Zur Moritheorie auf Kählerdreifaltigkeiten mit höchstens terminalen Singularitäten

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

Wolfgang Kronenthaler

aus Landau/Pfalz

1. Gutachter: Prof. Dr. Thomas Peternell
2. Gutachter: Prof. Dr. Frédéric Campana

Tag der Einreichung: 20. Juni 2005
Tag des Kolloquiums: 26. Juli 2005

Zusammenfassung

In ihren Arbeiten [CaPe97], [Pe98] sowie [Pe01] beginnen F. Campana und Th. Peternell mit der Entwicklung eines Analogons zur Moritheorie projektiver Varietäten für glatte kompakte Kählerdreifaltigkeiten. Dabei zeigen sie unter anderem die Existenz spezieller Kontraktionsabbildungen mit Hilfe von nicht-spaltenden Familien rationaler Kurven, die als Pendant zu den extremalen Kontraktionen der Moritheorie gedacht sind. Beabsichtigt man mit Hilfe dieser Kontraktionsabbildungen ein „minimales Modell-Programm“ für kompakte Kählerdreifaltigkeiten zu implementieren, so benötigt man die Existenz solcher Abbildungen auch für Kählerdreifaltigkeiten mit höchstens terminalen Singularitäten. Die Realisierung dieser Verallgemeinerung, aufbauend auf den Techniken aus den genannten Arbeiten (wobei die Kontraktion auf eine Kurve nur für Gorenstein-Kählerdreifaltigkeiten nachgewiesen wird), ist genau der Inhalt dieser Arbeit.

Eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählervarietät X mit höchstens terminalen Singularitäten heißt minimales Modell, falls K_X nef ist. Dabei nennt man ein holomorphes Geradenbündel L auf einem reduzierten kompakten komplexen Raum nef, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Metrik $h = h(\epsilon)$ auf L existiert, sodass eingeschränkt auf den glatten Ort des komplexen Raumes für die zugehörige Krümmung gilt $\Theta_{L,h} \geq -\epsilon\omega$, wobei ω eine fixierte, positive $(1, 1)$-Form bezeichnet.

Die Suche nach minimalen Modellen wird begleitet durch die sogenannten schwachen und starken Vermutungen: So besagt die schwache Vermutung (WMMC), dass jede kompakte Kählermannigfaltigkeit X entweder uniruled oder birational äquivalent zu einem minimalen Modell X' ist. Die starke Vermutung (SMMC) macht sogar eine Aussage, wie man das minimale Modell konstruieren kann. Danach existiert zu jeder $\mathbb{Q}$-faktoriellen kompakten Kählervarietät X mit höchstens terminalen Singularitäten, die nicht uniruled ist, eine endliche Folge divisorieller Kontraktionen und Flips, sodass X via dieser Folge birational äquivalent zu einem minimalen Modell ist. Die starke Vermutung (SMMC) ist bewiesen für projektive Varietäten der Dimension 3.

Den Gegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit bilden also $\mathbb{Q}$-faktorielle (nicht-projektive) kompakte Kählerdreifaltigkeiten X mit höchstens terminalen Singularitäten. Unterstellt wird jeweils die Existenz einer nicht-spaltenden Familie $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven mit $\dim T \geq 1$ und $(-K_X.C_t) > 0$.

Ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$ überdeckend, hat man F. Campanas geometrischen Quotienten zur Verfügung. Mit dessen Hilfe weist man nach:

Satz 1 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine überdeckende nicht-spaltende Familie rationaler Kurven. Dann ist X projektiv, es sei denn, es handelt sich um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer nicht-projektiven glatten kompakten Kählerfläche mit den Kurven C_t als Fasern.*

Ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$ nicht überdeckend und füllt stattdessen nur einen irreduziblen reduzierten Divisor $S \subsetneq X$ aus, unterscheidet man danach, ob ein Punkt $x_0 \in S$ existiert, durch den alle Kurven einer 1-dimensionalen (Teil-)Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ mit $T(x_0) \subseteq T$ verlaufen oder nicht.

Existiert solch ein Punkt x_0, gilt es, die Fläche S durch Anwendung des Grauertschen Kontraktionssatzes auf einen Punkt in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten zu kontrahieren. Besonders aufwendig gestaltet sich hierbei der Ausschluss der Möglichkeit „$(S.C_t) = 0$“. Die Grundlage aller Argumente für diesen Ausschluss bildet A. Fujikis bimeromorphe Klassifikation glatter kompakter Kählerdreifaltigkeiten in $\mathfrak{C}$. Man erhält als Ergebnis der Bemühungen:

Satz 2 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei entweder 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen, oder 2-dimensional, aber überdecke die Dreifaltigkeit X nicht.*

Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:

1. *$\varphi(S) = pt$;*

2. *Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X - S \longrightarrow Y - \{pt\}$ ist biholomorph.*

Existiert kein Punkt x_0 wie oben beschrieben, unterscheidet man weiter, ob $(S.C_t) < 0$ oder $(S.C_t) \geq 0$ gilt. Im erstgenannten Fall setzt man sich die Kontraktion auf eine Kurve (wieder in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten) zur Aufgabe. Im zweitgenannten Fall findet man entweder eine divisorielle Kontraktion auf einen Punkt oder eine Kurve mit Hilfe einer alternativen nicht-spaltenden Familie rationaler Kurven $(C'_t)_{t\in T'}$ oder X besitzt die Struktur eines Konikbündels über einer normalen Fläche W.

Aus technischen Gründen beschränke ich mich auf den Gorensteinfall:

Satz 3 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Gorenstein-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine 1-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei maximal, d.h. T sei eine (irreduzible) Komponente im Douadyraum von X, und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird.*

I) Ist $(S.C_t) < 0$*, so gilt:*

1. S *ist isomorph zu einer* $\mathbb{P}_1$*-Faserung über einer eventuell singulären Kurve* B *mit den Kurven* C_t *als Fasern (mengentheoretisch) und* $(S.C_t) = -1$*;*
2. *Es existieren eine kompakte* $\mathbb{Q}$*-faktorielle Gorensteinvarietät* Y *mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung* $\varphi : X \to Y$*, sodass gilt:*
   - *a)* $\varphi(S) = B$*;*
   - *b) Die eingeschränkte Abbildung* $\varphi|_{\{X-S\}} : X{-}S \longrightarrow Y{-}B$ *ist biholomorph.*

II) Ist $(S.C_t) \geq 0$*, so existiert entweder eine divisorielle Kontraktion auf eine kompakte* $\mathbb{Q}$*-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät* $\tilde{X}$ *mit höchstens terminalen Singularitäten oder* X *besitzt die Struktur eines Konikbündels über einer normalen Fläche* W*.*

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Für die Klassifikation einer projektiven Mannigfaltigkeit X spielt das kanonische Bündel $K_X = \det T_X^*$ die entscheidende Rolle. Besonders übersichtlich ist die Situation naturgemäß bei einer Riemannschen Fläche. Bezeichnet

$$g = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$$

deren Geschlecht, so ist K_X negativ für $g = 0$, K_X trivial für $g = 1$ und K_X ample für $g \geq 2$.

Doch nur im 1-dimensionalen Fall ist eine solch strikte Einteilung hinsichtlich der numerischen Eigenschaften des kanonischen Bündels realisierbar. Schon ab Dimension 2 ist eine generelle Zuordnung in eine der drei genannten Kategorien nicht mehr möglich. Man unterscheidet hier besser zwischen „K_X nef“ und „K_X nicht nef“. Dabei heißt ein holomorphes Geradenbündel L auf einer projektiven Mannigfaltigkeit X bekanntlich nef, falls für jede irreduzible Kurve $C \subset X$ die Bedingung $(L.C) \geq 0$ erfüllt ist.

Im Fall einer projektiven Fläche X führt diese Begriffsbildung zu folgender grober Klassifikation.

- Entweder ist K_X nef (dann kann man X mit Techniken untersuchen, die hier nicht zur Diskussion stehen),
- oder es existiert eine (-1)-Kurve und damit eine divisorielle Kontraktion auf eine projektive Fläche X' mit $b_2(X') = b_2(X) - 1$,
- oder X ist isomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$ bzw. zu einem $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer glatten Kurve.

Für eine analoge Klassifikation höher-dimensionaler projektiver Mannigfaltigkeiten liefert die Moritheorie den wesentlichen Beitrag. Mit deren Hilfe lässt sich die Struktur einer n-dimensionalen projektiven Mannigfaltigkeit X mit K_X nicht nef wie folgt beschreiben:

- Entweder es existiert ein spezieller birationaler Morphismus auf eine projektive Varietät X', genannt extremale Kontraktion,
- oder aber X erlaubt eine Faserung auf eine projektive Varietät Y mit $\dim Y \leq n-1$ und mit einer Fanomannigfaltigkeit als allgemeiner Faser.

Im erstgenannten Fall überträgt sich die Frage nach der globalen Struktur von X auf die Varietät X'. In einem gewissen Sinne ist X' auch einfacher als X, denn es gilt für die Picardzahlen $\rho(X') = \rho(X) - 1$. Unangenehmerweise kann X' jedoch singulär sein. Im Hinblick auf ein iteratives Vorgehen ist es daher notwendig, in allen Überlegungen von

Anfang an eine gewisse Kategorie von Singularitäten, genannt terminale Singularitäten, zuzulassen.

Eine $\mathbb{Q}$-faktorielle projektive Varietät X mit höchstens terminalen Singularitäten heißt minimales Modell, falls der kanonische Divisor K_X nef ist. Die Untersuchung minimaler Modelle erfordert den Einsatz völlig anderer Methoden, als dies für deren Konstruktion der Fall ist. Dabei geht es darum nachzuweisen, dass K_X semi-ample ist, d.h. dass ein Vielfaches von K_X global erzeugt ist. Dass dies immer möglich ist, prognostiziert die Abundance-Vermutung, die für 3-dimensionale projektive Varietäten verifiziert ist.

Die schwache Vermutung zu minimalen Modellen (WMMC) besagt nun, dass jede glatte projektive Varietät entweder uniruled oder birational äquivalent zu einem minimalen Modell ist. Die starke Vermutung (SMMC) macht sogar eine Aussage, wie man ein solches minimales Modell konstruiert. Danach existiert zu einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen projektiven Varietät X mit höchstens terminalen Singularitäten, die nicht uniruled ist, eine endliche Folge divisorieller Kontraktionen und Flips, sodass X via dieser Folge birational äquivalent zu einem minimalen Modell ist. Im Dreidimensionalen ist die starke Vermutung (SMMC) richtig (vergleiche [Mo88]).

Um die Vermutungen (WMMC) und (SMMC) auch für Kählervarietäten formulieren zu können, muss der Begriff „nef“ geeignet auf das Kählersetup erweitert werden. Kählervarietäten besitzen nämlich unter Umständen nur wenige Kurven, ein allgemeiner Torus, zum Beispiel, besitzt überhaupt keine. Die weiter oben angegebene Definition des Begriffs „nef“ eignet sich daher nicht mehr. Bei einem holomorphen Geradenbündel L auf einem reduzierten kompakten komplexen Raum X geht man besser wie folgt vor: Man fixiert eine positive $(1,1)$-Form ω auf X und nennt $L \in \mathrm{Pic}(X)$ nef, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Metrik $h = h(\epsilon)$ auf L existiert, sodass eingeschränkt auf den glatten Ort von X für die zugehörige Krümmung gilt: $\Theta_{L,h} \geq -\epsilon\omega$.

Geht man von einer glatten kompakten Kählerdreifaltigkeit X aus, so findet sich der aktuelle Wissensstand rund um die Konstruktion minimaler Modelle (und um deren Beschreibung) in den Arbeiten [CaPe97], [Pe98] sowie [Pe01]. Dort wird unter anderem die Existenz der benötigten Kontraktionen (sei es nun vom Fasertyp oder divisoriell) unter der Voraussetzung nachgewiesen, dass es eine nicht-spaltende Familie $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven in X gibt mit $\dim T \geq 1$ und $(-K_X.C_t) > 0$.

Auch wenn man eigentlich nur an glatten Varietäten interessiert ist, ist es für die Implementierung eines *Minimal Model Programs* unumgänglich, terminale Singularitäten zuzulassen. Die Verallgemeinerung der aus den genannten Arbeiten bekannten Ergebnisse über Kontraktionen glatter kompakter Kählerdreifaltigkeiten auf den Fall kompakter Kählerdreifaltigkeiten mit höchstens terminalen Singularitäten bilden das Ziel dieser Arbeit.

Den Gegenstand der Untersuchungen bilden also $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeiten mit höchstens terminalen Singularitäten. Unterstellt wird jeweils die Existenz einer nicht-spaltenden Familie $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven mit $\dim T \geq 1$ und $(-K_X.C_t) > 0$.

Ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$ überdeckend, so ist es das Ziel, eine Faserstruktur über einer Kählervarietät der Dimension ≤ 2 zu beschreiben.

Füllt die Familie $(C_t)_{t\in T}$ stattdessen nur einen irreduziblen reduzierten Divisor $S \subsetneq X$ aus, unterscheidet man danach, ob ein Punkt $x_0 \in S$ existiert, durch den alle Kurven einer 1-dimensionalen (Teil-)Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ mit $T(x_0) \subseteq T$ verlaufen oder nicht.

Existiert solch ein Punkt x_0, gilt es, die Fläche S auf einen Punkt in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten zu kontrahieren.

Existiert kein solcher Punkt x_0, unterscheidet man weiter, ob $(S.C_t) < 0$ oder $(S.C_t) \geq 0$ gilt. Im erstgenannten Fall setzt man sich die Kontraktion auf eine Kurve (wieder in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten) zur Aufgabe. Im zweitgenannten Fall findet man entweder eine divisorielle Kontraktion auf einen Punkt oder eine Kurve mit Hilfe einer alternativen nicht-spaltenden Familie rationaler Kurven $(C'_t)_{t\in T'}$ oder X besitzt die Struktur eines Konikbündels über einer normalen Fläche W.

Im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wird die Frage nach der Konstruktion geeigneter Familien rationaler Kurven in einer kompakten Kählerdreifaltigkeit X mit K_X nicht nef. Die Antwort auf diese Frage stellt selbst im projektiven Kontext eine wesentliche Hürde dar, für deren Überwindung man bisher auf Charakteristik p-Techniken angewiesen ist. Genauso bleibt die Frage nach dem Nachweis der Kählereigenschaft für eine durch eine divisorielle Kontraktion gewonnene Varietät Y unbeantwortet, weil hierfür mitunter die Wahl der Familie $(C_t)_{t\in T}$ mit Hilfe eines Kegelsatzes in das Kalkül einbezogen werden muss. Erste Ergebnisse zu beiden Problemkreisen findet man in [Pe01].

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Nach einer Einführung in die verwendete Notation und einige für die Arbeit grundlegende Resultate, die Kapitel 1 einnimmt, stelle ich in Kapitel 2 eine Reihe von Projektivitätskriterien zusammen, auf die ich im weiteren Verlauf der Arbeit wiederholt zurückgreifen werde.

In Kapitel 3 steht anschließend die Untersuchung überdeckender nicht-spaltender Familien rationaler Kurven auf dem Programm. Hierbei wird es entweder das Ziel sein, auf Projektivität der Dreifaltigkeit X zu plädieren oder eine Kontraktion vom Fasertyp zu konstruieren. Vor allem mit Hilfe des geometrischen Quotienten F. Campanas konnte ich nachweisen:

Satz 1 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine überdeckende nicht-spaltende Familie rationaler Kurven.*

Dann ist X projektiv, es sei denn, es handelt sich um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer nicht-projektiven glatten kompakten Kählerfläche mit den Kurven C_t als Fasern.

Kapitel 4 ist dem Studium 1-dimensionaler nicht-spaltender Familien $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven gewidmet, die sich durch die zusätzliche Eigenschaft auszeichnen, dass ein Punkt $x_0 \in X$ existiert, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Natürlich überdecken die Kurven einer 1-dimensionalen Familie die Dreifaltigkeit X nicht und füllen stattdessen nur eine (irreduzible reduzierte) Fläche $S \subsetneq X$ aus. Deshalb bilden die in diesem vierten Kapitel erarbeiteten Ergebnisse insbesondere die Grundlage für Kapitel 5, welches sich mit 2-dimensionalen nicht-spaltenden Familien rationaler Kurven beschäftigt, die X nicht überdecken. Ziel ist in beiden Kapiteln die Kontraktion der ausgeschnittenen Fläche S auf einen normalen Punkt mit Hilfe des Grauertschen Kontraktionssatzes. Besonders aufwendig gestaltet sich hierbei der Ausschluss der Möglichkeit „$(S.C_t) = 0$“. Die Grundlage aller Argumente für diesen Ausschluss bildet A. Fujikis bimeromorphe Klassifikation glatter kompakter Kählerdreifaltigkeiten in $\mathfrak{C}$. Man erhält als Ergebnis der Bemühungen:

Satz 2 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei entweder 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen, oder 2-dimensional, aber überdecke die Dreifaltigkeit X nicht.*

Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:

1. *$\varphi(S) = pt$;*
2. *Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-\{pt\}$ ist biholomorph.*

Schließlich wird auf 1-dimensionale nicht-spaltende Familien $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven mit der Eigenschaft eingegangen, dass kein ausgezeichneter Punkt existiert, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Dieser einzig noch verbliebene Fall stellt das schwierigste Szenario dar, denn anders als in der Situation aus Satz 2 lässt sich die Möglichkeit $(S.C_t) \geq 0$ jetzt nicht mehr generell ausschließen. Dies liegt daran, dass X die Struktur eines Konikbündels über einer normalen Fläche W besitzen kann, wobei die Familie $(C_t)_{t\in T}$ durch Deformation einer irreduziblen Komponente einer singulären Faser dieses Bündels erzeugt wurde.

Gilt hingegen $(S.C_t) < 0$, so hat man sich wie zu erwarten mit der Kontraktion der Fläche S auf eine Kurve zu befassen.

Aus technischen Gründen beschränke ich mich in diesem abschließenden Kapitel 6 auf den Gorensteinfall:

Satz 3 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Gorenstein-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine 1-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei maximal, d.h. T sei eine (irreduzible) Komponente im Douadyraum von X, und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird.*

I) Ist $(S.C_t) < 0$, so gilt:

1. *S ist isomorph zu einer $\mathbb{P}_1$-Faserung über einer eventuell singulären Kurve B mit den Kurven C_t als Fasern (mengentheoretisch) und $(S.C_t) = -1$;*
2. *Es existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Gorensteinvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:*
   a) $\varphi(S) = B$;
   b) Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-B$ ist biholomorph.

II) Ist $(S.C_t) \geq 0$, so existiert entweder eine divisorielle Kontraktion auf eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät X' mit höchstens terminalen Singularitäten oder X besitzt eine Konikbündelstruktur über einer normalen Varietät W.

In den ersten beiden Jahren meiner Promotion wurde ich finanziell durch ein Stipendium der Landesgraduiertenförderung unterstützt. Die folgende Zeit war ich als Mitarbeiter der Universität Bayreuth im Rahmen des DFG-Forschungsschwerpunktprojekts „Globale Methoden in der komplexen Geometrie“ beschäftigt.

Ich möchte mich besonders bei Herrn Prof. Dr. Thomas Peternell für die Themenstellung und die intensive Betreuung bis zum Abschluss der Arbeit bedanken. Mein Dank gilt ebenfalls den Mitarbeitern der Lehrstühle Mathematik I und VIII der Universität Bayreuth für die wertvollen Diskussionen und die anregende Arbeitsatmosphäre.

1 Notation und Vorbemerkungen

Ich beginne mit einer Einführung in die für diese Arbeit relevanten Begrifflichkeiten. Bei dieser Gelegenheit werde ich meine Notation festlegen und das eine oder andere im jeweiligen Kontext wichtige Resultat zitieren.

1.1 Kählervarietäten

Notation 1.1 Unter einer kompakten (komplexen) Varietät verstehe man einen irreduziblen und reduzierten kompakten komplexen Raum.

Definition 1.2 *Sei X ein komplexer Raum und ω eine reelle C^∞-Form vom Typ $(1,1)$ auf X.*

1. *Die Form ω heißt hermitesch, falls es eine offene Überdeckung $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von X und Einbettungen $\iota_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow V_\alpha$ in offene Gebiete $V_\alpha \subsetneq \mathbb{C}^{n_\alpha}$ sowie positive C^∞-Formen ω_α vom Typ $(1,1)$ auf V_α gibt, sodass gilt*

$$\omega|_{U_\alpha} = \iota_\alpha^*(\omega_\alpha).$$

2. *Eine hermitesche Form ω heißt Kählerform auf X, falls alle ω_α d-geschlossen sind.*

Notation 1.3 Eine Kählervarietät bezeichne eine (komplexe) Varietät mit einer Kählerform wie in Definition 1.2. Außerdem bezeichne eine Kählerdreifaltigkeit eine komplexe Kählervarietät der Dimension 3.

Ein komplexer Unterraum eines Kählerraums ist wieder ein Kählerraum, nicht notwendig jedoch das meromorphe Bild eines Kählerraums. Dieser Umstand führt zu folgender Begriffsbildung.

Definition 1.4 *Man sagt, ein kompakter komplexer Raum X liegt in (Fujikis Klasse) $\mathfrak{C}$, falls X_{red} bimeromorph äquivalent zu einer kompakten Kählermannigfaltigkeit ist.*

Komplexe Räume in Fujikis Klasse $\mathfrak{C}$ werden später bei der Verwendung bestimmter Klassifikationsergebnisse eine tragende Rolle einnehmen. Vorerst helfen sie bei der Einführung von Familien rationaler Kurven.

1.2 Familien rationaler Kurven

Satz und Definition 1.5 *Sei X ein komplexer Raum. Dann existieren ein komplexer Raum $\mathcal{D}(X)$ und ein abgeschlossener komplexer Unterraum $A \subsetneq \mathcal{D}(X) \times X$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *A ist flach und eigentlich über $\mathcal{D}(X)$.*

2. *Zu jedem komplexen Raum V und jedem abgeschlossenen komplexen Unterraum $B \subsetneq V \times X$, sodass B flach und eigentlich über V ist, existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $f : V \to \mathcal{D}(X)$ mit $B \simeq V \times_{\mathcal{D}(X)} A$.*

Der komplexe Raum $\mathcal{D}(X)$ heißt Douadyraum von X.

Beweis. Siehe [Do66] oder für einen Überblick etwa [GrPeRe94, VIII, §1]. □

Im projektiven Kontext spricht man anstelle von Douadyraum vom Hilbertschema. Damit zum Grund für die Einführung Fujikis Klasse $\mathfrak{C}$ in Definition 1.4:

Satz 1.6 *Sei X ein kompakter komplexer Raum in $\mathfrak{C}$. Dann ist auch jede irreduzible Komponente des Douadyraums kompakt und befindet sich in $\mathfrak{C}$.*

Beweis. Siehe [Ca80], [Fu78] und [Fu82]. □

Es folgt die Definition des zentralen Begriffs dieser Arbeit.

Definition 1.7 *Sei X ein kompakter komplexer Raum in $\mathfrak{C}$.*

1. *Eine Familie $(C_t)_{t \in T}$ rationaler Kurven in X ist gegeben durch ihren Graphen*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\ T & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

mit kompakten komplexen Varietäten T sowie $\mathcal{C} \subsetneq T \times X$ und holomorphen Abbildungen

$$q : \mathcal{C} \to T \quad \text{sowie} \quad p : \mathcal{C} \to X,$$

sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

a) $C_t = p(q^{-1}(t))$,

b) *jede Faser von q ist eine rationale Kurve, die allgemeine Faser von q ist irreduzibel und reduziert,*

c) *für alle $t \in T$ ist die eingeschränkte Abbildung $p|_{q^{-1}(t)}$ ein generischer Isomorphismus und*

d) *für alle $t_1, t_2 \in T$ mit $t_1 \neq t_2$ gilt: $p(q^{-1}(t_1)) \neq p(q^{-1}(t_2))$.*

2. *Ist $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt und die Menge*

$$T^*(x_0) := q(p^{-1}(x_0)) = \{t \in T \mid x_0 \in C_t\}$$

nicht endlich oder gar leer, so bezeichnet

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^*(x_0) \arrow[r, "p_{x_o}"] \arrow[d, "q_{x_o}"'] & X \ni x_0 \\ T^*(x_0) \end{tikzcd}$$

den Graphen der Teilfamilie $(C_t)_{t\in T^*(x_0)}$ aller Kurven durch den Punkt $x_0 \in X$.

3. *Eine Familie $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven heißt nicht-spaltend, falls* ***alle*** *Kurven C_t irreduzibel und generisch reduziert sind. Sie heißt d-dimensional, falls der Parameterraum T die Dimension d besitzt, und maximal, falls T eine Komponente im Douadyraum $\mathcal{D}(X)$ darstellt. Schließlich heißt die Familie $(C_t)_{t\in T}$ überdeckend, falls die Abbildung $p : \mathcal{C} \to X$ surjektiv ist.*

Man beachte, dass der Parameterraum T in der vorliegenden Arbeit stets als irreduzibel und reduziert vorausgesetzt werden wird. Im Zusammenhang mit der Definition einer Teilfamilie durch einen Punkt $x_0 \in X$ gilt es deshalb zu berücksichtigen, dass man eventuell erst durch die Auswahl einer irreduziblen Komponente $T(x_0)$ von $T^*(x_0)$ eine Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ rationaler Kurven im strengen Sinne der Definition erhält.

Wichtig für die „Praxis“ ist

Bemerkung 1.8 Es sei $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven in einem kompakten komplexen Raum X in $\mathfrak{C}$. Anstelle des Graphen (*) aus Definition 1.7 betrachtet man meist den normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "\tilde{q}"'] & X \\ \widetilde{T} \end{tikzcd} \tag{**}$$

der Familie $(C_t)_{t\in T}$. Diesen gewinnt man aus (*), indem man zunächst den Parameterraum T normalisiert (mit Ergebnis $\widetilde{T}$) und anschließend ebenfalls das Faserprodukt $\widetilde{T}\times_T \mathcal{C}$ (mit Ergebnis $\widetilde{\mathcal{C}}$). Man erhält auf diese Weise das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{C}} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{q}"'] \arrow[rrr, bend left, "\tilde{p}"] & \widetilde{T}\times_T \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"'] & X \\ \widetilde{T} \arrow[r, "\simeq"] & \widetilde{T} \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

inklusive der induzierten Abbildungen

$$\tilde{q} : \widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{T} \quad \text{sowie} \quad \tilde{p} : \widetilde{\mathcal{C}} \to X.$$

$\boxdot$

Die entscheidende Besonderheit des normalisierten Graphen (**) aus Bemerkung 1.8 besteht darin, dass es sich bei $\tilde{q} : \widetilde{\mathcal{C}} \to \widetilde{T}$ um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel handelt (siehe etwa [Ko96, II, Theorem 2.8]).

Auch wenn beim normalisierten Graphen (**) die vierte Eigenschaft aus Definition 1.7 im Allgemeinen nurmehr generisch erfüllt ist, erweist sich der Normalisierungsschritt als äußerst nützlich, weil der Umgang mit $\mathbb{P}_1$-Bündeln sehr angenehm ist. So steht beispielsweise die folgende hilfreiche Aussage zur Verfügung:

Lemma 1.9 *Sei S eine Regelfläche über der glatten Kurve B.*

i) Eine Kurve $C \subset S$ mit $(C^2) < 0$ ist im Falle der Existenz eindeutig bestimmt.

ii) Für jede irreduzible Kurve $C \subset S$, die nicht ein Schnitt der Projektion $S \to B$ ist, gilt: $(C^2) \geq 0$.

Beweis. Siehe zum Beispiel [MiPe97, I.I, Lemma 4.8]. $\square$

Normalerweise werde ich für Regelflächen die Notation aus [Ha77, V.2] verwenden und darauf im Einzelnen nicht mehr gesondert hinweisen.

Weil es grundsätzlich möglich ist, den Graphen einer nicht-spaltenden Familie rationaler Kurven zu normalisieren, werden der Graph (*) und der normalisierte Graph (**) in ihrer Notation ab jetzt nicht mehr unterschieden werden. Es wird, falls notwendig, jeweils aus dem Kontext hervorgehen, welcher der „beiden“ Graphen gemeint ist.

Ich schließe diesen Abschnitt mit einigen Gedanken zum Liften von Familien rationaler Kurven.

Bemerkung 1.10 Sei X ein kompakter komplexer Raum in $\mathfrak{C}$ und $(C_t)_{t \in T}$ eine 1-dimensionale Familie rationaler Kurven in X. Es sei $S := \bigcup_{t \in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) kompakte Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t \in T}$ ausgefüllt wird, und

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \subseteq X \\ T & \end{tikzcd} \qquad (G)$$

der zugehörige normalisierte Graph.

