Teile größer Null ist die **Länge** $l(I)$ der Partition. Partitionen betrachtet man als gleich, falls sie sich nur durch führende Nullen unterscheiden.
Sei $I = (I_1, ..., I_l)$ eine Partition, sei $m := I_l$. Die Partition $I' = (I'_1, ..., I'_m)$ mit

$$I'_i := |\{j : I_j > I_l - i\}|$$

heißt die zu I **konjugierte** Partition.

Einer Partition I wird ein 2-stelliges Diagramm zugeordnet, indem linksbündig in der Zeile i I_i Markierungen eingetragen werden. Bereits Ferrers verwendete 1853 [Di19] als Markierung die Zahl 1, was dann die Weintrauben ergibt. In späteren Anwendungen wurden als Markierung die verschiedensten Symbole verwendet, im folgenden werde ich jedoch die Weintrauben verwenden. Der Partition $3, 4, 5, 5, 7$ wird so die Weintraube

$$\begin{array}{l} 1111111 \\ 11111 \\ 11111 \\ 1111 \\ 111 \end{array} = \begin{array}{l} \circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ\circ \\ \circ\circ\circ \end{array}$$

zugeordnet. Die konjugierte Partition ist ($I' = 1, 1, 3, 4, 5, 5, 5$). Man beachte, daß hier die Anzahl der führenden Nullen wichtig ist. Man erhält aus einem Diagramm die Partition durch Addieren in den Zeilen, und die konjugierte Partition durch Addieren in den Spalten. Der Übergang zu konjugierten Partiton entspricht der Spiegelung an der Diagonale links oben nach rechts unten.
Nun wird noch eine wichtige Verallgemeinerung einer Partition eingeführt.
Seien I, J Partitionen gleicher Länge, so definiert man:

$$I \geq J \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_i \geq J_i \quad \forall i \quad .$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, daß das Diagramm von I das Diagramm von J enthält. Ein geordnetes Paar I, J von Partitionen heißt Schiefpartition, falls $I \geq J$, und wird mit I/J bezeichnet. Das Diagramm einer Schiefpartition ist das Diagramm von I, wo die Einsen des Diagramms von J durch Nullen ersetzt werden. Das **Gewicht** $|I/J|$ ist die Differenz $|I| - |J|$.

Die Schiefpartition 0234/0112 hat das Diagramm

$$\begin{array}{l} --\circ\circ \\ -\circ\circ \\ -\circ \\ -- \end{array} \quad ,$$

was aber auch das Diagramm der Schiefpartition 1234/1112 ist.

Partitionen und Weintrauben
Die Abbildung, die einer Partition, bzw einer Schiefpartition eine Weintraube, nämlich das Diagramm zuordnet, heißt:

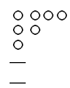
$$ferrers.$$

1.4.2 Verbindung zwischen Partitionen und Permutationen

Man bemerkt, daß die Weintraube, die einer Partition I mittels der Funktion $ferrers$ zugeordnet wird, fast identisch ist mit der Weintraube, die mittels der Funktion $rothe$ der Permutation $L^{-1}(I)$ zugeordnet wird. Der einzige Unterschied sind Leerspalten am linken Rand, falls die Partition I führende Nullen hat und Leerspalten am Ende jeder besetzten Zeile.
Anders ausgedrückt, bis auf Leerspalten ist das Diagramm einer Partiton eine Permutationsweintraube. Dies bedeutet, daß

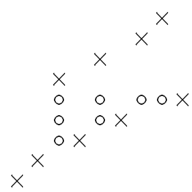
$$S(ferrers(I)) = S(rothe(L^{-1}(I)))$$

gilt (bis auf Leerspalten). Nicht alle Permutationen haben, als Weintraube, das Diagramm einer Partition. Es sind dies nur diejenigen, welche als Lehmercode eine Partition mit nachfolgenden Nullen haben. Dies sind die Permutationen mit genau einem Abstieg. Zur Erläuterung dieser Verbindung zwischen Weintrauben von Permutationen und Partitionen betrachten wir das folgende Beispiel.
Die Partition $0, 0, 1, 2, 4$ hat das Diagramm



,

und dies ist das Inversionsdiagramm



der Permutation $[1, 2, 4, 6, 9, 3, 5, 7, 8] = L^{-1}(0, 0, 1, 2, 4)$. Die beiden Weintrauben unterscheiden sich lediglich durch Leerspalten, was z.B. bei der Bildung von $pol(w)$ keine Rolle spielt.
Im Falle der Schiefpartitionen ist es nicht so einfach, man findet im allgemeinen keine Permutation, so daß das Schiefdiagramm die Permutationsweintraube ist.

Chapter 2

Schubertpolynome

Schubertpolynome wurden von Lascoux und Schützenberger definiert. Sie sind eine Verallgemeinerung von Schurpolynomen. Im ersten Teil werden die Schubertpolynome eingeführt, im zweiten Teil folgt die sogenannte nicht kommutative Theorie. Es wird gezeigt, welche Tableaux durch die Schubertpolynome abgezählt werden. Der Name nicht kommutativ rührt daher, daß man zwischen den Monomen bac und cab unterscheidet, da das erste das Tableau $\begin{smallmatrix} b & \\ a & c \end{smallmatrix}$ ist, und das zweite das davon verschiedene Tableau $\begin{smallmatrix} c & \\ a & b \end{smallmatrix}$ ist. Dieselben Polynome jedoch im allgemeineren Ansatz wurden vorher bereits in [BGG] studiert.

2.1 Definition und Eigenschaften

2.1.1 Der Operator ∂_i

Schubertpolynome wurden von Lascoux und Schützenberger [LS82.1] mittels eines Symmetrisierungsoperators auf dem Ring der Polynome definiert. Sei $\mathbf{Z}[a_1, ..., a_n]$ der Polynomring in den kommutativen Variablen $a_1, .., a_n$. Die Gruppe S_n der Permutationen von $1, ..., n$ operiert auf einem Polynom $f \in \mathbf{Z}[a_1, ..., a_n]$ in natürlicher Weise durch Vertauschen der Variablen. Wir bezeichnen diese Operation von $\pi \in S_n$ auf f mit f^π, dann definieren wir einen Symmetrisierungsoperator

2.1.1 Definition:
$$\partial_i(f) := \frac{f - f^{\sigma_i}}{a_i - a_{i+1}},$$
wobei σ_i die Elementartransposition $(i, i+1) \in S_n$ bezeichnet.

Betrachten wir dazu ein Beispiel: Sei $f = a_1a_2 + 2a_2^2a_3 + a_3a_4$ dann ist $f^{\sigma_1} = a_1a_2 + 2a_1^2a_3 + a_3a_4$ und die Anwendung von ∂_1 ergibt $\partial_1(f) = -2a_1a_3 - 2a_2a_3$

Die Anwendung des Operators ∂_i ergibt ein in den Variablen a_i, a_{i+1} symmetrisches Polynom. Dies rechtfertigt den gewählten Namen. Ist das Polynom bereits symmetrisch in den Variablen a_i, a_{i+1} so ist das Result die 0. Der Symmetrisierungsoperator ∂_i erfüllt die folgenden Coxeterrelationen:

2.1.2 Hilfssatz: [LS82.1]

$$\begin{array}{ccll} \partial_i\partial_j & = & \partial_j\partial_i & \text{falls } |i-j|>1 \\ \partial_i\partial_j\partial_i & = & \partial_j\partial_i\partial_j & \text{falls } |i-j|=1 \\ \partial_i\partial_j & = & 0 & \text{falls } i=j \end{array} .$$

Womit es ermöglicht wird [BO], den Symmetrisierungsoperator ∂_π für $\pi \in S_n$ zu definieren. Sei dazu $\pi = \sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_k}$ eine reduzierte Zerlegung von π. Dabei ist die Reihenfolge der Multiplikation von Permutationen zu beachten (rechts nach links). Dann ist die folgende Definition unabhängig von der gewählten reduzierten Zerlegung.

2.1.3 Definition:

$$\partial_\pi(f) := \partial_{i_k}(\cdots\partial_{i_1}(f)\cdots).$$

2.1.2 Schubertpolynome

2.1.4 Definition:
Wir bezeichnen mit E_n oder einfach E den Vektor $(n-1, n-2, ..., 1, 0)$ aus $\mathbf{N}^n$. Das **Schubertpolynom** mit Index $\pi \in S_n$ wird definiert als

$$X_\pi := \partial_{\omega\pi}(a^{E_n}),$$

wobei ω die Permutation $[n, n-1, ..., 2, 1]$ aus S_n ist. Das Schubertpolynom X_π ist daher ein Polynom in den Variablen $a_1, ..., a_n$. Will man das Alphabet hervorheben so verwendet man auch die Bezeichnungsweise:

$$X_\pi(A_n) \qquad \text{oder} \qquad X_\pi(a_1, ..., a_n).$$

Verwendet man als Indizierung nicht die Permutation π, sondern deren Lehmercode I, so wird dies durch die folgende Notation angedeutet:

$$Y_I := X_{L^{-1}(I)}.$$

Zur Berechnung von Schubertpolynomen geht man beispielsweise wie folgt vor: Man will das Schubertpolynom $X_{1423} = Y_{0200}$ berechnen. Dies ist $\partial_{\omega[1423]}(a_1^3a_2^2a_3)$. Dazu benötigt man zuerst eine beliebige reduzierte Zerlegung von $\omega[1423] = [4132]$ z.B. $\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_3$. Zur Berechnung einer reduzierten Zerlegung kann man z.B. das im Abschnitt über die Coxetergruppe S_n vorgestellte Verfahren verwenden. Es wird dann wie folgt gerechnet:

$$\begin{gathered}\partial_3\partial_1\partial_2\partial_3(a_1^3a_2^2a_3) = \\ \partial_3\partial_1\partial_2(a_1^3a_2^2) = \\ \partial_3\partial_1(a_1^3a_2 + a_1^3a_3) = \\ \partial_3(a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + a_1^2a_3 + a_1a_2a_3 + a_2^2a_3) = \\ a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2.\end{gathered}$$

2.1.3 Eigenschaften

2.1.5 Hilfssatz:
Sei $\pi = [\pi_1, ..., \pi_{n-1}]$ eine Permutation aus S_{n-1}, dann gilt

$$X_\pi = X_{[\pi_1,\ldots,\pi_{n-1},n]}.$$

Dies hat zur Folge, daß es bei der Indizierung durch den Lehmercode nicht auf die Anzahl der Nullen am Ende ankommt. Man kann also nach der letzten Ziffer größer Null abbrechen, obwohl dies noch kein Lehmercode zu einer Permutation ist. Dies ist bei der Formulierung des folgenden Satzes zu berücksichtigen, der den wichtigen Zusammenhang mit den Schurpolynomen hergestellt:

2.1.6 Satz: [LS82.1]
Sei $I = (i_1, .., i_n)$ eine Partition, dann ist

$$Y_I = S_I(A_n),$$

wobei $S_I(A_n)$ das Schurpolynom zur Partition I in n Variablen ist. Dieser Satz besagt in der Sprache der Permutationen, anstelle des Lehmercodes, daß Schubertpolynome, die durch Permutationen mit nur einem Abstieg (d.h. es gibt nur ein i sodaß bei der Permutation $\pi \in S_n$ gilt: $\pi_i > \pi_{i+1}$) indiziert sind, Schurpolynome sind. Das obige Beispiel zur Berechnung eines Schubertpolynoms berechnete also das Schurpolynom $S_2(A_2) = a_1^2 + a_1a_2 + a_2^2$.

Da man für Schurpolynome die kombinatorische Interpretation als Summe von Tableaux hat, stellt sich die Frage nach einer kombinatorischen Interpretation der Schubertpolynome, die im Spezialfall Schurpolynom wieder die Menge der Tableaux ist. Eine Antwort auf diese Frage gibt der nächste Abschnitt.

2.2 Worte, Tableaux und Schubertpolynome

Es werden zuerst grundlegende Begriffe vorgestellt, wie sie in verschiedenen Artikeln [LS81.1, LS88.1] von Lascoux und Schützenberger definiert wurden. Anschließend wird die nicht kommutative Theorie der Schubertpolynome betrachtet.

2.2.1 Worte, Tableaux, Kontertableaux

$A = \{a_1 < a_2 < ...\}$ sei ein Alphabet. $\mathbf{Z} < A >$ sei die zugehörige freie Algebra. Ihre Elemente sind Abbildungen von den Worten über A, in die Menge $\mathbf{Z}$, wobei nur endliche viele Worte auf eine Zahl ungleich 0 abgebildet werden. Die Worte w über A sind eingebettet in $\mathbf{Z} < A >$, indem sie auf 1 abgebildet werden, die Worte ungleich w werden auf 0 abgebildet.
Die Länge eines Wortes w, das ist die Anzahl der Buchstaben, werde mit $l(w)$ bezeichnet. Ein Wort $w = x_1 x_2 ... x_r$ ist eine **Spalte der Länge** r falls $x_1 > ... > x_r$, wobei die x_i aus A sind. Spalten sind also streng monoton fallende Worte.
Die Zerlegung eines Wortes x in ein Produkt von Spalten $s_1.s_2.s_3...$ maximaler Länge nennt man **Spaltenfaktorisierung**. Der Vektor der Spaltenlängen $l(s_i)$ heißt **Umriß (der Spaltenfaktorisierung) des Wortes** und wird mit $\lambda(x)$ bezeichnet. Der **Inhalt** $I(w)$ eines Wortes w ist der Vektor der Zahlen $a_i(w)$, die angeben wie oft der Buchstabe a_i im Wort w vorkommt. i durchläuft dabei alle Einträge im Wort.
Dazu das folgende Beispiel:
Sei das Alphabet $A = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, das Wort 986 ist dann eine Spalte der Länge 3. Betrachten wir das Wort:

$$458532632875432543,$$

so ist die zugehörige Spaltenfaktorisierung

$$4.5.8532.632.875432.543 \quad .$$

Die Punkte dienen zur Trennung der einzelnen Spalten, und $\lambda(w) = 114363$. Der Inhalt $I(w)$ ist 0343411200....
Eine Spalte w **dominiert** eine Spalte v (mit w >> v bezeichnet), falls es eine injektive Abbildung Φ der Buchstaben von v in die von w gibt, so daß $\Phi(x_i) \leq x_i$ für alle Buchstaben x_i in der Spalte v ist.
So gilt zum Beispiel 986 >> 97, da der Buchstabe 6 kleiner ist als der Buchstabe 7 und der Buchstabe 8 kleiner ist als der Buchstabe 9, natürlich geht auch $\Phi : 9 \mapsto 9, 7 \mapsto 6$.

2.2.1 Definition: Ein Produkt $t = s_1.s_2...$ von Spalten ist ein **Tableau** falls gilt: $s_1 >> s_2 >> ...$ Der Umriß $\lambda(t)$ der Spaltenfaktorisierung des Tableaus ist daher eine abfallende Folge $(l(s_1) \geq l(s_2) \geq ...)$. Der Vektor $.... \leq l(s_2) \leq l(s_1)$ ist dann eine Partition, und die dazu konjugierte Partition ist der **Umriß** des Tableaus.
Ein Produkt $t = s_1.s_2...$ von Spalten ist ein **Kontertableau** [LS88.2] falls gilt: $s_1 <<< s_2 <<< ....$ Dabei bedeutet $v <<< w$, daß es eine Injektion Ψ aus der Spalte v in die Spalte w gibt, mit der Eigenschaft $\Psi(x) \geq x$ für alle Buchstaben x aus v. Der Umriß der Spaltenfaktorisierung eines Kontertableaus ist demnach eine Partition, und die dazu konjugierte Partition ist der **Umriß** des Kontertableaus.

Mit dieser wichtigen Definition wird ein Tableau als ein Wort aus der freien Algebra $\mathbf{Z} < A >$ definiert. Dabei handelt es sich um die übliche Definition von Tableaux. Sie wurde lediglich in der Sprache der Worte vorgenommen. Tableaux sind wie üblich in den Spalten streng monoton, und in den Zeilen schwach monoton ansteigend.

Für Tableaux gibt es zwei verbreitete Schreibweisen. Das Tableau 986.97 wird in der englischen Notation als $\begin{array}{l} 67 \\ 89 \\ 9 \end{array}$ bzw in der französischen Notation als $\begin{array}{r} 9 \\ 89 \\ 67 \end{array}$ zweidimensional dargestellt. In Zukunft werden beide Notationen verwendet. Der Umriß ist $23' = 122$.

Graphische Darstellung beliebiger Worte

Wenn man die Spaltenfaktorisierung eines Wortes nimmt und die Spalten nebeneinander schreibt, so daß innerhalb einer Zeile die Werte schwach monoton ansteigen, erhält man eine graphische Darstellung für ein beliebiges Wort. Dies definiert mehrere graphische Darstellungen eines Wortes, man wählt jedoch meist die Form, in der möglichst viele Buchstaben in einer Zeile sind, und das untere Ende der Spalten in einer möglichst tiefen Zeile ist. Diese ist dann eindeutig. Im Spezialfall eines Tableaus erhält man so die französische Notation.

Obiges Beispiel zur Spaltenfaktorisierung ergibt

$$\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 8 & & & \\ & & 5 & 6 & 8 & \\ & & 3 & 3 & 7 & \\ & & 2 & 2 & 5 & \\ & & & & 4 & 5 \\ & & & & 3 & 4 \\ & & & & 2 & 3. \end{array}$$

Das Wort 2.3.41.421 ergibt

$$\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 4 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1, \end{array}$$

und ist ein Kontertableau. Im allgemeinen Fall erhält man etwas wie im ersten Beispiel. Ein Wort in dieser Darstellung heißt **Schieftableau**. Dabei ist jedoch die konkrete graphische Darstellung wichtig. Der **Umriß** eines Schieftableaus ist eine Schiefpartition I/J, wobei I_i die Nummer der Spalte mit dem letzten Eintrag in der $i-$ten Zeile ist. I_j ist die Nummer der Spalte vor dem ersten Eintrag in der $i-$ten Zeile. Dabei werden zur Vereinfachung der Definition die Zeilen ausnahmsweise von oben nach unten numeriert. Im obigen Beispiel ist der Umriß 3555666/0222444. Es ist zu beachten, daß das selbe Wort durch eine unterschiedliche Darstellung zu einem anderen Schieftableau wird. So ist das gleiche Wort in der Darstellung

$$\begin{array}{cccccc}
4 & & & & & \\
 & 5 & 8 & & & \\
 & & 5 & 6 & 8 & \\
 & & 3 & 3 & 7 & \\
 & & 2 & 2 & 5 & \\
 & & & & 4 & 5 \\
 & & & & 3 & 4 \\
 & & & & 2 & 3
\end{array}$$

ein Schieftableau vom Umriß 13555666/01222444.

Ein Tableau heißt **Youngtableau** falls es eine Permutation der ersten $l(t)$ Buchstaben des Alphabets ist.

Es folgt nun eine wichtige Bemerkung, die eine Verbindung zu bekannten Algorithmen herstellt.

