

**Konstruktion und Eigenschaften  
ganzzahliger Punktmengen**

**Sascha Kurz**

ADRESSE DES AUTORS:

**Sascha Kurz**

Universität Bayreuth

Lehrstuhl für Wirtschaftsmathematik

95440 Bayreuth

e-mail: sascha.kurz@uni-bayreuth.de

Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Mathematik und Physik der Universität Bayreuth als Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigt.

D 703

1. Gutachter:	Prof. Dr. Adalbert Kerber
2. Gutachter:	Prof. Dr. Reinhard Laue
3. Gutachter:	Prof. Dr. Heiko Harborth
Tag der Einreichung:	19. 07. 2005
Tag des Kolloquiums:	23. 11. 2005

# Vorwort

Dank der Gültigkeit von Moores Gesetz hat heute jeder PC-Benutzer mehr Rechenleistung auf seinem Schreibtisch stehen als Wissenschaftlern noch 1976, mit dem ersten offiziellen Supercomputer Cray-1, zur Verfügung stand. Die Vorhersage von Moore's Gesetz, nach der sich die Leistung von Computerchips alle 18 Monate verdoppelt, gibt die Realität, seit seiner Formulierung im Jahre 1965, erstaunlich gut wieder. Diese rasante Entwicklung der Rechenleistung ist nicht ohne Einfluss auf die Mathematik geblieben.

In vielen Anwendungen in der Chemie, Physik, Biologie und in den Ingenieurwissenschaften treten diskrete Strukturen auf. Beispiele solcher diskreter Strukturen sind molekulare Graphen, fehler-korrigierende Codes, Designs, Matroide, Schaltfunktionen, Assoziationsschemata, endliche Geometrien oder Netzwerke, siehe z.B. [166]. Die bloße theoretische Existenz einer solchen Struktur, auch mit den sich aus den Anwendungen ergebenden Nebenbedingungen, nutzt dem Anwender meist recht wenig. Die Herausforderung der sich die Mathematik in diesem Zusammenhang stellen muss, ist das schnelle redundanzfreie Erzeugen diskreter Strukturen unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen.

Damit man sich unter dem Begriff einer diskreten Struktur etwas vorstellen kann bzw. um die praktische Relevanz dieser Art von Mathematik zu belegen, geben wir nun ein exemplarisches Beispiel an.

Ziel der sogenannten *Molekularen Strukturaufklärung* ist die Identifizierung von chemischen Molekülen anhand von gemessenen spektroskopischen Daten. Hierzu beschreibt der Chemiker die Moleküle mit einem mathematischen Wechselwirkungsmodell, wobei meist ein molekularer Graph gewählt wird. Dies ist ein Multigraph, dessen Knoten mit Atomnamen versehen sind und der Wechselwirkungen zwischen den Atomen des Moleküls beschreibt. Die Aufgabe der Mathematik hierbei, ist die Bereitstellung aller molekularen Graphen die zu einem gegebenen Datensatz passen. Beispielsweise könnte so ein Datensatz aus der Angabe der Summenformel des Moleküls bestehen. Betrachtet man hier die *Dekane* mit Summenformel  $C_{10}H_{22}$  so ergeben sich 75 verschiedene molekulare Graphen, sogenannte Bindungsisomere. Wenn man diese molekularen

Graphen nun im Rechner konstruiert, kann sich der Chemiker mit Hilfe dieser Information weitere Experimente überlegen, mit denen er das chemische Molekül dann eindeutig identifizieren kann. Nähere Ausführungen zu Anwendungen von diskreten Strukturen in der Chemie können beispielsweise [120] entnommen werden.

In dieser Dissertation sollen Punktmenge im Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^m$  mit paarweise ganzzahligen Abständen betrachtet werden. Für die Wahl dieses scheinbar recht speziellen Themas gibt es eine Reihe von Gründen. Zum einen gibt es interessante Anwendungen für dieses Problem, von denen wir ein paar im nächsten Kapitel vorstellen möchten. Die Fragestellung ist weiterhin mathematisch sehr interessant, da sie mehrere mathematische Teildisziplinen berührt. Zu nennen wären hier die Geometrie, Gruppentheorie, Zahlentheorie, Graphentheorie und Kombinatorik. Für die allgemeine Theorie der Konstruktion diskreter Strukturen sind die ganzzahligen Punktmenge von Interesse, da man hier nicht mit einem einzigen Konstruktionsalgorithmus zu befriedigenden Resultaten kommen kann, sondern fast die gesamte Bandbreite der bekannten allgemeinen Konstruktionsalgorithmen ausnutzen muss. Das Vorhandensein von stark einschränkenden Nebenbedingungen ist eine weitere sehr willkommene Eigenschaft.

Ziel der Dissertation ist es, die Struktur und die Eigenschaften ganzzahliger Punktmenge genauer als bisher bekannt aufzuklären und Algorithmen zu entwickeln, mit denen man diese diskreten Strukturen effizient konstruieren kann. Trotz des speziellen Problems können Erkenntnisse auf das allgemeine Konstruktionsproblem diskreter Strukturen übertragen werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Reihe neuer Resultate erzielt:

- Nach Vorarbeiten in Abschnitt 2.3 können wir in Abschnitt 2.4 den Begriff der Charakteristik eines Dreiecks auf Simplizes beliebiger Dimension verallgemeinern. Den für die Konstruktion ganzzahliger planarer Punktmenge äußerst wichtigen Satz, dass je zwei Dreiecke aus 3 nicht kollinearen Punkten einer ganzzahligen planaren Punktmenge dieselbe Charakteristik besitzen, übertragen wir entsprechend auf beliebige Dimensionen, siehe auch [102].
- In Kapitel 3 präsentieren wir eine Variante der ordnungstreuen Erzeugung, die für die Konstruktion ganzzahliger Punktmenge bzw. allgemeiner für die Konstruktion diskreter Strukturen mit strukturell ähnlichen, starken Nebenbedingungen besonders geeignet ist.
- Den Eigenschaften und der Berechnung der Charakteristik von ganzzahligen

gen Punktmengen haben wir uns in Kapitel 4 gewidmet. Die dortigen Betrachtungen führen unter anderem zu theoretischen Einsichten in die Struktur ganzzahliger planarer Punktmengen bzw. zu einer Laufzeitabschätzung für die von uns verwendete Konstruktionsmethode (in unserem Spezialfall).

- In Kapitel 5 erweitern wir die Liste der bekannten minimalen Durchmesser ganzzahliger planarer Punktmengen. Bisher waren die minimalen Durchmesser ganzzahliger planarer Punktmengen aus  $n$  Punkten nur für  $n \leq 9$  bekannt. In Abschnitt 5.4 bestimmen wir sie für  $n \leq 89$ . Für eine bestimmte Klasse ganzzahliger planarer Punktmengen haben wir in Abschnitt 5.2 die richtige Größenordnung des minimalen Durchmessers bestimmt, siehe auch [103]. Der allgemeine Beweis, ohne Einschränkung auf eine bestimmte Klasse ganzzahliger Punktmengen, ist bisher noch nicht gelungen, aber in Abschnitt 5.3 und Abschnitt C.2 geben wir zumindest eine vielversprechende Strategie an. Für ganzzahlige planare Punktmengen ohne 3 kollineare Punkte waren die minimalen Durchmesser bisher ebenfalls nur für  $n \leq 9$  bekannt. In Abschnitt 5.5 haben wir sie für  $n \leq 36$  bestimmt.
- Eine offene Fragestellung aus [37, 38, 39] wird in Kapitel 6 beantwortet, siehe auch [98]. In Abschnitt 8.3 stellen wir einen sehr effizienten Kanonizitätstest für kleine Matrizen vor.
- Die Liste der bekannten minimalen Durchmesser von ganzzahligen räumlichen Punktmengen aus  $n$  Punkten konnten wir in Abschnitt 9.1 erweitern. Für  $n = 9$  mussten wir einen Wert aus der Literatur korrigieren und für  $11 \leq n \leq 23$  haben wir sie erstmals bestimmt. In Abschnitt 9.2 ordnen wir die bisher bekannten oberen Schranken für minimale Durchmesser  $d(m, n)$  ganzzahliger  $m$ -dimensionaler Punktmengen aus  $n$  Punkten in einem größeren Rahmen ein und fügen ein paar weitere Resultate hinzu. Insbesondere Satz 9.2.6 liefert eine sehr gute obere Schranke. Die zugehörige Konstruktion führt in den Dimensionen  $m = 2, 3$  zu ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen aus  $m^2 + m$  Punkten mit minimalem Durchmesser. Für  $m \geq 4$  liefert sie immerhin  $d(m, m^2 + m) \leq 17$  und wir vermuten, dass diese obere Schranke angenommen wird.
- In Kapitel 10 bestimmen wir die Anzahl ganzzahliger  $m$ -dimensionaler Simplexe mit Durchmesser  $d$  für einige Paare von Werten von  $m$  und  $d$ . Für den Spezialfall  $m = 2$  haben wir eine exakte Formel wiederentdeckt, siehe auch [59]. Als Verallgemeinerung betrachten wir weiterhin ganzzahlige Simplexe mit zwei verschiedenen Abständen.

- In Abschnitt 11.1 behandeln wir ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmen- gen aus  $m + 2$  Punkten. Bisher waren nur Beispiele in den Dimensionen  $m = 3, 8$  bekannt. Wir zeigen, dass es für ungerade Dimensionen  $m \geq 3$  immer mindestens eine solche ganzzahlige Punktmenge gibt. Durch eine vollständige Suche zeigen wir, dass es in den Dimensionen  $m = 2, 4, 6$  und  $10$  keine derartigen Punktmen- gen gibt.
- Für ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmen- gen aus  $m + 2$  Punkten kann der minimale Durchmesser nur  $3$  oder  $4$  betragen. Bisher war nur bekannt, dass die untere Schranke  $3$  in den Dimensionen  $m = 3, 6, 8$  angenommen wird. In Abschnitt 11.2 zeigen wir, dass sie auch für  $9 \leq m \leq 24$  angenommen wird.

An dieser Stelle möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Adalbert Ker- ber und Herrn Prof. Dr. Reinhard Laue bedanken, die mich während dieser Arbeit betreuten und mit vielen anregenden Diskussionen maßgeblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen haben. Weiter möchte ich mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Heiko Harborth bedanken, der mich mit dem Problemkomplex der ganzzahli- gen Punktmen- gen in Kontakt gebracht hat und, auch über die Universitätsgrenzen hinweg, immer ein offenes Ohr für meine Fragen und Ideen hatte. Außerdem dan- ke ich den Mitarbeitern des Lehrstuhl II für Mathematik für das gute Arbeitsklima, meinen Koautoren [59, 98, 103] und allen Anderen, die zur Entstehung dieser Ar- beit beigetragen haben.

Bayreuth, im November 2005

*Sascha Kurz*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Historie . . . . .	4
1.2 Ähnliche Fragestellungen . . . . .	9
1.3 Algorithmische Sichtweise . . . . .	11
<b>2 Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1 Abstandsmatrizen . . . . .	15
2.2 Normalformen von Abstandsmatrizen . . . . .	22
2.3 Eine eindeutige Koordinatendarstellung von Punktmengen . . . . .	24
2.4 Charakteristik einer Punktmenge . . . . .	28
2.5 Überprüfung zusätzlicher Nebenbedingungen . . . . .	30
2.6 Abzählen diskreter Strukturen . . . . .	33
<b>3 Konstruktion ganzzahliger Punktmengen</b>	<b>35</b>
3.1 Ordnungstreues Erzeugen . . . . .	36
3.2 Eine Variante der ordnungstreuen Erzeugung . . . . .	38
3.3 Konstruktion ganzzahliger Simplizes . . . . .	40
3.4 Konstruktion ganzzahliger Punktmengen . . . . .	42
3.5 Wahlen für die Parameter des ordnungstreuen Erzeugens . . . . .	44

<b>4</b>	<b>Eigenschaften und Berechnung der Charakteristik</b>	<b>47</b>
4.1	Ressourcenschonende Datenstrukturen für Simplizes . . . . .	47
4.2	Sortieren nach Charakteristik . . . . .	50
4.3	Berechnung der Charakteristik . . . . .	54
4.4	Anzahl unterschiedlicher Charakteristiken . . . . .	57
4.5	Dreiecke mit gleicher Charakteristik und gleichem Durchmesser .	59
<b>5</b>	<b>Minimale Durchmesser von planaren Punktmengen</b>	<b>69</b>
5.1	Minimale Durchmesser ganzzahliger planarer Punktmengen . . .	70
5.2	Ganzzahlige Punktmengen mit $n - 1$ Punkten auf einer Geraden .	73
5.3	Strategien zum Beweis einer unteren Schranke für $d(2, n)$ . . . . .	81
5.4	Ein hybrider Konstruktionsalgorithmus . . . . .	82
5.5	Punktmengen ohne drei kollineare Punkte . . . . .	88
5.6	Erdős-Problem . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Maximale ganzzahlige Punktmengen</b>	<b>95</b>
6.1	Ein Algorithmus zur Bestimmung maximaler Punktmengen . . . . .	95
6.2	Beispiele maximaler Punktmengen . . . . .	97
<b>7</b>	<b>Automorphismengruppen von ganzzahligen Punktmengen</b>	<b>101</b>
7.1	Automorphismengruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum .	102
7.2	Datenstrukturen für Gruppen . . . . .	104
7.3	Iterierte Klassifizierung . . . . .	104
<b>8</b>	<b>Der Kanonizitätstest</b>	<b>109</b>
8.1	Der Lerneffekt . . . . .	109
8.2	Lerneffekte durch gefundene Automorphismen . . . . .	113
8.3	Kanonizitätstests ohne Testen von Permutationen . . . . .	115
<b>9</b>	<b>Punktmengen in höheren Dimensionen</b>	<b>121</b>
9.1	Räumliche ganzzahlige Punktmengen . . . . .	123
9.2	Obere Schranken für minimale Durchmesser . . . . .	130
9.3	Minimale Durchmesser für höhere Dimensionen . . . . .	136
<b>10</b>	<b>Anzahl ganzzahliger Simplizes</b>	<b>141</b>
10.1	Anzahl ganzzahliger Tetraeder . . . . .	143
10.2	Ganzzahlige Simplizes mit Durchmesser kleiner gleich 2 . . . . .	146
10.3	Ganzzahlige Simplizes mit höchstens zwei Abständen . . . . .	151
10.4	Ganzzahlige Simplizes mit Durchmesser 3 . . . . .	159
10.5	Gruppenaktionen, Doppelnebenklassen und das Leiterspiel . . . . .	162

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>11 Punktmengen mit kleinen Durchmessern</b>	<b>167</b>
11.1 Ganzzahlige Punktmengen mit zwei Abständen . . . . .	168
11.2 Ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 3 . . . . .	170
11.3 Ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 4 . . . . .	171
<b>12 Ausblick</b>	<b>175</b>
<b>A Punktmengen mit minimalem Durchmesser</b>	<b>177</b>
A.1 Planare Punktmengen . . . . .	177
A.2 Planare Punktmengen in semi-allgemeiner Lage . . . . .	181
A.3 Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3	187
A.4 Weitere Punktmengen mit minimalem Durchmesser . . . . .	196
<b>B Laufzeitvergleiche</b>	<b>201</b>
B.1 Ordnungstreue Erzeugung durch Erweitern vs. ordnungstreue Er-	
zeugung durch Verschmelzen . . . . .	201
B.2 Punktmengen mit $n - 1$ kollinearen Punkten . . . . .	202
<b>C Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen</b>	<b>205</b>
C.1 Ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage . . . . .	205
C.2 Anzahl ganzzahliger Vier- und Fünfecke . . . . .	214
C.3 Ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage . . . . .	218
C.4 Anzahl ganzzahliger Tetraeder . . . . .	227
<b>D Verbotene minimale Graphen bzw. Abstandsmatrizen</b>	<b>237</b>
D.1 Verbotene minimale Graphen für Simplizes mit Seitenlängen zwei	
und drei . . . . .	237
D.2 Verbotene Abstandsmatrizen mit Abständen $a$ und $a+1$ . . . . .	238
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>242</b>
<b>Index</b>	<b>257</b>



# Abbildungsverzeichnis

1.2	Very Large Array in New Mexico (Image courtesy of NRAO/AUI).	2
1.3	Antennenanordnung von MERLIN in Großbritannien. . . . .	3
1.4	Beispiel von zwei Hyperbelscharen. . . . .	4
1.5	Kleinster bekannter 4-regulärer ebener Graph mit Kanten der Länge 1. . . . .	9
2.1	Zwei äquivalente Tetraeder. . . . .	15
2.2	Zwei ähnliche Punktmenge. . . . .	16
2.3	Zusammenfügen von zwei Dreiecken. . . . .	21
2.4	Sehnenviereck. . . . .	33
3.1	Verschmelzen von zwei Teilpunktmenge. . . . .	35
4.1	Anzahl unterschiedlicher Charakteristiken bei ganzzahligen Dreiecken. . . . .	58
4.2	Maximale Anzahl $\tilde{\psi}(d)$ von ganzzahligen Dreiecken mit Durchmesser $d$ und gleicher Charakteristik für $d \leq 5.000$ . . . . .	66
4.3	Quotient von $\Psi(d)$ und $d^2$ für $d \leq 5.000$ mit begrenzender oberer Schranke. . . . .	67
5.1	Punktmenge mit minimalem Durchmesser für $3 \leq n \leq 9$ . . . . .	70
5.2	Planare Punktmenge mit $n - 1$ Punkten auf einer Geraden. . . . .	71
5.3	Kompakte Darstellung von planaren Punktmenge mit $n - 1$ Punkten auf einer Geraden. . . . .	71
5.4	Ganzzahlige Punkte auf der Seite eines Dreiecks. . . . .	77
5.5	Äquivalente Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite in einer planaren Punktmenge. . . . .	81
5.6	Anzahl ganzzahliger planarer Punktmenge mit Durchmesser 396. . . . .	84
5.7	Ganzzahliges Vier- bzw. Fünfeck in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	91
		ix

5.8	Ganzzahliges Sechseck in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	92
5.9	Sechseck aus sechs Kopien eines Dreiecks. . . . .	93
5.10	Sechseck aus dreimal zyklisch angetragenen Vierecken. . . . .	94
5.11	Kleinstes ganzzahliges Sechseck aus dreimal zyklisch angetragenen Vierecken. . . . .	94
6.1	Zwei Beispiele maximaler Punktmengen. . . . .	98
7.1	Planare Punktmenge mit $D_3$ als Automorphismengruppe. . . . .	103
7.2	Nummerierte ganzzahlige planare Punktmenge mit zugehöriger Abstandsmatrix. . . . .	105
9.1	3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 6 Punkten mit minimalem Durchmesser. . . . .	123
9.2	3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 7 Punkten mit minimalem Durchmesser. . . . .	124
9.3	3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 8 Punkten mit minimalem Durchmesser. . . . .	124
9.4	Zweites Beispiel für $d(3, 8) = 13$ . . . . .	125
9.5	3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 9 Punkten mit minimalem Durchmesser. . . . .	125
9.6	3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 12 Punkten mit minimalem Durchmesser. . . . .	126
9.7	Teilkonfiguration der 3-dimensionalen ganzzahligen Punktmenge aus 13 Punkten mit minimalem Durchmesser . . . . .	127
9.8	2-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 11 Punkten mit Durchmesser 56. . . . .	127
9.9	2-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 12 Punkten mit Durchmesser 77. . . . .	129
9.10	3-dimensionale ganzzahlige Punktmengen aus 6 bzw. 7 Punkten in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	130
9.11	Planare Punktmenge mit Punkten auf zwei parallelen Geraden. . . . .	132
9.12	Ganzzahliges Prisma aus $3m$ Punkten für $m = 2$ . . . . .	133
9.13	Ganzzahliges Prisma aus $4m$ Punkten für $m = 2$ . . . . .	133
10.1	$\frac{\alpha(d,3)}{\bar{\alpha}(d,3)}$ vs. $\frac{729}{1000}$ . . . . .	145
10.2	Der Graph $K_3 \oplus K_4$ . . . . .	154
10.3	Verbotene Graphen für die Abstandsmengen $\{4, 7\}$ und $\{5, 9\}$ . . . . .	154

10.4	Ganzzahliges Simplex mit Seitenlängen 1, $a$ und $b$ . . . . .	161
10.5	Knotengewichteter Graph für ein Simplex mit Seitenlängen aus $\{1, 2, 3\}$ . . . . .	161
10.6	Untergruppenleiter zur Untergruppenkette $S_{6,5,4} \leq S_{11,4} \leq S_{15}$ . . .	165
11.1	Ganzzahliger Pyramidenstumpf. . . . .	171
A.1	Ganzzahlige planare Punktmenge aus 6 bzw. 7 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	181
A.2	Ganzzahlige planare Punktmenge aus 9 bzw. 12 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	182
A.3	Ganzzahlige planare Punktmenge aus 14 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	183
A.4	Ganzzahlige planare Punktmenge aus 28 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser. . . . .	185
C.1	Anzahl $\bar{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$ , der ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage, und $\hat{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$ , der ganzzahligen Vierecke in allgemeiner Lage, für $d \leq 6.000$ . . . . .	215
C.2	$\bar{\Upsilon}(d)$ für $d \leq 15.000$ . . . . .	216
C.3	$\hat{\Upsilon}(d)$ für $d \leq 15.000$ . . . . .	217
D.1	Verbotene minimale Graphen für $\{a, b\} = \{2, 3\}$ - Teil 1. . . . .	237
D.2	Verbotene minimale Graphen für $\{a, b\} = \{2, 3\}$ - Teil 2. . . . .	238



# Tabellenverzeichnis

1.1	Verwendete Wellenlängen am VLA. . . . .	3
2.1	Die Verteilung der Charakteristiken von ganzzahligen Dreiecken. .	29
2.2	$S_g$ für Multigraphen auf 4 Punkten. . . . .	34
4.1	Maximaler Durchmesser bei Speicherung der Charakteristik als <i>unsigned long long</i> oder <i>long long</i> . . . . .	49
4.2	Verteilung der Charakteristik von Dreiecken mit Durchmesser 1.000 modulo $K$ . . . . .	51
4.3	Verteilung der Charakteristik von Dreiecken mit Durchmesser 1.009 modulo $K$ . . . . .	52
4.4	Ausgewählte Werte von $\varpi_{d_1}^{d_2}(K)$ und $\overline{\varpi}_{d_1}^{d_2}(K)$ . . . . .	54
5.1	Obere Schranken für $d(2, n)$ , $30 \leq n \leq 63$ . . . . .	78
5.2	Obere Schranken für $d(2, n)$ , $64 \leq n \leq 89$ . . . . .	79
5.3	Minimale Durchmesser $d(2, n)$ , $9 \leq n \leq 29$ . . . . .	80
5.4	Anzahl ganzzahliger planarer Punktmengen mit Durchmesser 396 aus $n$ Punkten. . . . .	83
5.5	Anzahl ganzzahliger planarer Punktmengen mit Durchmesser 396 ohne die Teilpunktmengen von 4 ausgewählten Punktmengen. . .	85
5.6	Obere Schranken für $\bar{d}(2, n)$ . . . . .	91
8.1	Anzahl von Kanonizitätsvektoren. . . . .	116
9.1	Punktmengen mit minimalem Durchmesser $\hat{d}(2, n)$ . . . . .	132
9.2	Obere Schranken für den minimalen Durchmesser $d(m, n)$ . . . . .	135
9.3	Minimale Durchmesser $\bar{d}(m, n)$ . . . . .	137
9.4	Minimale Durchmesser $\hat{d}(m, n)$ . . . . .	137
9.5	Minimale Durchmesser $d(m, n)$ . . . . .	139

10.1	Anzahl $\alpha(d, m)$ von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser $d$ für kleine Dimensionen $m$ - Teil 1. . . . .	141
10.2	Anzahl $\alpha(d, m)$ von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser $d$ für kleine Dimensionen $m$ - Teil 2. . . . .	142
10.3	Anzahl $\alpha(d, m)$ von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser $d$ für größere Dimensionen $m$ . . . . .	143
10.4	Anzahl verbotener minimaler Graphen für Simplizes mit Seitenlängen 2 und 3. . . . .	152
10.5	Anzahl verbotener zusammenhängender minimaler Graphen für Simplizes mit Seitenlängen 2 und 3. . . . .	153
10.6	Anzahl von Simplizes mit Seitenlängen 4 und 7 bzw. 5 und 9. . . . .	155
10.7	Anzahl ganzzahliger Simplizes mit höchstens 2 Abständen - Teil 1. . . . .	157
10.8	Anzahl ganzzahliger Simplizes mit höchstens 2 Abständen - Teil 2. . . . .	158
10.9	Anzahl ganzzahliger Simplizes mit höchstens 2 Abständen - Teil 3. . . . .	158
11.1	Schranken für minimale Durchmesser von Punktmengen mit wenigen Punkten. . . . .	170
11.2	Anzahl $\hat{\beta}(3, m, m + 2)$ ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmengen aus $m + 2$ Punkten in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3. . . . .	170
B.1	Erweitern vs. Verschmelzen - Konstruktion ganzzahliger Tetraeder. . . . .	201
B.2	Erweitern vs. Verschmelzen - Konstruktion ganzzahliger Vierecke in semi-allgemeiner Lage. . . . .	202
B.3	Algorithmus 5.2.3 vs. trivialer Algorithmus. . . . .	203
C.1	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 1. . . . .	205
C.2	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 2. . . . .	206
C.3	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 3. . . . .	207
C.4	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 4. . . . .	208
C.5	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 5. . . . .	209
C.6	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 6. . . . .	210
C.7	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 7. . . . .	211
C.8	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 8. . . . .	212
C.9	Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 9. . . . .	213
C.10	Anzahl von ganzzahligen Vier- und Fünfecken in allgemeiner Lage. . . . .	214
C.11	Vergleich von $\hat{Y}(d)$ und $\Xi(d)$ . . . . .	217
C.12	Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 1. . . . .	218
C.13	Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 2. . . . .	219
C.14	Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 3. . . . .	220

C.15 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 4. . .	221
C.16 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 5. . .	222
C.17 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 6. . .	223
C.18 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 7. . .	224
C.19 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 8. . .	225
C.20 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 9. . .	226
C.21 Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 10. . .	227
C.22 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $1 \leq d \leq 128$ . . . . .	228
C.23 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $129 \leq d \leq 233$ . . . . .	229
C.24 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $234 \leq d \leq 338$ . . . . .	230
C.25 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $339 \leq d \leq 443$ . . . . .	231
C.26 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $444 \leq d \leq 548$ . . . . .	232
C.27 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $549 \leq d \leq 653$ . . . . .	233
C.28 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $654 \leq d \leq 758$ . . . . .	234
C.29 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $759 \leq d \leq 863$ . . . . .	235
C.30 Anzahl $\alpha(d, 3)$ ganzzahliger Tetraeder für $864 \leq d \leq 962$ . . . . .	236



# Symbolverzeichnis

$\mathcal{P}$	Punktmenge, 1
$n$	Anzahl der Punkte einer Punktmenge $\mathcal{P}$ , 1
$m$	Dimension einer Punktmenge $\mathcal{P}$ , 1
$\overline{AB}$	Abstand zwischen Punkt $A$ und Punkt $B$ , bzw. Strecke zwischen $A$ und $B$ , 4
$\mathcal{S}$	Simplex, 5
$\text{diam}(\mathcal{S})$	Durchmesser eines Simplex $\mathcal{S}$ , 5
$f \in O(g)$	$\exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$ , 11
$f \in o(g)$	$\exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n)$ , 11
$f \in \Omega(g)$	$f \in O(g)$ und $f \in o(g)$ , 11
$c$	Feste, aber je nach Anwendung variierende, hinreichend große Konstante, die z.B. für die Beschreibung der Größenordnung $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$ verwendet wird, 11
$\delta(i, j)$	euklidischer Abstand zwischen Punkt $i$ und Punkt $j$ , 16
$\sigma$	Nummerierung der Punkte einer Punktmenge $\mathcal{P}$ , 16
$\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$	Abstandsmatrix einer Punktmenge $\mathcal{P}$ mit Nummerierung $\sigma$ der Punkte, 16
$S_n$	symmetrische Gruppe auf $n$ Punkten, 16
$id$	das neutrale Element einer Gruppe, 16
$\text{Aut}(\mathcal{P})$	Automorphismengruppe einer Punktmenge $\mathcal{P}$ , 17
$A_{\Delta}(a, b, c)$	Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen $a$ , $b$ und $c$ , 17
$C(P_0, \dots, P_{n-1})$	Cayley-Menger-Determinante der Punkte $P_0, \dots, P_{n-1}$ , 17

$V_n(P_0, \dots, P_n)$	$n$ -dimensionales Volumen der $n + 1$ Punkte $P_0, \dots, P_n$ , 18
$\langle A, B \rangle$	Skalarprodukt zweier Vektoren $A$ und $B$ , 18
$k$	Charakteristik einer Punktmenge oder eines Simplex, 28
$\text{char}(\mathcal{S})$	Charakteristik eines ganzzahligen Simplex $\mathcal{S}$ , 28
$\text{char}(\mathcal{P})$	Charakteristik einer ganzzahligen Punktmenge $\mathcal{P}$ , 29
$\mathfrak{D}$	eine diskrete Struktur, wie z.B. Graphen, 36
$L$	Menge der <i>unnummerierten</i> Objekte einer diskreten Struktur $\mathfrak{D}$ , 36
$l_0 \simeq l_1$	$l_0$ und $l_1$ liegen in der selben Äquivalenzklasse, 36
$\rho$	eine Abbildung von $L$ nach $\mathbb{N}_0$ , die konstant auf den Äquivalenzklassen von $L$ ist, 36
$L_q$	Menge der Elemente $l \in L$ mit $\rho(l) = q$ , 36
$\mathcal{L}_q$	durch $\prec_q$ geordnete Liste der kanonischen bzw. semi-kanonischen Elemente aus $L_q$ , 36
$\chi_q$	Test auf Kanonizität, 36
$\prec_q$	totale Ordnung auf $L_q$ , 36
$\Gamma_q$	Erweiterungsfunktion, 36
$\Gamma$	abkürzend für $\Gamma_q$ , 36
$\prec$	abkürzend für $\prec_q$ , 36
$\chi$	abkürzend für $\chi_q$ , 36
$a \preceq b$	$a \prec b$ oder $a = b$ , 36
$X^*$	die Menge aller Listen mit Elementen aus $X$ , inklusive der leeren Liste, 38
$\downarrow_q$	Schrumpfungsfunktion, 38
$\downarrow$	abkürzend für $\downarrow_q$ , 38
$\omega(d)$	Anzahl der Primteiler von $d$ , 55
$\tau(d)$	Anzahl der Teiler einer Zahl $d$ ., 56
$\psi(d, k)$	Anzahl der Dreiecke mit Charakteristik $k$ und Durchmesser $d$ , 59
$\tilde{\psi}(d)$	Maximum von $\psi(d, k)$ über alle möglichen Charakteristiken $k$ , 60

$\Psi(d)$	$\Psi(d) = \sum_k \binom{\psi(d,k)+1}{2}$ , 60
$\hat{\psi}(d)$	$\max_{d' \leq d} \tilde{\psi}(d')$ , 65
$\text{diam}(\mathcal{P})$	Durchmesser einer Punktmenge $\mathcal{P}$ , 69
$d(m, n)$	minimaler Durchmesser einer ganzzahligen $m$ -dimensionalen Punktmenge aus $n$ Punkten, 69
$\bar{d}(m, n)$	minimaler Durchmesser einer ganzzahligen $m$ -dimensionalen Punktmenge aus $n$ Punkten in semi-allgemeiner Lage, 69
$\dot{d}(m, n)$	minimaler Durchmesser einer ganzzahligen $m$ -dimensionalen Punktmenge aus $n$ Punkten in allgemeiner Lage, 69
$D_r$	Diedergruppe auf $r$ Punkten, 102
$\hat{d}(2, n)$	minimaler Durchmesser einer ganzzahligen Punktmenge aus $n$ Punkten, welche die Bedingungen von Lemma 9.2.4 erfüllt, 132
$M(m, n)$	minimaler Durchmesser einer $m$ -dimensionalen normierten Punktmenge aus $n$ Punkten, 138
$\alpha(d, m)$	Anzahl der ganzzahligen Simplizes der Dimension $m$ mit Durchmesser $d$ , 141
$\alpha_{\leq}(d, m)$	Anzahl der ganzzahligen Simplizes der Dimension $m$ mit Durchmesser kleiner gleich $d$ , 143
$\hat{\alpha}_{\leq}(d, 3)$	Anzahl der Abstandsmatrizen, welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, von 4 Punkten mit ganzzahligen Abständen zwischen 1 und $d$ , 144
$\hat{\alpha}(d, 3)$	Anzahl der Abstandsmatrizen, welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, von 4 Punkten mit ganzzahligen Abständen und Durchmesser $d$ , 144
$[i_0, \dots, i_{r-1}]$	Partition in Standardform, $i_0 \geq \dots \geq i_{r-1} > 0$ , 146
$p(k)$	Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl $k$ , 146
$K_r$	vollständiger Graph auf $r$ Knoten, 147
$\omega([i_0, \dots, i_{r-1}])$	Abbildung einer Partition auf einen Simplex mit Abständen 1 und 2, 147
$\omega_{\lambda}([i_0, \dots, i_{r-1}])$	Abbildung einer Partition auf einen Simplex mit Abständen 1 und $\lambda$ , 147

$\alpha(\{a_0, \dots, a_{r-1}\}, m)$	Anzahl der $m$ -dimensionalen Simplizes mit Seitenlängen aus $\{a_0, \dots, a_{r-1}\}$ , 151
$\omega_{a,b}(\mathcal{G})$	Abbildung eines Graphen auf einen Simplex mit Abständen in $\{a, b\}$ , 151
$\tilde{\alpha}(\{a, b\}, m)$	Anzahl der $m$ -dimensionalen Simplizes mit Abständen in $\{a, b\}$ bei denen das Urbild von $\omega_{a,b}$ ein zusammenhängender Graph ist, 153
$K_u \oplus K_v$	Vereinigung von zwei vollständigen Graphen $K_u$ und $K_v$ mit einem gemeinsamen Knoten, 154
$K_u \cup K_v$	disjunkte Vereinigung der vollständigen Graphen $K_u$ und $K_v$ , 159
${}_G X$	Gruppenoperation von $G$ auf $X$ , 162
$G(x)$	Bahn $\{gx \mid g \in G\}$ von $x \in X$ unter $G$ , 162
$G \setminus X$	Menge der Bahnen von $G$ in $X$ , 162
$A \setminus G/B$	Menge $\{AgB \mid g \in G\}$ der Doppelnebenklassen von $A$ und $B$ in $G$ , 163
$S_{\lambda_0, \dots, \lambda_r}$	Young-Gruppe $S_{\lambda_0} \times \dots \times S_{\lambda_r}$ , 164
$\beta(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen aus $n$ Punkten mit Durchmesser $d$ , 214
$\bar{\beta}(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen in semi-allgemeiner Lage aus $n$ Punkten mit Durchmesser $d$ , 214
$\dot{\beta}(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen in allgemeiner Lage aus $n$ Punkten mit Durch- messer $d$ , 214
$\beta_{\leq}(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen aus $n$ Punkten mit Durchmesser kleiner gleich $d$ , 214
$\bar{\beta}_{\leq}(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen in semi-allgemeiner Lage aus $n$ Punkten mit Durchmesser kleiner gleich $d$ , 214
$\dot{\beta}_{\leq}(d, m, n)$	Anzahl ganzzahliger $m$ -dimensionaler Punktmen- gen in allgemeiner Lage aus $n$ Punkten mit Durch- messer kleiner gleich $d$ , 214

# 1 Einführung

Eine Menge  $\mathcal{P}$  von  $n$  Punkten im  $m$ -dimensionalen Euklidischen Raum  $\mathbb{E}^m$  heißt **rational** bzw. **ganzzahlig**, wenn alle paarweisen Abstände der Punkte rational bzw. ganzzahlig sind. In der Ebene sprechen wir bei ganzzahligen Punktmengen aus 3, 4, 5 bzw. 6 Punkten auch von ganzzahligen Dreiecken, Vierecken, Fünfecken bzw. Sechsecken. Bevor wir nun einen kurzen Überblick über die Historie der bisher erzielten Ergebnisse zu ganzzahligen Punktmengen geben, möchten wir mit ein paar möglichen Anwendungsbeispielen die Fragestellungen motivieren.

- Aus der Unterhaltungsmathematik sind Streichholzprobleme bekannt. So kann man z.B. fragen wie viele Streichhölzer mindestens notwendig sind, um den vollständigen Graphen mit 4 Knoten überschneidungsfrei in die Ebene zu legen. Der Leser ist herzlich dazu eingeladen sich selbst an diesem Puzzle zu versuchen. (Siehe z.B. [64] für eine Lösung.)
- Im Gerüstbau könnte man daran interessiert sein, ein Gerüst aus standardisierten Streben so stabil wie möglich zu bauen. Dies bedeutet beispielsweise, dass man Punkte im dreidimensionalen Raum so platzieren möchte, dass jeder Punkt von jedem anderen ein ganzzahliges Vielfaches einer standardisierten Länge einer Strebe entfernt ist.
- In der Radioastronomie macht man sich das Phänomen der Interferenz zu Nutze und verwendet häufig gekoppelte Systeme von Antennen. Dies gewährleistet eine höhere Auflösung, als sie mit einer einzelnen Antenne möglich wäre. Um Frequenzverluste zu vermeiden, sollten die Antennen so positioniert werden, dass die Entfernung zwischen je zwei Antennen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist.

Ein Beispiel für ein solches gekoppeltes System von Radioantennen ist das VLA (Very Large Array) des US National Ra-



Abbildung 1.1:  
Radioantenne (Image  
courtesy of NRAO/AUI).

dio Astronomy Observatory in New Mexico, siehe Abbildung 1.2. Es besteht aus 27 (beweglichen) Radioantennen, die von Zeit zu Zeit in einer anderen Konfiguration arrangiert werden [129]. Jeder Arm des “Y” besitzt eine Länge von 20 Km. Zum Vergleich haben wir in Tabelle 1.1 die verwendeten Wellenlängen angegeben.

Die “kleinste” Möglichkeit 27 Punkte in der Ebene mit paarweisen ganzzahligen Abständen bzw. mit der zusätzlichen Nebenbedingung, dass keine 3 Punkte auf einer Gerade liegen sollen, zu platzieren, bestimmen wir in Kapitel 5. Die Realisierung des VLA weicht jedoch davon ab, da es noch eine ganze Reihe weiterer Einflussfaktoren für eine gute Platzierung von Radioantennen gibt, siehe z.B. [24, 46, 168, 174] für weitere Informationen.

Als zweites Beispiel für ein System von Radioantennen, ist in Abbildung 1.3 die Antennenanordnung des Multi-Element Radio-Linked Interferometer Network MERLIN dargestellt [128].



Abbildung 1.2: Very Large Array in New Mexico (Image courtesy of NRAO/AUI).

Band	4	P	L	C	X	U	K	Q
Wellenlänge in cm	400	90	20	6	3,6	2	1,3	0,7

Tabelle 1.1: Verwendete Wellenlängen am VLA.

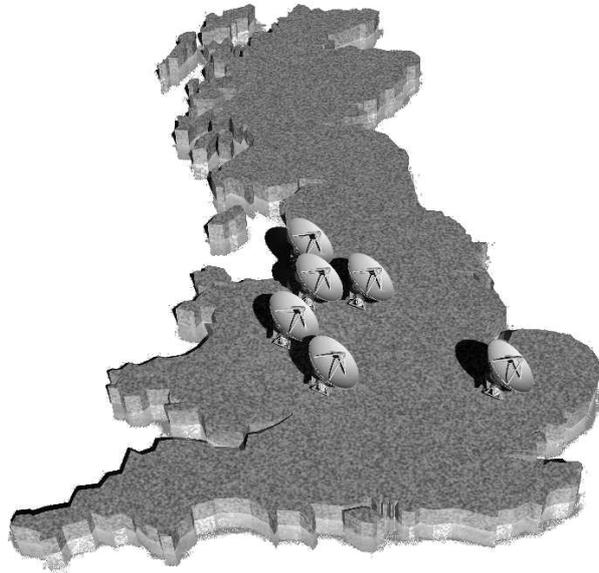


Abbildung 1.3: Antennenanordnung von MERLIN in Großbritannien.

In [64] werden die Chemie (Moleküle), die Physik (Energiequanten) und die Robotik als weitere mögliche Anwendungsgebiete genannt.

Mögliche Verallgemeinerungen erhält man, indem man andere Räume betrachtet oder die Bedingung der Ganzzahligkeit ein wenig lockert. Die Frage nach ganzzahligen Punktmengen in anderen als der euklidischen Metrik wird z.B. in [42, 48] behandelt. Punktmengen mit paarweise *fast* ganzzahligen Abständen werden in [105, 106] untersucht.