Man fasse die Familie $(C_t)_{t\in T}$ als eine Familie in S auf (S ist als kompakte Untervarietät von X ebenfalls in $\mathfrak{C}$) und betrachte die beiden folgenden Typen bimeromorpher holomorpher Abbildungen nach S, nämlich

i) die Normalisierungsabbildung $\nu : \tilde{S} \to S$ sowie

ii) (unter der Voraussetzung, dass S normal ist) die Aufblasung in einem Punkt mit anschließender Normalisierung $\sigma : \hat{S} \to S$.

Ziel ist die Konstruktion geliftteter Familien rationaler Kurven

$$(\tilde{C}_t)_{t\in T} \text{ in } \tilde{S} \quad \text{sowie} \quad (\hat{C}_t)_{t\in T} \text{ in } \hat{S}.$$

Diese sollen sich dadurch auszeichnen, dass für alle $t \in T$ gilt: $\nu(\tilde{C}_t) = C_t$ bzw. $\sigma(\hat{C}_t) = C_t$.

Zu i) Es sei $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung der Fläche S. Da $\mathcal{C}$ glatt ist, existiert aufgrund der universellen Eigenschaft der Normalisierung eine holomorphe Abbildung $\tilde{p} : \mathcal{C} \to \tilde{S}$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{S} \arrow[d, "\nu"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\tilde{p}"] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \\ T & \end{tikzcd} \tag{$\tilde{G}$}$$

kommutiert. Damit ist die gesuchte Familie rationaler Kurven $(\tilde{C}_t)_{t\in T}$ in $\tilde{S}$ bereits gefunden. Sie wird gegeben durch $\tilde{C}_t = \tilde{p}(q^{-1}(t))$.

Zu ii): Es sei $\sigma : \hat{S} \to S$ die Aufblasung in einem normalen Punkt mit anschließender Normalisierung und $p_0 : \mathcal{C} \dashrightarrow \hat{S}$ die induzierte meromorphe Abbildung. Der Unbestimmtheitsort von p_0 besteht aus endlich vielen (glatten) Punkten. Durch sukzessives Aufblasen dieser Punkte erhält man eine glatte Fläche $\hat{\mathcal{C}}$ und holomorphe Abbildungen

$$\hat{q} : \hat{\mathcal{C}} \to T \quad \text{sowie} \quad \hat{p} : \hat{\mathcal{C}} \to \hat{S},$$

sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{C}} \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\hat{q}"'] & \hat{S} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, dashed, "p_o"] \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & S \\ T & \end{tikzcd} \tag{$\hat{G}$}$$

kommutiert. Dieses Diagramm $(\hat{G})$ definiert in naheliegender Weise die gesuchte Familie rationaler Kurven $(\hat{C}_t)_{t\in T}$ in $\hat{S}$ durch $\hat{C}_t := \hat{p}(\hat{q}^{-1}(t))$.

Man beachte noch, dass eine nicht-spaltende Familie beim Liften in Situation ii) nicht notwendig nicht-spaltend bleibt, wohl aber beim Liften in Situation i). $\boxdot$

1.3 Die Gorensteinbedingung und terminale Singularitäten

Definition 1.11 *Sei X eine normale Varietät und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Bezeichnet $\mathcal{F}^* := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ die zu $\mathcal{F}$ duale Garbe, so heißt $\mathcal{F}$ reflexiv, falls der natürliche Homomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{**}$ ein Isomorphismus ist.*

Lemma 1.12 *Sei X eine normale Varietät der Dimension $n \geq 2$ und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Dann sind äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist reflexiv vom Rang 1;

ii) Ist $X_0 \subseteq X$ eine nicht-singuläre offene Untervarietät von X mit der Eigenschaft, dass $X - X_0$ in X eine Kodimension ≥ 2 besitzt, und bezeichnet $\iota_0 : X_0 \hookrightarrow X$ die Inklusion, dann ist $\mathcal{F}|_{X_0}$ invertierbar und $\mathcal{F} = (\iota_0)_*(\mathcal{F}|_{X_0})$.

Beweis. Siehe beispielsweise [Ha80, Proposition 1.6]. $\square$

Mit Hilfe der Charakterisierung reflexiver Garben aus Lemma 1.12 lässt sich die Korrespondenz von Cartierdivisoren (modulo linearer Äquivalenz „$\sim$") zu Geradenbündeln (modulo Isomorphie „$\simeq$") auf eine Korrespondenz von Weildivisoren (modulo „$\sim$") zu reflexiven Garben vom Rang 1 (modulo „$\simeq$") erweitern:

Bemerkung 1.13 Sei X eine normale Varietät, $X_{reg} \subseteq X$ der reguläre Anteil von X und $\iota : X_{reg} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Dann existiert eine Bijektion

$$\{\text{Weildivisoren auf } X\}/_{\sim} \xrightarrow{\delta} \{\text{reflexive Garben vom Rang 1 auf } X\}/_{\simeq}$$

via folgender Abbildungen:

i) Ist $D \subsetneq X$ ein Weildivisor und $\mathcal{O}_{X_{reg}}(D_{reg})$ das zu $D_{reg} := D|_{X_{reg}}$ gehörige Geradenbündel, so sei die zu D assoziierte Garbe $\mathcal{O}_X(D)$ gegeben durch

$$\mathcal{O}_X(D) := \iota_*(\mathcal{O}_{X_{reg}}(D_{reg})).$$

Dann ist $\mathcal{O}_X(D)$ tatsächlich reflexiv (und vom Rang 1) nach Lemma 1.12.

ii) Ist umgekehrt $\mathcal{F}$ eine reflexive Garbe vom Rang 1 auf X, so ist $\mathcal{F}|_{X_{reg}}$ lokal frei und definiert daher einen Cartierdivisor $D_{reg} \subsetneq X_{reg}$. Als zu $\mathcal{F}$ assoziierten Weildivisor D nehme man den Abschluss von D_{reg} in X.

Die Bijektion δ induziert einen $\mathbb{Z}$-Modulisomorphismus, wobei die $\mathbb{Z}$-Modulstruktur auf der rechten Seite gegeben wird durch $\mathcal{F}_1 \hat{\otimes} \mathcal{F}_2 = [\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2]^{**}$. $\boxdot$

Die Tatsache, dass man zu zwei Weildivisoren $D_1, D_2 \subsetneq X$ im Allgemeinen nur eine Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_1 + D_2) = [\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2)]^{**}$$

zur Verfügung hat, die weder injektiv noch surjektiv sein muss, wird sich später (in Abschnitt 6.1) noch als sehr unangenehm erweisen. Aber zunächst weiter im Programm dieses Abschnitts mit der Einführung des kanonischen Divisors K_X und der kanonischen Garbe ω_X.

Notation 1.14 Sei $m \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl. Zu einer reflexiven Garbe $\mathcal{F}$ auf einer normalen Varietät X sei

$$\mathcal{F}^{[m]} := [\mathcal{F}^{\otimes m}]^{**}.$$

Insbesondere sei für einen Weildivisor $D \subsetneq X$

$$\mathcal{O}_X(mD) := \mathcal{O}_X(D)^{[m]} = [\mathcal{O}_X(D)^{\otimes m}]^{**}.$$

Definition 1.15 *Sei X eine normale Varietät der Dimension n, $X_{reg} \subseteq X$ der reguläre Anteil und $\iota : X_{reg} \hookrightarrow X$ die Inklusion.*

1. *Der kanonische Divisor K_X von X ist ein Weildivisor in X mit der Eigenschaft*

$$\mathcal{O}_{X_{reg}}(K_X) = \Omega^n_{X_{reg}}.$$

2. *Die kanonische Garbe ω_X ist gegeben durch (die reflexive Garbe)*

$$\omega_X := \mathcal{O}_X(K_X).$$

Bemerkung 1.16 In der Situation aus Definition 1.15 gilt:

i) Wegen $\operatorname{codim}_X(X - X_{reg}) \geq 2$ existiert K_X und ist bis auf lineare Äquivalenz eindeutig bestimmt.

ii) Da $\omega_X^{[r]} = \mathcal{O}_X(rK_X)$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ reflexiv ist, gilt: $\omega_X^{[r]} = \iota_*((\Omega^n_{X_{reg}})^{\otimes r})$.

iii) Ist $\omega_X^\bullet$ der dualisierende Komplex von X, so gilt $\omega_X = H^{-n}(\omega_X^\bullet)$.

Damit komme ich endlich zur Gorensteinbedingung:

Definition 1.17 *Eine normale Varietät X heißt Cohen-Macaulay, wenn der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein Cohen-Macaulayring im Sinne der kommutativen Algebra (etwa [Ma90]) ist. In analoger Weise heißt X Gorenstein, wenn $\mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in X$ ein Gorensteinring ist.*

Proposition 1.18 *Für eine normale Varietät X der Dimension $n \geq 2$ sind äquivalent:*

i) X ist Gorenstein.

ii) X ist Cohen-Macaulay und die kanonische Garbe ω_X ist invertierbar.

Beweis. Siehe etwa [Is86, Proposition 1.3]. □

Definition 1.19 *Eine normale Varietät X heißt $\mathbb{Q}$-Gorenstein, falls es eine natürliche Zahl r gibt, sodass rK_X ein Cartierdivisor ist. Die Zahl*

$$r_X := \min\{r \in \mathbb{N} \mid rK_X \textit{ ist Cartier}\}$$

heißt dann Index von X.

Ist X $\mathbb{Q}$-Gorenstein und r_X der Index von X, so nennt man X auch r_X-Gorenstein.

Man beachte, dass eine $\mathbb{Q}$-Gorensteinvarietät, anders als eine Gorensteinvarietät, nicht Cohen-Macaulay zu sein braucht. Insbesondere ist eine 1-Gorensteinvarietät nicht notwendig Gorenstein.

Definition 1.20 *Eine normale Varietät X heißt*

1. *faktoriell, wenn jeder Weildivisor auch ein Cartierdivisor ist, und*
2. *$\mathbb{Q}$-faktoriell, falls es zu jedem Weildivisor $D \subsetneq X$ eine natürliche Zahl $r = r(D)$ gibt, sodass rD ein Cartierdivisor ist.*

Definition 1.21 *Eine normale Varietät X besitzt höchstens terminale (bzw. kanonische) Singularitäten, falls gilt:*

1. *X ist $\mathbb{Q}$-Gorenstein.*
2. *Es existiert eine Desingularisierung $\sigma : \hat{X} \to X$ mit*

$$K_{\hat{X}} = \sigma^* K_X + \sum a_i E_i \quad \textit{und} \quad a_i \in \mathbb{Q}^+ \textit{ (bzw. } a_i \in \mathbb{Q}_0^+\textit{)},$$

wobei die E_i die irreduziblen Komponenten des exzeptionellen Divisors bezüglich σ bezeichnen.

Man nennt die Zahl a_i Diskrepanz bei E_i.

Es ist zu bemerken, dass für eine normale Varietät X mit höchstens terminalen (bzw. kanonischen) Singularitäten jede Desingularisierung die zweite Bedingung aus Definition 1.21 erfüllt. Genauso sind die Diskrepanzen a_i aus Definition 1.21 unabhängig von der Wahl der Desingularisierung.

Grundlegend für den Gorensteinfall (und eine sehr gute Möglichkeit, die soeben eingeführten Begriffe in eine Beziehung zu setzen) ist

Lemma 1.22 *Eine $\mathbb{Q}$-faktorielle Gorensteindreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten ist faktoriell.*

Beweis. Siehe [Ka88, Lemma 5.1]. □

Folgerung 1.23 *In einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen kompakten Kählerdreifaltigkeit X mit höchstens terminalen Singularitäten ist jeder irreduzible reduzierte Weildivisor $S \subsetneq X$ Cohen-Macaulay.*

Beweis. Außerhalb der (Nicht-Gorenstein-)Singularitäten von X ist die Behauptung klar, denn dort ist $S \subsetneq X$ ein lokal vollständiger Durchschnitt und als solcher ist S Cohen-Macaulay. Sei also $x_0 \in S$ derart gewählt, dass $x_0 \in X$ eine Singularität vom Index > 1 ist und $U = U(x_0) \subseteq X$ eine offene Umgebung, die keine weitere Singularität von X enthält. (Man beachte hierfür, dass terminale Singularitäten höchstens in Kodimension 3 auftreten.) Ohne Einschränkung gelte ab jetzt $X = U$.

Nach [Re83, Main Theorem 0.6 I) und Theorem 1.1] existiert eine endliche Galoisüberlagerung

$$\pi : \tilde{X} \to X \simeq \tilde{X}/G$$

mit einer endlichen zyklischen Gruppe G und unverzweigt über dem glatten Ort von X, sodass $\tilde{X}$ höchstens terminale Gorensteinsingularitäten aufweist. Da $\tilde{X}$ genau wie X $\mathbb{Q}$-faktoriell ist, ist $\tilde{X}$ nach Lemma 1.22 faktoriell. Bezeichnet deshalb $\mathcal{I} = \mathcal{I}_S$ die Idealgarbe von $S \subsetneq X$,

$$\tilde{\mathcal{I}} := rad(im(\pi^*\mathcal{I} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}})) \subsetneq \mathcal{O}_{\tilde{X}}$$

das Radikalideal des analytischen Urbilds und $\tilde{S} \subsetneq \tilde{X}$ den Weildivisor in $\tilde{X}$, gegeben durch $\tilde{\mathcal{I}}$, so ist $\tilde{S}$ ein Cartierdivisor und damit insbesondere Cohen-Macaulay.

Es bezeichne noch $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ den eindeutig bestimmten Punkt mit $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Man setze

$$\tilde{R} := \mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}_0} \quad \text{und} \quad \tilde{I} := \tilde{\mathcal{I}}_{\tilde{x}_0}.$$

Da $\tilde{R}/\tilde{I}$ Cohen-Macaulay ist, ist dies auch $(\tilde{R}/\tilde{I})^G$ nach [Ei95, Ex. 18.14]. Da weiterhin $\tilde{I} \subsetneq \tilde{R}$ invariant unter G ist, gilt

$$\tilde{R}^G/(\tilde{I} \cap \tilde{R}^G) \cong (\tilde{R}/\tilde{I})^G.$$

Wegen $\tilde{R}^G = \mathcal{O}_{X,x_0}$ bleibt also zu zeigen, dass für $I := \mathcal{I}_{x_0}$ die Bedingung $I = \tilde{I} \cap \tilde{R}^G$ erfüllt ist. Sicherlich gilt $I \subseteq \tilde{I} \cap \tilde{R}^G$. Da S reduziert ist, gilt jedoch auch $\tilde{I} \cap \tilde{R}^G \subseteq I$ nach Hilberts Nullstellensatz. Damit ist

$$\tilde{R}^G/I \cong \tilde{R}^G/(\tilde{I} \cap \tilde{R}^G) \cong (\tilde{R}/\tilde{I})^G$$

Cohen-Macaulay und die Behauptung ist bewiesen. □

Neben terminalen Singularitäten werden gelegentlich noch rationale und elliptische Singularitäten auftreten.

Definition 1.24 *Sei X eine normale Varietät der Dimension n. Ein singulärer Punkt $x \in X$ heißt*

1. *rationale Singularität, falls eine Desingularisierung $\sigma : \hat{X} \to X$ von $x \in X$ existiert, sodass für alle $1 \leq i \leq n-1$ gilt*

$$R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\hat{X}} = 0.$$

2. *elliptische (Gorenstein-)Singularität, falls $x \in X$ ein Gorensteinpunkt ist und eine Desingularisierung $\sigma : \hat{X} \to X$ von $x \in X$ existiert mit*

$$R^i \sigma_* \mathcal{O}_{\hat{X}} = 0 \quad \textit{für alle} \quad 1 \leq i \leq n-2 \quad \textit{und} \quad R^{n-1} \sigma_* \mathcal{O}_{\hat{X}} \cong \mathbb{C}.$$

Wie die Definition terminaler und kanonischer Singularitäten ist auch die Definition rationaler und elliptischer Singularitäten unabhängig von der Wahl der Desingularisierung.

Rationale Singularitäten besitzen viele angenehme Eigenschaften. So sind rationale Singularitäten beispielsweise Cohen-Macaulay (siehe etwa [Re87, 3.19] für den für meine Zwecke ausreichenden, dreidimensionalen Fall). Entsprechend hilfreich ist es zu wissen:

Proposition 1.25 *Kanonische Singularitäten sind rational.*

Beweis. Siehe [El81] oder [Fl81]. □

1.4 Die Kontraktionssätze von Grauert, Bingener und Fujiki

Die in diesem Abschnitt zusammengefassten Sätze von H. Grauert, J. Bingener und A. Fujiki bilden die Grundlage für die spätere Konstruktion divisorieller Kontraktionen.

Definition 1.26 *Sei $\psi : A \to B$ ein eigentlicher Morphismus komplexer Räume und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_A$-Modulgarbe.*

1. *Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt ψ-ample, wenn eine der folgenden zueinander äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

   a) *Für jede kohärente $\mathcal{O}_A$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ und jedes Kompaktum $K \subseteq B$ existiert eine natürliche Zahl μ_0, sodass der natürliche Morphismus*

   $$\psi^*\psi_*(\mathcal{G} \otimes S^\mu(\mathcal{F})) \longrightarrow \mathcal{G} \otimes S^\mu(\mathcal{F})$$

   für alle $\mu \geq \mu_0$ surjektiv über K ist.

   b) *Für jede kohärente $\mathcal{O}_A$-Modulgarbe $\mathcal{G}$ und jedes Kompaktum $K \subseteq B$ existiert eine natürliche Zahl μ_0, sodass für alle $\mu \geq \mu_0$ und $q \geq 1$ gilt:*

   $$R^q\psi_*(\mathcal{G} \otimes S^\mu(\mathcal{F}))|_K = 0.$$

2. *Die Garbe $\mathcal{F}$ heißt ample, wenn sie Bedingung 1a) oder 1b) erfüllt und $\psi : A \to B$ die Abbildung auf einen Punkt ist.*

Satz 1.27 (Grauert) *Sei X ein komplexer Raum und $A \subsetneq X$ ein kompakter komplexer Unterraum, definiert durch die Idealgarbe $\mathcal{I}_A$. Der Raum A liege nirgends dicht in X und $\mathcal{I}_A/\mathcal{I}_A^2$ sei ample. Dann ist $A \subsetneq X$ exzeptionell, d.h. es existieren ein (normaler) komplexer Raum Y und eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:*

$$\varphi(A) = pt \quad \text{und} \quad \varphi|_{\{X-A\}} : X - A \xrightarrow{\simeq} Y - \{pt\} \text{ ist biholomorph.}$$

Beweis. Siehe [Gr62, §3, Satz 8]. □

Satz 1.28 (Bingener) *Sei X ein komplexer Raum, $A = V(\mathcal{I})$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $\psi : A \to B$ eine eigentliche holomorphe Abbildung auf einen komplexen Raum B mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ ist ψ-ample.*

2. *Für **alle** $\mu \in \mathbb{N}$ ist die natürliche Abbildung*

   $$\alpha_\mu : \psi_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^\mu) \times_{\psi_*(\mathcal{O}_A)} \mathcal{O}_B \longrightarrow \mathcal{O}_B$$

   aus dem Diagramm

   $$\begin{array}{ccc} \psi_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^\mu) \times_{\psi_*(\mathcal{O}_A)} \mathcal{O}_B & \longrightarrow & \mathcal{O}_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \psi_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^\mu) & \longrightarrow & \psi_*(\mathcal{O}_A) \end{array} \qquad (D_B)$$

   surjektiv.

Dann existieren ein (normaler) komplexer Raum Y und eine Modifikation $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:

$$\varphi|_A = \psi \quad \textit{und} \quad \varphi|_{\{X-A\}} : X - A \xrightarrow{\simeq} Y - B \textit{ ist biholomorph.}$$

Beweis. Siehe [Bi81, Folgerung 8.2]. □

Bemerkung 1.29 *Satz 1.28 bleibt richtig, falls man Bedingung 2. ersetzt durch*

2'. Für ***alle*** $\mu \in \mathbb{N}$ *gilt:* $R^1\psi_*(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1}) = 0$.

Beweis. Es ist zu zeigen, dass die Abbildung

$$\psi_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}^\mu) \longrightarrow \psi_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \simeq \psi_*(\mathcal{O}_A)$$

aus (D_B) für alle $\mu \in \mathbb{N}$ surjektiv ist. Ist Bedingung 2'. erfüllt, sieht man dies leicht induktiv mit Hilfe der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^{\mu+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^\mu \longrightarrow 0.$$

□

Für den Gorensteinfall tut es

Satz 1.30 (Fujiki) *Sei X ein komplexer Raum, $A \subsetneq X$ ein effektiver Cartierdivisor und $\psi : A \to B$ eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung auf einen komplexen Raum B. Das Konormalenbündel $N^*_{A/X}$ sei ψ-ample und es gelte $R^1\psi_*(N^{*\mu}_{A/X}) = 0$ für alle $\mu > 0$. Dann existieren ein (normaler) komplexer Raum Y und eine Modifikation $\varphi : X \to Y$, sodass gilt:*

$$\varphi|_A = \psi \quad \textit{und} \quad \varphi|_{\{X-A\}} : X - A \xrightarrow{\simeq} Y - B \textit{ ist biholomorph.}$$

Beweis. Siehe [Fu75, Theorem 2]. □

2 Einige Projektivitätskriterien

Die nachfolgend zusammengestellten Projektivitätskriterien werden in erster Linie dazu benötigt werden, um gewisse Szenarien auszuschliessen, die lediglich im projektiven Kontext auftreten können. Zudem stellt Lemma 2.17 eine Reihe wichtiger Informationen über die von einer nicht-spaltenden Familie rationaler Kurven ausgefüllte (irreduzible reduzierte) Fläche S zur Verfügung.

2.1 Die Eigenschaften „algebraisch äquivalent“, „algebraisch zusammenhängend“ und „Moishezon“

Vorab benötige ich:

Satz und Definition 2.1 *Sei X ein komplexer Raum und $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.*

1. *Ein k-Zykel Z in X ist eine endliche formale Linearkombination*

$$Z = \sum r_i Z_i$$

mit ganzen Zahlen $r_i \in \mathbb{Z}$ und paarweise verschiedenen irreduziblen kompakten analytischen Teilmengen $Z_i \subseteq X$ der Dimension k.

2. *Bezeichnet $\mathcal{B}_k(X)$ die Menge aller k-Zykel und*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_k \mathcal{B}_k(X)$$

die Menge aller Zykel in X, so besitzt $\mathcal{B}(X)$ die Struktur eines komplexen Raumes. Dieser heißt Barletraum oder Zykelraum von X.

Beweis. Siehe [Ba75] oder für einen Überblick wieder [GrPeRe94, VIII, §2.1]. □

Im projektiven Kontext spricht man anstelle von Barletraum oder Zykelraum vom Chowschema. Wichtig ist

Satz 2.2 *Sei X ein kompakter komplexer Raum in $\mathfrak{C}$. Dann ist auch jede irreduzible Komponente des Barletraums kompakt und befindet sich in $\mathfrak{C}$.*

Beweis. Siehe [Ca80], [Fu78] und [Fu82]. □

Von den in der Überschrift aufgezählten Begriffen widme ich mich zunächst dem der algebraischen Äquivalenz.

Definition 2.3 *Sei X ein normaler komplexer Raum und $(Z_r)_{r\in R}$ eine überdeckende Familie von Zykeln mit kompaktem Parameterraum R. Dann heißen zwei Punkte $x, y \in X$ algebraisch äquivalent bezüglich der Familie $(Z_r)_{r\in R}$, in Zeichen $x \sim_R y$, wenn sie sich durch eine endliche Kette von Zykeln aus $(Z_r)_{r\in R}$ verbinden lassen.*

Definition 2.4 *Sei X eine normale kompakte Varietät und $\omega : X \dashrightarrow W$ eine meromorphe Abbildung auf einen kompakten komplexen Raum W. Es seien $\overline{\Gamma} \subset X \times W$ der Abschluss des Graphen von ω und $\pi_W : \overline{\Gamma} \to W$ die Einschränkung der zweiten Projektion $X \times W \to W$. Dann heißt ω surjektiv, falls π_W surjektiv ist.*

Satz und Definition 2.5 *Sei X eine normale kompakte Varietät und $(Z_r)_{r\in R}$ eine überdeckende Familie von Zykeln mit kompaktem Parameterraum R. Dann existieren ein kompakter komplexer Raum W, eine surjektive meromorphe Abbildung*

$$\omega : X \dashrightarrow W$$

sowie Zariski-offene Teilmengen $X^* \subseteq X$ und $W^* \subseteq W$, sodass gilt:

1. *$\omega|_{X^*}$ ist holomorph, eigentlich und offen,*
2. *$W^* = \omega(X^*)$ und $X^* = \omega^{-1}(W^*)$ sowie*
3. *für jedes $x \in X^*$ ist $\omega^{-1}(\omega(x))$ genau die Äquivalenzklasse von x bezüglich der Äquivalenzrelation „$\sim_R$“ aus Definition 2.3.*

Man nennt den komplexen Raum W bzw. die Abbildung $\omega : X \dashrightarrow W$ den algebraischen oder geometrischen Quotienten von X bezüglich der Familie $(Z_r)_{r\in R}$.

Beweis. Siehe [Ca81] oder [Ca04, Theorem 1.1]. □

Die Situation in Satz 2.5 gibt Anlass zu einer weiteren Begriffsbildung.

Definition 2.6 *Sei X eine normale kompakte Varietät und $\omega : X \dashrightarrow W$ eine surjektive meromorphe Abbildung. Dann heißt ω fast holomorph, falls eine Zariski-offene Teilmenge $X^* \subseteq X$ existiert, sodass $\omega|_{X^*}$ holomorph ist und gilt: $X^* = \omega^{-1}(\omega(X^*))$.*

Damit stellt der geometrische Quotient $\omega : X \dashrightarrow W$ aus Satz 2.5 insbesondere eine fast holomorphe Abbildung dar. Man beachte noch, dass eine fast holomorphe Abbildung auf eine Kurve stets holomorph ist.

Ich fahre fort mit der Einführung der Eigenschaften „Moishezon“ und „algebraisch zusammenhängend“. Diese nehmen eine zentrale Rolle ein, will man über die Projektivität einer nicht allzu singulären Kählervarietät entscheiden.

Definition 2.7 *Die algebraische Dimension einer kompakten Varietät X ist gegeben durch*

$$a(X) := tr.deg._{\mathbb{C}}\ \mathcal{M}(X),$$

d.h. durch den Transzendensgrad des Körpers der meromorphen Funktionen $\mathcal{M}(X)$ über dem Körper $\mathbb{C}$.

Immer gilt $a(X) \leq \dim X$. Varietäten maximaler algebraischer Dimension haben einen eigenen Namen:

Definition 2.8 *Eine kompakte Varietät X heißt Moishezon, falls die algebraische Dimension $a(X)$ mit der Dimension von X übereinstimmt.*

Ein kompakter komplexer Raum heißt Moishezon, falls die Reduktion jeder irreduziblen Komponente eine komplexe Moishezonvarietät ist.

Ohne Beweis zitiere ich die beiden folgenden Lemmata aus [GrPeRe94, VII, §6], in denen die für mich nützlichsten Eigenschaften von Moishezonräumen zusammengefasst sind.

Lemma 2.9 *(Vgl. [GrPeRe94, VII, Proposition 6.16].) Ist X ein irreduzibler kompakter komplexer Raum und $L \in Pic(X)$ ein holomorphes Geradenbündel mit Iitakadimension $\kappa(X, L) = \dim X$, so ist X Moishezon.*

Lemma 2.10 *(Vgl. [GrPeRe94, VII, Proposition 6.12].) Für einen Moishezonraum X gilt:*

i) Ist $Y \subseteq X$ ein kompakter Unterraum, so ist auch Y Moishezon.

ii) Ist Y' ein reduzierter kompakter komplexer Raum und $f : X \to Y'$ eine surjektive holomorphe Abbildung, so ist auch Y' Moishezon.

Bemerkung 2.11 Moishezonvarietäten liegen in Fujikis Klasse $\mathfrak{C}$.

Definition 2.12 *Eine normale kompakte Varietät X heißt algebraisch zusammenhängend (bezüglich einer überdeckenden Familie $(Z_r)_{r\in R}$ von 1-Zykeln), falls*

1. *sich je zwei allgemeine Punkte aus X durch eine endliche Kette kompakter komplexer Kurven (aus der Familie $(Z_r)_{r\in R}$) verbinden lassen und*

2. *jede irreduzible Komponente von $\mathcal{B}_1(X)$ kompakt ist.*

Man beachte an dieser Stelle, dass man sich um die zweite Bedingung aus Definition 2.12 im Rahmen dieser Arbeit nicht zu kümmern braucht, weil sie für kompakte Kählervarietäten nach Satz 2.2 automatisch erfüllt ist.