2.2.2 Bemerkung: Ein Wort, welches ein Tableau ist, gibt bei Anwendung des Algorithmus row insertion von Schensted [Schen61] dieses Tableau als P-Symbol.

So ergibt das Wort $w = 986.97$ bei Anwendung des Algorithmus row insertion die Folge von P-Symbolen (in englischer Notation):

$$9 \to \begin{array}{c} 8 \\ 9 \end{array} \to \begin{array}{c} 6 \\ 8 \\ 9 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & 9 \\ 8 & \\ 9 & \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & 7 \\ 8 & 9 \\ 9 & \end{array} \quad ,$$

wobei das rechte Tableau das Wort w ist.

2.2.2 Zeilentableaux

Ein **Zeilentableau** [LS88.1] ist ein Tableau, in dem die k-te Spalte ein Teilwort der k-1 - ten Spalte ist. In der Arbeit [LS88.1] wird ein deratiges Tableau als key bezeichnet.
Diese Definition ist in der folgenden kombinatorischen Beschreibung der Schubertpolynomen sehr wichtig. Das Tableau 986969 ist zum Beispiel ein Zeilentableau. Der Name wird verständlich, wenn man dieses Tableau wie folgt darstellt:

$$\begin{array}{ccc} 9 & 9 & 9 \\ 8 & & \\ 6 & 6 & \end{array} \; .$$

Das eigentliche Zeilentableau entsteht nun indem man, soweit dies möglich ist, die Einträge fallen läßt. Dies ergibt das Tableau:

$$\begin{array}{ccc} 9 & & \\ 8 & 9 & \\ 6 & 6 & 9 \end{array} .$$

Ausgangsposition eines Zeilentableaus sind also linksbündige Zeilen.

2.2.3 Plactische und nilplactische Kongruenzen

Es werden zwei Kongruenzen in der freien Algebra $\mathbf{Z} < A >$ definiert. Die **plactische Kongruenz** '$\equiv$' wird erzeugt durch die Elementarrelationen:

(PL1) $\quad a_k a_i a_j \equiv a_i a_k a_j$ und $a_j a_i a_k \equiv a_j a_k a_i$
(PL2) $\quad a_j a_i a_j \equiv a_j a_j a_i$ und $a_j a_i a_i \equiv a_i a_j a_i$,

wobei $i < j < k$ ist. Knuth [Knu70], definierte diese Relationen erstmalig, wobei er auch schon das Zeichen $\equiv$ verwendete. Der Namen wurde wohl erstmals von Lascoux und Schützenberger in [LS81.1] eingeführt. Das folgende Beispiel, ist dasselbe Beispiel wie in Knuth , das erste Wort ist das Tableau, Knuth sagt dazu 'canonical sequence'.
$421123 \equiv 412123 \equiv 142123 \equiv 142213 \equiv 412213 \equiv 412231 \equiv 142231 \equiv 124231 \equiv 124213 \equiv 122431$
Dieses Beispiel wird in der weiteren Arbeit noch öfter auftauchen.

Knuth untersuchte den row insertion Algorithmus von Schensted. Die plactischen Kongruenzen geben dabei an, welche Worte das gleiche P-Symbol bei Anwendung des Algorithmus row insertion ergeben. Die Klasse der plactisch äquivalenten Worte sind also alle Worte, die bei diesem Algorithmus das gleiche P-Symbol ergeben.
Als zweite Kongruenz wird die nilplactische Kongruenz '$\cong$', die durch die selben Relationen gegeben ist, definiert. Nur im Fall (PL2), falls i und j aufeinander folgende Ziffern sind, wird diese Relation ersetzt durch

(NilPL) $\quad a_i a_{i+1} a_i \cong a_{i+1} a_i a_{i+1}$ und $a_i a_i \cong 0$.

Schensteds Algorithmus (insertion, deletion) wurde von Edelman und Greene [EG87] auf die nilplactischen Relationen erweitert. Es gilt folgender Satz:

2.2.3 Satz: [LS88.1]
1. Jede plactische Klasse (bzw. nilplactische Klasse ohne 0) enthält genau ein Tableau.
2. Es gibt eine Bijektion zwischen den Worten einer plactischen Klasse (bzw nilplactischen Klasse ohne 0), mit dem Tableau t als Repräsentanten und den Youngtableau (dem Q-Symbol) vom gleichen Umriß wie t.

Das Wort 142123 liegt, wie obiges Beispiel zeigt, in der plactischen Klasse des Tableaus 421123. Um nun das bijektiv zugeordnete Youngtableau vom Umriß 411 zu bestimmen, berechnet man das Q-Symbol, dazu zuerst das P-Symbol

$$1 \to 14 \to \begin{matrix}12\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}11\\2\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}112\\2\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}1123\\2\\4\end{matrix}$$

und man erhält das Youngtableau (Q-Symbol)

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 \\ 4 \end{array} \quad .$$

Um das Tableau zu bestimmen, welches der Repräsentant der plactischen Klasse ist, gibt es zwei Möglichkeiten. Bei der ersten wendet man den Schensted row insertion Algorithmus an, und erhält so ein P-Symbol, welches der Repräsentant ist, oder man erhält dasselbe [Thom77] Tableau mittels Jeu de taquin. Wir werden später in 3.1.3 beide Methoden an einem Beispiel betrachten. Zusammenfassend ein paar Bemerkungen.

2.2.4 Bemerkungen:
1. Kongruente Worte haben das gleiche Bild beim Übergang von $\mathbf{Z} < A >$ nach $\mathbf{Z}[A]$.
2. Da die nilplactischen Relationen die Coxeter Relationen (der symmetrischen Gruppe) umfassen, ist die Menge der reduzierten Zerlegungen einer Permutation π eine disjunkte Vereinigung von nilplactischen Klassen.
3. Die Anzahl der Worte in einer plactischen Klasse ist die Anzahl der Standard Tableaux vom gleichen Umriß wie das Tableau in der Klasse. Diese Anzahl ist auch die Dimension einer irreduziblen Darstellung der S_n.

2.2.5 Satz: [LS88.2] Jede plactische Klasse enthält genau ein Kontertableau

Es gibt daher eine Bijektion zwischen Tableaux und Kontertableaux. Betrachtet man nochmals obiges erstes Beispiel von Knuth, so ist das rechteste Wort 1.2.2.431 das Kontertableau in der plactischen Klasse. Später lernen wir einen neuen Algorithmus zur Bestimmung des Kontertableaus kennen.

2.2.4 Das linke und rechte Zeilentableau

Dabei handelt es sich um spezielle Zeilentableaux, welche zur Definition der nicht kommutativen Schubertpolynome benötigt werden.

Obiger Satz 2.2.3 hat zur Folge, daß zu einem gegebenen Tableau t, welches als Wort den Umriß I hat, und einer Zahl k es genau ein Wort $u_k t_k$ (bzw $t'_k v_k$) kongruent zu t gibt, sodaß u_k (bzw v_k) eine Spalte vom Grad I_k ist, und t_k (bzw t'_k) ist ein Tableau, das als Wort den Umriß $I_1, .., I_{k-1}, I_{k+1}, ...$ hat. Außerdem, falls $k \geq h$ ist, dann ist u_k ein Teilwort von u_h und v_k ist ein Teilwort von v_h. Daher ist das Wort $u_1 u_2 u_3 ...$ ein Zeilentableau genannt das **linke Zeilentableau** von t, genauso wie das Wort $v_1 v_2 v_3 ...$, das **rechte Zeilentableau** von t.

Da diese Zeilentableaux von der gewählten Kongruenz abhängen, gibt es vier verschiedene Zeilentableaux:
das rechte plactische Zeilentableau (RPZ), das linke plactische Zeilentableau (LPZ), das rechte nilplactische Zeilentableau (RNZ) und das linke nilplactische Zeilentableau (LNZ).

Will man z.B. das linke nilplactische Zeilentableau berechnen, so stellt zunächst fest, daß folgende nilplactischen Äquivalenzen gelten:

$$\begin{array}{llll} 5 & 6 & & \\ 4 & 5 & 7 & \\ 1 & 2 & 6 & 7 \end{array} \cong \begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \cdot \begin{array}{lll} 6 & 7 & \\ 5 & 6 & \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \cong 4 \cdot \begin{array}{lll} 5 & 6 & \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{array} \quad ,$$

und diese ergeben das linke nilplactische Zeilentableau

$$\begin{array}{llll} 5 & 5 & & \\ 4 & 4 & 5 & \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{array} \quad .$$

Berechnung der rechten und linken plactische Zeilentableaus
Zur Berechnung des **plactischen** Zeilentableaus kann man folgendermaßen vorgehen. Man betrachtet die Worte in der Äquivalenzklasse von t, deren Umrisse der Spaltenfaktorisierung eine Permutation des Umrisses der Spaltenfaktorisierung des zugehörigen Tableau sind. Es gilt:

2.2.6 Satz: [LS88.2]
Das rechte plactische Zeilentableau ergibt sich aus den rechten Spalten dieser Worte, deren Spaltenfaktorisierung obige Form haben, und das linke plactische Zeilentableau ergibt sich aus den linken Spalten.

Betrachten wir dazu noch ein Beispiel: Gegeben sei das Tableau 531624. Folgende sechs Worte kommen in Frage:

$$\begin{array}{lll} 5 & & \\ 3 & 6 & \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 5 & 6 & \\ 1 & 3 & \\ & 2 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 5 & & \\ 1 & 3 & 6 \\ & & 4 \\ & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 1 & 5 & 6 \\ & 3 & 4 \\ & & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 5 & & \\ 3 & & \\ 1 & 2 & 6 \\ & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 1 & 5 & \\ & 3 & 6 \\ & 2 & 4. \end{array}$$

Betrachten wir die rechten und linken Spalten, so erhalten wir die Tableaux

$$\begin{array}{lll} 6 & & \\ 4 & 6 & \\ 2 & 4 & 4 \end{array} \qquad\qquad\qquad \begin{array}{lll} 5 & & \\ 3 & 5 & \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

als rechtes bzw. linkes Zeilentableau. Dieses Verfahren das Zeilentableau zu bestimmen wird später noch eine Rolle spielen.

Ehresmann [Ehr34] hat zu jeder Permutation π und zu jedem monoton fallenden Umriß I ein Zeilentableau

$$K(\pi, I)$$

zugeordnet, indem er die abfallend umsortierten Teilfolgen der Länge $I_1, I_2, ..$ von π genommen hat. Die Permutation $\pi = [3,1,6,4,5,2]$ mit $I = 532$ ergibt z.B. das Zeilentableau

$$65431.631.31 = \begin{array}{l} 6 \\ 5 \\ 46 \\ 333 \\ 111. \end{array}$$

2.2.7 Definition: $U(K)$
Sei $K = K(\mu, I)$ ein Zeilentableau, wir definieren $U(K)$ als die Summe der Tableaux in $\mathbf{Z} < A <$ mit K als rechtem plactischem Zeilentableau. Mit $\underline{U}(K)$ bezeichnet das (sogenannte kommutative) Bild in $\mathbf{Z}[A]$.

2.2.5 Nicht kommutative Schubertpolynome

2.2.8 Definition: $D(K)$
Sei K ein Zeilentableau, wir definieren

$$D(K) := \sum_{H \leq K} U(H),$$

wobei die Summe über alle Zeilentableaux H mit gleichen Umriß wie K läuft, die kleiner sind. Dabei handelt es sich um die normale lexikographische Ordnung auf den Worten.
Wir definieren wiederum $\underline{D}(K)$ als das kommutative Bild von $D(K)$. Diese Polynome sind eine Basis von $\mathbf{Z}[A]$.[LS88.1]

Man man kann daher die (kommutativen) Schubertpolynome $\underline{X}_\pi$ (die Unterstreichung gilt nur für einen kurzen Augenblick zur Unterscheidung des kommutativen Falls vom nicht kommutativen) bezüglich dieser Basen schreiben

$$\underline{X}_\pi = \sum m(\pi, K)\underline{D}(K),$$

wobei die Summe über eine Menge von Zeilentableaus läuft, und die m irgendwelche Vielfachheiten sind. Die nichtkommutativen Schubertpolynome X_π definiert man nun, indem man $\underline{D}(K)$ durch $D(K)$ ersetzt:

$$X_\pi = \sum m(\pi, K)D(K).$$

Es gilt dann folgender Satz, wobei $LNZ(t)$ das linke nilplactische Zeilentableau eines Tableau t ist.

2.2.9 Satz: [LS88.1]
Sei π eine Permutation, $T(\pi)$ die Menge der Tableau, die eine reduzierte Zerlegung von π sind, d.h. die Buchstaben i des Wortes, welches ein Tableau ist, werden als Transposition $(i, i+1)$ gelesen, und dann ist dieses Produkt der Transpositionen eine reduzierte Zerlegung von π. Dann gilt:

$$X_\pi = \sum_{t \in T(\pi)} D(LNZ(t)).$$

Dieser Satz beschreibt Tableaux, die durch Schubertpolynome abgezählt werden. Man erhält mit diesem Satz die Antwort auf die Frage aus dem vorherigen Abschnitt. Abschließend betrachten wir noch ein umfangreicheres Beispiel zu diesem Satz.

Wir wollen das nicht kommutative Schubertpolynom X_{312654} berechnen. Dazu berechnen wir zuerst die Tableaux, welche eine reduzierte Zerlegung von $[3,1,2,6,5,4]$ sind. Dies ist eine u.U. aufwendige Angelegenheit. In diesem noch relativ kleinen Fall sind dies die Worte:

$$\begin{aligned}
54152 &= \begin{array}{l} 5 \\ 45 \\ 12 \end{array} \\[1ex]
54125 &= \begin{array}{l} 5 \\ 4 \\ 125 \end{array} \\[1ex]
41524 &= \begin{array}{l} 45 \\ 124 \end{array} \\[1ex]
51245 &= \begin{array}{l} 5 \\ 1245. \end{array}
\end{aligned}$$

Zu diesen Tableaux berechnen wir mittels der nilplactischen Äquivalenzrelationen die LNZ, welche in der dritten Spalte angegeben sind:

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{l} 5 \\ 45 \\ 12 \end{array} & \cong & \begin{array}{l} 45 \\ 14 \\ \ 2 \end{array} & & \begin{array}{l} 5 \\ 44 \\ 11 \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 5 \\ 4 \\ 125 \end{array} & \cong & \begin{array}{l} 15 \\ \ 4 \\ \ 25 \end{array} & & \begin{array}{l} 5 \\ 4 \\ 111 \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 45 \\ 124 \end{array} & \cong & \begin{array}{l} 45 \\ 124 \end{array} & & \begin{array}{l} 44 \\ 111 \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} 5 \\ 1245 \end{array} & \cong & \begin{array}{l} 15 \\ \ 245 \end{array} & & \begin{array}{l} 5 \\ 1111. \end{array}
\end{array}$$

Damit haben wir folgende Zerlegung gefunden

$$X_{312654} = D\left(\begin{array}{l}5\\44\\11\end{array}\right) + D\left(\begin{array}{l}5\\4\\111\end{array}\right) + D\left(\begin{array}{l}44\\111\end{array}\right) + D\left(\begin{array}{l}5\\1111\end{array}\right).$$

Will man direkt die Tableaux berechnen, die durch das Schubertpolynom abgezählt werden, so muß man die $D(K)$ in die $U(I)$ zerlegen, und dann die Tableaux mit dem RPZ I erzeugen. Dies führen wir für dieses Beispiel noch aus. In der ersten Zeile befindet sich die Polynome $D(K)$ und in den Zeilen darunter in den jeweiligen Spalten die verschieden $U(I)$, aus denen sich die $D(K)$ in der ersten Zeile aufaddieren. Neben den $U(I)$ sind dann die Tableaux, aus denen die $U(I)$ bestehen.

$D\left(\begin{array}{l}5\\44\\11\end{array}\right)$		$D\left(\begin{array}{l}5\\4\\111\end{array}\right)$		$D\left(\begin{array}{l}44\\111\end{array}\right)$		$D\left(\begin{array}{l}5\\1111\end{array}\right)$	
$U\left(\begin{array}{l}5\\44\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\44\\11\end{array}\ \begin{array}{l}5\\34\\11\end{array}\ \begin{array}{l}5\\24\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}5\\4\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\4\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}44\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}44\\111\end{array}\ \begin{array}{l}34\\111\end{array}\ \begin{array}{l}24\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}5\\1111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\1111\end{array}$
$U\left(\begin{array}{l}5\\33\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\33\\11\end{array}\ \begin{array}{l}5\\23\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}5\\3\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\3\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}33\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}33\\111\end{array}\ \begin{array}{l}23\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}4\\1111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\1111\end{array}$
$U\left(\begin{array}{l}5\\22\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\22\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}5\\2\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}5\\2\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}22\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}22\\111\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}3\\1111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}3\\1111\end{array}$
$U\left(\begin{array}{l}4\\34\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\34\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}4\\3\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\3\\111\end{array}$			$U\left(\begin{array}{l}2\\1111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}2\\1111\end{array}$
$U\left(\begin{array}{l}4\\24\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\24\\11\end{array}\ \begin{array}{l}3\\24\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}4\\2\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\2\\111\end{array}$				
$U\left(\begin{array}{l}4\\33\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\33\\11\end{array}\ \begin{array}{l}4\\23\\11\end{array}$	$U\left(\begin{array}{l}3\\2\\111\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}3\\2\\111\end{array}$				
$U\left(\begin{array}{l}4\\22\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}4\\22\\11\end{array}$						
$U\left(\begin{array}{l}3\\23\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}3\\23\\11\end{array}$						
$U\left(\begin{array}{l}3\\22\\11\end{array}\right)$	$\begin{array}{l}3\\22\\11\end{array}$						

Die 30 Tableaux ergeben dann die Monome des kommutativen Schubertpolynoms, wobei das Nachrechnen mittels der Definition, ein sehr mühsames Unterfangen ist. Wir werden später nochmals zu diesem Beispiel zurückkehren.

Chapter 3

Weintrauben

In diesem Kapitel geht es nun um konkrete Anwendungen der neu definierten kombinatorischen Struktur. Zuerst wird eine Verbindung zur nicht kommutativen Theorie der Schubertpolynome und Schurpolynome aus dem vorherigen Abschnitt geschaffen, d.h. eine Verbindung zu den Worten. Mit Hilfe dieser Verbindung ist es dann möglich, den Begriff der plactischen Äquivalenz auch für Weintrauben zu definieren, und ein wichtiger Satz erlaubt es dann, Weintrauben auf diese Äquivalenz zu untersuchen. Dies ist der Inhalt des ersten Abschnitts. In den weiteren Abschnitten werden nun die Verbindungen zu verschiedenen bekannten Polynomen untersucht. Speziell handelt es sich dabei um die Gaußpolynome, Schurpolynome, Schiefschurpolynome und um die Polynome $D(K), U(I)$, welche im vorherigen Kapitel zur Definition der nicht kommutativen Schubertpolynome verwendet wurden. Es wird gezeigt, wie man diese Polynome mittels einer Startweintraube und dem Operator *pol* erhält.