## 1.1 Historie

Eines der ersten Ergebnisse zu ganzzahligen Punktmengen ist ein Satz über unendliche ganzzahlige Punktmengen in der Ebene.

**1.1.1 Satz (Erdős, Anning 1945, [43])** *Ist  $H$  eine unendliche ganzzahlige Punktmenge in der Ebene, so liegen die Punkte von  $H$  auf einer Geraden.*

**Beweis.** Sind  $A, B, C$  drei Punkte die nicht auf einer Geraden liegen und  $k = \max(\overline{AB}, \overline{BC})$ , so gibt es höchstens  $4(k+1)^2$  Punkte  $P$  so dass  $\overline{PA} - \overline{PB}$  und  $\overline{PB} - \overline{PC}$  ganzzahlig sind. Dies sieht man wie folgt. Aufgrund der Dreiecksungleichung ist  $|\overline{PA} - \overline{PB}|$  höchstens so groß wie  $\overline{AB}$  und nimmt somit einen der Werte  $0, 1, \dots, k$  an. Der Punkt  $P$  liegt also auf einer von  $k+1$  Hyperbeln. Analog liegt  $P$  noch auf einer von  $k+1$  Hyperbeln, die durch  $B$  und  $C$  bestimmt sind. Diese zwei Scharen von (unterschiedlichen) Hyperbeln, siehe Abbildung 1.4 und die nachfolgende Erläuterung, schneiden sich in höchstens  $4(k+1)^2$  Punkten und somit ist die Annahme einer unendlichen ganzzahligen Punktmenge in der Ebene zu einem Widerspruch geführt.  $\square$

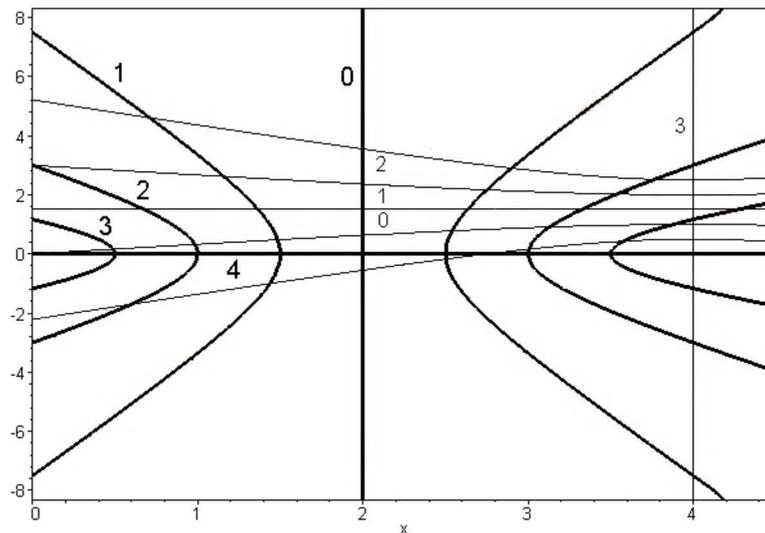


Abbildung 1.4: Beispiel von zwei Hyperbelscharen.

In Abbildung 1.4 haben wir beispielhaft zwei Hyperbelscharen dargestellt. Als Punkte haben wir hierbei  $A = (0, 0)$ ,  $B = (4, 0)$  und  $C = (4, 3)$  gewählt. Die etwas dicker gezeichneten Linien entsprechen den Ortskurven  $|\overline{PA} - \overline{PB}| = k'$  mit  $k' \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  und die dünner gezeichneten Linien den Ortskurven  $|\overline{PB} - \overline{PC}| = k'$  mit  $k' \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Die Werte von  $k'$  haben wir jeweils in die Nähe eines der beiden zugehörigen Äste geschrieben.

Das Ergebnis bleibt weiterhin gültig, wenn die Punkte nicht mehr in der Ebene, sondern im euklidischen  $\mathbb{E}^m$  liegen. Hierzu betrachten wir die Punkte  $P_0, \dots, P_m$  eines ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{S}$  (unter  $m$ -dimensional verstehen im Folgenden, dass die Punkte einen  $m$ -dimensionalen Raum aufspannen) und einen weiteren Punkt  $Q$ . Bezeichnen wir den maximalen Abstand zwischen zwei Punkten aus  $\mathcal{S}$  als **Durchmesser**  $\text{diam}(\mathcal{S})$  so gilt aufgrund der Dreiecksungleichung,

$$|\overline{P_i Q} - \overline{P_m Q}| \leq \text{diam}(\mathcal{S}) \text{ für } 0 \leq i < m.$$

Da der Betrag der Differenz auf der linken Seite für jedes  $i$  eine nicht negative ganze Zahl ist, nimmt jede der  $m$  linken Seiten einen von den  $\text{diam}(\mathcal{S}) + 1$  Werten aus  $\{0, \dots, \text{diam}(\mathcal{S})\}$  an. In Abschnitt 6.1 formen wir das zugehörige Gleichungssystem derart um, so dass man erkennen kann, dass es maximal  $2 \cdot 2^m$  Lösungen besitzt. Wir bemerken, dass man hier auch den Satz von Bézout, aus der algebraischen Geometrie, hätte anwenden können. Insgesamt gibt es also höchstens  $2^{m+1}(\text{diam}(\mathcal{S}) + 1)^m$  Punkte, die ganzzahlige Abstände zu den Punkten von  $\mathcal{S}$  besitzen.

Da die unendlichen ganzzahligen Punktfolgen somit isomorph zu Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  sind, werden wir uns im Folgenden hauptsächlich mit endlichen ganzzahligen Punktfolgen beschäftigen. Der Satz gilt allerdings nicht in beliebigen metrischen Räumen [48]. Betrachten wir z.B. im Hilbertraum  $l^2$  die unendliche Menge von Elementen  $x_i = (0, \dots, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \dots)$  mit  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$  an der Stelle  $i$  und sonst lauter Nullen, so gilt für den Abstand zwischen zwei Punkten  $\delta(x_i, x_j) = 1$ . Da die  $x_i$  eine linear unabhängige Menge bilden, sind sie nicht kollinear.

Die Existenz von nicht kollinearen ganzzahligen Punktfolgen in der Ebene mit einer beliebigen aber endlichen Anzahl an Punkten ist durch folgenden Satz gesichert, der schon Euler bekannt war, siehe auch [7, 10, 25, 87]. Wir führen den Beweis des folgenden Satzes und der benötigten Lemmas nach einer (eigenen) Mitschrift der Vorlesung "Diskrete Geometrie" aus dem Wintersemester 2002/03 gelesen von H. Harborth.

**1.1.2 Satz** *Auf dem Einheitskreis gibt es eine dichte Menge von unendlich vielen Punkten mit paarweise rationalen Abständen.*

**Beweis.** Zur Konstruktion einer derartigen Menge wählen wir eine positive rationale Zahl  $x$  und bestimmen  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  so, dass  $\sin \varphi = \frac{x^2-1}{x^2+1}$  und  $\cos \varphi = \frac{2x}{x^2+1}$  gilt. Dies ist möglich, da

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| = \left| 1 - \frac{2}{x^2+1} \right| \leq 1$$

und

$$\frac{2x}{x^2+1} = \sqrt{1 - \left( \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^2} \leq 1.$$

Wir wählen weiter  $x$  so, dass  $\varphi \neq 0$  und  $\varphi \neq \frac{\pi}{3}$ . Die folgenden zwei Lemmas zeigen, dass somit  $\frac{\varphi}{\pi}$  eine irrationale Zahl sein muss. Die Punkte  $P_n$  seien in Polarkoordinaten durch

$$r_n = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_n = 2n\varphi$$

gegeben.

Wären nun 2 Punkte gleich, so müssten  $n_0 \neq n_1 \in \mathbb{N}$  existieren mit

$$2n_0\varphi = 2n_1\varphi + 2\nu\pi.$$

Dies lässt sich umformen zu  $\frac{\varphi}{\pi} = \frac{\nu}{n_0-n_1}$ , was ein Widerspruch zur Irrationalität von  $\frac{\varphi}{\pi}$  ist.

Da für  $b > a$  der Abstand  $\delta(P_a, P_b)$

$$= |2 \sin(b-a)\varphi| = 2 \left| \sum_{j=0}^{\lceil \frac{b-a-1}{2} \rceil} (-1)^j \binom{b-a}{2j+1} \sin^{2j+1} \varphi \cos^{b-a-2j-1} \varphi \right|$$

eine rationale Zahl ist, besitzen alle Punkte paarweise rationale Abstände.

Um zu zeigen, dass die Punkte dicht liegen, sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Betrachte nun die paarweise verschiedenen Reste von  $2n\varphi$  modulo  $2\pi$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Es gibt unter ihnen 2 deren Abstand kleiner  $\varepsilon$  ist, also existieren  $n_0$  und  $n_1$  mit  $\gamma = |2n_0\varphi - 2n_1\varphi| < \varepsilon$ . Wenn wir  $s = n_1 - n_0$  setzen so gilt

$$|2(n_0 + ks)\varphi - 2(n_0 + (k-1)s)\varphi| = \gamma < \varepsilon$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Wenn wir den Einheitskreis mit Bögen der Länge  $\gamma$  überdecken, so liegt in jedem Bogen der Länge  $\varepsilon$  mindestens ein Punkt.  $\square$

Die im Beweis benötigte Irrationalität von  $\frac{\varphi}{\pi}$  wird in folgendem Lemma bewiesen.

**1.1.3 Lemma** Ist  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$  und  $\cos \varphi$  rational, dann ist entweder  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  oder  $\frac{\varphi}{\pi}$  ist nicht rational.

**Beweis.** Wir folgern aus der Annahme  $\frac{\varphi}{\pi} \in \mathbb{Q}$ , dass  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  gilt. Seien also  $m, n \in \mathbb{Z}$  gegeben mit  $\text{ggT}(m, n) = 1$  und  $\varphi = \frac{2\pi m}{n}$ . Wegen

$$\begin{aligned}\sin r\varphi &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r}{2j+1} \sin^{2j+1} \varphi \cos^{r-(2j+1)} \varphi, \\ \cos r\varphi &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{r}{2j} \sin^{2j} \varphi \cos^{r-2j} \varphi, \\ \sin^2 \varphi &= 1 - \cos^2 \varphi \in \mathbb{Q}\end{aligned}$$

existieren rationale  $a_\nu, b_\nu$  mit  $\cos \nu\varphi = a_\nu$  und  $\sin \nu\varphi = b_\nu \sin \varphi$  für  $\nu = 0, \dots, n-1$ .

Sei nun  $H$  der Hauptnenner der  $2n$  Werte  $a_\nu, b_\nu$ . Wir betrachten ein Rechteckgitter der Länge  $\frac{1}{H}$  und der Breite  $\frac{\sin \varphi}{H}$ . Legen wir nun einen Einheitskreis auf einen der Gitterpunkte, so sind alle Punkte mit Winkeln  $\nu\varphi$  auf diesem Einheitskreis Gitterpunkte. Wegen  $\varphi = \frac{2\pi m}{n}$  bilden die  $n$  Punkte ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ) ein reguläres  $n$ -Eck. Das folgende Lemma lässt somit nur die Werte 1, 2, 3, 4 oder 6 für  $n$  zu. Wegen der Ungleichung  $0 < \varphi < \frac{\varphi}{2}$  bleibt somit nur  $n = 6$  übrig, was zu  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  führt.  $\square$

Im letzten Beweis wurde nach regelmäßigen  $n$ -Ecken gefragt, die sich derart in ein Rechteckgitter einbetten lassen, so dass jeder Eckpunkt auf einem Punkt des Rechteckgitters liegt. Als ein Rechteckgitter bezeichnen wir hierbei die Menge  $\{(il_0, jl_1) \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$  wobei  $l_0$  und  $l_1$  zwei beliebige reelle Zahlen sind. Das folgende Lemma gibt eine vollständige Charakterisierung dieser  $n$ -Ecke.

**1.1.4 Lemma** In ein (beliebiges) Rechteckgitter lassen sich nur reguläre Dreiecke, Vierecke und Sechsecke einlagern, andere reguläre (gleiche Innenwinkel und gleiche Seitenlänge)  $n$ -Ecke dagegen nicht.

**Beweis.** Bei einem gegebenen Rechteckgitter gibt es, im Existenzfall, ein reguläres Vieleck mit kleinster Seitenlänge. Betrachte die Seitenvektoren  $\overrightarrow{P_1P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_1}$ . Tragen wir diese Vektoren von den Punkten  $P_0, \dots, P_{n-1}$  auf, so sind die Endpunkte ebenfalls Gitterpunkte. Hierbei soll der Vektor  $\overrightarrow{P_1P_2}$  vom Punkt  $P_0$  aufgetragen werden, der Vektor  $\overrightarrow{P_2P_3}$  vom Punkt  $P_1$ , usw. .

Für  $n \geq 7$  zeigen diese Vektoren alle ins Innere des  $n$ -Ecks und überkreuzen sich

nicht, was man leicht anhand der Winkel nachrechnen kann. Somit entstände, im Widerspruch zur Minimalität, ein kleineres reguläres  $n$ -Eck im Rechteckgitter. Für  $n = 5$  überkreuzen sich die Vektoren zwar, aber es entsteht ein kleineres Fünfeck. Für die regulären Dreiecke, Vierecke und Sechsecke gibt es entsprechende Gitter. Der Vollständigkeit halber geben wir dennoch an, was in diesen Fällen mit unserem Argument passiert. Für  $n = 6$  treffen sich alle neuen Vektoren in einem Punkt, für  $n = 4$  überdecken die neuen Vektoren die alten Vektoren, und für  $n = 3$  wird das Dreieck aus den neuen Vektoren größer statt kleiner.  $\square$

Nach Satz 1.1.2 gibt es auf dem Kreis dicht liegende Punktfolgen mit paarweise rationalen Abständen. Wie bereits vorher erwähnt gibt es natürlich auch auf der Gerade dicht liegende Punktfolgen mit paarweise rationalen Abständen. Ein berühmtes ungelöstes Problem von Ulam [169] ist die Frage nach rationalen Punktfolgen, die überall dicht in der Ebene liegen, siehe auch [95]. Spezieller als Ulam fragt Schoenberg [14], ob die Klasse der rationalen  $n$ -Ecke dicht in der Klasse aller  $n$ -Ecke ist. Auch dieses Problem ist derzeit noch weit von einer Lösung entfernt und nur für  $n = 3$  und  $n = 4$  positiv beantwortet. Fragt man nach unendlichen rationalen Punktfolgen, die nicht notwendigerweise dicht in der Ebene sind, so kennt man bisher nur Konstruktionen die aus einer Gerade oder einem Kreis mit unendlich vielen Punkten bestehen und zusätzlich noch eine kleine endliche Anzahl an Punkten außerhalb der Gerade oder des Kreises besitzen.

Für ganzzahlige Punktfolgen die sich nur in höherdimensionale euklidische Räume einbetten lassen haben wir folgenden Existenzsatz.

**1.1.5 Satz (Steiger 1953, [164])** *Zu jedem  $n > m$  gibt es im  $\mathbb{E}^m$  ganzzahlige Punktfolgen aus  $n$  Punkten, so dass nicht alle Punkte in der selben Hyperebene liegen.*

Den ebenfalls konstruktiven Beweis holen wir in Kapitel 9 nach.

Die Formulierung “nicht alle Punkte in der selben Hyperebene” ist wirklich notwendig, da bisher, außer für den planaren Fall, keine Konstruktion für  $m$ -dimensionale ganzzahlige Punktfolgen aus einer beliebigen endlichen Anzahl an Punkten, bei denen keine  $m + 1$  Punkte in einer Hyperebene liegen, bekannt ist. Für den planaren Fall ergeben sich solche Punktfolgen aus der Konstruktion im Beweis von Satz 1.1.2.

Aus eben dieser Konstruktion ergibt sich die Fragestellung die P. Erdős immer wieder auf mathematischen Konferenzen erwähnt hat: Existieren in der Ebene sechs Punkte mit paarweise ganzzahligen Abständen, so dass keine drei Punkte auf einer Geraden und keine vier Punkte auf einem Kreis liegen? Für fünf Punkte wurden Parameterlösungen von Daykin [33] und Harborth [62] angegeben, nachdem Erdős die Frage zunächst für Mengen aus 5 Punkten gestellt hatte. Im Jahr 1988

bestimmte A. Kemnitz in seiner Habilitation die minimalen Fünf- und Sechsecke mit dieser Eigenschaft, und gab auch zwei verschiedene Konstruktionen an, die auf Klassen von derartigen Sechsecken führen. Seitdem fragte Erdős nach einer Menge aus 7 Punkten in der Ebene, keine 3 auf einer Geraden und keine 4 auf einem Kreis, mit paarweise ganzzahligen Abständen. Seit über 15 Jahren hat es in dieser Fragestellung keinen weiteren Fortschritt mehr gegeben. In Abschnitt 5.6 werden wir die bekannten Ansätze und neue numerische Resultate zusammenstellen. Die Existenz von sieben Punkten mit den gewünschten Eigenschaften können wir allerdings auch nicht zeigen.

## 1.2 Ähnliche Fragestellungen

Die Bedingung, dass in einer Punktmenge in der Ebene alle Abstände paarweise ganzzahlig sein sollen, kann man dahin abschwächen, dass man nur von bestimmten Abständen die Ganzzahligkeit verlangt. Zur Beschreibung, welche Abstände ganzzahlig sein sollen, benutzt man am Besten einen Graphen, bei dem zwischen zwei Knoten genau eine Kante ist, wenn der entsprechende Abstand ganzzahlig sein soll. Interpretieren kann man das Ganze als ein Streichholzproblem, indem man nach einer Realisierung eines Graphen in der Ebene mit geradlinigen Kanten fragt, die man mit Streichhölzern legen kann [63]. Für die Klasse der planaren Graphen wissen wir zumindest, dass man sie mit geradlinigen Kanten überschneidungsfrei in der Ebene zeichnen kann [47, 165, 171]. Harborth und Kemnitz haben die Vermutung aufgestellt, dass man die planaren Graphen auch mit ganzzahligen Kantenlängen überschneidungsfrei in der Ebene zeichnen kann [90] bzw. sie mit Streichhölzern legen kann. Ganzzahlige Darstellungen der platonischen Graphen sind in [68, 69, 70, 122] bestimmt.

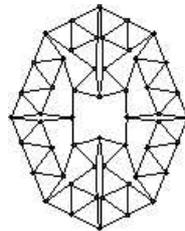


Abbildung 1.5: Kleinster bekannter 4-regulärer ebener Graph mit Kanten der Länge 1.

Ein Extremfall dieser Betrachtungen ist die Beschränkung auf Darstellungen

von Graphen bei denen die Kanten alle die Länge 1 besitzen müssen. In [152] ist die maximale Anzahl von Kanten dieser Graphen mit bis zu 14 Knoten bestimmt worden. Ein weiteres berühmtes Problem von Harborth fragt nach der minimalen Anzahl an Knoten eines 4-regulären ebenen Graphen, den man überschneidungsfrei mit Kanten der Länge 1 in die Ebene zeichnen kann. Das kleinste bekannte Beispiel fungierte jahrelang als Logo der Abteilung für Diskrete Mathematik an der TU Braunschweig, siehe Abbildung 1.5, aber bis heute konnte niemand die Minimalität beweisen oder ein kleineres Beispiel angeben. Für entsprechende 5-reguläre Graphen ist die Existenzfrage noch unentschieden, da vor kurzem Lücken in einem (unveröffentlichten) Beweis der Nichtexistenz gefunden wurden. Aufgrund der Eulerschen Polyederformel kann es für  $k \geq 6$  keine planaren Darstellungen mit Kanten der Länge 1 von  $k$ -regulären Graphen geben.

Anstatt die Nebenbedingungen zu lockern, kann man sie auch verschärfen. Fordert man z.B., dass nicht nur die paarweisen Abstände, sondern auch die Koordinaten ganzzahlig sein sollen, so spricht man bei Punktmengen aus  $n$  Punkten von  $n$ -Clustern [132].

Motiviert durch ganzzahlige Punktmengen auf einem Kreis haben sich einige Mathematiker auch mit ganzzahligen Punktmengen auf anderen glatten Kurven in der Ebene beschäftigt. Die am besten untersuchte Kurve dürfte die Parabel  $y = x^2$  sein. In [25] wurde gezeigt, dass es unendlich viele nicht äquivalente ganzzahlige Punktmengen aus 4 Punkten auf der Parabel gibt, hierbei liegen dann notwendigerweise keine 3 Punkte auf einer Geraden und keine 4 Punkte auf einem Kreis. Aber schon für 5 Punkte sind keine Beispiele mehr bekannt.

Weitere Fragestellungen zu ganzzahligen Punktmengen mit speziellen Eigenschaften werden in [74, 81, 82] behandelt.

Betrachtet man die konvexe Hülle einer Punktmenge, als Polytop [175] so kann man entsprechende Fragen zu ganzzahligen Polytopen stellen. Eine seit der Antike offene Frage ist z.B., ob es einen ganzzahligen Quader gibt, bei dem alle Seitenlängen, Flächen- und Raumdiagonalen ganzzahlig sind [57, Problem D18]. Um sich der Frage langsam zu nähern haben einige Autoren quader-ähnliche Polyeder betrachtet, sogenannte *combinatorial boxes*. Dies sind dreidimensionale Polyeder mit 8 Eckpunkten, 6 Vierecken als Seitenflächen und paarweise ganzzahligen Abständen zwischen den Eckpunkten. Im Gegensatz zum ganzzahligen Quader ist die Existenz einer *combinatorial box* geklärt. Der kleinste mögliche Durchmesser beträgt 17 [71]. Weitere Arbeiten zu ganzzahligen dreidimensionalen Polytopen sind [5, 137, 138, 139, 140].

## 1.3 Algorithmische Sichtweise

Wir wollen in dieser Arbeit ein starkes Gewicht auf den algorithmischen Aspekt legen, und so werden wir jedes der Verfahren zur Konstruktion ganzzahliger Punkt-mengen, welches wir im folgenden vorstellen, in Pseudocode beschreiben. Dabei wird Wert darauf gelegt, dass diese Beschreibung nah genug an einer Implementierung in einer Programmiersprache wie z.B. C++ liegt, so dass der Leser in die Lage versetzt wird, die vorgestellten Algorithmen selber zu implementieren. Wann immer eine Beschreibung in Pseudocode nicht ausreichend ist, werden wir im Anhang auf Implementierungsdetails eingehen.

Zu jedem Algorithmus geben wir des weiteren eine Analyse seiner Laufzeit an. Zum einen indem wir, meist im Anhang, reale Laufzeiten tabellieren. Damit die Zeiten vergleichbar sind, haben wir sie alle auf einem Intel Pentium M Prozessor mit einer Taktfrequenz von 1300 MHz und 256 MB Arbeitsspeicher gemessen. Zum anderen werden wir für jeden Algorithmus, den wir verwenden, die theoretische Komplexität, entweder aus der Literatur zitieren oder selber analysieren. Für die Grundlagen der Komplexitätstheorie verweisen wir auf Standardwerke, wie z.B. [12, 23, 49, 135, 147]. Und so führen wir in Abschnitt 4.5 auch einen sehr langen und sehr technischen Beweis einzig mit dem Ziel, eine Abschätzung der Komplexität eines Algorithmus herzuleiten.

Für zwei Funktionen  $f, g$  auf den natürlichen oder den reellen Zahlen benutzen wir die Landausche Schreibweise,

$$f \in O(g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq cg(n)$$

und

$$f \in o(g) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R}, n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq cg(n),$$

um die Größenordnung von Funktionen bzw. den Aufwand von Algorithmen zu beschreiben. Gilt sowohl  $f \in O(g)$  als auch  $f \in o(g)$ , so kürzen wir dies auch durch  $f \in \Omega(g)$  ab. Eine in dieser Arbeit häufiger verwendete Größenordnung ist

$$O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right).$$

Hierbei ist  $d$  die Variable und  $c$  eine hinreichend große aber feste Konstante, die allerdings bei jeder Verwendung anders sein kann. Um ein Gefühl für diese Größenordnung zu bekommen, vergleichen wir sie mit zwei bekannteren. Für festes  $c$  und beliebiges  $l, \varepsilon > 0$  gilt

$$O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right) \in o((\log d)^l) \quad \text{und} \quad O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right) \in O(d^\varepsilon).$$

Aus praktischen Überlegungen über reale Laufzeiten auf einem gegebenen Rechner, betrachten wir in Abschnitt 4.1 und in Abschnitt 4.2 Methoden, wie man algorithmisch mit der Existenz von schnellen aber kleinen und langsamen aber großen Speicherelementen umgehen kann.

Ein großes Problem bei der Verwendung von Computern in der Mathematik ist die Vermeidung von Fehlern. Zu unterscheiden sind, ähnlich wie in den experimentellen Naturwissenschaften, die systematischen und die zufälligen Fehler. Zu den systematischen Fehlern zählen Programmierfehler und fehlerhafte Hardware. Auch nicht fehlerhafte Hardware produziert fortwährend zufällige Fehler, die sie aber im Normalfall selber wieder korrigieren kann. Und so zitieren wir in diesem Zusammenhang, aus [99], siehe auch [108],

“With the increasing use of computers in mathematics, the correctness of such (computer) “proofs” is very difficult to determine. We should borrow an idea from the physical science, where a new result is accepted only after it has been independently verified. The published results should contain enough information to allow independent cross checking of values, besides the final numbers. Internal consistency checking should also be used as much as possible even when it is expensive.”

Aber zum Glück gibt es ein paar bewährte Techniken, mit denen man sowohl systematische als auch zufällige Fehler bei Verwendung von Computern in der Mathematik vermeiden kann. Gegen Hardwarefehler kann man sich absichern, indem man die verwendeten Programme auf mehreren Rechnern laufen lässt und möglichst viele Zwischenergebnisse miteinander vergleicht. In unserem Fall haben wir die verwendeten Programme alle auf mindestens zwei unterschiedlichen Rechnern laufen lassen. Eine weitere Technik um zufällige Fehler zu vermeiden bzw. Hardwarefehler zu entdecken sind sogenannte Konsistenztests. Hierbei führt man redundante Berechnungen durch und vergleicht, ob die Ergebnisse sich nicht gegenseitig widersprechen [17, 110]. Ein weiteres nützliches Mittel um Fehler zu entdecken, ist der Vergleich mit aus der Literatur bekannten Daten für das eigene Problem. Die bekannten minimalen Durchmesser (siehe Kapitel 5 und Kapitel 9) haben wir im Rahmen dieser Arbeit, bis auf  $d(3, 9) = 16$  (siehe Abschnitt 9.1), sämtlich bestätigt. Von großem Nutzen war auch das zahlreiche Datenmaterial aus [87], auch wenn wir in Abschnitt C.1 und Abschnitt C.2 ein paar der angegebenen Werte korrigieren müssen.

Im Rahmen dieser Arbeit haben wir die beschriebenen Algorithmen in C++ bzw. in MAPLE implementiert. Dabei entstanden über 35.000 Zeilen Quelltext,

da wir für viele Parameterbereiche, wie Dimension oder Nebenbedingungen, Spezialimplementierungen vorgenommen haben, damit die Programme auch in der Realität schnell laufen. Wegen der Fülle des Quellcodes und der Vielfalt des Parameterraums für ganzzahlige Punktmengen können wir dem Leser leider kein graphisches menügesteuertes Programm anbieten, mit dem er die beschriebenen Algorithmen ausprobieren kann. Bei Bedarf senden wir dem interessierten Leser aber gerne Teile des Quellcodes elektronisch zu.

Um eventuelle, spätere Neuimplementierungen der beschriebenen Algorithmen auf Fehler überprüfen zu können bzw. anderen diese Möglichkeit zu bieten haben wir Teile der in Testläufen ermittelten Daten auf über 120 CDs archiviert.



## 2 Grundlagen

Da wir ganzzahlige Punktmenge mit dem Computer erzeugen wollen, müssen wir sie zunächst so beschreiben, dass der Computer sie verarbeiten kann. Für die Beschreibung benutzen wir die Abstandsmatrix einer Punktmenge und definieren genauer, wann wir zwei Punktmenge als äquivalent bzw. ähnlich betrachten wollen. Da nicht alle symmetrischen quadratischen Matrizen Abstandsmatrizen einer Punktmenge im  $\mathbb{E}^m$  sind, charakterisieren wir diejenigen Abstandsmatrizen, zu denen es Punktmenge im  $\mathbb{E}^m$  gibt.

### 2.1 Abstandsmatrizen

In dieser Arbeit wollen wir zwei Punktmenge als **äquivalent** betrachten, wenn sie durch Translationen, Rotationen oder Spiegelungen ineinander übergeführt werden können. Die zwei Tetraeder in Abbildung 2.1 sind äquivalent, da man sie durch eine Spiegelung an einer geeigneten Hyperebene aufeinander abbilden kann.

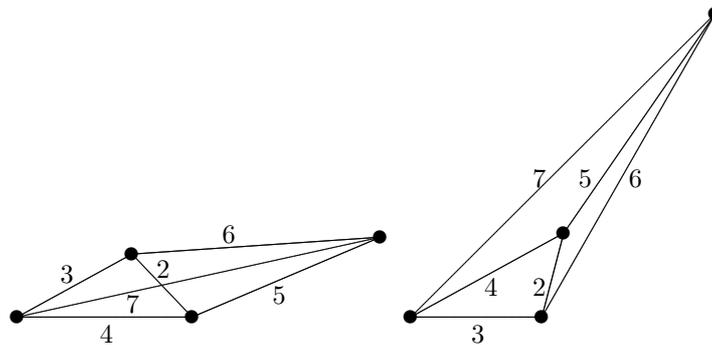


Abbildung 2.1: Zwei äquivalente Tetraeder.

Wir möchten erwähnen, dass Rotationen und Translationen nicht ausreichen, um die zwei Tetraeder zur Überdeckung zu bringen. Als massive Körper im dreidimensionalen Raum müsste man sie also als unterschiedlich betrachten. Hierauf

werden wir jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingehen.

Äquivalente Punktmengen, die durch Streckungen der paarweisen Abstände mit einem konstanten Faktor auseinander hervorgehen, bezeichnen wir als **ähnlich**. Ein Beispiel für zwei ähnliche Punktmengen ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Besitzen die paarweisen Abstände einer ganzzahligen Punktmenge keinen größten gemeinsamen Teiler größer 1 so bezeichnen wir die ganzzahlige Punktmenge als **primitiv**. Die linke Punktmenge in Abbildung 2.2 ist primitiv, die rechte dagegen nicht, da alle Abstände durch 2 teilbar sind.

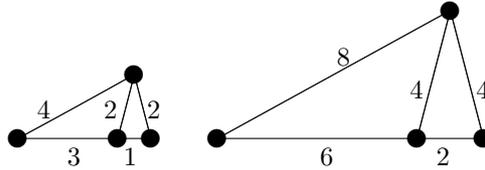


Abbildung 2.2: Zwei ähnliche Punktmengen.

Aufgrund unseres Äquivalenzbegriffes ist es nicht sinnvoll, ganzzahlige Punktmengen anhand von Koordinaten zu repräsentieren, da diese nicht invariant unter Translationen, Rotationen und Spiegelungen sind. Für alle  $i, j$  bleiben dagegen die Abstände  $\delta(i, j)$  zwischen Punkt  $i$  und Punkt  $j$  invariant unter diesen Operationen. Dies gibt uns die Möglichkeit Punktmengen durch ihre **Abstandsmatrizen** ( $\delta(i, j)$ ) zu beschreiben. In Abschnitt 2.3 werden wir zeigen, wie man anhand einer gegebenen Abstandsmatrix eine eindeutige Koordinatendarstellung ausrechnen kann.

Nummeriert man die Knoten der linken Punktmenge  $\mathcal{P}$  in Abbildung 2.2 im Uhrzeigersinn von 0 bis 3, beginnend mit dem linken unteren Knoten, so erhält man als Abstandsmatrix

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Abstandsmatrix ist allerdings von einer Nummerierung  $\sigma$  der Punktmenge  $\mathcal{P}$  abhängig, wir müssen also genauer von der Abstandsmatrix  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$  sprechen. Da die Menge der Nummerierungen isomorph zur symmetrischen Gruppe auf  $n$  Punkten ist setzen wir o.E.  $\sigma \in S_n$ , wobei wir uns allerdings nicht festlegen, welche Nummerierung der Identität  $id$  entspricht. Da unterschiedliche  $\sigma \in S_n$  zu

unterschiedlichen Abstandsmatrizen  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$  von ein und der selben Punktmenge  $\mathcal{P}$  führen können, müssen wir, um eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  eindeutig durch eine Abstandsmatrix darstellen zu können, eine der  $n!$  Nummerierungen auszeichnen. Eine Vorschrift oder einen Algorithmus wie eine Nummerierung ausgezeichnet wird, bezeichnen wir auch als **Normalform**. (Hierdurch wird dann  $\Delta(\mathcal{P}, id)$  festgelegt.) Im nächsten Abschnitt werden wir ein paar gebräuchliche Normalformen vorstellen. Die Menge  $Aut(\mathcal{P}) = \{\sigma \mid \Delta(\mathcal{P}, \sigma) = \Delta(\mathcal{P}, id)\}$  bezeichnen wir als Automorphismengruppe einer Punktmenge  $\mathcal{P}$ . In Kapitel 7 beschäftigen wir uns näher mit den Automorphismengruppen von ganzzahligen Punkt Mengen. Wir geben einen effizienten Algorithmus an, um  $Aut(\mathcal{P})$  zu berechnen und klassifizieren die möglichen Automorphismengruppen für die Dimensionen  $m = 2, 3$ .

Nach diesen Vorbereitungen, wobei wir die Details auf die nächsten zwei Abschnitte verschieben, sind wir in der Lage, eine ganzzahlige Punktmenge eindeutig durch eine Abstandsmatrix in Normalform zu repräsentieren. Umgekehrt entspricht jedoch nicht jede symmetrische quadratische Matrix einer Punktmenge  $\mathcal{P}$  im  $\mathbb{E}^m$ , auch dann nicht, wenn wir die Dimension  $m$  nicht fest vorschreiben. So gibt es z.B. kein Dreieck mit den Seitenlängen 1, 2 und 4. Die Dreiecke mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  charakterisiert man noch leicht mit Hilfe der Dreiecksungleichungen  $a + b > c$ ,  $a + c > b$  und  $b + c > a$ . Falls auch der **entartete** Fall einer Strecke als Dreieck bezeichnet wird sind noch  $a + b = c$ ,  $a + c = b$  oder  $b + c = a$  zugelassen. Mit Hilfe der **Heronschen Formel**

$$A_{\Delta}(a, b, c) = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}$$

für den Flächeninhalt  $A_{\Delta}$  eines Dreiecks kann man die zulässigen Werte für  $a, b$  und  $c$  die zu einem Dreieck führen auch wie folgt beschreiben. Die Abstände  $a, b$  und  $c$  bilden genau dann ein Dreieck, wenn  $A_{\Delta}^2(a, b, c) \geq 0$  gilt. Das Dreieck ist genau dann entartet, falls  $A_{\Delta}^2(a, b, c) = 0$ .

Eine Verallgemeinerung für höhere Dimensionen lässt sich mit Hilfe der **Cayley-Menger-Determinante** formulieren. Seien  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  Punkte im  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{E}^m$  mit Abständen  $\delta(P_i, P_j)$ , dann ist die Cayley-Menger-Determinante definiert durch

$$C(P_0, \dots, P_{n-1}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \delta^2(P_0, P_1) & \dots & \delta^2(P_0, P_{n-1}) \\ 1 & \delta^2(P_1, P_0) & 0 & \dots & \delta^2(P_1, P_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \delta^2(P_{n-1}, P_0) & \delta^2(P_{n-1}, P_1) & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Ist  $\Delta = (\delta(P_i, P_j))$  eine Abstandsmatrix von  $n$  Punkten, so schreiben wir auch  $C(\Delta)$  anstatt  $C(P_0, \dots, P_{n-1})$ . Der Wert von  $C(\Delta)$  ist hierbei unabhängig von der Nummerierung der Punkte  $P_i$ . Der Zusammenhang zwischen dem  $n$ -dimensionalen Volumen der von  $n+1$  Punkten  $P_0, \dots, P_n$  aufgespannten Punktmenge im  $\mathbb{E}^n$  und der Cayley-Menger-Determinante ist durch folgenden Satz gegeben.

**2.1.1 Satz** Für  $n+1$  Punkte  $P_0, \dots, P_n$  im  $\mathbb{E}^n$  ist das durch sie aufgespannte  $n$ -dimensionale Volumen  $V_n(P_0, \dots, P_n)$  gegeben durch

$$V_n^2(P_0, \dots, P_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} C(P_0, \dots, P_n).$$

**Beweis. (Nach [87].)** Wir bezeichnen die Koordinaten von  $P_i$  mit  $x_{i,0}, \dots, x_{i,n-1}$ . Das Skalarprodukt von  $P_i$  und  $P_j$  ist gegeben durch

$$\langle P_i, P_j \rangle = \sum_{h=0}^{n-1} x_{i,h} x_{j,h}.$$

Für das  $n$ -dimensionale Volumen eines u.U. entarteten Simplex  $\mathcal{S}$  mit Eckpunkten  $P_0, \dots, P_n$  gilt (siehe z.B. [96, 163])

$$V_n(P_0, \dots, P_n) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} & \dots & x_{0,n-1} & 1 \\ x_{1,0} & x_{1,1} & \dots & x_{1,n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n,0} & x_{n,1} & \dots & x_{n,n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

Mit

$$M_0 = \begin{pmatrix} x_{0,0} & \dots & x_{0,n-1} & 1 & 0 \\ x_{1,0} & \dots & x_{1,n-1} & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,0} & \dots & x_{n,n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$M_1 = \begin{pmatrix} x_{0,0} & \dots & x_{n,0} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{0,n-1} & \dots & x_{n,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} V_n^2(P_0, \dots, P_n) &= \frac{-1}{(n!)^2} \det(M_0) \det(M_1) = \frac{-1}{(n!)^2} \det(M_0 M_1) \\ &= \frac{-1}{(n!)^2} \begin{vmatrix} \langle P_0, P_0 \rangle & \langle P_0, P_1 \rangle & \dots & \langle P_0, P_n \rangle & 1 \\ \langle P_1, P_0 \rangle & \langle P_1, P_1 \rangle & \dots & \langle P_1, P_n \rangle & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle P_n, P_0 \rangle & \langle P_n, P_1 \rangle & \dots & \langle P_n, P_n \rangle & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $M_1$  aus  $M_0$  durch Transponieren und Vertauschen der letzten beiden Zeilen hervorgeht. Wegen

$$-\frac{1}{2}\delta^2(P_i, P_j) = \langle P_i, P_j \rangle - \frac{1}{2}\langle P_i, P_i \rangle - \frac{1}{2}\langle P_j, P_j \rangle$$

erhält man, indem man in der Determinante von der  $i$ -ten Spalte ( $i = 0, \dots, n$ ) die mit  $\frac{1}{2}\langle P_i, P_i \rangle$  multiplizierte letzte Spalte abzieht und ebenso von der  $i$ -ten Zeile die mit  $\frac{1}{2}\langle P_i, P_i \rangle$  multiplizierte letzte Zeile abzieht,

$$V_n^2(P_0, \dots, P_n) = \frac{-1}{(n!)^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\delta^2(P_0, P_0) & \dots & -\frac{1}{2}\delta^2(P_0, P_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}\delta^2(P_n, P_0) & \dots & -\frac{1}{2}\delta^2(P_n, P_n) & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zum Schluss multipliziert man nur noch die ersten  $n$  Spalten mit  $-2$ , die letzte Zeile mit  $-\frac{1}{2}$  und erhält nach ein paar Zeilen- und Spaltenvertauschungen die gewünschte Gleichung.  $\square$

Die Verallgemeinerung der Dreiecksungleichungen ist durch folgendes Lemma gegeben.

**2.1.2 Lemma** Für  $n$  Punkte  $P_0, \dots, P_{n-1}$  im  $m$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{E}^m$  gilt für je  $t$  Punkte  $P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}$  bei gegebenen Abständen  $\delta(P_i, P_j)$

$$\begin{aligned} (-1)^t C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}) &\geq 0 \quad \text{für} \quad t \leq m+1, \\ C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}) &= 0 \quad \text{für} \quad m+2 \leq t \leq n. \end{aligned}$$

**Beweis.** Für  $t \leq m+1$  folgt die Aussage aus Satz 2.1.1 und der Tatsache, dass das quadrierte Volumen eines möglicherweise degenerierten Simplex eine nicht-negative Zahl ist. Für  $t \geq m+2$  liegen die  $t$  Punkte in einer höchstens  $m$ -dimensionalen Hyperebene des  $\mathbb{E}^{t-1}$  und besitzen somit das Volumen 0.  $\square$

In [118] ist gezeigt, dass auch die Umkehrung von Lemma 2.1.2 gilt.