Proposition 2.13 *Eine normale kompakte Varietät ist algebraisch zusammenhängend genau dann, wenn sie Moishezon ist.*

Beweis. Siehe [Ca81, Corollaire du théorème 6']. □

Damit ist die Beziehung zwischen algebraischem Zusammenhang und Moishezoneigenschaft geklärt. Die Brücke zurück zur algebraischen Äquivalenz schlägt

Proposition 2.14 *Sei X eine normale kompakte Varietät, $(Z_r)_{r\in R}$ eine überdeckende Familie von 1-Zykeln mit kompaktem Parameterraum R und*

$$\omega : X \dashrightarrow W$$

der geometrische Quotient von X bezüglich der Familie $(Z_r)_{r\in R}$ aus Satz 2.5. Dann ist X algebraisch zusammenhängend bezüglich $(Z_r)_{r\in R}$ genau dann, wenn gilt: $W = \{pt\}$.

Beweis. Offensichtlich. □

Bringt man noch die Kählerbedingung ins Spiel, so erhält man aus [Na02]:

Proposition 2.15 *Eine normale kompakte Moishezon-Kählervarietät mit höchstens rationalen Singularitäten ist projektiv.*

Beweis. Siehe [Na02, Corollary 1.7]. □

Folgerung 2.16 *Eine normale kompakte algebraisch zusammenhängende Kählervarietät mit höchstens rationalen Singularitäten ist projektiv.*

2.2 Zur Projektivität von S und X

Lemma 2.17 *Sei X eine normale kompakte $\mathbb{Q}$-Gorenstein-Kählerdreifaltigkeit und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven in X mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, und λ den Index von X. Dann ist $-\lambda K_X|_S$ ein ampler Cartierdivisor. Insbesondere ist S projektiv mit Picardzahl $\rho(S) = 1$.*

Beweis. Man betrachte den normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dr, "h"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "q"] & & S \\ T & & \end{tikzcd} \qquad (G)$$

der Familie $(C_t)_{t\in T}$ samt Steinfaktorisierung.

Nach Bemerkung 1.8 handelt es sich bei $q : \mathcal{C} \to T$ um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über der glatten Kurve T. Insbesondere gilt $\rho(\mathcal{C}) = 2$. Aufgrund der Existenz des Punktes $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen, gibt es in $\mathcal{C}$ eine exzeptionelle Kurve E. Diese ist nach Lemma 1.9 irreduzibel und ein Schnitt der Projektion $q : \mathcal{C} \to T$, weshalb man mit Hilfe der Regelflächentheorie (etwa aus [Ha77, V.2]) leicht nachrechnet, dass es sich bei E notwendig um „den“ Nullschnitt $T_0 \subsetneq \mathcal{C}$ handelt. Da $g : \mathcal{C} \to S'$ genau diesen Schnitt T_0 kontrahiert und außerhalb von T_0 biholomorph ist, identifiziert man S' als einen normalen projektiven Kegel mit $\rho(S') = 1$.

Weil $h : S' \to S$ endlich ist, genügt es für die erste Behauptung zu zeigen, dass $h^*(-\lambda K_X|_S)$ ample auf S' ist. Dazu wiederum genügt es einzusehen, dass für eine Kurve

$$C'_t := g(q^{-1}(t))$$

die Bedingung $(h^*(-\lambda K_X|_S).C'_t) > 0$ erfüllt ist. Dies ist jedoch klar, denn nach Voraussetzung gilt

$$(h^*(-\lambda K_X|_S).C'_t) = (-\lambda K_X.h(C'_t)) = \lambda(-K_X.C_t) > 0.$$

Zur Picardzahl von S: Wie bereits erwähnt gilt $\rho(S') = 1$, woraus $\rho(S) \leq 1$ folgt. Wäre $\rho(S) = 0$, so müsste jedes holomorphe Geradenbündel auf S im Widerspruch zur eben nachgewiesenen Projektivität von S numerisch trivial sein. Deshalb gilt $\rho(S) = 1$. □

Bemerkung 2.18 *In Lemma 2.17 ist die Fläche $S = \bigcup_{t\in T} C_t$ auch ohne die Bedingung $(-K_X.C_t) > 0$ oder die Existenz des Punktes x_0 zumindest Moishezon.*

Beweis. Betrachtet man noch einmal den normalisierten Graphen (G) der Familie $(C_t)_{t\in T}$, so ist S das Bild von $\mathcal{C}$ unter der surjektiven holomorphen Abbildung p. Da $\mathcal{C}$ als glatte projektive Fläche natürlich Moishezon ist, ergibt sich die Behauptung aus Lemma 2.10. □

Lemma 2.19 *Sei X eine normale kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens rationalen Singularitäten und $S \subsetneq X$ ein $\mathbb{Q}$-Cartier-Weildivisor. Es sei $m \in \mathbb{N}$ (kleinstmöglich) mit der Eigenschaft gewählt, dass mS ein Cartierdivisor ist. Dann ist X projektiv, falls $\mathcal{O}_S(mS)$ ein amples Geradenbündel auf S ist.*

Beweis. Der Satz von Riemann-Roch liefert

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(nmS)) = \frac{(nmS)^3}{3!} + (\text{Terme vom Grad} < 3) \qquad (*)$$

mit $(nmS)^3 > 0$, da $\mathcal{O}_S(mS)$ als ample vorausgesetzt wurde. Ausgehend von der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((n-1)mS) \longrightarrow \mathcal{O}_X(nmS) \longrightarrow \mathcal{O}_{mS}(nmS) \longrightarrow 0$$

erhält man zudem den folgenden Ausschnitt aus der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\ldots \to H^2(X, \mathcal{O}_X((n-1)mS)) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X(nmS)) \longrightarrow H^2(mS, \mathcal{O}_{mS}(nmS)) \to \ldots .$$

Weil ein holomorphes Geradenbündel auf einem komplexen Raum genau dann ample ist, wenn dies für die Einschränkung auf die Reduktion der Fall ist, verschwindet die letztgenannte Kohomologiegruppe für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$. Deshalb ist die Dimension des Vektorraums $H^2(X, \mathcal{O}_X(nmS))$ in n beschränkt und es muss wegen (*)

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(nmS)) \sim n^3$$

erfüllt sein. Damit ist X Moishezon nach Lemma 2.9 und eine Anwendung von Proposition 2.15 ergibt die Behauptung. □

2.3 Noch mehr zur Projektivität von X

Der Schluss auf Projektivität der Kählerdreifaltigkeit X wird außerdem möglich sein, falls X eine bestimmte Faserstruktur besitzt (Lemma 2.20 bzw. Folgerung 2.21). Dieser Umstand wird sich im Anschluss nutzen lassen, um ein Projektivitätskriterium mit Hilfe eines Deformationsarguments abzuleiten (Folgerung 2.23).

Lemma 2.20 *Ist X eine glatte kompakte Kählerdreifaltigkeit und $f : X \to W$ eine holomorphe Abbildung auf eine glatte Kurve W mit der Eigenschaft, dass die allgemeine Faser von f eine (glatte) rationale Fläche darstellt, so ist X projektiv.*

Beweis. Ein entsprechender Satz von Kodaira liefert die Behauptung, falls man zeigen kann, dass auf X keine (nicht-trivialen) holomorphen 2-Formen existieren.

Man definiere zu diesem Zweck

$$N := \{w \in W \mid f^{-1}(w) \text{ ist singulär}\} \quad \text{sowie} \quad W_0 := W \setminus N$$

und betrachte anstelle von f die auf $X_0 := X \setminus f^{-1}(N)$ eingeschränkte holomorphe Abbildung

$$f_0 : X_0 \to W_0.$$

Da alle Fasern von f_0 glatt sind und zudem die erwartete Dimension aufweisen, ist f_0 eine Submersion und man hat die kurze exakte Sequenz lokal freier Garben

$$0 \longrightarrow f_0^*\Omega^1_{W_0} \xrightarrow{df_o} \Omega^1_{X_0} \longrightarrow \Omega^1_{X_0/W_0} \longrightarrow 0$$

zur Verfügung. Mit Hilfe des äußeren Produkts $\bigwedge^2$ erhält man daraus

$$0 \longrightarrow f_0^*\Omega^1_{W_0} \otimes \Omega^1_{X_0/W_0} \longrightarrow \Omega^2_{X_0} \longrightarrow \Omega^2_{X_0/W_0} \longrightarrow 0, \qquad (*)$$

weshalb es für den Nachweis von $H^0(X_0, \Omega^2_{X_0}) = 0$ genügt einzusehen, dass die Garben der relativen i-Formen $\Omega^i_{X_0/W_0}$ für $i \in \{1, 2\}$ keine (nicht-trivialen) globalen Schnitte besitzen.

Da nach Voraussetzung jede Faser F_0 von f_0 eine glatte rationale Fläche darstellt, gilt für $i \in \{1, 2\}$

$$h^0(F_0, \Omega^i_{X_0/W_0}|_{F_0}) = h^0(F_0, \Omega^i_{F_0}) = h^i(F_0, \mathcal{O}_{F_0}) = 0.$$

Damit verschwinden nach Grauerts Halbstetigkeitssatz (f_0 ist natürlich flach) die direkten Bildgarben $f_{0*}(\Omega^i_{X_0/W_0})$, d.h. es gilt

$$f_{0*}(f_0^*\Omega^1_{W_0} \otimes \Omega^1_{X_0/W_0}) \simeq \Omega^1_{W_0} \otimes f_{0*}(\Omega^1_{X_0/W_0}) = 0 \quad \text{sowie} \quad f_{0*}(\Omega^2_{X_0/W_0}) = 0,$$

und nach (*)

$$f_{0*}(\Omega^2_{X_0}) = 0.$$

Insbesondere gilt

$$H^0(X_0, \Omega^2_{X_0}) \cong H^0(W_0, f_{0*}(\Omega^2_{X_0})) = 0.$$

Natürlich verschwindet jetzt auch die Kohomologiegruppe $H^0(X, \Omega^2_X)$ und X ist projektiv nach Kodairas Satz. □

Folgerung 2.21 *Ist X eine kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $f : X \to W$ eine holomorphe Abbildung auf eine glatte Kurve W mit der Eigenschaft, dass die allgemeine Faser von f eine (glatte) rationale Fläche darstellt, so ist X projektiv.*

Beweis. Es bezeichne $\sigma : \hat{X} \to X$ eine Desingularisierung von X und

$$\hat{f} := f \circ \sigma : \hat{X} \to W$$

die zusammengesetzte Abbildung auf die Kurve W. Genau wie f besitzt $\hat{f} : \hat{X} \to W$ eine glatte rationale Fläche als allgemeine Faser. Damit ergibt sich die Projektivität der Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ aus dem voranstehenden Lemma 2.20 und die Varietät X ist als Bild von $\hat{X}$ unter σ zumindest Moishezon. Da X nach Voraussetzung höchstens terminale Singularitäten aufweist, ergibt sich die Projektivität von X aus Proposition 2.15. □

Lemma 2.22 *Sei X eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $S \subsetneq X$ eine irreduzible reduzierte Fläche, gegeben durch die Idealgarbe $\mathcal{I}_S$. Das Konormalenbündel $\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2$ sei trivial und $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Dann gilt:*

i) Die Fläche S deformiert in einer 1-dimensionalen Familie $(S_r)_{r \in R}$ mit

$$(S_{r_1}.S_{r_2}) = 0 \quad \textit{für alle} \quad r_1, r_2 \in R.$$

ii) Es existiert eine holomorphe Abbildung $f : X \to \tilde{R}$ auf eine glatte Kurve $\tilde{R}$, sodass die allgemeine Faser dieser Abbildung f genau die allgemeine Fläche S_r ist. Insbesondere ist S_r für allgemeines $r \in R$ glatt.

iii) Ist zusätzlich zu den oben aufgeführten Voraussetzungen noch das antikanonische Bündel $-K_S$ ample, so sind die Flächen S_r mit allgemeinem $r \in R$ rational.

Beweis. I) Da der singuläre Ort von X nur aus endlich vielen Punkten besteht und die Fläche S reduziert ist, ist $S \subsetneq X$ generisch unobstruiert nach [Ko96, I, Lemma 2.13] und man erhält nach [Ko96, I, Proposition 2.14] für den Obstruktionenraum eine Inklusion der Form

$$Obs(S) \subseteq \mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2, \mathcal{O}_S).$$

Mit Hilfe der Voraussetzungen an das Konormalenbündel $\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2$ und die erste Kohomologiegruppe mit Werten in $\mathcal{O}_S$ berechnet man

$$\mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2, \mathcal{O}_S) = \mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S) \cong H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0,$$

woraus sofort folgt, dass die Deformationen von $S \subsetneq X$ unobstruiert sind. Zusammen mit

$$\mathrm{Hom}_S(\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2, \mathcal{O}_S) = \mathrm{Hom}_S(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_S) \cong H^0(S, \mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$$

erhält man

$$\dim \mathrm{Hom}_X(\mathcal{I}_S, \mathcal{O}_S) - \dim Obs(S) = \dim \mathrm{Hom}_S(\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2, \mathcal{O}_S) = 1,$$

was nach [Ko96, I, Theorem 2.8 4)] bedeutet, dass sich die Fläche S in einer genau 1-dimensionalen Familie

$$(S_r)_{r \in R} \quad \text{mit} \quad S = S_0$$

bewegt. Dabei gilt

$$(S_{r_1}.S_{r_2}) = (S.S) = c_1(N_{S/X})^2 = 0 \quad \text{für alle} \quad r_1, r_2 \in R$$

nach der Selbstadjunktionsformel.

II) Man darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass die Kurve R irreduzibel und reduziert ist. Es sei $\nu : \tilde{R} \to R$ die Normalisierung von R. Für die Konstruktion einer holomorphen Abbildung $f : X \to \tilde{R}$ betrachte man den normalisierten Graphen der Familie $(S_r)_{r \in R}$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{q}"'] \arrow[rr, bend left, "\tilde{p}"] & \mathcal{Z} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \\
\tilde{R} \arrow[r, "\nu"] & R &
\end{tikzcd}$$

zusammen mit den induzierten holomorphen Abbildungen $\tilde{q} : \tilde{\mathcal{Z}} \to \tilde{R}$ sowie $\tilde{p} : \tilde{\mathcal{Z}} \to X$.

Da die Familie $(S_r)_{r\in R}$ 1-dimensional ist, liegt ein allgemeiner Punkt $x \in X$ in höchstens endlich vielen, sicherlich allgemeinen Flächen $S_{r_1}, \ldots, S_{r_k}$. Wegen $(S_{r_i}.S_{r_j}) = 0$ und aufgrund der $\mathbb{Q}$-Faktorialität von X schneiden sich zwei allgemeine Flächen jedoch nicht, sodass zu einem allgemeinen Punkt $x \in X$ genau eine, allgemeine Fläche $S_{r(x)}$ mit $x \in S_{r(x)}$ existiert. Zumindest ein sehr allgemeiner Punkt $x \in X$ besitzt zusätzlich noch genau einen Urbildpunkt in $\tilde{\mathcal{Z}}$. Damit ist die Abbildung $\tilde{p} : \tilde{\mathcal{Z}} \to X$ sicherlich birational und besitzt nach Steinfaktorisierung und Zariskis Hauptsatz auch noch zusammenhängende Fasern, da X normal ist.

Man betrachte die induzierte meromorphe Abbildung

$$f : X \dashrightarrow \tilde{R}$$

und nehme an, dass f nicht holomorph ist. Es sei $E \subsetneq X$ der Entartungsort von f und $y \in E$ ein beliebiger Punkt. Nach Annahme gilt $\dim \tilde{q}(\tilde{p}^{-1}(y)) \neq 0$. Dann aber gilt $\tilde{q}(\tilde{p}^{-1}(y)) = \tilde{R}$, was bedeutet, dass der Punkt y in allen Flächen S_r enthalten ist. Da sich zwei allgemeine Flächen aus der Familie $(S_r)_{r\in R}$ nicht schneiden, ist dies unmöglich. Also ist f tatsächlich holomorph mit allgemeiner Faser S_r.

III) Ist zusätzlich zu den bisher verwendeten Voraussetzungen noch das antikanonische Bündel $-K_S$ ample, so gilt das Gleiche auch für das antikanonische Bündel der allgemeinen Fläche S_r und es folgt für das zweite Plurigeschlecht

$$P_2(S_r) = h^0(S_r, 2K_{S_r}) = 0.$$

Desweiteren gilt

$$h^1(S_r, \mathcal{O}_{S_r}) \leq h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$$

aufgrund der Halbstetigkeit nach oben der Funktion $r \mapsto h^1(S_r, \mathcal{O}_{S_r})$. Damit ist die allgemeine (glatte) Fläche S_r rational nach Castelnuovos Kriterium. □

Folgerung 2.23 *Sei X eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $S \subsetneq X$ eine irreduzible reduzierte Fläche, gegeben durch die Idealgarbe $\mathcal{I}_S$. Das antikanonische Bündel $-K_S$ sei ample und das Konormalenbündel $\mathcal{I}_S/\mathcal{I}_S^2$ sei trivial. Dann ist X projektiv.*

Beweis. Nach Lemma 1.22 ist S Gorenstein. Für eine Gorenstein-del Pezzofläche S gilt $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ (etwa [HiWa81, Corollary 2.5], falls S normal ist und [Mo82, Lemma 3.9] oder [Re94, Corollary 4.10], falls S nicht normal ist). Deswegen ergibt sich die Behauptung aus Lemma 2.22 und Folgerung 2.21. □

3 Überdeckende nicht-spaltende Familien rationaler Kurven

Ich beginne mit dem eigentlichen Studium nicht-spaltender Familien rationaler Kurven in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen kompakten Kählerdreifaltigkeit X mit höchstens terminalen Singularitäten. Der (aus meiner Sicht) einfachste Fall liegt dabei vor, wenn eine überdeckende Familie $(C_t)_{t\in T}$ zur Verfügung steht, weil es dann insbesondere möglich ist, den geometrischen Quotienten aus Satz 2.5 bezüglich dieser überdeckenden Familie $(C_t)_{t\in T}$ zu betrachten.

Die Existenz einer überdeckenden nicht-spaltenden Familie rationaler Kurven in X sorgt in der Regel dafür, dass die Dreifaltigkeit X projektiv sein muss. Die einzige nicht-projektive Variante wird in Proposition 3.4 beschrieben werden.

3.1 Allgemeines

Lemma 3.1 *Sei X eine kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine überdeckende nicht-spaltende Familie rationaler Kurven in X. Es bezeichne $\omega : X \dashrightarrow W$ den geometrischen Quotienten bezüglich der Familie $(C_t)_{t\in T}$ und es gelte $\dim W \in \{0,1\}$. Dann ist X projektiv.*

Beweis. Es sei also

$$\omega : X \dashrightarrow W$$

der geometrische Quotient bezüglich der überdeckenden Familie $(C_t)_{t\in T}$ aus Satz 2.5. Man unterscheide die beiden Möglichkeiten „$\dim W = 0$“ sowie „$\dim W = 1$“.

Im Fall „$\dim W = 0$“ ist X natürlich algebraisch zusammenhängend nach Proposition 2.14 und damit projektiv nach Folgerung 2.16 (denn terminale Singularitäten sind rational nach Proposition 1.25).

Für den Fall „$\dim W = 1$“ bemerke man zunächst, dass die fast holomorphe Abbildung $\omega : X \dashrightarrow W$ sogar holomorph ist, weshalb nach Steinfaktorisierung davon ausgegangen werden darf, dass ω zusammenhängende Fasern besitzt und W eine glatte Kurve ist. Man betrachte den normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "\omega"] \\ T \arrow[r, "t\mapsto\omega(C_t)"'] & W \end{tikzcd}$$

der Familie $(C_t)_{t\in T}$, ergänzt um den geometrischen Quotienten $\omega : X \to W$ und um die induzierte holomorphe Abbildung $T \to W$.

Weil der Parameterraum T mindestens 2-dimensional sein muss, um die Eigenschaft „überdeckend“ aus der Voraussetzung zu gewährleisten, enthält die allgemeine (glatte) Faser F von $\omega : X \to W$ eine mindestens 1-dimensionale (überdeckende) nicht-spaltende Familie rationaler Kurven. Betrachtet man den normalisierten Graphen dieser Familie, so erkennt man, dass die allgemeine Faser F von einem $\mathbb{P}_1$-Bündel dominiert wird. Folglich kommen als F nur die projektive Ebene $\mathbb{P}_2$ oder ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer glatten Kurve C in Frage. Da F zudem bezüglich der Familie $(C_t)_{t\in T}$ zusammenhängend sein muss, muss in der $\mathbb{P}_1$-Bündelsituation sogar $F \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ gelten, wobei die Kurven beider Rulings notwendig aus der Familie $(C_t)_{t\in T}$ stammen und folglich in X numerisch äquivalent (sogar homolog) sind. Insbesondere handelt es sich bei der allgemeinen Faser von $\omega : X \to W$ um eine rationale Fläche. Deshalb ergibt sich die Projektivität der Varietät X im Fall „$\dim W = 1$“ mit Hilfe von Folgerung 2.21. $\square$

3.2 Der Fall „$\dim T \geq 3$“

Lemma 3.2 *Sei X eine normale kompakte Kählerdreifaltigkeit und $(C_t)_{t\in T}$ eine mindestens 3-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven. Dann gilt $X = \bigcup_{t\in T} C_t$, d.h. die Familie $(C_t)_{t\in T}$ überdeckt die Varietät X.*

Beweis. Es bezeichne

$$\Sigma := \bigcup_{t\in T} C_t \subseteq X$$

diejenige (irreduzible reduzierte) Untervarietät von X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird. Man fixiere zwei allgemeine Punkte $x_1, x_2 \in \Sigma$ und betrachte den normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \Sigma \subseteq X \\ T & \end{tikzcd}$$

der Familie $(C_t)_{t\in T}$ mit dem $\mathbb{P}_1$-Bündel $q : \mathcal{C} \to T$.

Angenommen, es handelt sich bei Σ um eine echte Untervarietät von X (d.h. es gilt $\dim \Sigma = 2$), so existiert wegen $\dim T \geq 3$ eine mindestens 2-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven durch den Punkt x_1 sowie eine mindestens 1-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven durch die Punkte x_1 und x_2. Genau dies ist nach Lemma 1.9 (im projektiven Kontext spricht man an dieser Stelle von „Mori's breaking lemma“) nicht erlaubt und die Behauptung folgt. $\square$

Als unmittelbare Folgerung notiert man

Proposition 3.3 *Sei X eine kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine mindestens 3-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven. Dann ist X projektiv.*

Beweis. Nach Lemma 3.2 ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$ überdeckend und deshalb der geometrische Quotient $\omega : X \dashrightarrow W$ bezüglich dieser Familie $(C_t)_{t\in T}$ wohldefiniert. Wie man durch Vergleichen der Dimensionen aller am normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \\ T & \end{tikzcd}$$

der Familie $(C_t)_{t\in T}$ beteiligten Varietäten unmittelbar einsieht, verläuft aufgrund der Voraussetzung „$\dim T \geq 3$“ durch jeden allgemeinen Punkt $x_0 \in X$ eine mindestens 1-dimensionale Teilfamilie $(C_t)_{t\in T^*(x_0)}$ der Familie $(C_t)_{t\in T}$. Deswegen ist eine allgemeine Faser von ω mindestens 2-dimensional und es gilt $\dim W \in \{0, 1\}$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.1. $\square$

3.3 Der Fall „$\dim T = 2$“

Proposition 3.4 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 2-dimensional und überdecke die Dreifaltigkeit X. Dann ist X projektiv, es sei denn, es handelt sich um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer nicht-projektiven glatten kompakten Kählerfläche mit den Kurven C_t als Fasern.*

Beweis. Bezeichnet

$$\omega : X \dashrightarrow W$$

den geometrischen Quotienten bezüglich der überdeckenden Familie $(C_t)_{t\in T}$, so sind a priori die drei Fälle

$$\dim W \in \{0, 1, 2\}$$

denkbar. Da die Dreifaltigkeit X jedoch für $\dim W \in \{0, 1\}$ nach Lemma 3.1 notwendig projektiv ist, verbleibt an dieser Stelle nurmehr die Aufgabe, den Fall „$\dim W = 2$“ genauer unter die Lupe zu nehmen.

Ausgehend vom normalisierten Graphen der Familie $(C_t)_{t\in T}$ betrachte man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, dashed, "\omega"] \\ T \arrow[r, dashed, "t\mapsto\omega(C_t)"'] & W \end{tikzcd}$$

mit dem $\mathbb{P}_1$-Bündel $q : \mathcal{C} \to T$ über der normalen Fläche T und der fast holomorphen Abbildung $\omega : X \dashrightarrow W$. Eine allgemeine Faser von ω entspricht genau einer (glatten) Kurve der Form C_t, weshalb die Abbildung $p : \mathcal{C} \to X$ zumindest generisch biholomorph sein muss. Infolgedessen ist mit Hilfe der Steinfaktorisierung und Zariskis Hauptsatz außerdem klar, dass p zusammenhängende Fasern besitzt, da $\mathcal{C}$ und X normal sind.

Es sei

$$E := \{\xi \in \mathcal{C} \mid \dim p^{-1}p(\xi) \geq 1\} \subsetneq \mathcal{C}$$

die Menge aller Punkte in $\mathcal{C}$, in denen p nicht biholomorph ist und $E_0 \subseteq E$ eine irreduzible Komponente. Aufgrund des „purity-of-branch"-Satzes ([Ko96, VI, Theorem 1.5]) ist E_0 notwendig 2-dimensional. Zudem gilt sicherlich $\dim p(E_0) \leq 1$.

Es ist das Ziel nachzuweisen, dass E_0 die leere Menge ist. Man setze dazu ab jetzt ohne Einschränkung voraus, dass X nicht-projektiv ist und unterscheide die beiden möglichen Fälle „$\dim q(E_0) = 1$" und „$\dim q(E_0) = 2$".

Angenommen es gilt $\dim q(E_0) = 1$, so ergibt sich notwendig auch $\dim p(E_0) = 1$, weil die Abbildung $p : \mathcal{C} \to X$ die Fasern $q^{-1}(t)$ nicht kontrahieren darf. Damit ist für jeden Punkt $t_0 \in q(E_0) \subsetneq T$ die Gleichung

$$p(E_0) = C_{t_0} = p(q^{-1}(t_0))$$

erfüllt, weshalb die Kurve C_{t_0} durch alle Punkte der 1-dimensionalen Untervarietät $q(E_0) \subsetneq T$ repräsentiert wird. Dies ist nach Definiton 1.7 verboten.

Angenommen es gilt $\dim q(E_0) = 2$, so sind die Möglichkeiten „$\dim p(E_0) = 0$" und „$\dim p(E_0) = 1$" denkbar.

Bei der erstgenannten Variante existiert ein Punkt $x_0 := p(E_0) \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Folglich ist X algebraisch zusammenhängend bezüglich der Familie $(C_t)_{t\in T}$ und es gilt $\dim W = 0$.

Bei der zweitgenannten Variante verläuft durch jeden allgemeinen Punkt $x \in X$ eine Kurve C_t, die Mitglied einer mindestens 1-dimensionalen Teilfamilie der Familie $(C_t)_{t\in T}$ durch einen Punkt $y = y(x) \in p(E_0)$ ist. Folglich liegt jeder allgemeine Punkt in X in einer mindestens 2-dimensionalen Faser von ω und es gilt $\dim W \leq 1$.

Wie aus Lemma 3.1 bekannt ist, ist die Varietät X für $\dim W \in \{0, 1\}$ projektiv. Da es nur noch um die Suche nach nicht-projektiven Möglichkeiten für X geht, ist der Fall „$\dim q(E_0) = 2$" erledigt.

Damit gilt $E = \emptyset$ und $\mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} X$ via p. Insbesondere ist die Varietät X ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über der normalen kompakten Fläche T in $\mathfrak{C}$. Weil glatte kompakte Flächen in $\mathfrak{C}$ automatisch Kähler sind ([Fu83, Remark 1.1]), bleibt zu zeigen, dass T glatt ist. Nimmt man zu diesem Zweck an, dass ein singulärer Punkt $t_0 \in T$ existiert, so folgt

$$\dim \operatorname{Sing}(X) \geq 1, \tag{*}$$

denn aufgrund der Struktur von X gilt $q^{-1}(t_0) \subseteq \operatorname{Sing}(X)$. Da X jedoch nach Voraussetzung höchstens terminale Singularitäten besitzt und diese nur in Kodimension 3 oder höher auftreten können, ist (*) nicht möglich. Also ist T glatt.

Schließlich kann T nicht projektiv sein, weil sonst zwangsläufig auch X projektiv sein müsste (etwa [Ca81, Théorème 2'] und Proposition 2.15). $\square$

4 1-dimensionale nicht-spaltende Familien rationaler Kurven durch einen Punkt $x_0 \in X$

In diesem Kapitel untersuche ich 1-dimensionale nicht-spaltende Familien $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven mit der Eigenschaft, dass ein Punkt $x_0 \in X$ existiert, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Dabei werde ich in der Regel auf eine Maximalitätsforderung an die Familie $(C_t)_{t\in T}$ verzichten. Dadurch wird es möglich sein, einen Großteil der in diesem Kapitel gewonnenen Resultate auch im nachfolgenden Kapitel über 2-dimensionale Familien zu nutzen.

Das genaue Setup für dieses Kapitel sei wie folgt festgelegt:

Notation 4.1 Es sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen.

Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, und

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dr, "h"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "q"] & & S \\ T & & \end{tikzcd} \qquad (G)$$

den normalisierten Graphen der Familie $(C_t)_{t\in T}$ samt Steinfaktorisierung.

Desweiteren seien $m, m' \in \mathbb{N}$ (kleinstmöglich) mit der Eigenschaft gewählt, dass sowohl mS als auch $m'S$ sowie $m'K_X$ Cartierdivisoren darstellen und es seien $\mathcal{I}$ sowie $\mathcal{J}$ die kohärenten Idealgarben der kompakten komplexen Unterräume $S \subsetneq X$ sowie $mS \subsetneq X$. $\boxdot$

Die Existenz des Punktes $x_0 \in X$ ist in diesem Kapitel entscheidend. Die Situation ohne einen solchen ausgezeichneten Punkt wird in Kapitel 6 behandelt werden.

Unangenehmerweise spricht nichts dagegen, dass $x_0 \in X$ eine Nicht-Gorensteinsingularität ist. Dieser Umstand macht das Argumentieren mit Schnittzahlen schwierig, weil alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ nach Voraussetzung durch eben diesen Punkt verlaufen. Zumindest ist $-m'K_X|_S$ ample und $\rho(S) = 1$ nach Lemma 2.17. Es sei außerdem daran erinnert, dass es sich bei $q : \mathcal{C} \to T$ aus dem Graphen (G) um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über der glatten Kurve T handelt.

4.1 Die Birationalität der Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$

Die Birationalität der Auswertungsabbildung ist vor allem dann wichtig, wenn man die Fläche S explizit klassifizieren möchte. Da eine solche Klassifikation nur im Gorensteinfall (siehe Abschnitt 4.4) erfolgversprechend ist, wird man die in diesem Abschnitt nachgewiesene Birationalitätsaussage für maximale nicht-spaltende Familien rationaler Kurven auch erst dort wirklich gewinnbringend einsetzen können.

Lemma 4.2 *Sei X eine normale kompakte Kählerdreifaltigkeit, $(C_t)_{t\in T}$ eine 1-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven und $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird. Dann gilt: Ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$* ***maximal****, so verläuft durch jeden allgemeinen Punkt in S genau eine Kurve aus der Familie $(C_t)_{t\in T}$.*

Beweis. Es sei

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \\ T & \end{tikzcd} \qquad (D_0)$$

der normalisierte Graph der Familie $(C_t)_{t\in T}$.

Es ist zu zeigen, dass die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ birational ist. Dazu seien $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung von S und $\sigma : \hat{S} \to \tilde{S}$ eine Desingularisierung von $\tilde{S}$ durch sukzessives Aufblasen singulärer Punkte und Normalisieren. Bezeichnet $(\hat{C}_t)_{t\in T}$ die längs $\nu \circ \sigma : \hat{S} \to S$ geliftete Familie aus Bemerkung 1.10, so lässt sich das Diagramm (D_0) um den normalisierten Graphen dieser Familie $(\hat{C}_t)_{t\in T}$ zu folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{C}} \arrow[r, "\hat{p}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\hat{q}"'] & \hat{S} \arrow[d, "\nu\circ\sigma"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & S \\ T & \end{tikzcd} \qquad (D_1)$$

erweitern. Dabei handelt es sich nach Konstruktion bei $\mathcal{C}$ um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über der glatten Kurve T und bei $\hat{\mathcal{C}}$ um die Aufblasung dieses $\mathbb{P}_1$-Bündels in endlich vielen Punkten.

Im Folgenden bezeichne $t \in T$ stets einen allgemeinen Punkt und $\mu_t : \mathbb{P}_1 \to \hat{C}_t$ die Normalisierung der zugehörigen rationalen Kurve $\hat{C}_t$.

Da die Fläche $\hat{S}$ glatt ist, existiert eine kurze exakte Garbensequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}_1} \overset{T(\mu_t)}{\longrightarrow} \mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t}) \longrightarrow L \oplus \tau \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

mit einem holomorphen Geradenbündel L und einem Torsionsanteil τ, wobei die Bedingung „$\tau \equiv 0$“ mit Sicherheit erfüllt ist, falls die Kurve $\hat{C}_t$ regulär ist. Da die geliftete Kurve $\hat{C}_t$ einer überdeckenden Familie rationaler Kurven angehört, muss das zurückgezogene Tangentialbündel $\mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t})$ nef sein. Schreibt man daher

$$\mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_2),$$

so gilt ohne Einschränkung $a_1 \geq a_2 \geq 0$. Desweiteren gilt $a_1 \geq 2$ wegen $T_{\mathbb{P}_1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$. Verwendet man nun, dass sich die rationale Kurve $\hat{C}_t$ nach Voraussetzung in einer höchstens 1-dimensionalen (überdeckenden) Familie bewegt, so erhält man eine Abschätzung (etwa [Ko96, II, Theorem 1.2])

$$\begin{aligned} 1 = \dim T &\geq \chi(\mathbb{P}_1, \mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t})) - \dim Aut(\mathbb{P}_1) \\ &= h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_2)) - 3 = a_1 + a_2 - 1 \geq 1, \end{aligned}$$

woraus folgt $a_1 = 2$ sowie $a_2 = 0$.

Einsetzen in (*) führt zu

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \longrightarrow L \oplus \tau \longrightarrow 0.$$

Es folgt $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ sowie $\tau \equiv 0$, weshalb es sich bei $\hat{C}_t$ um eine rationale Kurve mit

$$(\hat{C}_t)^2 = \deg(N_{\hat{C}_t/\hat{S}}) = 0 \quad \text{und} \quad (-K_{\hat{S}}.\hat{C}_t) = a_1 + a_2 = 2$$

handelt. Man erkennt außerdem mit Hilfe der Adjunktionsformel, dass die Kurve $\hat{C}_t$ glatt ist.

Damit ist das nachgestellte Lemma 4.4 anwendbar, welches besagt, dass die Abbildung $\hat{p} : \hat{\mathcal{C}} \to \hat{S}$ aus Diagramm (D_1) ein Isomorphismus ist. Mit Hilfe des gleichen Diagramms folgt daraus die Birationalität der Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$. □

Folgerung 4.3 *In der Situation aus Notation 4.1 sei die Familie $(C_t)_{t \in T}$ **maximal**. Dann handelt es sich im Graphen (G) bei $h : S' \to S$ um die Normalisierung von S und bei $g : \mathcal{C} \to S'$ genau um die Kontraktion des (irreduziblen) Schnitts $T_0 \subsetneq \mathcal{C}$.*

Beweis. Nach Lemma 4.2 ist die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ aus dem Graphen (G) birational. Deshalb handelt es sich bei $h : S' \to S$ nach der universellen Eigenschaft der Normalisierung und Zariskis Hauptsatz notwendig um die Normalisierung von S. Weiter gibt es aufgrund der Existenz des Punktes $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t \in T}$ verlaufen, in $\mathcal{C}$ eine exzeptionelle Kurve E. Man rechnet mit Hilfe der Regelflächentheorie und Lemma 1.9 leicht nach, dass es sich dabei um „den“ Nullschnitt $T_0 \subsetneq \mathcal{C}$ handelt. Natürlich kontrahiert $g : \mathcal{C} \to S'$ genau diesen Schnitt T_0 und ist außerhalb von T_0 biholomorph. □

Lemma 4.4 *Sei S eine glatte projektive Fläche und $(C_t)_{t\in T}$ eine Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(C_t^2) = 0$. Dann ist die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ aus dem normalisierten Graphen der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Zwei allgemeine Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ schneiden sich wegen der Irreduzibilität der C_t sowie der Voraussetzung $(C_t^2) = 0$ nicht. Deshalb ist die Abbildung $p : \mathcal{C} \to S$ birational (und es gilt $\dim T = 1$). Aufgrund der Glattheit von S (und $\mathcal{C}$) besitzt $p : \mathcal{C} \to S$ zudem zusammenhängende Fasern. Angenommen nun, es existiert ein Punkt $x \in S$ mit der Eigenschaft $\dim p^{-1}(x) > 0$, so gilt notwendig $q(p^{-1}(x)) = T$, was bedeutet, dass sich alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ im Punkt x treffen. Da dies wegen $(C_t^2) = 0$ nicht erlaubt ist, folgt die Behauptung. □

4.2 Der Ausschluss des Falls „$(S.C_t) = 0$“

Da alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ nach Voraussetzung durch den Punkt $x_0 \in X$ verlaufen, gilt $\rho(S) = 1$ nach Lemma 2.17 und das numerische Verhalten des eingeschränkten Konormalenbündels $\mathcal{J}/\mathcal{I}\mathcal{J} = \mathcal{O}_S(-mS)$ ist alleine durch das Vorzeichen der Schnittzahl $(S.C_t)$ bestimmt.

Im Fall „$(S.C_t) < 0$“ wird es deshalb möglich sein, die Fläche S auf einen Punkt zu kontrahieren. Im Fall „$(S.C_t) > 0$“ wird die Dreifaltigkeit X projektiv sein. Da die Situation im projektiven Setup im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden soll, bleibt die Aufgabe, die Möglichkeit „$(S.C_t) = 0$“ auszuschließen. Diese Aufgabe wird im vorliegenden Abschnitt mit Hilfe A. Fujikis bimeromorpher Klassifikation glatter kompakter Dreifaltigkeiten in $\mathfrak{C}$ angegangen werden.

Ich erinnere daran, dass eine kompakte Varietät in $\mathfrak{C}$ liegt, falls sie bimeromorph äquivalent zu einer kompakten Kählermannigfaltigkeit ist (vergleiche Definition 1.4).

Vor der eigentlichen Arbeit mit der genannten Klassifikation aus [Fu83] benötige ich noch eine Reihe von Hilfsaussagen. Beginnen möchte ich dabei mit einer Zusammenfassung der drei für mich wichtigsten Eigenschaften einer Varietät in $\mathfrak{C}$ in Form der beiden folgenden Lemmata 4.5 und 4.6.

Lemma 4.5 *Sei X eine kompakte komplexe Varietät in $\mathfrak{C}$. Dann gilt:*

i) Jede kompakte Untervarietät von X liegt in $\mathfrak{C}$.

ii) Jedes meromorphe Bild von X liegt in $\mathfrak{C}$.

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus der Definition 1.4. □

Lemma 4.6 *Zu jeder normalen kompakten Fläche V aus $\mathfrak{C}$ mit $a(V) = 0$ gibt es ein eindeutig bestimmtes sogenanntes „normales minimales Modell“, d.h. eine normale Fläche V' sowie eine bimeromorphe holomorphe Abbildung $\kappa : V \to V'$ mit der Eigenschaft, dass in V' keinerlei Kurven existieren.*

Beweis. Eine glatte kompakte Fläche V in $\mathfrak{C}$ der algebraischen Dimension $a(V) = 0$ ist entweder bimeromorph zu einem komplexen Torus oder einer $K3$-Fläche. Während ein 2-dimensionaler komplexer Torus der algebraischen Dimension $a = 0$ sowieso keine Kurven enthält (etwa [Ue75, Lemma 13.3]) und damit sein eigenes normales minimales Modell darstellt, können in einer entsprechenden $K3$-Fläche zumindest endlich viele irreduzible Kurven existieren. Diese sind jedoch auf normale Punkte kontrahierbar und das normale minimale Modell wird gegeben durch eben jene Kontraktion.

Ist V eine normale kompakte Fläche aus $\mathfrak{C}$, so nehme man als normales minimales Modell das normale minimale Modell $\hat{V}'$ einer Desingularisierung $\hat{V}$ von V. Man beachte dabei, dass die induzierte bimeromorphe Abbildung $V \dashrightarrow \hat{V}'$ aufgrund der Nicht-Existenz von Kurven in $\hat{V}'$ holomorph sein muss. $\square$

Folgerung 4.7 *Sei X eine normale kompakte Kählerdreifaltigkeit und $f : X \dashrightarrow V$ eine meromorphe Abbildung auf eine normale kompakte Fläche V in $\mathfrak{C}$ mit $a(V) = 0$. Dann ist die induzierte Abbildung $f' : X \dashrightarrow V'$ auf das normale minimale Modell von V notwendig holomorph.*

Beweis. Es seien $\hat{f} : \hat{X} \to V'$ eine Desingularisierung von f', $E \subsetneq X$ eine irreduzible Komponente des Entartungsortes von f' und $\hat{E} \subsetneq \hat{X}$ das zugehörige Urbild. Da E projektiv ist, ist $\hat{E}$ zumindest Moishezon und es gilt sicherlich $\dim \hat{f}(\hat{E}) \leq 1$. Da in V' keinerlei Kurven existieren, gilt sogar $\dim \hat{f}(\hat{E}) = 0$. Damit aber ist f' holomorph. $\square$

Lemma 4.8 *In der Situation aus Notation 4.1 gelte $(S.C_t) = 0$. Es sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung auf eine normale Varietät Y mit $1 \leq \dim Y \leq 2$ und $f(S) = pt$. Dann existieren eine Faser F von f und eine natürliche Zahl λ mit $F = \lambda S$.*

Beweis. Es seien $f(S) =: y \in Y$ und $F := f^{-1}(y)$ die zugehörige Faser mit der natürlichen Struktur (definiert durch das Bild von $f^*(\mathfrak{m}_y) \to \mathcal{O}_X$). Man schreibe

$$F = \lambda S + D$$

mit einer natürlichen Zahl λ, einem effektiven Zykel D und der Eigenschaft $S \not\subseteq \operatorname{Supp}(D)$. Nimmt man an, dass gilt $D \neq \emptyset$, so erhält man eine exakte Sequenz der Form

$$\mathcal{N}^*_{F/X}|_S \longrightarrow \mathcal{N}^*_{\lambda S/X}|_S \longrightarrow \mathcal{N}^*_{\lambda S/F}|_S \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{N}^*_{F/X}$ global erzeugt und die Abbildung $\mathcal{N}^*_{F/X}|_S \to \mathcal{N}^*_{\lambda S/X}|_S$ nach Wahl von λ generisch injektiv ist. Es folgt, dass $\mathcal{N}^*_{\lambda S/X}|_S$ sicherlich globale Schnitte besitzt, die nach Annahme „$F \neq \lambda S$“ Nullstellen aufweisen müssen. Damit besitzen auch

$$(\mathcal{N}^*_{\lambda S/X}|_S)^{\otimes m} \quad \text{und} \quad (\mathcal{N}^*_{\lambda S/X}|_S)^{[m]} \simeq \mathcal{N}^{*[\lambda m]}_{S/X}$$

globale Schnitte ohne Nullstellen (dabei ist $m \in \mathbb{N}$ (kleinstmöglich) mit der Eigenschaft gewählt, dass $mS \subsetneq X$ ein Cartierdivisor ist). Wegen $(S.C_t) = 0$ gilt jedoch $\mathcal{N}^{*[\lambda m]}_{S/X} \equiv \mathcal{O}_S$, ein Widerspruch. $\square$

Lemma 4.9 *In der Situation aus Notation 4.1 gelte $(S.C_t) = 0$. Dann gibt es keine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ auf eine (normale) Fläche Y mit $f(S) = pt$.*

Beweis. Angenommen, es existiert eine solche holomorphe Abbildung

$$f : X \to Y$$

auf eine normale Fläche Y mit $f(S) =: y \in Y$, so gilt $F := f^{-1}(y) = \lambda S$ nach Lemma 4.8. Mit Hilfe des kanonischen Epimorphismus

$$f^*(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2) \longrightarrow \mathcal{I}_F/\mathcal{I}_F^2 \simeq \mathcal{N}^*_{\lambda S/X} \longrightarrow 0$$

erkennt man deshalb, dass $\mathcal{N}^*_{\lambda S/X}$ globale Schnitte mit Nullstellen besitzt, denn wegen $\dim Y = 2$ gilt für die Einbettungsdimension von Y an der Stelle y

$$\text{emb}_y Y = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2) \geq 2$$

und $\text{emb}_y Y$ ist die kleinstmögliche Zahl $l \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{O}_F^l \longrightarrow \mathcal{N}^*_{\lambda S/X}$ eine Surjektion darstellt. Dann aber kann es sich bei $\mathcal{N}^{*[m]}_{\lambda S/X}|_S \simeq \mathcal{N}^{*[\lambda m]}_{S/X}$ im Widerspruch zu $(S.C_t) = 0$ abermals nicht um ein numerisch triviales Geradenbündel handeln. □

Folgerung 4.10 *In der Situation aus Notation 4.1 gelte $(S.C_t) = 0$. Dann gibt es keine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ auf eine normale Fläche Y in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y) = 0$.*

Beweis. Man nehme an, es gibt eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ auf eine normale Fläche Y in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y) = 0$ und betrachte die durch das normale minimale Modell $\kappa : Y \to Y'$ induzierte holomorphe Abbildung

$$f' := \kappa \circ f : X \to Y'.$$

Wegen $a(Y') = a(Y) = 0$ kann die Moishezonfläche S durch f' nicht surjektiv auf Y' abgebildet werden. Weil Y' zudem frei von Kurven ist, ist es genausowenig möglich, dass S ein 1-dimensionales Bild in Y' besitzt. Infolgedessen bleibt lediglich die Abbildung auf einen Punkt. Doch eine solche ist nach Lemma 4.9 ausgeschlossen. □

Damit sind alle erforderlichen Vorarbeiten erledigt.

Notation 4.11 Im Folgenden bezeichne

$$\sigma : \hat{X} \to X$$

stets eine Desingularisierung von X.

Wie bereits angekündigt, soll der Ausschluss des Falls „$(S.C_t) = 0$“ mit Hilfe A. Fujikis bimeromorpher Klassifikation glatter kompakter Dreifaltigkeiten in $\mathfrak{C}$ erfolgen. Fujikis Ergebnisse werden zu diesem Zweck auf die Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ angewendet werden. Den ersten und wesentlichen Schritt bildet dabei das nachfolgende Lemma 4.12, dessen Kern ein aktuelles Resultat von M. Brunella bildet. Dieses erlaubt unter anderem den Ausschluss des ansonsten sehr unangenehmen Falls „$\hat{X}$ einfach“.

Lemma 4.12 *In der Situation aus Notation 4.1 gelte $(S.C_t) = 0$. Dann ist X uniruled.*

Beweis. Nach [Br05, Corollary 1.1] ist zu zeigen, dass K_X nicht pseudo-effektiv ist. Nimmt man zu diesem Zweck das Gegenteil an, so existiert nach [Bo02, Proposition 2.1.12] eine divisorielle Zariskizerlegung

$$K_X \equiv A + B \tag{1}$$

mit einem effektiven $\mathbb{R}$-Divisor A und einem $\mathbb{R}$-Divisor B, nef in Kodimension 1. Weil sich die Kurven C_t in einer 1-dimensionalen Familie bewegen, gilt also $(B.C_t) \geq 0$, weshalb zusammen mit $(K_X.C_t) < 0$ folgt $(A.C_t) < 0$. Deshalb gibt es eine positive reelle Zahl $\mu \in \mathbb{R}^+$ sowie einen effektiven $\mathbb{R}$-Divisor A', sodass sich Gleichung (1) verfeinern lässt zu

$$K_X \equiv \mu S + A' + B. \tag{2}$$

Schneiden mit C_t ergibt jetzt

$$\underbrace{(K_X.C_t)}_{<0} = \mu \underbrace{(S.C_t)}_{=0} + \underbrace{(A'.C_t)}_{\geq 0} + \underbrace{(B.C_t)}_{\geq 0},$$

ein Widerspruch. $\square$

Damit genügt es, sich mit einer Variante A. Fujikis bimeromorpher Klassifikation zu befassen, in der nur noch diejenigen nicht-projektiven Dreifaltigkeiten in $\mathfrak{C}$ beschrieben sind, die sich durch die zusätzliche Eigenschaft „uniruled“ auszeichnen:

Satz 4.13 *Sei $\hat{X}$ eine glatte kompakte Dreifaltigkeit in Fujikis Klasse $\mathfrak{C}$ der algebraischen Dimension $a(\hat{X}) \leq 2$. Ist die Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ uniruled, so lässt sie sich einer der beiden folgenden Möglichkeiten zuordnen:*

1. *$\hat{X}$ ist ein holomorpher Faserraum über einer kompakten Riemannschen Fläche C und die allgemeine Faser ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Dabei besitzt $\hat{X}$ die algebraische Dimension $a(\hat{X}) = 1$ oder $a(\hat{X}) = 2$.*

2. *$\hat{X}$ ist ein holomorpher Faserraum über einer normalen kompakten Fläche Y mit $a(Y) = 0$ und allgemeiner Faser $\mathbb{P}_1$. In diesem Fall besitzt $\hat{X}$ die algebraische Dimension $a(\hat{X}) = 0$ oder $a(\hat{X}) = 1$.*

Beweis. Siehe [Fu83, Proposition 14.1]. $\square$

Folgerung 4.14 *In der Situation aus Notation 4.1 sei X nicht projektiv. Dann gilt* $(S.C_t) \neq 0$.

Beweis. Angenommen es gilt $(S.C_t) = 0$, so kommen für $\hat{X}$ nach Lemma 4.12 nur die beiden in Satz 4.13 angegebenen Möglichkeiten in Frage. Beide gilt es auszuschließen.

I) Im ersten Szenario ist

$$\hat{f} : \hat{X} \to C$$

ein holomorpher Faserraum über einer kompakten Riemannschen Fläche C und die allgemeine Faser ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

mit der a priori meromorphen Abbildung $f : X \dashrightarrow C$.

Man möchte einsehen, dass f holomorph ist. Bezeichnet dazu $E \subsetneq X$ eine irreduzible Komponente des Entartungsortes von f und

$$\hat{E} := \sigma^{-1}(E) \subsetneq \hat{X}$$

das entsprechende Urbild in $\hat{X}$, so sieht man leicht ein, dass $\hat{E}$ durch $\hat{f}$ auf einen Punkt abgebildet werden muss. Denn angenommen es gilt $\hat{f}(\hat{E}) = C$, so schneidet $\hat{E}$ insbesondere jede allgemeine Faser von $\hat{f}$, weshalb $\hat{X}$ aufgrund der Moishezoneigenschaft von $\hat{E}$ algebraisch zusammenhängend sein müsste. Damit aber wäre auch X algebraisch zusammenhängend und folglich projektiv nach Folgerung 2.16. Also ist $f : X \to C$ holomorph.

Mit genau den gleichen Argumenten wie eben, angewendet auf $(S, f : X \to C)$ anstelle von $(\hat{E}, \hat{f} : \hat{X} \to C)$ schließt man weiter, dass gilt $f(S) = pt$. Für $F_S := f^{-1}f(S)$, ausgestattet mit der natürlichen Struktur, gilt daher $F_S = \lambda S$ mit einer natürlichen Zahl λ nach Lemma 4.8.

Bezeichnet noch F eine allgemeine Faser von f, so ist F genau wie die allgemeine Faser von $\hat{f}$ ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Deshalb gilt $(K_F^2) = 0$. Es folgt $(K_X^2.F) = (K_F^2) = 0$ mit Hilfe der Adjunktionsformel und

$$0 = (K_X^2.F) = (K_X^2.F_S) = \lambda \cdot (K_X^2.S).$$

Aufgrund der Positivität von $-m'K_X|_S$ ist dies unmöglich.

Es bleibt das zweite Szenario, in dem

$$\hat{f} : \hat{X} \to Y$$

ein holomorpher Faserraum über einer normalen kompakten Fläche Y in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y) = 0$ ist. Dabei ist die induzierte a priori meromorphe Abbildung $f' : X \dashrightarrow Y'$ auf das normale minimale Modell Y' von Y nach Folgerung 4.7 zwangsläufig holomorph. Eine solche holomorphe Abbildung von X auf eine normale Fläche Y' in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y') = 0$ kann es nach Folgerung 4.10 jedoch nicht geben. $\square$

4.3 Die Kontraktion auf einen Punkt

Endlich kann man beginnen, die Früchte der im aktuellen Kapitel 4 bisher geleisteten Arbeit zu ernten.

Proposition 4.15 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so existieren eine normale kompakte Varietät Y und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : X \to Y,$$

sodass gilt:

i) $\varphi(S) = pt$;

ii) Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X - S \longrightarrow Y - \{pt\}$ *ist biholomorph.*

Beweis. Aufgrund der Existenz des Punktes $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft, dass alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ durch eben diesen verlaufen, ist S projektiv mit Picardzahl $\rho(S) = 1$ (Lemma 2.17). Nimmt man daher an, dass gilt $(S.C_t) > 0$, so handelt es sich bei $\mathcal{O}_S(mS)$ um ein amples Geradenbündel auf S, weshalb X nach Lemma 2.19 projektiv sein müsste. Also gilt $(S.C_t) \leq 0$ und da der Fall „$(S.C_t) = 0$“ in Abschnitt 4.2 ausgeschlossen werden konnte (Folgerung 4.14), bleibt nur die Möglichkeit „$(S.C_t) < 0$“.

Mit $(S.C_t) < 0$ ist das eingeschränkte Konormalenbündel $\mathcal{J}/\mathcal{I}\mathcal{J} = \mathcal{O}_S(-mS)$ sicherlich ample und insbesondere eine positive kohärente Garbe im Sinne von H. Grauert ([Gr62], [AnTo82]). Wegen $S = (mS)_{red}$ und weil eine kohärente Garbe auf einem komplexen Raum genau dann positiv ist, wenn dies eingeschränkt auf die Reduktion der Fall ist ([AnTo82, II, Corollaire 7]), ist auch $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ positiv auf mS. Der Grauertsche Kontraktionssatz 1.27 liefert jetzt die propagierte Kontrahierbarkeit des komplexen Raumes $mS \subsetneq X$ auf einen normalen Punkt. $\square$

Natürlich möchte man die Fläche S nicht einfach nur auf einen Punkt in einer normalen kompakten Varietät Y kontrahieren können. Vielmehr soll Y genau wie X $\mathbb{Q}$-faktoriell sein und höchstens terminale Singularitäten besitzen.

Den ersten Schritt auf dem Weg zur Verifikation der gewünschten Eigenschaften bildet

Lemma 4.16 *In der Situation aus Proposition 4.15 gilt:* $H^2(S,\mathbb{Z})/_{Torsion} \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Aufgrund der Existenz des Punktes $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft, dass alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ durch eben diesen verlaufen, ist die Fläche S nach Lemma 2.17 projektiv mit Picardzahl $\rho(S) = 1$. Folglich genügt es für den Nachweis der Behauptung zu zeigen, dass die Bedingung $H^2(S,\mathcal{O}_S) = 0$ bzw., via Serredualität, die Bedingung $H^0(S,\omega_S) = 0$ erfüllt ist.

Man verwendet hierfür, dass ausgehend vom surjektiven Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X(K_X + S)|_S \longrightarrow \omega_S \longrightarrow 0, \tag{3}$$

der außerhalb der Singularitäten von X auch injektiv ist, eine Inklusion reflexiver Garben der Gestalt

$$\omega_S^{[m']} \overset{(3)}{\simeq} [\mathcal{O}_X(K_X + S)|_S]^{[m']} \hookrightarrow [\mathcal{O}_X(K_X + S)^{[m']}]|_S$$

zur Verfügung steht. Dabei sei $m' \in \mathbb{N}$ derart gewählt, dass sowohl $m'S$ als auch $m'K_X$ Cartierdivisoren darstellen.

Nimmt man nun an, dass ω_S einen nicht-trivialen globalen Schnitt besitzt, so gilt das Gleiche für die lokal freie Garbe $[\mathcal{O}_X(K_X + S)^{[m']}]|_S$. Da es sich bei dieser wegen $(-K_X.C_t) > 0$ sowie $(S.C_t) < 0$ um ein negatives Geradenbündel handelt, kann es einen solchen nicht-trivialen globalen Schnitt jedoch nicht geben. Also hat man

$$H^2(S,\mathcal{O}_S) \cong H^0(S,\omega_S) = 0.$$

□

Handelt es sich bei X zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Proposition 4.15 um eine Gorensteindreifaltigkeit, so gilt sogar $\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, siehe Abschnitt 4.4.

Lemma 4.17 *In der Situation aus Proposition 4.15 sei $m \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich mit der Eigenschaft gewählt, dass $\mathcal{O}_X(mS)$ lokal frei ist. Dann gibt es zu jedem holomorphen Geradenbündel $L \in Pic(X)$ eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ und ein holomorphes Geradenbündel $L' \in Pic(Y)$, sodass gilt:*

$$L^k \simeq \varphi^* L' \otimes \mathcal{O}_X(kbmS).$$

Insbesondere gibt es zu jedem holomorphen Geradenbündel $L \in Pic(X)$ mit $(L.C_t) = 0$ eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein holomorphes Geradenbündel $L' \in Pic(Y)$, sodass gilt:

$$L^k \simeq \varphi^* L'.$$

Zusatz: *Ist $H^2(S,\mathbb{Z})$ torsionsfrei, so kommt man stets mit $k = 1$ aus.*

Beweis. Es bezeichne $y_0 := \varphi(S) \in Y$ das Bild von S in Y. Es sei $V = V(y_0) \subsetneq Y$ eine Steinsche Umgebung von y_0 und $U := \varphi^{-1}(V) \subsetneq X$ deren Urbild in X. Dabei sei V so gewählt, dass U Deformationsretrakt von S ist. Zur Abkürzung sei die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_U$ mit φ_U bezeichnet.