3.1 Weintrauben und Worte

3.1.1 Die Abbildung word

Zuerst wird eine neue Notation für Weintrauben eingeführt. Man schreibt statt des Kreises $\circ$ die Zeilennummer des Kreises. So wird zum Beispiel aus der Weintraube

$$\begin{array}{cccc} \circ & & \circ & \circ \\ & \circ & & \\ \circ & & \circ & \\ - & - & - & - \end{array} \qquad \text{die Weintraube} \qquad \begin{array}{cccc} 4 & & 4 & 4 \\ & 3 & & \\ 2 & & 2 & \end{array} .$$

In diesem Fall ist es sehr wichtig, auf Leerzeilen innerhalb der Weintraube zu achten, verwendet man jedoch diese neue Notation, so ist es nicht mehr nötig, Leerzeilen gesondert mittels "-" zu notieren. Liest man nun diese neue Notation von rechts nach links und von oben nach unten, erhält man ein Wort über den natürlichen Zahlen. Wir haben damit eine Abbildung

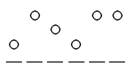
3.1.1 Definition:

$$word : \mathrm{WT} \longrightarrow \mathbf{N}_+^*.$$

Der obigen Weintraube wird das Wort

$$4.42.3.42$$

zugeordnet. Die Punkte dienen nur der Markierung der Spalten der Weintraube. Vergleiche diese Markierung auch mit Spaltenfaktorisierung. Wenn nun eine Weintraube w das Wort $word(w)$ zugeordnet wird, so sagt man auch: die Weintraube w hat das Wort $word(w)$, oder w ist eine Weintraube mit dem Wort $word(w)$. Diese Abbildung $word$ ist nicht injektiv. So hat die Weintraube



das gleiche Wort 442342, wie obige Weintraube. Daraus ergibt sich sofort das Thema des folgenden Paragraphen.

3.1.2 Weintrauben mit gleichem Wort

Es gilt: zu jedem Wort gehören unendlich viele Weintrauben. Um dieses Problem zu umgehen, treffen wir folgende Festlegung:

Weintrauben, die sich nur durch Leerspalten unterscheiden, werden als gleich betrachtet. In der Definition der Weintraube hatten wir schon Weintrauben als gleich definiert, die sich nur durch Leerzeilen am oberen Rand unterscheiden.

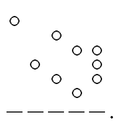
Man kann dann sofort angeben, wie die Weintrauben mit gleichem Wort aussehen. Es gibt eine Weintraube, die man erhält indem die Spalten der Weintraube die Spalten der Spaltenfaktorisierung des Wortes sind. Betrachten wir zur Verdeutlichung das nachfolgende Beispiel: Gegeben sei das Wort

$$432415236,$$

die Spaltenfaktorisierung ist

$$432.41.52.3.6,$$

und man erhält die Weintraube

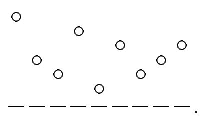


Auf diese Weise wird einem Wort w auf kanonische Weise eine Weintraube zugeordnet, die **kanonische Weintraube**. Dies definiert die Abbildung

3.1.2 Definition:

$$wt : \mathbf{N}_{+}^{*} \longrightarrow \mathrm{WT}.$$

Die Spalten dieser kanonischen Weintraube $wt(w)$ können nun auseinandergezogen werden, sodaß sie von rechts oben nach links unten fallen, und man erhält die breiteste Weintraube ohne Leerspalten, in der in jeder Spalte nur ein Eintrag ist. Im obigen Beispiel ist dies die Weintraube:

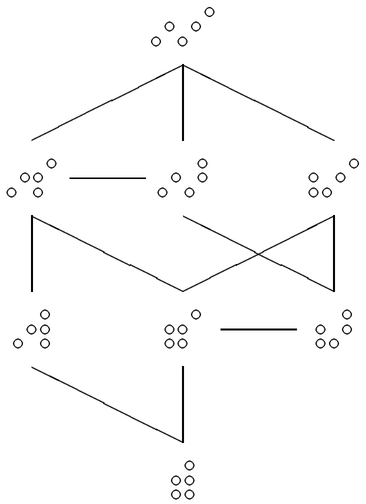


Sie wird im weiteren keine besondere Rolle spielen, sodaß auf einen eigenen Namen verzichtet werden kann. Startet man mit dieser Weintraube, so kann man mit folgender Regel alle Weintrauben mit gleichem Wort erhalten:

Regel: Befindet sich in der Spalte j nur ein einziger Stein, so darf dieser in die Spalte $j-1$, vorausgestzt alle Steine in der Spalte $j-1$ sind in tieferen Zeilen als der Stein in der Spalte j.

Zu dieser Prozedur, um zu einem Wort alle Weintrauben, die dieses haben zu finden, nun noch ein ausführliches Beispiel:

Gegeben sei das Wort 32121. Man startet mit der breitesten Weintraube und bildet nach der obigen Regel neue Weintrauben. Der Verbindungen sollen andeuten, wann diese Regel angewendet werden kann. Alle diese Weintrauben haben dann das gleiche Wort. Leerspalten wurden aufgrund obiger Festlegung nicht gezeichnet.



3.1.3 Weintrauben und Tableaux

Das Wort $word(w)$ zu einer Weintraube w liegt in einer plactischen Äquivalenzklasse, die durch genau ein Tableau repräsentiert wird. Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, erhält man diesen Repräsentanten durch den Algorithmus row insertion von Schensted. Betrachten wir dazu noch einmal das erste Beispiel.
Wir haben das Wort 4.42.3.42 und man erhält folgendes Tableau:

$$4 \rightarrow 4 \quad 4 \rightarrow \begin{array}{ll} 2 & 4 \\ 4 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ll} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & \\ 4 & & \end{array} \qquad .$$

Oder man erhält das Tableau durch das jeu de taquin:

$$\begin{array}{llll} 4 & 4 & & \\ & 2 & 3 & 4 \\ & & & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} 4 & 4 & \\ 2 & 3 & 4 \\ & & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} 4 & 4 & \\ 2 & 3 & \\ & 2 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} 4 & & \\ 3 & 4 & \\ 2 & 2 & 4 \end{array} \qquad .$$

Egal [Thom77] welche Methode man anwendet, man erhält stets die gleiche Abbildung

3.1.3 Definition:

$$tab : \mathrm{WT} \longrightarrow \text{Tableaux}.$$

Auch hier werde ich manchmal sagen: Die Weintraube w hat das Tableau $tab(w)$, oder auch w ist eine Weintraube mit dem Tableau $tab(w)$. Analog wie zuvor stellt sich die Frage, welche Weintrauben das gleiche Tablau haben.

3.1.4 Weintrauben mit gleichem Tableau

Die Frage, welche Worte das gleiche Tableau zugeordnet bekommen, wurde von Knuth [Knu70] beantwortet. Nachfolgend werden nochmal kurz die plactischen Äquivalenzrelationen wiederholt, und auch noch einmal ein Beispiel gerechnet, da dies in direkter Beziehung zur nachfolgenden Definition steht.
Die plactischen Relationen:

$$acb \equiv cab \tag{1}$$
$$bac \equiv bca \tag{2}$$
$$aba \equiv baa \tag{3}$$
$$bab \equiv bba \tag{4}$$
,

wobei $a < b < c$ Buchstaben aus dem Alphabet des Wortes sind. Mit Hilfe dieser Relationen erhält man alle Worte die zu einem Tableau äquivalent sind. Dazu betrachten wir das bekannte Beispiel, welches bereits im Kapitel über die Schubertpolynome behandelt wurde. Gesucht sind alle Worte, die äquivalent zum Wort 421.1.2.3 sind. Man erhält folgende Worte, wobei teilweise notiert ist, welche der obigen Relationen angewandt wurde.

421123
(3)
412123

142123 412213

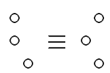
142213 412231

142231 124213

124231
(3)
122431

Dies Beispiel werden wir gleich noch einmal in der Sprache der Weintrauben wiedersehen. Nun betrachten wir zunächst die Knuthrelationen, geschrieben als Weintrauben

3.1.4 Die plactischen Relationen für Weintrauben:

(1) 

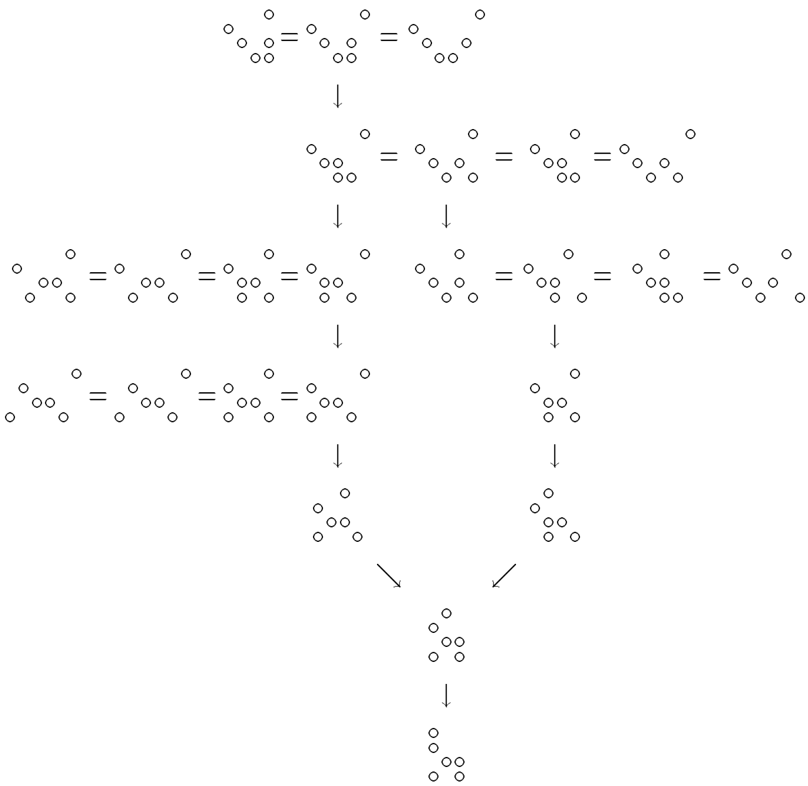
(2) $$\begin{array}{cc} \circ & \\ & \circ \\ & \circ \end{array} \equiv \begin{array}{cc} \circ & \\ & \circ \\ \circ & \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{cc} \circ & \\ \circ & \circ \end{array} \equiv \begin{array}{cc} & \circ \\ \circ & \circ \end{array}$$

(4) $$\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \circ & \end{array} \equiv \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ & \circ \end{array}.$$

Diese Relationen werden sich als Folgerung aus dem späteren Hauptsatz ergeben. Man beachte außerdem die Verwendung des Zeichens '$\equiv$' zur Andeutung der plactischen Äquivalenz zwischen zwei Weintrauben. Das Zeichen '$=$' werde ich in Zukunft verwenden um anzudeuten, daß es sich um zwei Weintrauben mit dem gleichen Wort handelt.

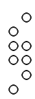
Zieht man die einzelnen Spalten einer Weintraube gemäß der Regel über Weintrauben mit dem gleichen Wort, auseinander, sodaß nur noch drei Steine in den zwei benachbarten Spalten sind, so kann man mit Hilfe der plactischen Äquivalenzrelationen, und der Regel zur Erzeugung der Weintrauben mit dem gleichen Wort, alle Weintrauben mit dem gleichen Tableau erzeugen. Betrachten wir dazu zum letzten Mal das bekannte Beispiel von Knuth. Es wurden hier bei den ersten Worten alle Weintrauben mit dem gleichen Tableau eingezeichnet, natürlich ohne die Weintrauben, die sich nur durch Leerspalten unterscheiden. Pfeile deuten die Verwendung der Äquivalenzrelationen an.



3.1.5 Ein neuer Algorithmus

Es wird jetzt ein neuer Algorithmus vorgestellt, mit dessen Hilfe die verschiedenen Weintrauben in der Äquivalenzklasse eines Tableaus erzeugt werden.

3.1.5 Der unsymmetrische Teil zweier Spalten
Sei w eine Weintraube. Man betrachtet die Spalten $j, j+1$.
Bsp:



Man markiert zuerst die Kreise, wo in beiden Spalten in der gleichen Zeile Einträge sind. Im Beispiel erhält man:

$$\begin{array}{cc} & \circ \\ \circ & \\ \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes \\ & \circ \\ \circ & \end{array} .$$

Nun markiert man bisher unmarkierte Paare ${}^{\circ}{}_{\circ}$, die sich in zwei benachbarten Zeilen befinden. Anschließend derartige Paare, die sich in Zeilen $i, i+2$ befinden(bei diesen beiden Schritten ändert sich im Beispiel nichts), dann in den Zeilen $i, i+3$, was nochmals eine Markierung im Beispiel bewirkt:

$$\begin{array}{cc} & \circ \\ \otimes & \\ \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes \\ & \otimes \\ \circ & \end{array} .$$

Diese Markierung führen wir weiter für alle Paare $(i, i+4), (i, i+5), \ldots$ Die markierten Steine der Weintraube bezeichnen wir als den **symmetrischen Teil** der Weintraube. Übrig bleibt der **unsymmetrische Teil** der beiden Spalten. Sind in den beiden Spalten unmarkierte Steine übriggeblieben, dann ist dieser unsymmetrische Teil von der Form:

$$\begin{array}{cc} & \circ \\ & \circ \\ & \vdots \\ & \oplus \\ \odot & \\ \vdots & \\ \circ & \end{array} ,$$

wobei hier die Zeilen mit markierten Kreisen weggelassen wurden. Die beiden Steine an der eindeutig bestimmten 'Bruchstelle' wurden zur Formulierung des folgenden Satzes besonders bezeichnet. Dabei ist zu beachten, daß die unsymmetrischen Steine nicht unbedingt auf zwei Spalten verteilt sein müssen, eine Spalte kann durchaus leer sein, wir sprechen dann von einer unechten Bruchstelle.

3.1.6 Der Hauptsatz über äquivalente Weintrauben

3.1.6 Satz: Die beiden Weintrauben, die aus der obigen Weintraube w entstehen, indem entweder der Stein $\oplus$ nach links in die Spalte j geschoben wird, oder der Stein $\odot$ nach rechts in die Spalte $j+1$ geschoben wird, liegen in der gleichen plactischen Äquivalenzklasse wie w.

Beispielsweise ergeben sich die Knuthäquivalenzen aus diesem Satz.

Beweis: Wir führen den Beweis mit Induktion nach Anzahl m aller Steine (markiert und unmarkiert) in der Doppelspalte $j, j+1$.
A:Der Induktionsanfang
Sind keine Steine oder ist nur ein Stein in den beiden Spalten, so haben die Tableaux das gleiche Wort.

Wir betrachten deshalb den Fall $m = 2$. Im Fall $\circ\circ$, bzw. $\begin{smallmatrix}\circ & \\ & \circ\end{smallmatrix}$ ist nichts zu zeigen, da der nicht symmetrische Teil leer ist, sich also nichts verändert. In den verbleibenden Fällen

$$\begin{smallmatrix} & \circ \\ \circ & \end{smallmatrix} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}\circ & - \\ \circ & -\end{smallmatrix} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}- & \circ \\ - & \circ\end{smallmatrix}$$

ergibt sich offensichtlich durch jede der angegebenen Verschiebungen das gleiche Wort.
Der Fall $m = 3$ wird, falls es ein Paar von symmetrischen Steinen gibt, mit Hilfe der Knuthrelationen bewiesen. So ist z.B. die Knuthäquivalenz

$$\begin{smallmatrix}\circ & \circ \\ & \circ\end{smallmatrix} \equiv \begin{smallmatrix}\circ & \circ \\ \circ & \end{smallmatrix}$$

der Beweis des obigen Satzes für den Fall, daß das Paar symmetrischer Steine in einer Zeile ist, und der unsymmetrische Stein unterhalb ist. Liegt kein symmetrisches Paar vor, so haben die vier möglichen Weintrauben

$$\begin{smallmatrix}\circ & - \\ \circ & - \\ \circ & -\end{smallmatrix} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}- & \circ \\ \circ & - \\ \circ & -\end{smallmatrix} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}- & \circ \\ - & \circ \\ \circ & -\end{smallmatrix} \qquad\qquad \begin{smallmatrix}- & \circ \\ - & \circ \\ - & \circ\end{smallmatrix}$$

die durch Anwendung des Satzes auseinander hervorgehen, offensichtlich das gleiche Wort.
B: Induktionsschritt
Die Anzahl aller Steine ist jetzt größer als drei.
Zuerst einige Bemerkungen zur Notation. Das Gleichheitszeichen $=$ wird im folgenden verwendet, wenn es sich um zwei verschiedene Weintrauben mit gleichem Wort handelt. Das Äquivalenzzeichen $\equiv$ wird verwendet, wenn es sich um plactisch äquivalente Weintrauben handelt. Einige Worte zur graphischen Darstellung der Weintrauben. Es werden meistens nur die unsymmetrischen Steine gezeichnet, d.h. Leerzeilen und Zeilen mit symmetrischen Steinen werden meist einfachheitshalber weggelassen. Eine senkrechte Folge von Punkten soll andeuten, daß in diesem Teil der Spalte noch weitere unsymmetrische Steine sein können. Ein senkrechter Strich wird verwendet, wenn keine Steine in diesem Teil der Spalte sind. Die Anwendung der Induktionsannahme wird durch die Abkürzung IA angedeutet.
Wir unterscheiden drei Fälle, die sich durch die Konfiguration in der obersten besetzten Zeile in den Spalten $j, j+1$ unterscheiden. Diese drei Fälle werden

in Unterfälle zerlegt, die sich durch die Position der unsymmetrischen Steine unterhalb der obersten Zeile unterscheiden.