**2.1.3 Satz** Eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten  $P_0, \dots, P_{n-1}$  mit gegebenen Abständen  $\delta(P_i, P_j)$  ist genau dann in den  $\mathbb{E}^m$  einbettbar, wenn die Voraussetzungen von Lemma 2.1.2 erfüllt sind.

Es soll noch erwähnt werden, dass die Bedingungen für  $t > m + 3$  redundant sind.

Um nun Satz 2.1.3 bzw. Lemma 2.1.2 algorithmisch schnell benutzen zu können muss man noch ein paar Zusatzbetrachtungen anstellen. Zur Berechnung von  $C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}})$  bringt man die Matrix mittels Gaußverfahren auf obere Dreiecksform und berechnet die Determinante als Produkt der Diagonalelemente, was zu einem Aufwand von  $O(t^3)$  Multiplikationen und Additionen führt. Da man im Konstruktionsprozess bereits die Cayley-Menger-Determinanten von Teilmatrizen berechnet hat, hat man weitere Informationen, um den Aufwand weiter zu reduzieren. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der L-R-Zerlegung einer Matrix zur Berechnung der Determinante. Setzt man die L-R-Zerlegung der Cayley-Menger-Matrix der Punkte  $P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-2}}$  und die zugehörige Transformationsmatrix als bekannt voraus, so kann man die Cayley-Menger-Determinante und die L-R-Zerlegung der Cayley-Menger-Matrix der Punkte  $P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}$  zusammen mit der zugehörigen Transformationsmatrix in  $O(t^2)$  Additionen und Multiplikationen bestimmen.

Würde man die Cayley-Menger-Determinante  $C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}})$  für alle Teilmengen  $\{i_0, \dots, i_{t-1}\} \subset \{0, \dots, n-1\}$  berechnen so hätte man exponentiellen Aufwand. Zumindest für Simplexes lassen sich die zu testenden Teilmengen mit dem folgenden Lemma erheblich reduzieren. Für Punktmenge mit  $n > m + 2$  Punkten ist es effizienter, anstatt der Cayley-Menger-Determinanten sogenannte Cayley-Menger-Koordinaten zu benutzen, siehe [161]. Da wir in diesen Fällen die, in Abschnitt 2.3 beschriebene eindeutige Koordinatendarstellung nutzen, gehen wir hierauf nicht näher ein.

**2.1.4 Lemma** Ein Simplex  $S$  aus  $n$  Punkten  $P_0, \dots, P_{n-1}$  mit gegebenen Abständen  $\delta(P_i, P_j)$  ist genau dann in den  $\mathbb{E}^{n-1}$  einbettbar, wenn die Teilsimplizes  $\mathcal{S}_0 = \{P_0, \dots, P_{n-2}\}$ ,  $\mathcal{S}_1 = \{P_1, \dots, P_{n-1}\}$  in den  $\mathbb{E}^{n-2}$  einbettbar sind und  $(-1)^n C(P_0, \dots, P_{n-1}) > 0$  gilt.

**Beweis.** Da die zwei Teilsimplizes  $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$  jeweils in den  $\mathbb{E}^{n-2}$  einbettbar sind, existieren Koordinaten für die zwei Simplizes. Die Punkte  $P_1, \dots, P_{n-2}$  spannen eine Hyperebene auf und sind in  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{S}_1$  enthalten. Es gibt nun genau zwei Möglichkeiten, wie man die zwei Simplizes vereinigen kann, so dass eine Punktmenge im  $\mathbb{E}^{n-1}$  entsteht, siehe Abbildung 2.3 für eine Darstellung der zwei Fälle bei zwei Dreiecken. Hierbei haben wir die Hyperebene, die hier nur aus der Kante

zwischen zwei Punkten besteht, fett gezeichnet. Ersetzt man nun den quadrierten Abstand  $\delta(P_0, P_{n-1})^2$  in  $(-1)^n C(P_0, \dots, P_{n-1})$  durch  $x$ , so erhält man ein in  $x$  quadratisches Polynom, dessen Nullstellen, wegen Satz 2.1.1, den eben beschriebenen beiden Möglichkeiten entsprechen. Weiter kann man aus Satz 2.1.1 und der Stetigkeit der Determinante schließen, dass die Fälle  $(-1)^n C(P_0, \dots, P_{n-1}) > 0$  den Zwischenstufen entsprechen, wenn man das Simplex  $\mathcal{S}_1$  von der linken in Abbildung 2.3 dargestellten an der gemeinsamen Hyperebene auf die rechte in Abbildung 2.3 dargestellte Position dreht.  $\square$

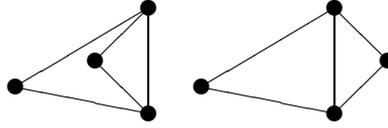


Abbildung 2.3: Zusammenfügen von zwei Dreiecken.

Mit Hilfe von Lemma 2.1.4 braucht man im Falle eines Simplex anstatt die Cayley-Menger-Determinanten aller Teilmengen  $\{i_0, \dots, i_{t-1}\} \subset \{0, \dots, n-1\}$  zu berechnen nur noch die Cayley-Menger-Determinanten der Teilmengen  $\{P_i, P_{i+1}, \dots, P_j\}$  mit  $0 \leq i < j < n$  zu berechnen. Dies ergibt einen Aufwand von

$$\sum_{i=1}^{n-1} ci(n-i+1)^3 \in O(n^5)$$

Multiplikationen und Additionen. (Durch Verwendung der L-R-Zerlegung könnte man den Aufwand noch um den Faktor  $n$  reduzieren.)

Wir werden Lemma 2.1.4 allerdings immer direkt anwenden, da wir durch unsere Konstruktionsvorschrift für ganzzahlige Simplexe (siehe Kapitel 3) die zwei benötigten Teilsimplizes  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{S}_1$  immer bereits auf ihre Einbettbarkeit in den  $\mathbb{E}^{n-2}$  getestet haben. Sollten wir eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  auf Einbettbarkeit in den  $\mathbb{E}^m$  testen wollen, so versuchen wir einfach eine Koordinatendarstellung zu berechnen, siehe Abschnitt 2.3. Es wird sich herausstellen, dass diese Berechnung  $O(n^3)$  Multiplikationen bzw. Additionen und  $O(n)$  Wurzeloperationen erfordert.

Wir möchten erwähnen, dass in Lemma 2.1.4 die Einbettbarkeit **beider** Simplexe gegeben sein muss, wie man an der Abstandsmatrix

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 52 & 39 \\ 100 & 0 & 52 & 39 \\ 52 & 52 & 0 & x \\ 39 & 39 & x & 0 \end{pmatrix}$$

erkennen kann. Der linke obere Teil von  $\Delta$  entspricht einem Dreieck mit Seitenlängen 100, 52 und 52, ist also in den  $\mathbb{E}^2$  einbettbar. Für  $2 \leq x \leq 79$  gilt zwar  $(-1)^4 C(\Delta) > 0$ , aber  $\Delta$  ist nicht in den  $\mathbb{E}^3$  einbettbar, da es kein Dreieck mit den Seitenlängen 100, 39 und 39 in der Euklidischen Ebene gibt. (Für  $x = 1$  oder  $x \geq 80$  gilt  $(-1)^4 C(\Delta) < 0$ .)

## 2.2 Normalformen von Abstandsmatrizen

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass es zu einer Punktmenge mehrere verschiedene Abstandsmatrizen geben kann. So kann z.B. die ganzzahlige Punktmenge auf der linken Seite von Abbildung 2.2 durch folgende unvollständige Liste von Abstandsmatrizen dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei diesem Beispiel führen alle  $4! = 24$  Umnummerierungen der Knoten zu unterschiedlichen Abstandsmatrizen, da die Punktmenge die triviale Automorphismengruppe  $\{id\}$  besitzt. Allgemein ist die Anzahl unterschiedlicher Abstandsmatrizen einer Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten durch  $\frac{n!}{|Aut(\mathcal{P})|}$  gegeben. Wir möchten an dieser Stelle bemerken, dass die Automorphismengruppe einer ‘‘zufälligen’’ ganzzahligen Punktmenge  $\mathcal{P}$  fast immer trivial ist [45] und somit die Anzahl der unterschiedlichen Abstandsmatrizen für  $\mathcal{P}$  exponentiell wächst.

Da wir bei unserer Konstruktion von ganzzahligen Punktfolgen äquivalente Paare entfernen wollen, ist es sinnvoll eine der  $n!$  Nummerierungen auszuzeichnen. Dies hat den Vorteil, dass man zwei Punktfolgen auf Äquivalenz überprüfen kann, indem man die zwei in Normalform gegebenen Abstandsmatrizen auf Gleichheit testet. An dieser Stelle möchten wir erwähnen, dass in der eigentlichen Konstruktion der ganzzahligen Punktfolgen keine expliziten sondern nur implizite Tests auf Äquivalenz durchgeführt werden und verweisen hierbei auf Kapitel 3 und Kapitel 8.

Nun möchten wir ein paar gebräuchliche Normalformen für Matrizen vorstellen. Die erste Klasse beruht auf der **lexikographischen Ordnung** von Vektoren.

**2.2.1 Definition** Sei  $M$  eine total geordnete Menge und seien  $a = (a_0, \dots, a_n)$  und  $b = (b_0, \dots, b_n)$  zwei Vektoren der Länge  $n + 1$  mit Einträgen aus  $M$  so definieren wir

$$a > b \Leftrightarrow \exists i \leq n, \forall j < i : a_j = b_j, a_i > b_i,$$

$$a = b \Leftrightarrow \forall j \leq n \ a_j = b_j$$

und

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b.$$

Der Beweis, dass die Eigenschaften einer Ordnung erfüllt sind, ist eine leichte Übungsaufgabe. Je nach Anwendung kann man die Ordnung auch für Vektoren unterschiedlicher Länge fortsetzen.

Mit Hilfe der lexikographischen Ordnung von Vektoren kann man für Matrizen eine lexikographische Normalform definieren, indem man die Matrizen durch eine beliebige Vorschrift in einen Vektor umwandelt und fordert, dass dieser lexikographisch maximal bzw. minimal ist. Formaler bedeutet dies:

**2.2.2 Definition** Sei  $\mathcal{P}$  eine Punktmenge aus  $n$  Punkten,  $\tilde{\sigma}$  eine Nummerierung der Punkte und sei  $\tau$  eine Abbildung von der Menge der  $n \times n$  Matrizen mit Einträgen aus einer geordneten Menge  $M$  in die Menge der Vektoren über  $M$  der Länge  $n^2$ , dann heißt die Abstandsmatrix  $\Delta(\mathcal{P}, \tilde{\sigma})$  **lexikographisch maximal** bezüglich  $\tau$  falls

$$\forall \sigma \in S_n \ \tau(\Delta(\mathcal{P}, \tilde{\sigma})) \geq \tau(\Delta(\mathcal{P}, \sigma)).$$

**Lexikographisch minimal** kann man entsprechend mit  $\leq$  definieren. Da die Definitionen von lexikographisch maximal und lexikographisch minimal äquivalent sind, werden wir in dieser Arbeit aus persönlichen Präferenzen nur lexikographisch maximale Matrizen betrachten, möchten den Leser aber darauf hinweisen, dass in der Literatur häufig die lexikographische Minimalität bevorzugt wird.

Die verschiedenen Normalformen dieser ersten Klasse ergeben sich durch die unterschiedliche Wahl von  $\tau$ . Eine sehr gebräuchliche Variante ist das Aneinanderhängen der Zeilen von  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$ . Die entstehende Ordnung bezeichnen wir als die **Zeilen-lexikographische Ordnung**. Die Abstandsmatrix der linken ganzzahligen Punktmenge in Abbildung 2.2 in dieser Normalform ist

$$\Delta(\mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der zugehörige Vektor lautet

$$\tau(\Delta(\mathcal{P})) = (0, 4, 4, 3, 4, 0, 2, 2, 4, 2, 0, 1, 3, 2, 1, 0).$$

Da das Aneinanderhängen der Spalten bei symmetrischen Matrizen, wie z.B. Abstandsmatrizen, zu den gleichen Vektoren führt, definieren wir hierfür keine zusätzliche lexikographische Ordnung. Wegen der Symmetrie von Abstandsmatrizen genügt es die Dreiecksmatrizen oberhalb der Diagonale zu betrachten. Die lexikographische Ordnung, die durch Aneinanderhängen der Zeilen dieser oberen Dreiecksmatrizen entsteht, bezeichnen wir als **reduzierte Zeilen-lexikographische Ordnung**. Es lässt sich zeigen, dass sie zur Zeilenlexikographischen Ordnung äquivalent ist. Hängt man dagegen die Spalten der oberen Dreiecksmatrix aneinander so entsteht eine neue Ordnung, die wir als **reduzierte Spalten-lexikographische Ordnung** bezeichnen. Die Normalform der linken Punktmenge aus Abbildung 2.2 ist für diese Ordnung zufällig dieselbe wie für die Zeilen-lexikographische Ordnung und der zugehörige Vektor lautet

$$\tau(\Delta(\mathcal{P})) = (4, 4, 3, 2, 2, 1).$$

Dass die Übereinstimmung der zwei Normalformen nicht allgemein gilt, lässt sich an folgendem Beispiel sehen. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben beide dieselbe Punktmenge, die sich allerdings nicht in einen euklidischen Raum  $\mathbb{E}^m$  einbetten lässt. Die erste Matrix ist maximal bezüglich der reduzierten Zeilen-lexikographischen Ordnung und die zweite Matrix maximal bezüglich der reduzierten Spalten-lexikographischen Ordnung.

Eine weitere Klasse von Normalformen ergibt sich aus der iterierten Klassifizierung in ihren unterschiedlichen Varianten, die wir in Abschnitt 7.3 beschreiben werden. Allgemeiner ist durch jeden Algorithmus, der einen Repräsentanten in einer Bahn eindeutig festlegt, eine Normalform gegeben.

## 2.3 Eine eindeutige Koordinatendarstellung von Punkt Mengen

In den vorherigen zwei Abschnitten wurde gezeigt, wie man ganzzahlige Punkt Mengen eindeutig durch Abstandsmatrizen beschreibt. Mit Hilfe von Satz 2.1.3

bzw. Lemma 2.1.4 können wir auch anhand einer Abstandsmatrix einer ganzzahligen Punktmenge entscheiden, ob sie in den  $\mathbb{E}^m$  einbettbar ist. Für eine effiziente Konstruktion ganzzahliger Punktmenge ist es jedoch nötig, auch eine Koordinatendarstellung einer Punktmenge zu haben.

Im nächsten Lemma werden wir zeigen, dass sich jede Koordinatendarstellung einer ganzzahligen Punktmenge durch Anwendung von Isometrien, also Translationen, Rotationen und Spiegelungen, auf eine, von der Nummerierung der Punkte abhängige, noch näher zu definierende Normalform bringen lässt. Aus dem Beweis des Lemmas lässt sich ein Algorithmus ablesen, wie man die Koordinaten in Normalform ausrechnen kann.

**2.3.1 Lemma** *Ein ganzzahliger  $m$ -dimensionaler Simplex  $\mathcal{S}$  mit Koordinaten  $v'_0, v'_1, \dots, v'_m$  und Abstandsmatrix  $\Delta = (\delta_{i,j})_{0 \leq i,j \leq m}$  lässt sich durch Isometrien in folgende Koordinaten transformieren*

$$\begin{aligned} v_0 &= (0, 0, \dots, 0), \\ v_1 &= (q_{1,1} \sqrt{k_1}, 0, 0, \dots, 0), \\ v_2 &= (q_{2,1} \sqrt{k_1}, q_{2,2} \sqrt{k_2}, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ v_m &= (q_{m,1} \sqrt{k_1}, q_{m,2} \sqrt{k_2}, \dots, q_{m,m} \sqrt{k_m}), \end{aligned}$$

wobei  $k_i$  der quadratfreie Teil von  $\frac{V_i(v'_0, v'_1, \dots, v'_i)^2}{V_{i-1}(v'_0, v'_1, \dots, v'_{i-1})^2}$  ist,  $q_{i,j}$  natürliche Zahlen sind und  $q_{j,j}, k_j \neq 0$  sind.

**Beweis.** Wir können o.E.  $v_0 = (0, 0, \dots, 0)$  setzen, und da  $\delta_{0,1} \in \mathbb{N}$  können wir auch  $v_1 = (\delta_{0,1} \sqrt{k_1}, 0, 0, \dots, 0)$  wählen, wobei  $k_1 = 1$  gilt. Nun nehmen wir an, wir hätten die Koordinaten  $v'_0, v'_1, \dots, v'_{i-1}$  bereits wie gewünscht transformiert. Wir setzen  $v_i = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  mit  $x_j \in \mathbb{R}$ . Da die  $i+1$  Punkte mit den alten Koordinaten  $v'_0, v'_1, \dots, v'_i$  eine  $i$ -dimensionale Hyperebene des  $\mathbb{E}^m$  aufspannen können wir  $x_{i+1} = \dots = x_m = 0$  setzen. Für die  $i \leq j$  gilt

$$\delta_{j,i}^2 = \|v_j - v_i\|_2^2 = \sum_{h=1}^j (q_{j,h} \sqrt{k_h} - x_h)^2 + \sum_{h=j+1}^i x_h^2.$$

Für  $0 < j < i$  betrachten wir

$$\delta_{0,i}^2 - \delta_{j,i}^2 = \sum_{h=1}^j x_h^2 - (q_{j,h} \sqrt{k_h} - x_h)^2$$

wobei wir für  $h < j$  mittels Induktion  $x_h = q_{i,h}\sqrt{k_h}$  einsetzen können. Dies liefert

$$\delta_{0,i}^2 - \delta_{j,i}^2 = -q_{j,j}^2 k_j + 2q_{j,j}\sqrt{k_j}x_j + \sum_{h=1}^{j-1} 2q_{i,h}q_{j,h}k_h - q_{j,h}^2 k_h.$$

Somit gilt

$$x_j = \frac{q_{j,j}^2 k_j + \sum_{h=1}^{j-1} (q_{j,h}^2 k_h - 2q_{i,h}q_{j,h}k_h) + \delta_{0,i}^2 - \delta_{j,i}^2}{2q_{j,j}\sqrt{k_j}}$$

und wir können  $x_j = q_{i,j}\sqrt{k_j}$  setzen, da nach Induktion  $2q_{j,j}\sqrt{k_j} \neq 0$  gilt. Hiermit haben wir

$$\delta_{0,i}^2 = \sum_{h=1}^i x_h^2 = x_i^2 + \sum_{h=1}^{i-1} q_{i,h}^2 k_h.$$

Somit gilt

$$x_i = \sqrt{\delta_{0,i}^2 - \sum_{h=1}^{i-1} q_{i,h}^2 k_h} = q_{i,i}\sqrt{k_i}.$$

Da  $V_m(v'_0, v'_1, \dots, v'_m) \neq 0$  gilt, liegen die  $i+1$  Punkte mit den Koordinaten  $v'_0, v'_1, \dots, v'_i$  nicht in einer  $i-1$ -dimensionalen Hyperebene des  $\mathbb{E}^m$  und es gilt  $q_{i,i}\sqrt{k_i} \neq 0$ .  $\square$

Wir möchten bemerken, dass alle  $n!$  Umnummerierungen einer Abstandsmatrix einer Punktmenge aus  $n$  Punkten zu äquivalenten Punktfolgen führen. Die im Lemma definierte Normalform der Koordinatendarstellung eines ganzzahligen Simplex hat den großen Vorteil, dass man sie im Rechner exakt abbilden kann, da die  $k_i$  natürliche Zahlen sind, und die  $q_{i,j}$  sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben lassen. Wir können also mit exakten Koordinaten und nicht nur mit Näherungen rechnen.

Mit einer leichten Abwandlung des im Beweis von Lemma 2.3.1 versteckten Algorithmus können wir auch eine Koordinatendarstellung einer Abstandsmatrix  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$  einer ganzzahligen Punktmenge mit Nummerierung  $\sigma$  der Punkte berechnen. Beim folgenden Algorithmus kürzen wir die Bezeichnung für den Abstand zwischen Punkt  $i$  und Punkt  $j$  durch  $\delta_{i,j}$  ab und mit  $v_{i,j}$  bezeichnen wir die  $j$ -te Komponente des Koordinatenvektors  $v_i \in \mathbb{R}^m$ .

### 2.3.2 Algorithmus (Berechne Koordinatendarstellung)

Eingabe:  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$

Ausgabe: Koordinaten  $v_0, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^m$  der  $n$  Punkte von  $\mathcal{P}$

**begin**

$oben = 0$

$unten = n - 1$

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n - 1$  **do**  $\pi(i) = i$  **end**

**for**  $i$  **from** 0 **to**  $n - 1$  **do**

**for**  $j$  **from** 0 **to**  $oben - 1$  **do**

$$v_{oben,j} = \frac{v_{j,j}^2 + \sum_{h=1}^{j-1} (v_{oben,h}^2 - 2v_{oben,h}v_{j,h}) + \delta_{0,i}^2 - \delta_{\pi(j),i}^2}{2v_{j,j}}$$

**end**

**for**  $j$  **from**  $oben + 1$  **to**  $n - 1$  **do**  $v_{oben,j} = 0$  **end**

$$v_{oben,oben} = \sqrt{\delta_{0,i}^2 - \sum_{j=0}^{oben-1} v_{oben,j}^2}$$

**if**  $v_{oben,oben} == 0$  **then**

**for**  $j$  **from** 0 **to**  $n - 1$  **do**  $v_{unten,j} = v_{oben,j}$  **end**

$\pi(unten) = i$

$unten = unten - 1$

**else**

**if**  $\exists unten < j < n : \delta_{\pi(i),\pi(j)}^2 \neq \sum_{h=0}^{n-1} (v_{oben,h} - v_{j,h})^2$  **then**

$$v_{oben,oben} = -v_{oben,oben}$$

**end**

$\pi(oben) = i$

$oben = oben + 1$

**end**

**end**

**for all**  $0 \leq i < j < n$  **do**

**if**  $\delta_{\pi(i),\pi(j)}^2 \neq \sum_{h=0}^{n-1} (v_{i,h} - v_{j,h})^2$  **then return** “nicht einbettbar” **end**

**end**

**end**

In Algorithmus 2.3.2 bedeutet die Rückgabe “nicht einbettbar”, dass die Abstandsmatrix  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$  für kein  $m$  in  $\mathbb{E}^m$  einbettbar ist. Sollte bei der Berechnung der Wurzel ein negativer Term unter dem Wurzelzeichen stehen, so muss ebenfalls “nicht einbettbar” zurückgegeben werden. Wir möchten bemerken, dass an der Stelle, wo durch  $2v_{j,j}$  geteilt wird, immer  $v_{j,j} \neq 0$  gilt und dies nicht extra überprüft werden muss. Der Aufwand von Algorithmus 2.3.2 besteht aus  $O(n^3)$  Multiplikationen bzw. Additionen und  $O(n)$  Wurzelberechnungen. Damit

die Berechnungen der Koordinaten exakt und nicht nur näherungsweise gelten, müssen die  $v_{i,j}$  als Tripel  $(q'_{i,j}, q''_{i,j}, k_j)$  ganzer Zahlen gespeichert werden, wobei  $v_{i,j} = \frac{q'_{i,j}}{q''_{i,j}} \sqrt{k_j}$  gelten soll, siehe Lemma 2.3.1. Zur Speicherung der ganzen Zahlen ist gegebenenfalls eine Langzahlarithmetik zu verwenden, da die Zahlen recht schnell sehr groß werden können. Die Dimension  $m$  der Punktmenge steht nach erfolgreichem Abschluss von Algorithmus 2.3.2 in der Variable *oben*.

## 2.4 Charakteristik einer Punktmenge

Der Flächeninhalt  $A_\Delta$  eines Dreiecks mit Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  wird nach der Heronschen Formel durch

$$A_\Delta = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{4}$$

gegeben. Falls die Seitenlängen ganzzahlig sind und das Dreieck nicht zu einer Strecke degeneriert ist, lässt sich der Flächeninhalt somit eindeutig als  $A_\Delta = q\sqrt{k}$  schreiben, mit einer rationalen Zahl  $q$  und einer quadratfreien natürlichen Zahl  $k$ . Die Zahl  $k$  wird als **Charakteristik** eines ganzzahligen Dreiecks bezeichnet.

Die Bedeutung der Definition der Charakteristik eines ganzzahligen Dreiecks ergibt sich aus folgendem Satz, der z.B. in [87] bewiesen wird, dessen Ursprung aber mindestens bis zu Kummer zurückgeht.

**2.4.1 Satz** *Die Dreiecke aus je 3 nicht kollinearen Punkten einer planaren ganzzahligen Punktmenge besitzen dieselbe Charakteristik.*

Dieser Satz liefert eine sehr starke Einschränkung für ganzzahlige planare Punktmenge. In Tabelle 2.1 zeigen wir numerische Resultate, dass es nur wenige ganzzahlige Dreiecke mit gleichem Durchmesser und gleicher Charakteristik gibt. Für ausführlichere Daten verweisen wir auf Kapitel 4.

Mit Hilfe von Satz 2.1.1 können wir die Definition der Charakteristik auch für ganzzahlige Simplexe verallgemeinern.

**2.4.2 Definition** Die Charakteristik  $\text{char}(\mathcal{S})$  eines nicht entarteten  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Simplex ist die quadratfreie Zahl  $k$  in  $V_m(\mathcal{S}) = q\sqrt{k}$ , wobei  $q$  eine rationale Zahl ist.

Mit dieser Definition können wir eine Verallgemeinerung von Satz 2.4.1 formulieren.

Durchmesser	Anzahl ganzzahliger Dreiecke	Anzahl verschiedener Charakteristiken	maximale Häufigkeit einer Charakteristik
10	30	22	3
20	110	74	6
50	650	634	12
100	2.550	1.823	20
200	10.100	7.738	33
500	62.750	51.830	59
1.000	250.500	216.027	87

Tabelle 2.1: Die Verteilung der Charakteristiken von ganzzahligen Dreiecken.

**2.4.3 Satz** In einer  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmenge  $\mathcal{P}$  besitzen alle  $m$ -dimensionalen Simplizes  $\mathcal{S} = \{P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\}$  dieselbe Charakteristik  $\text{char}(\mathcal{S}) = k$ .

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, dass für zwei Simplizes  $\mathcal{S}_0 = \{P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\}$  und  $\mathcal{S}_1 = \{P_{i_0}, P_{i_1}, \dots, P_{i_{m-1}}, P'_{i_m}\}$  mit  $V_m(\mathcal{S}_0), V_m(\mathcal{S}_1) \neq 0$  die Charakteristiken übereinstimmen,  $\text{char}(\mathcal{S}_0) = \text{char}(\mathcal{S}_1)$ . Mit den Notationen von Lemma 2.3.1 gilt für den Abstand zwischen  $P_{i_m}$  und  $P'_{i_m}$

$$\begin{aligned} \delta(P_{i_m}, P'_{i_m})^2 &= \sum_{i=1}^m (q_{m,i} \sqrt{k_i} - q'_{m,i} \sqrt{k'_i})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (q_{m,i} \sqrt{k_i} - q'_{m,i} \sqrt{k'_i})^2 + (q_{m,m} \sqrt{k_m} - q'_{m,m} \sqrt{k'_m})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (q_{m,i} - q'_{m,i})^2 k_i + q_{m,m}^2 k_m - 2q_{m,m} q'_{m,m} \sqrt{k_m k'_m} + q_{m,m}^2 k'_m, \end{aligned}$$

mit  $k_i = k'_i$  für  $1 \leq i < m$ , da  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{S}_1$  auf den ersten  $m$  Punkten übereinstimmen. Also muss  $\sqrt{k_m k'_m}$  eine natürliche Zahl sein. Da  $k_m$  und  $k'_m$  quadratfreie Zahlen sind, ergibt sich  $k_m = k'_m$  und somit  $\text{char}(\mathcal{S}_0) = \text{char}(\mathcal{S}_1)$ .  $\square$

Wir können somit auch von der Charakteristik  $\text{char}(\mathcal{P})$  einer  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmenge  $\mathcal{P}$  sprechen. Der Zusammenhang zwischen den  $k_i$  aus Lemma 2.3.1 und der Charakteristik  $k$  aus Definition 2.4.2 ist dadurch gegeben, dass  $k$  der quadratfreie Teil von  $\prod_{i=1}^m k_i$  ist.

Für die Berechnung der Charakteristik kann man Satz 2.1.1 verwenden. Dies ist jedoch sehr aufwendig, da die Determinante einer  $(m+2) \times (m+2)$ -Matrix und ihr

quadratfreier Teil bestimmt werden müssen. Betrachten wir eine  $m$ -dimensionale ganzzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit Durchmesser  $\text{diam}(\mathcal{P})$  so lässt sich der Wert der Cayley-Menger-Determinante eines Teilsimplex durch

$$\frac{m+2}{2} \text{diam}(\mathcal{P})^{2m+2}$$

nach oben abschätzen. Es kommen also recht große Zahlen zustande. Genauere Betrachtungen zur Berechnung der Charakteristik einer ganzzahligen Punktmenge führen wir in Abschnitt 4.3 durch.

## 2.5 Überprüfung zusätzlicher Nebenbedingungen

In der Einführung haben wir bereits erwähnt, dass auch ganzzahlige Punkt Mengen mit weiteren Nebenbedingungen von Interesse sind. Die erste wichtige Nebenbedingung ist, dass bei einer  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmenge keine  $m+1$ -Punkte in einer  $(m-1)$ -dimensionalen Hyperebene des  $\mathbb{E}^m$  liegen. In diesem Fall sprechen wir von einer Punktmenge in **semi-allgemeiner Lage**. Überprüfen können wir diese Eigenschaft mit Hilfe der Cayley-Menger-Determinante.

**2.5.1 Lemma** *Eine Menge von  $m+1$  Punkten  $P_0, \dots, P_m$  im  $\mathbb{E}^m$  mit gegebenen Abständen  $\delta_{i,j} = \delta(P_i, P_j)$ , liegt genau dann in einer Hyperebene falls  $C(P_0, \dots, P_m) = 0$ .*

Die zweite wichtige Nebenbedingung ist, dass keine  $m+2$  Punkte auf einer  $m$ -dimensionalen Sphäre liegen. Hier sprechen wir von Punkt Mengen in **allgemeiner Lage**. Zur Überprüfung haben wir folgendes Lemma.

**2.5.2 Lemma** *Eine Menge von  $m+2$  Punkten  $P_0, \dots, P_{m+1}$  im  $\mathbb{E}^m$  ohne  $m+1$  Punkte in einer Hyperebene, liegt genau dann auf einer  $m$ -dimensionalen Sphäre, wenn*

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta^2(P_0, P_1) & \dots & \delta^2(P_0, P_{m+1}) \\ \delta^2(P_1, P_0) & 0 & \dots & \delta^2(P_1, P_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^2(P_{m+1}, P_0) & \delta^2(P_{m+1}, P_1) & \dots & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Beweis. (Nach [141].)** Wir betrachten die Punkte  $P_i = (p_{i,0}, \dots, p_{i,m-1})$  als Vektoren des  $\mathbb{E}^m$  und bilden

$$\vec{p}_i = (p_{i,0} - p_{m+1,0}, \dots, p_{i,m-1} - p_{m+1,m-1})^T, \quad 0 \leq i \leq m+1.$$

Somit gilt  $\vec{p}_{m+1} = \vec{0}$ . Jede Teilmenge von  $m$  Vektoren, die  $\vec{p}_{m+1}$  nicht enthält, ist linear unabhängig, da keine  $m+1$  Punkte in einer Hyperebene liegen. Die  $m+2$  Punkte liegen genau dann auf einer  $m$ -dimensionalen Sphäre, wenn es einen Vektor  $\vec{r} = (r_0, \dots, r_{m-1})^T$  gibt mit  $\delta(\vec{p}_i, \vec{r}) = |\vec{r}|$ ,  $0 \leq i \leq m+1$ .

$$\begin{aligned} \delta(\vec{p}_i, \vec{r}) = |\vec{r}| &\Leftrightarrow \delta(\vec{p}_i, \vec{r})^2 = |\vec{r}|^2 \\ &\Leftrightarrow |\vec{p}_i|^2 + |\vec{r}|^2 - 2\langle \vec{p}_i, \vec{r} \rangle = |\vec{r}|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle \vec{p}_i, \vec{r} \rangle = \frac{1}{2} |\vec{p}_i|^2, \quad (0 \leq i \leq m+1) \end{aligned}$$

Man erhält ein System mit  $m+2$  Gleichungen und  $m$  Unbekannten  $r_0, \dots, r_{m-1}$ , dessen letzte Zeile wegen  $\vec{p}_{m+1} = \vec{0}$  vernachlässigbar ist:

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_0^T \\ \vdots \\ \vec{p}_m^T \end{pmatrix} \vec{r} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\vec{p}_0|^2 \\ \vdots \\ |\vec{p}_m|^2 \end{pmatrix}.$$

Da die  $m$  Vektoren linear unabhängig sind, hat die Matrix auf der linken Seite den Rang  $m$ . Es gibt nur dann eine Lösung  $\vec{r}$ , wenn die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} \vec{p}_0^T & |\vec{p}_0|^2 \\ \vdots & \vdots \\ \vec{p}_m^T & |\vec{p}_m|^2 \end{pmatrix}$$

ebenfalls den Rang  $m$  hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn ihre Determinante verschwindet. Mit

$$Q_i = (p_{i,0}, \dots, p_{i,m-1}, |\vec{p}_i|^2) \in \mathbb{E}^m, \quad 0 \leq i \leq m+1$$

ist dies äquivalent zu  $C(Q_0, \dots, Q_{m+1}) = 0$ . Mit

$$\begin{aligned} \delta^2(Q_i, Q_j) &= \delta^2(P_i, P_j) + (|\vec{p}_i|^2 - |\vec{p}_j|^2)^2 \\ &= \delta^2(P_i, P_j) + |\vec{p}_i|^4 + |\vec{p}_j|^4 - 2|\vec{p}_i|^2|\vec{p}_j|^2 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$C(Q_0, \dots, Q_{m+1}) = \begin{vmatrix} \delta^2(P_i, P_j) + |\vec{p}_i|^4 + |\vec{p}_j|^4 - 2|\vec{p}_i|^2|\vec{p}_j|^2 & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & 1 & & \\ & & & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

was sich unter Berücksichtigung von  $|\vec{p}_{m+1}|^2 = 0$  und der schreibtechnischen Vereinfachung  $\delta_{i,j} = \delta(P_i, P_j)$  zu

$$\begin{vmatrix} \delta_{0,0}^2 - 2|\vec{p}_0|^2|\vec{p}_0|^2 & \dots & \delta_{0,m}^2 - 2|\vec{p}_0|^2|\vec{p}_m|^2 & \delta_{0,m+1}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{m,0}^2 - 2|\vec{p}_m|^2|\vec{p}_0|^2 & \dots & \delta_{m,m}^2 - 2|\vec{p}_m|^2|\vec{p}_m|^2 & \delta_{m,m+1}^2 & 1 \\ \delta_{m+1,0}^2 & \dots & \delta_{m+1,m}^2 & \delta_{m+1,m+1}^2 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

umformen lässt. Einsetzen von

$$\begin{aligned} |\vec{p}_i|^2|\vec{p}_j|^2 &= (|\vec{p}_i|^2 + |\vec{p}_{m+1}|^2 - 2\langle\vec{p}_i, \vec{p}_{m+1}\rangle)(|\vec{p}_j|^2 + |\vec{p}_{m+1}|^2 - 2\langle\vec{p}_j, \vec{p}_{m+1}\rangle) \\ &= \delta^2(P_i, P_{\delta+1})\delta^2(P_j, P_{\delta+1}) \end{aligned}$$

und Addition des jeweils  $2\delta^2(P_j, P_{\delta+1})$ -fachen der vorletzten Spalte zu den ersten  $m+1$  Spalten ergibt

$$\begin{vmatrix} \delta^2(P_0, P_0) & \dots & \delta^2(P_0, P_{m+1}) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \delta^2(P_{m+1}, P_0) & \dots & \delta^2(P_{m+1}, P_{m+1}) & 1 \\ 1 + 2\delta^2(P_1, P_{\delta+1}) & \dots & 1 + 2\delta^2(P_{m+1}, P_{\delta+1}) & 0 \end{vmatrix}.$$

Zieht man das doppelte der vorletzten Zeile von der letzten Zeile ab und entwickelt nach der letzten Spalte so erhält man

$$C(Q_0, \dots, Q_{m+1}) = 2 \begin{vmatrix} \delta^2(P_0, P_0) & \dots & \delta^2(P_0, P_{m+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^2(P_{m+1}, P_0) & \dots & \delta^2(P_{m+1}, P_{m+1}) \end{vmatrix}.$$

Da  $C(P_0, \dots, P_{m+1}) = 0$ , muss auch die rechte Determinante verschwinden.  $\square$

Wir möchten bemerken, dass die Determinanten aus Lemma 2.5.2 nach [31] für  $m \geq 3$  irreduzibel sind. Setzen wir abkürzend  $\delta_{i,j} = \delta(P_i, P_j)$ , so ergibt sich für  $m = 2$  folgende Faktorisierung

$$\begin{vmatrix} 0 & \delta_{0,1}^2 & \delta_{0,2}^2 & \delta_{0,3}^2 \\ \delta_{1,0}^2 & 0 & \delta_{1,2}^2 & \delta_{1,3}^2 \\ \delta_{2,0}^2 & \delta_{2,1}^2 & 0 & \delta_{2,3}^2 \\ \delta_{3,0}^2 & \delta_{3,1}^2 & \delta_{3,2}^2 & 0 \end{vmatrix} = \\ -(\delta_{0,1}\delta_{2,3} + \delta_{0,2}\delta_{1,3} + \delta_{0,3}\delta_{1,2})(\delta_{0,1}\delta_{2,3} + \delta_{0,2}\delta_{1,3} - \delta_{0,3}\delta_{1,2}) \cdot \\ (\delta_{0,1}\delta_{2,3} - \delta_{0,2}\delta_{1,3} + \delta_{0,3}\delta_{1,2})(-\delta_{0,1}\delta_{2,3} + \delta_{0,2}\delta_{1,3} + \delta_{0,3}\delta_{1,2}).$$

Hieraus lässt sich der Satz von Ptolemäus ablesen, der besagt, dass ein konvexes Viereck mit Seitenlängen  $a, b, c, d$  und Diagonalen  $e, f$ , wie in Abbildung 2.4, genau dann einen Umkreis hat, wenn  $ac + bd = ef$  gilt.

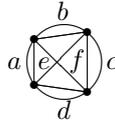


Abbildung 2.4: Sehnenviereck.

Vierecke, bei denen die Eckpunkte auf einem Kreis liegen, werden auch Sehnenvierecke genannt. Sind zusätzlich die sechs Seitenlängen und der Flächeninhalt des Vierecks ganze Zahlen, dann spricht man auch von Brahmagupta-Vierecken [151].

## 2.6 Abzählen diskreter Strukturen

In dieser Arbeit soll neben der Konstruktion von diskreten Strukturen auch zusätzlich eine Formel für ihre Anzahl angegeben werden, sofern sie sich auf elementare Art und Weise herleiten lässt bzw. überhaupt eine einfache Formel existiert. In Kapitel 10 behandeln wir beispielsweise die Anzahl ganzzahliger Simplexe.

In Abschnitt 2.1 haben wir definiert, wann wir zwei Punktfolgen als äquivalent betrachten wollen. Dies ist ein typisches Beispiel für den Unterschied zwischen nummerierten und unnummerierten Strukturen.

Um den Unterschied zu veranschaulichen betrachten wir nun als Beispiel die Multigraphen auf 4 Knoten, die Mehrfachkanten aus  $k < d$  Kanten zulassen. Da es genau 6 Paare aus diesen 4 Knoten gibt und es für jedes Paar genau  $d$  Möglichkeiten für die Anzahl der Kanten zwischen ihnen gibt, existieren genau  $6^d$  nummerierte Multigraphen. Nun möchten wir die Anzahl der unnummerierten Graphen bestimmen. Hierzu haben wir folgendes nützliche Lemma.