Nach Wahl von V und Cartan-Serres Theorem B gilt $H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0$ für alle $q \geq 1$. Da $-m'K_X|_S$ nach Lemma 2.17 ample ist, ist $-K_X$ φ_U-ample und die direkten Bildgarben $R^q\varphi_{U*}\mathcal{O}_U$ verschwinden für $q \geq 1$ nach dem relativen Kawamataverschwindungssatz (etwa [KaMaMa87, Theorem 1-2-5]). Mit Hilfe der Lerayschen Spektralsequenz schließt man

$$H^q(U, \mathcal{O}_U) = H^q(V, \mathcal{O}_V) = 0 \quad \text{für alle} \quad q \geq 1$$

und erhält infolgedessen ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} H^1(U, \mathcal{O}_U^*) \arrow[r, "\cong"] & H^2(U, \mathbb{Z}) \\ H^1(V, \mathcal{O}_V^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\varphi_U^*"] & H^2(V, \mathbb{Z}) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad (D)$$

wobei wieder nach Wahl von V gilt

$$H^2(V, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{sowie} \quad H^2(U, \mathbb{Z}) \cong H^2(S, \mathbb{Z}).$$

Wegen $H^2(S, \mathbb{Z})/_{Torsion} \cong \mathbb{Z}$ (Lemma 4.16) existiert also eine (eventuell triviale) endliche Gruppe

$$G_{NumTriv} \subsetneq \mathrm{Pic}(U) \quad \text{mit} \quad A \equiv \mathcal{O}_U \text{ für alle } A \in G_{NumTriv},$$

sodass sich nach Wahl von m (minimal) ergibt:

$$\mathrm{Pic}(U) \cong \mathbb{Z}\cdot\mathcal{O}_U(mS) \oplus G_{NumTriv}. \qquad (*)$$

Sei nun $L \in \mathrm{Pic}(X)$ ein holomorphes Geradenbündel. Nach $(*)$ gibt es eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$L^k|_U \simeq \mathcal{O}_U(kbmS).$$

Deshalb handelt es sich bei $L' := \varphi_*(L^k \otimes \mathcal{O}_X(-kbmS))$ um ein holomorphes Geradenbündel auf Y, für das nach Konstruktion gilt

$$\varphi^*L' \simeq L^k \otimes \mathcal{O}_X(-kbmS)$$

(eingeschränkt auf U sind beide Geradenbündel trivial, außerhalb von U ist φ ein Isomorphismus). Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

Für den zweiten Teil der Behauptung sei $L \in \operatorname{Pic}(X)$ ein holomorphes Geradenbündel mit $(L.C_t) = 0$. Wie soeben gezeigt wurde, existieren zu L eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ und ein holomorphes Geradenbündel $L' \in \operatorname{Pic}(Y)$, sodass gilt

$$L^k \simeq \varphi^* L' \otimes \mathcal{O}_X(kbmS).$$

Dabei erkennt man durch Schneiden mit der Kurve C_t, dass wegen $(L.C_t) = (\varphi^* L'.C_t) = 0$ und $(S.C_t) < 0$ zwangsläufig die Bedingung

$$b = 0$$

erfüllt sei muss. Es folgt $L^k \simeq \varphi^* L'$.

Die Korrektheit des Zusatzes ist mit dem Beweis klar. $\square$

Proposition 4.18 *In der Situation aus Proposition 4.15 ist Y eine $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät und besitzt höchstens terminale Singularitäten.*

Beweis. Es bezeichne wieder $y_0 := \varphi(S) \in Y$ das Bild von S in Y.

I) Für den Nachweis der Eigenschaft „$\mathbb{Q}$-faktoriell“ sei $D \subsetneq Y$ ein (effektiver) irreduzibler Weildivisor, $\mathcal{O}_Y(D)$ die zugehörige reflexive Garbe und

$$\hat{D} := \overline{\varphi^{-1}(D - \{y_0\})} \subsetneq X$$

die strikte Transformierte in X. Es ist zu zeigen, dass eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathcal{O}_Y(rD)$ lokal frei ist. Da die Behauptung im Fall $y_0 \notin \operatorname{Supp}(D)$ trivial ist, sei $y_0 \in \operatorname{Supp}(D)$ vorausgesetzt. Es gilt dann $(\hat{D}.C_t) > 0$ und wegen $(S.C_t) < 0$ finden sich natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, sodass es sich einerseits bei $a\hat{D}$ sowie bS um Cartierdivisoren in X handelt und andererseits die Gleichung

$$((\mathcal{O}_X(a\hat{D}) \otimes \mathcal{O}_X(bS)).C_t) = 0$$

erfüllt ist. Nach dem voranstehenden Lemma 4.17 existieren also eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ und ein holomorphes Geradenbündel $L' \in \operatorname{Pic}(Y)$ mit

$$\mathcal{O}_X(ka\hat{D}) \otimes \mathcal{O}_X(kbS) \simeq \varphi^* L'.$$

Da $L' \simeq \varphi_* \varphi^* L'$ außerhalb des Punktes y_0 mit der reflexiven Garbe $\mathcal{O}_Y(kaD)$ übereinstimmt, folgt $L' \simeq \mathcal{O}_Y(kaD)$ und damit die Behauptung für $r := ka$.

II) Für die Charakterisierung der Singularitäten von Y seien $\sigma : \hat{X} \to X$ eine Desingularisierung von X und $E_1, \ldots, E_r$ die 1-kodimensionalen (irreduziblen) Komponenten des exzeptionellen Ortes von σ. Nach Voraussetzung gilt dann

$$K_{\hat{X}} = \sigma^* K_X + \sum a_i E_i \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Q}^+ \tag{4}$$

als Gleichung von $\mathbb{Q}$-Cartierdivisoren. Im gleichen Sinne gilt

$$K_X = \varphi^* K_Y + a_0 S \quad \text{mit} \quad a_0 \in \mathbb{Q} \tag{5}$$

nach Konstruktion von φ. Hierbei erkennt man durch Schneiden mit C_t sofort, dass sogar die Bedingung $a_0 \in \mathbb{Q}^+$ erfüllt sein muss, denn man hat

$$(K_X.C_t) < 0,\ (\varphi^* K_Y.C_t) = 0 \quad \text{sowie} \quad (S.C_t) < 0.$$

Damit interessiert noch die Bestimmung von $\sigma^*(a_0 S)$: Bezeichnet dazu $\hat{S}$ die strikte Transformierte von S bezüglich σ, so gilt

$$\sigma^*(a_0 S) = a_0 \hat{S} + \sum b_i E_i \quad \text{mit} \quad b_i := \begin{cases} a_0 a_i, \text{ falls } \hat{S} \cap E_i \neq \emptyset \\ \ 0 \ \ , \text{ sonst} \end{cases}. \tag{6}$$

Setzt man die Gleichungen (5) sowie (6) in Gleichung (4) ein, so erhält man

$$K_{\hat{X}} = (\varphi \circ \sigma)^* K_Y + a_0 \hat{S} + \sum (a_i + b_i) E_i \quad \text{mit} \quad a_0, a_i + b_i \in \mathbb{Q}^+, \tag{7}$$

was bedeutet, dass die Varietät Y genau wie X höchstens terminale Singularitäten besitzt.

III) Da terminale Singularitäten rational sind (Proposition 1.25), liefert [Re87, Theorem 3.19] die noch ausstehende Eigenschaft „Cohen-Macaulay“. □

Zusammenfassend notiere ich als Hauptresultat dieses Kapitels:

Satz 4.19 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : X \to Y,$$

sodass gilt:

1. *$\varphi(S) = pt$;*
2. *Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X - S \longrightarrow Y - \{pt\}$ ist biholomorph.*

Beweis. Man nehme Proposition 4.15 sowie Proposition 4.18. □

4.4 Der Gorensteinfall

Ist im Setup aus Notation 4.1 die Varietät X zusätzlich Gorenstein, so verbessert sich die Situation wesentlich. Der Grund hierfür liegt darin, dass die Fläche $S \subsetneq X$ unter der genannten Zusatzbedingung nach Lemma 1.22 ein Cartierdivisor ist. Damit stehen eine ganze Reihe von Ergebnissen über Gorensteinflächen zur Verfügung, die eine explizite Beschreibung der Situation ermöglichen. Da man mit deren Hilfe insbesondere nachweisen kann, dass die Fläche S normal sein muss, wird es möglich sein, auf die Verwendung A. Fujikis Klassifikation aus Satz 4.13 zu verzichten.

Ich beginne mit einer Zusammenstellung der für mich besonders relevanten Ergebnisse zu Gorenstein-del Pezzoflächen.

Proposition 4.20 *Sei S eine Gorenstein-del Pezzofläche. Dann gilt:*

i) $H^1(S, \mathcal{O}_S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$;

Ist die Fläche S nicht normal, $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung und $E \subsetneq S$ der nicht-normale Ort (wobei die komplexe Struktur von E definiert sei durch das Führerideal $\mathcal{A}nn_{\mathcal{O}_S}(\nu_*\mathcal{O}_{\tilde{S}}/\mathcal{O}_S) \subsetneq \mathcal{O}_S$), so gilt weiter:

ii) $E \simeq \mathbb{P}_1$ *und* $(K_S.E) = -1$;

iii) Es existiert eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \nu_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \omega_E \longrightarrow 0.$$

Beweis. Siehe [HiWa81, Corollary 2.5] und [Re94, Corollary 4.10], [Mo82, 3.35] sowie [Mo82, 3.34.2]. □

Lemma 4.21 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte* ***Gorenstein****-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird und $\nu : \tilde{S} \to S$ deren Normalisierung. Ist $Pic(\tilde{S})$ torsionsfrei, so gilt:*

i) $Pic(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$;

ii) Die Fläche S ist normal.

Beweis. Aus Lemma 2.17 sowie Lemma 1.22 weiß man, dass es sich bei S um eine projektive Gorensteinfläche mit Picardzahl $\rho(S) = 1$ handelt. Wäre deren Normalenbündel ample, so folgte die Projektivität von X aus Lemma 2.19, weshalb $N_{S/X}$ entweder negativ oder numerisch trivial sein muss. Insbesondere besitzt die Fläche S nach der Adjunktionsformel ein negatives kanonisches Bündel, sodass die Ergebnisse aus Proposition 4.20 zur Verfügung stehen.

I) Nach Proposition 4.20 i) gilt $H^1(S, \mathcal{O}_S) = H^2(S, \mathcal{O}_S) = 0$, sodass zusammen mit $\rho(S) = 1$ folgt

$$\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \quad \text{sowie} \quad H^2(S, \mathbb{Z})/_{Torsion} \cong \mathbb{Z}.$$

Für Aussage i) ist also lediglich zu zeigen, dass $\mathrm{Pic}(S)$ torsionsfrei ist. Bezeichnet dazu $L \in \mathrm{Pic}(S)$ ein numerisch triviales Geradenbündel, so gilt zumindest

$$\nu^* L \simeq \mathcal{O}_{\tilde{S}},$$

weil $\mathrm{Pic}(\tilde{S})$ nach Voraussetzung keine Torsion besitzt. Für den Schluss zurück auf die Fläche S verwendet man die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \omega_E \longrightarrow 0 \tag{8}$$

aus Proposition 4.20 iii) und tensoriert diese mit L. Wegen

$$\nu_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \otimes L \simeq \nu_* \nu^* L \simeq \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \quad \text{sowie} \quad L|_E \simeq \mathcal{O}_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$$

führt dies zu

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{S}} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \omega_E \longrightarrow 0. \tag{9}$$

Ein Vergleich von (8) und (9) liefert $L \simeq \mathcal{O}_S$.

II) Angenommen, die Fläche S ist nicht normal, so besagt Proposition 4.20 ii), dass es sich beim nicht-normalen Ort $E \subsetneq S$ (mit komplexer Struktur definiert durch das Führerideal) um eine glatte rationale Kurve mit $(K_S.E) = -1$ handelt. Aus der Adjunktionsformel erhält man daher

$$\underbrace{(K_S.E)}_{-1} = \underbrace{(K_X.E)}_{\leq -1} + \underbrace{(S.E)}_{\leq 0}$$

und folglich $N_{S/X} \equiv \mathcal{O}_S$. Da $\mathrm{Pic}(S)$ torsionsfrei ist, gilt sogar $N_{S/X} \simeq \mathcal{O}_S$. Damit müsste die Dreifaltigkeit X nach Folgerung 2.23 projektiv sein, ein Widerspruch. □

Die Situation im Gorensteinfall:

Satz 4.22 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t \in T}$ eine **maximale** nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie*

$(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe einen Punkt $x_0 \in X$, durch den alle Kurven der Familie verlaufen. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so gilt:

1. *$S \simeq \mathbb{Q}_0$ (Kegel mit rationalem Doppelpunkt als Spitze) und $N_{S/X} \simeq \mathcal{O}_S(-1)$.*
2. *Es existiert eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$ auf eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle* ***Gorenstein****varietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten, wobei gilt:*
   a) $\varphi(S) = pt$;
   b) Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-\{pt\}$ ist biholomorph.

Beweis. Aus Lemma 2.17 sowie Lemma 1.22 weiß man wieder, dass es sich bei S um eine projektive Gorensteinfläche mit Picardzahl $\rho(S) = 1$ handelt. Wäre deren Normalenbündel ample, so folgte die Projektivität von X aus Lemma 2.19, weshalb $N_{S/X}$ entweder negativ oder numerisch trivial sein muss und S nach der Adjunktionsformel ein negatives kanonisches Bündel besitzt.

Es bezeichne $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung von S. Da die Familie $(C_t)_{t\in T}$ nach Voraussetzung maximal ist, ist Folgerung 4.3 anwendbar und man rechnet mit Hilfe des normalisierten Graphen leicht nach, dass gilt $\mathrm{Pic}(\tilde{S}) \cong \mathbb{Z}$. Deshalb liegt in S nach Lemma 4.21 eine normale projektive Gorensteinfläche mit einem positiven antikanonischen Divisor vor. Es ist (etwa aus [HiWa81]) bekannt, dass es sich unter diesen Umständen bei x_0 lediglich um einen glatten Punkt, um einen rationalen Doppelpunkt oder um eine elliptische Gorensteinsingularität handeln kann.

Angenommen, $x_0 \in S$ ist ein glatter Punkt, so folgt $S \simeq \mathbb{P}_2$ und die C_t's sind Geraden durch den Punkt x_0. Dies steht im Widerspruch zur Maximalitätsforderung an die 1-dimensionale Familie $(C_t)_{t\in T}$.

Weiter angenommen, $x_0 \in S$ ist eine elliptische Gorensteinsingularität, so folgt $(K_S.C_t) = -1$ und $N_{S/X} \simeq \mathcal{O}_S$. Diese Möglichkeit lässt sich wie für nicht-normales S mit Hilfe von Folgerung 2.23 ausschließen.

Folglich ist $x_0 \in S$ ein rationaler Doppelpunkt und die Struktur von S ist wie behauptet die eines Kegels mit dem Punkt x_0 als Spitze. Die Aussage über das Normalenbündel ergibt sich wegen $(K_S.C_t) = -2$ und $(K_X.C_t) = -1$ aus der Adjunktionsformel.

Die Kontrahierbarkeit der Fläche S auf einen Punkt in einer kompakten $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten ergibt sich wegen $(S.C_t) = -1$ genau wie für den $\mathbb{Q}$-Gorensteinfall in Satz 4.19 aus Grauerts Kontraktionssatz 1.27 und Proposition 4.18. Ich betone an dieser Stelle noch einmal, dass man die ungeliebte Möglichkeit „$(S.C_t) = 0$“ im Gorensteinfall nicht mehr explizit mit Hilfe Fujikis Klassifikation auszuschließen braucht.

Es bleibt die Aufgabe, den Index von Y zu berechnen. Dazu sei $a \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gewählt, dass aK_Y ein Cartierdivisor ist. Nach Konstruktion und Lemma 4.17

existiert eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$, sodass gilt

$$aK_X = \varphi^*(aK_Y) \otimes \mathcal{O}_X(bS)$$

bzw.

$$a \cdot (K_X.C_t) = b \cdot (S.C_t). \tag{*}$$

Dabei ist es wegen $\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ nicht notwendig, mit einem Vielfachen von aK_X zu rechnen (d.h. man kann $k = 1$ in Lemma 4.17 wählen). Der Index von Y stellt nun die kleinstmögliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ dar, sodass sich Gleichung (*) erfüllen lässt. Wegen $(K_X.C_t) = (S.C_t) = -1$ bedeutet dies im vorliegenden Fall

$$a = b = 1.$$

Damit ist Y Gorenstein. $\square$

5 2-dimensionale nicht-spaltende Familien rationaler Kurven

Es folgt das Studium 2-dimensionaler nicht-spaltender Familien rationaler Kurven mit der Eigenschaft, dass die Dreifaltigkeit X von den Mitgliedern der Familien nicht überdeckt wird. Die Kurven einer solchen Familie $(C_t)_{t\in T}$ füllen zwangsläufig nur eine (irreduzible reduzierte) Fläche aus. Wegen $\dim T = 2$ existiert zu jedem allgemeinen Punkt dieser Fläche eine 1-dimensionale Teilfamilie der Familie $(C_t)_{t\in T}$, die die Fläche ebenfalls überdeckt. Dieser Umstand macht es möglich, lediglich mit der 1-dimensionalen (Teil-)Familie zu argumentieren, was im Hinblick auf eine Verwendung der Resultate aus Kapitel 4 sehr vorteilhaft ist.

Die Ausgangssituation für dieses fünfte Kapitel sei also wie folgt:

Notation 5.1 Es sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 2-dimensional, aber überdecke die Dreifaltigkeit X nicht.

Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, $x_0 \in S$ einen allgemeinen (glatten) Punkt und $T^*(x_0) := q(p^{-1}(x_0))$ die Menge aller Kurven durch den Punkt x_0.

Es sei $T(x_0)$ eine irreduzible Komponente von $T^*(x_0)$, $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ die zugehörige nicht-spaltende Familie rationaler Kurven (durch den Punkt x_0) und

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dr, "h"] & \\ \mathcal{C}(x_0) \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p_{x_o}"] \arrow[d, "q_{x_o}"] & & S \\ T(x_0) & & \end{tikzcd} \qquad (G(x_0))$$

der normalisierte Graph der Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ samt Steinfaktorisierung.

Desweiteren seien $m, m' \in \mathbb{N}$ (kleinstmöglich) mit der Eigenschaft gewählt, dass sowohl mS als auch $m'S$ sowie $m'K_X$ Cartierdivisoren darstellen und es seien $\mathcal{I}$ sowie $\mathcal{J}$ die kohärenten Idealgarben der kompakten komplexen Unterräume $S \subsetneq X$ sowie $mS \subsetneq X$. $\boxdot$

Wie bereits eingangs erwähnt, wird es sich als die entscheidende Beobachtung herausstellen, dass die Fläche S aufgrund ihrer Irreduzibilität auch von den Kurven der 1-dimensionalen Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ vollständig ausgefüllt wird, d.h. dass gilt

$$S = \bigcup_{t\in T} C_t = \bigcup_{t\in T(x_0)} C_t.$$

Damit nämlich lässt sich ein großer Teil der Resultate aus Kapitel 4 ebenso in der Situation aus Notation 5.1 zur Anwendung bringen.

5.1 Die Birationalität der Auswertungsabbildung $p_{x_0} : \mathcal{C}(x_0) \to S$

Für den Nachweis der Birationalität der Auswertungsabbildung $p_{x_0} : \mathcal{C}(x_0) \to S$ aus dem Graphen $(G(x_0))$ sind nur geringfügige Anpassungen des entsprechenden Beweises für die Birationalität von $p : \mathcal{C} \to S$ aus Abschnitt 4.1 notwendig. Ich gebe dennoch eine vollständige Darstellung.

Lemma 5.2 *Sei X eine normale kompakte Kählerdreifaltigkeit und $(C_t)_{t\in T}$ eine 2-dimensionale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven, die die Varietät X nicht überdeckt. Weiter sei $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, $x_0 \in S$ ein allgemeiner (glatter) Punkt und $T(x_0) \subseteq T^*(x_0)$ eine irreduzible Komponente. Dann gilt: Ist die Familie $(C_t)_{t\in T}$* ***maximal****, so verläuft durch jeden allgemeinen Punkt $x \in S$ mit $x \neq x_0$ genau eine Kurve aus der 1-dimensionalen Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$.*

Beweis. Es sei

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(x_0) \arrow[r, "p_{x_o}"] \arrow[d, "q_{x_o}"'] & S \ni x_0 \\ T(x_0) & \end{tikzcd} \qquad (D_0)$$

der normalisierte Graph der Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$.

Es ist zu zeigen, dass die Auswertungsabbildung $p_{x_0} : \mathcal{C}(x_0) \to S$ birational ist. Dazu seien $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung von S und $\sigma : \hat{S} \to \tilde{S}$ eine Desingularisierung von $\tilde{S}$ durch sukzessives Aufblasen singulärer Punkte und Normalisieren. Bezeichnet $(\hat{C}_t)_{t\in T}$ die längs $\nu \circ \sigma : \hat{S} \to S$ geliftete Familie aus Bemerkung 1.10, so lässt sich das Diagramm (D_0) um den normalisierten Graphen dieser Familie $(\hat{C}_t)_{t\in T}$ zu folgendem Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{C}}(x_0) \arrow[r, "\hat{p}_{x_o}"] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\hat{q}_{x_o}"'] & \hat{S} \arrow[d, "\nu\circ\sigma"] \\ \mathcal{C}(x_0) \arrow[r, "p_{x_o}"] \arrow[d, "q_{x_o}"] & S \\ T(x_0) & \end{tikzcd} \qquad (D_1)$$

erweitern. Dabei handelt es sich nach Konstruktion bei $\mathcal{C}(x_0)$ um ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über der glatten Kurve $T(x_0)$ und bei $\hat{\mathcal{C}}(x_0)$ um die Aufblasung dieses $\mathbb{P}_1$-Bündels in endlich vielen Punkten.

Im Folgenden bezeichne $t \in T(x_0)$ stets einen allgemeinen Punkt und $\mu_t : \mathbb{P}_1 \to \hat{C}_t$ die Normalisierung der zugehörigen rationalen Kurve $\hat{C}_t$. Schließlich sei $\hat{x}_0 \in \hat{S}$ derjenige (eindeutig bestimmte) Punkt in $\hat{S}$ gegeben durch $(\nu \circ \sigma)(\hat{x}_0) = x_0$.

Da die Fläche $\hat{S}$ glatt ist, existiert eine kurze exakte Garbensequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}_1} \xrightarrow{T(\mu_t)} \mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t}) \longrightarrow L \oplus \tau \longrightarrow 0 \tag{*}$$

mit einem holomorphen Geradenbündel L und einem Torsionsanteil τ, wobei die Bedingung „$\tau \equiv 0$" mit Sicherheit erfüllt ist, falls die Kurve $\hat{C}_t$ regulär ist. Da alle gelifteten Kurven $\hat{C}_t$ durch den Punkt $\hat{x}_0$ verlaufen, muss das zurückgezogene Tangentialbündel $\mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t})$ ample sein. Schreibt man daher

$$\mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_2),$$

so gilt ohne Einschränkung $a_1 \geq a_2 \geq 1$. Desweiteren gilt $a_1 \geq 2$ wegen $T_{\mathbb{P}_1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2)$. Verwendet man nun, dass sich die rationale Kurve $\hat{C}_t$ nach Voraussetzung in einer höchstens 2-dimensionalen (überdeckenden) Familie bewegt, so erhält man eine Abschätzung (etwa [Ko96, II, Theorem 1.2])

$$\begin{aligned} 2 = \dim T &\geq \chi(\mathbb{P}_1, \mu_t^*(T_{\hat{S}}|_{\hat{C}_t})) - \dim Aut(\mathbb{P}_1) \\ &= h^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a_2)) - 3 = a_1 + a_2 - 1 \geq 2, \end{aligned}$$

woraus folgt $a_1 = 2$ sowie $a_2 = 1$.

Einsetzen in (*) führt zu

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1) \longrightarrow L \oplus \tau \longrightarrow 0.$$

Es folgt $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$ sowie $\tau \equiv 0$, weshalb es sich bei $\hat{C}_t$ um eine rationale Kurve mit

$$(\hat{C}_t^2) = \deg(N_{\hat{C}_t/\hat{S}}) = 1 \quad \text{und} \quad (-K_{\hat{S}}.\hat{C}_t) = a_1 + a_2 = 3$$

handelt. Man erkennt außerdem mit Hilfe der Adjunktionsformel, dass die Kurve $\hat{C}_t$ glatt ist.

Bezeichnet jetzt noch

$$\sigma_{\hat{x}_0} : \Sigma = Bl_{\hat{x}_0}\hat{S} \to \hat{S}$$

die Aufblasung der Fläche $\hat{S}$ im glatten Punkt $\hat{x}_0 \in \hat{S}$, so lässt sich die Familie $(\hat{C}_t)_{t \in T(x_0)}$ (wieder wie in Bemerkung 1.10 beschrieben) weiter zu einer Familie rationaler Kurven $(C_{t,\Sigma})_{t \in T(x_0)}$ in Σ mit

$$(C_{t,\Sigma}^2) = 0 \quad \text{und} \quad (K_\Sigma.C_{t,\Sigma}) = -2 < 0$$

liften. Man erhält dabei aufgrund der universellen Eigenschaft der Aufblasung sogar ein Diagramm der Gestalt

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_\Sigma \arrow[r, "p_\Sigma"] \arrow[d, "\simeq"'] & \Sigma \arrow[d, "\sigma_{\hat{x}_o}"] \\ \hat{\mathcal{C}}(x_0) \arrow[r, "\hat{p}_{x_o}"] & \hat{S} \end{tikzcd} \qquad (D_2)$$

Wegen $(C^2_{t,\Sigma}) = 0$ ist $p_\Sigma : \mathcal{C}_\Sigma \to \Sigma$ nach Lemma 4.4 ein Isomorphismus. Damit folgt die Birationalität von $p_{x_0} : \mathcal{C}(x_0) \to S$ mit Hilfe der Diagramme (D_1) und (D_2). $\square$

Folgerung 5.3 *In der Situation aus Notation 5.1 sei die Familie $(C_t)_{t\in T}$ **maximal**. Dann gilt im Graphen $(G(x_0))$:*

$$\mathcal{C}(x_0) \simeq \mathbb{F}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)) \quad \textit{und} \quad S' \simeq \mathbb{P}_2.$$

Außerdem ist $h : \mathbb{P}_2 \simeq S' \to S$ die Normalisierung von S.

Beweis. Nach Lemma 5.2 ist die Auswertungsabbildung $p_{x_0} : \mathcal{C}(x_0) \to S$ aus dem Graphen $(G(x_0))$ birational, weshalb es sich bei $h : S' \to S$ nach der universellen Eigenschaft der Normalisierung und Zariskis Hauptsatz um die Normalisierungsabbildung von S handelt.

Desweiteren kontrahiert $g : \mathcal{C}(x_0) \to S'$ nach Konstruktion (denn alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ verlaufen durch den Punkt $x_0 \in S$) genau den Schnitt

$$T_0(x_0) = p^{-1}(x_0) \subsetneq \mathcal{C}(x_0)$$

aus der Regelfläche $\mathcal{C}(x_0)$ auf einen (eindeutig bestimmten) glatten Punkt $x'_0 \in S'$. Insbesondere ist $\mathcal{C}(x_0)$ rational mit $(T_0(x_0)^2) = -1$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

5.2 Die Kontraktion auf einen Punkt

Dieser Abschnitt fällt extrem kurz aus, weil die gesamte notwendige Arbeit bereits in Kapitel 4 geleistet wurde. Man braucht lediglich zu bemerken, dass die Argumente in den Abschnitten 4.2 sowie 4.3 ohne eine Maximalitätsforderung an die jeweilige Familie rationaler Kurven formuliert sind und sich deswegen direkt auf die 1-dimensionale Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ anwenden lassen. Man erhält als erstes Hauptresultat dieses Kapitels:

Satz 5.4 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 2-dimensional, aber überdecke die Dreifaltigkeit X nicht. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible* *reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : X \to Y,$$

sodass gilt:

1. *$\varphi(S) = pt$;*

2. *Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-\{pt\}$ ist biholomorph.*

Beweis. Es sei $x_0 \in S$ ein allgemeiner (glatter) Punkt, $T(x_0) \subseteq T^*(x_0)$ eine irreduzible Komponente und $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ die zugehörige 1-dimensionale Familie rationaler Kurven (durch den Punkt x_0). Wegen

$$S \;=\; \bigcup_{t\in T} C_t \;=\; \bigcup_{t\in T(x_0)} C_t$$

ergibt sich die komplette Behauptung aus Satz 4.19, angewendet auf die Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$. □

5.3 Der Gorensteinfall

Das zweite Hauptresultat dieses Kapitels befasst sich mit dem Gorensteinfall, der wieder eine wesentlich explizitere Beschreibung der Situation zulässt.