Fall 1: In der obersten besetzten Zeile befinden sich zwei Steine, diese sind dann stets markiert, sind also im symmetrischen Teil. Zuerst betrachten wir die folgenden Spezialfälle

1a: Alle nicht symmetrischen Steine sind in der linken Spalte. Dies bedeutet, daß es keine eigentliche Bruchstelle im unsymmetrischen Teil gibt. Es muß lediglich gezeigt werden, daß der oberste unsymmetrische Stein $\odot$ nach rechts geschoben werden kann, ohne daß sich die plactische Klasse ändert. Die erste Gleichung entsteht durch Einfügen einer neuen Spalte zwischen den alten Spalten $j+1, j+2$, in die nur der rechte obere Stein der Spalte $j+1$ geschoben wird. Dies ist eine Operation, die eine Weintraube mit gleichem Wort ergibt:

$$\begin{array}{ll} \otimes & \otimes \\ \odot & - \\ \vdots & \end{array} = \begin{array}{lll} \otimes & - & \otimes \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array} .$$

Dadurch ist nun der oberste Stein in der linken Spalte ebenfalls unsymmetrisch (trotzdem bezeichnen wir ihn, der Deutlichkeit halber, weiter mit $\otimes$) , und in den Spalten $j, j+1$ ist die Anzahl der Steine um eins geringer, so daß die Induktionsannahme angewandt werden kann. Durch zweimaliges Anwenden der Induktionsannahme (IA) ist es jetzt ohne die plactische Klasse zu ändern möglich, die beiden obersten unsymmetrischen Steine in die mittlere Spalte zu schieben:

$$\begin{array}{lll} \otimes & - & \otimes \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{lll} - & \otimes & \otimes \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{lll} - & \otimes & \otimes \\ - & \odot & - \\ \vdots & & | \end{array} .$$

Da in den betrachteten Spalten mehr als drei Steine waren, befindet sich nach dieser Operation in der Spalte j noch mindestens ein Stein. Die beiden rechten Spalten $j+1, j+2$ haben, außer in der obersten Zeile, nur unsymmetrische Steine, welche in der Spalte $j+1$ sind. Diese werden durch wiederholtes Anwenden der Induktionsannahme alle nach rechts geschoben:

$$\begin{array}{lll} - & \otimes & \otimes \\ - & \odot & - \\ \vdots & & | \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{lll} - & \otimes & \otimes \\ - & - & \odot \\ \vdots & | & \end{array} .$$

Da sich nun in der mittleren Spalte nur ein Stein in der obersten Zeile befindet, und in der linken Spalte nur Steine in tieferen Zeilen sind, ist es möglich, die beiden linken Spalten wieder in eine Spalte zusammenzufassen, und man erhält die gesuchte Endkonfiguration wie behauptet:

$$\begin{array}{ccc} - & \otimes & \otimes \\ - & - & \odot \\ \vdots & | & \end{array} = \begin{array}{cc} \otimes & \otimes \\ - & \odot \\ \vdots & \end{array} .$$

1b: Der nicht symmetrische Teil ist jetzt in der rechten Spalte. Dies bedeutet, daß es wiederum keine echte Bruchstelle gibt. Es ist zu zeigen, daß der unterste unsymmetrische Stein $\oplus$ unter Beibehaltung der plactischen Äquivalenzklasse aus der Spalte $j+1$ in die Spalte j geschoben werden kann. Es müssen zwei Fälle unterschieden werden. Der Fall, daß in der Spalte j mehr als ein Stein ist, und der Fall, daß nur ein Stein in der Spalte j ist. Zuerst der erste Fall
1ba: Man hat folgende Kette, wobei wieder nur unsymmetrische Steine und die beiden oberen symmetrischen eingetragen sind:
Die erste Gleichheit ensteht, indem zwischen der Spalte $j-1$ und j eine neue Spalte eingefügt wird. In diese Spalte wird der unterste Stein $\hat{\circ}$ aus der Spalte j geschoben. Dies ist aufgrund der Voraussetzung ein symmetrischer Stein. Dadurch entsteht in der Spalte $j+2$ (der alten Spalte $j+1$) ein zusätzlicher unsymmetrischer Stein $\tilde{\circ}$. Der Stein $\hat{\circ}$ muß nicht wie im Bild in einer Zeile oberhalb von $\oplus$ sein, er kann auch in einer Zeile unterhalb sein. Und der Stein $\tilde{\circ}$ muß nicht in der gleichen Zeile wie der Stein $\hat{\circ}$ sein:

$$\begin{array}{cc} \otimes & \otimes \\ & \vdots \\ - & \oplus \end{array} = \begin{array}{ccc} - & \otimes & \otimes \\ & | & \vdots \\ & \hat{\circ} - & \tilde{\circ} \\ & | & \vdots \\ - & - & \oplus . \end{array}$$

Auf die Spalten $j+1, j+2$ kann nun die Induktionsannahme angewandt werden, und die beiden untersten unsymmetrische Steine können in die Spalte $j+1$ nach links geschoben werden. Unter diesen beiden unsymmetrischen Steinen ist auf alle Fälle der Stein $\oplus$. Der zweite ist u.U. der Stein $\tilde{\circ}$. Im Bild wird ein anderer zweiter unsymmetrischer Stein nach links geschoben:

$$\begin{array}{ccc} - & \otimes & \otimes \\ & | & \vdots \\ & \hat{\circ} - & \tilde{\circ} \\ & | & \vdots \\ - & - & \oplus \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} - & \otimes & \otimes \\ & | & \vdots \\ & \hat{\circ} - & \tilde{\circ} \\ & | & \vdots \\ - & \circ & - \\ - & \oplus & - . \end{array}$$

Einer der beiden verschobenen Steine wird nun in den Spalten $j, j+1$ zu einem symmetrischen Stein, da er mit dem Stein in der Spalte j 'gepaart' wird. Der

Stein, der nicht gepaart wird, ist der ursprüngliche Stein $\oplus$, er kann nun mittels Induktionsannahme in die Spalte j geschoben werden:

$$\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \\ |\quad\vdots \\ \hat{\circ}-\tilde{\circ} \\ |\quad\vdots \\ -\circ- \\ -\oplus- \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \\ |\quad\vdots \\ \hat{\circ}-\tilde{\circ} \\ |\quad\vdots \\ -\circ- \\ \oplus--. \end{array}$$

Durch nochmaliges Anwenden der IA werden alle übrigen Steine aus der Spalte $j+1$ in die Spalte j geschoben, außer dem einzigen symmetrischen Stein. Da unterhalb dieses symmetrischen Steines in der Spalte $j+2$ kein Eintrag ist (aufgrund der Wahl des untersten symmetrischen Steines am Anfang) können nun die Spalten $j+1, j+2$ wieder zusammengefaßt werden:

$$\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \\ |\quad\vdots \\ \hat{\circ}-\tilde{\circ} \\ |\quad\vdots \\ -\circ- \\ \oplus-- \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} \otimes-\otimes \\ \\ |\;\vdots \\ \hat{\circ}-\tilde{\circ} \\ |\;\vdots \\ -\circ- \\ \oplus-- \end{array} = \begin{array}{c} \otimes\otimes \\ \vdots \\ \oplus-. \end{array}$$

In den obigen Bildern wurde der Fall dargestellt, daß sich der unterste symmetrische Stein in einer Zeile oberhalb von $\oplus$ befindet. Die analoge Kette gilt auch im Fall, daß der Stein $\hat{\circ}$ in einer Zeile unterhalb des Steines $\oplus$ ist.
1bb: In der Spalte j ist nur ein Stein, nämlich der Stein $\otimes$ in der obersten Zeile. Es gilt folgende Kette:

$$\begin{array}{c} \otimes\otimes \\ |\;\vdots \\ -\oplus \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} \otimes\quad\otimes \\ |\;\vdots\;| \\ -\oplus- \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} \otimes\quad\otimes \\ |\;\vdots\;| \\ \oplus-- \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} \otimes\otimes \\ |\;\vdots \\ \oplus-. \end{array}$$

Wichtig war in dieser Kette, daß mindestens 4 Steine in den beiden Spalten waren, daher ist nach dem ersten Schritt (Erzeugen einer neuen Spalte zwischen $j+1, j+2$ und nach links Schieben des obersten Steins) der Stein $\oplus$ weiterhin unsymmetrisch, er wird nicht mit dem obersten Stein in der Spalte j zu einem symmetrischen Paar, er kann daher nach IA in die Spalte j geschoben werden. Am Ende werden die Spalten $j+1, j+2$ wieder zusammengefaßt.
1c: Hier handelt es sich um den Fall, daß in jeder Spalte mindestens ein unsymmetrischer Stein ist. Zu zeigen ist, daß nun die zwei verschieden Weintrauben daraus gebildet werden können. Man erhält folgende Kette, die sich am Ende

in die beiden Teile für die beiden herzuleitenden Weintrauben aufspaltet:

$$
\begin{array}{c} \otimes\otimes \\ \vdots \\ -\oplus \\ \odot- \\ \vdots \end{array}
=
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \;\mid\;\vdots \\ --\oplus \\ \odot-- \\ \vdots\;\mid \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \vdots\;\mid \\ -\oplus- \\ \odot-- \\ \vdots\;\;\mid \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \vdots\;\mid \\ \oplus-- \\ \odot-- \\ \vdots\;\;\mid \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \mid\;\vdots \\ \oplus-- \\ \odot-- \\ \vdots\;\mid \end{array}
\\
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \vdots\;\mid \\ -\oplus- \\ -\odot- \\ \vdots\;\;\mid \end{array}
\equiv (IA \text{ oder 1a})
\begin{array}{c} -\otimes\otimes \\ \mid\;\vdots \\ --\oplus \\ --\odot \\ \vdots\;\mid \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} \otimes\otimes \\ \vdots \\ \oplus- \\ \odot- \\ \vdots \end{array}
\\
\begin{array}{c} \otimes\otimes \\ \vdots \\ -\oplus \\ -\odot \\ \vdots \end{array}
\end{array}
.
$$

Die erste Gleichheit ist das Schaffen einer neuen Spalte zwischen den Spalten $j, j+1$ und das anschliessende Schieben des obersten linken Steins in diese neue Spalte. Daher sind nun alle Steine in den Spalten $j+1, j+2$ außer den beiden in der obersten Zeile unsymmetrisch. Diese unsymmetrischen Steine werden nach IA in die Spalte $j+1$ geschoben. In den Spalten $j, j+1$ ist nun ein Stein weniger als in der Ausgangsposition, nach IA können also nun die beiden Verschiebungen durchgeführt werden. Anschließend werden die beiden einleitenden Operationen wieder rückgängig gemacht. Zuerst wird der unsymmetrische Teil in $j+1, j+2$ in die Spalte $j+2$ geschoben, wobei unter Umständen, nämlich falls im unteren Fall in der Spalte j kein Stein mehr ist, keine Induktionsannahme anzuwenden ist, sondern der bereits bewiesen Fall 1a eintritt. Als letzter Schritt werden dann die Spalten $j, j+1$ wieder zusammengefaßt.
1d: Es gibt in den Zeilen unterhalb der obersten Zeile keinen unsymmetrischen Teil, daher ist dann, da sich in der obersten Zeile zwei Einträge befinden, nichts zu zeigen.

Fall 2: In der obersten Zeile befindet sich nur rechts ein Eintrag. Dieser Stein ist dann unsymmetrisch. Die Numerierung der Einzelfälle ist wieder analog dem ersten Fall.
2a: Alle unsymmetrischen Steine in den Zeilen unterhalb der obersten, sind in der linken Spalte. Jetzt ist zu zeigen, daß der Stein in der obersten Zeile nach links in die Spalte j kann, und entsprechend, daß der oberste unsymmetrische Stein in der Spalte j nach rechts kann. Der erste Fall wird in 3a betrachtet. Es wird hier nur der zweite Fall mit der folgenden Kette bewiesen:

$$
\begin{array}{c} -\oplus \\ \odot- \\ \vdots \end{array}
=
\begin{array}{c} --\oplus \\ \odot-- \\ \vdots\;\;\mid \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{c} --\circ \\ -\odot- \\ \vdots\;\;\mid \end{array}
=
\begin{array}{c} -\oplus \\ -\odot \\ \vdots \end{array}
.
$$

Zur Rechtfertigung dieser Kette betrachte man den Fall 1a ohne den linken oberen Stein.

2b: Es befinden sich alle unsymmetrischen Steine in der rechten Spalte. Es ist lediglich zu zeigen, daß der unterste unsymmetrische Stein nach links kann. Zum Beweis betrachten wir die folgende Kette:

$$\begin{array}{cc} - & \circ \\ & \vdots \\ - & \oplus \end{array} = \begin{array}{ccc} - & - & \circ \\ & \vdots & | \\ - & \oplus & - \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} - & - & \circ \\ & \vdots & | \\ \oplus & - & - \end{array} = \begin{array}{cc} - & \circ \\ & \vdots \\ \oplus & - \end{array}.$$

Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Zuerst wird eine neue Spalte zwischen den Spalten $j+1, j+2$ geöffnet und der oberste Stein aus der Spalte $j+1$ nach rechts geschoben. Nach IA kann nun der untere unsymmetrische Stein in der Spalte $j+1$ nach links geschoben werden. Anschließend werden die Spalten $j+1, j+2$ wieder zusammengefaßt.

2c: In den Zeilen unterhalb der obersten Zeile befinden sich in beiden Spalten unsymmetrische Steine. Es werden wieder wie in 1c beide Weintrauben mittels einer sich aufspaltenden Kette hergeleitet:

$$\begin{array}{cc} - & \circ \\ & \vdots \\ - & \oplus \\ \odot & - \\ \vdots & \end{array} = \begin{array}{ccc} - & - & \circ \\ & \vdots & | \\ - & \oplus & - \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} - & - & \circ \\ & \vdots & | \\ \oplus & - & - \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} - & - & \circ \\ & \vdots & | \\ - & \oplus & - \\ - & \odot & - \\ \vdots & & | \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} - & \circ \\ & \vdots \\ \oplus & - \\ \odot & - \\ \vdots & \end{array} \\ \\ \begin{array}{cc} - & \circ \\ & \vdots \\ - & \oplus \\ - & \odot \\ & \vdots \end{array} \end{array}.$$

Die Vorgehensweise war: Einfügen einer Spalte zwischen den Spalten $j+1, j+2$, nach rechts Schieben des oberen Steines in der Spalte $j+1$. Nun sind in den Spalten $j, j+1$ ein Stein weniger, und man kann die IA anwenden. So erhält man die beiden gesuchten Weintrauben. Abschließend werden die Spalten $j+1, j+2$ wieder zusammengefaßt.

2d: Im verbleibenden Teil außer der obersten Zeile befindet sich kein unsymmetrischer Anteil. Zu zeigen ist, daß der oberste Stein, es ist der Stein $\oplus$, nach links geschoben werden kann. In der folgenden Kette sind auch die beiden untersten symmetrischen Stein eingezeichnet. Sie müssen jedoch nicht unbedingt in der gleichen Zeile sein. Außerdem soll ein Stern $*$ beliebige symmetrische

Steine andeuten.

$$
\begin{array}{cc} - & \oplus \\ * & * \\ * & * \\ \otimes & \otimes \end{array}
=
\begin{array}{ccc} - & - & \oplus \\ | & * & * \\ | & * & * \\ \otimes & - & \otimes \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{ccc} - & \oplus & - \\ | & * & * \\ | & * & * \\ \otimes & \otimes & - \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{ccc} \oplus & - & - \\ * & | & * \\ * & | & * \\ \otimes & \otimes & - \end{array}
=
\begin{array}{cc} \oplus & - \\ * & * \\ * & * \\ \otimes & \otimes \end{array}
$$

Im ersten Schritt wird der unterste symmetrische Stein in der Spalte j in eine neue Spalte zwischen den Spalten $j-1, j$ geschoben. Dadurch entsteht ein neuer unsymmetrischer Stein in der Spalte $j+2$. Nach IA können nun diese beiden unsymmetrischen Steine in die Spalte $j+1$ geschoben werden. In der Spalte $j+1$ befinden sich nun bis auf einen Stein nur unsymmetrische, die mittels IA nach links in die Spalte j geschoben werden. (Die IA kann angewandt werden, da mindestens 4 Steine vorhanden sind, und sich daher noch mindestens 1 ehemals symmetrischer Stein in der Spalte $j+2$ befindet) Der letzte Schritt ist das bekannte Zusammenfassen der Spalten $j+1, j+2$.

Fall 3: In der obersten Zeile befindet sich nur links ein Stein.
3a: Alle unsymmetrischen Steine unterhalb der obersten Zeile befinden sich in der linken Spalte j. Zu zeigen ist, daß der oberste unsymmetrische Stein nach rechts kann. Man unterscheidet hier zwei Fälle, jenachdem ob der oberste Stein in der Spalte j symmetrisch oder unsymmetrisch ist. Zuerst der Fall, daß er symmetrisch ist.
3aa: Wir betrachten folgende Kette, wobei auch der oberste unsymmetrische Stein $\odot$ in der Spalte $j+1$, eingezeichnet ist:

$$
\begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ \odot & - \\ \vdots & \end{array}
=
\begin{array}{ccc} \otimes & - & - \\ * & - & \otimes \\ \odot & - & - \\ \vdots & & | \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{ccc} - & \otimes & - \\ * & - & \otimes \\ - & \odot & - \\ \vdots & & | \end{array}
\equiv (IA)
\begin{array}{ccc} - & \otimes & - \\ * & - & \otimes \\ - & - & \odot \\ \vdots & | & \end{array}
=
\begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ - & \odot \\ \vdots & \end{array} .
$$

Zuerst wurde eine neue Spalte zwischen $j+1, j+2$ geschaffen. Der oberste symmetrische Steine aus der Spalte $j+1$ wurde nach rechts in diese neue Spalte geschoben. (Ein symmetrischer Stein in der Spalte $j+1$ existiert, da sonst der oberste Stein in der Spalte j nicht symmetrisch wäre) Der oberste Stein in der Spalte j ist nun unsymmetrisch. Nun werden die beiden oberen unsymmetrischen Steine aus der Spalte j in die Spalte $j+1$ geschoben. Dies geht aufgrund der IA. Der untere Stein ist in einer Zeile unterhalb des Steines, und im nächsten Schritt wird dieser Stein und alle anderen unsymmetrischen mittels IA aus der Spalte $j+1$ in die Spalte $j+2$ geschoben. Man kann die IA anwenden, da wieder mindestens 4 Steine in der Ausgangsweintraube sind, und so ist entweder noch ein ehemals symmetrischer oder auch ein ehemals unsymmetrischer Stein in der Spalte j. Als letztes werden noch die Spalten $j, j+1$ zusammengefaßt.