**2.6.1 Lemma (Cauchy-Frobenius, gewichtete Form)** *Sei eine Gruppenaktion, eine endliche Gruppe  $G$  auf einer Menge  $S$  und eine Abbildung  $w : S \rightarrow R$  in einen kommutativen Ring  $R$ , der  $\mathbb{Q}$  als Teilring enthält, gegeben. Wenn  $w$  konstant auf den Bahnen von  $G$  auf  $S$  ist, so gilt für jede Transversale  $T$  der Bahnen,*

$$\sum_{t \in T} w(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{s \in S_g} w(s),$$

wobei  $S_g$  die Menge der Elemente aus  $G$  bezeichnet, welche von  $g$  fest gelassen werden, also

$$S_g = \{s \in S \mid s = gs\}.$$

Als Gruppe wählen wir meist die symmetrische Gruppe  $S_n$ , hier speziell die  $S_4$ , die unsere nummerierten Objekte auf natürliche Art und Weise unnummerieren soll. In den meisten Fällen benötigen wir nur die triviale Gewichtsabbildung  $w : s \mapsto 1$ , so dass sich die obige Gleichung zu

$$|\mathcal{T}| = \sum_{t \in \mathcal{T}} w(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S_g|$$

vereinfacht.

Für eine Erklärung der Begriffe Bahn und Gruppenoperation verweisen wir auf [92] und berechnen stattdessen die Anzahl der unnummerierten Multigraphen auf 4 Knoten. In Tabelle 2.2 geben wir  $|S_g|$  für jeden der 5 möglichen Zykeltypen der

Zykeltyp	$ S_g $
$id$	$d^6$
$(a_0 a_1)$	$d^4$
$(a_0 a_1)(a_2 a_3)$	$d^4$
$(a_0 a_1 a_2 a_3)$	$d^2$
$(a_0 a_1 a_2)$	$d^2$

Tabelle 2.2:  $S_g$  für Multigraphen auf 4 Punkten.

$S_4$  an. Nach Einsetzen in Lemma 2.6.1 folgern wir, dass es genau

$$\frac{d^6 + 9d^4 + 14d^2}{24}$$

Multigraphen auf 4 Knoten gibt, wobei  $d - 1$  die maximale Anzahl an Kanten zwischen zwei Knoten angibt. Für  $d = 2$  ergibt sich somit, dass es genau 11 Graphen auf 4 Knoten gibt.

### 3 Konstruktion ganzzahliger Punktmenge

Nachdem wir im vorherigen Kapitel die Grundlagen von ganzzahligen Punktmenge zusammengestellt haben, wollen wir nun beschreiben, wie man sie konstruieren kann. Wie in Kapitel 2 beschrieben, repräsentieren wir eine ganzzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten durch eine symmetrische quadratische  $n \times n$ -Abstandsmatrix mit ganzzahligen Einträgen. Das Grundkonzept unserer Konstruktion soll das rekursive Verschmelzen von Teilpunktmenge zu größeren Punktmenge sein, siehe Abbildung 3.1. Genauer wollen wir immer je zwei Teilpunktmenge

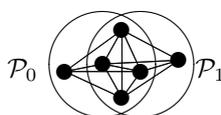


Abbildung 3.1: Verschmelzen von zwei Teilpunktmenge.

gen  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}_1$  aus je  $n$  Punkten, die  $n - 1$  Punkte gemeinsam besitzen, zu einer Punktmenge  $\mathcal{P}_v$  aus  $n + 1$  Punkten verschmelzen. Der Vorteil bei diesem Vorgehen ist, dass nur der Abstand zwischen den zwei Punkten aus  $\mathcal{P}_v \setminus \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_v \setminus \mathcal{P}_0$  noch nicht aus der vorangegangenen Rekursionsstufe bekannt ist.

Nun könnte es passieren, dass nicht nur das Verschmelzen von  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}_1$  sondern auch das Verschmelzen von zwei anderen Teilpunktmenge  $\mathcal{P}'_0$  und  $\mathcal{P}'_1$  zu  $\mathcal{P}_v$  führt. Im Allgemeinen wird es sogar recht viele solche Möglichkeiten geben. Wählt man beliebige  $n - 1$  Punkte aus  $\mathcal{P}_v$  und zusätzlich je einen der verbleibenden zwei Punkte für  $\mathcal{P}'_0$  und  $\mathcal{P}'_1$  aus, so ergibt die Verschmelzung dieser Teilpunktmenge natürlich wieder  $\mathcal{P}_v$ , wenn man den fehlenden Abstand geeignet wählt. Die naive Möglichkeit um alle Punktmenge, bis auf Isomorphie, zu konstruieren, wäre, sich alle bisher erzeugten Punktmenge in einer Liste zu merken, und jedes Mal, wenn man einen *Kandidaten* erzeugt hat, nachzuschauen ob man ihn nicht bereits erzeugt hat. Dieses immer wiederkehrende Durchlaufen von Listen konstru-

ierter Objekte ist zum einen sehr aufwendig, falls die Listen groß werden, und zum anderen passen die Listen meist sehr schnell nicht mehr in den Hauptspeicher, was zu noch größeren Geschwindigkeitsverlusten führt. Für dieses klassische Problem der konstruktiven Kombinatorik gibt es eine Lösung - **ordnungstreues Erzeugen** [146], welche wir im nächsten Abschnitt näher beschreiben wollen.

### 3.1 Ordnungstreues Erzeugen

In unserer Beschreibung des ordnungstreuen Erzeugen halten wir uns an den Originalartikel von Read [146] aus dem Jahr 1978 und beschreiben zunächst die allgemeine Problemstellung. Gegeben sei das Problem, eine **diskrete Struktur**  $\mathcal{D}$ , wie zum Beispiel Graphen, zu katalogisieren. Die Elemente von  $\mathcal{D}$ , im Folgenden auch **Objekte** genannt, seien als Äquivalenz- bzw. Isomorphieklassen auf einer Menge  $L$  definiert. Für zwei Elemente  $l_0$  und  $l_1$  aus der selben Äquivalenzklasse von  $L$  schreiben wir  $l_0 \simeq l_1$ . Weiter gebe es eine Abbildung  $\rho : L \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die konstant auf den Äquivalenzklassen ist, mit der man die Elemente von  $L$  nach einem Parameter klassifizieren kann. Bei Graphen könnte man beispielsweise auf die Anzahl der Knoten abbilden. Man hat also eine Folge von Teilmengen  $L_0, L_1, \dots$ , wobei  $L_q$  jeweils die Elemente  $l \in L$  enthalten sollen mit  $\rho(l) = q$ . Die genaue Problemstellung ist die Erzeugung von vollständigen Listen  $\mathcal{L}_q$ , die genau ein Element jeder Isomorphieklasse von  $L_q$  enthalten.

Da wir Objekte von diskreten Strukturen mit einem Computer konstruieren wollen, können wir die Folge auf ihre ersten  $r + 1$  Elemente einschränken und annehmen, dass  $L_q$  für  $q \leq r$  jeweils eine endliche Menge ist. Wir nehmen weiter an, dass wir, für jedes  $q \leq r$ , eine Funktion  $\chi_q : L_q \rightarrow \{true, false\}$  haben, die entscheidet, ob ein gegebenes Element aus  $L_q$  kanonisch in seiner Isomorphieklasse ist. Hierfür sei eine Normalform gegeben, um ein kanonisches Element auszuzeichnen. Des weiteren sei, für  $q \leq r$  eine totale Ordnung  $\prec_q$  auf den Elementen von  $L_q$  und eine Erweiterungsfunktion  $\Gamma_q$ , welche ein Element von  $L_q$  auf eine geordnete Liste von Elementen aus  $L_{q+1}$  abbildet gegeben.

Zur schreibtechnischen Vereinfachung schreiben wir im Folgenden  $\Gamma, \prec, \chi$  anstatt  $\Gamma_q, \prec_q, \chi_q$ . Das Symbol  $a \preceq b$  benutzen wir als natürliche Abkürzung für  $a \prec b$  oder  $a = b$ .

Ordnungstreues Erzeugen hat seinem Namen, weil die Listen  $\mathcal{L}_{q+1}$  bezüglich  $\prec_{q+1}$  in aufsteigender Reihenfolge erzeugt werden. Wir werden im Folgenden immer annehmen, dass die Listen  $\mathcal{L}_q$  aufsteigend sortiert sind. Das Grundgerüst des ordnungstreuen Erzeugens lässt sich wie folgt als Pseudocode angeben.

**3.1.1 Algorithmus (Ordnungstreues Erzeugen)***Eingabe:*  $\mathcal{L}_q, \Gamma, \prec, \chi$ *Ausgabe:*  $\mathcal{L}_{q+1}$ **begin** $\mathcal{L}_{q+1} = \emptyset$ **loop over**  $x \in \mathcal{L}_q$  **do****loop over**  $y \in \Gamma(x)$  **do****if**  $\chi(y)$  **and**  $y \succ$  letztes Element von  $\mathcal{L}_{q+1}$  **then**Füge  $y$  zu  $\mathcal{L}_{q+1}$  hinzu **end****end****end****end**

Für  $\Gamma$ ,  $\prec$  und  $\chi$  hat man viele Wahlmöglichkeiten, aber nicht alle führen zu einem Algorithmus, der eine vollständige geordnete Liste  $\mathcal{L}_{q+1}$  ausgibt.

Und so gibt Read [146] auch zwei notwendige Bedingungen an.

**Bedingung 3.A** *Jedes kanonische Element  $y$  aus  $L_{q+1}$  lässt sich durch mindestens ein kanonisches Element  $x$  aus  $L_q$  durch Anwendung von  $\Gamma$  erzeugen,*

$$\forall y \in L_{q+1} : \chi(y) = true \implies \exists x \in L_q : \chi(x) = true, y \in \Gamma(x).$$

**Bedingung 3.B** *Die Abbildung  $f : \mathcal{L}_{q+1} \rightarrow \mathcal{L}_q$ , die  $x$  auf das kleinste Element, bezüglich  $\prec$  abbildet, mit  $x \in \Gamma(f(x))$ , ist schwach monoton,*

$$x, y \in \mathcal{L}_{q+1}, x \prec y \implies f(x) \preceq f(y).$$

Zusammen mit Bedingung 3.C, die nicht notwendig ist, sind sie auch hinreichend.

**Bedingung 3.C** *Für alle  $x \in L_q$  ist  $\Gamma(x)$  bezüglich  $\prec$  geordnet.*

Also sollen in beiden Schleifen von Algorithmus 3.1.1 die Elemente aufsteigend bezüglich  $\prec$  durchlaufen werden.

Beispiele für geeignete Wahlen von  $\Gamma$ ,  $\prec$  und  $\chi$  in konkreten Anwendungen können z.B. [1, 16, 27, 28, 53, 54, 55, 119, 120, 146, 173] entnommen werden. Im nächsten Abschnitt wollen wir eine Variante der ordnungstreuen Erzeugung beschreiben.

## 3.2 Eine Variante der ordnungstreuen Erzeugung

Da wir ganzzahlige Punktmengen durch Verschmelzen zweier Punktmengen und nicht durch Erweitern einer Punktmenge konstruieren wollen, müssen wir die Definitionen von  $\Gamma$ ,  $\chi$  und Algorithmus 3.1.1 leicht modifizieren. Die Definitionen von  $L$ ,  $\rho$ ,  $L_q$  und  $\prec$  können wir übernehmen. Die Erweiterungsfunktion  $\Gamma$  definieren wir für alle  $q < r$  als  $\Gamma : L_q^2 \rightarrow L_{q+1}^*$ , wobei der Stern eine beliebig lange Liste von Elementen aus  $L_{q+1}$  bedeuten soll. Die Funktion  $\chi$ , die auf eine kanonische Form testen soll, erweitern wir für  $q \leq r$  auf drei Rückgabewerte,  $\chi : L_q \rightarrow \{\text{kanonisch}, \text{semi-kanonisch}, \text{weder noch}\}$ . Da wir später den Begriff semi-kanonisch so definieren werden, dass aus kanonisch semi-kanonisch folgt, soll  $\chi(x) = \text{semi-kanonisch}$  genau dann gelten, wenn  $x$  semi-kanonisch aber nicht kanonisch ist.

Wir wollen die Wahl der Erweiterungsfunktion  $\Gamma$  nun derart einschränken, dass es für  $q < r$  eine Abbildung  $\downarrow_q : L_{q+1} \rightarrow L_q$  gibt, für die

$$\forall x_1, x_2 \in L_q : y \in \Gamma(x_1, x_2) \Rightarrow \downarrow_q y = x_1$$

gilt. An Stelle von  $\downarrow_q$  schreiben wir im Folgenden nur noch  $\downarrow$ . Mit Hilfe der Abbildung  $\downarrow$  können wir die Beschreibung vom Anfang dieses Kapitels, dass zwei Punktmengen  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  aus  $n$  Punkten miteinander verschmolzen werden sollen, die  $n - 1$  Punkte gemeinsam haben, als  $\downarrow \mathcal{P}_1 = \downarrow \mathcal{P}_2$  formulieren. Somit bräuchten wir obige Bedingung an  $\downarrow$  nur für  $\chi(x_1) = \text{kanonisch}$  und für  $x_2 \in L_q$  mit  $\downarrow x_2 = \downarrow x_1$  zu fordern. Da diese Bedingung selbstbezüglich wäre, verzichten wir auf die Lockerung der Bedingung und nehmen in Kauf, ein paar exotischere Wahlen von  $\Gamma$  auszuschließen.

Da wir wie in Algorithmus 3.1.1 mit  $x_1$  nur durch die kanonischen Elemente von  $L_q$  laufen wollen, fordern wir in Anlehnung an Bedingung 3.A:

### Bedingung 3.A'

$$\forall y \in L_{q+1} : \chi(y) = \text{kanonisch} \implies \chi(\downarrow y) = \text{kanonisch}.$$

Wie wir später sehen werden, können in unserem konkreten Anwendungsbeispiel nicht alle kanonischen Abstandsmatrizen durch Verschmelzung zweier kanonischer Abstandsmatrizen erzeugt werden, deshalb führen wir den Begriff **semi-kanonisch** ein.

**3.2.1 Definition** Ein Element  $x \in L_q$  heißt **semi-kanonisch**, falls für den kanonischen Repräsentant  $x'$  der Isomorphieklasse von  $x$  gilt, dass  $\downarrow x = \downarrow x'$ .

Wir beschränken unsere Allgemeinheit weiter, indem wir  $\chi$  nicht mehr als Eingabeparameter zulassen sondern durch  $\prec$  definieren. Hierfür müssen wir nur definieren, welches Element einer Isomorphieklasse kanonisch genannt werden soll, da semi-kanonisch über den Begriff kanonisch definiert wurde. Im Folgenden nennen wir ein Element  $x \in L_q$  kanonisch, falls es, bezüglich  $\prec$ , das größte Element in seiner Isomorphieklasse ist.

Nun sollen unsere Listen  $\mathcal{L}_q$  nicht mehr nur alle kanonischen Elemente von  $L_q$ , sondern auch alle semi-kanonischen Elemente von  $L_q$  enthalten. Dabei sollen die Listen durch  $\prec$  geordnet sein, und wir formulieren Algorithmus 3.1.1 um zu:

### 3.2.2 Algorithmus (Ordnungstreu Erzeugen durch Verschmelzen)

*Eingabe:*  $\mathcal{L}_q, \Gamma, \downarrow, \prec$

*Ausgabe:*  $\mathcal{L}_{q+1}$

**begin**

$\mathcal{L}_{q+1} = \emptyset$

**loop over**  $x_1 \in \mathcal{L}_q, \chi(x_1) = \text{kanonisch}$  **do**

**loop over**  $x_2 \preceq x_1, x_2 \in \mathcal{L}_q, \downarrow x_2 = \downarrow x_1$  **do**

**loop over**  $y \in \Gamma(x_1, x_2)$  **do**

**if**  $\chi(y) \neq \text{weder noch}$  **and**  $y \succ$  letztes Element von  $\mathcal{L}_{q+1}$

**then** füge  $y$  zu  $\mathcal{L}_{q+1}$  hinzu **end**

**end**

**end**

**end**

**end**

Hinreichende Bedingungen für  $\Gamma, \downarrow$  und  $\prec$  liefert z.B. folgender Satz, wobei wir die totale Ordnung  $\prec$  auf  $L_q$  lexikographisch auf  $L_q^2$  erweitern. Weiter verwenden wir für ein Element  $x \in L_q$  und ein Element  $y \in L_{q+1}$  die Bezeichnung  $x \subset y$ , falls es ein Element  $x' \in L_q$  gibt mit  $y \in \Gamma(x, x')$  oder  $y \in \Gamma(x', x)$ .

**3.2.3 Satz** Seien, für  $q < r$ ,  $\Gamma_q$  eine Erweiterungsfunktion  $\Gamma_q : L_q^2 \rightarrow L_{q+1}^*$ , eine Abbildung  $\downarrow_q : L_{q+1} \rightarrow L_q$ ,  $\prec_{q+1}$  eine totale Ordnung auf  $L_{q+1}$ , und  $\chi_q$ , wie oben, durch  $\prec_q$  definiert. Hierbei gelte für  $\downarrow$ ,

$$\forall x_1, x_2 \in L_q : y \in \Gamma(x_1, x_2) \Rightarrow \downarrow y = x_1$$

und es gelte

$$\Gamma(x_1, x_2) = \emptyset \quad \text{für} \quad \downarrow x_1 \neq \downarrow x_2.$$

Falls

1. es für alle  $y \in L_{q+1}$  Elemente  $x_1$  und  $x_2$  aus  $L_q$  gibt mit  $y \in \Gamma(x_1, x_2)$ , und weiter gilt, dass

$$\chi(y) \neq \text{weder noch} \Rightarrow \forall x \subset y, x \in L_q, \forall x' \simeq x : x' \preceq \downarrow y,$$

2. für alle  $x_1, x_2, x'_1, x'_2 \in L_q$  mit  $\chi(x_1), \chi(x'_1) = \text{kanonisch}$ ,  $\chi(x_2), \chi(x'_2) \neq \text{weder noch}$  und  $(x_1, x_2) \prec (x'_1, x'_2)$  gilt, dass

$$y \in \Gamma(x_1, x_2), y' \in \Gamma(x'_1, x'_2) \Rightarrow y \preceq y',$$

3. für alle  $x_1, x_2 \in L_q$  mit  $\chi(x_1) = \text{kanonisch}$  und  $\chi(x_2) \neq \text{weder noch}$  gilt, dass  $\Gamma(x_1, x_2)$  bezüglich  $\prec$  geordnet ist,

dann erzeugt Algorithmus 3.2.2 aus einer bezüglich  $\prec$  geordneten Liste  $\mathcal{L}_q$  der kanonischen und semi-kanonischen Elemente von  $L_q$ , eine bezüglich  $\prec$  geordnete Liste  $\mathcal{L}_{q+1}$  der kanonischen und semi-kanonischen Elemente von  $L_{q+1}$ .

**Beweis.** Wir wollen den Originalbeweis von Read [146] verwenden. Hierzu bemerken wir, dass der dritte Punkt Bedingung 3.C entspricht und der zweite Punkt eine stärkere Forderung als Bedingung 3.B ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass wir auch Bedingung 3.A, mit den offensichtlich notwendigen Modifikationen, folgern können. Nach Voraussetzung gibt es  $x_1, x_2 \in L_q$  mit  $y \in \Gamma(x_1, x_2)$ . Da somit  $\Gamma(x_1, x_2)$  nicht leer ist, gilt  $\downarrow x_1 = \downarrow x_2$ . Da wir nur kanonische oder semi-kanonische  $y$  betrachten müssen, gilt für  $x_2$  als Teilmenge von  $y$ , dass  $x_2 \preceq \downarrow y = x_1$ . Zum Schluss nehmen wir an, dass  $x_2$  weder kanonisch noch semi-kanonisch ist. Da alle Elemente von  $L_0$  per Definition semi-kanonisch sind, gilt  $q \geq 1$ . Bezeichnen wir das kanonische Element aus der Isomorphieklasse von  $x_2$  mit  $x'$ , so gilt  $\downarrow x' \succ \downarrow x_2 = \downarrow x_1$ . Da  $y$  kanonisch oder semi-kanonisch ist, gilt  $x' \preceq \downarrow y = x_1$ . Da  $x'$  und  $\downarrow y = x_1$  kanonisch sind, gibt es  $x'_3$  und  $x''_3$  in  $L_{q-1}$  mit  $x' \in \Gamma(\downarrow x', x'_3)$  und  $x_1 \in \Gamma(\downarrow x_1, x''_3)$ . Mit  $\downarrow x_1 \prec \downarrow x'$  gilt auch  $(\downarrow x_1, x''_3) \prec (\downarrow x', x'_3)$  und somit nach Punkt 2,  $x_1 \preceq x'$ . Aus  $x_1 \preceq x'$  und  $x_1 \succeq x'$  folgern wir,  $x_1 = x' \simeq x_2$ . Wegen  $\downarrow x_2 = \downarrow x_1 = \downarrow x'$  ist  $x_2$  semi-kanonisch.  $\square$

Nach diesem Ausflug in die allgemeine Theorie wollen wir in den folgenden zwei Abschnitten, für unser Problem der Konstruktion ganzzahliger Punktmengen, geeignete Funktionen  $\Gamma$ ,  $\downarrow$  und  $\prec$  angeben.

### 3.3 Konstruktion ganzzahliger Simplizes

Nun wollen wir, mittels ordnungstreuer Erzeugung durch Verschmelzen, ganzzahlige Simplizes generieren. Nach Abschnitt 2.1 können wir ganzzahlige Simplizes

als Äquivalenzklassen von Abstandsmatrizen beschreiben. Unser  $L$  wäre also die Menge der quadratischen Matrizen über  $\mathbb{N}$ . Hinzu kommt aber noch die Nebenbedingung, dass die Abstandsmatrix bei gegebenem  $m$  in den  $\mathbb{E}^m$  einbettbar sein soll bzw. evtl. weitere Nebenbedingungen, wie z.B., dass keine  $m + 1$  Punkte in einer  $(m - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen sollen. Wir verzichten also auf eine exakte Beschreibung von  $L$ , da man sie leicht für jede Kombination der im Laufe dieser Arbeit erwähnten Nebenbedingungen bestimmen kann.

Da wir, wie am Anfang des Kapitels beschrieben, zwei Simplexes aus je  $n$  Punkten zu einem Simplex aus  $n + 1$  Punkten verschmelzen wollen, wählen wir  $\rho$  so, dass ein Element aus  $L$  auf die Anzahl der Punkte abgebildet wird. Als Ordnung  $\prec$  wählen wir die reduzierte Spalten-lexikographische Ordnung aus Abschnitt 2.2. Die Funktion  $\downarrow$  soll einfach die letzte Zeile und Spalte der Abstandsmatrix streichen. In die andere Richtung soll  $\Gamma(x_1, x_2)$  die letzte Spalte und Zeile der Abstandsmatrix  $x_2$  an die Abstandsmatrix  $x_1$  anhängen, siehe das folgende Beispiel.

**3.3.1 Beispiel** Seien  $x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  und  $x_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$  zwei Abstandsmatrizen. Das Verschmelzen von  $x_1$  und  $x_2$  ergibt

$$\Gamma(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & \star \\ 2 & 4 & \star & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Wir sehen, dass unsere Erweiterungsfunktion  $\Gamma$  noch nicht vollständig definiert ist. Zum Ausfüllen des  $\star$  benutzen wir Lemma 2.1.4. Hierzu ersetzen wir  $\star$  durch  $x$  und wandeln die Ungleichung

$$(-1)^n C(P_0, \dots, P_{n-1}) > 0$$

um in  $ax^4 + bx^2 + c > 0$ . Es ergibt sich ein Intervall für die möglichen Werte für  $x$ . Um die dritte Bedingung von Satz 3.2.3 zu erfüllen, müssen die möglichen Werte für  $x$  aufsteigend durchlaufen werden. Für  $\downarrow x_1 \neq \downarrow x_2$  müssen wir noch definieren, dass  $\Gamma(x_1, x_2)$  die leere Menge sein soll. Die zweite Bedingung von Satz 3.2.3 und die geforderte Eigenschaft von  $\downarrow$  gelten offensichtlich. Dass auch die erste Bedingung erfüllt ist, sieht man leicht anhand der Definition der reduzierten Spalten-lexikographischen Ordnung. Somit können wir Algorithmus 3.2.2 mit unseren Wahlen für  $\Gamma$ ,  $\downarrow$  und  $\prec$ , nach Satz 3.2.3, für die Konstruktion einer vollständigen Liste  $\mathcal{L}_{q+1}$  aus einer Liste  $\mathcal{L}_q$  benutzen.

Nun fehlt nur noch der Start der Konstruktion, der Durchlauf durch die Liste  $\mathcal{L}_0$ . Da die ganzzahligen Strecken trivial zu durchlaufen sind, geben wir einen Algorithmus zum Durchlauf aller semi-kanonischen Dreiecke mit Durchmessern zwischen *start* und *ende* an.

### 3.3.2 Algorithmus (Durchlaufe semi-kanonische Dreiecke)

*Eingabe:* start, ende

*Ausgabe:* Dreiecke  $\Delta = (a, b, c)$

```

begin
  for a from start to ende do
    for b from 1 to a do
      for c from  $a + 1 - b$  to a do
        gebe  $\Delta = (a, b, c)$  aus
      end
    end
  end
end

```

Das Einzige, was uns jetzt noch für eine Implementierung der Algorithmen zur Erzeugung der ganzzahligen Simplizes fehlt, ist eine algorithmische Beschreibung der Kanonizitätsfunktion  $\chi$ . Die einfachste Möglichkeit ist mittels Backtracking alle Nummerierungen der  $n$  Punkte zu durchlaufen und zu überprüfen, ob die Ausgangsnummerierung maximal bezüglich  $\prec$  war. Schneidet man die Teilbäume im Backtrackbaum möglichst früh ab, so erhält man einen, zumindest für kleine Dimensionen  $m$ , halbwegs akzeptablen Kanonizitätstest. In Kapitel 7 werden wir erklären, warum dieser Kanonizitätstest für kleine Dimensionen recht schnell ist, aber für größere Dimensionen sehr, sehr langsam ist. Und so werden wir deswegen in Kapitel 8 verfeinerte Algorithmen für den Kanonizitätstest  $\chi$  beschreiben.

## 3.4 Konstruktion ganzzahliger Punktmengen

Bei der Konstruktion von ganzzahligen Punktmengen der Dimension  $m$  können wir die Wahl der Ordnung  $\prec$  und der Funktion  $\downarrow$  übernehmen. Auch die Wahl der Erweiterungsfunktion  $\Gamma$  können wir fast übernehmen. Nur für das Durchlaufen der Werte für  $\star$  in der zusammengesetzten Abstandsmatrix können wir nicht mehr Lemma 2.1.4 verwenden. Stattdessen berechnen wir mit Hilfe von Algorithmus 2.3.2 die Koordinatendarstellung. Obwohl ein Abstand nicht festgelegt ist, können wir wegen  $n \geq m + 2$  die Koordinaten der  $n$  Punkte berechnen. Die einzige Freiheit, die wir im Fall  $n = m + 2$  noch haben, ist die Wahl des Vorzeichens

von  $v_{oben,oben}$ . Aus diesen, maximal zwei, Koordinatendarstellungen rechnen wir dann einfach den letzten fehlenden Abstand aus, testen ob er ganzzahlig ist und bringen die maximal zwei Möglichkeiten in aufsteigende Reihenfolge.

Bei der Wahl von  $L$  müssen wir allerdings etwas aufpassen. Und so betrachten wir zunächst das Problem, die  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen in semi-allgemeiner Lage zu erzeugen. Für  $n \geq m + 2$  besitzen alle Teilmengen aus  $n - 1$  Punkten wiederum die Dimension  $m$ , da keine  $m + 1$  Punkte in einer Hyperebene liegen. Es bleiben also alle Eigenschaften bis auf die Anzahl der Punkte erhalten. Als  $L_q$  können wir also die Menge der ganzzahligen  $(q+m+1) \times (q+m+1)$  Abstandsmatrizen, die sich so in  $\mathbb{E}^m$  einbetten lassen, dass keine  $(m + 1)$  Punkte in einer Hyperebene liegen. Die Menge  $L_0$  bzw.  $\mathcal{L}_0$  können wir wie im vorherigen Abschnitt beschrieben erzeugen und durchlaufen. Entsprechend wird bei  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen in allgemeiner Lage vorgegangen.

Lässt man allerdings die Bedingung mit der beschränkten Anzahl von Punkten in einer Hyperebene weg, so ist nicht jede Teilmenge aus  $n - 1$  Punkten einer  $m$ -dimensionalen Punktmenge aus  $n \geq m + 2$  Punkten wieder  $m$ -dimensional. Um Algorithmus 3.2.2 direkt verwenden zu können müssten wir  $L_q$  als die Menge der ganzzahligen  $q \times q$  Abstandsmatrizen definieren, die sich für irgendein  $m$  in den  $\mathbb{E}^m$  einbetten lassen. Das Problem hierbei ist, dass es mehr als  $\frac{\binom{d-1}{n-2}}{2}$  eindimensionale ganzzahlige Punktmengen aus  $n$  Punkten mit Durchmesser  $d$  gibt. Für  $d = 396$  und  $n = 28$  wären dies mehr als  $10^{40}$  eindimensionale Punktmengen, eine Anzahl die selbst mit den heutigen Superrechnern nicht durchlaufen werden kann. Da wir trotzdem alle ganzzahligen zweidimensionalen Punktmengen mit Durchmesser 396 bestehend aus 29 Punkten konstruieren wollen (siehe Kapitel 5), müssen wir den Algorithmus ein wenig modifizieren.

Wir beschreiben zunächst die Konstruktion der ganzzahligen zweidimensionalen Punktmengen und starten mit dem Durchlauf der ein- und zweidimensionalen Punktmengen aus 3 Punkten. Hierzu können wir Algorithmus 3.3.2 verwenden, wenn wir die untere Grenze in der innersten *for*-Schleife durch  $a - b$  anstatt  $a + 1 - b$  ersetzen. Die Kombination zu ein- und zweidimensionalen Punktmengen aus 4 Punkten können wir gemäß Algorithmus 3.2.2 durchführen. Im Anschluss hieran schauen wir bei jeder erzeugten eindimensionalen Punktmenge  $x$  nach, ob auch eine zweidimensionale Punktmenge  $y$  erzeugt wurde mit  $\downarrow x = \downarrow y$ . Falls es kein solches  $y$  gibt, können aus  $x$  im weiteren Konstruktionsprozess nur noch eindimensionale Punktmengen entstehen, also entfernen wir es in diesem Fall aus der Liste. Da die Punktmengen in der Liste aufsteigend erzeugt werden, kann dieser Test für alle eindimensionalen Punktmengen mit einem einzigen Durchlauf durch die Liste durchgeführt werden. Im Folgenden wechseln sich die Konstruktionsschritte von Algorithmus 3.2.2 und der eben beschriebene Aussortiervorgang nicht mehr

geeignet erweiterbarer Punktmengen ab, bis alle ganzzahligen zweidimensionalen Punktmengen mit einem gegebenen Durchmesser erzeugt sind.

Bei der Konstruktion von ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen für  $m \geq 3$  könnte man ähnlich vorgehen. Da aber die Anzahl der  $(m - 1)$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen im Vergleich zu den  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen mit gleichem Durchmesser für  $m \geq 3$  recht klein ist, bietet sich aus implementierungstechnischen Überlegungen ein anderer Algorithmus an. Wir gehen davon aus, dass wir die  $(m - 1)$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen aus  $n$  Punkten erzeugen können. Sei  $\mathcal{L}'_q$  eine solche Liste und  $\mathcal{L}_q$  die Liste der semi-kanonischen  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen. Wir mischen nun einfach die Listen, so dass sie immer noch aufsteigend sortiert sind und konstruieren hiermit die Liste  $\mathcal{L}_{q+1}$ .

In Abschnitt 2.4 haben wir die Charakteristik einer ganzzahligen Punktmenge definiert. Mit Hilfe von Satz 2.4.3 bietet sie eine Möglichkeit den Konstruktionsalgorithmus sehr drastisch (siehe Abschnitt 4.5 für eine genauere Aussage) zu beschleunigen. Hierzu zerlegen wir die  $L_q$  weiter nach der Charakteristik  $k = \text{char}(\mathcal{P})$  der Punktmengen in  $L_{q,k}$  und führen den Konstruktionsprozess für jede Charakteristik aus  $L_0$  einzeln aus. Es soll darauf hingewiesen werden, dass die Charakteristik einer Punktmenge  $\mathcal{P}$  von ihrer Dimension  $m$  abhängt. Kombiniert man also Punktmengen unterschiedlicher Dimensionen, so kann man Satz 2.4.3 nicht anwenden, und muss doch wieder die Listen  $L_q$  miteinander kombinieren.

### 3.5 Andere Wahlmöglichkeiten für die Parameter der ordnungstreuen Erzeugung

Ordnungstreues Erzeugen ist eine viel benutzte Technik um Objekte von diskreten Strukturen zu erzeugen. Da die Allgemeinheit von Read's Originalartikel [146] sehr nützlich für unsere Zwecke ist, sind in Abschnitt 3.1 ganz bewusst weite Teile aus [146] einfach übernommen oder nur leicht modifiziert wurden. Dem Leser soll aufgezeigt werden, dass sich hinter dem Begriff ordnungstreues Erzeugen eine ganze Klasse von Algorithmen mit verschiedenen Parametern verbirgt und sich die natürliche Frage ergibt, welche Parametersätze man denn benutzen kann.

Eine wesentliche Motivation für diese Betrachtungen war die Frage, wie ordnungstreues Erzeugen und iterierte Klassifizierung, siehe Abschnitt 7.3, zusammenhängen bzw. ob wir die iterierte Klassifizierung als Kanonizitätstest für ordnungstreues Erzeugen benutzen können. Es wird sich in Abschnitt 7.3 herausstellen, dass wir es in unserem Fall nicht können, da Bedingung 3.A' nicht erfüllt ist, wenn wir  $\Gamma$  und  $\downarrow$  so wählen, wie vorher beschrieben.

Die zweite Motivation Abschnitt 3.1 wiederzugeben, war die entsprechende Formulierung der Variante des ordnungstreuen Verschmelzens, wie wir sie in Abschnitt 3.2 dargestellt haben. Da wir ganzzahlige Punktmengen auch durch Erweiterung, also klassisch, hätten konstruieren können, stellt sich die Frage, warum wir sie durch Verschmelzen konstruieren. Um diese Frage zu beantworten geben wir in Abschnitt B.1 ausgewählte Laufzeitvergleiche zwischen der ordnungstreuen Erzeugung durch Erweitern (Abschnitt 3.1) und der ordnungstreuen Erzeugung durch Verschmelzen (Abschnitt 3.2) an. Es wird sich herausstellen, dass Verschmelzen in unserem Anwendungsbeispiel günstiger ist.

Theoretisch lässt sich dies durch die *Struktur* und die *Stärke* unserer Nebenbedingungen erklären. Wenn wir beispielweise ganzzahlige  $m$ -dimensionale Simplex konstruieren wollen, müssen die Einbettbarkeitsbedingungen von Lemma 2.1.2 erfüllt sein. In Abschnitt 2.1 haben wir auch gesehen, wie man diese Bedingungen algorithmisch schnell überprüft. Nimmt man nun an, dass nur ein paar Abstände  $\delta(i, m+1)$  zum  $m+1$ -ten Punkt bekannt sind, so benötigt man exponentiellen Aufwand, um alle bereits testbaren Bedingungen von Lemma 2.1.2 zu überprüfen. Wählt man dagegen aus diesen Bedingungen nur einige wenige aus, so geht man die Gefahr ein, dass man viel zu viele Objekte erzeugt, bei denen man erst später feststellt, dass sie die Einbettbarkeitsbedingungen nicht erfüllen.

Aus diesem Grund erweitern wir ganzzahlige Punktmengen auch punktweise und nicht Abstand für Abstand. Dem letzteren Vorgehen würde bei der Konstruktion von Graphen das Hinzufügen einer Kante entsprechen.

Nachdem wir die Wahl von  $\rho$ ,  $\Gamma$  und  $\downarrow$  motiviert haben, stellt sich noch die Frage, ob man nicht für  $\prec$  eine andere als die reduzierte Spalten-lexikographische Ordnung hätte wählen können. In Abschnitt 2.2 hatten wir noch die reduzierte Zeilen-lexikographische Ordnung erwähnt. Bei unserer Wahl von  $\Gamma$  und  $\downarrow$  erfüllt die reduzierte Zeilen-lexikographische Ordnung im Allgemeinen nicht Bedingung 3.A', wie wir im folgenden Beispiel sehen werden.

**3.5.1 Beispiel** Betrachten wir folgende symmetrische Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

auf 6 Punkten, so stellen wir nach kurzer Überlegung fest, dass sie kanonisch bezüglich der reduzierten Zeilen-lexikographischen Ordnung ist. Weiter setzen wir

$\sigma = (0, 1)(3, 2, 4)$  und betrachten die zwei Matrizen

$$\downarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma(\downarrow M) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\downarrow M \prec \sigma(\downarrow M)$  gilt, ist  $\downarrow M$  nicht kanonisch bezüglich der reduzierten Zeilenlexikographischen Ordnung, und somit ist Bedingung 3.A' verletzt.  $\diamond$

## 4 Eigenschaften und Berechnung der Charakteristik

In diesem Kapitel wollen wir die Eigenschaften der Charakteristik von ganzzahligen Punktmenge n näher untersuchen.

In den vorherigen Kapiteln haben wir gesehen, dass es günstig ist ganzzahlige Punktmenge n getrennt nach der Charakteristik zu konstruieren. Wir müssen also immer wieder Listen von Simplexen nach ihrer Charakteristik sortieren. Da das Sortieren im Hauptspeicher eines Rechners mehr als 100 mal schneller ist als das Sortieren auf der Festplatte, lohnt es sich einigen Aufwand zu betreiben, um zum einen den Speicherbedarf für einen einzelnen Simplex möglichst gering zu halten und zum anderen den Sortiervorgang so zu organisieren, dass möglichst wenig Schreibzugriffe auf der Festplatte stattfinden.

### 4.1 Ressourcenschonende Datenstrukturen für Simplex

Die Konstruktion der  $m$ -dimensionalen Simplexen kann immer in Einzelläufen stattfinden, bei denen das größte  $(m - 1)$ -dimensionale Teilsimplex identisch ist. Anstatt der  $\binom{m}{2}$  paarweisen Abstände der Eckpunkte eines  $m$ -dimensionalen Simplex brauchen wir nur die  $m$  Abstände, die sich im Laufe eines eben beschriebenen Einzeldurchlaufes ändern können, für jeden Simplex einzeln zu speichern. Die restlichen Abstände können global gespeichert werden.

Die Größe der Seitenlängen ist theoretisch nicht nach oben beschränkt, so dass eine allgemeine Implementierung der hier vorgestellten Algorithmen eine Langzahlarithmetik verwenden sollte. Doch durch praktische Laufzeitbetrachtungen lassen sich vernünftige obere Schranken für die Seitenlängen angeben, um optimierte, auf bestimmte Fälle beschränkte, Extraimplementierungen zu schreiben. So gibt es z.B. über eine Milliarde verschiedener ganzzahliger Dreiecke mit gleichem Durchmesser, sobald der Durchmesser mindestens  $2^{16} - 1 = 65.535$  beträgt. Für die Konstruktion von ganzzahligen Dreiecken ist also die Verwendung des Datentyps *unsigned short int* für die Seitenlängen durchaus ausreichend. Der nächst

kleinere Standarddatentyp *unsigned char* würde nur Durchmesser bis maximal 255 erlauben, wobei es nur 16.384 verschiedene ganzzahlige Dreiecke mit Durchmesser 255 gibt. Für Simplexes der Dimension  $m \geq 3$  ist der Datentyp *unsigned char* durchaus ausreichend, da es bereits 28.274.949.522 unterschiedliche ganzzahlige Tetraeder mit Durchmesser 256 gibt (siehe Kapitel 10).

Die Charakteristik eines Simplex ist gegenüber ihrem Durchmesser eine sehr große Zahl. Für die Charakteristik eines Dreiecks haben wir folgende Abschätzung.

**4.1.1 Lemma** Für die Charakteristik  $\text{char}(\mathcal{S})$  eines Dreiecks  $\mathcal{S}$  mit Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  gilt

$$\text{char}(\mathcal{S}) \leq 3 \cdot \max(a, b, c)^4.$$

**Beweis.** Nach der Definition der Charakteristik (Abschnitt 2.4) gilt

$$\text{char}(\mathcal{S}) \leq (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c).$$

Setzen wir  $a = b = c$ , so beträgt diese obere Abschätzung  $3a^4 = 3 \cdot \max(a, b, c)^4$  (o.B.d.A.  $a \geq b \geq c$ ). Da die Charakteristik eines Dreiecks als quadratfreier Teil dieser Zahl definiert ist, würde sie in diesem Fall 3 betragen, also sehr klein sein. Wir bemerken jedoch, ohne Beweis, dass man für gegebenes  $\varepsilon > 0$  immer Dreiecke  $\mathcal{S}$  mit  $\text{char}(\mathcal{S}) > (3 - \varepsilon) \cdot \max(a, b, c)^4$  finden kann, indem man  $a$  hinreichend groß und  $b$  und  $c$  geeignet und nahe bei  $a$  wählt.