Satz 5.5 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte* ***Gorenstein****-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine* ***maximale*** *nichtspaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) > 0$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 2-dimensional, aber überdecke die Dreifaltigkeit X nicht. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, so gilt:*

1. *$S \simeq \mathbb{P}_2$ und*

   a) *$N_{S/X} \simeq \mathcal{O}_S(-1)$ im Fall $(-K_X.C_t) = 2$ bzw.*
   b) *$N_{S/X} \simeq \mathcal{O}_S(-2)$ im Fall $(-K_X.C_t) = 1$.*

2. *Es existiert eine holomorphe Abbildung $\varphi : X \to Y$ auf eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten, wobei gilt:*

   a) *$\varphi(S) = pt$;*
   b) *Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-\{pt\}$ ist biholomorph.*

3. Die Dreifaltigkeit Y aus 2. ist 1-Gorenstein (und damit Gorenstein) im Fall „$(-K_X.C_t) = 2$“, aber nur 2-Gorenstein im Fall „$(-K_X.C_t) = 1$“.

Beweis. Man argumentiert wieder mit „der“ 1-dimensionalen Familie $(C_t)_{t\in T(x_0)}$ durch einen allgemeinen Punkt $x_0 \in S$ und folgt zunächst wortwörtlich dem Beweis von Satz 4.22: Aus Lemma 2.17 sowie Lemma 1.22 weiß man, dass es sich bei S um eine projektive Gorensteinfläche mit Picardzahl $\rho(S) = 1$ handelt. Wäre deren Normalenbündel ample, so folgte die Projektivität von X aus Lemma 2.19, weshalb $N_{S/X}$ entweder negativ oder numerisch trivial sein muss und S nach der Adjunktionsformel ein negatives kanonisches Bündel besitzt.

Es bezeichne $\nu : \tilde{S} \to S$ die Normalisierung von S. Da die Familie $(C_t)_{t\in T}$ nach Voraussetzung maximal ist, gilt $\tilde{S} \simeq \mathbb{P}_2$ nach Folgerung 5.3 und insbesondere $\mathrm{Pic}(\tilde{S}) \cong \mathbb{Z}$. Deshalb schließt man die Möglichkeit, dass S nicht normal sein könnte, mit Hilfe von Lemma 4.21 aus und erhält $S \simeq \mathbb{P}_2$. Dabei sind die C_t's Geraden durch den Punkt x_0 und es gilt $(K_S.C_t) = -3$. Die Aussagen über das Normalenbündel ergeben sich unmittelbar aus der Adjunktionsformel. Insbesondere gilt $(S.C_t) < 0$, weshalb die Fläche S nach Grauerts Kontraktionssatz 1.27 und Proposition 4.18 auf einen Punkt in einer kompakten $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulayvarietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten kontrahierbar ist.

Für die Berechnung des Indexes von Y sei $a \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gewählt, dass aK_Y ein Cartierdivisor ist. Nach Konstruktion und Lemma 4.17 existiert eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$, sodass gilt

$$aK_X = \varphi^*(aK_Y) \otimes \mathcal{O}_X(bS)$$

bzw.

$$a \cdot (K_X.C_t) = b \cdot (S.C_t). \tag{*}$$

Dabei ist es wegen $\mathrm{Pic}(S) \cong H^2(S,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ nicht notwendig, mit einem Vielfachen von aK_X zu rechnen (d.h. man kann $k = 1$ in Lemma 4.17 wählen). Der Index von Y stellt die kleinstmögliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ dar, sodass sich Gleichung (*) erfüllen lässt. Im Fall „$(-K_X.C_t) = 2$“ bedeutet dies wegen $(S.C_t) = -1$

$$a = 1 \quad \text{sowie} \quad b = 2,$$

im Fall „$(-K_X.C_t) = 1$“ wegen $(S.C_t) = -2$ hingegen

$$a = 2 \quad \text{sowie} \quad b = 1.$$

Also ist Y eine 1-Gorensteinvarietät (und damit Gorenstein) im Fall „$(-K_X.C_t) = 2$“, aber nur eine 2-Gorensteinvarietät im Fall „$(-K_X.C_t) = 1$“. □

6 1-dimensionale nicht-spaltende Familien rationaler Kurven ohne gemeinsamen Punkt $x \in X$

Das einzige Szenario, das bisher nicht betrachtet worden ist, ist das einer 1-dimensionalen nicht-spaltenden Familie $(C_t)_{t\in T}$ rationaler Kurven mit der Eigenschaft, dass <u>kein</u> Punkt $x \in X$ existiert, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Hierbei trifft ein allgemeines Mitglied der Familie $(C_t)_{t\in T}$ den singulären Ort der Dreifaltigkeit X nicht, weshalb man es beim Schneiden mit den Kurven C_t mit ganzzahligen Schnittzahlen zu tun hat. Es liegt daher nahe zu erwarten, dass man im Wesentlichen unabhängig davon, ob X als Gorenstein- oder nur als $\mathbb{Q}$-Gorensteinvarietät vorausgesetzt ist, argumentieren kann.

Leider konnte ich diese Erwartung nicht in die Realität umsetzen. Ich werde mich deshalb in diesem Kapitel auf den **Gorensteinfall** beschränken und an entsprechender Stelle noch ein wenig detaillierter auf die im $\mathbb{Q}$-Gorensteinfall auftretenden Schwierigkeiten eingehen.

Wie gewohnt fasse ich zunächst das Setup für das vorliegende Kapitel zusammen:

Notation 6.1 Es sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle kompakte **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine **maximale** nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) \geq 1$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen.

Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, und

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dr, "h"] & \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "q"] & & S \\ T & & \end{tikzcd} \tag{G}$$

den normalisierten Graphen der Familie $(C_t)_{t\in T}$ samt Steinfaktorisierung. Die Idealgarbe des kompakten komplexen Unterraumes $S \subsetneq X$ sei mit $\mathcal{I}$ bezeichnet.

Nach Bemerkung 1.8 ist $q : \mathcal{C} \to T$ ein $\mathbb{P}_1$-Bündel. Es sei noch $e = -\deg(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$ die zu dieser Regelfläche $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ gehörige Invariante (vergleiche [Ha77, V.2, Notation 2.8.1]) und $T_0 \subsetneq \mathcal{C}$ ein Schnitt mit $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(T_0) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$. Es gilt dann insbesondere $(T_0^2) = -e$. $\boxdot$

Wie bereits zu Beginn angesprochen, stehen in diesem Kapitel ganzzahlige Schnittzahlen $(-K_X.C_t)$ zur Verfügung. Berücksichtigt man noch die Maximalitätsforderung an die Familie $(C_t)_{t\in T}$, so folgt (etwa aus [Ko96, II, Theorem 1.2])

$$\dim T = 1 \geq (-K_X.C_t) \geq 1$$

und damit tatsächlich

$$(-K_X.C_t) = 1$$

anstelle der Abschätzung $(-K_X.C_t) \geq 1$ aus Notation 6.1.

Ich erinnere an Lemma 4.2, das die Birationalität der Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ aus dem Graphen (G) sicherstellt. Damit zeigt man

Folgerung 6.2 *In der Situation aus Notation 6.1 handelt es sich bei $g : \mathcal{C} \to S'$ um einen Isomorphismus. Insbesondere stellt die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ die Normalisierung von S dar.*

Beweis. Nach Konstruktion besitzt $g : \mathcal{C} \to S'$ zusammenhängende Fasern. Nimmt man daher an, dass $g : \mathcal{C} \to S'$ kein Isomorphismus ist, so existiert ein Punkt $x_0 \in S$, der eine positiv-dimensionale Faser bezüglich $p : \mathcal{C} \to S$ besitzt. Dies bedeutet, dass alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ durch eben jenen Punkt x_0 verlaufen müssen, was nach Voraussetzung jedoch ausgeschlossen ist. Also gilt $\mathcal{C} \simeq S'$.

Da die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ nach Lemma 4.2 birational ist, ergibt sich die verbleibende Aussage aus der universellen Eigenschaft der Normalisierung und Zariskis Hauptsatz. □

Folgerung 6.3 *In der Situation aus Notation 6.1 sei die Fläche S normal. Dann ist S isomorph zur Regelfläche $\mathcal{C}$ über der glatten Kurve T und es gilt $(S.C_t) = -1$.*

Beweis. Die Aussage bezüglich der Isomorphie zur Regelfläche $\mathcal{C}$ ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 6.2. Insbesondere ist klar, dass gilt

$$(K_S.C_t) = (K_{\mathcal{C}}.q^{-1}(t)) = -2.$$

Für die Aussage über die Schnittzahl benötigt man jetzt nur noch die Adjunktionsformel:

$$(S.C_t) = (K_S.C_t) - (K_X.C_t) = -2 + 1 = -1.$$

□

Notation 6.4 Ist die Fläche S in der Situation aus Notation 6.1 nicht normal, so bezeichne ab jetzt noch $E \subsetneq S$ den nicht-normalen Ort von S (mit komplexer Struktur definiert durch das Führerideal $\mathcal{A}nn_{\mathcal{O}_S}(p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}/\mathcal{O}_S) \subsetneq \mathcal{O}_S$) und $\tilde{E} \subsetneq \mathcal{C}$ dessen analytisches Urbild in $\mathcal{C}$.

Bemerkung 6.5 Ist die Fläche S nicht normal, so ist $\tilde{E} \subsetneq \mathcal{C}$ ein effektiver Divisor und man hat eine Gleichung

$$K_{\mathcal{C}} = p^*K_S - \tilde{E}. \tag{NNL}$$

(Vergleiche [Mo82], [Re94] und die Subadjunktionsformel [KaMaMa87, Lemma 5-1-9].)

6.1 Der Fall „$(S.C_t) < 0$“

Wird die Fläche S als normal vorausgesetzt, so ist die Bedingung $(S.C_t) < 0$ nach Folgerung 6.3 automatisch erfüllt. Anders verhält es sich, wenn S nicht normal ist. Dann lässt sich die eigentlich unerwünschte Möglichkeit „$(S.C_t) \geq 0$“ nicht mehr ohne weiteres ausschließen und bedarf besonderer Aufmerksamkeit. Näheres hierzu findet sich in Abschnitt 6.2.

Der vorliegende Abschnitt behandelt den Fall „$(S.C_t) < 0$“. Ich benötige als Erstes eine Version der Strukturaussage aus Folgerung 6.3 für nicht-normales S.

Proposition 6.6 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 sei die Fläche S nicht normal mit $(S.C_t) < 0$. Dann gilt $(S.C_t) = -1$ und es existieren eine singuläre Kurve B sowie eine holomorphe Abbildung $\pi : S \to B$ mit den folgenden Eigenschaften:*

i) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert.

ii) Die Abbildung $\lambda : T \to B$ ist die Normalisierung der Kurve B.

iii) Die Reduktion jeder Faser von π ist isomorph zu $\mathbb{P}_1$.

Beweis. Nach Folgerung 6.2 ist die Normalisierung von S gegeben durch die Regelfläche $\mathcal{C}$. Daher existiert nach Gleichung (NNL) aus Bemerkung 6.5 ein effektiver Divisor $\tilde{E} \subsetneq \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft

$$K_{\mathcal{C}} = p^*((K_X + S)|_S) - \tilde{E}.$$

Durch Schneiden mit $q^{-1}(t)$ erhält man

$$-2 = -1 + \underbrace{(S.C_t)}_{<0} - \underbrace{(\tilde{E}.q^{-1}(t))}_{\geq 0}$$

mit den angegebenen Abschätzungen für $(S.C_t)$ sowie $(\tilde{E}.q^{-1}(t))$. Da $(S.C_t)$ ganzzahlig ist (denn $S \subsetneq X$ ist ein Cartierdivisor nach Lemma 1.22), folgt

$$(S.C_t) = -1 \quad \text{sowie} \quad (\tilde{E}.q^{-1}(t)) = 0,$$

was wiederum bedeutet, dass es Punkte $t_1, \ldots, t_k \in T$ gibt mit $\mathrm{Supp}(E) = \bigcup_{i=1}^k C_{t_i}$.

Insbesondere existieren eine singuläre Kurve B und eine holomorphe Abbildung $\pi : S \to B$, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert und $\lambda : T \to B$ die Normalisierung der Kurve B ist.

Es bleibt noch einzusehen, dass die Reduktion jeder Faser von π glatt ist (man vergleiche hierzu J. Kollárs Argumentation aus [Ko91, (2.4.3)]). Für allgemeines $b \in B$ ist die Behauptung klar. Ist $b_0 \in B$ ein beliebiger Punkt und $t_0 \in \lambda^{-1}(b_0)$, so gilt

$$C_{t_0} = (S_{b_0})_{red}.$$

Wegen $(-K_X.C_{t_0}) = 1$ bewegt sich die Kurve C_{t_0} nach Eins Deformationslemma in einer mindestens 1-dimensionalen Familie rationaler Kurven. Bezeichnet D ein allgemeines (irreduzibles) Mitglied dieser Familie, so gilt $(S.D) = (S.C_{t_0}) < 0$ und damit $D \subsetneq S$. Da D außerdem sicherlich nicht im nicht-normalen Ort der Fläche S liegt, ist die strikte Transformierte $\tilde{D} \subsetneq \mathcal{C}$ von D bezüglich $p : \mathcal{C} \to S$ wohldefiniert.

$\tilde{D}$ spezialisiert zu einer Kurve $\tilde{C}_{t_0} \subsetneq \mathcal{C}$ mit $p(\tilde{C}_{t_0}) = C_{t_0}$. Deshalb ist $\tilde{C}_{t_0}$ enthalten in $q^{-1}(t_0) \cup \tilde{E}$ und es gilt $\tilde{C}_{t_0} = \bigcup q^{-1}(t_j)$. Es folgt

$$\tilde{D} = q^{-1}(t) \quad \text{und} \quad D = C_t \quad \text{mit } t \in T \text{ allgemein.}$$

Wegen $\chi(D) = \chi(C_t) = 1$ ist die Behauptung also richtig, falls noch nachgewiesen werden kann, dass auch die holomorphen Eulercharakteristiken von D und C_{t_0} gleich sind. Man bemerkt hierfür, dass die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ über das Faserprodukt $T \times_B S$ faktorisiert, weshalb man das obige Diagramm erweitern kann zu

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q"'] & T \times_B S \arrow[r] \arrow[d, "\pi'"] & S \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\simeq"] & T \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

Dabei gilt

$$q^{-1}(t) = \tilde{D} \simeq p'(\tilde{D}) \simeq D = C_t \quad \text{und} \quad p'(q^{-1}(t_0)) \simeq C_{t_0}.$$

Der Vorteil des erweiterten Diagramms besteht nun darin, dass $\pi' : T \times_B S \to T$ flach ist (denn T ist glatt). Daraus ergibt sich

$$\chi(C_{t_0}) = \chi(p'(q^{-1}(t_0))) = \chi(p'(q^{-1}(t))) = \chi(D) = 1$$

und somit die Behauptung. $\square$

Für den verbleibenden Teil dieses Abschnitts steht die Aufgabe an, die Fläche S, unabhängig davon, ob sie normal ist oder nicht, längs den C_t's auf eine Kurve in einer $\mathbb{Q}$-faktoriellen Gorensteindreifaltigkeit Y mit höchstens terminalen Singularitäten zu kontrahieren.

Proposition 6.7 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 gelte $(S.C_t) < 0$. Dann existieren eine eventuell singuläre Kurve B, eine normale kompakte Varietät Y und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : X \to Y,$$

sodass gilt:

i) $\varphi(S) = B$;

ii) Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X - S \longrightarrow Y - B$ *ist biholomorph.*

Beweis. Zunächst geht es darum, die Kurve B und eine holomorphe Abbildung $\pi : S \to B$ zu definieren: Ist die Fläche S normal, so ist sie nach Folgerung 6.3 isomorph zur Regelfläche $\mathcal{C}$ über der glatten Kurve T. In diesem Fall sei $B := T$ und $\pi : S \to B$ die durch die Isomorphie induzierte holomorphe Abbildung. Ist die Fläche S nicht-normal, so stellt Proposition 6.6 alles bereit, was benötigt wird. Unabhängig davon, ob S normal ist oder nicht, gilt nach Konstruktion für beliebiges $b \in B$

$$(S_b)_{red} := (\pi^{-1}(b))_{red} \simeq \mathbb{P}_1.$$

Ziel ist nun die Anwendung Fujikis Kontraktionssatzes 1.30 auf die holomorphe Abbildung

$$\pi : S \to B.$$

Da $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ lokal frei ist, gilt wegen $(S.C_t) = -1$ für beliebiges $b \in B$

$$(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_{(S_b)_{red}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(1)$$

sowie etwas allgemeiner für alle $\mu \in \mathbb{N}$

$$(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})|_{(S_b)_{red}} \simeq S^\mu(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_{(S_b)_{red}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(\mu).$$

Infolgedessen ist $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ π-ample und für alle $\mu \geq 1$ verschwinden die ersten direkten Bildgarben $R^1\pi_*(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})$. Also ist Fujikis Kontraktionssatz 1.30 anwendbar und liefert die Behauptung. □

Man sollte meinen, dass sich Proposition 6.7 problemlos auf den $\mathbb{Q}$-Gorensteinfall übertragen lässt, wenn man anstelle von Fujikis Kontraktionssatz die allgemeinere Fassung Bingeners (Satz 1.28) zur Anwendung bringt. Leider blieben meine Versuche, diese Idee umzusetzen erfolglos. Dies lag vor allem daran, dass mir nicht bekannt ist, dass die natürlichen Abbildungen der kohärenten Garben $\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1}$ in ihr Biduales keinen Kokern besitzen.

Ist dies nämlich der Fall, d.h. ist $(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})/_{Torsion}$ nicht lokal frei, so kann man ausgehend von $(S.C_t) = -1$ nurmehr auf die Existenz einer Abbildung

$$(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})|_{(S_b)_{red}} \longrightarrow [(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})^{**}]|_{(S_b)_{red}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(\mu)$$

schließen, die jedoch nicht mehr surjektiv zu sein braucht. Damit aber ist weder klar, ob $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ π-ample ist, noch, ob die direkten Bildgarben $R^1\pi_*(\mathcal{I}^\mu/\mathcal{I}^{\mu+1})$ für alle $\mu \geq 1$ verschwinden.

Ein alternativer Lösungsansatz für den $\mathbb{Q}$-Gorensteinfall besteht darin, analog zur Kontraktion auf einen Punkt in Proposition 4.15 zu versuchen, anstelle des $\mathbb{Q}$-Cartier-Weildivisors S den Cartierdivisor mS (mit Idealgarbe $\mathcal{J}$) auf eine nicht-reduzierte Kurve

$$B' \quad \text{mit} \quad B = B'_{red}$$

zu kontrahieren. Das Problem des Nachweises der relativen Ampleness von $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ und der Verschwindung der $R^1\pi'_*(\mathcal{J}^\mu/\mathcal{J}^{\mu+1})$ wäre damit lösbar. Bei dieser Variante blieb unglücklicherweise die Suche nach einer komplexen Struktur für B' ohne Ergebnis.

Ich fahre fort mit der Untersuchung der Varietät Y aus Proposition 6.7.

Lemma 6.8 *In der Situation aus Proposition 6.7 gilt*

$$Pic(X) \cong \varphi^* Pic(Y) \oplus \mathbb{Z} \cdot \mathcal{O}_X(S)$$

und insbesondere

$$im(\varphi^* : Pic(Y) \to Pic(X)) = \{L \in Pic(X) \mid (L.C_t) = 0\}.$$

Beweis. I) Man beginnt mit der Bestimmung der Beziehung zwischen $H^2(X, \mathbb{Z})$ und $H^2(Y, \mathbb{Z})$ mit Hilfe der Leraysschen Spektralsequenz

$$(E_r) \Longrightarrow E_\infty = H^*(X, \mathbb{Z}), \quad \text{wobei} \quad E_2^{p,q} := H^p(Y, R^q\varphi_*\mathbb{Z}).$$

Nichts zu tun gibt es bei der Berechnung von

$$E_2^{2,0} = H^2(Y, \varphi_*\mathbb{Z}) = H^2(Y, \mathbb{Z}).$$

Für die Berechnung von $E_2^{1,1} = H^1(Y, R^1\varphi_*\mathbb{Z})$ bemerkt man, dass das antikanonische Bündel $-K_X$ aufgrund der Voraussetzung $(-K_X.C_t) = 1$ relativ-ample bezüglich φ ist, weshalb die direkten Bildgarben $R^q\varphi_*\mathcal{O}_X$ für alle $q \geq 1$ nach dem relativen Kawamataverschwindungssatz (etwa [KaMaMa87, Theorem 1-2-5]) verschwinden. Da φ zusammenhängende Fasern besitzt, gilt weiter $R^1\varphi_*\mathbb{Z} \hookrightarrow R^1\varphi_*\mathcal{O}_X = 0$, sodass man erhält

$$E_2^{1,1} = H^1(Y, R^1\varphi_*\mathbb{Z}) = 0.$$

Schließlich stellt man für die Berechnung von $E_2^{0,2} = H^0(Y, R^2\varphi_*\mathbb{Z})$ fest, dass für alle $i \geq 1$ gilt

$$(R^i\varphi_*\mathbb{Z})_y \cong \begin{cases} H^i(\mathbb{P}_1, \mathbb{Z}) & \text{, für } y \in B \\ 0 & \text{, für } y \notin B \end{cases},$$

woraus wegen $H^2(\mathbb{P}_1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ folgt

$$E_2^{0,2} = H^0(Y, R^2\varphi_*\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

Man rechnet problemlos nach, dass (E_r) bereits bei $r = 2$ entartet. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} E_\infty^{0,2} &= E_2^{0,2} = H^0(Y, R^2\varphi_*\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}, \\ E_\infty^{1,1} &= E_2^{1,1} = H^1(Y, R^1\varphi_*\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{sowie} \\ E_\infty^{2,0} &= E_2^{2,0} = H^2(Y, \varphi_*\mathbb{Z}) = H^2(Y, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{p+q=2} E_\infty^{p,q} \cong H^2(Y, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}.$$

II) Man fixiere ein holomorphes Geradenbündel $L \in \mathrm{Pic}(X)$. Man möchte einsehen, dass ein holomorphes Geradenbündel $L' \in \mathrm{Pic}(Y)$ sowie eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass gilt

$$L \simeq \varphi^* L' \otimes \mathcal{O}_X(bS).$$

Dazu betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^1(X, \mathcal{O}_X) \arrow[r] & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \arrow[r, "c_1"] & H^2(X, \mathbb{Z}) \arrow[r] & H^2(X, \mathcal{O}_X) \\ H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^*"'] & H^2(Y, \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\varphi^*"'] & H^2(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd} \qquad (D_{Exp})$$

mit $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^i(Y, \mathcal{O}_Y)$ für alle $i \geq 1$ nach dem relativen Kawamataverschwindungssatz.

Nach I) gibt es eine Chernklasse $\eta \in H^2(Y, \mathbb{Z})$ und eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ mit

$$c_1(L) = \varphi^*(\eta) + c_1(\mathcal{O}_X(bS)). \qquad (1)$$

Mit Hilfe des rechten Quadrats in (D_{Exp}) erkennt man zudem leicht, dass zu η ein holomorphes Geradenbündel $L_1' \in \mathrm{Pic}(Y)$ existiert, sodass eingesetzt in Gleichung (1) gilt

$$c_1(L) = c_1(\varphi^*(L_1') \otimes \mathcal{O}_X(bS)). \qquad (2)$$

Gilt sogar $L \simeq \varphi^*(L_1') \otimes \mathcal{O}_X(bS)$, so setzt man $L' := L_1' \in \mathrm{Pic}(Y)$ und ist fertig.

Andernfalls existiert nach dem linken Quadrat in (D_{Exp}) ein nicht-triviales holomorphes Geradenbündel $L_2' \in \mathrm{Pic}(Y)$ mit der Eigenschaft

$$L \simeq \varphi^*(L_1') \otimes \varphi^*(L_2') \otimes \mathcal{O}_X(bS). \tag{3}$$

In diesem Fall erfüllt $L' := L_1' \otimes L_2' \in \mathrm{Pic}(Y)$ die gewünschten Anforderungen.

III) Für den noch ausstehenden Teil der Behauptung stellt man fest, dass für jedes holomorphe Geradenbündel $L' \in \mathrm{Pic}(Y)$ die Gleichung $(\varphi^* L'.C_t) = 0$ trivialerweise erfüllt ist. Ist umgekehrt $L \in \mathrm{Pic}(X)$ ein holomorphes Geradenbündel mit $(L.C_t) = 0$, so existieren nach dem ersten Teil dieses Lemmas ein holomorphes Geradenbündel $L' \in \mathrm{Pic}(Y)$ und eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$L \simeq \varphi^* L' \otimes \mathcal{O}_X(bS).$$

Dabei erkennt man durch Schneiden mit der Kurve C_t, dass wegen $(L.C_t) = (\varphi^* L'.C_t) = 0$ und $(S.C_t) < 0$ zwangsläufig die Bedingung

$$b = 0$$

erfüllt sei muss, woraus folgt $L \simeq \varphi^* L'$. □

Proposition 6.9 *In der Situation aus Proposition 6.7 ist Y eine $\mathbb{Q}$-faktorielle **Gorensteinvarietät** und besitzt höchstens terminale Singularitäten.*

Beweis. I) Für den Nachweis der Eigenschaft „$\mathbb{Q}$-faktoriell" sei $D \subsetneq Y$ ein (effektiver) irreduzibler Weildivisor, $\mathcal{O}_Y(D)$ die zugehörige reflexive Garbe und

$$\hat{D} := \overline{\varphi^{-1}(D - B)} \subsetneq X$$

die strikte Transformierte in X. Es ist zu zeigen, dass eine natürliche Zahl $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\mathcal{O}_Y(rD)$ lokal frei ist. Da die Behauptung sonst trivial ist, sei $B \cap \mathrm{Supp}(D) \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Es gilt dann $(\hat{D}.C_t) > 0$ und wegen $(S.C_t) < 0$ finden sich natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$, sodass es sich einerseits bei $a\hat{D}$ sowie bS um Cartierdivisoren in X handelt und andererseits die Gleichung

$$((\mathcal{O}_X(a\hat{D}) \otimes \mathcal{O}_X(bS)).C_t) = 0$$

erfüllt ist. Nach dem voranstehenden Lemma 6.8 existiert also ein holomorphes Geradenbündel $L' \in \mathrm{Pic}(Y)$ mit

$$\mathcal{O}_X(a\hat{D}) \otimes \mathcal{O}_X(bS) \simeq \varphi^* L'.$$

Da $L' \simeq \varphi_* \varphi^* L'$ außerhalb der Kurve B mit der reflexiven Garbe $\mathcal{O}_Y(aD)$ übereinstimmt, folgt $L' \simeq \mathcal{O}_Y(aD)$ und damit die Behauptung für $r := a$.

II) Für die Charakterisierung der Singularitäten von Y seien $\sigma : \hat{X} \to X$ eine Desingularisierung von X und $E_1, \dots, E_r$ die 1-kodimensionalen (irreduziblen) Komponenten des exzeptionellen Ortes von σ. Nach Voraussetzung gilt dann

$$K_{\hat{X}} = \sigma^* K_X + \sum a_i E_i \quad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{Q}^+ \tag{4}$$

als Gleichung von $\mathbb{Q}$-Cartierdivisoren. Im gleichen Sinne gilt

$$K_X = \varphi^* K_Y + a_0 S \quad \text{mit} \quad a_0 \in \mathbb{Q} \tag{5}$$

nach Konstruktion von φ. Hierbei erkennt man durch Schneiden mit C_t sofort, dass sogar die Bedingung $a_0 \in \mathbb{Q}^+$ erfüllt sein muss, denn man hat

$$(K_X.C_t) < 0, \ (\varphi^* K_Y.C_t) = 0 \quad \text{sowie} \quad (S.C_t) < 0.$$

Damit interessiert noch die Bestimmung von $\sigma^*(a_0 S)$: Bezeichnet dazu $\hat{S}$ die strikte Transformierte von S bezüglich σ, so gilt

$$\sigma^*(a_0 S) = a_0 \hat{S} + \sum b_i E_i \quad \text{mit} \quad b_i := \begin{cases} a_0 a_i, \text{ falls } \hat{S} \cap E_i \neq \emptyset \\ \ \ 0 \ \ , \text{ sonst} \end{cases} . \tag{6}$$

Setzt man die Gleichungen (5) sowie (6) in Gleichung (4) ein, so erhält man

$$K_{\hat{X}} = (\varphi \circ \sigma)^* K_Y + a_0 \hat{S} + \sum (a_i + b_i) E_i \quad \text{mit} \quad a_0, a_i + b_i \in \mathbb{Q}^+, \tag{7}$$

was bedeutet, dass die Varietät Y genau wie X höchstens terminale Singularitäten besitzt.