3ab: Der oberste Stein ist unsymmetrisch, das bedeutet, daß es mindestens zwei unsymmetrische Steine gibt. Man wendet folgende Kette an:

$$\begin{array}{cc} \odot & - \\ \vdots & \end{array} = \begin{array}{ccc} - & \odot & - \\ | & \vdots & \\ \circ & - & \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} - & - & \odot \\ | & \vdots & \vdots \\ \circ & - & \end{array} = \begin{array}{cc} - & \odot \\ \vdots & \end{array} .$$

Die Vorgehensweise ist klar: Den untersten linken Stein nach links in eine eigene Spalte schieben, dann Anwenden der IA, dann wieder zusammenfassen der beiden linken Spalten. Diese einfache Methode war in Fall 3aa nicht möglich, da hier u.U. der einzige unsymmetrische Stein nach links geschoben wurde.
3b: Alle unsymmetrischen Steine unterhalb der obersten Zeile sind in der rechten Spalte. Dies bedeuet, daß in der rechten Spalte mindestens zwei Steine sind, und der oberste Stein symmetrisch ist. Dieser Stein wird in den folgenden Bildern mit eingezeichnet. Man muß zwei Fälle unterscheiden je nach Anzahl der unsymmetrischen Steine.
3ba: Es gibt mehr als einen unsymmetrischen Stein. Man wendet folgende Kette an:

$$\begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ & \vdots \\ - & \oplus \end{array} = \begin{array}{ccc} \otimes & - & \\ * & - & \otimes \\ & \vdots & | \\ - & \oplus & - \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} \otimes & - & \\ * & - & \otimes \\ \vdots & & | \\ \oplus & - & - \end{array} = \begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ & \vdots \\ \oplus & - \end{array} .$$

Die Vorgehensweise war einfach: Zuerst wird der oberste rechte Stein in eine neue Spalte nach rechts geschoben, dann die IA angewandt, dann wieder die beiden Spalten rechts zusammengefaßt. Da es mehr als einen unsymmetrischen Stein gibt, ist der unterste unsymmetrische Stein $\oplus$ nach dem ersten Schritt weiterhin unsymmetrisch.
3bb: Es gibt nur einen unsymmetrischen Stein. Dann betrachtet man folgende Kette:

$$\begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ & \vdots \\ - & \oplus \end{array} = \begin{array}{ccc} & \otimes & - \\ * & | & \otimes \\ & | & \vdots \\ - & - & \oplus \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} & \otimes & - \\ * & | & \otimes \\ & \vdots & | \\ - & \oplus & - \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} & \otimes & - \\ * & | & \otimes \\ & \vdots & | \\ \oplus & - & - \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{ccc} & \otimes & - \\ * & | & \otimes \\ & | & \vdots \\ \oplus & - & - \end{array} = \begin{array}{cc} \otimes & - \\ * & \otimes \\ & \vdots \\ \oplus & - \end{array} .$$

Im ersten Schritt wird die gesamte linke Spalte, bis auf den obersten Stein nach links geschoben, aufgrund der Tatsache, daß nur ein unsymmetrischer Stein vorhanden ist, und daß mindestens 4 Steine insgesamt vorhanden sind, befinden sich danach weniger Steine in den Spalten $j+1, j+2$. Nach IA werden nun die unsymmetrischen Steine aus der Spalte $j+2$ in die Spalte $j+1$ geschoben. Ein Stein bleibt also in der Spalte $j+2$. Nach IA kann nun der unterste der nunmehr zwei unsymmetrischen Steine aus der Spalte $j+1$ in die Spalte j geschoben werden. Jetzt kommen wieder alle unsymmetrischen Steine aus der Spalte $j+1$

in die Spalte $j+2$, es verbleibt also nur der oberste Stein in der Spalte $j+1$, und zum Schluß werden die beiden linken Spalten wieder zusammengefaßt.
3c: In jeder Spalte befinde sich mindestens ein unsymmetrischer Stein, dies bedeutet, daß der obere Stein in der Spalte j symmetrisch ist. Zuerst wird gezeigt, daß die Weintraube, die durch nach links Schieben des Steins $\oplus$ ensteht, in der gleichen plactischen Klasse liegt.
3ca: Wir untersuchen folgende Kette:

$$\begin{array}{l} \otimes - \\ \;\vdots \\ -\oplus \\ \odot - \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{l} -\otimes- \\ \,|\;\;\vdots \\ --\oplus \\ -\odot- \\ \,|\;\vdots \\ \circ\, - \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{l} -\otimes- \\ \,|\;\;\vdots \\ -\oplus- \\ -\odot- \\ \,|\;\vdots \\ \circ\, - \end{array} = \begin{array}{l} \otimes - \\ \;\vdots \\ \oplus - \\ \odot - \\ \vdots \end{array} .$$

Als erstes wurde der unterste linke Stein in eine neue Spalte nach links geschoben, dies kann u.U. sogar der Stein $\odot$ sein, dann wurde mittels IA der Stein $\oplus$ nach links geschoben, abschließend wurden dann wieder die beiden linken Spalten vereinigt.
3cb: Es muß nun der Stein $\odot$ nach rechts. Es gilt folgende Kette von äquivalenten Weintrauben:

$$\begin{array}{l} \otimes - \\ \;\vdots \\ -\oplus \\ \odot - \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{l} \otimes-- \\ \;\;-\circ \\ \;\vdots\;| \\ -\oplus- \\ \odot-- \\ \vdots\;\;| \end{array} \equiv (IA) \begin{array}{l} \otimes-- \\ \;\;-\circ \\ \;\vdots\;| \\ -\oplus- \\ -\odot- \\ \vdots\;\;| \end{array} = \begin{array}{l} \otimes - \\ \;\vdots \\ -\oplus \\ -\odot \\ \vdots \end{array} ,$$

wobei hier die Vorgehensweise analog dem Fall 3ca war, nur daß nach rechts geschoben wurde und der oberste Stein ausgewählt wurde.
3d: siehe 2d. Mit der Betrachtung dieses letzten Falls, ist der Beweis des

Hauptsatzes abgeschlossen.

Es werden nun einige Namen für diese Operationen innerhalb der plactischen Äquivalenzklasse vergeben.

3.1.7 Definition:

pl_j, pr_j
Diese fundamentale Operation des Schiebens nach rechts bzw. links der unsymmetrischen Steine $\oplus, \odot$ an der Bruchstelle in den Spalten $j, j+1$ wird mit

$$pr_j$$

für das nach rechts Schieben aus der Spalte j in die Spalte $j+1$ bezeichnet, und mit

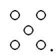
$$pl_{j+1}$$

für das nach links Schieben aus der Spalte $j+1$ in die Spalte j. Falls kein unsymmetrischer Teil in der entsprechenden Spalte ist, so werden diese Operationen analog zu den s_i Operationen als Identität definiert. Der Name wird durch r=rechts, l=links motiviert. Wir werden später noch ähnliche Operatoren kennenlernen, sodaß man sich diese Definition gut einprägen sollte.

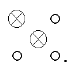
$packright_j, packleft_j$

Es ist nützlich auch für die wiederholte Anwendung dieser Operationen pr_j, pl_j eine Bezeichnung zur Verfügung zu haben. Wir definieren daher:
$packright_j$:= wiederholte Anwendung von pr_j, bis alle unsymmetrischen Steine aus der Spalte j in der Spalte $j+1$ sind.
$packleft_j$:= wiederholte Anwendung von pl_j, bis alle unsymmetrischen Steine aus der Spalte j in der Spalte $j-1$ sind.

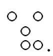
Der Hauptsatz kann nun dazu verwendet werden, um alle zu einer gegebenen Weintraube äquivalenten Weintrauben zu bestimmen. Dabei werden Weintrauben mit dem gleichen Wort nicht gesondert erzeugt. Diese Methode wird an dem folgenden Beispiel untersucht. Gegeben sei die Weintraube

$w =$ 

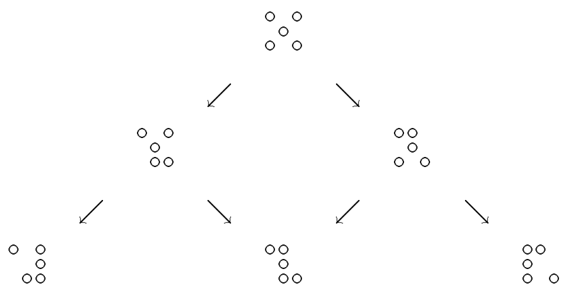
Nun sollen alle dazu äquivalenten Weintrauben berechnet werden. Zuerst bestimme ich in den Spalten 1,2 den unsymmetrischen Teil. Dieser ergibt sich aus der Markierung



Der freie Stein kann nach rechts geschoben werden, und man erhält die erste äquivalente Weintraube



Man fährt damit fort, indem man alle Spalten und alle Weintrauben betrachtet. Man erhält so die folgenden Weintrauben, dabei wurden Verbindungslinien gezeichnet, falls die beiden Weintrauben durch Anwendung des Satzes auseinander hervorgehen.



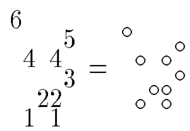
In der untersten Zeile befinden sich die beiden extremen Weintrauben der plactischen Klasse. Links das Tableau und rechts das Kontertableau.

3.1.7 Folgerungen aus diesem Satz

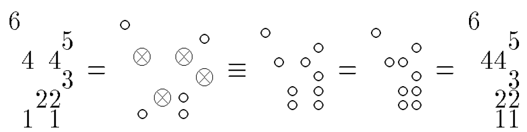
Man erhält so eine neue Methode, um das Tableau zu einem Wort zu bestimmen. Man bestimmt eine Weintraube zu diesem Wort (z.B. die Spaltenfaktorisierung) und packt mittels der Äquivalenzoperationen $packright_j$ die Steine nach rechts, bis man das Tableau erhält. Es ist klar, daß man ein Tableau erhält, und da nur ein Tableau in der äquivalenzklasse liegt, haben wir einen wohldefinierten Algorithmus. Betrachten wir zur Erläuterung das folgende Beispiel:
Gegeben sei das Wort 534212416. Wir bestimmen als erstes die Spaltenfaktorisierung

$$53.421.2.41.6 \quad ,$$

was die Weintraube



ergibt. Dies ist gerade die Weintraube, die mittels der Funktion wt bestimmt wird. Man erhält nun folgende Kette von Äquivalenzen, wobei Leerspalten nicht gezeichnet werden.



Im ersten Schritt werden in den Spalten 2, 3 und in den Spalten 4, 5 die Äquivalenzrelationen angewandt, ich habe dazu die symmetrischen Steine markiert. Im zweiten

Schritt wurden die Spalten $3,4$ zusammen gefaßt. Die letzte Weintraube ist dann das Tableau

$$\begin{array}{l} 5 \\ 34 \\ 22 \\ 1146. \end{array}$$

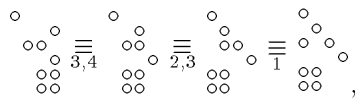
Genauso gut hätte man jedoch auch mit einer beliebigen anderen Weintraube starten können, die das gleiche Wort 534212416 hat. Man vergleiche dazu nochmal die Bemerkungen über Weintrauben mit dem gleichen Wort.

3.1.8 Folgerung: Ein neuer Algorithmus zur Berechnung des P-Symbols Man erhält auf die oben beschriebene Weise das P-symbol des Schensted Algorithmus, da dies das einzige Tableau in der plactischen Äquivalenzklasse des Wortes ist. Man vergleiche dazu den Abschnitt 2.2.2

3.1.9 Folgerung: Bijektion zwischen Tableaux und Kontertableaux
Durch Linkspacken $packleft_j$ mittels der Äquivalenzrelation erhält man aus einem Tableau das zugehörige Kontertableau. Umgekehrt erhält man durch Rechtspacken $packright_j$ das Tableau zu einem Kontertableau. Will man z.B. das Kontertableau zu obigem Tableau

$$\begin{array}{l} 5 \\ 34 \\ 22 \\ 1146 \end{array}$$

berechnen, so bildet man die zugehörige Weintraube und beginnt nach links zu packen. Man erhält folgende Äquivalenzkette, wobei zum leichteren Nachvollziehen beim Äquivalenzzeichen "$\equiv$" noch die Spaltenindices der Operationen $packleft_j$ notiert wurde:



wobei die rechte Weintraube das Kontertableau $\begin{array}{r} 3456 \\ 24 \\ 12 \\ 1 \end{array}$ ist. Insgesamt waren dazu 5 Operationen $packleft_j$ nötig.

3.2 Weintrauben und Gaußpolynome

Es wird gezeigt, daß sich Gaußpolynome als q-Spezialisierung einer Menge $S(w)$ ergeben, wobei w eine spezielle Weintraube ist. Das Polynom $pol(w)$ dieser Menge $S(w)$ ist ein spezielles Schurpolynom. Gaußpolynome sind also die q-Spezialisierung von speziellen Schurpolynomen.

3.2.1 Definitionen

Sei $P(k;n,m)$ die Menge der Partitionen von k in höchstens m Teilen der maximalen Größe n. $p(k;m,n)$ sei die Ordnung dieser Menge $P(k;m,n)$. Die Vereinigung über alle k sei die Menge $P(m,n)$. Nun kann man das **Gaußpolynom** $\in \mathbf{N}[q]$ definieren:

$$\left[{m+n \atop n}\right] := \sum_{k=0}^{mn} p(k;m,n)q^k.$$

So ist z.B.

$$\left[{5 \atop 3}\right] = q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

Im folgenden definieren wir ein Abbildung, die einem Wort w ein Monom aus $\mathbf{N}[q]$ zuordnet, das sogenannte **q-Gewicht**. Dies ist ein Operator, wie wir ihn schon bei den Weintrauben als den *qmonom* Operator kennengelernt haben. Er erhält hier den gleichen Namen. Sei w ein Wort über dem Alphabet $\mathbf{N}$, mit dem Inhalt $I = (I_1, I_2, .., I_k)$, d.h. I_m ist die Anzahl der m im Wort w. Wir definieren das q-Gewicht von w als

$$qmonom(w) := \prod_{j=1}^{k} q^{(j-1)I_j}.$$

Der Exponent des q-Gewichts ist die Summe über das Wort minus der Anzahl der Buchstaben. Man beachte außerdem, daß das so definierte q-Gewicht dasselbe Monom ist, welches man durch die Operation $qmonom(wt(w))$ erhalten würde. So gibt es auch keine Probleme mit der Bezeichnung.

3.2.2 Eine Bijektion

Es wird eine Bijektion zwischen den Partitionen, die durch das Gaußpolynom abgezählt werden und den einzeiligen Tableaux, die durch ein spezielles Schurpolynom abgezählt werden, definiert.

3.2.1 Satz: Sei $t = t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_m$ ein **einzeiliges** Tableau. Sei $p = 0 \leq p_1 \leq ... \leq p_m$ eine Partition. Dann sind die Abbildungen

$$t \mapsto t_1 - 1, t_2 - 1, ..., t_m - 1$$

und

$$p \mapsto p_1 + 1, p_2 + 1, ..., p_m + 1$$

für alle $k \geq 0$ eine Bijektion zwischen den Partitionen von k mit maximal m Teilen und den einzeiligen Tableaux mit m Buchstaben vom q-Gewicht q^k.

Beweis: ist klar.

3.2.2 Folgerung: Die q-Spezialisierung des Schurpolynoms $S_m(A_{n+1})$ (d.h. $a := 1, b := q, c := q^2, ...$) ist das Gaußpolynom $[{m+n \atop n}]$.

Beweis: Dies liegt daran, daß die q-Spezialisierung eines Monoms, welches ein Tableau abzählt, gerade das q-Gewicht dieses Tableaus ist. Das Schurpolynom hat als maximalen Eintrag in den Tableaux den Wert $n+1$, diese Tableaux werden durch die Bijektion auf die Partitionen mit maximalen Eintrag n abgebildet.

3.2.3 Weintrauben

Obige Bijektion zwischen Partitionen aus $P(m,n)$ und den Tableaux aus $S_m(A_{n+1})$ wird durch eine Bijektion auf Weintrauben aus $S(w)$ zu einer Bijektionskette erweitert. Dabei ist w eine spezielle Startweintraube, die wie folgt definiert ist:

$$w_{m,n}(a,b) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a = n+1 \text{ und } 1 \leq b \leq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man bemerkt, daß dies die Weintraube ist, welche mittels der Operation $ferrers$, der Partition $[0^n, m]$ zugeordnet wird.
Nun gilt der folgende Satz.

3.2.3 Satz:

$$pol(w_{m,n}) = S_m(A_{n+1}).$$

Beweis: Durch die Operationen tab und wt wird eine Bijektion zwischen den Weintrauben in $S(w_{m,n})$ und den Tableaux in $S_m(A_{n+1})$ definiert.

Betrachtet man die q-Spezialisierung so ergibt sich daraus die Folgerung

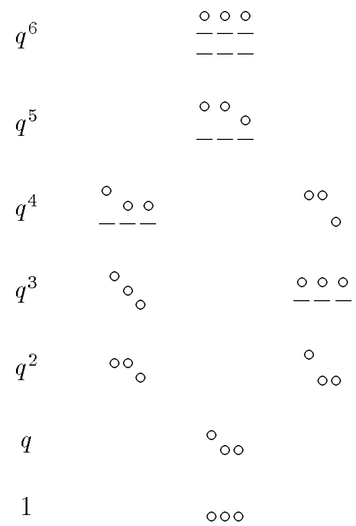
3.2.4 Folgerung:

$$qpol(w_{m,n}) = [{m+n \atop n}].$$

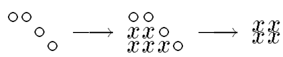
Beweis: Obige Bijektion erhält das q-Gewicht.

Zusammenfassend ergeben die beiden kurzen Beweise, daß es sich nicht nur um eine Identität zwischen Polynomen handelt, sondern vielmehr um eine Bijektion zwischen den Tableaux und den Weintrauben, welche das q-Gewicht erhält.
Betrachten wir noch einmal obiges Beispiel. Man möchte $[{5 \atop 3}]$ berechnen. Dazu bestimmt man aufgrund des obigen Satzes zuerst die Startweintraube $w_{3,2}$, sie ist im folgenden Bild in der obersten Zeile. Nun berechnet man $S(w_{3,2})$ und zählt dann die Anzahl der Weintrauben in einer Ebene. So erhält man den Koeffizienten zum q-Gewicht der Ebene. Im folgenden Bild wurde das q-Gewicht

an den linken Rand geschrieben.



Interessiert man sich für die Fortsetzung der Bijektion zu den Partitionen aus $P(m,n)$, so erhält man die bijektiv einer Weintraube zugeordnete Partition indem man die freien Felder unterhalb der Weintraube füllt, und dann von rechts nach links liest. Dies ergibt z.B. die folgende Zuordnung:



$=$ die Partition 122

3.2.4 Rekursionen

Betrachtet man nun das Problem der Gaußpolynome in der Sprache der Weintrauben, so kann man $S(w_{m,n})$ in disjunkte Teilmengen zerlegen und erhält so auf natürliche Weise Rekursionen.

3.2.5 Satz:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m-1+n \\ n \end{bmatrix} q^n + \begin{bmatrix} m+n-1 \\ n-1 \end{bmatrix}.$$

Beweis: Man zerlegt die Menge in den Teil, in dem der linke Stein noch in der obersten Zeile ist, dies ist der linke Summand, und in den Teil, wo er bereits eine Zeile tiefer ist, dieser Teil ist gleich der Menge $S(w_{m,n-1})$. da man, wie man sich leicht überlegt, alle Weintrauben in dieser Menge mit Herleitung über die Weintraube $w_{m,n-1}$ erreicht.

3.2.6 Satz:

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = q^{nm} + q^{(n-1)m}\begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} + q^{(n-2)m}\begin{bmatrix} m+1 \\ 2 \end{bmatrix} + q^{(n-3)m}\begin{bmatrix} m+2 \\ 3 \end{bmatrix} + \ldots$$

Beweis: Diesen Satz erhält man indem man die Menge der Weintrauben entsprechend dem rechten Stein zerlegt. Der erste Summand ist die Menge der Weintrauben, wo dieser Stein in der obersten Zeile ist (= die Startweintraube), der zweite Summand die Menge der Weintrauben, wo dieser Stein eine Zeile nach unten gewandert ist, der dritte Summand die Menge, wo er zwei Zeilen nach unten gewandert ist. u.s.w.