Um nun  $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$  nach oben abzuschätzen nehmen wir o.E. an, dass  $a \geq b \geq c$  gilt und  $a$  fest gewählt ist. Die Dreiecksungleichungen ersetzen wir durch die schwächeren Ungleichungen  $0 \leq b, c \leq a$ . Nun können wir mit Standardmitteln der Analysis das globale Maximum dieser in einem Quadrat definierten Funktion von zwei Variablen bestimmen, wobei wir die Details dem Leser überlassen.  $\square$

Somit können wir zum Speichern der Charakteristiken von Dreiecken mit Durchmessern von höchstens 49.796 bzw. 41.873 die Datentypen *unsigned long long* bzw. *long long* verwenden, die aus 8 Byte bestehen.

Wenn wir den Zusammenhang zwischen der Charakteristik eines  $m$ -dimensionalen Simplex und seinem Volumen berücksichtigen, und zudem noch benutzen, dass der Simplex mit identischen Seitenlängen unter allen Simplexes mit gegebenem Durchmesser das größte Volumen besitzt, dann können wir das folgende allgemeinere Lemma beweisen.

**4.1.2 Lemma** Für die Charakteristik  $\text{char}(\mathcal{S})$  eines  $m$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{S}$  mit Durchmesser  $\text{diam}(\mathcal{S})$  gilt

$$\text{char}(\mathcal{S}) \leq \frac{3 - (-1)^m}{2} (m + 1) \text{diam}(\mathcal{S})^{2m}.$$

**Beweis.** Wir betrachten ein  $m$ -dimensionales Simplex  $\mathcal{S}$  mit Eckpunkten  $P_0, \dots, P_m$ , bei dem jede Seite die Länge  $d = \text{diam}(\mathcal{S})$  hat. Wegen Definition 2.4.2, Satz 2.1.1 und der vorherigen Bemerkung gilt

$$\text{char}(\mathcal{S}) \leq \frac{3 - (-1)^m}{2} |C(P_0, \dots, P_m)|,$$

da  $\frac{3 - (-1)^m}{2}$  der quadratfreie Teil von  $2^m (m!)^2$  ist. Nun müssen wir nur noch den Wert der Cayley-Menger-Determinante  $C(P_0, \dots, P_m)$  ausrechnen.

Entwickeln nach der ersten Zeile und Umsortieren der verbleibenden Zeilen liefert

$$C(P_0, \dots, P_m) = (m + 1) \begin{vmatrix} 1 & d^2 & d^2 & \dots & d^2 \\ 1 & 0 & d^2 & \dots & d^2 \\ 1 & d^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & \ddots & d^2 \\ 1 & d^2 & \dots & d^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Addiert man nun jeweils das  $-d^2$ -fache der ersten Spalte zu den restlichen Spalten hinzu, so erhält man

$$C(P_0, \dots, P_m) = (m + 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -d^2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -d^2 \end{vmatrix}.$$

□

m	ull	ll
2	49.796	41.873
3	1.290	1.149
4	209	191
5	70	65
6	34	32

m	ull	ll
7	20	19
8	13	13
9	10	9
10	8	7
11	6	6

m	ull	ll
12	5	5
13	4	4
14	4	4
15	4	3
16	3	3

Tabelle 4.1: Maximaler Durchmesser bei Speicherung der Charakteristik als *unsigned long long* oder *long long*.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir in Tabelle 4.1 angeben, bis zu welchem Durchmesser das Abspeichern der Charakteristik eines  $m$ -dimensionalen Simplex mit den Datentypen *unsigned long long* (*u ll*) und *long long* (*ll*), auf einem 32-bit Rechner, möglich ist. Falls die Dimension  $m$  größer als 19 ist, können nur noch Charakteristiken von Simplizes mit einem Durchmesser von höchstens 2 abgespeichert werden. Derartige Simplizes behandeln wir in Abschnitt 10.2.

Die soeben geführten Betrachtungen zu den Wertebereichen der Datentypen sind exemplarisch zu betrachten, da wir in etlichen Spezialimplementierungen aus Effizienzgründen anstatt einer Langzahlarithmetik nur Standarddatentypen verwendet haben. Diese Programme liefern somit nur für bestimmte Parameterbereiche korrekte Ergebnisse und wir mussten ähnliche Betrachtungen durchführen, um die zulässigen Parameterbereiche zu bestimmen.

## 4.2 Sortieren nach Charakteristik

Sollten die in einem Schritt zu konstruierenden Simplizes in den Hauptspeicher passen, so wählt man für die praktische Implementierung Quicksort und für eine theoretische Laufzeitanalyse Heapsort. Insbesondere für  $m = 2$  und größere Durchmesser werden die Simplizes allerdings nicht mehr auf einem normalen Heim-PC in den Arbeitsspeicher passen. Hier sollte man die zu sortierenden Daten in möglichst gleich große Stücke aufteilen, um diese einzeln im Hauptspeicher zu sortieren.

Eine Möglichkeit wäre, **Hybridsort** mit **double distributed partitioning** zu benutzen. Dieser Algorithmus berechnet aus einem Datum die Nr. eines *Containers* in den das Datum gesteckt wird. Die Container werden anschließend einzeln mit einem beliebigen Sortierverfahren sortiert und aneinandergelagert. Damit die Container möglichst gleich viele Daten enthalten, passt man die Formel für die Berechnung der Container-Nr. mittels einer Stichprobe an die Verteilung der Datenschlüssel an. Für eine genauere Beschreibung bzw. Analyse von Hybridsort siehe z.B. [60, 117, 130]. Anstatt eine Stichprobe im laufenden Programm vorzunehmen wollen wir die Verteilung der Charakteristiken von ganzzahligen Dreiecken modulo  $K$  untersuchen. Das Ziel ist es, geeignete Werte für  $K$  zu finden, so dass die Verteilung möglichst gleichmäßig ist.

Wir haben etliche Tests mit unterschiedlichen Werten für  $K$  und unterschiedlichen Durchmessern gemacht. In Tabelle 4.2 und in Tabelle 4.3 geben wir einen Teil der Daten an, der die wesentlichen Ergebnisse aus den Testreihen sichtbar macht. Zum einen nehmen wir mit 1.000 eine Zahl mit relativ vielen Teilern für den Durchmesser und zum anderen mit 1.009 eine Primzahl als Durchmesser.

char	K=16	K=17	K=19	K=24	K=30	K=32
$\equiv 0$	0	98.482	89.611	0	56	0
$\equiv 1$	14.388	26.250	21.754	5.575	44.756	7.306
$\equiv 2$	9.918	25.234	23.050	6.216	20	5.088
$\equiv 3$	34.542	24.381	24.233	34.508	826	17.141
$\equiv 4$	0	24.688	22.447	0	3.592	0
$\equiv 5$	14.345	25.237	23.337	8.812	755	7.112
$\equiv 6$	9.301	25.009	23.034	9.267	9.615	4.759
$\equiv 7$	167.879	25.264	22.919	65.745	272	84.043
$\equiv 8$	0	24.492	22.527	0	14	0
$\equiv 9$	13.974	25.405	22.761	14.134	113.937	7.121
$\equiv 10$	9.917	25.842	23.335	3.738	20	4.928
$\equiv 11$	34.757	24.934	23.280	21.364	69.960	17.376
$\equiv 12$	0	26.895	22.294	0	20	0
$\equiv 13$	14.379	25.101	22.581	5.564	232	7.133
$\equiv 14$	9.295	23.110	22.674	5.826	6.058	4.764
$\equiv 15$	167.805	26.309	21.839	167.656	1.126	84.173
$\equiv 16$		23.867	23.348	0	3.617	0
$\equiv 17$			22.083	8.653	572	7.082
$\equiv 18$			23.393	9.881	18	4.830
$\equiv 19$				13.427	44.667	17.401
$\equiv 20$				0	30	0
$\equiv 21$				14.348	113.945	7.233
$\equiv 22$				3.503	6	4.542
$\equiv 23$				102.283	564	83.836
$\equiv 24$					9.439	0
$\equiv 25$					384	6.853
$\equiv 26$					5.920	4.989
$\equiv 27$					812	17.381
$\equiv 28$					6	0
$\equiv 29$					69261	7.246
$\equiv 30$						4.531
$\equiv 31$						83.632

Tabelle 4.2: Verteilung der Charakteristik von Dreiecken mit Durchmesser 1.000 modulo  $K$ .

Eine derartige Unterscheidung ist bei zahlentheoretischen Problemen immer

	K=16	K=17	K=19	K=24	K=30	K=32
$\equiv 0$	0	100.072	90.938	0	25.186	0
$\equiv 1$	17.838	24.350	23.152	6.912	10.866	8.902
$\equiv 2$	28.212	26.525	23.307	17.286	4.436	14.008
$\equiv 3$	82.715	23.802	22.681	81.596	27.339	41.739
$\equiv 4$	0	25.964	23.961	0	3.010	0
$\equiv 5$	17.928	27.669	21.682	10.806	54.210	9.004
$\equiv 6$	28.214	24.662	23.718	28.166	7.990	14.186
$\equiv 7$	81.279	25.802	23.291	31.555	11.125	34.454
$\equiv 8$	0	26.565	23.442	0	4.518	0
$\equiv 9$	17.566	25.201	21.965	17.670	28.217	8.784
$\equiv 10$	28.212	25.657	23.784	10.914	9.904	14.090
$\equiv 11$	80.414	26.242	24.099	49.675	17.778	40.418
$\equiv 12$	0	24.825	23.616	0	7.556	0
$\equiv 13$	17.602	25.168	23.231	6.996	8.701	8.788
$\equiv 14$	28.210	25.276	24.275	17.230	5.176	14.106
$\equiv 15$	81.355	25.222	24.291	81.041	87.916	36.132
$\equiv 16$		26.543	23.359	0	3.390	0
$\equiv 17$			22.795	10.822	15.803	8.936
$\equiv 18$			21.958	28.224	7.066	14.204
$\equiv 19$				31.858	12.449	40.976
$\equiv 20$				0	15.120	0
$\equiv 21$				17.728	30.739	8.924
$\equiv 22$				11.028	2.610	14.028
$\equiv 23$				50.038	15.410	46.825
$\equiv 24$					8.592	0
$\equiv 25$					34.180	8.782
$\equiv 26$					5.266	14.122
$\equiv 27$					23.824	39.996
$\equiv 28$					3.028	0
$\equiv 29$					18.140	8.814
$\equiv 30$						14.104
$\equiv 31$						45.223

Tabelle 4.3: Verteilung der Charakteristik von Dreiecken mit Durchmesser 1.009 modulo  $K$ .

ratsam. Wir haben jedoch festgestellt, dass die Verteilung der Charakteristiken von Dreiecken modulo  $K$  nicht wesentlich davon abhängt, wie viele Teiler der Durch-

messer hat. Für die unterschiedlichen Werte von  $K$  haben wir repräsentativ zwei Primzahlen 17 und 19, zwei Zweierpotenzen 16 und 32, und zwei Zahlen, 24 und 30, mit vielen Teilern ausgewählt. Wählt man  $K$  als Primzahl, so sind die Anzahlen der Dreiecke mit Charakteristik  $\neq 0$  alle ungefähr gleich groß, wobei die mittlere Abweichung vom Mittelwert ungefähr zwischen 2 und 3 Prozent und die maximale Abweichung vom Mittelwert ungefähr zwischen 6 und 7 Prozent liegt. Die Anzahl der Dreiecke mit Charakteristik  $\equiv 0 \pmod K$  weicht um ein Vielfaches von diesen Anzahlen ab. Ist dagegen  $K$  eine Zweierpotenz größer gleich 16, so ist ein sich alle 8 Schritte wiederholendes Muster erkennbar. Falls  $K$  keine Zweierpotenz, sondern nur ein Vielfaches von 8 ist, dann ist dieses Muster verwischt bzw. geht auch komplett unter, siehe hierzu z.B. die Werte für  $K = 24$  in Tabelle 4.2 und Tabelle 4.3. Für Werte von  $K$  mit vielen Teilern fällt es schwer überhaupt Regelmäßigkeiten zu entdecken. Als Erklärung mag dienen, dass die Regelmäßigkeiten für Primzahlen  $K$  in diesem Fall stark überlagert auftreten.

Die regelmäßigste Verteilung der Charakteristik der Dreiecke modulo  $K$  stellt sich demnach für Zweierpotenzen ein. Wir fassen noch je 8 aufeinander folgende Grenzen zu einem Container zusammen, so dass die Verteilung nicht nur regelmäßig, sondern die Container alle auch ungefähr gleich groß sind. Beispielhaft geben wir für Dreiecke mit Durchmesser 2.000 und  $K = 256$  die Größe der Container an:

62.890, 62.780, 62.845, 63.062, 63.389, 62.352, 62.600, 62.342, 62.336,  
62.755, 62.044, 62.764, 62.366, 62.695, 62.517, 62.300, 62.570, 62.847,  
62.385, 62.334, 61.897, 62.408, 61.983, 62.280, 62.227, 62.364, 62.908,  
62.065, 63.018, 62.257, 63.046, 62.374.

Die mittlere Abweichung  $\varpi_{2.000}(256)$  vom Mittelwert beträgt hier ein knappes halbes Prozent und die maximale Abweichung  $\overline{\varpi}_{2.000}(256)$  vom Mittelwert beträgt knapp 1,4 Prozent. Dieses Beispiel ist ein wenig zu günstig gewählt, da der Durchmesser 2.000 durch 2 teilbar ist, für ungerade Durchmesser sind die Abweichungen ein bisschen größer. Um ein besseres Gefühl für die schlechten Fälle zu bekommen definieren wir

$$\varpi_{d_1}^{d_2}(K) = \max_{d_1 \leq d \leq d_2} (\varpi_d(K)),$$

$$\overline{\varpi}_{d_1}^{d_2}(K) = \max_{d_1 \leq d \leq d_2} (\overline{\varpi}_d(K))$$

und geben in Tabelle 4.4 ein paar Werte an. Wir möchten erwähnen, dass wir für unsere praktischen Berechnungen (die Konstruktion der ganzzahligen planaren Punktmengen mit gegebenem Durchmesser)  $K \in \{2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7\}$  gewählt

haben, da wir mit  $K = 2^7$  und der pessimistischen und empirischen Abschätzung  $\overline{\omega} \leq 25\%$  auch für Durchmesser bis 20.000 mit ca. 180 MB Arbeitsspeicher auskommen. Zur Sicherheit überprüfen wir trotzdem, ob die Container überlaufen.

	$K = 2^4$	$K = 2^5$	$K = 2^6$	$K = 2^7$	$K = 2^8$	$K = 2^9$	$K = 2^{10}$
$\varpi_{1.000}^{1.100}(K)$	2,66%	4,79%	4,94%	5,39%	5,68%	5,89%	6,23%
$\overline{\varpi}_{1.000}^{1.100}(K)$	2,66%	6,86%	12,02%	12,78%	14,63%	17,04%	21,11%
$\varpi_{2.000}^{2.100}(K)$	2,59%	4,49%	4,60%	5,07%	5,35%	5,47%	5,55%
$\overline{\varpi}_{2.000}^{2.100}(K)$	2,59%	6,87%	10,75%	11,45%	13,27%	13,92%	14,76%
$\varpi_{4.000}^{4.100}(K)$	2,47%	4,33%	4,41%	4,95%	5,30%	5,39%	5,49%
$\overline{\varpi}_{4.000}^{4.100}(K)$	2,47%	6,76%	11,00%	11,36%	13,04%	13,43%	13,84%

Tabelle 4.4: Ausgewählte Werte von  $\varpi_{d_1}^{d_2}(K)$  und  $\overline{\varpi}_{d_1}^{d_2}(K)$ .

Nun stellt sich die Frage, ob man die empirisch festgestellte Verteilung der Charakteristiken von Dreiecken modulo 8 auch theoretisch erklären kann. Leider können wir an dieser Stelle diese Verteilung nicht theoretisch herleiten, zumindest nicht mit einer exakten Fehlerabschätzung. Wir überlassen es dem Leser als ungelöstes Problem, möchten aber erwähnen, dass wir sie prinzipiell, wenn auch nicht mit einem exakten mathematischen Anspruch, qualitativ erklären können. Hierzu sind allerdings ein paar Begriffsbildungen und heuristisch motivierte Näherungen notwendig, mit denen wir den Leser nicht langweilen möchten. Zum einen weil die Herleitung, wie schon erwähnt, nicht mathematisch exakt wäre, zum anderen weil sich damit z.B. die Anzahl, der ganzzahligen Dreiecke mit einem Durchmesser zwischen 8.000 und 8.007, deren Charakteristik äquivalent 7 modulo 8 ist, auch nur mit einem absoluten Fehler von gut 3% (empirischer Wert) bestimmen lassen.

Für höhere Dimensionen als  $m = 2$  könnte man natürlich ebenfalls entsprechende Untersuchungen für die Charakteristik  $C(\mathcal{S})$  eines  $m$ -dimensionalen Simplex anstellen. Da wir aber mit der uns zu Verfügung stehenden Rechenkraft nicht zu so hohen Durchmessern vordringen können, bei denen wir nicht mehr im Hauptspeicher nach der Charakteristik sortieren können, gehen wir in dieser Arbeit nicht weiter darauf ein.

### 4.3 Berechnung der Charakteristik

In Abschnitt 2.4 haben wir gesehen, dass die Charakteristik der quadratfreie Teil einer zum Teil sehr großen Zahl ist. Da bisher für das Bestimmen des quadratfreien

Teils einer Zahl kein wesentlich schnellerer Algorithmus als die Faktorisierung der Zahl gefunden wurde und die Faktorisierung großer Zahlen ein algorithmisch schweres Problem ist, wäre es von Vorteil die Cayley-Menger-Determinante in Faktoren zu zerlegen. Für 2-dimensionale ganzzahlige Punktmengen ist

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

eine solche Zerlegung. Für  $m > 2$  ist eine Zerlegung der Cayley-Menger-Determinante nicht nur nicht bekannt, sondern gar nicht möglich. Nach [31] ist die Cayley-Menger-Determinante für  $m \geq 3$  irreduzibel.

Wir möchten erwähnen, dass für den Fall  $m = 2$  die Bedingung

$$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) \geq 0$$

aus der Cayley-Menger-Determinante eine geschickte Zusammenfassung der Dreiecksungleichungen  $a + b \geq c$ ,  $a + c \geq b$  und  $b + c \geq a$  zu einer Ungleichung ist.

Da wir für  $m = 2$  eine nichttriviale Faktorzerlegung der Cayley-Menger-Determinante kennen, können wir sie benutzen, um die Charakteristiken sehr schnell zu berechnen. Hierzu berechnen wir die Primfaktorzerlegungen der quadratfreien Teile der natürlichen Zahlen kleiner gleich  $3d$  vor, wobei  $d$  hier der maximale Durchmesser ist, für den wir ganzzahlige Punktmengen konstruieren wollen. Dies geht in  $O(d\sqrt{d})$ , was wegen der  $o(d^2)$  Dreiecke mit Durchmesser  $d$ , siehe Kapitel 10, nicht ins Gewicht fällt. Da jeder der vier Faktoren der zweidimensionalen Cayley-Menger-Determinante kleiner gleich  $3d$  ist, können wir davon ausgehen, dass wir für jeden Faktor eine aufsteigend sortierte Liste der Primteiler seines quadratfreien Teils verfügbar haben. Für zwei quadratfreie Zahlen  $f_0$  und  $f_1$  ist eine Primzahl  $p$  genau dann ein Teiler des quadratfreien Teils von  $f_0 f_1$ , wenn sie genau eine der beiden Zahlen  $f_0$  und  $f_1$  teilt. Somit können wir die Primfaktorzerlegung vom quadratfreien Teil von  $f_0 f_1$  durch einen gleichzeitigen Durchlauf der entsprechenden Listen von  $f_0$  und  $f_1$  berechnen. Dies lässt sich mit einem Aufwand von  $O(L_0 + L_1)$  realisieren, wobei  $L_i$  jeweils die Länge der Liste ist. Da die Länge der Listen von der Anzahl  $\omega(f_0)$  bzw.  $\omega(f_1)$  der Primteiler von  $f_0$  bzw.  $f_1$  abhängt geben wir folgendes Lemma aus der Zahlentheorie an.

**4.3.1 Lemma** [75] *Für die Anzahl  $\omega(d)$  der Primteiler einer Zahl  $d$  gilt die Abschätzung*

$$\omega(d) \in O\left(\frac{\log d}{\log \log d}\right).$$

Insgesamt lässt sich die Berechnung der Charakteristik eines Dreiecks mit Durchmesser  $d$  in  $O\left(\frac{\log d}{\log \log d}\right)$  durchführen, wenn man die Primfaktorzerlegungen der Zahlen kleiner gleich  $3d$  bereits vorberechnet hat.

Da wir im Folgenden häufiger eine Abschätzung für die Anzahl  $\tau(d)$  der Teiler einer Zahl  $d$  benötigen, geben wir sie an dieser Stelle gleich mit an.

**4.3.2 Satz [75, Satz 317]** Für  $\varepsilon > 0$  und  $d > d_0(\varepsilon)$  gilt für die Anzahl  $\tau(d)$  der Teiler von  $d$

$$\tau(d) < 2^{(1+\varepsilon)\frac{\log d}{\log \log d}} \in O\left(d^{\frac{\varepsilon}{\log \log d}}\right).$$

Da es für  $m \geq 3$  keine nichttriviale Faktorzerlegung der Cayley-Menger-Determinante  $z = C(S)$  gibt, müssen wir den quadratfreien Teil direkt bestimmen. Eine Möglichkeit dazu ist es,  $C(S)$  in seine Primfaktoren zu zerlegen. Wir wollen jedoch zunächst eine andere Möglichkeit vorstellen, die für kleine  $z$  schneller ist.

### 4.3.3 Algorithmus (Quadratfreier Teil)

Eingabe:  $z$

Ausgabe: quadratfreier Teil von  $d$

**begin**

$s = z$

$r = 1$

**for**  $t$  **from** 2 **to**  $\lfloor \sqrt[3]{z} \rfloor$  **do**

$anz = 0$

**while**  $t|s$  **do**

$anz = anz + 1$

$s = \frac{s}{t}$

**end**

**if**  $anz \equiv 1 \pmod{2}$  **then**  $r = rt$  **end**

**end**

**if**  $\sqrt{s} \notin \mathbb{N}$  **then**  $r = rs$  **end**

**return**  $r$

**end**

Der Aufwand dieses Algorithmus beträgt  $O(\sqrt[3]{z})$ . Um seine Korrektheit zu beweisen betrachten wir  $s$  nach Durchlauf der for-Schleife. Da wir bereits durch alle Zahlen kleiner gleich  $\sqrt[3]{z}$  geteilt haben und  $s \leq z$ , sind alle Primfaktoren von  $s$  größer als  $\sqrt[3]{z}$  und  $s$  besitzt somit maximal zwei Primfaktoren. Folglich ist  $s$  genau dann nicht quadratfrei, wenn beide Primfaktoren gleich sind bzw.  $\sqrt{s} \in \mathbb{N}$  gilt.

Für große  $z$  geht die Bestimmung des quadratfreien Teils von  $z$  schneller, wenn man  $z$  vollständig faktorisiert. Wir bemerken, dass der triviale Faktorisierungsalgorithmus des Ausprobierens aller möglichen Teiler einen Aufwand von  $O(\sqrt{z})$  hat. Aber schon die nur ein wenig kompliziertere Pollard-Rho-Methode mit einem Aufwand von  $O(\sqrt[4]{z}(\log z)^2)$  schneller ist. Für einen Überblick über moderne Faktorisierungsverfahren verweisen wir auf [123, 148, 149].

In Abschnitt 4.5 werden wir feststellen, dass die Konstruktion der ganzzahligen Vierecke mit Durchmesser  $d$  im Mittel für jedes Dreieck mindestens einen Aufwand von  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  hat. Um die Gesamtkomplexität nicht zu erhöhen, genügt es somit einen Faktorisierungsalgorithmus mit einer Laufzeit von  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  zu benutzen. Derartige Algorithmen sind seit 1975 bekannt. Wir erwähnen hier nur die **Kettenbruch Methode** von Morrison und Brillhart [125] mit einer Komplexität von

$$O\left(z^{\sqrt{(2+o(1))\frac{\log \log z}{\log z}}}\right)$$

für die vollständige Faktorisierung einer Zahl  $z$  [145]. Benutzen wir die Abschätzung  $z < m^3 d^{2m}$  aus dem Beweis von Lemma 4.1.2, so ergibt sich nach ein paar Umformungen

$$O\left(m^4 \log d + m^{\frac{c}{\log \log d}} d^{\frac{mc}{\log \log d}}\right)$$

als obere Schranke für den Aufwand der Berechnung der Charakteristik  $z = C(\mathcal{S})$  eines  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Simplex  $\mathcal{S}$ , wobei sich der linke Summand aus der Berechnung der Cayley-Menger-Determinante ergibt. Betrachten wir  $m$  als konstant, so bleiben wir in der Größenordnung  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$ .

Wir möchten bemerken, dass die Existenz eines, in  $\log(z)$ , polynomialen Algorithmus zur Berechnung des quadratfreien Teils einer Zahl  $z$  ein berühmtes ungelöstes Problem aus der Zahlentheorie ist. Die Berechnung des Rings der ganzen Zahlen über einen algebraischen Zahlkörper lässt sich z.B. hierauf zurückführen [114, 144]. Es ist bisher nicht bekannt, ob die Bestimmung des quadratfreien Teils einer Zahl prinzipiell einfacher ist als die Berechnung der Primfaktorzerlegung.

## 4.4 Anzahl unterschiedlicher Charakteristiken

Aus Tabelle 2.1 konnte man die Vermutung ablesen, dass es größenordnungsmäßig nicht viel weniger unterschiedliche Charakteristiken als ganzzahlige Dreiecke mit

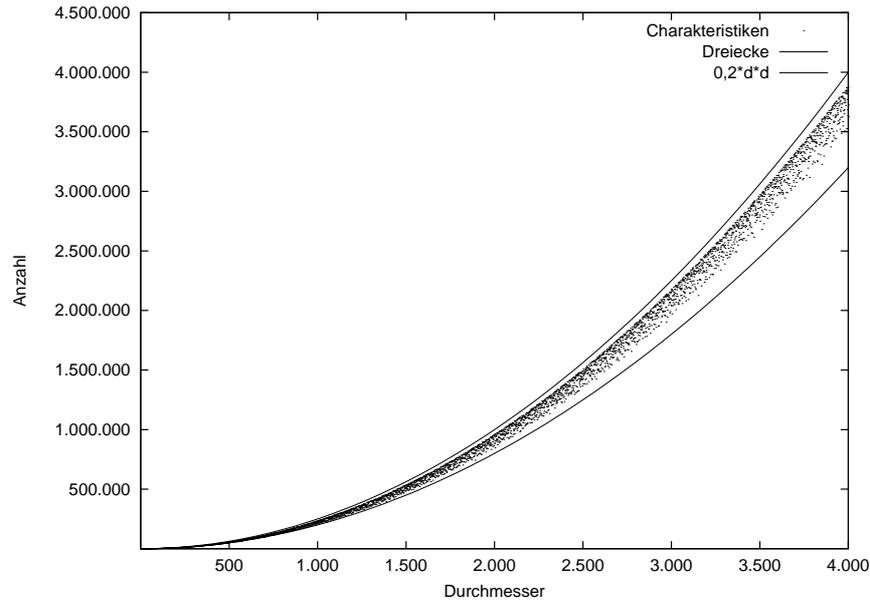


Abbildung 4.1: Anzahl unterschiedlicher Charakteristiken bei ganzzahligen Dreiecken.

Durchmesser  $d$  gibt. Das folgende Lemma beweist eine Aussage in diese Richtung, graphisch wird die Situation in Abbildung 4.1 dargestellt.

**4.4.1 Lemma** *Die Anzahl der verschiedenen Charakteristiken von ganzzahligen Dreiecken mit Durchmesser  $d$  ist in  $O(d^2)$  und in  $o\left(\frac{d^2}{\log^2 d}\right)$ .*

**Beweis.** Die Anzahl  $\left\lfloor \frac{(d+1)^2}{4} \right\rfloor$  der verschiedenen ganzzahligen Dreiecke mit Durchmesser  $d$  ist eine obere Schranke für die Anzahl verschiedener Charakteristiken. Wir wählen o.E.  $d$  hinreichend groß. Für die untere Schranke betrachten wir zwei Primzahlen  $p_1, p_2$  mit  $\frac{9}{4}d < p_1 < \frac{10}{4}d$  und  $\frac{5}{4}d < p_2 < \frac{6}{4}d$ . Wir setzen  $a = d$  und definieren  $b$  und  $c$  durch  $p_1 = a + b + c$  und  $p_2 = a + b - c$ . Aufgelöst nach  $b$  und  $c$  ergibt sich

$$b = \frac{p_1 + p_2}{2} - d, \text{ und } c = \frac{p_1 - p_2}{2}.$$

Da  $p_1$  und  $p_2$  für hinreichend großes  $d$  ungerade sein müssen, liefert die obige Festlegung natürliche Zahlen  $b$  und  $c$  mit

$$\frac{3}{4}d < b < d \text{ und } \frac{3}{8}d < c < \frac{5}{8}d.$$

Wegen  $b + c = p_1 - d > d = a$  bilden  $a, b$  und  $c$  somit ein ganzzahliges Dreieck mit Durchmesser  $d$  und  $a > b > c$ .

Da

$$\frac{3}{8}d < a - b + c < \frac{7}{8}d \text{ und } \frac{1}{8}d < -a + b + c < \frac{5}{8}d,$$

sind  $p_1 \neq p_2$  größer als  $a - b + c, -a + b + c$  und somit wird die Charakteristik des Dreiecks durch  $p_1 p_2$  geteilt. Nach dem Primzahlsatz haben wir für  $p_1$  und  $p_2$  je  $o\left(\frac{d}{\log d}\right)$  Wahlen, und es ergeben sich  $o\left(\frac{d^2}{\log^2 d}\right)$  verschiedene Charakteristiken.  $\square$

Anhand von Abbildung 4.1 stellen wir folgende Vermutung auf.

**4.4.2 Vermutung** Die Anzahl der verschiedenen Charakteristiken bei ganzzahligen Dreiecken mit Durchmesser  $d$  liegt in  $o(d^2)$ .

## 4.5 Anzahl von Dreiecken mit gleicher Charakteristik und gleichem Durchmesser

Mit dem Algorithmus aus Abschnitt 3.3 können wir ganzzahlige Vierecke in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $d$  konstruieren, indem wir Paare ganzzahliger Dreiecke mit Durchmesser  $d$  miteinander kombinieren. Da es nur  $O(d^2)$  ganzzahlige Dreiecke mit Durchmesser  $d$  gibt, hat der Algorithmus höchstens einen Aufwand von  $O(d^4)$ . Benutzt man noch zusätzlich Satz 2.4.1 so kann man den Aufwand reduzieren. Ziel dieses Abschnitts ist eine Abschätzung der Laufzeitkomplexität der Konstruktion ganzzahliger Vierecke in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $d$  unter Berücksichtigung der Charakteristik. Da wir nun nur noch Dreiecke mit gleicher Charakteristik und gleichem Durchmesser miteinander kombinieren, benötigen wir zur Laufzeitabschätzung die Anzahl  $\psi(d, k)$  der Dreiecke mit Charakteristik  $k$  und Durchmesser  $d$ .

**4.5.1 Lemma** Für quadratfreies  $k$  ist die Anzahl  $\psi(d, k)$  der Dreiecke mit Charakteristik  $k$  und Durchmesser  $d$  durch

$$\left| \left\{ (a, b) \mid \begin{array}{l} a, b \in \{1, 2, \dots, d\}, a + b > d, \\ \exists w \in \mathbb{N} : (a + b + d)(a + b - d)(a - b + d)(-a + b + d) = kw^2 \end{array} \right\} \right|$$

und für nicht quadratfreies  $k$  durch

$$\psi(d, k) = 0$$

gegeben.

Mit  $\tilde{\psi}(d)$  bezeichnen wir das Maximum  $\max_k \{\psi(d, k) \mid k \in \mathbb{N}\}$  von  $\psi$  über alle möglichen Charakteristiken. Setzt man voraus, dass die ganzzahligen Dreiecke mit Durchmesser  $d$  zusammen mit ihrer Charakteristik bereits berechnet sind, so beträgt die Laufzeit für Konstruktion der ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $d$  bis auf einen konstanten Faktor

$$\Psi(d) = \sum_k \binom{\psi(d, k) + 1}{2},$$

da alle Paare von Dreiecken mit gleichem Durchmesser und gleicher Charakteristik miteinander verschmolzen werden. Diese Summe können wir wie folgt abschätzen

$$\Psi(d) \leq \frac{\tilde{\psi}(d)(\tilde{\psi}(d) + 1)}{2} \frac{(d + 1)^2}{4\tilde{\psi}(d)} = \frac{(d + 1)^2(\tilde{\psi}(d) + 1)}{8}.$$

Unser Ziel ist es nun  $\tilde{\psi}(d) \in O\left(d^{1 + \frac{c}{\log \log d}}\right)$  zu beweisen, woraus wir eine Laufzeitabschätzung von  $O\left(d^{3 + \frac{c}{\log \log d}}\right)$  für die Konstruktion der ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $d$  folgern können. Im Anschluss an diesen sehr länglichen und technischen Beweis werden wir empirische Resultate für das Größenverhalten von  $\tilde{\psi}(d)$  und  $\Psi(d)$  angeben, die zeigen, dass unsere Abschätzung für  $\tilde{\psi}(d)$  relativ gut ist, wir aber  $\Psi(d)$  wohl um einen Faktor  $d$  zu grob abgeschätzt haben.

**4.5.2 Satz** *Es gilt  $\tilde{\psi}(d) \in O\left(d^{1 + \frac{c}{\log \log d}}\right)$ .*

Um Satz 4.5.2 beweisen zu können geben wir zunächst eine Parameterlösung für alle Dreiecke mit gleicher Charakteristik und gleichem Durchmesser an.

**4.5.3 Satz** [89] *Ein ganzzahliges Dreieck  $\Delta = (a, b, c)$  mit einer gegebenen Seite  $a$  hat genau dann die Charakteristik  $k$  falls sich die Seiten  $a, b, c$  darstellen lassen in der Form*

$$\begin{aligned} a &= ls(1 + kt^2), \\ b &= lt(1 + ks^2), \\ c &= l(s + t)(1 - kst) \\ &\text{mit } l, s, t \in \mathbb{Q}^+, kst < 1. \end{aligned}$$

**Beweis.** Siehe z.B. [87, 89]. □

Diese Parameterlösung können wir so umformulieren, dass nur noch natürliche Zahlen benutzt werden.

**4.5.4 Lemma** *Ein ganzzahliges Dreieck  $\Delta = (a, b, c)$  mit einer gegebenen Seite  $a$  hat genau dann die Charakteristik  $k$  falls sich die Seiten  $a, b, c$  darstellen lassen in der Form*

$$a = \frac{p}{q}h(i^2 + kj^2),$$

$$b = \frac{p}{q}i(h^2 + kj^2),$$

$$c = \frac{p}{q}(i + h)(ih - kj^2)$$

$$\text{mit } h, i, j \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(p, q) = \text{ggT}(h, i, j) = 1, ih > kj^2.$$

**Beweis.** Einsetzen von  $s = \frac{u}{v}$ ,  $t = \frac{x}{y}$  und  $l = \frac{puxv^2y^2}{q}$  mit natürlichen Zahlen  $u, v, x, y, p$  und  $q$  in die Parameterlösung von Satz 4.5.3 und Umformen liefert

$$a = \frac{pvx(u^2y^2 + ku^2x^2)}{q},$$

$$b = \frac{puy(v^2x^2 + ku^2x^2)}{q},$$

$$c = \frac{p(uy + xv)(uvxy - ku^2x^2)}{q}.$$

Setzen wir nun noch  $i = uy \in \mathbb{N}$ ,  $h = vx \in \mathbb{N}$  und  $j = ux \in \mathbb{N}$  so erhalten wir die im Lemma genannte Darstellung. Die Bedingung  $\text{ggT}(p, q) = \text{ggT}(h, i, j) = 1$  können wir o.E. fordern. Die Ungleichung  $ih > kj^2$  folgt aus  $kst < 1$  durch Multiplikation mit  $ux$  und Substitution der eben definierten Variablen. □

Da  $p$  teilerfremd zu  $q$  ist, muss  $p$  ein Teiler von  $a$  sein. Wir wählen  $a = d$  fest und betrachten die Anzahl der Teiler  $\tau(a)$  von  $a$ . Nach Satz 4.3.2 gibt es bei gegebenen  $a = d$  also nur  $O\left(d^{\frac{\tilde{c}}{\log d}}\right)$  Möglichkeiten für  $p$ , wobei  $\tilde{c}$  eine hinreichend große, von  $d$  unabhängige Konstante ist. Für  $h$  funktioniert dieses Argument nicht, da  $h$  nicht zu  $q$  teilerfremd sein muss, also zerlegen wir  $q$  in geeignete Faktoren. Im Folgenden verwenden wir stets die Bezeichnungen von Lemma 4.5.4 ohne es in den einzelnen Lemmata explizit zu erwähnen.

**4.5.5 Lemma** *Es existieren natürliche Zahlen  $q_1, q_2, k_1$  mit  $q = q_1q_2k_1$ ,  $\text{ggT}(q_1, q_2) = 1$ ,  $q_1|h$ ,  $q_2|i^2 + kj^2$  und  $k_1|k^2$ .*

**Beweis.** Wir setzen  $q'_1 = \text{ggT}(q, h)$ ,  $q'_2 = \text{ggT}(q, i^2 + kj^2)$  und definieren hiermit  $k_1 = \text{ggT}(q'_1, q'_2)$ . Aus  $a = \frac{ph(i^2+kj^2)}{q} \in \mathbb{N}$ ,  $b = \frac{pi(h^2+kj^2)}{q} \in \mathbb{N}$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$  schließen wir  $q|h(i^2 + kj^2)$  und  $q|i(h^2 + kj^2)$ . Mit  $q_1 = \frac{q'_1}{k_1}$  und  $q_2 = \frac{q'_2}{k_1}$  gilt somit  $q = q_1 q_2 k_1$  und  $\text{ggT}(q_1, q_2) = 1$ .

Da  $i(h^2 + kj^2)$  von  $q$  geteilt wird, existieren natürliche Zahlen  $r_1, r_2$  mit  $k_1 = r_1 r_2$ ,  $r_1|i$  und  $r_2|h^2 + kj^2$ . Wegen  $r_1|k_1|q'_2|i^2 + kj^2$  und  $r_1|i$  wird  $kj^2$  von  $r_1$  geteilt. Da  $r_1|k_1|q'_1|h$ ,  $r_1|i$  und  $\text{ggT}(h, i, j) = 1$  muss  $r_1$  zu  $j$  teilerfremd sein, es gilt also  $r_1|k$ .

Wegen  $r_2|k_1|q'_1|h$  und  $r_2|h^2 + kj^2$  schließen wir  $r_2|kj^2$ . Zusammen mit  $r_2|k_1|q'_2|i^2 + kj^2$  ergibt sich  $r_2|i^2$ . Da  $\text{ggT}(h, i, j) = 1$  muss  $r_2$  zu  $j$  teilerfremd sein und wir erhalten  $r_2|k$ .

Somit ergibt sich die letzte Teilaussage des Lemmas aus  $k_1 = r_1 r_2 |k^2$ .  $\square$

**4.5.6 Lemma** Für  $q$  existiert eine Faktorisierung  $q = w_1 w_2 w_3 w_4 k'$  mit paarweise teilerfremden Zahlen  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , einer natürlichen Zahl  $k'|k^8$  und  $\text{ggT}(w_4, h) = \text{ggT}(w_4, i) = \text{ggT}(w_2, k) = \text{ggT}(w_3, k) = \text{ggT}(w_4, k') = 1$ .

**Beweis.** Analog zu Lemma 4.5.5 existieren natürliche Zahlen  $q_3, q_4, k_2$  mit  $q = q_3 q_4 k_2$ ,  $\text{ggT}(q_3, q_4) = 1$ ,  $q_3|i$ ,  $q_4|h^2 + kj^2$  und  $k_2|k^2$ . Aus

$$q = q_1 q_2 k_1 = q_3 q_4 k_2 \quad \text{und} \quad \text{ggT}(q_1, q_2) = \text{ggT}(q_3, q_4) = 1$$

schließen wir, dass es natürliche Zahlen  $w_1, w'_2, w'_3, w'_4, k'_1, k''_1, k'_2$  und  $k''_2$  gibt die

$$q_1 = w_1 w'_2 k'_2, \quad q_2 = w'_3 w'_4 k''_2, \quad q_3 = w_1 w'_3 k'_1, \quad q_4 = w'_2 w'_4 k''_1, \quad k_2 | k'_2 k''_2 \quad \text{und} \quad k_1 | k'_1 k''_1$$

erfüllen.