III) Da terminale Singularitäten rational sind (Proposition 1.25), liefert [Re87, Theorem 3.19] die Eigenschaft „Cohen-Macaulay". Es bleibt die Aufgabe, den Index von Y zu berechnen. Dazu sei $a \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gewählt, dass aK_Y ein Cartierdivisor ist. Nach Konstruktion und Lemma 6.8 existiert eine ganze Zahl $b \in \mathbb{Z}$, sodass gilt

$$aK_X = \varphi^*(aK_Y) \otimes \mathcal{O}_X(bS)$$

bzw.

$$a \cdot (K_X.C_t) = b \cdot (S.C_t). \tag{*}$$

Der Index von Y stellt nun die kleinstmögliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ dar, sodass sich Gleichung (*) erfüllen lässt. Wegen $(K_X.C_t) = (S.C_t) = -1$ bedeutet dies im vorliegenden Fall

$$a = b = 1.$$

Damit ist Y Gorenstein. □

Zusammenfassend notiere ich

Satz 6.10 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine **maximale** nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) = 1$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Bezeichnet $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, und ist $(S.C_t) < 0$, so gilt:*

1. *S ist isomorph zu einer $\mathbb{P}_1$-Faserung über einer eventuell singulären Kurve B mit den Kurven C_t als Fasern (mengentheoretisch) und $(S.C_t) = -1$;*

2. *Es existieren eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle **Gorenstein**varietät Y mit höchstens terminalen Singularitäten und eine holomorphe Abbildung*

$$\varphi : X \to Y,$$

   sodass gilt:

   a) $\varphi(S) = B$;

   b) Die eingeschränkte Abbildung $\varphi|_{\{X-S\}} : X-S \longrightarrow Y-B$ ist biholomorph.

Beweis. Man nehme Proposition 6.7 sowie Proposition 6.9. □

Bemerkung 6.11 In [CaPe97, Proposition 2.5] wurde gezeigt, dass in der Situation aus Satz 6.10 zusätzlich gilt: Liegt die Fläche S vollständig im regulären Ort von X, so ist S glatt (d.h. die Variante mit der nicht-normalen Kurve B entfällt).

6.2 Der Fall „$(S.C_t) \geq 0$“

Der vorliegende Abschnitt ist dem Fall „$(S.C_t) \geq 0$“ gewidmet. Nach Folgerung 6.3 ist die Fläche S unter dieser Voraussetzung automatisch nicht-normal.

Man kann unter den gegebenen Umständen nicht mehr erwarten, dass sich die Fläche S (divisoriell) längs der Kurven C_t kontrahieren lässt. Deswegen wird es das Ziel sein, eine alternative Familie (reduzibler) rationaler Kurven zu finden, mit deren Hilfe eine Kontraktion möglich wird.

Bei der Argumentation wird die Eigenschaft „uniruled“ eine entscheidende Rolle übernehmen. In einem ersten Schritt (Unterabschnitt 6.2.1) wird es deshalb um den Nachweis von Uniruledness für die Dreifaltigkeit X gehen. Im Anschluss (Unterabschnitt 6.2.2) wird dann eine genaue Beschreibung der Fläche S und der Dreifaltigkeit X angestrebt werden. In diesem Zusammenhang wird sich die bereits in Abschnitt 4.2 zur Anwendung gebrachte Klassifikation glatter nicht-projektiver Kählerdreifaltigkeiten aus [Fu83] nochmals als sehr nützlich erweisen. Zuletzt wird in Unterabschnitt 6.2.3 die Konstruktion einer Kontraktionsabbildung erfolgen.

Notation 6.12 Ist X eine kompakte (komplexe) Varietät und $N_1(X)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller 1-Zykel (mit reellen Koeffizienten) modulo numerischer Äquivalenz, so seien wie üblich die folgenden Kegel definiert:

$$\begin{aligned} NE_{\mathbb{Z}}(X) &= \left\{ \sum a_i[C_i] \;:\; 0 \leq a_i \in \mathbb{Z},\ C_i \subset X \text{ irreduzible Kurven} \right\} \subset N_1(X), \\ NE(X) &= \left\{ \sum a_i[C_i] \;:\; 0 \leq a_i \in \mathbb{R},\ C_i \subset X \text{ irreduzible Kurven} \right\} \subset N_1(X). \end{aligned}$$

Schließlich bezeichne noch $\overline{NE}(X)$ den Abschluss von $NE(X)$ in $N_1(X)$.

6.2.1 Uniruledness von X

Definition 6.13 *Eine normale kompakte Varietät X heißt uniruled, falls es in X eine überdeckende Familie rationaler Kurven gibt.*

Ich benötige zwei vorbereitende Lemmata.

Lemma 6.14 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 existiere ein irreduzibler (Multi-) Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$ und eine Faser $q^{-1}(t_1)$ mit der Eigenschaft*

$$p(T_1) = p(q^{-1}(t_1)).$$

Weiter seien $L, L' \in Pic(S)$ holomorphe Geradenbündel mit $(L.C_t) > 0$ und $(L'.C_t) = 0$. Dann ist p^*L (und damit L) ample und p^*L' ist numerisch trivial.

Beweis. Nach Folgerung 6.2 ist die Auswertungsabbildung $p : \mathcal{C} \to S$ endlich. Betrachtet man die durch $p : \mathcal{C} \to S$ induzierte Abbildung von 1-Zykelklassen

$$p_* : N_1(\mathcal{C}) \to N_1(S),$$

so existiert wegen $p(T_1) = p(q^{-1}(t_1))$ zu jedem Element $[C] \in NE(\mathcal{C})$ eine rationale Zahl $\mu = \mu([C])$ mit

$$p_*([C]) = \mu \cdot [C_t].$$

Wegen $(p^*L'.C) = (L'.p(C)) = \mu \cdot (L'.C_t)$ ist die Behauptung für L' bereits klar. Genauso ist die Behauptung für L richtig, falls nachgewiesen werden kann, dass die Zahl μ immer positiv ist.

Man erinnere sich zu diesem Zweck daran, dass die Regelfläche $\mathcal{C} = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ durch eine ganze Zahl $e = -\deg(\mathcal{E}) \in \mathbb{Z}$ charakterisiert ist. Man fixiere eine Kählerform ω auf S (die Fläche S ist als komplexer Unterraum von X natürlich ebenfalls Kähler) und unterscheide die beiden Möglichkeiten $e \geq 0$ sowie $e < 0$.

Im Fall „$e \geq 0$“ gilt nach [Ha77, V, Prop. 2.20]

$$\overline{NE}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}_+ \cdot [T_0] + \mathbb{R}_+ \cdot [q^{-1}(t)],$$

weshalb es genügt, die beiden Erzeuger $[T_0]$ sowie $[q^{-1}(t)]$ von $\overline{NE}(\mathcal{C})$ zu untersuchen. Sowieso gilt $\mu([q^{-1}(t)]) = 1$, weil $p|_{q^{-1}(t)}$ nach Definition generisch biholomorph ist. Für die Bestimmung von $\mu([T_0])$ liefert die Integration der Kählerform ω

$$\int_{T_0} p^*\omega = \mu([T_0]) \cdot \int_{C_t} \omega.$$

Weil mit ω auch $p^*\omega$ eine positive $(1,1)$-Form ist, folgt $\mu([T_0]) > 0$.

Im Fall „$e < 0$“ gilt nach [Ha77, V, Prop. 2.21] zumindest

$$\overline{NE}(\mathcal{C}) \subseteq \mathbb{R}_+ \cdot [T_2] + \mathbb{R}_+ \cdot [q^{-1}(t)] \quad \text{mit} \quad T_2 := T_0 + \frac{1}{2} e \cdot q^{-1}(t).$$

Die Integration der Kählerform ω liefert

$$\int_{T_2} p^*\omega = \mu([T_2]) \cdot \int_{C_t} \omega$$

und man erkennt völlig analog zum vorausgegangenen Fall $\mu([T_2]) > 0$. $\square$

Lemma 6.15 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 gelte $(S.C_t) = 0$.*

i) Existieren ein irreduzibler (Multi-)Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$ und eine Faser $q^{-1}(t_1)$ mit der Eigenschaft $p(T_1) = p(q^{-1}(t_1))$, so ist die eingeschränkte Abbildung $p|_{T_1}$ vom Grad 1 und es gilt

$$\tilde{E} \simeq T_1 + q^{-1}(t_1).$$

ii) Gibt es keinen (Multi-)Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$ wie in i), so existiert ein irreduzibler reduzierter Schnitt $T_2 \subsetneq \tilde{E} \subsetneq \mathcal{C}$, sodass die eingeschränkte Abbildung $p|_{T_2}$ vom Grad 2 ist und es zu allgemeinem $t \in T$ ein eindeutig bestimmtes $t^* \in T$ gibt mit $C_t \cap C_{t^*} \neq \emptyset$. Die Kurven C_t und C_{t^*} sind glatt und schneiden sich transversal in genau einem Punkt.

Beweis. I) Man schreibe

$$K_{\mathcal{C}} \equiv -2T_0 + (2g - 2 - e)q^{-1}(t),$$

$$p^*K_S \equiv \alpha T_0 + \beta q^{-1}(t) \quad \text{sowie} \quad \tilde{E} \equiv \gamma T_0 + \delta q^{-1}(t)$$

mit den noch unbekannten Koeffizienten α, β, γ und δ sowie dem Geschlecht $g = g(T_0)$. Die Beziehung der drei genannten Divisoren wird durch die Gleichung

$$K_{\mathcal{C}} = p^*K_S - \tilde{E} \qquad \text{(NNL)}$$

aus Bemerkung 6.5 zum Ausdruck gebracht, weshalb mit Sicherheit gelten muss

$$-2 = \alpha - \gamma \quad \text{sowie} \quad 2g - 2 = e + \beta - \delta. \tag{NNL*}$$

Wegen $(S.C_t) = 0$ gilt nach der Adjunktionsformel

$$\alpha = (p^* K_S.q^{-1}(t)) = (K_S.C_t) = (K_X.C_t) = -1,$$

woraus mit (NNL*) bereits folgt $\gamma = -1 + 2 = 1$.

II) Man betrachte zunächst den Fall, dass ein irreduzibler (Multi-)Schnitt

$$T_1 \equiv \epsilon T_0 + \xi q^{-1}(t)$$

und eine Faser $q^{-1}(t_1)$ existieren mit $p(T_1) = p(q^{-1}(t_1))$. Wegen $T_1 \subsetneq \tilde{E}$ (denn $p : \mathcal{C} \to S$ ist als Normalisierungsabbildung außerhalb von $\tilde{E}$ ein Isomorphismus) gilt $1 \leq \epsilon \leq \gamma = 1$, also $\epsilon = 1$. Bezeichnet noch $d_1 := \deg(p|_{T_1})$ den Grad der eingeschränkten Abbildung $p|_{T_1}$, so berechnet man

$$\begin{aligned} e + \beta - \xi = (p^* K_S.T_1) &= d_1 \cdot (K_S.p(T_1)) \\ &= d_1 \cdot (K_S.p(q^{-1}(t_1))) = d_1 \cdot (K_S.C_{t_1}) = -d_1. \end{aligned}$$

Eingesetzt in (NNL*) ergibt sich

$$2g - 2 = e + \beta - \delta = -d_1 - (\delta - \xi)$$

mit $d_1 \geq 1$ (klar) und $\delta - \xi \geq 1$ wegen $T_1 \subsetneq \tilde{E}$. Es folgen $g = 0$ sowie $d_1 = \delta - \xi = 1$. Eingesetzt in die Darstellung von $\tilde{E}$ erhält man

$$\tilde{E} \equiv T_0 + \delta q^{-1}(t) \equiv T_1 + (\delta - \xi) q^{-1}(t) \equiv T_1 + q^{-1}(t).$$

Da $\tilde{E}$ aus mindestens zwei irreduziblen Komponenten besteht, gilt sogar (idealtheoretisch)

$$\tilde{E} \simeq T_1 + q^{-1}(t_1).$$

III) Für die noch verbleibende Aussage ii) bemerkt man, dass wegen $\gamma = 1$ ein irreduzibler reduzierter Schnitt $T_2 \subsetneq \mathcal{C}$ mit der Eigenschaft existiert, dass $\tilde{E}$ (numerisch und idealtheoretisch) aus jenem Schnitt T_2 und einer gewissen Anzahl von Fasern besteht. Dabei wird T_2 unter $p : \mathcal{C} \to S$ nach Voraussetzung mit keiner Faser $q^{-1}(t)$ identifiziert.

Es ist das Ziel zu zeigen, dass der nicht-normale Ort $E \subsetneq S$ längs $p(T_2)$ zumindest generisch reduziert ist. Dazu wähle man einen allgemeinen Punkt $b \in p(T_2)$ und betrachte einen Keim

$$f_b \in \mathcal{O}_{S,b} \quad \text{mit} \quad f_b^m \in \mathcal{I}_{E,b}.$$

Es gilt $(p^* f_b)^m = p^*(f_b^m) \in \mathcal{I}_{\tilde{E},p^{-1}(b)}$ und damit

$$p^*(f_b) \in \mathcal{I}_{\tilde{E},p^{-1}(b)},$$

denn T_2 ist reduziert und wird unter p mit keiner anderen Kurve aus $\mathcal{C}$ identifiziert. Es folgt

$$p^*(f_b) = \sum_i \alpha_i \cdot g_i \quad \text{mit } \alpha_i \in \mathcal{I}_{E,b} \text{ sowie } g_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},p^{-1}(b)}.$$

Sei nun $h \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},p^{-1}(b)}$ beliebig. Wegen $\mathcal{I}_E = \{f \in \mathcal{O}_S \mid f \cdot \mathcal{O}_\mathcal{C} \subseteq \mathcal{O}_S\}$ gilt für alle i

$$h \cdot (\alpha_i \cdot g_i) = \alpha_i \cdot (h \cdot g_i) \in \mathcal{O}_{S,b}$$

und damit $h \cdot f_b \in \mathcal{O}_{S,b}$. Also ist $f_b \in \mathcal{I}_{E,b}$ und $p(T_2)$ ist im Punkt b reduziert.

Weil der nicht-normale Ort $E \subsetneq S$ entlang $p(T_2)$ generisch reduziert ist, besitzen die allgemeinen (glatten) Punkte von $p(T_2)$ nach [KuWa88, Proposition 4.1] die Multiplizität 2, weshalb die eingeschränkte Abbildung $p|_{T_2}$ generisch entweder $2:1$ oder $1:1$ sein muss.

Im ersten Fall erhält man die in der Formulierung des Lemmas beschriebene Situation direkt aus [KuWa88, Satz 4.4 III) a)].

Im zweiten Fall besitzen die Kurven C_t zu allgemeinem $t \in T$ die Gestalt von Kuspen, deren Singularitäten genau auf $p(T_2)$ liegen ([KuWa88, Satz 4.4 III) b)]). Bei dieser Variante aber müsste die Bedingung $\gamma = 2$ erfüllt sein. Da dies ausgeschlossen ist, folgt die Behauptung. $\square$

Proposition 6.16 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte* ***Gorenstein-Kählerdreifaltigkeit*** *mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine* ***maximale*** *nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) = 1$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen.*

Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird, und es sei $(S.C_t) \geq 0$. Dann gilt:

i) Es gibt keinen irreduziblen (Multi-)Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$, der via $p : \mathcal{C} \to S$ mit einer Faser $q^{-1}(t_1)$ identifiziert wird;

ii) S wird überdeckt von reduziblen rationalen Kurven, die sich in einer 2-dimensionalen Familie rationaler Kurven in X bewegen. Insbesondere ist die Dreifaltigkeit X uniruled.

Beweis. I) Man nehme zuerst an, dass ein Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$ existiert, der unter $p : \mathcal{C} \to S$ mit einer Faser $q^{-1}(t_1)$ identifiziert wird. Wäre zusätzlich die Bedingung $(S.C_t) > 0$ erfüllt, so wäre $N_{S/X}$ ample nach Lemma 6.14 und folglich X projektiv nach Lemma 2.19. Da dies nach Voraussetzung ausgeschlossen ist, bleibt nur die Möglichkeit „$(S.C_t) = 0$“. Nach der Adjunktionsformel gilt dann

$$(-K_S.C_t) = (-K_X.C_t) = 1,$$

weshalb es sich bei S, wieder nach Lemma 6.14, um eine nicht-normale Gorenstein-del Pezzofläche handelt, für die insbesondere die Ergebnisse aus Proposition 4.20 zur Verfügung stehen.

Es ist das Ziel, einen Widerspruch mit Hilfe des Deformationsarguments aus Folgerung 2.23 zu erkennen. Dazu ist nachzuweisen, dass das Konormalenbündel $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ der Fläche $S \subsetneq X$ trivial ist. Hierbei werden sich die Kenntnisse aus Proposition 4.20 als sehr hilfreich erweisen.

Wegen $(S.C_t) = 0$ ist $p^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ nach Lemma 6.14 numerisch trivial. Da $\mathcal{C}$ nach Lemma 6.15 i) eine rationale Regelfläche darstellt, gilt sogar

$$p^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}}.$$

Für eine Aussage über das Konormalenbündel selbst erinnert man sich an die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \omega_E \longrightarrow 0 \tag{8}$$

aus Proposition 4.20 iii) und tensoriert diese mit $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Nach der Projektionsformel gilt

$$p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}} \otimes \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq p_*p^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}.$$

Wegen $E \simeq \mathbb{P}_1$ und $(K_S.E) = -1$ (Proposition 4.20 ii)) gilt außerdem

$$(S.E) = 0 \quad \text{sowie} \quad (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_E \simeq \mathcal{O}_E \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}.$$

Eingesetzt in (8) erhält man die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow p_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \omega_S^{-1} \otimes \omega_E \longrightarrow 0. \tag{9}$$

Ein Vergleich von (8) und (9) liefert $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathcal{O}_S$ und somit die Projektivität von X nach Folgerung 2.23, ein Widerspruch.

II) Man darf ab jetzt voraussetzen, dass für jeden irreduziblen (Multi-)schnitt T_1 und jede Kurve C_t die Menge $p(T_1) \cap C_t$ endlich ist. Wüsste man, dass die Bedingung $(S.C_t) = 0$ erfüllt ist, könnte man Lemma 6.15 anwenden. Da dies nicht der Fall ist, sieht man sich gezwungen, neu zu argumentieren. Man bemerkt, dass es aufgrund der Nicht-Existenz eines Schnitts wie in I) eine eventuell singuläre Kurve B und holomorphe Abbildungen $\pi : S \to B$ sowie $\lambda : T \to B$ mit der Eigenschaft gibt, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei gilt für jeden allgemeinen Punkt $b \in B$

$$(S_b)_{red} = (\pi^{-1}(b))_{red} = C_{t_1} \cup \ldots \cup C_{t_r} \tag{10}$$

mit $\lambda^{-1}(b) = \{t_1, \ldots, t_r\} \subsetneq T$ und $r \geq 1$.

Es sei weiterhin $b \in B$ ein allgemeiner Punkt. Man möchte einsehen, dass sich $(S_b)_{red}$ in einer überdeckenden Familie rationaler Kurven bewegt. Dies ist richtig, falls in (10) sogar $r \geq 2$ gilt: Bezeichnet

$$u : \tilde{S}_b \to (S_b)_{red}$$

die Normalisierung von $(S_b)_{red}$, so hat man $\tilde{S}_b = p^{-1}(S_b)$ sowie $u = p|_{\tilde{S}_b}$. Deshalb besteht $\tilde{S}_b$ aus r disjunkten glatten rationalen Kurven und es gilt

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}_b}) = r \quad \text{sowie} \quad \dim Aut(\tilde{S}_b) = 3r.$$

Da $\tilde{S}_b$ reduziert und folglich frei von eingebetteten Punkten ist, erkennt man mit Hilfe der Formel

$$\dim_{[u]} Hom(\tilde{S}_b, X) \geq (-K_X.S_b) + 3\chi(\mathcal{O}_{\tilde{S}_b})$$

aus [Ko96, II, Theorem 1.2], dass sich $(S_b)_{red}$ in einer mindestens r-dimensionalen Familie reduzibler rationaler Kurven bewegt. Wegen $r \geq 2$ und aufgrund der Faserstruktur von $\pi : S \to B$ überdeckt diese Familie zwangsläufig die gesamte Varietät X. Insbesondere ist X uniruled.

Nebenbemerkung: Man überlegt sich übrigens leicht, dass tatsächlich $r = 2$ gelten muss, weil sich sonst mit Hilfe des geometrischen Quotienten ein Widerspruch zur Nicht-Projektivität von X herleiten ließe (vergleiche Proposition 3.3).

Damit bleibt noch der Ausschluss der Möglichkeit „$r = 1$" nachzureichen:

Man nimmt an, dass $(S_b)_{red} = C_{t(b)}$ irreduzibel ist (dabei sei $b \in B$ nach wie vor allgemein) und betrachtet die längs der Normalisierung $\nu_{t(b)} : \mathbb{P}_1 \to C_{t(b)}$ zurückgezogene Sequenz von Konormalengarben

$$0 \longrightarrow \nu^*_{t(b)}(N^*_{S/X}|_{C_{t(b)}}) \longrightarrow \nu^*_{t(b)}(\mathcal{N}^*_{C_{t(b)}/X}) \longrightarrow \nu^*_{t(b)}(\mathcal{N}^*_{C_{t(b)}/S}) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

mit $\deg(\nu^*_{t(b)}(N^*_{S/X}|_{C_{t(b)}})) = -(S.C_t) \leq 0$ und $\nu^*_{t(b)}(\mathcal{N}^*_{C_{t(b)}/S}) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$. Es folgt

$$\deg(\nu^*_{t(b)}(\mathcal{N}^*_{C_{t(b)}/X})) = \deg(\nu^*_{t(b)}(N^*_{S/X}|_{C_{t(b)}})) \leq 0.$$

Andererseits gilt $C_{t(b)} \cap \mathrm{Sing}(X) = \emptyset$ nach Wahl von b und damit

$$\deg(\nu^*_{t(b)}(\mathcal{N}^*_{C_{t(b)}/X})) = 2 + (K_X.C_{t(b)}) = 2 - 1 = 1 > 0,$$

ein Widerspruch. $\square$

6.2.2 Zur Struktur von S und X

Für die Untersuchung der Struktur von X benötigt man wie zum Ausschluss des Falls „$(S.C_t) = 0$“ in Abschnitt 4.2 eine Aussage der Gestalt, dass die Dreifaltigkeit X unter gewissen Voraussetzungen nicht auf eine normale Fläche in $\mathfrak{C}$ von algebraischer Dimension 0 abgebildet werden kann. Diese Aussage soll in Form von Lemma 6.17 bereitgestellt werden. Die Beweisführung verläuft im Prinzip analog zum Beweis von Folgerung 4.10. Die komplexere Struktur der Fläche S macht jedoch einige zusätzliche Argumente notwendig (siehe Lemma 6.18).

Lemma 6.17 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 sei $(S.C_t) \geq 0$. Dann gibt es keine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ auf eine normale Fläche Y in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y) = 0$.*

Beweis. Man nehme an, es gibt eine holomorphe Abbildung $f : X \to Y$ auf eine normale Fläche Y in $\mathfrak{C}$ mit $a(Y) = 0$ und betrachte die durch das normale minimale Modell $\kappa : Y \to Y'$ induzierte holomorphe Abbildung

$$f' := \kappa \circ f : X \to Y'.$$

Wegen $a(Y') = a(Y) = 0$ kann die Moishezonfläche S durch f' nicht surjektiv auf Y' abgebildet werden. Weil Y' zudem frei von Kurven ist, ist es genausowenig möglich, dass S ein 1-dimensionales Bild in Y' besitzt. Damit bleibt lediglich die Möglichkeit einer Abbildung auf einen Punkt.

Es seien $f'(S) =: y \in Y'$ das Bild von S und $F := f'^{-1}(y)$ die zugehörige Faser mit der natürlichen Struktur (definiert durch das Bild von $f'^*(\mathfrak{m}_y) \to \mathcal{O}_X$). Man schreibe

$$F = \lambda S + D$$

mit einer natürlichen Zahl λ, einem effektiven Zykel D und der Eigenschaft $S \not\subseteq \mathrm{Supp}(D)$. Man erinnere sich an den normalisierten Graphen (G) der Familie $(C_t)_{t \in T}$ und betrachte das zurückgezogene Geradenbündel

$$p^* N^*_{S/X} \equiv \alpha T_0 + \beta q^{-1}(t).$$

Man setzt sich zum Ziel nachzuweisen, dass gilt $\alpha = 0$ sowie $\beta > 0$ und unterscheidet die beiden denkbaren Fälle „$F = \lambda S$“ und „$F \neq \lambda S$“.

Im Fall „$F = \lambda S$“ gilt $N^*_{F/X}|_S \simeq N^{*\lambda}_{S/X}$, weshalb $N^{*\lambda}_{S/X}$ auf kanonische Weise global erzeugt ist. Durch Schneiden mit C_t folgt nach [Ha77, IV, Lemma 1.2] einerseits

$$\alpha = (p^* N^*_{S/X}.q^{-1}(t)) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad (S.C_t) = -(p^* N^*_{S/X}.q^{-1}(t)) = -\alpha \leq 0.$$

Da andererseits nach Voraussetzung die Bedingung $(S.C_t) \geq 0$ erfüllt ist, erhält man zusammengenommen $\alpha = (S.C_t) = 0$.

Wieder weil $N^{*\lambda}_{S/X}$ global erzeugt ist, gilt (jetzt) auch $\beta \geq 0$. Wäre $\beta = 0$, so müsste $p^*N^*_{S/X}$ notwendig numerisch trivial sein. Dies ist jedoch unmöglich, weil $N^*_{F/X}|_S$ und damit $N^{*\lambda}_{S/X}$ wegen $\mathrm{emb}_y Y = \dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2) \geq 2$ mindestens zwei globale Schnitte (mit Nullstellen) besitzt. Also gilt $\alpha = 0$ und $\beta > 0$.

Im Fall „$F \neq \lambda S$" nutzt man die auf S eingeschränkte Sequenz von Konormalengarben

$$\mathcal{N}^*_{F/X}|_S \longrightarrow \mathcal{N}^{*\lambda}_{S/X} \longrightarrow \mathcal{N}^*_{\lambda S/F}|_S \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{N}^*_{F/X}|_S$ wieder global erzeugt ist und die Abbildung $\mathcal{N}^*_{F/X}|_S \to \mathcal{N}^{*\lambda}_{S/X}$ nach Wahl von λ generisch injektiv ist. Da $N^{*\lambda}_{S/X}$ infolgedessen globale Schnitte besitzt, die wegen $F \neq \lambda S$ Nullstellen aufweisen müssen, kann man ab jetzt genau wie im Fall „$F = \lambda S$" argumentieren und erhält abermals $\alpha = 0$ und $\beta > 0$.

Mit Hilfe des nachgestellten, etwas technischen Lemmas 6.18 erkennt man letztendlich den gesuchten Widerspruch. $\square$

Lemma 6.18 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 gelte* $p^*N^*_{S/X} \equiv \beta q^{-1}(t)$ *mit* $\beta \geq 0$. *Dann ist* $p^*N^*_{S/X}$ *numerisch trivial, d.h.* $\beta = 0$.

Beweis. Aufgrund der vorgegebenen Gestalt von $p^*N^*_{S/X}$ gilt insbesondere $(S.C_t) = 0$. Zusammen mit $(K_X.C_t) = -1$ berechnet man daraus

$$(S^3) = -\beta \cdot (S.C_t) = 0$$

sowie

$$(K_X.S^2) = -\beta \cdot (K_X.C_t) = \beta \geq 0$$

und erhält durch Anwendung des Satzes von Riemann-Roch (etwa [Re87, Theorem 10.2])

$$\chi(X, \mathcal{O}_X(nS)) = -\frac{1}{4}n^2 \underbrace{(K_X.S^2)}_{=\ \beta \geq 0} + \text{(Terme vom Grad} \leq 1).$$

Angenommen nun, es gilt $\beta > 0$, so folgt

$$h^1(X, \mathcal{O}_X(nS)) + h^3(X, \mathcal{O}_X(nS)) \gtrsim n^2.$$

Man beginnt mit dem Ausschluss der Möglichkeit „$h^3(X, \mathcal{O}_X(nS)) \gtrsim n^2$": Nach Serre-dualität gilt dann

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(-nS) \otimes K_X) = h^3(X, \mathcal{O}_X(nS)) \gtrsim n^2.$$

Eingesetzt in den Beginn der langen exakten Kohomologiesequenz

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-(n+1)S) \otimes K_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(-nS) \otimes K_X) \longrightarrow \dots$$

erweist sich diese Möglichkeit sofort als unsinnig.