3.2.5 m-Teilmengen von m+n

Da die Gaußpolynome $\left[{m+n \atop m}\right]$ bei der Spezialisierung $q := 1$ die Binomialkoeffizienten $\binom{m+n}{m}$ ergeben, bedeutet dies, daß es eben so viele Weintrauben, Tableaux, Partitionen geben muß. Man sucht nun eine Fortsetzung der Bijektionskette in die m-Teilmengen von m+n.

Im folgenden werden die m-Teilmengen von m+n durch einen 0-1 Vektor mit m+n Einträgen kodiert. Der i-te Eintrag ist 0, falls das i-te Element nicht in der Teilmenge ist, sonst ist der Eintrag 1. Die Menge der m-Teilmengen von k wird mit $TM(k, m)$ bezeichnet.

Zur Fortsetzung der Bijektionskette wird eine Bijektion zwischen Partitionen und Teilmengen definiert.

3.2.7 Bijektion
Sei $0 \leq p_1 < ... < p_m$ eine Partition aus $P(m, n)$. Dieser Partition wird eine Teilmenge aus $TM(m + n, m)$ zugeordnet. Man erhält diese indem man p_i als die Anzahl der 0 rechts der $m + 1 - i$-ten 1 interpretiert. Vergleiche dies auch mit dem Lehmercode. Man erhält so die Kodierung von Partitionen, wie sie Comét [Com55] in den Binärmodellen verwendete. Dabei ist zu beachten, daß es führende Nullen in den Partitionen gibt, um die maximal zulässige Anzahl von Teilen zu erreichen. Dies wird auch an dem folgenden Beispiel klar:

$$223 \in P(3, 3) \longrightarrow 101100 \in TM(6, 3)$$
$$223 \in P(3, 4) \longrightarrow 0101100 \in TM(7, 3).$$

Die inverse Abbildung erhält man indem man die Anzahl der 0 rechts der 1 zählt. Auch dazu ein Beispiel:

$$110110 \longrightarrow 1122 \in P(4, 2)$$
$$011011011 \longrightarrow 001122 \in P(6, 3).$$

Man definiert nun das **q-Gewicht** einer Teilmenge mittels dieser Bijektion. Mit folgenden Algorithmus kann man alle Teilmengen in $T(m + n, m)$ durchlaufen. Man startet mit der Menge 11...1100..00, dies ist die Menge mit maximalen q-Gewicht. Alle Teilmengen werden erzeugt, indem man aus den Teilmengen mit q-Gewicht k die Teilmengen mit q-Gewicht $k-1$ erzeugt. Dies geschieht indem man in den Mengen mit q-Gewicht k auf alle möglichen Weisen 10 durch 01 ersetzt. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} & 11100 & \\ & 11010 & \\ 10110 & & 11001 \\ 01110 & & 10101 \\ 01101 & & 10011 \\ & 01011 & \\ & 00111 & \end{array}$$

Man erkennt, daß dieser Algorithmus ein bijektives Bild des Algorithmus mit den Weintrauben ist. D.h. im Bild werden die gleichen Einträge verbunden.

Wir betrachten nun die bekannte Involution auf den Teilmengen.

3.2.8 Satz: Involution auf Teilmengen
Sei $t \in T(m+n,m)$, dann ist die Abbildung inv, die t die 0-1 Folge zuordnet, die durch Vertauschen von 0 und 1 mit anschließendem Umdrehen der Folge entsteht, eine q-Gewicht erhaltende Involution.

$$inv : T(m+n,m) \longrightarrow T(m+n,n)$$

Diese Abbildung erhält zudem die Struktur des Algorithmus, zur Erzeugung der Weintrauben bzw. der Teilmengen. D.h. wie schon in der obigen Bemerkung, daß im Bild verbundene Weintrauben unter inv verbunden bleiben.

Nachfolgend ein kurzes Beispiel für diese Involution:

$$110100011 \stackrel{\text{Vertauschen } 0,1}{\longrightarrow} 001011100 \stackrel{\text{Umdrehen}}{\longrightarrow} 001110100.$$

Weiter unten werden wir noch das Bild von $S(w_{3,2})$ unter dieser Involution sehen. Betrachtet man statt der Teilmengen die q-Gewichte so erhält man:

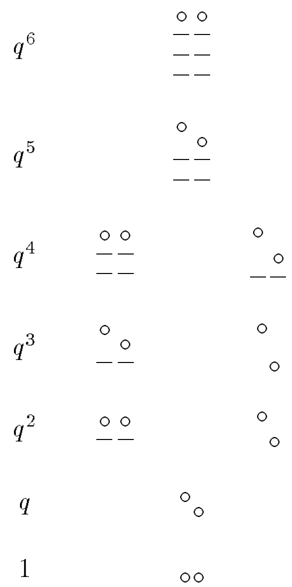
3.2.9 Folgerung:

$$\left[{m+n \atop m}\right] = \left[{m+n \atop n}\right].$$

Betrachtet man statt der Teilmengen die Tableaux so erhält man die Folgerung:

3.2.10 Folgerung: Es gibt eine q-Gewicht erhaltende Bijektion zwischen den Tableaux abgezählt durch $S_m(A_{n+1})$ und den Tableaux abgezählt durch $S_n(A_{m+1})$.

Betrachtet man die Bijektion bei den Partitionen so handelt es sich um die Konjugation. Interessant ist noch die Bijektion bei den Weintrauben. Betrachte dazu die per Involution zugeordneten Weintrauben vom Anfangsbeispiel.



Wie schon gesagt erhält diese Involution auch die Verbindungen zwischen zwei Weintrauben.

Nachfolgend werden noch die Ergebnisse, im Hinblick auf die folgenden Abschnitte, in der Sprache der symmetrischen Polynome zusammengefaßt.

3.2.11 Bemerkung: vollständige symmetrische Polynome
Es ergibt sich aus dem Obigen, daß die vollständigen symmetrischen Polynome sich aus Weintrauben berechnen lassen. Betrachtet man das Beispiel noch einmal und interessiert sich nicht für $qpol(w_{2,3})$ sondern für $pol(w_{2,3})$ so erhält man gerade $S_2(A_4)$, das vollständige symmetrische Polynom vom Grad zwei in vier Variablen. Mittels der Operation *tab* erhält man sogar die Tableaux, welche durch diese speziellen Schurpolynome abgezählt werden.

3.2.12 Bemerkung: elementar symmetrische Polynome
Ebenso leicht sieht man, auch ohne Verwendung obiger Ergebnisse daß man aus $\tilde{w}_{m,n}$ mit

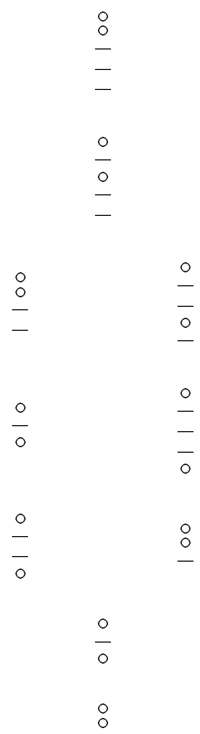
$$\tilde{w}_{m,n}(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{falls } b > 1 \\ 0 & \text{falls } b = 1 \text{ und } a \leq n \\ 0 & \text{falls } b = 1 \text{ und } a > n+m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die elementar symmetrischen Polynome in $m+n$ Variablen erhält. Es gilt also:

$$pol(\tilde{w}_{m,n}) = S_{1^m}(A_{m+n}).$$

Darüber hinaus erhält man auch hier mittels *tab* die durch diese Schurpolynome abgezählten Tableaux.

Man erkennt, daß die soeben definierte Weintraube, die gleiche Weintraube ist, die der Partition $[0^n, 1^m]$ mittels der Operation *ferrers* zugeordnet wird. Zu dieser Berechnung noch ein Beispiel. Es soll das elementar symmetrische Polynom $S_{11}(A_5)$ berechnet werden. Dazu berechnet man das Polynom $pol(\tilde{w}_{2,3})$, welches sich aus $S(w_{2,3})$ ergibt. Dessen Bild wird nachfolgend berechnet:



Das Polynom ist dann:

$$ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$$

Zuletzt noch einige Bemerkungen:

Unimodalität
Auch aus der neuen Darstellungsweise der Gaußpolynome als Summe von Weintrauben ergibt sich kein direkter Beweis der Unimodalität.
Dieses Kapitel ergab, daß man ausgehend von speziellen Weintrauben w mittels des Operators $pol(w)$ spezielle Schurpolynome erhielt, und sogar mittels des Operators $tab(S(w))$ die Tableaux, die von diesen Schurpolynomen abgezählt werden. Die folgenden Kapitel werden zeigen, daß dies ein Sonderfall einer viel allgemeineren Tatsache ist.

3.3 Symmetrisierungsoperatoren und Schurpolynome

3.3.1 Schurpolynome

Es wird gezeigt, daß $pol(w_I)$ für Partitionen I das Schurpolynom S_I ist. w_I ist dabei eine Weintraube die der Partition zugeordnet wird. Die Anzahl der Variablen ergibt sich aus der Anzahl der führenden Nullen in der Partition I. Dies ist eine Eigenschaft, wie sie auch für Schubertpolynome, welche Schurpolynome sind, gilt.

3.3.1 Definition:
Sei $I = (I_1 \leq I_2 ... \leq I_n)$ ein Partition. Es gelte $0 \leq I_1$, d.h. es sind führende Nullen erlaubt. Wir definieren die Weintraube w_I wie folgt:

$$w_I(a,b) := \begin{cases} 0 & \text{falls } a > n \\ 0 & \text{falls } a \leq n \text{ und } b > I_a \\ 1 & \text{falls } a \leq n \text{ und } b \leq I_a \end{cases}$$

Man beachte, daß dies die Weintraube ist, die mittels $ferrers$ einer Partition zugeordnet wird. Auch die beiden Startweintrauben für elementarsymmetrische und für vollständig symmetrische Polynome aus dem vorangegangenen Abschnitt ergeben sich als ein Spezialfall auf diese Weise.
Die Partition I heißt **Umriß** von w_I. Die Menge der Weintrauben w_J, wobei J eine Partiton mit u.U. führenden Nullen ist, wird mit SWT bezeichnet.

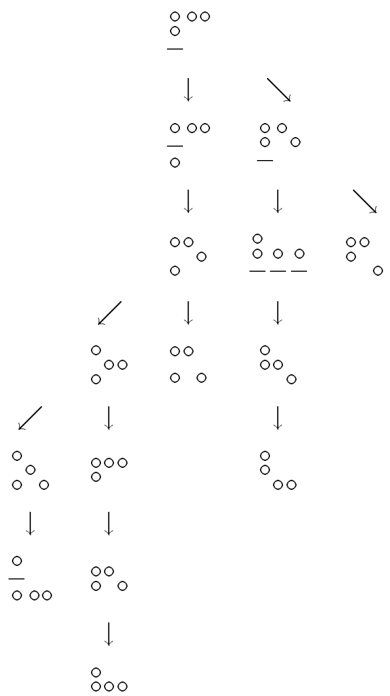
Die Weintraube

$$w_{0223} = \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \\ - & - & \end{array}$$

liegt in SWT und gehört zu der Partition $I = (0223)$.
kanonische Herleitung

Es ist im allgemeinen sehr wichtig eine Methode zu haben, die eine Herleitung $w \to \tilde{w}$ für ein beliebiges Paar $(w, \tilde{w})$ mit $\tilde{w} \in S(w)$, liefert. Für den Fall, daß $w \in$ SWT ist, ist dies wie im folgenden gezeigt wird, möglich.

Sei $w \in SWT, \tilde{w} \in S(w)$. Es wird nun eine kanonische Herleitung $w \to \tilde{w}$ definiert. Zuerst wird die unterste Zeile in die Zielposition geschoben, d.h. alle Steine aus der untersten besetzten Zeile in w werden an ihren Platz in $\tilde{w}$ geschoben. Dann alle Steine aus der zweituntersten Zeile, u.s.w. . Diese Vorschrift ist noch nicht eindeutig. Verlangt man jedoch, daß das Schieben zeilenweise passiert, d.h. alle Steine, die verschoben werden müssen, zunächst in die nächste Zeile darunter, und dann wieder in die nächste Zeile u.s.w. , dann wird diese Vorschrift eindeutig.
Es wird nun als Beispiel die kanonische Herleitung in $S(w_{013})$ gezeigt.



Man beachte, daß man bei der Herleitung $w \to \tilde{w}$ mit $w \in$ SWT, ohne Durchschieben auskommt, d.h. man benötigt lediglich die Operation $s_{i,i+1}$ und keine Operation $s_{i,i+k}$ mit $k > 1$. Das Ergebnis dieses Abschnitts ist der folgende Satz:

3.3.2 Satz:
Sei $I = (I_1, ..., I_n)$ eine Partition mit u.U. führenden Nullen, dann gilt:

$$pol(w_I) = S_I(A_n).$$

Beweis: Sei $\tilde{w} \in S(w_I)$. Die Einträge aus einer gemeinsamen Startzeile in der Weintraube w_I sind an monoton fallenden Positionen in $\tilde{w}$. Daher ist $word(\tilde{w})$ ein Kontertableau. Sei umgekehrt kt ein Kontertableau vom Umriß I mit maximalen Eintrag n, so ist $wt(kt)$ eine Weintraube aus $S(w_I)$. Wir haben so eine Bijektion zwischen den Weintrauben in $S(w_I)$ und den Kontertableaux vom Umriß I und dem maximalem Eintrag n. Diese Bijektion läßt sich fortsetzen von den Kontertableaux zu den Tableaux vom Umriß I und maximalen Eintrag n, was diesen Satz beweist.

Obiges Beispiel ist das Schurpolynom $S_{013}(A_3)$, d.h. betrachtet man die Tableaux, die den einzelnen Weintrauben im obigen Bild mittels der Funktion tab zugeordnet werden, so erhält man die Tableaux, die durch das Schurpolynom $S_{013}(A_3)$ abgezählt werden.

Will man die Weintraube in $S(w_I)$ zu einen beliebigen Tableau aus S_I berechnen, so geht man wie folgt vor: Zuerst berechne mittels wt die Weintraube, und dann mittels der $packleft$ Operationen, die Weintraube, die das äquivalente Kontertableau darstellt, dies ist die Weintraube in $S(w_I)$.

Man erhält mittels der Weintrauben und der kanonischen Herleitung innerhalb von $S(w), w \in SWT$ auch ein Verfahren alle Tableaux mit gegebenem Umriß und gegebenem maximalen Inhalt zu konstruieren. Dabei werden die Tableaux alle nur einmal erzeugt.

Zusammenfassung
Wir haben gesehen, daß spezielle Mengen $S(w)$ beim Übergang zu den Polynomen die Schurpolynome ergeben. Dies ist eine Verallgemeinerung der Ergebnisse des vorherigen Kapitels mit den elementar symmetrischen und den vollständigen symmetrischen Polynomen.

3.3.2 Der Symmetrisierungsoperator für Weintrauben

Wir werden einen Operator definieren, der zu einer Weintraube die bezüglich der Zeilen $i, i+1$ symmetrische Weintraube ergibt.

Der unsymmetrische Teil zweier Zeilen
Sei w eine Weintraube. Seien $i, i+1$ zwei benachbarte Zeilen. Betrachten wir das Beispiel:

$$\begin{array}{cccccc} \circ & & \circ & \circ & \circ & \\ & \circ & \circ & \circ & & \circ \end{array}.$$

Wir markieren nun die zuerst die Steine, welche in der gleichen Spalte sind. Dann markieren wir unmarkierte Paare ${}_\circ{}^\circ$, welche in benachbarten Spalten sind, dann derartige Paare, die sich in den Spalten $j, j+2$ befinden u.s.w. Im Beispiel ergibt diese Operation die Markierung:

$$\begin{array}{l} \circ\ \ \otimes\otimes\otimes \\ \ \ \otimes\otimes\otimes\ \ \circ. \end{array}$$

Man bezeichet die markierten Steine als den **symmetrischen Teil** (der Zeilen) der Weintraube. Übrig bleibt der unsymmetrische Teil der beiden Zeilen, er ist etwas der Form

$$\begin{array}{l} \circ\cdots\otimes \\ \qquad \odot\circ\cdots\circ \end{array}$$

Die beiden besonders markierten Steine dienen zur folgenden Definition.

3.3.3 Definition: pu_i, pd_i
Die Operation des nach oben Schiebens des Steines $\odot$ in die Zeile $i+1$ wird mit

$$pu_i$$

bezeichnet. Analog das nach unten Schieben von $\otimes$ in die Zeile i:

$$pd_{i+1}.$$

Falls kein unsymmetrischer Teil in der entsprechenden Zeile ist, ist diese Operation wieder die Identität. Der Name wird durch u=up, d=down motiviert. Der Index ist dabei die Zeile, aus der heraus geschoben wird.

Diese Definition ist ähnlich den Äquivalenzopertionen pr_j, pl_j. Es handelt sich um dieselben Operationen, falls man die Begriffe Zeile und Spalte vertauscht.

Mittels der Operationen pu_i, pd_i kann man nun die (bezüglich der Zeilen $i, i+1$) **symmetrische Weintraube** definieren. Diese Operation auf der Menge der Weintrauben wird mit

$$ps_i$$

(s=symmetrisch) bezeichnet. Dazu betrachte den unsymmetrischen Teil in den Zeilen $i, i+1$. Man hat nun drei Fälle zu unterscheiden. Sei k die Anzahl der unsymmetrischen Steine in der Zeile $i+1$, l diese Anzahl in der Zeile i. Fall 1: $k = l$, dann ist ps_i die Identität.
Fall 2: $k > l$, dann ist $ps_i := (pd_{i+1})^{k-l}$
Fall 3: $k < l$, dann ist $ps_i := (pu_i)^{l-k}$

Diese Operation ps_i hat folgende Eigenschaften:
1. ps_i ist eine Involution.
2. Das Polynom $pol(\{w, ps_i(w)\})$ ist symmetrisch in den Variablen a_i, a_{i+1}. Dies begründet auch mit den Namen des Operators.

Die wichtigste Eigenschaft wird jedoch durch den folgenden Satz beschrieben:

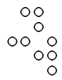
3.3.4 Satz: Sei $I = I_1 \leq .... \leq I_n$ eine Partition. Sei $\tilde{w} \in S(w_I)$, dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$ps_i(\tilde{w}) \in S(w_I).$$

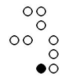
Beweis: Betrachtet man die kanonische Herleitung, so schiebt man entweder einen Stein noch eine Zeile weiter nach unten, oder man läßt ihn in der aktuellen Zeile, und schiebt ihn nicht noch eine Zeile weiter.