Wir setzen  $\tilde{k} = k_1 k'_2 k''_2 = k_2 k'_1 k''_1$  und erhalten  $q = w_1 w'_2 w'_3 w'_4 \tilde{k}$ . Da  $k_2$  von  $k'_2 k''_2$  geteilt wird, gilt  $k|k_1 k_2 |k^4$ .

Nun betrachten wir  $g_1 = \text{ggT}(w'_4, i)$  und  $g_2 = \text{ggT}(w'_4, h)$ . Da  $g_1|i$  und  $g_1|w'_4|q_2|i^2 + kj^2$  wird  $kj^2$  von  $g_1$  geteilt. Wegen  $g_1|w'_4|q_4|h^2 + kj^2$  wird  $h^2$  von  $g_1$  geteilt und mit  $\text{ggT}(h, i, j) = 1$  erhalten wir  $g_1|k$ . Analog erhalten wir  $g_2|k$ . Dies erlaubt uns  $w_4 = \frac{w'_4}{\text{kgV}(g_1, g_2)}$  zu definieren.

Wegen  $w'_2|q_1|h$  und  $w'_2|q_4|h^2 + kj^2$  gilt  $w'_2|kj^2$ . Also können wir  $g_3 = \text{ggT}(w'_2, k)$  und  $w_2 = \frac{w'_2}{g_3}$  setzen, so dass  $\text{ggT}(w_2, k) = 1$  gilt. Analog setzen wir  $w_3 = \frac{w'_3}{g_4}$  mit  $g_4 = \text{ggT}(w'_3, k)$  und es gilt  $\text{ggT}(w_3, k) = 1$ .

Wir setzen  $k' = \tilde{k} \text{kgV}(g_1, g_2) g_3 g_4 |k^8$ . Nach Definition von  $w_4, w_2$  und  $w_3$  gilt  $\text{ggT}(w_4, h) = \text{ggT}(w_4, i) = \text{ggT}(w_2, k) = \text{ggT}(w_3, k) = 1$ . Aus  $\text{ggT}(q_1, q_2) =$

$\text{ggT}(q_3, q_4) = 1$  können wir schließen, dass  $w_1, w_2, w_3$  und  $w_4$  paarweise teilerfremd sind.

Wegen  $k_1|q'_1|h$  und  $k_2|q'_3|i$  gilt  $\tilde{k}|k_1k_2|ih$ . Weiter haben wir  $g_1|i, g_2|h, g_3|w'_2|q_1|q'_1|h$  und  $g_4|w'_3|q_3|q'_3|i$ . Mit  $\tilde{k}|k_1k_2$  können wir somit

$$k' = \tilde{k}gV(g_1, g_2)g_3g_4|(ih)^3$$

folgern. Da  $w_4$  teilerfremd zu  $i$  und  $h$  ist, gilt somit  $\text{ggT}(w_4, k') = 1$ .  $\square$

Nachdem wir nun  $q$  in geeignete Faktoren zerlegt haben, beweisen wir noch zwei Lemmata über  $w_4$  den, wie sich später herausstellen wird, kritischen Faktor von  $q$ .

**4.5.7 Lemma**

$$w_4|2(i + h).$$

**Beweis.** Wir betrachten  $ai - bh = \frac{pih(i+h)(i-h)}{q}$  und folgern  $w_4|(i - h)(i + h)$  da  $w_4$  teilerfremd zu  $p, i$  und  $h$  ist. Nun nehmen wir an  $r$  sei ein Primteiler von  $i - h$  der teilerfremd zu  $i + h$  ist. Wegen  $r|w_4|a, b, c$  und da  $r$  teilerfremd zu  $p, i, h$  und  $i + h$  ist gilt  $r|i^2 + kj^2, r|h^2 + kj^2$  und  $r|ih - kj^2$ . Somit würde  $r|(i^2 + kj^2) + (h^2 + kj^2) + 2(ih - kjh^2) = (i + h)^2$  folgern, ein Widerspruch zur Teilerfremdheit von  $r$  und  $i + h$ . Jeder Teiler von  $w_4$  der  $i - h$  teilt, teilt somit auch  $i + h$ . Wegen  $\text{ggT}(i - h, i + h)|2i$  gilt  $w_4|2(i + h)$ .  $\square$

**4.5.8 Lemma**

$$w_4 \leq 8d.$$

**Beweis.** Um die Ungleichung zu beweisen zeigen wir  $w_4|8c$ . Aus  $w_4|2(i + h)$  schließen wir  $w_4|2(i^2 + kj^2) + 2(h^2 + kj^2) - 2(i + h)^2 = 4(kj^2 - ih)$ . Damit gilt

$$w_4|p \cdot 2(i + h) \cdot \frac{4(ih - kj^2)}{w_4} = 8cw_1w_2w_3k'.$$

Nach Lemma 4.5.6 ist  $w_4$  teilerfremd zu  $w_1, w_2, w_3$  und  $k'$ , somit gilt  $w_4|8c$ .  $\square$

Ziel der letzten Lemmata war es eine Faktorisierung von  $q$  zu finden, um die Möglichkeiten für möglichst viele Variable, bei gegebenem  $a = d$  durch  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  abschätzen zu können. Im nächsten Lemma nutzen wir nun diese Faktorisierung, um eine, für unsere Zwecke, besser geeignete Parameterlösung der Dreiecke mit gegebenen Durchmesser und gegebener Charakteristik anzugeben.

**4.5.9 Lemma** Jedes ganzzahlige Dreieck  $\Delta = (a, b, c)$  mit einer gegebenen Seite  $a$  und gegebener Charakteristik  $k$  lässt sich darstellen in der Form

$$\begin{aligned} a &= \frac{p\alpha\kappa_1((\beta w_1 v \kappa_2)^2 + k(\gamma st)^2)}{w_4 k'} \\ b &= \frac{p\beta s \kappa_2((\alpha w_1 t \kappa_1)^2 + k(\gamma uv)^2)}{w_4 k'} \\ c &= \frac{p(\alpha st^2 \kappa_1 + \beta uv^2 \kappa_2)(\alpha \beta w_1^2 \kappa_1 \kappa_2 - k\gamma^2 su)}{w_4 k'} \end{aligned}$$

mit  $p, q, s, t, u, v, w_1, w_2, \alpha, \beta, \gamma, \kappa_1, \kappa_2, k' \in \mathbb{N}$ . Weiter muss  $k' | k^8$  gelten und  $s, t, u, v, \alpha, \beta, \kappa_1, \kappa_2$  müssen teilerfremd zu  $w_4$  sein.

**Beweis.** Wir benutzen die Faktorzerlegung von  $q$  aus Lemma 4.5.6 und setzen

$$w_2 = st^2 \quad \text{und} \quad w_3 = uv^2$$

mit quadratfreien Zahlen  $s, u$  und natürlichen Zahlen  $t, v$ .

Die Variable  $h$  wird von den zwei teilerfremden Zahlen  $w_1$  und  $w_2$  geteilt, sie lässt sich also schreiben als  $h = w_1 w_2 \alpha \kappa_1$  mit  $\kappa_1 | k'$  und  $\text{ggT}(\alpha, k') = 1$ . Analog lässt sich  $i$  schreiben als  $i = w_1 w_3 \beta \kappa_2$  mit  $\kappa_2 | k'$  und  $\text{ggT}(\beta, k') = 1$ . Aus dem Beweis von Lemma 4.5.6 wissen wir, dass  $j^2$  von  $w_2$  und  $w_3$  geteilt wird. Zusammen mit  $\text{ggT}(w_2, w_3) = 1$  können wir folgern, dass  $j$  von  $stuv$  geteilt wird. Wir können also  $j$  schreiben als  $j = stuv\gamma$ . Setzen wir noch  $w_2 = st^2$  und  $w_3 = uv^2$  ein, so erhalten wir

$$h = w_1 st^2 \alpha \kappa_1, \quad i = w_1 uv^2 \beta \kappa_2 \quad \text{und} \quad j = stuv\gamma.$$

Einsetzen dieser drei Gleichungen und  $q = w_1 w_2 w_3 w_4 k' = w_1 st^2 uv^2 w_4 k'$  in die Parameterlösung von Lemma 4.5.4 liefert

$$\begin{aligned} a &= \frac{p\alpha\kappa_1 u((w_1 v \beta \kappa_2)^2 + k(st\gamma)^2)}{w_4 k'}, \\ b &= \frac{p\beta\kappa_2 s((w_1 t \alpha \kappa_1)^2 + k(uv\gamma)^2)}{w_4 k'}, \\ c &= \frac{p(uv^2 \beta \kappa_2 + st^2 \alpha \kappa_1)(w_1^2 \alpha \beta \kappa_1 \kappa_2 - ksu\gamma^2)}{w_4 k'}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.5.6 gilt  $k' | k^8$  und  $\text{ggT}(w_4, i) = \text{ggT}(w_4, h) = \text{ggT}(w_4, w_2) = \text{ggT}(w_4, w_3) = 1$ , somit ist  $w_4$  teilerfremd zu  $s, t, u, v, \alpha, \beta, \kappa_1, \kappa_2$ .  $\square$

Ähnlich zu Satz 4.3.2 gibt es auch eine Abschätzung über die Anzahl der ganzzahligen Lösungen  $(x, y)$  von  $m = x^2 + ky^2$ .

**4.5.10 Lemma** Die ganzzahlige quadratische Form  $m = x^2 + ky^2$  besitzt höchstens  $m^{\frac{\tilde{c}}{\log \log m}}$  Lösungen  $(x, y)$ , mit einer von  $k$  und  $m$  unabhängigen Konstante  $\tilde{c}$ .

**Beweis.** In [170] wird sogar ein Algorithmus zur Berechnung der Lösungen angegeben, aus dem man diese Abschätzung ableiten kann, ansonsten verweisen wir auf z.B. [11].  $\square$

Nach diesen ganzen technischen Lemmata können wir nun endlich Satz 4.5.2 über die Anzahl von Dreiecken mit gegebenem Durchmesser und gegebener Charakteristik beweisen.

**Beweis von Satz 4.5.2.** Wir benutzen die vollständige Parameterlösung aus Lemma 4.5.9 und nehmen  $a = d$  als gegeben an. Da  $k'$  ein Teiler von  $k^8$  ist und nach Lemma 4.1.1  $k^8 \leq 3^8 d^{32}$  ist, gibt es für  $k'$  maximal  $O\left(d^{\frac{\tilde{c}}{\log \log d}}\right)$  Möglichkeiten und wir können  $k'$  als fest voraussetzen. Da  $p, \alpha, u$  und  $\kappa_1$  teilerfremd zu  $w_4$  sind, sind sie Teiler von  $ak' \leq 3^8 d^{33}$ . Somit gibt es nach Satz 4.3.2 höchstens  $O\left(d^{\frac{\tilde{c}}{\log \log d}}\right)$  Möglichkeiten für  $p, \alpha, u$  und  $\kappa_1$ .

Der verbleibende Term  $m = (\beta w_1 v \kappa_2)^2 + k(\gamma st)^2$  muss leider nicht teilerfremd zu  $w_4$  sein und so wissen wir nur, dass  $aw_4 k'$  von  $w_4$  geteilt wird. Nach Lemma 4.5.7 gibt es für  $w_4$  maximal  $O(d)$  Möglichkeiten, so dass es nach Satz 4.3.2 maximal  $O\left(d^{1+\frac{\tilde{c}}{\log \log d}}\right)$  Möglichkeiten für  $m$  gibt. Nun setzen wir  $x = \beta w_1 v \kappa_2$ ,  $y = \gamma st$  und nach Lemma 4.5.10 folgt, dass es bei gegebenem  $m \leq 3^8 d^{34}$  maximal  $O\left(d^{\frac{\tilde{c}}{\log \log d}}\right)$  Lösungen  $(x, y)$  für  $m = x^2 + ky^2$  gibt. Da die restlichen Variablen  $\beta, w_1, v, \kappa_2, \gamma, s, t$  Teiler von  $x$  bzw.  $y$  sind, ergibt sich die Aussage des Satzes aus einer weiteren Anwendung von Satz 4.3.2.  $\square$

Wie bereits am Anfang dieses Abschnittes angekündigt folgen nun ein paar empirische Daten für  $\tilde{\psi}(d)$  und  $\Psi(d)$ . In Abbildung 4.2 haben wir die Werte  $\tilde{\psi}(d)$  für  $d \leq 4.000$  als Punkte aufgetragen. Da  $\tilde{\psi}(d)$  eine sehr unregelmäßige Funktion ist, haben wir die Funktion

$$\hat{\psi}(d) = \max_{d' \leq d} \tilde{\psi}(d')$$

als begrenzende Linie hinzugefügt. Aus Abbildung 4.2 lesen wir ab, dass sich  $\hat{\psi}(d)$  ungefähr wie eine Gerade verhält.

In Abbildung 4.3 haben wir  $\frac{\Psi(d)}{d^2}$  aufgetragen, wiederum mit einer zusätzlichen begrenzenden Linie. Diese begrenzende Linie suggeriert eine sehr langsam wachsende obere Schranke.

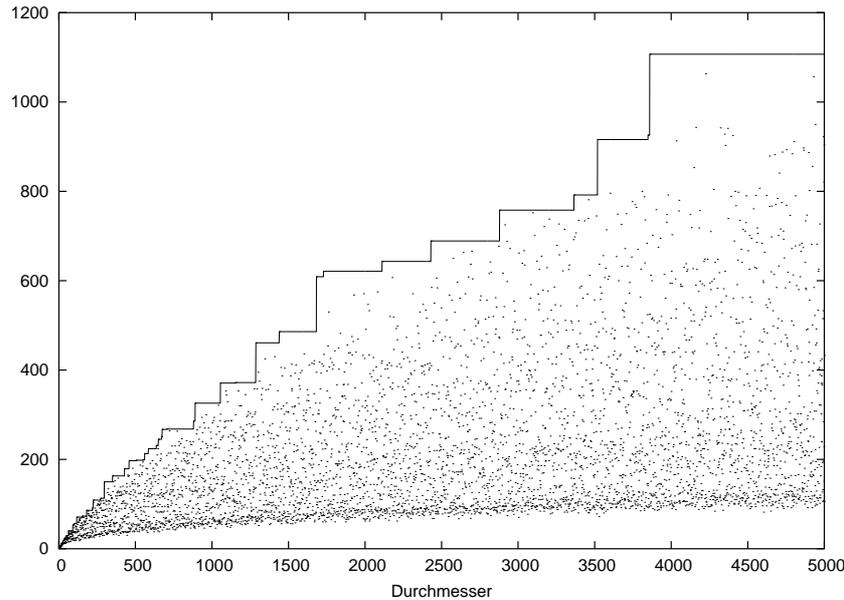


Abbildung 4.2: Maximale Anzahl  $\tilde{\psi}(d)$  von ganzzahligen Dreiecken mit Durchmesser  $d$  und gleicher Charakteristik für  $d \leq 5.000$ .

#### 4.5.11 Vermutung

$$\Psi(d) \in O\left(d^{2+\frac{c}{\log \log d}}\right)$$

Mit Hilfe von Vermutung 4.5.11 können wir zeigen, dass der Aufwand zur Konstruktion der ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $d$  maximal  $O\left(d^{2+\frac{c}{\log \log d}}\right)$  beträgt. Streng beweisen können wir allerdings nur  $O\left(d^{3+\frac{c}{\log \log d}}\right)$ . Für ganzzahlige Vierecke in allgemeiner Lage gelten dieselben Abschätzungen, da wir den Test, ob vier Punkte auf einem Kreis liegen, in konstanter Zeit durchführen können.

In Abschnitt 5.2 zeigen wir, dass auf jeder Seite eines ganzzahligen Dreiecks mit Durchmesser  $d$  höchstens  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  Punkte mit ganzzahligen Abständen zu den drei Eckpunkten liegen. Weiter geben wir dort auch einen Algorithmus an, mit dem man diese Punkte mit einem Aufwand von  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  bestimmen kann. Wenn wir die ganzzahligen Vierecke mit Durchmesser  $d$  konstruieren

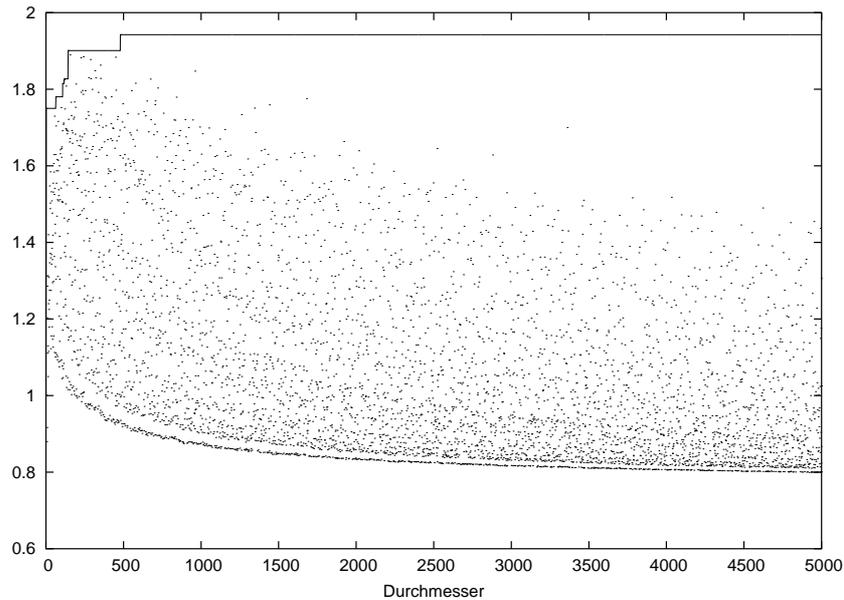


Abbildung 4.3: Quotient von  $\Psi(d)$  und  $d^2$  für  $d \leq 5.000$  mit begrenzender oberer Schranke.

ren wollen, können wir einfach die möglichen Dreiecke mit Durchmesser  $d$  und gleicher Charakteristik kombinieren. Zusätzlich müssen wir noch die Möglichkeiten betrachten, bei denen genau drei Punkte auf einer Geraden liegen. Hierzu können wir die ganzzahligen Dreiecke durchlaufen und bei jedem Dreieck auf jeder Seite die Möglichkeiten betrachten einen Punkt, mit ganzzahligen Abständen zu den Eckpunkten des Dreiecks, einzufügen. Es ergibt sich ein Aufwand von  $O\left(d^{2+\frac{c}{\log \log d}}\right)$ , wenn wir Vermutung 4.5.11 benutzen. Ohne diese Vermutung können wir den Aufwand wiederum nur mit  $O\left(d^{3+\frac{c}{\log \log d}}\right)$  abschätzen. Der eben skizzierte Algorithmus zur Konstruktion von ganzzahligen Vierecken mit Durchmesser  $d$  lässt sich mit ein paar technischen Modifizierungen in einen ordnungstreuen Algorithmus umwandeln.



## 5 Minimale Durchmesser von planaren Punktmenge

Den größten Abstand zweier Punkte in einer Punktmenge  $\mathcal{P}$  bezeichnen wir als seinen **Durchmesser**  $\text{diam}(\mathcal{P})$ . Bei ganzzahligen Punktmenge ist man natürlicherweise an den minimalen Durchmessern interessiert, die es für eine gegebene Dimension  $m$  und eine gegebene Anzahl  $n$  an Punkten geben kann. Den minimalen Durchmesser von  $m$ -dimensionalen Punktmenge aus  $n$  Punkten mit paarweise ganzzahligen Abständen bezeichnen wir mit  $d(m, n)$ . Hierbei soll  $m$ -dimensional bedeuten, dass nicht alle  $n$  Punkte in einer Hyperebene des  $\mathbb{E}^m$  liegen. Die minimalen Durchmesser von  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmenge aus  $n$  Punkten in semi-allgemeiner bzw. allgemeiner Lage bezeichnen wir mit  $\bar{d}(m, n)$  bzw.  $\dot{d}(m, n)$ . Hierbei setzen wir stets  $n > m$  voraus, da weniger Punkte keinen  $m$ -dimensionalen Raum aufspannen.

Da die Existenz von ganzzahligen Punktmenge in semi-allgemeiner bzw. allgemeiner Lage bisher nur in Spezialfällen gezeigt werden konnte, definieren wir  $\bar{d}(m, n)$  bzw.  $\dot{d}(m, n)$  als  $\infty$ , falls es keine derartige Punktmenge gibt. In Kapitel 9 zeigen wir zumindest konstruktiv die Existenz von  $d(m, n)$ ,  $\bar{d}(m, m+1)$ ,  $\bar{d}(m, m+2)$ ,  $\dot{d}(m, m+1)$  und  $\dot{d}(m, m+2)$ . Aus Satz 1.1.2 folgt die Existenz von  $\bar{d}(2, n)$  für beliebige  $n \geq 3$ .

Mit der Definition des minimalen Durchmessers als  $\infty$  im Falle der Nichtexistenz gilt

$$d(m, n) \leq \bar{d}(m, n) \leq \dot{d}(m, n)$$

und die drei Funktionen sind schwach monoton wachsend in  $n$ . Man könnte vermuten, dass sie in  $m$  schwach monoton fallend sind. Es gilt aber z.B.

$$\bar{d}(2, 7) = 33 < 44 = \bar{d}(3, 7).$$

## 5.1 Minimale Durchmesser ganzzahliger planarer Punktmenge

Wir betrachten nun die Folge  $d(2, n)$  der minimalen Durchmesser ganzzahliger planarer Punktmenge. Aus [66] entnehmen wir

$$(d(2, n))_{n=3, \dots, 9} = 1, 4, 7, 8, 17, 21, 29.$$

In Abbildung 5.1 sind die entsprechenden Punktmenge dargestellt, wobei es für  $n = 4$  und  $n = 7$  zwei minimale Beispiele gibt. Der geneigte Leser ist gerne

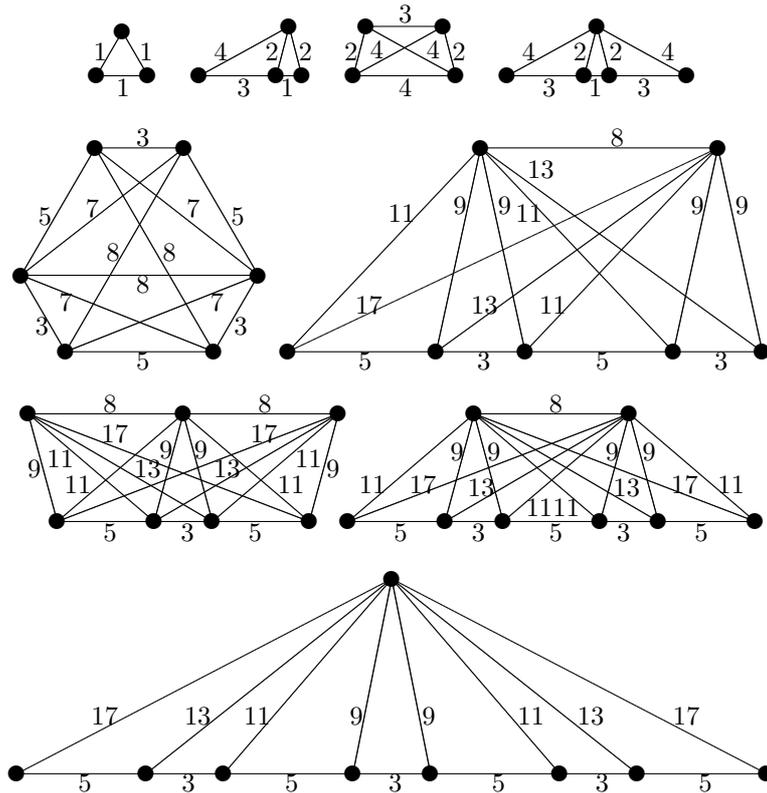


Abbildung 5.1: Punktmenge mit minimalem Durchmesser für  $3 \leq n \leq 9$ .

dazu eingeladen ein Muster in diesen minimalen Beispielen zu entdecken und zu versuchen das qualitative Aussehen der minimalen Punktmenge für größere  $n$  vorherzusagen.

Es ist sicherlich sehr schwierig, wenn nicht gar unmöglich in diesen ersten paar Beispielen ein Muster zu entdecken. Erst mit weiteren Werten und den zugehörigen Punktmenge konnten wir zu einer realistischen Vermutung kommen. Um nun weitere Werte von  $d(2, n)$  zu erhalten wurden die Algorithmen aus Kapitel 3 implementiert. Die Konstruktion sämtlicher planarer Punktmenge mit einem Durchmesser kleiner gleich 400 liefert

$$(d(2, n))_{n=10, \dots, 29} = 40, 51, 63, 74, 91, 104, 121, 134, 153, 164, 196, \\ 212, 228, 244, 272, 288, 319, 332, 364, 396.$$

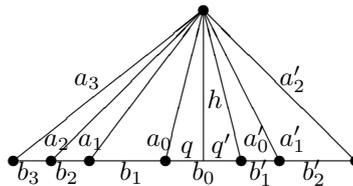


Abbildung 5.2: Planare Punktmenge mit  $n - 1$  Punkten auf einer Geraden.

Schaut man sich nun die entsprechenden minimalen Beispiele an, so stellt man fest, dass jeweils  $n - 1$  Punkte auf einer Geraden liegen. Als abkürzende Notation beschreiben wir derartige Punktmenge (Abbildung 5.2) durch zwei Zeilenvektoren. In der ersten Zeile stehen die Abstände zwischen benachbarten Punkten auf der Gerade mit den  $n - 1$  Punkten, und in der zweiten Zeile stehen die restlichen Abstände. Um die Darstellung eindeutig zu machen wählen wir noch  $b_s \geq b'_t$ .

$$\left( \begin{array}{cccccccc} b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 & b'_1 & \cdots & b'_t \\ a_s & a_{s-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a'_0 & \cdots & a'_{t-1} & a'_t \end{array} \right)$$

Abbildung 5.3: Kompakte Darstellung von planaren Punktmenge mit  $n - 1$  Punkten auf einer Geraden.

Mit Hilfe dieser Notation können wir die planaren Punktmenge mit minimalem Durchmesser für  $9 \leq n \leq 12$  wie folgt angeben.

$$n = 9 : \left( \begin{array}{cccccc} 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
n = 10 : & \left( \begin{array}{cccccccc} 11 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 27 & 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 \end{array} \right) \\
n = 11 : & \left( \begin{array}{cccccccccc} 11 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 11 \\ 27 & 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 & 27 \end{array} \right) \\
n = 12 : & \left( \begin{array}{cccccccccc} 11 & 7 & 5 & 7 & 5 & 4 & 5 & 7 & 5 & 7 \\ 43 & 34 & 29 & 26 & 23 & 22 & 22 & 23 & 26 & 29 & 34 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

Aus Platzgründen geben wir die weiteren minimalen planaren ganzzahligen Punktmengen mit  $13 \leq n \leq 29$  im Anhang A.1 an.

Bei den minimalen ganzzahligen planaren Punktmengen mit  $9 \leq n \leq 29$  liegen also immer  $n - 1$  Punkte auf einer Geraden. Gilt diese Entdeckung nur für kleine Werte von  $n$ ? Oder gibt es Gründe dafür, dass bei minimalen planaren ganzzahligen Punktmengen immer ziemlich viele Punkte auf einer Geraden liegen?

Eine erste mögliche Begründung liegt im Satz von Erdős und Anning (1.1.1). Der tiefere Grund liegt aber, zumindest nach Meinung des Autors, in Satz 2.4.3 über die Charakteristik einer Punktmenge bzw. in seinem planaren Spezialfall Satz 2.4.1. In Abschnitt 4.5 haben wir empirisch gesehen bzw. bewiesen, dass es nicht allzu viele Dreiecke mit gleichem Durchmesser und gleicher Charakteristik gibt, gemessen an der Zahl der ganzzahligen Dreiecke mit gleichem Durchmesser.

Minimale planare ganzzahlige Punktmengen sind also gezwungen, möglichst wenig unterschiedliche Dreiecke mit gleicher Charakteristik zu verwenden. Entweder dadurch, dass sie identische Teildreiecke häufiger enthalten, oder dadurch, dass sie möglichst wenige, nicht zu einer Strecke degenerierte, Dreiecke enthalten.

Die minimale Anzahl nicht degenerierter Dreiecke einer planaren Punktmenge aus  $n$  Punkten, wird durch Punktmengen erreicht bei denen  $n - 1$  Punkte auf einer Geraden liegen. Dieses Minimum beträgt  $\binom{n-1}{2}$ . Das Maximum  $\binom{n}{3}$  wird von Punktmengen in allgemeiner oder semi-allgemeiner Lage erreicht und ist somit eine ganze Größenordnung größer.

Motiviert durch diese Überlegungen und die bisher bekannten minimalen Beispiele kommen wir zu der folgenden Vermutung.

**5.1.1 Vermutung** *Bei einer planaren ganzzahligen Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit  $n \geq 9$  Punkten und mit  $\text{diam}(\mathcal{P}) = d(2, n)$  liegen  $n - 1$  Punkte auf einer Geraden.*

Eine schwächere Version dieser Vermutung wäre  $n - 1$  durch  $n - \kappa$  für ein festes  $\kappa$  zu ersetzen.

Anstatt nun die ersten paar Werte von  $d(2, n)$  zu berechnen, kann man auch die Größenordnung dieser Funktion untersuchen. In Abschnitt 5.5 werden wir zeigen, dass

$$\bar{d}(2, n) \leq n^{c \log \log n}$$

und somit auch

$$d(2, n) \leq n^{c \log \log n}$$

gilt [67]. In die andere Richtung konnte Solymosi [162] vor kurzem

$$d(2, n) \geq cn$$

beweisen.

Im nächsten Abschnitt wollen wir für den Spezialfall von planaren ganzzahligen Punktmengen mit *vielen* Punkten auf einer Geraden, eine untere Schranke in der Form der besten bekannten oberen Schranke für den minimalen Durchmesser beweisen. Wobei hier *viel* mindestens  $o(n^\rho)$  für eine feste Zahl  $\rho > 0$  bedeuten soll.

## 5.2 Ganzzahlige Punktmengen mit $n - 1$ Punkten auf einer Geraden

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt legen eine Beschäftigung mit planaren ganzzahligen Punktmengen nahe, bei denen  $n - 1$  Punkte auf einer Gerade liegen, siehe auch [103]. Hier soll ein Algorithmus entwickelt werden, mit dem man diese speziellen Punktmengen effizient erzeugen kann, um gute obere Schranken, oder gemäß unserer Vermutung u.U. die exakten Werte, von  $d(2, n)$  zu berechnen. Ausgehend von der Annahme, dass bei planaren ganzzahligen Punktmengen mit minimalem Durchmesser, für ein beliebiges festes  $\rho > 0$ , mindestens  $n^\rho$  Punkte auf einer Geraden liegen, können wir zeigen, dass  $d(2, n) \geq n^{c\rho \log \log n}$ , also einen Ausdruck ähnlich der besten bisher bekannten oberen Schranke, gilt.

Betrachten wir hierzu nun Abbildung 5.2 und setzen

$$c_i = q + \sum_{j=1}^i b_j \quad \text{für } 0 \leq i \leq s$$

bzw.

$$c'_i = q' + \sum_{j=1}^i b'_j \quad \text{für } 0 \leq i \leq t.$$

Die Anwendung des Satzes von Pythagoras liefert

$$c_{i+1}^2 + h^2 = a_{i+1}^2$$

und

$$c_i^2 + h^2 = a_i^2$$

für  $0 \leq i < s$ . Zieht man diese Gleichungen voneinander ab, so erhält man

$$b_{i+1}^2 + 2b_{i+1} \sum_{j=1}^i b_j + 2b_{i+1}q = a_{i+1}^2 - a_i^2.$$

Da die  $a_i$  und  $b_i$  natürliche Zahlen sind gilt  $2b_{i+1}q \in \mathbb{N}$  für  $0 \leq i < s$  und wir folgern  $2\text{ggT}(b_1, b_2, \dots, b_s)q \in \mathbb{N}$ . Aus  $q + q' = a_0 \in \mathbb{N}$  schließen wir  $2\text{ggT}(b_1, b_2, \dots, b_s)q' \in \mathbb{N}$ . Wenden wir die analoge Schlussweise auch auf die rechte Seite des Fußpunktes von  $h$  an und definieren

$$g = 2\text{ggT}(b_1, \dots, b_s, b'_1, \dots, b'_t),$$

so erhalten wir

$$gq \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad gq' \in \mathbb{N}.$$

Nach einem letzten Anwenden des Satzes von Pythagoras erhalten wir für alle  $1 \leq i \leq s$  und für alle  $1 \leq j \leq t$  eine Zerlegung von  $g^2h^2$  in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen,

$$g^2h^2 = (ga_i + gc_i)(ga_i - gc_i) = (ga'_j + gc'_j)(ga'_j - gc'_j).$$

Wir wollen nun diese Zerlegung und Satz 4.3.2 über die Anzahl  $\tau(d)$  der Teiler einer Zahl benutzen, um eine Schranke für den Durchmesser einer planaren ganzzahligen Punktmenge zu beweisen.

**5.2.1 Satz** *Ist  $\mathcal{P}$  eine planare ganzzahlige Punktmenge, bei der auf einer Geraden mindestens  $n^\ell$  Punkte liegen, so gilt*

$$\text{diam}(\mathcal{P}) \geq n^{\frac{\ell}{4 \log 2(1+\varepsilon)}} \log \log n$$

für  $\varepsilon > 0$  und  $n \geq n_0(\varepsilon)$ .

**Beweis.** Mit obigen Bezeichnungen haben wir wegen  $h \leq \text{diam}(\mathcal{P})$  und  $g \leq 2 \text{diam}(\mathcal{P})$ ,

$$g^2h^2 \leq 4 \text{diam}(\mathcal{P})^4.$$

Wir wählen eine Gerade mit  $n^\ell$  Punkten und folgern aus der Zerlegung von  $g^2h^2$ , dass  $\tau(g^2h^2) \geq \frac{n^\ell - 3}{2}$  gilt. Mit obiger Abschätzung für  $g^2h^2$  und Satz 4.3.2 folgern wir

$$2^{\frac{(1+\varepsilon') \log \text{diam}(\mathcal{P})^4}{\log \log \text{diam}(\mathcal{P})^4}} \geq \frac{n^\ell - 3}{2}$$

für  $n \geq n'_0(\varepsilon')$ . Wegen  $\text{diam}(\mathcal{P}) \geq d(2, n) \geq c_1 n$  gilt

$$2^{\frac{(1+\varepsilon)4 \log \text{diam}(\mathcal{P})}{\log \log n}} \geq n^\varrho$$

für  $n \geq n_0(\varepsilon)$ , und der Satz folgt nun aus einer elementaren Umformung.  $\square$

Nun wollen wir die Zerlegung von  $g^2 h^2$  in ein Produkt zweier natürlicher Zahlen nutzen, um einen effizienten Algorithmus zum Erzeugen planarer ganzzahliger Punktmengen, mit  $n - 1$  Punkten auf einer Geraden, zu entwickeln. Die Idee ist, durch alle Dreiecke mit einem Durchmesser zwischen *start* und *ende* zu laufen, und die zusätzlichen  $n - 3$  Punkte auf einer Seite des Dreiecks einzufügen.

### 5.2.2 Algorithmus (Durchlaufe nichtisomorphe Dreiecke)

*Eingabe:* *start, ende*

*Ausgabe:* Dreiecke  $(a, b, c)$

```

begin
  for a from start to ende do
    for b from  $\lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor$  to a do
      for c from  $a + 1 - b$  to b do
        Einfuegen_in_Dreieck(a, b, c)
        Einfuegen_in_Dreieck(b, a, c)
        Einfuegen_in_Dreieck(c, a, b)
      end
    end
  end
end

```

Die Korrektheit von Algorithmus 5.2.2 kann man wie folgt zeigen. Zunächst kann man für die Seitenlängen eines Dreiecks  $a \geq b \geq c$  voraussetzen, dies ergibt jeweils die oberen Grenzen der zwei inneren Schleifen. Von den 3 möglichen Dreiecksungleichungen sind 2 automatisch erfüllt, und es muss nur noch  $b + c > a$  erfüllt werden. Da  $a, b$  und  $c$  ganzzahlig sind entspricht dies  $2b \geq b + c \geq a + 1$ , woran man die unteren Grenzen der inneren Schleifen ablesen kann.

Um nun die Faktorisierung von  $g^2 h^2$  benutzen zu können, müssen wir  $g$  und  $h$  bzw.  $g^2 h^2$  aus  $a, b$  und  $c$  berechnen. Mit der Notation von Abbildung 5.2 setzen wir  $b_s = b$  und  $b'_t = c$ . Weiter gilt  $\sum_{i=1}^s a_i + a_0 + \sum_{i=0}^j a'_i = a$ . Da wir die  $b_i$  und die  $b'_i$  noch nicht kennen, können wir  $g$  nicht durch  $g = 2\text{ggT}(b_1, \dots, b_s, b'_1, \dots, b'_t)$  berechnen. Stattdessen definieren wir hier  $g$  als die minimale natürliche Zahl, so dass  $gc_s \in \mathbb{N}$  ist. Es lässt sich leicht nachprüfen, dass mit  $gc_s \in \mathbb{N}$  auch die  $gb_i$

und  $gb'_i$  natürliche Zahlen sind. Für  $c_s$  gilt

$$c_s = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}.$$

Hieraus ergibt sich

$$g = \frac{2a}{\text{ggT}(b^2 - c^2 + a^2, 2a)}.$$

Wegen der Heronschen Formel

$$16A_{\Delta}^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)$$

für den Flächeninhalt eines Dreiecks und  $2A_{\Delta} = ah$  gilt

$$f = g^2 h^2 = \frac{g^2(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4a^2}.$$

Folgender Algorithmus berechnet die maximale Anzahl von Punkten, die auf der Seite der Länge  $a$  eines Dreiecks mit den ganzzahligen Seitenlängen  $a$  und  $b \geq c$  eingefügt werden können, so dass alle Abstände paarweise ganzzahlig sind. Die Anzahl der Punkte auf der Seite  $a$  links vom Fußpunkt  $F$ , siehe Abbildung 5.4, die nicht zu den Eckpunkten des Dreiecks gehören, bezeichnen wir als  $\Sigma_l$ . Für die rechte Seite wird  $\Sigma_r$  entsprechend definiert. Falls ein Punkt mit  $F$  identisch ist, setzen wir  $\Sigma_m = 1$  ansonsten  $\Sigma_m = 0$ . Insgesamt enthält die zugehörige Punktmenge somit  $3 + \Sigma_l + \Sigma_m + \Sigma_r$  Punkte.

### 5.2.3 Algorithmus (Einfuegen.in.Dreieck(a,b,c))

*Eingabe:* Seitenlängen  $a, b, c$

*Ausgabe:*  $3 + \Sigma_l + \Sigma_m + \Sigma_r$

**begin**

    Berechne  $g, gc_s$  und  $f$

$\Sigma_l = \Sigma_m = \Sigma_r = 0$

**if**  $g = 1$  **and**  $gc_s < ga$  **and**  $\sqrt{f} \in \mathbb{N}$  **then**  $\Sigma_m = 1$  **end**

**for all**  $(u, v) : uv = f, u > v, u \equiv v \pmod{2}$  **do**

$x = \frac{u+v}{2}$

$y = u - x$

**if**  $x \equiv gc_s - y \equiv 0 \pmod{g}$  **and**  $gc_s - ga < y < gc_s$

**then**  $\Sigma_l = \Sigma_l + 1$  **end**

**if**  $x \equiv ga - gc_s - y \equiv 0 \pmod{g}$  **and**  $y < ga - gc_s$

**then**  $\Sigma_r = \Sigma_r + 1$  **end**

**end**

**end**

Um die Korrektheit von Algorithmus 5.2.3 zu beweisen, betrachten wir eine planare ganzzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}$ , die aus einem Dreieck der Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  besteht und bei der alle weiteren Punkte mit ganzzahligen Abständen auf der Seite  $\overline{CB} = a$  liegen, siehe Abbildung 5.4. Den Fußpunkt der Höhe des Dreiecks auf  $\overline{CB}$  bezeichnen wir mit  $F$ .

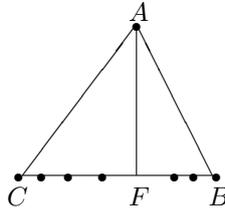


Abbildung 5.4: Ganzzahlige Punkte auf der Seite eines Dreiecks.