Damit bleibt nur $h^1(X, \mathcal{O}_X(nS)) \gtrsim n^2$: Wieder aufgrund der vorgegebenen Gestalt von $p^*N^*_{S/X}$ existiert ein amples Geradenbündel $L \in \mathrm{Pic}(T)$ mit der Eigenschaft

$$p^*N^*_{S/X} \simeq q^*L.$$

Bemerkt man, dass wegen $(K_S.C_t) = (K_X.C_t) = -1$ gilt $R^1q_*(p^*K_S) = 0$, so berechnet man mit Hilfe der Lerayschen Spektralsequenz (und der Projektionsformel)

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{C}, p^*N^{*n}_{S/X} \otimes p^*K_S) &\cong H^1(\mathcal{C}, q^*L^n \otimes p^*K_S) \\ &\cong H^0(T, L^n \otimes \underbrace{R^1q_*(p^*K_S)}_{=0}) \oplus H^1(T, L^n \otimes q_*(p^*K_S)) \\ &\cong H^1(T, L^n \otimes q_*(p^*K_S)), \end{aligned}$$

was bedeutet, dass die zueinander isomorphen Kohomologiegruppen

$$H^1(\mathcal{C}, p^*N^{*n}_{S/X} \otimes p^*K_S) \cong H^1(S, p_*p^*(N^{*n}_{S/X} \otimes K_S)) \cong H^1(S, N^{*n}_{S/X} \otimes K_S \otimes p_*\mathcal{O}_\mathcal{C})$$

für $n \gg 0$ verschwinden (denn L ist ample).

Die Verschwindung der letztgenannten Kohomologiegruppe nutzt man ausgehend von der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow p_*\mathcal{O}_\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

wobei die Garbe $\mathcal{Q}$ auf dem nicht-normalen Ort E von S lebt, im entsprechenden Abschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz

$$\ldots \to H^0(E, N^{*n}_{S/X} \otimes K_S \otimes \mathcal{Q}) \longrightarrow H^1(S, N^{*n}_{S/X} \otimes K_S) \longrightarrow \underbrace{H^1(S, N^{*n}_{S/X} \otimes K_S \otimes p_*\mathcal{O}_\mathcal{C})}_{=0 \ \textit{für} \ n \gg 0}.$$

Wegen $\dim E = 1$ kann man daraus nämlich auf ein höchstens lineares Wachstum von $h^1(S, N^{*n}_{S/X} \otimes K_S) = h^1(S, \mathcal{O}_S(nS))$ in n schließen und man erhält mit Hilfe der Sequenz

$$\ldots \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X((n-1)S)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(nS)) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(nS)) \longrightarrow \ldots$$

endlich

$$h^1(X, \mathcal{O}_X(nS)) \lesssim n,$$

ein Widerspruch $\square$

Damit stehen alle erforderlichen Hilfsmittel bereit, um die Strukturen von S und X in der nachfolgenden Proposition 6.19 sowie in Satz 6.20 zu beschreiben.

Proposition 6.19 *In der Situation aus Notation 6.1/6.4 sei X nicht-projektiv und es gelte $(S.C_t) \geq 0$. Dann ist X ein holomorpher Faserraum über einer kompakten Riemannschen Fläche C und die allgemeine Faser ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Dabei besitzt X die algebraische Dimension $a(X) = 1$ oder $a(X) = 2$.*

Beweis. Nach Proposition 6.16 ist die Varietät X uniruled. Bezeichnet deshalb

$$\sigma : \hat{X} \to X$$

eine Desingularisierung von X, so ist $\hat{X}$ eine glatte kompakte Kählerdreifaltigkeit, für deren Struktur die zwei in Satz 4.13 angegebenen Möglichkeiten in Frage kommen. Beide gilt es im Folgenden zu untersuchen.

I) Zunächst widme man sich dem Fall, dass $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow C$ ein holomorpher Faserraum über einer kompakten Riemannschen Fläche und die allgemeine Faser von $\hat{f}$ ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve ist. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ C & \end{tikzcd}$$

mit der induzierten a priori meromorphen Abbildung $f : X \dashrightarrow C$.

Bezeichnet $E \subsetneq X$ eine irreduzible Komponente des Entartungsortes von $f : X \dashrightarrow C$ und

$$\hat{E} := \sigma^{-1}(E) \subsetneq \hat{X}$$

das entsprechende Urbild in $\hat{X}$, so sieht man leicht ein, dass $\hat{E}$ durch $\hat{f}$ auf einen Punkt abgebildet werden muss: Denn angenommen es gilt $\hat{f}(\hat{E}) = C$, so schneidet $\hat{E}$ insbesondere jede allgemeine Faser von $\hat{f}$, weshalb $\hat{X}$ aufgrund der Moishezoneigenschaft von $\hat{E}$ algebraisch zusammenhängend sein müsste. Damit aber wäre auch X algebraisch zusammenhängend und folglich projektiv nach Folgerung 2.16. Folglich lässt sich die meromorphe Abbildung $f : X \dashrightarrow C$ wie gewünscht zu einer holomorphen Abbildung

$$f : X \to C$$

fortsetzen.

Selbstverständlich besitzt $f : X \to C$ genau wie $\hat{f} : \hat{X} \to C$ ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve als allgemeine Faser und es gilt $a(X) = 1$ oder $a(X) = 2$.

II) Es bleibt noch der Fall auszuschließen, dass $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ ein holomorpher Faserraum über einer normalen kompakten Fläche Y in $\mathfrak{C}$ der algebraischen Dimension $a(Y) = 0$ ist. Durch Übergang zum normalen minimalen Modell von Y darf man wie gewohnt davon ausgehen, dass in Y keinerlei Kurven existieren.

Man betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\hat{f}"'] & X \arrow[dl, dashed, "f"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

mit der induzierten meromorphen Abbildung $f : X \dashrightarrow Y$. Wie in I) bezeichne $E \subsetneq X$ eine irreduzible Komponente des Entartungsortes von $f : X \dashrightarrow Y$ und $\hat{E} := \sigma^{-1}(E) \subsetneq \hat{X}$ das entsprechende Urbild in $\hat{X}$.

Da $\hat{E}$ Moishezon ist, kann das Bild von $\hat{E}$ unter $\hat{f}$ nicht die komplette Fläche Y ausmachen (denn nach Voraussetzung gilt $a(Y) = 0$). Genausowenig kann $\hat{E}$ nach Wahl von Y auf eine Kurve abgebildet werden und geht folglich auf einen Punkt in Y. Dann aber ist $f : X \dashrightarrow Y$ tatsächlich holomorph, was nach Lemma 6.17 ausgeschlossen ist. Deshalb kann Fall II) unter den gegebenen Umständen nicht auftreten. $\square$

Satz 6.20 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte* ***Gorenstein****-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine* ***maximale*** *nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) = 1$. Die Familie $(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es sei $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird und es gelte $(S.C_t) \geq 0$.*

Dann ist X ein holomorpher Faserraum $f : X \to C$ über einer kompakten Riemannschen Fläche C und die allgemeine Faser von f ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Auch die Fläche S ist eine Faser von f (mengentheoretisch). Desweiteren existiert eine fast holomorphe Abbildung $\omega : X \dashrightarrow W$ auf eine normale Fläche W, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\omega"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[dl, dashed] \\ C & \end{tikzcd}$$

kommutiert und ω holomorph ist sowohl auf den allgemeinen Fasern von f als auch auf S. Dabei gilt $\dim \omega(S) = 1$. Die Dreifaltigkeit X besitzt die algebraische Dimension $a(X) = 1$ oder $a(X) = 2$.

Beweis. Nach der voranstehenden Proposition 6.19 ist X ein holomorpher Faserraum

$$f : X \to C$$

über einer kompakten Riemannschen Fläche C und die allgemeine Faser von f ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve. Dabei bewegen sich die Fasern dieser $\mathbb{P}_1$-Bündel notwendig in einer 2-dimensionalen Familie rationaler Kurven

$$(C'_r)_{r\in R}.$$

Von Interesse ist in diesem Beweis in erster Linie die Situation um die Fläche S. Man bemerke zunächst, dass S algebraisch zusammenhängend ist und deshalb in einer Faser F_S von f liegen muss, weil sich sonst, wie bereits mehrfach praktiziert, ein Widerspruch zur Voraussetzung „X nicht projektiv“ herleiten ließe. Folglich existieren eine natürliche Zahl λ und ein effektiver Zykel D mit

$$F_S = \lambda S + D \quad \text{und} \quad S \nsubseteq supp(D).$$

Schneiden mit C_t liefert

$$\underbrace{(F_S.C_t)}_{\leq 0} = \lambda \underbrace{(S.C_t)}_{\geq 0} + \underbrace{(D.C_t)}_{\geq 0}$$

und es folgt

$$(F_S.C_t) = (S.C_t) = (D.C_t) = 0.$$

Übrigens gilt tatsächlich sogar $F = \lambda S$: Denn angenommen D ist nicht-trivial, so besitzt $N^{*\lambda}_{S/X}$ notwendig globale Schnitte mit Nullstellen und es gilt $p^* N^*_{S/X} \equiv \beta q^{-1}(t)$ mit $\beta > 0$ im Widerspruch zu Lemma 6.18.

Wegen $(S.C_t) = 0$ ist ab jetzt insbesondere Lemma 6.15 anwendbar. Dabei ist aus Proposition 6.16 bekannt, dass kein Schnitt $T_1 \subsetneq \mathcal{C}$ von $q : \mathcal{C} \to T$ existiert, der unter $p : \mathcal{C} \to S$ mit einer Faser $q^{-1}(t_1)$ identifiziert wird. Deshalb existiert ein irreduzibler reduzierter Schnitt $T_2 \subsetneq \mathcal{C}$, sodass die eingeschränkte Abbildung $p|_{T_2}$ vom Grad 2 ist und es zu allgemeinem $t \in T$ ein eindeutig bestimmtes $t^* \in T$ gibt mit $C_t \cap C_{t^*} \neq \emptyset$. Dabei sind die Kurven C_t sowie C_{t^*} glatt und schneiden sich transversal in genau einem Punkt (Lemma 6.15 ii)).

Insbesondere existieren eine eventuell singuläre Kurve B und holomorphe Abbildungen $\pi : S \to B$ sowie $\lambda : T \to B$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & S \arrow[d, "\pi"] \\ T \arrow[r, "\lambda"] & B \end{tikzcd}$$

kommutiert und eine allgemeine Faser von π genau einer der Koniken der Form $C_t \cup C_{t^*}$ entspricht.

Zu allgemeinem $t \in T$ sei $Z_t := C_t \cup C_{t^*}$ eine solche singuläre Konik. Diese bewegt sich in einer mindestens 1-dimensionalen Familie $(Z_t)_{t \in T'}$. Doch Z_t bewegt sich sogar in einer 2-dimensionalen Familie rationaler Kurven: Man verwendet für den Nachweis, dass Z_t ein lokal vollständiger Durchschnitt ist und es sich daher bei der Konormalengarbe $\mathcal{N}^*_{Z_t/X}$ um ein holomorphes Vektorbündel vom Rang 2 handelt. Folglich steht eine kurze exakte Sequenz der Gestalt

$$0 \longrightarrow N^*_{S/X}|_{C_t} \longrightarrow N^*_{Z_t/X}|_{C_t} \longrightarrow N^*_{Z_t/S}|_{C_t} \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

zur Verfügung. Wegen $(S.C_t) = 0$ gilt $N^*_{S/X}|_{C_t} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$. Schreibt man weiter

$$N^*_{Z_t/X}|_{C_t} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(b) \quad \text{sowie} \quad N^*_{Z_t/S}|_{C_t} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(c),$$

so berechnet man mit der Adjunktionsformel aufgrund von $(K_{Z_t}.C_t) = -1$

$$a + b = (K_X.C_t) - (K_{Z_t}.C_t) = -1 + 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Sequenz (*) folgt $c = 0$ und weiter $a = b = 0$. Also gilt $N^*_{Z_t/X}|_{C_t} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}$ und deshalb $N^*_{Z_t/X} \simeq \mathcal{O}_{Z_t} \oplus \mathcal{O}_{Z_t}$ sowie

$$\chi(Z_t, N^*_{Z_t/X}) = h^0(Z_t, N^*_{Z_t/X}) - h^1(Z_t, N^*_{Z_t/X}) = 2 - 0 = 2.$$

Also bewegt sich Z_t wie vorausgesagt in einer 2-dimensionalen Familie rationaler Kurven.

Ein allgemeines Mitglied der soeben nachgewiesenen 2-dimensionalen Familie liegt nicht mehr in der Fläche S und bewegt sich deshalb notwendig in der Familie $(C'_r)_{r\in R}$ (denn in den $\mathbb{P}_1$-Bündeln über den elliptischen Kurven gibt es genau eine Familie rationaler Kurven). Bezeichnet umgekehrt

$$R_0 := \{r \in R \mid C'_r \subsetneq S\}$$

den Basisraum all derjeniger Mitglieder der Familie $(C'_r)_{r\in R}$, die in S liegen, so findet sich jedes Element C'_r mit allgemeinem $r \in R_0$ in der Form $Z_t := C_t \cup C_{t'}$ als Mitglied der Familie $(Z_t)_{t\in T'}$ wieder und es folgt $R_0 = T'$.

Bezeichnet

$$\omega : X \dashrightarrow W$$

den geometrischen Quotienten bezüglich der Familie $(C'_r)_{r\in R}$, so gilt mit Sicherheit $\dim W = 2$, denn zwei allgemeine Kurven der Familie $(C'_r)_{r\in R}$ schneiden sich nicht. Außerdem ist die fast holomorphe Abbildung ω eingeschränkt auf eine allgemeine Faser von f natürlich holomorph, denn dort ist der geometrische Quotient ω einfach die Projektion des $\mathbb{P}_1$-Bündels auf die glatte elliptische Basiskurve. Bei ω handelt es sich also gleichzeitig um die relative Albaneseabbildung zu f.

Wegen $\omega|_S = \pi : S \to B$ ist der geometrische Quotient auch eingeschränkt auf die Fläche S holomorph und es gilt $\dim \omega(S) = 1$. Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen. □

6.2.3 Die Konstruktion einer Kontraktion

Zur finalen Konstruktion einer Kontraktion im Fall „$(S.C_t) \geq 0$" benötige ich nurmehr das folgende Lemma.

Lemma 6.21 *Sei X ein kompakter komplexer Kählerraum und $(C'_r)_{r\in R}$ eine Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C'_r) > 0$. Dann existiert zu jedem spaltenden Mitglied C'_{r_0} eine maximale nicht-spaltende Familie rationaler Kurven*

$$(\tilde{C}_r)_{r\in\tilde{R}}$$

mit $(-K_X.\tilde{C}_r) > 0$.

Beweis. Es sei

$$C'_{r_0} = \bigcup_j C'_{r_0,j}$$

ein spaltendes Mitglied der vorgegebenen Familie $(C'_r)_{r\in R}$. Ziel ist die Konstruktion einer nicht-spaltenden Familie $(\tilde{C}_r)_{r\in\tilde{R}}$.

Wegen $(-K_X.C'_{r_0}) > 0$ existiert mindestens eine irreduzible Komponente C'_{r_0,j_0} von C'_{r_0} mit der Eigenschaft $(-K_X.C'_{r_0,j_0}) > 0$. Deswegen bewegt sich diese Komponente C'_{r_0,j_0} nach Eins Deformationslemma in einer positiv-dimensionalen Familie $(C^1_r)_{r\in R_1}$ rationaler Kurven. Dabei gilt $(-K_X.C^1_r) > 0$ und man darf ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $(C^1_r)_{r\in R_1}$ maximal ist.

Spaltet auch die Familie $(C^1_r)_{r\in R_1}$, so erhält man durch eine Wiederholung des soeben beschriebenen Arguments eine Familie $(C^2_r)_{r\in R_2}$ rationaler Kurven mit $(-K_X.C^2_r) > 0$, und so weiter.

Es bleibt zu zeigen, dass der angegebene Prozess terminiert. Die zuletzt konstruierte Familie ist dann zwingend nicht-spaltend. Man betrachtet dazu den $\mathbb{R}$-Vektorraum $N_1(X)$ zusammen mit einer Norm $\|\,.\,\|$ derart, dass für alle $[Z] \in \overline{NE}(X) \cap NE_{\mathbb{Z}}(X)$ gilt

$$\|\,[Z]\,\|^2 \in \mathbb{N}_0.$$

Bezeichnet $[Z_i] \in N_1(X)$ die Klasse eines allgemeinen Elements der Familie $(C^i_r)_{r\in R_i}$, so gilt $\|\,[Z_i]\,\|^2 \in \mathbb{N}$, weil jede effektive Kurve in X ein Element in $(\overline{NE}(X) \cap NE_{\mathbb{Z}}(X)) \setminus \{0\}$ definiert. Es genügt also zu zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\|\,[Z_{i+1}]\,\| < \|\,[Z_i]\,\|$$

erfüllt ist. Diese ist jedoch aufgrund der Kählerbedingung gegeben, denn nach Konstruktion gilt

$$[Z_i] = [Z_{i+1}] + [Z'_{i+1}] \quad \text{mit} \quad [Z'_{i+1}] \in \overline{NE}_{\mathbb{Z}}(X) \setminus \{0\}.$$

(Man bemerkt hierfür, dass gilt $\overline{NE}(X) \cap -\overline{NE}(X) = \{0\}$, vergleiche [Pe98, Teil a) im Beweis zu Theorem 3.5].) Damit folgt die Behauptung. □

Satz 6.22 *Sei X eine $\mathbb{Q}$-faktorielle nicht-projektive kompakte **Gorenstein**-Kählerdreifaltigkeit mit höchstens terminalen Singularitäten und $(C_t)_{t\in T}$ eine **maximale** nicht-spaltende Familie rationaler Kurven mit der Eigenschaft $(-K_X.C_t) = 1$. Die Familie*

$(C_t)_{t\in T}$ sei 1-dimensional und es gebe keinen Punkt $x \in X$, durch den alle Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ verlaufen. Es bezeichne $S := \bigcup_{t\in T} C_t$ diejenige (irreduzible reduzierte) Fläche in X, die von den Kurven der Familie $(C_t)_{t\in T}$ ausgefüllt wird und es gelte $(S.C_t) \geq 0$. Zusätzlich seien noch $f : X \to C$ sowie $\omega : X \dashrightarrow W$ die Abbildungen aus Satz 6.20.

Dann existiert entweder eine divisorielle Kontraktion auf eine kompakte $\mathbb{Q}$-faktorielle Cohen-Macaulayvarietät $\tilde{X}$ mit höchstens terminalen Singularitäten oder die fast holomorphe Abbildung $\omega : X \dashrightarrow W$ ist tatsächlich holomorph und definiert eine Konikbündelstruktur über W.

Beweis. Nach Proposition 6.16 wird die Dreifaltigkeit X überdeckt von einer 2-dimensionalen Familie $(C'_r)_{r\in R}$ rationaler Kurven. Man betrachtet den zugehörigen normalisierten Graphen

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "q'"'] & X \arrow[r, dashed, "\omega"] \arrow[d, "f"'] & W \arrow[dl, dashed] \\ R & C & \end{tikzcd} \qquad (G')$$

zusammen mit den in Satz 6.20 beschriebenen Abbildungen

$$f : X \to C \quad \text{sowie} \quad \omega : X \dashrightarrow W.$$

In der Familie $(C'_r)_{r\in R}$ gibt es mit Sicherheit spaltende Mitglieder. Andernfalls müsste $\omega : X \dashrightarrow W$ nach Proposition 3.4 nämlich holomorph sein und eine $\mathbb{P}_1$-Bündelstruktur über W definieren, was aufgrund der Gestalt von S unmöglich ist. Diese spaltenden Mitglieder bewegen sich notwendig in den speziellen Fasern von f, denn die allgemeine Faser von f ist bekanntlich ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über einer elliptischen Kurve.

I) Es sei $C'_{r_0} \not\subseteq S$ ein spaltendes Mitglied. Findet sich kein solches Mitglied der Familie $(C'_r)_{r\in R}$, so fahre man mit II) fort. Nach Lemma 6.21 existiert zu C'_{r_0} eine maximale nichtspaltende Familie $(\tilde{C}_r)_{r\in\tilde{R}}$ rationaler Kurven. Diese Familie überdeckt die Dreifaltigkeit X nicht (andernfalls ergäbe sich entweder ein Widerspruch zur Nicht-Projektivität von X oder zur Existenz der Fläche S) und füllt stattdessen eine Fläche $\tilde{S}$ aus.

Ist $\tilde{S}$ normal oder nicht-normal mit $(\tilde{S}.\tilde{C}_r) < 0$, so existiert eine divisorielle Kontraktion φ auf einen Punkt oder eine Kurve in einer kompakten $\mathbb{Q}$-faktoriellen Cohen-Macaulaydreifaltigkeit $\tilde{X}$ mit höchstens terminalen Singularitäten nach den Sätzen 4.22, 5.5 oder 6.10.

Ist $\tilde{S}$ nicht normal mit $(\tilde{S}.\tilde{C}_r) \geq 0$, so ist $\tilde{S}$ vom gleichen Typ wie S. Insbesondere ist $\omega|_{\tilde{S}}$ holomorph.

II) Existiert außerhalb der Fläche S kein spaltendes Mitglied der Familie $(C'_r)_{r\in R}$ oder findet sich auch durch die Auswahl spaltender Mitglieder und das Verfahren aus Lemma 6.21 keine Fläche $\tilde{S} \neq S$, die normal oder nicht-normal mit $(\tilde{S}.\tilde{C}_r) < 0$ ist, so gibt es keine positiv-dimensionale Teilfamilie der Familie $(C'_r)_{r\in R}$ mit der Eigenschaft, dass alle Kurven dieser (Teil-)Familie durch einen einzigen Punkt verlaufen. Infolgedessen besitzt die Auswertungsabbildung $p' : \mathcal{C}' \to X$ aus dem normalisierten Graphen (G') keine Fasern positiver Dimension.

Nach Konstruktion ist p' jedoch bimeromorph, denn die allgemeine Faser von f ist ein $\mathbb{P}_1$-Bündel, und hat außerdem zusammenhängende Fasern, weil $\mathcal{C}'$ und X normal sind. Zusammengenommen ist p' also sogar ein Isomorphismus. Dies bedeutet, dass gilt

$$R \simeq W \quad \text{sowie} \quad \omega = q'.$$

Insbesondere ist ω holomorph und X besitzt die Struktur eines Konikbündels über W. $\square$

Literatur

[AnTo82] Ancona,V., Tomassini,G.: *Modifications analytiques.* Lect. Notes Math. 943, Springer 1982

[Ba75] Barlet,D.: *Espace analytique réduit des cycles analytiques complexes compacts d'un espace analytique complexe de dimension finite.* Lect. Notes Math. 482, 1-158, Springer 1975

[BaKa82] Barthel,G., Kaup,L.: *Topologie des surfaces complexes compactes singuliéres.* Sur la topologie des surfaces complexes compactes, Semin. Math. Super. 80 (1982), 61-297

[Bi81] Bingener,J.: *On the existence of analytic contractions.* Invent. math. 64 (1981), 25-67

[Bo02] Boucksom,S.: *Cônes positifs des variétés complexes compactes.* Dissertation, Université de Grenoble (2002)

[Br05] Brunella,M.: *A positivity property for foliations on compact Kähler manifolds.* Preprint, Dijon (2005)

[Ca80] Campana,F.: *Algébricité et compacité dans l'espace des cycles.* Math. Ann. 251 (1980), 7-18

[Ca81] Campana,F.: *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement Kählérien compact.* Invent. math. 63 (1981), 187-223

[Ca04] Campana,F.: *Orbifolds, special varieties and classification theory: appendix.* Ann. Inst. Fourier 54/3 (2004), 631-665

[CaPe97] Campana,F., Peternell,T.: *Towards a Mori theory on compact Kähler threefolds, I.* Math. Nachr. 187 (1997), 29-59

[Cu88] Cutkosky,S.: *Elementary contractions of Gorenstein threefolds.* Math. Ann. 280 (1988), 521-525

[Do66] Douady,A.: *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné.* Ann. Inst. Fourier 16/1 (1966), 1-95

[Ei95] Eisenbud,D.: *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Grad. Texts Math. 150, Springer 1995

[El81] Elkik,R.: *Rationalité des Singularités Canoniques.* Invent. math. 64 (1981), 1-6

[Fl81] Flenner,H.: *Rationale quasihomogene Singularitäten.* Arch. Math. 36 (1981), 35-44

[Fu75] Fujiki,A.: *On the blowing down of analytic spaces.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. 10 (1975), 473-507

[Fu78] Fujiki,A.: *Closedness of the Douady spaces of compact Kähler spaces.* Publ. Math. RIMS Kyoto Univ. 14 (1978), 1-52

[Fu82] Fujiki,A.: *On the Douady space of a compact complex space in the category* $\mathfrak{C}$. Nagoya Math. J. 85 (1982), 189-211

[Fu83] Fujiki,A.: *On the structure of compact complex manifolds in* $\mathfrak{C}$. Adv. St. Pure Math. 1 (1983), 231-302

[Gr62] Grauert,H.: *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen.* Math. Annalen 146 (1962), 331-368

[GrPeRe94] Grauert,H., Peternell,Th., Remmert,H.: *Several complex variables VII.* Encyclopaedia of Mathematical Sciences 74, Springer 1994

[Ha77] Hartshorne,R.: *Algebraic Geometry.* Grad. Texts Math. 52, Springer 1977

[Ha80] Hartshorne,R.: *Stable reflexive sheaves.* Math. Ann. 254 (1980), 121-176

[HiWa81] Hidaka,F., Watanabe,K.: *Normal Gorenstein surfaces with ample anti-canonical divisor.* Tokyo J. Math. 4 (1981), 319-330

[Is86] Ishii,S.: *Isolated* $\mathbb{Q}$*-Gorenstein singularities of dimension three.* Adv. St. Pure Math. 8 (1986), 165-198

[Ka88] Kawamata,Y.: *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces.* Ann. Math. (2) 127/1 (1988), 93-163

[KaMaMa87] Kawamata,Y., Matsuda,K., Matsuki,K.: *Introduction to the minimal model problem.* Adv. St. Pure Math. 10 (1987), 283-360

[Ko64] Kodaira,K.: *On the structure of compact complex analytic surfaces I.* Amer. J. Math. 86 (1964), 751-798

[Ko91] Kollár,J.: *Extremal rays on smooth threefolds.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 (1991), 339-361

[Ko96] Kollár,J.: *Rational curves on algebraic varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer 1996

[KoMiMo92] Kollár,J., Miyaoka,Y., Mori,S.: *Rationally connected varieties.* J. Alg. Geom. 1 (1992), 429-448

[KoMo98] Kollár,J., Mori,S.: *Birational geometry of algebraic varieties.* Cambridge University Press 1998

[KuWa88] Kunz,E., Waldi,R.: *Der Führer einer Gorensteinvarietät.* J. reine angew. Math. 388 (1988), 106-115

[Ma90] Matsumura,H.: *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics 8, Cambridge University Press 1990

[MiPe97] Miyaoka,Y., Peternell,Th.: *Geometry of higher dimensional algebraic varieties.* DMV Seminar 26, Birkhäuser 1997

[Mo79] Mori,S.: *Projective manifolds with ample tangent bundles.* Ann. Math. 110 (1979), 593-606

[Mo82] Mori,S.: *Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective.* Ann. Math. 116 (1982), 133-176

[Mo88] Mori,S.: *Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds.* J. Am. Math. Soc. 1/1 (1988), 117-253

[MoSu78] Mori,S., Sumihiro,H.: *On Hartshorne's conjecture.* J. Math. Kyoto Univ. 18/3 (1978), 523-533

[Na02] Namikawa,Y.: *Projectivity criterion of Moishezon spaces and density of projective symplectic varieties.* Int. J. Math. 13 (2002), 125-135

[Pe98] Peternell,T.: *Towards a Mori theory on compact Kähler threefolds, II.* Math. Ann. 311 (1998), 729-310

[Pe01] Peternell,T.: *Towards a Mori theory on compact Kähler threefolds, III.* Bull. Soc. math. France 129/3 (2001), 339-356

[Re80] Reid,M.: *Canonical 3-folds.* Journée de Géométrie Algébrique d'Angers, A. Beauville ed., Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1980), 273-310

[Re83] Reid,M.: *Minimal models of canonical 3-folds.* Adv. St. Pure Math. 1 (1983), 131-180

[Re87] Reid,M.: *Young person's guide to canonical singularities.* Proc. Symp. Pure Math. 46 (1987), 345-414

[Re94] Reid,M.: *Nonnormal del Pezzo surfaces.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 30 (1994), 695-727

[Sa84] Sakai,F.: *Weil divisors on normal surfaces.* Duke Math. J. 51 (1984), 877-887

[Sa85] Sakai,F.: *The structure of normal surfaces.* Duke Math. J. 52 (1985), 628-648

[Sa86] Sakai,F.: *Ample Cartier divisors on normal surfaces.* J. Math. 366 (1986), 121-128

[Ue75] Ueno,K.: *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.* Lect. Notes Math. 439, Springer 1975

[Ue83] Ueno,K.: *Introduction to the theory of compact complex spaces in the class* $\mathfrak{C}$. Adv. St. Pure Math. 1 (1983), 219-230