Bijektion zwischen Tableaux

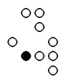
Die Operation ps_i gibt eine Bijektion zwischen Tableaux vom Umriß I und Gewicht $w_1, ..., w_i, w_{i+1}, ..., w_n$ und den Tableaux vom gleichen Umriß und dem Gewicht $w_1, ..., w_{i+1}, w_i, w_{i+2}, ..., w_n$. Man vergleiche diese Bijektion mit der Bijektion in James/Kerber [JK81] S.90, es werden die gleichen Tableaux gepaart. So wird z.B. das Tableau

$$\begin{array}{l}35\\245\\1233\end{array} =$$ 

mittels ps_1 nach

 $$= \begin{array}{l}35\\245\\1133\end{array}$$

abgebildet, oder z.B. mittels ps_2 nach

 $$= \begin{array}{l}35\\245\\1223.\end{array}$$

Dabei wurden die verschobenen Steine besonders markiert.

3.4 Schiefschurpolynome

Es geht im folgenden um die Darstellung von Schiefschurpolynomen $S_{I/J}(A_k)$ als $pol(w_{I/J,k})$ mit einer speziellen Weintraube $w_{I/J}$. Es geht sogar noch genauer, wie schon im vorherigen Kapitel über Schurpolynome darum, daß $tab(w_{I/J,k})$ die Menge der Schieftableaux vom Umriß I/J mit maximalen Eintrag k ist. Zuerst die Definition der Startweintraube.

3.4.1 Definition:

Sei I/J eine Schiefpartition, wobei I, J Partitionen der Länge n seien. Sei $k \in \mathbf{N}$. Es wird nun eine Weintraube $w_{I/J,k}$ definiert. Die untersten k Zeilen seien leer. In den Zeilen darüber wird die Weintraube der Schiefpartition eingetragen, dies geschieht jedoch nicht linksbündig sondern rechtsbündig, und auch nicht von unten nach oben sondern von oben nach unten.

Man beachte, daß im Gegensatz zu der vorherigen Definition der Startweintraube für die Schurpolynome, es sich hier nicht um die Weintraube handelt, die mittels $ferrers$ der Schiefpartition zugeordnet wird. Zu dieser Definition betrachten wir das folgende Beispiel: Gegeben sei die Schiefpartition 13347/00013, die zugehörige Weintraube ist:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & \circ & \circ & \circ & & & \\ \circ & \circ & \circ & & & & \\ \circ & \circ & \circ & & & & \\ \circ & & & & & & \end{array} .$$

Diese Weintraube wird nun rechtsbündig und auf dem Kopf geschrieben:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \circ \\ & & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & & & \end{array} .$$

Indem man nun noch ($k = 30$ drei Leerzeilen darunter einfügt, erhält man die Weintraube:

$$w_{13347/00013,3} = \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \circ \\ & & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & & \circ & \circ & \circ \\ & & & \circ & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \circ & \circ & & & \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{array} .$$

Man bezeichnet die Menge der derartigen Weintrauben mit SSWT (Schief-Schur-Weintrauben). Ebenso wie bei den Schurpolynomen ist der nächste Schritt die:

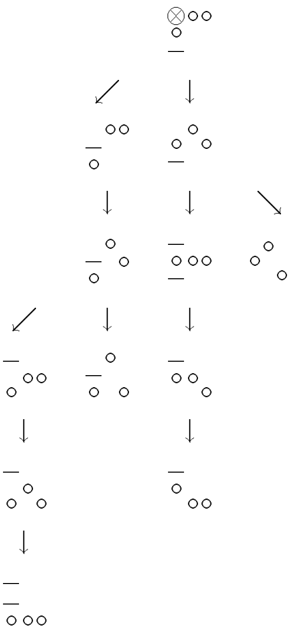
kanonische Herleitung.

Sei $w \in$SSWT, $\tilde{w} \in S(w)$. Man kann nun analog wie im Fall SWT eine kanonische Herleitung $w \to \tilde{w}$ definieren. Denn indem man den unbesetzten Teil links oben in w mit Steinen besetzt, erhält man eine Weintraube w' aus SWT. Beispiel: (die neuen Steine werden markiert durch $\otimes$)

$$\begin{array}{cc} & \circ \\ \circ & \\ - & - \end{array} \to \begin{array}{ccc} \otimes & \otimes & \circ \\ \otimes & \circ & \\ - & - & \end{array}$$

Werden die gleichen Steine am gleichen Platz auch in $\tilde{w}$ eingesetzt, was die Weintraube $\tilde{w}'$ ergibt, so liegt $\tilde{w}'$ in $S(w')$. Die kanonische Herleitung $w' \to \tilde{w}'$ definiert die kanonische Herleitung $w \to \tilde{w}$. Ebenso wie bei den Tableaux kommt man in dieser Herleitung ohne Durchschieben aus.

Es folgt ein Beispiel für die kanonische Herleitung. Dabei ist der zusätzlich eingefügte Stein nur in der Startweintraube eingezeichnet.



Der fundamentale Satz ist nun:

3.4.2 Satz:
Sei I/J eine Schiefpartition, $k \in \mathbf{N}$, dann gilt

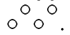
$$pol(w_{I/J,k})(a_{k+1} = a_{k+2} = ... = 0) \quad = \quad S_{I/J}(A_k).$$

D.h. im Polynom auf der linken Seite werden die Variablen $a_{k+1}, a_{k+2}, ...$ gleich Null gesetzt.

Beweis:
Sei st ein beliebiges Schieftableau aus dem Schiefschurpolynom auf der rechten Seite, so läßt es sich wie folgt als Weintraube aus der linken Menge schreiben. Der Umriß des Schieftableaus gibt die Faktorisierung des Wortes in Spalten vor, und man erzeugt entsprechend dieser Faktorisierung eine Weintraube. Dies geschieht ebenso wie in der Abbildung wt. Betrachten wir zum Beispiel das Schieftableau:

$$\begin{array}{llll} 3 & & & \\ 2 & 3 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 1. \end{array}$$

Dies ist das Wort 32.31.2.1 mit der angedeuteten Faktorisierung. Dies ergibt die Weintraube:



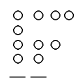
Man sieht nun, daß diese Weintraube in $R(w_{I/J,k})$ (im Beispiel $R(w_{1234/13,k})$) liegt, und aufgrund der Tableaueigenschaft sind nun die Steine aus einer Startzeile, von links nach rechts fallend, und somit liegt die Weintraube in $S(w_{I/J,k})$. Umgekehrt sieht man auch sofort, daß jede Weintraube aus $S(w_{I/J,k})$ ein Schieftableau ergibt.

Das besondere Ergebnis ist nun, daß man auf diese Weise wiederum einen Algorithmus erhält, der es erlaubt, alle Schieftableaux mit gegebenem Umriß und mit gegebenem maximalen Eintrag genau einmal zu konstruieren. Der Nachteil dieses Algorithmus ist es, daß zu Beginn einige überflüssige Schieftableaux erzeugt werden müssen.

3.5 Die Menge TWT

3.5.1 Definition

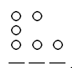
Im folgenden wird eine Untermenge TWT der Menge WT definiert. Es handelt sich um die Weintrauben, in denen die Einträge in den Zeilen linksbündig sind. So liegt zum Beispiel die Weintraube



in der Menge TWT. Die formale Definition ist:

$$\mathrm{TWT} := \{w \in \mathrm{WT} | w(i,j) = 1 \Rightarrow w(i,k) = 1 \forall k < j\}.$$

Man bemerkt, daß TWT eine Obermenge der Menge SWT, der Weintrauben, die Diagramme von Partitionen sind, ist. Mit **Umriß** der Weintraube wird der Vektor, der die Anzahl der Einträge in der Zeile angibt, bezeichnet. Die durch diesen Vektor $I = (I_1, ..., I_n)$ eindeutig beschriebene Weintraube wird mit t_I bezeichnet. Auch dazu ein Beispiel:

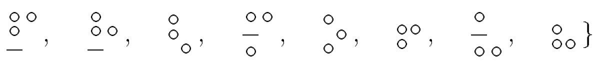
$t_{0312} =$ .

Wir führen nun eine wichtige Bezeichnung ein:

3.5.1 Definition:

$$T_I := S(t_I),$$

hierzu gleich noch ein Beispiel

$T_{012} = \{$  $\}$.

Wir definieren ferner

$$\mathbf{T} := \{w \in \mathrm{WT} | \text{es existiert } I : w \in T_I\}.$$

Eine erste Betrachtung der Definition liefert folgende Eigenschaften:
1. Sei $\hat{I}$, der ansteigende Vektor, der durch Sortieren von I entsteht. So liegt t_I, und damit auch T_I in $S(t_{\hat{I}}) = T_{\hat{I}}$. So liegt zum Beispiel t_{0312} in T_{0123}. Diese durch eine Partition indizierte Menge ist gerade eine Weintraubenmenge, die in Bijektion zu einem nicht kommutativen Schurpolynom steht. D.h. $pol(T_I)$ ist stets ein Teilpolynom eines Schurpolynoms.
2. $word(w)$ ist ein Kontertableau für $w \in \mathbf{T}$.
3. Es gibt wegen der Bijektion zwischen den Tableaux und Kontertableaux, eine Bijektion zwischen $\mathbf{T}$ und der Menge der Tableaux.

3.5.2 Die Menge U_I

Es wird gezeigt werden, daß man die Menge $U(I)$ von Tableaux aus dem Kapitel 2.2.7, als Menge von Weintrauben wiedererkennen kann. Dazu werden die folgenden Definitionen vorgenommen. Wir definieren folgende Relation auf Vektoren von natürlichen Zahlen:

3.5.2 Definition: J sei zu I benachbart bezüglich der Relation $<_{TWT}$, falls folgendes gilt: der Vektor J entsteht aus dem Vektor I durch Vertauschen von I_k mit I_l wobei $l < k$ und $I_l < I_k$ und es gibt kein m mit $l < m < k$, sodaß $I_l \leq I_m \leq I_k$. Der transitive Abschluß dieser Relation definiert dann die Relation $\leq_{TWT}$.

Man erkennt leicht, daß gilt:

$$T_J \subset T_I \Longleftrightarrow J \leq_{TWT} I.$$

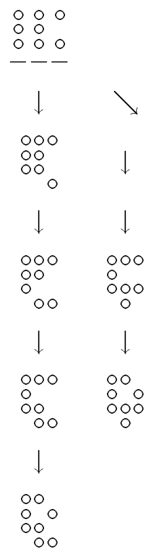
Wir können nun folgende wichtige Definition vornehmen:

3.5.3 Definition:

$$U_I := \{w \in T_I | w \notin T_J, \quad J <_{TWT} I\}.$$

Wir werden sehen, daß dies gerade die Polynome $U(t_I)$ aus dem Abschnitt über die nicht kommutativen Schubertpolynome sind. In U_I liegen die Weintrauben, welche sich aus t_I, aber aus keiner kleineren t_J herleiten lassen. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Wir betrachten die Menge T_{0323}, und bestimmen die Weintrauben aus U_{0323}:



Alle weiteren Operationen s_i würden aus der Menge U_I herausführen, und nicht alle möglichen s_i Operationen um die berechneten Weintrauben aus der Startweintraube zu berechnen, wurden als Pfeile eingetragen.
Man erhält folgende Zerlegung:

$$T_I = \sum_{J \leq_{TWT} I} U_J.$$

T_{0212} wird beispielsweise wie folgt zerlegt:

0212		
0221	2012	1202
2021	1220	2102
2201	2120	
2210		

3.5.3 Eine kanonische Herleitung in T_I

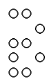
Mit Hilfe der Zerlegung von T_I als Summe von U_J, kann man eine kanonische Herleitung definieren. Man geht wie folgt vor:
1. Man definiert zuerst kanonische Wege zwischen den $t_J \in U_J$, dies geschieht einfach durch nach unten Schieben der Steine, die die gesuchte Permutation für die benachbarten Vektoren bzgl. $\leq_{TWT}$ ergeben. Dabei wählt man die lexikographische erste Permutation.

2. Innerhalb von U_I wählt man die Herleitung für $T_{\tilde{I}}$, wobei $\tilde{I} := I$ ohne die linke Spalte.
Im obigen Beispiel ergibt dies folgende Zerlegung von T_{0212}:

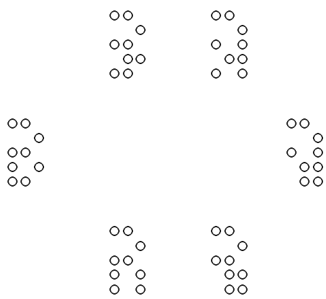
$$\begin{tikzcd}
0212 \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\
2012 \arrow[d] \arrow[dr] & & 1202 \arrow[d] & 0221 \\
2102 \arrow[d] & 2021 \arrow[d] & 1220 & \\
2120 \arrow[d] & 2201 & & \\
2210 & & &
\end{tikzcd}$$

3.5.4 Berechnung des rechten und linken plactischen Zeilentableaus in T_I

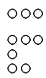
Man bemerkt als erstes, daß $word(w)$ für $w \in T_I$ ein Kontertableau ist. Nach dem Satz 2.2.6 erhält man das rechte und linke plactische Zeilentableau indem man die Permutationen der Spaltenfaktorisierung betrachtet. Diese erhält man durch Anwenden der Äquivalenzrelationen für Weintrauben. So sieht man für die Weintraube



aus T_{02313}, durch Umsortieren oder aus dem Kontertableau, daß das Zeilentableau den Umriß 1233 hat. Zur Berechnung bildet man die Permutationen der Spaltenfaktorisierung 432:



Man erhält das rechte Zeilentableau (die verschiedenen linken Spalten)



$$= \begin{array}{l} 5 \\ 35 \\ 235 \\ 113 \end{array}$$

und das linke Zeilentableau (die verschiedenen rechten Spalten)

$$\begin{array}{ccc}\circ&\circ&\circ\\ \circ&&\\ \circ&\circ&\circ\\ \circ&\circ&\end{array} = \begin{array}{l}4\\34\\224\\112\end{array}$$

3.5.4 Definition: Diese beiden Abbildungen WT $\longrightarrow$ WT werden mit

$$rightkey$$

für die Berechnung des rechten Zeilentableau, und

$$leftkey$$

für die Berechnung des linken Zeilentableau, bezeichnet. Dieser Name ist die ursprünglich von Lascoux und Schützenberger verwendete Bezeichnung des linken und rechten Zeilentableaus.

Es wird nun eine etwas geschicktere Methode zur Berechnung des rechten Zeilentableaus vorgestellt.

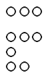
Ein Algorithmus zur Berechnung des rechten Zeilentableaus von $w \in$ T

w habe $k+1$ Spalten, die mit $w_1, ..., w_{k+1}$ bezeichnet werden. Man berechnet zuerst das rechte Zeilentableau $t_{\tilde{I}}$ von $\tilde{w} := w$ ohne die linke Spalte w_1. Man nehme die Spalten $\tilde{w}_1$ bis $\tilde{w}_k$ und bilde die Weintrauben $w_1, \tilde{w}_j$, die aus zwei Spalten besteht. Mittels der Äquivalenzrelation werden die zusätzlichen Steine aus w_1 in die zweite Spalte gebracht, und man erhält so die $j+1$-te Spalte des rechten Zeilentableaus von w. Die erste Spalte des rechten Zeilentableaus ist bekannt, sie ist w_1, man kann so also alle Spalten des rechten Zeilentableaus berechnen. Dazu ein Beispiel: Betrachten wir die Weintraube $w := \begin{array}{ccc}\circ&\circ&\\ &&\circ\\ \circ&\circ&\\ \circ&&\circ\\ \circ&\circ&\end{array}$, das rechte Zeilentableau von $\tilde{w} = \begin{array}{cc}\circ&\\ &\circ\\ \circ&\\ &\circ\\ \circ&\end{array}$ ist $\begin{array}{cc}\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ \circ&\end{array}$. Man bildet nun die beiden Paare

$$(w_1, \tilde{w}_1) = \begin{array}{cc}\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ \circ&\\ \circ&\circ\end{array} \equiv \begin{array}{cc}\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ &\circ\\ \circ&\circ\end{array}$$

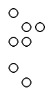
und

$$(w_1, \tilde{w}_2) = \begin{array}{cc}\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ \circ&\\ \circ&\end{array} \equiv \begin{array}{cc}\circ&\circ\\ \circ&\circ\\ &\circ\\ &\circ\end{array}$$

woraus man das rechte Zeilentableau  erhält.

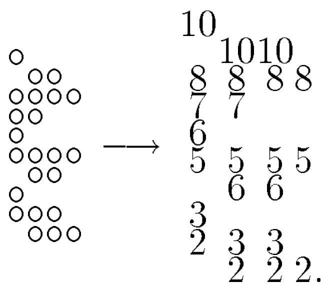
3.5.5 Die Abbildung zl

spezielle Weintrauben in U_I
Wir betrachten folgende Teilmenge von Weintrauben in T_I, sie sei momentan W genannt. Die erste Spalte ist beliebig, der Rest der Weintraube ist eine Weintraube aus TWT. So liegt die Weintraube



in dieser Menge W.
Ein Algorithmus in W

Wir definieren nun eine Zuordnung der Zeilen im Rest zu den Steinen in der ersten Spalte. Klar ist wegen der Eigenschaft aus T_I zu sein, daß es mindestens soviel Steine in der ersten Spalte wie Zeilen im Rest gibt. Man beginnt von rechts im Rest, und betrachtet das Paar: rechteste Spalte, erste Spalte und man erhält durch die Markierungen in der Äquivalenzrelation eine Zuordnung von Steinen in der ersten Spalte zu den Steinen in der letzten Spalte, so werden die Steine zu den längsten Zeilen zugeordnet. Nun betrachtet man die vorletzte Spalte, bildet wieder das Paar: erste Spalte, vorletzte Spalte, und nun werden weitere Steine in der ersten Spalte markiert, (da die bisherigen Markierungen übernommen werden) die dann den Zeilen, die bis zur vorletzten Spalte gehen, zugeordnet werden. Dies geschieht bis man das Paar aus erster und zweiter Spalte gebildet hat, und so alle Zeilen im Rest betrachtet hat. Nachfolgend noch ein Beispiel dazu: Zusammengehörende Steine haben die gleich Nummer:



Es werden die gleichen Steine wie bei der Berechnung des symmetrischen Teils zwischen erster und zweiter Spalte markiert, jedoch ist die Zuordnung, wie man bei den unteren beiden Zeilen sieht, anders.

3.5.5 Definition: Auf diese Weise wird jeder Zeile in der ersten Spalte eine Zahl, die Länge der zugeordneten Zeile, zugewiesen. Diese definiert eine Funktion (zl = Zeilenlänge)

$$zl : \mathbf{W} \longrightarrow \mathbf{N}^{\mathbf{N}}.$$

Im obigen Beispiel ist der Wert 04304324030000.....

Man sieht sofort, daß für $w \in W$ gilt:

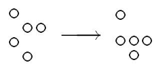
$$zl(w) = I \Longrightarrow w \in T_I.$$

Man kann sogar einen weitergehenden Hilfssatz beweisen.