Damit  $F$  ein Punkt von  $\mathcal{P}$  sein kann, müssen  $\overline{AF} = h$  und  $\overline{CF} = c_s$  natürliche Zahlen sein, also  $g = 1$  und  $f$  muss eine Quadratzahl sein. Da für  $c_s = \overline{CF} \geq \overline{CB} = a$  der Fußpunkt  $F$  entweder mit  $B$  zusammenfällt oder sogar rechts von  $B$  liegt, dürfen wir ihn nicht zählen. Weil wir  $b \geq c$  vorausgesetzt haben, kann  $F$  nicht mit  $C$  zusammenfallen oder links von  $C$  liegen.

In der Zerlegung  $f = g^2 h^2 = (ga_i + gc_i)(ga_i - gc_i)$  setzen wir  $x = ga_i$ ,  $y = gc_i$ ,  $u = x + y$  und  $v = x - y$ . Damit  $x$  und  $y$  natürliche Zahlen sein können, müssen  $u$  und  $v$  modulo 2 den selben Wert besitzen und es muss  $u \geq v$  gelten.

Betrachten wir nun zunächst die Punkte, die links von  $F$  liegen. Da  $a_i$  eine ganze Zahl sein soll, muss  $x = ga_i$  modulo  $g$  den Rest 0 besitzen. Der Abstand des potentiellen neuen Punktes zu Punkt  $C$  beträgt  $gc_s - gc_i = gc_s - y$ , also muss  $gc_s - y$  modulo  $g$  ebenfalls den Rest 0 besitzen. Die Bedingung  $gc_s - ga < y < gc_s$  ergibt sich daraus, dass der potentielle neue Punkt zwischen  $C$  und  $B$  liegen muss. Die Bedingungen für die Punkte rechts von  $F$  ergeben sich aus  $\overline{FB} = c'_t = a - c_s$  und daraus, dass  $C$  nicht rechts von  $F$  liegen kann. Somit ist die Korrektheit von Algorithmus 5.2.3 bewiesen.

Mit Hilfe von Algorithmus 5.2.3 konnten gute obere Schranken von  $d(2, n)$  für  $30 \leq n \leq 89$  bestimmt werden. In den Tabellen 5.1 und 5.2 geben wir die oberen Schranken für  $d(2, n)$  zusammen mit den Seitenlängen des Dreiecks, in das eingefügt wird, und der Charakteristik der Punktmenge an.

Gemäß Vermutung 5.1.1 vermuten wir natürlich, dass die oberen Schranken aus den Tabellen 5.1 und 5.2 mit  $d(2, n)$  übereinstimmen. Anhand der Tabellen stellen wir empirisch fest, dass immer  $g = 1$  gilt,  $g^2 h^2$  immer viele Teiler besitzt und dass

$n$	$d(2, n) \leq$	$(a, b, c)$	$\text{char}(\mathcal{P})$	$g^2 h^2$	$g$
30	437	(437, 289, 194)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
31	464	(464, 272, 272)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
32	494	(494, 298, 272)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
33	524	(524, 298, 298)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
34	553	(553, 351, 272)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
35	578	(578, 374, 272)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
36	608	(608, 374, 298)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
37	642	(642, 351, 351)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
38	667	(667, 374, 351)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
39	692	(692, 374, 374)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
40	754	(754, 432, 374)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
41	816	(816, 432, 432)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
42	897	(897, 569, 374)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
43	959	(959, 569, 432)	35	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
44	1.026	(1.026, 578, 524)	70	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
45	1.066	(1.066, 587, 587)	105	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	1
46	1.139	(1.139, 654, 587)	105	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	1
47	1.190	(1.190, 734, 524)	70	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
48	1.248	(1.248, 734, 578)	70	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
49	1.306	(1.306, 733, 733)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
50	1.363	(1.363, 734, 687)	70	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
51	1.410	(1.410, 827, 733)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
52	1.460	(1.460, 873, 733)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
53	1.514	(1.514, 827, 827)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
54	1.564	(1.564, 873, 827)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
55	1.614	(1.614, 873, 873)	770	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
56	1.675	(1.675, 1.063, 862)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
57	1.727	(1.727, 1.063, 906)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
58	1.770	(1.770, 1.063, 943)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
59	1.817	(1.817, 1.063, 984)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
60	1.887	(1.887, 1.063, 1.046)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
61	1.906	(1.906, 1.063, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
62	2.060	(2.060, 1.203, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
63	2.140	(2.140, 1.277, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1

Tabelle 5.1: Obere Schranken für  $d(2, n)$ ,  $30 \leq n \leq 63$ .

$n$	$d(2, n) \leq$	$(a, b, c)$	$\text{char}(\mathcal{P})$	$g^2 h^2$	$g$
64	2.169	(2.169, 1.304, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
65	2.231	(2.231, 1.362, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
66	2.299	(2.299, 1.426, 1.063)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
67	2.432	(2.432, 1.304, 1.304)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
68	2.494	(2.494, 1.362, 1.304)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
69	2.556	(2.556, 1.362, 1.362)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
70	2.624	(2.624, 1.426, 1.362)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
71	2.692	(2.692, 1.426, 1.426)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
72	2.827	(2.827, 1.619, 1.362)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
73	2.895	(2.895, 1.619, 1.426)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
74	2.993	(2.993, 1.713, 1.426)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
75	3.098	(3.098, 1.619, 1.619)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
76	3.196	(3.196, 1.713, 1.619)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
77	3.294	(3.294, 1.713, 1.713)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
78	3.465	(3.465, 1.878, 1.713)	385	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
79	3.575	(3.575, 2.071, 1.746)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
80	3.658	(3.658, 2.071, 1.823)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
81	3.749	(3.749, 2.071, 1.908)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
82	3.885	(3.885, 2.071, 2.036)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
83	3.922	(3.922, 2.071, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
84	4.223	(4.223, 2.358, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
85	4.380	(4.380, 2.509, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
86	4.437	(4.437, 2.564, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
87	4.559	(4.559, 2.682, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
88	4.693	(4.693, 2.812, 2.071)	770	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1
89	4.883	(4.883, 2.703, 2.446)	1.155	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	1

Tabelle 5.2: Obere Schranken für  $d(2, n)$ ,  $64 \leq n \leq 89$ .

die Punktmenge, die zu der oberen Schranke für  $n$  Punkte führt, meist Teilmenge der Punktmenge, die zur oberen Schranke für  $n + 1$  Punkte führt, ist.

Um einen besseren Überblick über das Verhalten von  $g^2 h^2$  und  $g$  zu bekommen geben wir der Vollständigkeit halber in Tabelle 5.3 die entsprechenden Daten für  $9 \leq n \leq 29$  an.

Wir möchten bemerken, dass für Durchmesser kleiner als 3.000 der triviale Algorithmus, der einfach bei allen  $a - 1$  möglichen Punkte auf der Seite  $\overline{CB}$  testet ob der Abstand zum Punkt  $A$  ganzzahlig ist, in der Praxis schneller als Algorithmus

5.2.3 läuft, siehe Abschnitt B.2.

$n$	$d(2, n) \leq$	$(a, b, c)$	$\text{char}(\mathcal{P})$	$g^2 h^2$	$g$
9	29	(29, 17, 17)	35	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	2
10	40	(40, 27, 17)	35	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	2
11	51	(51, 27, 27)	35	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	2
12	63	(63, 43, 34)	30	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	1
13	74	(74, 43, 43)	30	$2^5 \cdot 3 \cdot 5$	1
13	74	(74, 53, 53)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
14	91	(91, 66, 53)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
15	104	(104, 77, 53)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
16	121	(121, 77, 66)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
17	134	(134, 77, 77)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
18	153	(153, 94, 77)	10	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
18	153	(153, 98, 89)	5	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
19	164	(164, 98, 98)	5	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
20	196	(196, 126, 98)	5	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	1
21	212	(212, 134, 134)	105	$2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	1
21	212	(212, 146, 146)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
22	228	(228, 158, 146)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
23	244	(244, 158, 158)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
24	272	(272, 194, 146)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
25	288	(288, 194, 158)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
26	319	(319, 194, 183)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
27	332	(332, 194, 194)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
28	364	(364, 222, 194)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1
29	396	(396, 222, 222)	70	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	1

Tabelle 5.3: Minimale Durchmesser  $d(2, n)$ ,  $9 \leq n \leq 29$ .

Ausgehend von der Beobachtung, dass meist  $g = 1$  und  $g^2 h^2$  eine Zahl mit vielen Teilern ist, könnte man natürlich einen heuristischen Algorithmus entwickeln, der gute obere Schranken für  $d(2, n)$  für große  $n$  liefert. Hierauf werden wir aber nicht weiter eingehen und stattdessen im nächsten Abschnitt Strategien beschreiben, wie man eine gute untere Schranke für  $d(2, n)$  beweisen könnte, und im übernächsten Abschnitt einen Algorithmus entwickeln, der es ermöglicht, weitere Werte von  $d(2, n)$  für  $n \geq 30$  exakt zu bestimmen.

### 5.3 Strategien zum Beweis einer unteren Schranke für $d(2, n)$

Mit Satz 5.2.1 haben wir bereits eine gute untere Schranke für  $d(2, n)$  für den Fall, dass relativ viele Punkte auf einer Geraden liegen. Befinden sich dagegen auf jeder Geraden nur relativ wenig Punkte, so wissen wir nach Abschnitt 5.1, dass derartige Punktmengen viele Dreiecke mit gleicher Charakteristik benötigen. Dies wollen wir in folgendem Lemma quantifizieren.

**5.3.1 Lemma** *Jede ganzzahlige planare Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit höchstens  $\frac{n}{2}$  kollinearen Punkten enthält eine Menge von  $\frac{n}{8}$  nicht äquivalenten Dreiecken, welche den gleichen Durchmesser und die gleiche Charakteristik wie die Punktmenge besitzen.*

**Beweis.** Wir wählen zwei Punkte  $A$  und  $B$  von  $\mathcal{P}$  mit maximalem Abstand. Da höchstens  $\frac{n}{2}$  Punkte kollinear sind, gibt es mindestens  $\frac{n}{2}$  Punkte  $C$ , die nicht auf der Gerade durch  $A$  und  $B$  liegen. Der Beweis wird abgeschlossen durch die Feststellung, dass höchstens 4 äquivalente Dreiecke in einer planaren Punktmenge die Seite  $\overline{AB}$  gemeinsam haben können, siehe Abbildung 5.5.  $\square$

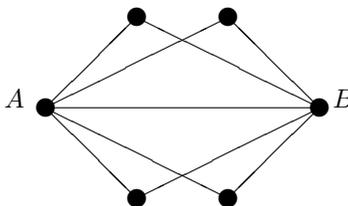


Abbildung 5.5: Äquivalente Dreiecke mit einer gemeinsamen Seite in einer planaren Punktmenge.

Hieraus können wir sofort eine untere Schranke in Abhängigkeit von  $\tilde{\psi}(d)$  folgern.

#### 5.3.2 Folgerung

$$d(2, n) \geq \tilde{\psi}^{-1} \left( \frac{n}{8} \right).$$

Somit ergibt sich zusammen mit Satz 4.5.2  $d(2, n) \in o(n^{1-\varepsilon})$  für  $\varepsilon > 0$ , also eine marginal schlechtere untere Schranke als die von Solymosi [162], der erst kürzlich ein mindestens lineares Wachstum von  $d(2, n)$  bewiesen hat.

In Lemma 5.3.1 haben wir eine Strecke und die Charakteristik einer Punktmenge fest gewählt, und gefragt wie viele nicht äquivalente Dreiecke eine planare Punktmenge aus  $n$  Punkten besitzen muss. Eine natürliche Verallgemeinerung ist, statt einer Strecke ein  $r$ -Eck ( $r \geq 3$ ) fest zu wählen und nach der Anzahl der mindestens benötigten  $(r + 1)$ -Ecke zu fragen.

**5.3.3 Lemma** *Sei  $\mathcal{R}$  ein nicht degeneriertes  $r$ -Eck, mit  $r \geq 3$ , einer ganzzahligen planaren Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten, dann enthält  $\mathcal{P}$  mindestens  $\frac{n}{r!}$  nicht äquivalente  $(r + 1)$ -Ecke, die  $\mathcal{R}$  enthalten.*

**Beweis.** Wir betrachten die Anzahl der Möglichkeiten wie man ein  $(r + 1)$ -Eck auf ein nicht degeneriertes  $r$ -Eck  $\mathcal{R}$  legen kann, so dass  $r$  Eckpunkte übereinstimmen. Diese Anzahl entspricht maximal der Ordnung der Automorphismengruppe, siehe Kapitel 7, von  $\mathcal{R}$ . Da die Automorphismengruppe von  $\mathcal{R}$  eine Untergruppe der  $S_r$  sein muss, besitzt sie höchstens die Ordnung  $r!$ .  $\square$

Wir möchten erwähnen, dass wir in Kapitel 7 beweisen, dass die Ordnung der Automorphismengruppe von  $\mathcal{R}$  maximal 6 beträgt, was aber von der Größenordnung keinen Unterschied macht, solange wir  $r$  als von  $n$  unabhängig und als fix betrachten.

Gibt man ein  $r$ -Eck  $\mathcal{R}$  mit Durchmesser  $d$  fest vor, so wird ein zusätzlicher Punkt durch Angabe von zwei Abständen  $d_1, d_2$  zu zwei beliebigen Punkten  $A, B$  von  $\mathcal{R}$  bis auf Spiegelung an  $\overline{AB}$  eindeutig bestimmt. Für  $d_1, d_2$  gibt es maximal  $O(d^2)$  Möglichkeiten, falls das entstehende  $(r + 1)$ -Eck ebenfalls Durchmesser  $d$  besitzen soll. Kann man noch voraussetzen, dass das aus  $d_1$  und  $d_2$  neu entstehende Dreieck nicht entartet ist, so gibt es nach Satz 2.4.1 maximal  $\tilde{\psi}(d)$  Möglichkeiten für  $d_1$  und  $d_2$ . Weitere Einschränkungen ergeben sich daraus, dass die restlichen  $r - 1$  neuen Abstände, die sich durch  $d_1, d_2$  und die schon bekannten Abstände ausdrücken lassen, ganzzahlig sein müssen. Für größeres  $r$  steigen zwar die Einschränkungen, aber im gleichen Atemzug werden die zu betrachtenden Diophantischen Gleichungen komplizierter. Wir gehen an dieser Stelle nicht weiter hierauf ein, schlagen aber als vielversprechende Strategie vor, die eben ausgeführten Überlegungen für den Fall  $r = 3$  näher zu untersuchen. Für empirische Ergebnisse verweisen wir auf Abschnitt C.2 im Anhang.

## 5.4 Ein hybrider Konstruktionsalgorithmus für planare ganzzahlige Punktmengen

Mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Konstruktionsverfahren ist die vollständige Konstruktion von planaren ganzzahligen Punktmengen mit großer Punktanzahl nur

für relativ kleine Durchmesser, zumindest auf handelsüblichen PCs, möglich. So dauert die Konstruktion der planaren ganzzahligen Punktmenge aus 29 Punkten mit Durchmesser 396 schon gut 32 Stunden. Wenn wir z.B.  $d(2, 80)$  exakt bestimmen wollen, müssen wir uns also etwas Anderes überlegen.

Unsere Konstruktionsstrategie bestand darin, zunächst die ganzzahligen Dreiecke mit Durchmesser 396 zu konstruieren, und dann anschließend rekursiv zwei Punktmenge aus  $n$  Punkten zu einer Punktmenge aus  $n + 1$  Punkten zu kombinieren. Um einen ersten Einblick zu bekommen, bei welchem Teilschritt die meiste Arbeit verrichtet werden muss, betrachten wir die Anzahl der ganzzahligen planaren Punktmenge aus  $n$  Punkten mit Durchmesser 396 in Abhängigkeit von  $n$ . Um unabhängig von einem konkreten Algorithmus oder einer Implementierung zu bleiben, untersuchen wir zunächst nur die Anzahl der Strukturen und nicht die benötigte Zeit zu ihrer Erzeugung. In Tabelle 5.4 geben wir die Anzahlen der Strukturen mit gegebener Anzahl der Punkte an und in Abbildung 5.6 stellen wir das relative Größenverhältnis graphisch dar, siehe [109] für typische Verläufe bei diskreten Strukturen. Es ergibt sich in unserem Fall eine *Buckelform*.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	
$\#\mathcal{P}$	78606	18761	29507	69150	172400	395263	809026	
$n$	10	11	12	13	14	15		
$\#\mathcal{P}$	1473314	2411581	3572024	4807870	5862049	6438744		
$n$	16	17	18	19	20	21		
$\#\mathcal{P}$	6315396	5489815	4192664	2793379	1608509	793904		
$n$	22	23	24	25	26	27	28	29
$\#\mathcal{P}$	331424	115631	32924	7516	1300	169	13	1

Tabelle 5.4: Anzahl ganzzahliger planarer Punktmenge mit Durchmesser 396 aus  $n$  Punkten.

Die erste Frage, die sich stellt ist, ob wir den *Buckel* in Abbildung 5.6, nachdem wir ihn empirisch festgestellt haben, auch mathematisch begründen können. Hierzu betrachten wir eine planare Punktmenge in der Form von Abbildung 5.4 bestehend aus  $n$  Punkten. Nun betrachten wir die Teilpunktmenge, die hieraus hervorgehen wenn man die Punkte  $A, B, C$  und noch weitere  $k \leq n - 3$  Punkte auf der Strecke  $\overline{CB}$  wählt. Diese Teilpunktmenge besitzen alle denselben Durchmesser wie die Ausgangspunktmenge und somit müssen alle diese  $\binom{n-3}{k}$  Teilpunktmenge mit unserem Konstruktionsalgorithmus erzeugt werden. Mit  $k = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$  ist dieser Ausdruck maximal. In unserem Fall haben wir  $\binom{29-3}{13} = 10.400.600$ ,

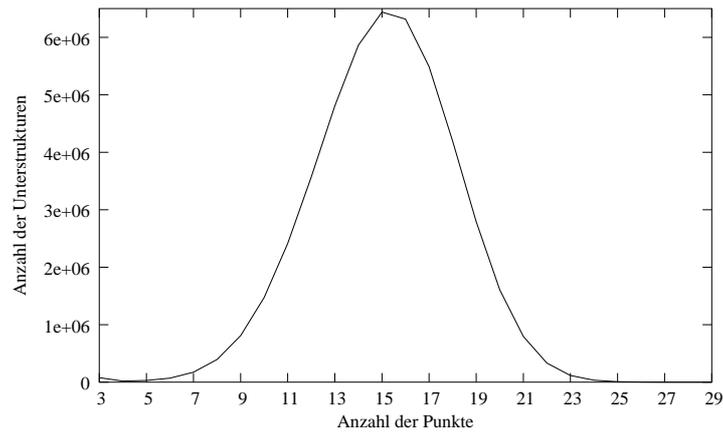


Abbildung 5.6: Anzahl ganzzahliger planarer Punktmengen mit Durchmesser 396.

also mehr Möglichkeiten als es ganzzahlige planare Punktmengen mit Durchmesser 396 bestehend aus 16 Punkten gibt. Dies liegt daran, dass manche von diesen 10.400.600 Möglichkeiten äquivalenten Punktmengen entsprechen. Nach einer Anwendung des Lemmas von Cauchy-Frobenius (2.6.1), ergibt sich, dass es genau

$$\frac{\binom{29-3}{k} + \frac{-1^k+1}{2} \binom{\frac{29-3}{2}}{\frac{k}{2}}}{2}$$

Teilpunktmengen der Punktmenge aus 29 Punkten mit Durchmesser 396 gibt, die aus  $k+3$  Punkten bestehen.

Wir vermuten nun, dass die Teilpunktmengen von einigen wenigen Punktmengen für einen maßgeblichen Anteil am *Buckel* verantwortlich sind. Mit Hilfe von Algorithmus 5.2.3 können wir alle planaren Punktmengen mit Durchmesser 396 und mindestens 24 Punkten bestimmen, bei denen  $n-1$  Punkte auf einer Geraden liegen. In Notation von Tabelle 5.1 lauten sie  $(396, 222, 222)$ ,  $(396, 282, 282)$ ,  $(396, 282, 246)$  und  $(396, 267, 201)$ . Nach einer kurzen Rechnung ergibt sich, dass diese 4 Punktmengen

$$\frac{\binom{29-3}{k} + \binom{25-3}{k} + \frac{-1^k+1}{2} \left( \binom{\frac{29-3}{2}}{\frac{k}{2}} + \binom{\frac{25-3}{2}}{\frac{k}{2}} \right)}{2} + \binom{25-3}{k} + \binom{24-3}{k}$$

Teilpunktmengen aus  $k+3$  Punkten mit Durchmesser 396 besitzen.

Zieht man nun die Anzahl derartiger Teilpunktmenge von den Anzahlen aus Tabelle 5.4 ab, so erhält man die Anzahlen  $\#\mathcal{P}$  aus Tabelle 5.5.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	
$\#\mathcal{P}$	78.602	18.694	28.776	64.210	147.901	302.523	527.502	
$n$	10	11	12	13	14	15		
$\#\mathcal{P}$	772.318	946.776	969.689	828.443	588.105	344.906		
$n$	16	17	18	19	20	21	22	23
$\#\mathcal{P}$	165.476	64.007	19.504	4.517	748	79	4	0

Tabelle 5.5: Anzahl ganzzahliger planarer Punktmenge mit Durchmesser 396 ohne die Teilpunktmenge von 4 ausgewählten Punktmenge.

Den Anzahlen von Tabelle 5.5 entnimmt man, dass der *Buckel*, durch das Entfernen der vier Punktmenge und ihrer Teilpunktmenge, zwar nicht komplett abgetragen wurde, sich seine Höhe aber verringert und sein höchster Punkt weiter nach links verschoben hat.

Wenn wir also eine Möglichkeit hätten im rekursiven Konstruktionsprozess so früh wie möglich zu entscheiden, ob eine Punktmenge  $\mathcal{P}$ , bei gleichbleibendem Durchmesser, nur noch durch Hinzunehmen von Punkten auf der längsten Seite erweitert werden kann, so können wir die Punktmenge mit der maximalen Punktanzahl, die  $\mathcal{P}$  enthält, mit Hilfe von Algorithmus 5.2.3 direkt erzeugen, ohne die Vielzahl von Teilpunktmenge konstruieren zu müssen.

Eine Möglichkeit dieses Ziel zu erreichen, ist auf der längsten Seite erst gar keine Punkte einzufügen. In Kapitel 3 haben wir ja erst dafür gesorgt, dass auch Strecken mit vielen Punkten in die Konstruktion mit einbezogen werden. Nun kombinieren wir einfach ausschließlich zweidimensionale Punktmenge miteinander, wobei wir aber Punktmenge mit 3 oder mehr kollinearen Punkten zulassen. Anschließend testen wir mit Hilfe von Algorithmus 5.2.3 wie viele Punkte wir auf der längsten Kante einfügen können.

Wir wollen hier aber eine etwas allgemeinere Konstruktionsstrategie vorstellen und benutzen. Wenn wir minimale Durchmesser  $d(2, n)$  bestimmen wollen, können wir davon ausgehen, dass wir  $d(2, n - 1)$  schon kennen. Für einen Durchmesser  $d > d(2, n - 1)$  sind wir in diesem Fall nicht an allen möglichen ganzzahligen Punktmenge mit diesem Durchmesser interessiert, sondern nur an denen, die aus mindestens  $n$  Punkten bestehen. Wir werden nun dieses Problem so umformulieren, dass es äquivalent dazu ist, große **Cliquen**, das sind vollständige Teilgraphen, in Graphen zu finden.

Zu einem gegebenen Dreieck  $\Delta$  mit Durchmesser  $d$  betrachten wir die Menge  $\mathcal{V}$  der Punkte, die zu den drei Eckpunkten des Dreiecks  $\Delta$  einen ganzzahligen Abstand kleiner gleich  $d$  besitzen. Diese Menge  $\mathcal{V}$  nehmen wir als Knotenmenge für unseren Graphen  $\mathcal{G}(\Delta)$ . Wir definieren, dass zwei Knoten  $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$  genau dann benachbart sind, wenn sie einen ganzzahligen Abstand kleiner gleich  $d$  besitzen. Man überlegt sich leicht, dass es zwischen den ganzzahligen planaren Punktmengen mit Durchmesser  $d$ , die das Dreieck  $\Delta$  enthalten, und den Cliques von  $\mathcal{G}(\Delta)$  eine Bijektion gibt.

#### 5.4.1 Algorithmus (Konstruiere große ganzzahlige planare Punktmengen)

*Eingabe:*  $d, n$

*Ausgabe:* Ganzzahlige planare Punktmengen mit Durchmesser  $d$  aus mindestens  $n$  Punkten

**begin**

Berechne Koordinaten  $x_0, y_0$  von  $A$

Berechne Koordinaten  $x_1, y_1$  von  $B$

Berechne Koordinaten  $x_2, y_2$  von  $C$

$i = 3$

**for each**  $\Delta = (A, B, C)$  **with**  $\text{diam}(\Delta) = d$  **and**  $\chi(\Delta) = \text{kanonisch}$  **do**

**for each**  $\mathcal{P} = (A, B, C, D)$  **with**  $\downarrow \mathcal{P} = \Delta$  **and**

$\chi(\mathcal{P}) \in \{\text{kanonisch}, \text{semi-kanonisch}\}$  **do**

Berechne Koordinaten  $x_i, y_i$  von  $D$

$i = i + 1$

**end**

**for each**  $D$  **with**  $\overline{AD} + \overline{BD} = \overline{AB}$  **and**  $\overline{AD}, \overline{BD}, \overline{CD} \in \{1, \dots, d\}$  **do**

Berechne Koordinaten  $x_i, y_i$  von  $D$

$i = i + 1$

**end**

$\mathcal{G} = (\{0, \dots, i-1\}, \emptyset)$

**for each**  $\{u, v\}$  **with**  $0 \leq u < v < i$  **do**

**if**  $\sqrt{(x_u - x_v)^2 + (y_u - y_v)^2} \in \mathbb{N}$  **then**

Füge Kante  $\{u, v\}$  zu  $\mathcal{G}$  hinzu

**end**

**end**

Gebe alle Cliques von  $\mathcal{G}$  aus mindestens  $n$  Knoten aus

**end**

**end**

Bei diesem Algorithmus verwendet man Algorithmus 2.3.2 zur Koordinatenberechnung und Algorithmus 5.2.3 zum Durchlauf der ganzzahligen Punkte auf  $\overline{AB}$

als Unterroutrinen. Den Durchlauf mit  $\Delta$  und  $\mathcal{P}$  kann man mittels ordnungstreu erzeugung, wie in Kapitel 3 beschrieben, durchführen. Für die Cliquensuche in  $\mathcal{G}$  benutzen wir eine Implementierung des Bron-Kerbosch Algorithmus [21] bzw. das Softwarepaket CLIQUER [131], basierend auf [133, 134].

Mit Hilfe von Algorithmus 5.4.1 konnten wir verifizieren, dass die in Abschnitt 5.2 angegebenen oberen Schranken für den minimalen Durchmesser  $d(2, n)$  für  $n \leq 89$ , wie vermutet, die exakten Werte sind.

Doch wie sieht es mit der Komplexität von Algorithmus 5.4.1 aus? Für die Bestimmung der Knotenmenge  $\mathcal{V}$  der Graphen  $\mathcal{G}(\Delta)$  haben wir insgesamt einen Aufwand von  $O\left(\Psi(d) + d^{2 + \frac{c}{\log \log d}}\right)$ , siehe Abschnitt 4.5 und Abschnitt 5.2. Um eine gute Abschätzung für die Anzahl der Knoten eines Graphen  $\mathcal{G}$  zu haben, müssen wir die Gültigkeit von Vermutung C.2.1 voraussetzen. Unter dieser Annahme gilt

$$|\mathcal{V}| \in O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right).$$

Für die Suche nach einer maximalen Clique in Graphen aus  $n$  Knoten sind aber bisher leider erst Abschätzungen der Form  $O(c^n)$  bekannt. In [167] wird gezeigt, dass man  $c = 1, 2599$  wählen kann. Somit kann man den Aufwand für die Cliquensuche in unserem Fall bisher nicht polynomial, also durch  $O(d^c)$ , abschätzen. Wir möchten erwähnen, dass das Entscheidungsproblem, ob ein gegebener Graph eine Clique aus  $q$  Knoten besitzt,  $NP$ -vollständig ist. Nach [76] ist sogar das Bestimmen von Approximationslösungen in polynomieller Zeit schwer. Somit können wir eigentlich nicht erwarten, dass Algorithmus 5.4.1 schnell ist. In der Praxis stellt sich aber heraus, dass er nicht wesentlich mehr Zeit braucht, als die Konstruktion der ganzzahligen Vierecke alleine benötigt. Dies liegt daran, dass wir es hier nicht mit dem allgemeinen Cliquenproblem zu tun haben, sondern dass die von uns betrachteten Graphen eine *gutartige* Struktur besitzen. In Abschnitt 5.2 haben wir gesehen, dass Punkte auf einer Geraden zu sehr großen Cliquen führen, in Abschnitt 5.5 werden wir sehen, dass Punkte auf Kreisen zu mittelgroßen Cliquen führen und in Abschnitt 5.6 werden wir empirisch feststellen, dass es zwischen diesen zwei Arten von Cliquen recht wenige Kanten gibt. Also:

“Keine Angst vor  $NP$ -vollständigen Problemen, solange man sie nur in Spezialfällen lösen muss.”

Wir haben den Konstruktionsalgorithmus 5.4.1 als einen hybriden Konstruktionsalgorithmus bezeichnet, weil er bis zu einem gewissen Punkt ordnungstreu erzeugt und anschließend Cliquensuche benutzt. Bei einem solchen Vorgehen stellt sich natürlicherweise die Frage nach dem optimalen Punkt des Wechsels der Konstruktionsmethode. Da wir empirisch festgestellt haben, dass die Konstruktion der

ganzzahligen Vierecke länger dauert als die anschließende Cliquensuche, braucht man nur noch die Möglichkeit zu betrachten direkt nach der Konstruktion der ganzzahligen Dreiecke und der ganzzahligen Strecken aus drei Punkten auf die Cliquensuche umzusteigen. Bei dieser Möglichkeit benötigen wir zwar nur  $\Omega(d^2)$  Schritte für den Teil der ordnungstreuen Erzeugung, müssten die Cliquensuche aber dafür auf Graphen mit  $\Omega(d)$  Knoten durchführen, was letztendlich weitaus langsamer ist.

Wenn wir vom Optimalfall ausgehen, dass es einen Algorithmus, mit polynomialer Laufzeit (in der Anzahl der Knoten), zumindest für unsere speziellen Graphen, zum Finden maximaler Cliques gibt und weiterhin die Vermutungen 4.5.11 und C.2.1 stimmen, dann hätte Algorithmus 5.4.1 eine Laufzeit von  $O\left(d^{2+\frac{c}{\log \log d}}\right)$ . Da dies aber alles nur Vermutungen und Hoffnungen sind, müssen wir damit leben, dass unser Algorithmus zwar in der Praxis schnell ist, wir aber keine gute obere Schranke für die Komplexität beweisen können.

## 5.5 Minimale Durchmesser von planaren Punktmengen in semi-allgemeiner Lage

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den minimalen Durchmessern von ganzzahligen planaren Punktmengen in semi-allgemeiner Lage, also Punktmengen bei denen keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Die bisher bekannten minimalen Durchmesser  $\bar{d}(2, n)$  entnehmen wir [64],

$$(\bar{d}(2, n))_{n=3, \dots, 9} = 1, 4, 8, 8, 33, 56, 56.$$

Zusätzlich wurde noch  $\bar{d}(2, 10) = \bar{d}(2, 11) = \bar{d}(2, 12) = 105$  vermutet. Mit Hilfe des Konstruktionsalgorithmus aus Abschnitt 3.4 konnten wir alle ganzzahligen planaren Punktmengen mit Durchmesser kleiner gleich 5.000 konstruieren. Dies liefert

$$(\bar{d}(2, n))_{n=10, \dots, 24} = \begin{array}{l} 105, 105, 105, 532, 532, 735, 735, 735, \\ 735, 1995, 1995, 1995, 1995, 1995, 1995. \end{array}$$

Wie in Abschnitt 5.4 beschrieben, bekommen wir auch hier bei größerem  $n$  Probleme mit der exponentiellen Anzahl an Unterstrukturen. Um dieses Problem zu umgehen wollen wir wieder Algorithmus 5.4.1 benutzen. Da wir nun nur an Punktmengen in semi-allgemeiner Lage interessiert sind, müssen wir ihn leicht modifizieren. Beim ersten Teil brauchen wir mittels ordnungstreuer Erzeugung nur noch

die ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage konstruieren. Beim Einfügen der Kanten  $\{u, v\}$  in den Graphen  $\mathcal{G}(\Delta)$  testen wir wieder, ob der Abstand zwischen  $(x_u, y_u)$  und  $(x_v, y_v)$  in  $\{1, \dots, d\}$  liegt. Falls dies nicht der Fall ist, fügen wir keine Kante ein. Zusätzlich fordern wir noch, dass die Punkte, die zu  $u$  und  $v$  gehören, nicht mit einem der drei Punkte von  $\Delta$  auf einer Geraden liegen. Erst wenn beide Bedingungen erfüllt sind, fügen wir die Kante ein. In Abschnitt 5.4 konnten wir sagen, dass die ganzzahligen planaren Punktmengen aus  $n$  Punkten mit Durchmesser  $d$ , die das Dreieck  $\Delta$  enthalten, den Cliques aus  $n$  Knoten von  $\mathcal{G}(\Delta)$  bijektiv entsprechen. Hier ist diese Bijektivität leider nicht mehr gegeben, da für  $3 \leq u < v < w$  nicht ausgeschlossen wurde, dass die drei Punkte mit den Koordinaten  $(x_u, y_u)$ ,  $(x_v, y_v)$  und  $(x_w, y_w)$  auf einer Geraden liegen können. Aber es gibt zumindest zu jeder derartigen Punktmenge aus  $n$  Punkten eine Clique aus  $n$  Knoten in  $\mathcal{G}(\Delta)$ . Somit sind die Cliques der Mächtigkeit größer gleich  $n$  aus  $\mathcal{G}(\Delta)$  nur Kandidaten für ganzzahlige Punktmengen in semi-allgemeiner Lage aus mindestens  $n$  Punkten, die noch darauf überprüft werden müssen, ob sie drei Punkte auf einer Geraden besitzen. Mit Hilfe dieses modifizierten Algorithmus konnten wir weitere 12 exakte Werte von  $\bar{d}(2, n)$  bestimmen,

$$\begin{aligned} (\bar{d}(2, n))_{n=25, \dots, 36} = & 9.555, 9.555, 9.555, 10.672, 13.975, 13.975, \\ & 13.975, 13.975, 13.975, 13.975, 13.975, 13.975. \end{aligned}$$

Wir möchten erwähnen, dass wir bei der Bestimmung von  $\bar{d}(2, n)$  für  $n \leq 36$  keinen Kandidaten verwerfen mussten, da sie alle Punktmengen in semi-allgemeiner Lage entsprechen.

Bisher haben wir nur die Werte der minimalen Durchmesser  $\bar{d}(2, n)$  für  $n \leq 36$  angegeben und die Algorithmen beschrieben, mit denen wir sie bestimmt haben. Für Koordinatendarstellungen und Abbildungen der zugehörigen Punktmengen verweisen wir den Leser auf Abschnitt A.2. Schaut man sich diese Punktmengen genauer an, so stellt man fest, dass die Punkte jeweils auf einem Kreis liegen, siehe auch [127, 159] für derartige Punktmengen.

**5.5.1 Vermutung** *Ist  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige planare Punktmenge aus  $n$  Punkten in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $\bar{d}(2, n)$ , so liegen alle  $n$  Punkte auf einem Kreis.*

In Satz 1.1.2 ist bereits eine Methode enthalten, wie man ganzzahlige Punktmengen auf Kreisen konstruieren kann. Da man hiermit, zumindest unseres Wissens nach, nicht gezielt Punktmengen mit vielen Punkten und kleinem Durchmesser konstruieren kann, beschreiben wir nun eine weitere Methode, mit dessen Hilfe die obere Schranke

$$\bar{d}(2, n) \leq n^{c \log \log n}$$

bewiesen wurde [67].

Wir betrachten den Ring  $\mathbb{Z}[\varrho]$  mit  $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ . In  $\mathbb{Z}[\varrho]$  besitzt jede Primzahl  $p \equiv 1 \pmod{6}$  (in  $\mathbb{Z}$ ) eine Primfaktorzerlegung der Form  $\gamma(p) \cdot \overline{\gamma(p)}$ , wobei wir mit  $\overline{\gamma(p)}$  die zu  $\gamma(p)$  konjugiert komplexe Zahl bezeichnen. So gilt z.B.

$$\begin{aligned} 7 &= (3 + \varrho)(3 + \overline{\varrho}), \\ 13 &= (4 + \varrho)(4 + \overline{\varrho}), \\ 19 &= (5 + 2\varrho)(5 + 2\overline{\varrho}), \\ 31 &= (6 + \varrho)(6 + \overline{\varrho}), \\ 37 &= (7 + 3\varrho)(7 + 3\overline{\varrho}), \\ 43 &= (7 + \varrho)(7 + \overline{\varrho}). \end{aligned}$$

Zur Konstruktion einer ganzzahligen Punktmenge  $\mathcal{P}$  wählen wir nun eine Zahl

$R = \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{v_i}$ , die ein Produkt von Primzahlen  $p_i \equiv 1 \pmod{6}$  (aus  $\mathbb{Z}$ ) ist. Zu

jedem Teiler  $\prod_{i=0}^{r-1} p_i^{u_i}$  betrachten wir weiter die drei komplexen Zahlen

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \prod_{i=0}^{r-1} \gamma(p_i)^{v_i+u_i} \overline{\gamma(p_i)}^{v_i-u_i}, \\ \eta_1 &= \eta_0 \varrho \quad \text{und} \\ \eta_2 &= \eta_0 \varrho^2. \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich  $3 \prod_{i=0}^{r-1} (v_i + 1)$  unterschiedliche Werte für die  $\eta_i$ . Die Punkte von  $\mathcal{P}$  definieren wir nun durch die Koordinaten

$$\left( \Re \left( \frac{R\eta^2}{\sqrt{3}} \right), \Im \left( \frac{R\eta^2}{\sqrt{3}} \right) \right)$$

für die möglichen Werte von  $\eta$ , wobei  $\Re$  den Realteil und  $\Im$  den Imaginärteil einer komplexen Zahl bezeichnet. In [67] wird bewiesen, dass diese Konstruktion wirklich zu einer ganzzahligen planaren Punktmenge in semi-allgemeiner Lage

bestehend aus  $n = 3 \prod_{i=0}^{r-1} (v_i + 1)$  Punkten mit einem Durchmesser kleiner  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$  führt.

Wählt man  $R$  als Produkt der ersten zu 1 modulo 6 kongruenten Primzahlen, so gilt  $\text{diam}(\mathcal{P}) \leq n^{c \log \log n}$ . In Tabelle 5.6 betrachten wir die möglichen *guten* Wahlen von  $R$  die zu ganzzahligen Punktmenge mit höchstens 200 Punkten führen.

Wenn man die oberen Schranken aus Tabelle 5.6 mit den exakten Werten  $\bar{d}(2, n)$  vergleicht, so stellt man fest, dass viele der minimalen Durchmesser durch die eben beschriebene Konstruktion erreicht werden.

$R$	$ \mathcal{P} $	$\text{diam}(\mathcal{P})$	$R$	$ \mathcal{P} $	$\text{diam}(\mathcal{P})$
1	3	1	$7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	48	61.880
7	6	8	$7^2 \cdot 13^2 \cdot 19$	54	181.675
$7^2$	9	56	$7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	72	433.225
$7 \cdot 13$	12	105	$7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$	96	2.289.957
$7^2 \cdot 13$	18	735	$7^2 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31$	108	5.632.056
$7 \cdot 13 \cdot 19$	24	1.995	$7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37$	144	16.029.704
$7^2 \cdot 13^2$	27	9.555	$7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$	192	98.468.151
$7^2 \cdot 13 \cdot 19$	36	13.975			

Tabelle 5.6: Obere Schranken für  $\bar{d}(2, n)$ .

### 5.6 Erdős-Problem

In der Einführung wurde bereits auf die Fragestellung von Paul Erdős nach ganzzahligen planaren Punktmenge in allgemeiner Lage hingewiesen. Im Rückblick auf die Abschnitte 5.1, 5.4 und 5.5 erscheint diese Frage recht natürlich, da sich die Punkte der ganzzahligen planaren Punktmenge bzw. der ganzzahligen planaren Punktmenge in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser hauptsächlich auf einer Geraden bzw. auf einem Kreis konzentrieren.