3.5.6 Hilfssatz: Sei $w \in W$, dann gilt:

$$zl(w) = I \Longrightarrow w \in U_I.$$

Beweis: Der Beweis geschieht mittels Induktion nach der Anzahl der Transpositionen, um die Permutation der Zeilen im Rest zu erhalten. Man startet mit der Weintraube t_I, dies ist die größte Weintraube (bzgl $<_{TWT}$) mit dem gegebenen zl. Betrachtet man nun eine Transposition $\tilde{w}' \to \tilde{w}$, wobei $zl(w) \neq zl(w')$ (ich beweise also die Verneinung), so sieht man durch Fallunterscheidung z.B.



daß $zl(w) <_{TWT} zl(w')$, und aus obiger Bemerkung folgt dann die Behauptung.

3.5.6 Satz über die Beschreibung von U_I

Es wird ein Satz formuliert und bewiesen, der eine erste Verbindung zwischen den Weintrauben und den Schubertpolynomen herstellt. Zuerst ein Hilfssatz.

3.5.7 Hilfssatz: Sei $t_J \to w' \xrightarrow{s_i} w$ ein kanonische Herleitung innerhalb von U_J. Dann haben w und w' das gleiche rechte Zeilentableau.

Beweis: der Beweis geschieht mittels Induktion nach der Anzahl der Spalten, der Anfang mit einer Spalte ist klar.
Betrachten wir die beiden Weintrauben $\tilde{w}, \tilde{w}'$, die aus w und w' durch Streichen der (identischen) linken Spalte entstehen.
Fall 1: $\tilde{w}$ und $\tilde{w}'$ liegen in der gleichen $U_{\tilde{K}}$, dann haben sie nach Induktionsannahme das gleiche rechte Zeilentableau. Dann haben jedoch auch w und w' das gleiche rechte Zeilentableau, da die linke Spalte bei beiden gleich ist.
Fall 2: $\tilde{w}$ und $\tilde{w}'$ liegen in verschiedenen $U_{\tilde{K}}$, $(w \in U_{\tilde{K}}, w' \in U_{\tilde{K}'})$ dann ist jedoch, wegen des kanonischen Weges

$$\tilde{w} = t_{\tilde{K}},$$

und $\tilde{K}$ ist benachbart bzgl. $<_{TWT}$ zu $\tilde{K}'$, d.h. sie unterscheiden sich durch ein Abwärtspermutation. Nach Induktionsannahme gilt dann auch, daß sich $rightkey(\tilde{w}) = \tilde{w}$ und $rightkey(\tilde{w}')$ durch das Runterschieben eines rechten Zeilenendes unterscheiden. Dazu folgendes Bild:

$$w = \begin{array}{c|l} \circ & \\ \vdots & \circ\ \cdots\ \circ \\ & \vdots\ \ \vdots \\ \vdots & \circ\ \cdots\ \circ\ \ \circ\ \cdots\ \circ \\ \circ & \end{array} \qquad\qquad w' = \begin{array}{c|l} \circ & \\ \vdots & \circ\ \cdots\ \circ\ \ \circ\ \cdots\ \circ \\ & \vdots\ \ \vdots \\ \vdots & \circ\ \cdots\ \circ \\ \circ & \end{array}$$

wobei im rechten Teil von w' nicht $\tilde{w}'$ sondern das rechte Zeilentableau von $\tilde{w}' = t_{\tilde{K}'}$ eingezeichnet ist. Der erste Stein in dem Zeilenteil, der nach unten geschoben wird, dies geschehe von der Zeile i in die Zeile k, sei in der Spalte j. Diesen werden wir im folgenden bei der Berechnung des rechten Zeilentableaus von von w' verwenden. Verwende dazu die Methode, wie sie im Kapitel über das rechte und linke Zeilentableau beschrieben wurde.
Annahme: $rightkey(w) \neq rightkey(w')$.
1. Es gibt in w zwischen den Zeilen i und k keine Zeile die kleiner als die Zeile k und größer als die Zeile i ist. Dies gilt wegen der kanonischen Herleitung.
2. Bei der Berechnung des rechten Zeilentableau war die erste Abweichung bei den Paaren (w_1, w_j),$(w_1, t_{\tilde{K}'})$. Es ist klar das dies nicht in einer Spalte $< j$ gewesen sein kann, da hier die beiden Paare noch identisch sind. Nimmt man an, daß in der Spalte j das gleiche rechte Zeilentableau berechnet wird, so bedeutet dies, in

$$\begin{array}{l} \vdots \otimes i \\ \vdots\ \vdots \\ \vdots - k \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \vdots - i \\ \vdots\ \vdots \\ \vdots \otimes k \end{array}$$

werden durch den Stein $\otimes$ in beiden Fällen der gleiche Stein links markiert. Diese Zuordnung bleibt jedoch in allen weiteren Spalten bis in w die Zeile k zuende ist. Dies gilt da evtl. dazwischen liegende Zeilen wegen (1) erst später zuende sind. Danach sind dann wieder die Paare identisch. Daher ist dann auch das rechte Zeilentableau identisch und wir haben einen Widerspruch.
3. Es ist also bei der Berechnung des rechten Zeilentableau in der Spalte j folgendes passiert: Zwischen der Zeile i und k ist in der linken Spalte ein freier Stein.

$$w = \begin{array}{ccc} \circ & & \\ & - & i \\ \circ & & \\ & \circ & k \end{array} \qquad\qquad w' = \begin{array}{ccc} \circ & & \\ & \circ & i \\ \circ & & \\ & - & k \end{array}$$

dadurch werden andere Steine in der linken Spalte markiert, und ein anderes rechtes Zeilentableau berechnet. Wir betrachten diese Situation genauer

$$w' = \otimes \begin{array}{ll} \circ \cdots \circ \quad \underbrace{\circ \cdots \circ}_{A} & \qquad i \\ \\ \underbrace{\circ \cdots \circ}_{B} & \end{array}$$

In w ist der Teil A in der Zeile k und bei der Berechnung von zl, w liegt ja in der Menge W, wird die Zeile k maximal dem Stein $\otimes$ zugeordnet. Es gilt also $zl(w) <_{TWT} I$, woraus folgt, daß $w \notin U_I$. Was der gesuchte Widerspruch ist. w und w' haben also das gleiche rechte Zeilentableau.

3.5.8 Folgerung:

$$w \in U_I \Longrightarrow rightkey(w) = t_I.$$

Beweis: Dies ergibt sich aus der Tatsache, daß $rightkey(t_I) = t_I$.

3.5.9 Satz: Sei $w \in T_I$, dann gilt:

$$rightkey(w) = t_J \Longleftrightarrow w \in U_J.$$

Beweis: Es ist noch die Umkehrung zu zeigen. Wir beweisen sie mittels Induktion nach der Länge der kanonischen Herleitung $t_I \to w' \xrightarrow{s_i} w$. Ist die Länge null, so ist nichts zu zeigen, da $w = t_I$. Sei also $rightkey(w) = t_J$. Man unterscheidet zwei Fälle

Fall 1: w und w' liegen in vers. $U_K \Rightarrow w = t_J \Rightarrow w \in U_J$

Fall 2: w und w' liegen im gleichen $U_K \Rightarrow rightkey(w) = rightkey(w')$ wegen des obigen Hilfssatzes. $rightkey(w')$ ist also t_J, was nach Induktionsannahme bedeutet $w' \in U_J$, und somit ist auch $w \in U_J$.

3.5.10 Folgerung:

$$U_J = \text{Weintrauben aus T mit rechten Zeilentableau } t_J.$$

3.5.7 Vermutungen

1. Das Polynom $qpol(U_I)$ ist unimodal.
2. Das Polynom $qpol(T_I)$ ist unimodal.

Hierbei handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Vermutung von Pragacz, daß die q-Spezialisierung der Schubertpolynome unimodal ist.

3.5.8 Verbindung zu Schubertpolynomen

Die Weintrauben in T sind genau die Kontertableau, man kann obige Folgerung auch wie folgt formulieren:

$$U_J = \text{Kontertableaux mit rechtem Zeilentableau } t_J.$$

Oder aufgrund der Bijektion zu den Tableaux:

3.5.11 Folgerung:

$$U_J = \text{Tableaux mit rechtem Zeilentableau } t_J$$

Somit entsprechen sie den $U(t_J)$ aus 2.2.7. Da sich die Definition der T_I und der $D(t_I)$ entsprechen haben wir auch die Gleichheit dieser beiden Polynome, bzw. Mengen von Tableaux.

Zusammenfassung

Wir haben das Ergebnis über die Schurpolynome noch weiter verallgemeinert, und haben gezeigt, daß Weintrauben gewisse Polynome, welche von Lascoux und Schützenberger eingeführt wurden, erzeugen. Als Ergebnis hiervon lassen sich Schubertpolynome als Summe von verschiedenen Weintraubenmengen schreiben. Wir werden dies anhand des bekannten Beispiels aus dem Kapitel über die Schubertpolynome demonstrieren. Wir hatten dort die Zerlegung:

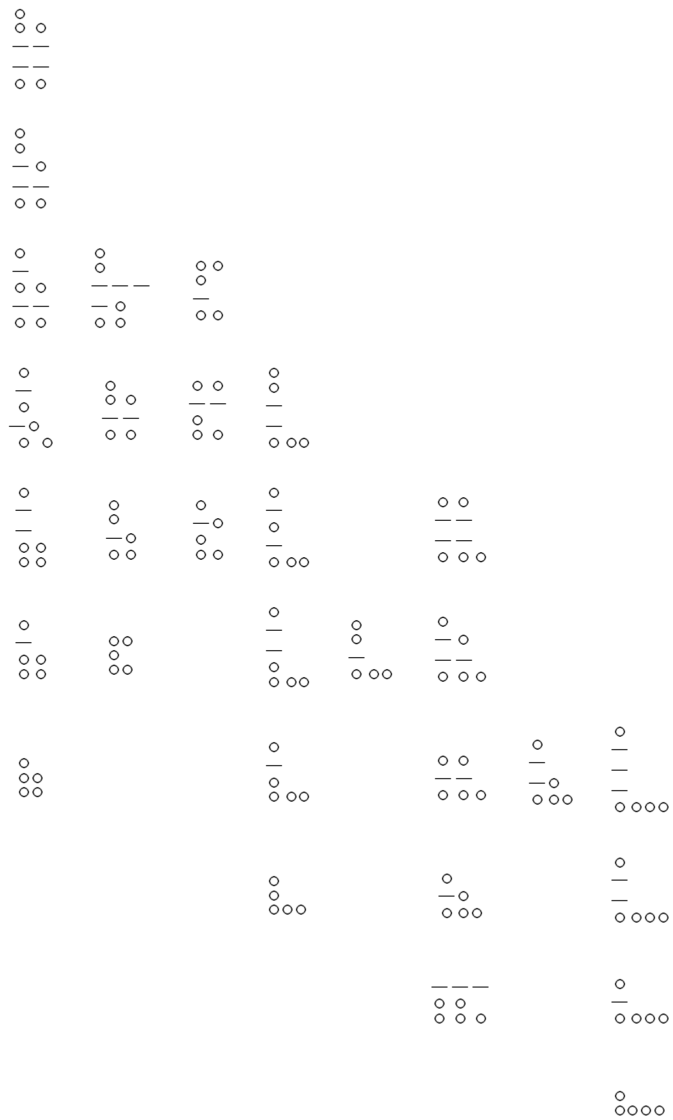
$$X_{312654} = D(\begin{smallmatrix}5\\44\\11\end{smallmatrix}) + D(\begin{smallmatrix}5\\4\\111\end{smallmatrix}) + D(\begin{smallmatrix}44\\111\end{smallmatrix}) + D(\begin{smallmatrix}5\\1111\end{smallmatrix}).$$

Aufgrund der obigen Gleichheit von $D(t_I)$ und T_I gilt also für das kommutative Schubertpolynom

$$X_{312654} = pol(\begin{array}{ll}\circ & \\ \circ & \circ \\ - & - \\ - & - \\ \circ & \circ\end{array}) + pol(\begin{array}{lll}\circ & & \\ \circ & & \\ - & - & \\ - & - & \\ \circ & \circ & \circ\end{array}) + pol(\begin{array}{lll}\circ & \circ & \\ - & - & \\ - & - & \\ \circ & \circ & \circ\end{array}) + pol(\begin{array}{llll}\circ & & & \\ - & & & \\ - & & & \\ - & & & \\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{array})$$

bzw. für das nicht kommutative Schubertpolynom die entsprechende Gleichheit mit dem Operator tab anstelle des Operators pol.

Zur Berechnung werden also folgende Weintrauben erzeugt:



3.5.9 Verbindung zu den nicht kommutativen Schubertpolynomen

Die enge Verbindung zwischen Weintrauben, die aus einer Startweintraube, die aus einem Rothediagramm entstand, erzeugt werden und reduzierten Zerlegungen eben dieser Permutation und den nicht kommutativen Schubertpolynomen werden in einer weiteren Arbeit untersucht.

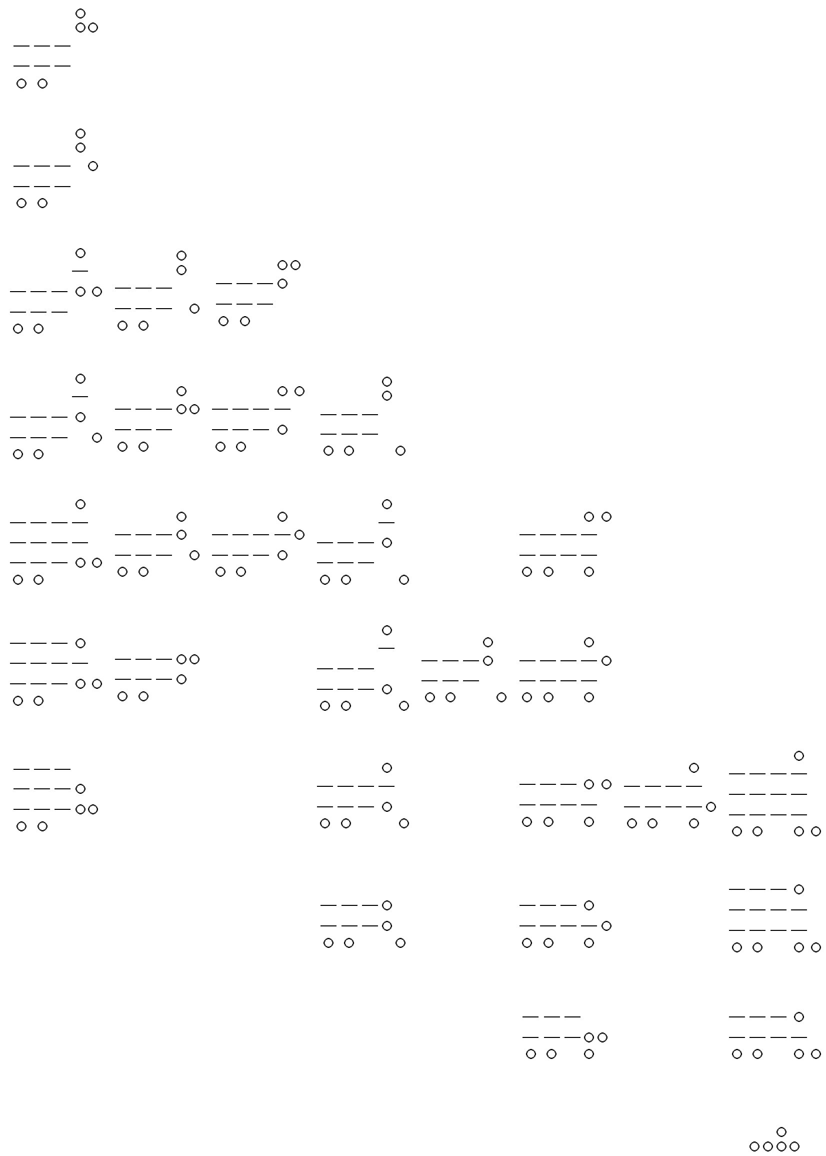
3.5.12 So gilt folgendes: Sei π eine Permutation, mit w_π haben wir die Weintraube bezeichnet, die einer Permutation mittels Rothediagramm wurde. Mit dieser Bezeichnung gilt:

$$X_\pi = tab(w_\pi)$$

was sich im kommutativen Fall so schreibt:

$$X_\pi = pol(w_\pi)$$

Die vorangegangene Berechnung des Schubertpolynoms wäre also durch folgende zu ersetzen:



Bibliography

[BGG] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand, S.I. Gelfand, Schubert Cells and Cohomology of the Spaces G/P, *Russian Math. Surv.*, **28** (1973), 1-26.

[BO] N. Bourbaki, Groupes et Algebres de Lie 4-6, Hermann, Paris, 1968.

[Com55] Stig Comet, Notations for Partitions, *Math. Tab. a. o. Aids f. Comp.*, **9** (1955), 143-146.

[De74] M. Demazure, Une nouvelle formule des caractéres, *Bull. Sc. Math.*, **98** (1974), 163-172.

[Di19] Leonard Eugene Dickson, History of the Theory of Numbers, Washington, 1919, reprint Chelsa New York, 1971.

[EG87] Paul Edelman & Curtis Greene, Balanced tableaux, *Advances in Math*, **63** (1987), 42-99.

[Ehr34] Charles Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogenes, *Annals of Mathematics*, **35** (1934), 396-443.

[JK81] Gordon James & Adalbert Kerber, The Representation Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1981

[KP87] W. Kraskiewicz & P. Pragacz, Foncteurs de Schubert, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **304** (1987), 209-212.

[Le60] D. H. Lehmer, Teaching combinatorial tricks to a Computer, *Proceedings of the 10. Symposia in Applied Mathematics*, (1960), 179-193.

[LS81.1] Alain Lascoux & Marcel Paul Schützenberger, Le monoide plaxique, *Quaderni de 'La ricera scientifica '*, **109** (1981), 129-156.

[LS82.1] Alain Lascoux & Marcel Paul Schützenberger, Polynômes de Schubert, *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, **294** (1982), 447-450.

[LS88.1] Alain Lascoux & Marcel Paul Schützenberger, Tableaux and non commutative Schubert polynomials, *Funk. Anal.*, **23** (1989) 63-64.

[LS88.2] Alain Lascoux & Marcel Paul Schützenberger, Keys & standard bases, *Invariant Theory and Tableaux*, D. Stanton ed., IMA vol. in Math. and Appl. **19**, Springer (1990) 125-144.

[Knu70] Donald E. Knuth, Permutations matrices and generalized Young tableaux, *Pacific Journal of Mathematics*, **34** (1970), 709-727.

[Knu3] Donald E. Knuth, The Art of Computer Programming, Band 3, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1973.

[Ro1800] H. A. Rothe, Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen ihrer Elemente. Erschienen in : Carl Friedrich Hindenburg: Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, Leipzig, 1800.

[Schen61]
C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences,*Canadian Journal of Mathematics*, **13** (1961), 179-191.

[Thom77] Glânffrwd P. Thomas, On a construction of Schützenberger, *Discrete Mathematics* , **17** (1977), 107-118.