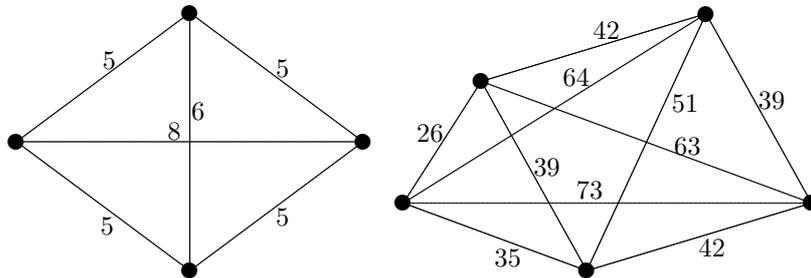


Abbildung 5.7: Ganzzahliges Vier- bzw. Fünfeck in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

Betrachten wir nun die minimalen Durchmesser  $\dot{d}(2, n)$  für ganzzahlige planare Punktmengen in allgemeiner Lage. Das gleichseitige Dreieck mit Seitenlänge 1 liefert  $\dot{d}(2, 3) = 1$ . Aus [62, 87] entnehmen wir  $\dot{d}(2, 4) = 8$ ,  $\dot{d}(2, 5) = 73$  und  $\dot{d}(2, 6) = 174$ . Die zugehörigen eindeutig bestimmten Punktmengen haben wir in Abbildung 5.7 bzw. Abbildung 5.8 dargestellt.

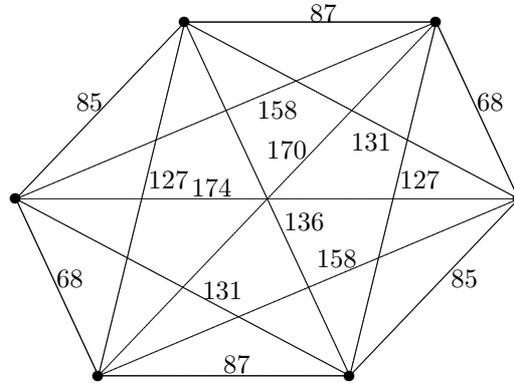


Abbildung 5.8: Ganzzahliges Sechseck in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

Mittels ordnungstreuer Erzeugung haben wir alle ganzzahligen Sechsecke in allgemeiner Lage mit einem Durchmesser kleiner gleich 15.000 konstruiert. In Abschnitt C.3 listen wir diejenigen, die primitiv sind, vollständig auf. Die Frage von Erdős nach einem ganzzahligen Siebeneck in allgemeiner Lage können wir bisher leider nicht positiv beantworten und können nur

$$\dot{d}(2, 7) > 15.000$$

angeben.

Obwohl ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage sehr seltene Objekte sind, sind Konstruktionen bekannt, die zu unendlich vielen nicht ähnlichen Sechsecken führen. Wir stellen nun eine derartige Konstruktion aus [87] vor. Hierzu betrachten wir ein ganzzahliges Dreieck  $\Delta = (a, b, c)$  mit halb-ganzzahligen Seitenhalbierenden  $\frac{x}{2}$ ,  $\frac{y}{2}$ ,  $\frac{z}{2}$  und fügen es so zusammen wie in Abbildung 5.9 dargestellt. Erfüllen die ganzen Zahlen  $a > b > c$  die Dreiecksungleichungen und gilt mit  $x, y, z \in \mathbb{N}$

folgendes Gleichungssystem,

$$\begin{aligned}x^2 &= 2b^2 + 2c^2 - a^2, \\y^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2, \\z^2 &= 2a^2 + 2b^2 - c^2,\end{aligned}\tag{5.1}$$

so ergibt sich ein ganzzahliges Sechseck in allgemeiner Lage. Für Details bzw. einen Beweis verweisen wir auf [87].

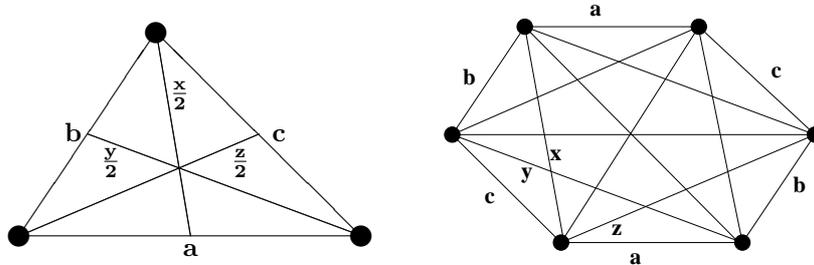


Abbildung 5.9: Sechseck aus sechs Kopien eines Dreiecks.

Wir möchten erwähnen, dass die zwei kleinsten ganzzahligen Sechsecke in allgemeiner Lage aus dieser Konstruktion hervorgehen. Um die ganzzahligen Lösungen von Gleichungssystem 5.1 systematisch zu bestimmen, durchläuft man geschickter Weise alle  $1 \leq a \leq d$ ,  $\frac{a}{2} < b < a$  und bestimmt  $x, y$  aus der Differenz der ersten beiden Gleichungen,

$$(y - x)(y + x) = 3(a - b)(a + b).$$

Die zwei restlichen Variablen  $c$  und  $z$  lassen sich nun leicht bestimmen. Berechnet man die Primfaktorzerlegungen der Zahlen kleiner  $2d$  vor und durchläuft die Teiler von  $3(a - b)(a + b)$  geschickt, siehe Abschnitt B.2, so ergibt sich ein Algorithmus mit einer Laufzeit von  $O\left(d^{2 + \frac{c}{\log \log d}}\right)$ . Um ein paar mehr Beispiele primitiver ganzzahliger Sechsecke in allgemeiner Lage zu erhalten, haben wir den beschriebenen Algorithmus mit  $d = 50.000$  rechnen lassen. Wir möchten erwähnen, dass Parameterlösungen von Gleichungssystem 5.1 schon Euler bekannt waren [35], diese aber zu astronomisch großen Werten von  $a, b, c, x$  und  $y$  führen.

Eine zweite Konstruktion aus [87] fügt an ein gleichseitiges Dreieck an jede Seite ein äquivalentes Dreieck, wie in Abbildung 5.10 dargestellt, an. Diese Konstruktion kann auch als zyklisches Antragen von Vierecken beschrieben werden.

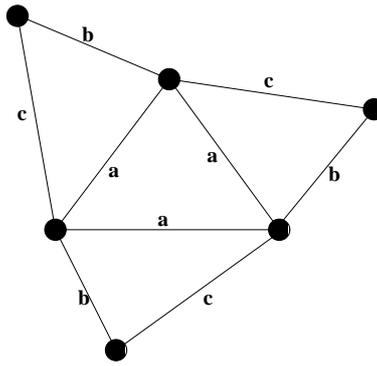


Abbildung 5.10: Sechseck aus dreimal zyklisch angetragenen Vierecken.

In [87] wurde weiterhin ein Gleichungssystem für derartige Sechsecke angegeben und die kleinste Möglichkeit bestimmt. Wir haben sie in Abbildung 5.11 dargestellt und bemerken, dass es kein weiteres primitives derartiges Beispiel mit Durchmesser kleiner gleich 15.000 gibt.

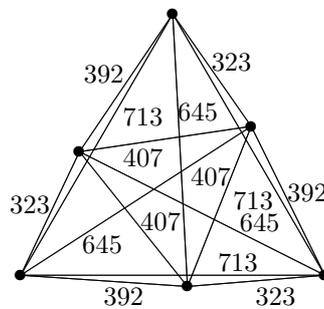


Abbildung 5.11: Kleinstes ganzzahliges Sechseck aus dreimal zyklisch angetragenen Vierecken.

Wir haben diese zwei und weitere in der Literatur beschriebene explizite Konstruktionsverfahren für ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage benutzt, um möglichst viele Beispiele zu finden. Mit Hilfe von Algorithmus 6.1.1 haben wir versucht jeweils einen weiteren ganzzahligen Punkt zu finden. Leider blieb unsere Suche nach einem ganzzahligen Siebeneck in allgemeiner Lage bisher erfolglos. Und somit bleibt die Frage nach der Existenz dieser Punktmengen weiterhin ungeklärt.

## 6 Maximale ganzzahlige Punktmengen

Aufgrund des Beweises des Satzes von Erdős und Anning (Satz 1.1.1) bzw. seiner Verallgemeinerung auf den  $\mathbb{E}^m$ , gibt es ganzzahlige Punktmengen  $\mathcal{P}$ , für die es keinen Punkt  $x$  gibt, so dass die um  $x$  erweiterte Punktmenge  $\mathcal{P} \cup \{x\}$  weiterhin ganzzahlig ist. Derartige Punktmengen wollen wir **maximal** oder **nicht erweiterbar** nennen.

Maximale ganzzahlige Punktmengen wurden, für den Spezialfall von planaren  $n$ -Clustern, also ganzzahligen planaren Punktmengen, die in ein kartesisches ganzzahliges Gitter eingebettet werden können, in [37, 38, 39] betrachtet. Die Autoren haben zwar Beispiele von Punktmengen angegeben, von denen sie vermutet haben, dass sie maximal sind, konnten aber keinen Beweis angeben. Im nächsten Abschnitt wollen wir nun einen Algorithmus angeben, mit dem man maximale ganzzahlige Punktmengen in beliebigen Dimensionen  $m$  bestimmen kann.

### 6.1 Ein Algorithmus zur Bestimmung maximaler ganzzahliger Punktmengen

Wir gehen von einem ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{S}$  in  $\mathbb{E}^m$  aus und fragen uns, ob er bereits maximal ist, oder wie wir ihn zu einer maximalen Punktmenge erweitern können. Zunächst bestimmen wir eine endliche Menge  $\mathcal{E}$  von möglichen Erweiterungspunkten  $Q$ .

Bezeichnen wir die Punkte von  $\mathcal{S}$  für  $0 \leq i \leq m$  mit  $P_i$ , und setzen eine Koordinatendarstellung  $P_i = (x_{0,i}, \dots, x_{m-1,i})$  voraus, so gilt für einen weiteren Punkt  $Q = (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_{m-1})$  im  $\mathbb{E}^m$  mit paarweise ganzzahligen Abständen zu den  $P_i$  nach Satz 1.1.1 das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \overline{P_0Q} - \overline{P_mQ} &= \delta_0 \\ &\dots \\ \overline{P_{m-1}Q} - \overline{P_mQ} &= \delta_{m-1}, \end{aligned}$$

wobei die  $\delta_i$  ganze Zahlen zwischen  $-\overline{P_i P_m}$  und  $\overline{P_i P_m}$  sind. Unter Verwendung der Koordinatendarstellung lässt es sich umformulieren zu

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,0} - \tilde{x}_j)^2} - \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2} &= \delta_0 \\ &\dots \\ \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m-1} - \tilde{x}_j)^2} - \sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2} &= \delta_{m-1}. \end{aligned}$$

Nach Trennen der Wurzelausdrücke, Quadrieren und Ersetzen von  $\sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2}$  durch  $\tilde{x}_m$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,0} - \tilde{x}_j)^2 &= \delta_0^2 + 2\delta_0 \tilde{x}_m + \sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2 \\ &\dots \\ \sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m-1} - \tilde{x}_j)^2 &= \delta_{m-1}^2 + 2\delta_{m-1} \tilde{x}_m + \sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2. \end{aligned}$$

Bringt man alle Ausdrücke auf eine Seite, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1} [x_{j,0}^2 - x_{j,m}^2 + 2(x_{j,m} - x_{j,0})\tilde{x}_j] - 2\delta_0 \tilde{x}_m - \delta_0^2 &= 0 \\ &\dots \\ \sum_{j=0}^{m-1} [x_{j,m-1}^2 - x_{j,m}^2 + 2(x_{j,m} - x_{j,m-1})\tilde{x}_j] - 2\delta_{m-1} \tilde{x}_m - \delta_{m-1}^2 &= 0 \end{aligned}$$

ein lineares Gleichungssystem der Form  $A\tilde{x} - b = 0$ . Da der Simplex  $S$  per Definition nicht entartet ist, sind die Zeilen von  $A$  linear unabhängig. Falls nun  $\delta_i = 0$  für alle  $0 \leq i \leq m-1$  gilt, so gibt es folglich eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Ansonsten gibt es einen Index  $j$  mit  $\delta_j \neq 0$  und der Lösungsraum ist eindimensional. In diesem Fall drücken wir die Variablen  $\tilde{x}_i$  linear durch  $\tilde{x}_0$  aus und setzen dies in eine Zeile  $j$  des obigen Gleichungssystems ein, wobei wir  $\tilde{x}_m$  wieder durch  $\sqrt{\sum_{j=0}^{m-1} (x_{j,m} - \tilde{x}_j)^2}$  ersetzen. Nach einer weiteren Umformung erhält man eine quadratische Gleichung in  $x_0$  und somit keine, eine oder zwei Lösungen für das ursprüngliche Gleichungssystem. Zur Sicherheit kann man die gefundenen Lösungen noch mal durch Einsetzen verifizieren.

In Kurzform können wir die Bestimmung der Menge  $\mathcal{E}$  wie folgt formulieren.

### 6.1.1 Algorithmus (Erweiterungsmenge)

*Eingabe:* ganzzahliges Simplex  $\mathcal{S}$

*Ausgabe:* Menge  $\mathcal{E}$  von Punkten  $Q$  mit ganzzahligen Abständen zu den Eckpunkten von  $\mathcal{S}$

**begin**

$\mathcal{E} = \emptyset$

Durchlaufe alle möglichen Werte für die  $\delta_i$

    Löse das zugehörige Gleichungssystem

        Füge die Lösungen zu  $\mathcal{E}$  hinzu, die zu allen Eckpunkten  
        von  $\mathcal{S}$  positive ganzzahlige Abstände besitzen

**end**

Bildet man nun mit den Punkten von  $\mathcal{E}$  einen Graphen  $\mathcal{G}$ , bei dem zwischen zwei Knoten genau dann eine Kante existiert, wenn der Abstand zwischen den zugehörigen Punkten ganzzahlig ist, so entsprechen die maximalen ganzzahligen Punktmengen genau den Cliques von  $\mathcal{G}$ . Für die Cliquesuche verweisen wir auf Abschnitt 5.4. Dort haben wir ebenfalls ganzzahlige Punktmengen konstruiert, indem wir Cliques in einem Graphen  $\mathcal{G}(\Delta)$  gesucht haben. Zur Bestimmung der Knoten von  $\mathcal{G}(\Delta)$  hatten wir dabei ordnungstreues Erzeugen verwendet. Theoretisch könnten wir die Knoten auch mit Algorithmus 6.1.1 bestimmen. Da seine Komplexität aber  $\Omega(\text{diam}(\mathcal{S})^m)$  beträgt, ist er dafür nicht geeignet.

## 6.2 Beispiele maximaler Punktmengen

Die zwei Beispiele von maximalen Punktmengen aus [37] sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Mit Hilfe von Algorithmus 6.1.1 kann man leicht zeigen, dass es jeweils in der Ebene keinen weiteren Punkt  $Q$  mit paarweise ganzzahligen Abständen gibt [98].

In [38] wurde die Frage gestellt, ob es ganzzahlige Dreiecke mit ganzzahligen Koordinaten gibt, die nicht mehr erweiterbar sind. Da jedes ganzzahlige Dreieck mit ganzzahligen Koordinaten Charakteristik 1 hat und es für jedes ganzzahlige Dreieck mit Charakteristik 1 eine Einbettung in ein ganzzahliges kartesisches Gitter gibt, betrachten wir das Problem losgelöst von einer speziellen Koordinatendarstellung. Ein Durchlauf der Dreiecke mit Charakteristik 1 und der Test auf Erweiterbarkeit mit Hilfe von Algorithmus 6.1.1 liefert sieben maximale Dreiecke

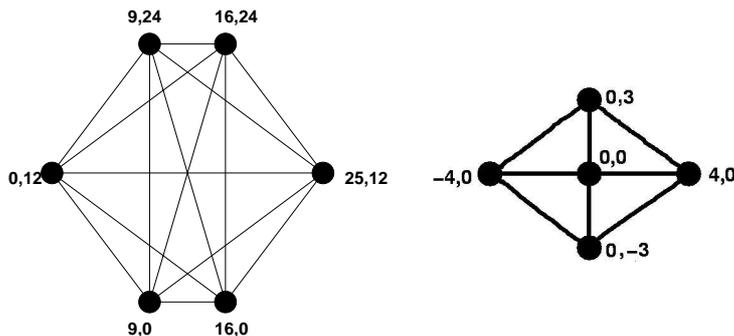


Abbildung 6.1: Zwei Beispiele maximaler Punktmengen.

mit Durchmesser kleiner 5.000,

(2.066, 1.803, 505), (2.549, 2.307, 1.492), (3.796, 2.787, 2.165),  
 (4.083, 2.425, 1.706), (4.426, 2.807, 1.745), (4.801, 2.593, 2.210)  
 und (4.920, 4.177, 985).

Darstellungen in ganzzahligen Koordinaten wären z.B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.030 & -384 \\ 1.653 & -720 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2.451 & -700 \\ 1.443 & -1.800 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3.404 & -1.680 \\ 2.760 & 387 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3.720 & -1.683 \\ 2.064 & -1.273 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.410 & -376 \\ 2.793 & 280 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3.649 & -3.120 \\ 2.015 & -1.632 \end{pmatrix} \\
\text{und } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4.488 & -2.016 \\ 4.015 & -1.152 \end{pmatrix}.$$

Fragt man nach maximalen ganzzahligen Tetraedern, die sich in ein ganzzahliges Gitter einbetten lassen, so stellt man fest, dass es hiervon recht viele gibt, z.B.

eines mit den Koordinaten  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Fordern wir zusätzlich, dass die

Tetraeder *heronsch* sein sollen, also ein ganzzahliges Volumen, Seitenflächen mit ganzzahliger Fläche und ganzzahlige Seitenlängen besitzen soll, siehe auch [22],

so sind die kleinsten maximalen derartigen Tetraeder gegeben durch die Koordinaten

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 396 & 132 & 99 \\ 288 & -84 & 0 \\ 176 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 432 & 144 & 108 \\ 336 & -48 & 20 \\ 297 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 528 & 396 & 121 \\ 468 & 204 & -423 \\ 144 & 108 & -135 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 540 & 180 & 135 \\ 336 & 252 & 0 \\ 400 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 624 & 468 & 0 \\ 648 & 360 & -189 \\ 660 & 264 & -77 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 672 & 104 & 0 \\ 672 & 0 & 0 \\ 600 & 0 & 135 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 672 & 104 & 0 \\ 672 & -104 & 0 \\ 600 & 0 & 135 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 672 & 153 & 104 \\ 672 & 0 & 104 \\ 672 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 672 & 153 & 104 \\ 672 & -153 & 104 \\ 672 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 704 & 528 & 84 \\ 704 & 528 & -84 \\ 616 & 363 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 756 & 435 & 308 \\ 756 & -45 & 108 \\ 756 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 756 & 520 & 117 \\ 756 & 0 & 117 \\ 756 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 756 & 525 & 92 \\ 756 & 45 & -108 \\ 756 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 768 & 224 & 0 \\ 756 & 108 & -45 \\ 600 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 792 & 264 & 198 \\ 576 & -168 & 0 \\ 352 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir die Koordinaten des ersten Punktes als  $(0, 0, 0)$  gewählt und aus Platzgründen weggelassen haben.

Die Ganzzahligkeit der Koordinaten spielt für Algorithmus 6.1.1 keine Rolle und wurde nur wegen der ungelösten Probleme in [37, 38, 39] betrachtet. Nun lassen wir diese Bedingung wieder fallen und fragen nach dem minimalem Durchmesser eines  $m$ -dimensionalen maximalen Simplex. Das folgende Lemma klärt die Situation vollständig. Für  $m \geq 2$  beträgt der minimale Durchmesser 1 und für  $m = 1$  gibt es keine maximalen ganzzahligen Punktmengen.

**6.2.1 Lemma** *Das  $m$ -dimensionale Simplex  $S$  bestehend aus lauter Einheitsabständen ist für  $m \geq 2$  maximal.*

**Beweis.** Wir betrachten einen Punkt  $Q$  mit ganzzahligen Abständen zu den Ecken von  $S$ . Aufgrund der Dreiecksungleichung können die Abstände des Punktes  $Q$ , nach geeigneter Wahl von  $x$ , nur die Werte  $x$  bzw.  $x + 1$  annehmen. Die Häufigkeit von Abstand  $x$  bezeichnen wir mit  $i$  und die Häufigkeit von Abstand  $x + 1$  mit  $j$ . Für die Cayley-Menger-Determinante  $C(S \cup Q)$  der Punktmenge  $S \cup Q$  zeigt man leicht per Induktion,

$$C(S \cup Q) = (-1)^{i+j} [(4ij - 2i - 2j)x^2 + 4(i - 1)jx + ij + i - 1 - j].$$

Nach Lemma 2.1.2 muss dieser Ausdruck gleich Null sein. Für  $\min(i, j) \geq 2$  ist jedoch die Diskriminante

$$8(i+j)(i+j-ij-1)$$

dieser in  $x$  quadratischen Gleichung negativ, es existiert also keine reelle und somit keine ganzzahlige Lösung. Für  $i = 1$  ist  $x = 0$  und für  $j = 1$  ist  $x = -1$  eine doppelte Nullstelle. Da wir o.E.  $i \geq 1$  annehmen können, bleibt somit nur der Fall  $j = 0$  übrig, der zu

$$x = \pm \sqrt{\frac{i-1}{2i}} < 1$$

führt.

□

# 7 Automorphismengruppen von ganzzahligen Punktmenge

Für eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  bezeichnen wir die Menge

$$\text{Aut}(\mathcal{P}) = \{\sigma \in S_n \mid \delta(i, j) = \delta(\sigma(i), \sigma(j)) \forall 0 \leq i < j < n\}$$

als **Automorphismengruppe** von  $\mathcal{P}$ . Wir untersuchen in diesem Kapitel die Automorphismengruppen von ganzzahligen Punktmenge, da wir im nächsten Kapitel sehen werden, dass die Ordnung von  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  einen großen Einfluss auf die Wahl eines schnellen Kanonizitätstests hat. Eine häufig verwendete Technik bei der Konstruktion diskreter Strukturen ist das Vorschreiben einer Untergruppe  $U$  der Automorphismengruppe, siehe z.B. [15, 20, 77, 86, 154]. D.h. man konstruiert nur noch Objekte deren Automorphismengruppe  $U$  als Untergruppe enthält. Motivation hierfür ist, dass die *interessanten* Objekte häufig eine große Automorphismengruppe besitzen und die Konstruktion dieser speziellen Objekte schneller geht als die vollständige Konstruktion. Somit gibt es ein prinzipielles Interesse an den möglichen Automorphismengruppen diskreter Strukturen. Wir werden in den folgenden Abschnitten die Automorphismengruppen von ganzzahligen Punktmenge im zwei- und im dreidimensionalen euklidischen Raum klassifizieren, eine Datenstruktur für Gruppen aus der Literatur zitieren und einen Algorithmus zur Berechnung der Automorphismengruppe einer Punktmenge beschreiben.

Über die Automorphismengruppen von Punktmenge bzw. Kristallen, ohne die Bedingung der Ganzzahligkeit, gibt es viel Literatur, z.B. [126, 155, 156], auf die wir uns im Folgenden beziehen. Anstatt sich auf die Permutationsgruppen der Punkte von  $\mathcal{P}$  zu beschränken, ist es nützlicher, längen- und winkeltreue Abbildungen des Euklidischen Raumes, sogenannte Isometrien, zu betrachten. Dies sind Spiegelungen an einer Hyperebene, Drehungen um einen Punkt bzw. Kombinationen davon. Die Fortsetzung der anfangs definierten Permutationsgruppe  $\text{Aut}(\mathcal{P})$  als Untergruppe der Isometrien bezeichnen wir als  $\overline{\text{Aut}}(\mathcal{P})$ .

## 7.1 Automorphismengruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum

Die Automorphismengruppen von planaren Punktmengen sind (siehe z.B. [156]) Untergruppen der Diedergruppe  $D_r$ , also der Automorphismengruppe eines regelmäßigen  $r$ -Ecks. Nehmen wir die Nebenbedingung der paarweise ganzzahligen Abstände wieder hinzu, so gilt folgendes Lemma.

**7.1.1 Lemma** *Die möglichen Automorphismengruppen von ganzzahligen planaren Punktmengen sind  $id$ ,  $\mathbb{Z}_2$ ,  $D_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$  und  $D_3 \simeq S_3$ .*

**Beweis.** Betrachten wir zunächst ein Element  $\bar{g} \in \overline{Aut}(\mathcal{P})$  der Ordnung  $r \geq 3$  und einen Punkt  $Q$  aus  $\mathcal{P}$ . Wenden wir nun  $\bar{g}$  wiederholt auf  $Q$  an, so ergibt sich ein regelmäßiges  $r$ -Eck  $\mathcal{R}$ . Für die drei aufeinanderfolgenden Ecken  $Q_0 = Q$ ,  $Q_1 = \bar{g}Q$  und  $Q_2 = \bar{g}^2Q$  von  $\mathcal{R}$  gilt

$$\cos\left(\frac{\pi}{r}\right) = \frac{\delta(Q_0, Q_2)}{2\delta(Q_0, Q_1)} \in \mathbb{Q}.$$

Mit Hilfe von Lemma 1.1.3 folgt somit  $r = 3$  und es bleiben nur die aufgelisteten Gruppen als Möglichkeiten übrig.  $\square$

Die ersten drei in Abbildung 5.1 dargestellten ganzzahligen planaren Punktmengen besitzen  $D_3$ ,  $id$  bzw.  $\mathbb{Z}_2$  als Automorphismengruppe. Für  $D_3$  und  $id$  sind dies auch Beispiele mit minimalem Durchmesser. Die ganzzahlige planare Punktmenge mit minimalem Durchmesser und  $\mathbb{Z}_2$  als Automorphismengruppe ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 2, 2 und 1. Für  $\mathbb{Z}_3$  als Automorphismengruppe ist die ganzzahlige planare Punktmenge mit minimalem Durchmesser in Abbildung 5.11 dargestellt. Außer diesem Beispiel ist bisher keine weitere primitive derartige Punktmenge bekannt. Für  $\mathbb{D}_2$  als Automorphismengruppe ist die ganzzahlige planare Punktmenge mit minimalem Durchmesser durch die vier Eckpunkte eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 4 gegeben.

Aus der Kenntnis von  $Aut(\mathcal{P})$  ergeben sich eine Reihe von Einschränkungen an die Anzahl der Punkte bzw. die Charakteristik der Punktmenge.

**7.1.2 Lemma** *Für eine ganzzahlige planare Punktmenge  $\mathcal{P}$  gilt*

$$\begin{aligned} Aut(\mathcal{P}) = id &\Rightarrow n \geq 3, \\ Aut(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}_2 &\Rightarrow n \geq 3, \\ Aut(\mathcal{P}) = D_2 &\Rightarrow n \geq 4, \\ Aut(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}_3 &\Rightarrow n \geq 6, n \equiv 0 \pmod{3}, char(\mathcal{P}) = 3 \text{ und} \\ Aut(\mathcal{P}) = D_3 &\Rightarrow n = 3, char(\mathcal{P}) = 3. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Anzahl  $n$  der Punkte einer planaren Punktmenge beträgt wegen unserer Definition der Dimension mindestens 3. Da  $Aut(\mathcal{P})$  eine Untergruppe der  $S_n$  sein muss, besitzt eine Punktmenge mit  $Aut(\mathcal{P}) = D_2$  mindestens 4 Punkte. Ist  $\bar{g} \in \overline{Aut}(\mathcal{P})$  ein Element der Ordnung 3, so enthält  $\mathcal{P}$  ein gleichseitiges Dreieck  $\mathcal{R}$  und besitzt somit die Charakteristik 3. Das Element  $\bar{g}$  entspricht einer Drehung von  $\frac{2}{3}\pi$  um den Schwerpunkt  $\mathcal{O}$  von  $\mathcal{R}$ . Da  $\mathcal{O}$  der einzige Fixpunkt von  $\bar{g}$  ist, aber keine ganzzahligen Abstände zu den Eckpunkten von  $\mathcal{R}$  besitzt, muss jeder Punkt von  $\mathcal{P}$  auf einem gleichseitigen Dreieck liegen und somit  $n$  durch 3 teilbar sein. Ein gleichseitiges Dreieck besitzt die  $D_3$  als Automorphismengruppe und somit gilt  $n \geq 6$  für  $Aut(\mathcal{P}) = \mathbb{Z}_3$ . Nehmen wir nun an, dass es eine ganzzahlige planare Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit  $n \geq 6$  und  $Aut(\mathcal{P}) = D_3$  gibt. Sei  $\bar{g} \in \overline{Aut}(\mathcal{P})$  wieder ein Element der Ordnung 3. Da die Punkte von  $\mathcal{P}$  auf  $\frac{n}{3}$  gleichseitigen Dreiecken liegen, können wir sie so bezeichnen, dass das  $i$ -te gleichseitige Dreieck die Punkte  $Q_{i,0}$ ,  $Q_{i,1} = \bar{g}Q_{i,0}$  und  $Q_{i,2} = \bar{g}^2Q_{i,0}$  als Eckpunkte besitzt. Betrachten wir  $\bar{g}$  nun als Permutation  $g$ , in Zykelschreibweise, auf den  $n$  Punkten, so besteht es aus  $\frac{n}{3}$  Zyklen der Länge 3. Sei nun  $\bar{h} \in \overline{Aut}(\mathcal{P})$  ein Element der Ordnung 2 und  $h$  die zugehörige Permutation in Zykelschreibweise. Man kann sich überlegen, dass  $h$  aus  $\frac{n}{3}$  Zyklen der Länge 2 bestehen muss, weil sonst  $g$  und  $h$  zusammen keine zur  $D_3$  isomorphe Gruppe erzeugen. Somit sind  $\frac{n}{3}$  Punkte von  $\mathcal{P}$  Fixpunkte von  $h$  bzw.  $\bar{h}$ . Da  $\bar{h}$  als Element der Ordnung 2 eine Spiegelung ist, liegen diese Punkte, o.E.  $Q_{i,0}$ , zusammen mit dem Schwerpunkt  $\mathcal{O}$  eines gleichseitigen Dreiecks auf einer Geraden, siehe Abbildung 7.1. Für zwei unterschiedliche gleichseitige Dreiecke  $i$  und  $j$  gilt  $Q_{i,2}Q_{i,0}, Q_{j,2}Q_{j,0} \in \mathbb{N}$  und  $\overline{\mathcal{O}Q_{i,0}\mathcal{O}Q_{j,0}} \in \mathbb{Q}\sqrt{3}$ . Somit kann der Abstand zwischen  $Q_{i,0}$  und  $Q_{j,0}$  nicht ganzzahlig sein.  $\square$

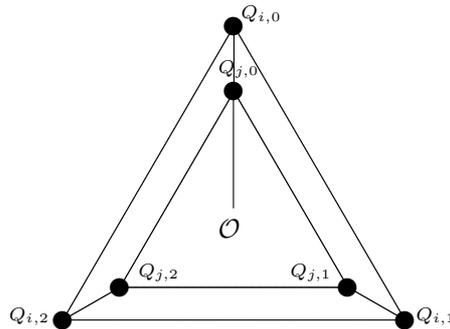


Abbildung 7.1: Planare Punktmenge mit  $D_3$  als Automorphismengruppe.

Die Automorphismengruppen von dreidimensionalen Punktmengen sind, siehe z.B. [156], Untergruppen der Diedergruppe  $D_r$  (Pyramiden und Bipyramiden),  $D_r \times \mathbb{Z}_2$  (gerade Prismen und Bipyramiden) und Untergruppen der Automorphismengruppen der fünf platonischen Körper. Da nicht alle Abstände eines Würfels, Oktaeders, Dodekaeders bzw. Ikosaeders ganzzahlig sein können, folgt mit Lemma 7.1.1 eine Charakterisierung der möglichen Automorphismengruppen von ganzzahligen dreidimensionalen Punktmengen.

**7.1.3 Lemma** *Für eine ganzzahlige 3-dimensionale Punktmenge  $\mathcal{P}$  gilt*

$$\text{Aut}(\mathcal{P}) \in \{id, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6, S_3, S_3 \times \mathbb{Z}_2, A_4, S_4\}.$$

Für höhere Dimensionen können wir nur erwähnen, dass das ganzzahlige  $m$ -dimensionale Simplex  $\mathcal{S}$  mit gleich langen Seiten die symmetrische Gruppe  $S_{m+1}$  als Automorphismengruppe hat, die Ordnung der Automorphismengruppe also exponentiell in  $m$  sein kann.

## 7.2 Datenstrukturen für Gruppen

Da die Ordnung der Automorphismengruppe einer ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmenge u.U. sehr groß sein kann, wir sie aber mit dem PC bearbeiten wollen, benötigen wir eine geeignete Datenstruktur für Gruppen. Wir benutzen in dieser Arbeit **Stabilisatorketten** [160] und **Labelled Branchings** [29, 79], da diese Datenstrukturen nur einen, in der Anzahl  $n$  der Punkte einer Punktmenge, polynomialen Speicherbedarf haben und die zugehörigen Algorithmen nur eine in  $n$  polynomiale Rechenzeit benötigen. Für Details verweisen wir auf die Literatur, z.B. [78, 111, 113].

## 7.3 Iterierte Klassifizierung

In Abschnitt 7.1 haben wir beschrieben, welche Gruppen als Automorphismengruppen von zwei- oder dreidimensionalen Punktmengen auftreten können. Doch wie bestimmt man nun die Automorphismengruppe einer gegebenen Punktmenge? Eines der schnellsten Programme zur Bestimmung der Automorphismengruppe von Graphen ist, nach eigener Aussage, NAUTY [115] von Brendan McKay. Es beruht auf dem Prinzip der **iterierten Klassifizierung** [116]. Da wir ganzzahlige Punktmengen als kantenbewertete Graphen betrachten können lassen sich die Methoden leicht übertragen. Für unseren Spezialfall wollen wir die Methode kurz an

einem Beispiel erläutern, verweisen aber für den allgemeinen Fall bzw. für eine detailliertere Darstellung auf die Literatur [113, 172].

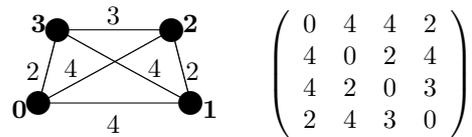


Abbildung 7.2: Nummerierte gazzahlige planare Punktmenge mit zugehöriger Abstandsmatrix.

In Abbildung 7.2 haben wir eine gazzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}$  abgebildet, bei der wir die Knoten nummeriert haben. Unser Objekt besteht aus den Knoten 0, 1, 2, 3 und den bewerteten Kanten zwischen je zwei Knoten. Wir wollen hier abkürzend die Kanten zwischen Knoten  $i$  und Knoten  $j$  mit  $ij$  bezeichnen. Bei der iterierten Klassifizierung werden die Knoten und die Kanten in Klassen eingeteilt. Diese Einteilung bezeichnen wir mit  $C_{\mathcal{V}}$  bzw.  $C_{\mathcal{E}}$ . Als Startbelegung klassifizieren wir nur die Kanten abfallend nach ihrer Bewertung,

$$C_{\mathcal{V}} = (\{0, 1, 2, 3\}) \quad \text{und} \quad C_{\mathcal{E}} = (\{01, 02, 13\}, \{23\}, \{03, 12\}).$$

Nun versuchen wir abwechselnd die Knoten- und die Kantenklassen zu verfeinern. Da jede Kante aus zwei Knoten besteht, können wir zu jedem Knoten  $v$  einen **Häufigkeitsvektor**  $h(v)$  bilden, der angibt wie oft  $v$  in den Kanten der Klassen von  $C_{\mathcal{E}}$  enthalten ist. In unserem Beispiel gilt  $h(0) = (2, 0, 1)$ ,  $h(1) = (2, 0, 1)$ ,  $h(2) = (1, 1, 1)$  und  $h(3) = (1, 1, 1)$ . Nun verfeinern wir jede Knotenklasse von  $C_{\mathcal{V}}$ , indem wir die Knoten lexikographisch abfallend nach  $h$  in feinere Klassen einteilen. Dies ergibt

$$C_{\mathcal{V}} = (\{0, 1\}, \{2, 3\}).$$

Analog können wir auch die Kantenklassen verfeinern, indem wir zählen, wie viele Knoten aus den einzelnen Knotenklassen in einer bestimmten Kante enthalten sind:  $h(01) = (2, 0)$ ,  $h(02) = (1, 1)$ ,  $h(13) = (1, 1)$ ,  $h(23) = (0, 2)$ ,  $h(03) = (1, 1)$  und  $h(12) = (1, 1)$ . Dies führt zu

$$C_{\mathcal{E}} = (\{01\}, \{02, 13\}, \{23\}, \{03, 12\}).$$

Der Versuch erneut die Knotenklassen zu verfeinern bringt keine Veränderung. In diesem Fall wählt man, nach irgendeiner festgelegten Regel, eine Knotenklasse aus und **zeichnet** einen Knoten **aus**, d.h. man steckt ihn in eine eigene Klasse.

Dies tut man auf jede mögliche Art und Weise. In unserem Beispiel erhalten wir zwei Fälle, wenn wir die erste Knotenklasse gewählt haben,

$$C_{\mathcal{V}} = (\{0\}, \{1\}, \{2, 3\}) \quad \text{und} \quad C_{\mathcal{V}'} = (\{1\}, \{0\}, \{2, 3\}).$$

Verfeinert man nun wieder, so endet man bei

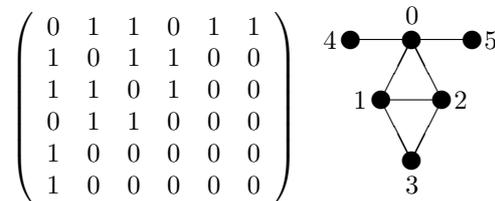
$$C_{\mathcal{V}_0} = (\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}) \quad \text{bzw.} \quad C_{\mathcal{V}_1} = (\{1\}, \{0\}, \{3\}, \{2\}).$$

Allgemein erhält man eine Liste von möglichen Einteilungen  $C_{\mathcal{V}_i}$  in einelementige Klassen. Betrachtet man nun zwei Abstandsmatrizen gemäß der zu  $C_{\mathcal{V}_i}$  bzw.  $C_{\mathcal{V}_j}$  zugehörigen Nummerierung, so kann man entscheiden, ob die Matrizen übereinstimmen oder nicht. Im ersten Fall ist durch die Abbildung von  $C_{\mathcal{V}_i}$  nach  $C_{\mathcal{V}_j}$  ein Automorphismus der Punktmenge, von der wir ursprünglich ausgegangen sind, gegeben. Es lässt sich zeigen, dass wir jeden Automorphismus auf diese Weise finden können. Hier gilt  $Aut(\mathcal{P}) = \{id, (0, 1)(2, 3)\}$ .

Benutzt man die Information gefundener Automorphismen geeignet, siehe z.B. [116], so muss man nicht alle Automorphismen explizit auflisten und es entsteht ein in der Praxis sehr schneller Algorithmus. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen exponentieller Aufwand entsteht [121].

Da der Algorithmus aber für die meisten Fälle sehr schnell ist und eine kanonische Nummerierung der Punkte einer Punktmenge liefert, würden wir ihn gerne für den Kanonizitätstest einsetzen. Das folgende Beispiel zeigt allerdings, dass wir, mit unserer Wahl von  $\Gamma$ , die iterierte Klassifizierung nicht in dieser Form verwenden können. Zum Zwecke größerer Allgemeinheit geben wir ein Beispiel für Graphen anstatt für ganzzahlige Punktmengen an, bei dem Bedingung 3.A' verletzt und somit das ordnungstreue Erzeugen nicht anwendbar ist.

**7.3.1 Beispiel** Betrachten wir folgende Adjazenzmatrix eines Graphen  $\mathcal{G}$



so stellen wir fest, dass sie kanonisch bezüglich der iterierten Klassifizierung ist. Der erste Klassifizierungsschritt ergibt nämlich für die Ecken von  $\mathcal{G}$  die Einteilung

$$(\{0\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\})$$

und die Permutationen  $(1, 2)$  und  $(4, 5)$  sind Elemente der Automorphismengruppe von  $\mathcal{G}$ .

Entfernt man nun Knoten 5 aus  $\mathcal{G}$ , so ergibt sich nach drei Klassifizierungsschritten die Einteilung der Ecken zu

$$(\{1, 2\}, \{0\}, \{3\}, \{4\}).$$

Man rechnet leicht nach, dass für jede der beiden möglichen Nummerierungen Bedingung 3.A' verletzt ist.  $\diamond$

Die Betrachtungen in [56] zum Zusammenhang zwischen iterierter Klassifizierung und ordnungstreuer Erzeugung lassen uns hoffen, die iterierte Klassifizierung in Zukunft doch noch so zu modifizieren, dass wir sie für unsere Zwecke nutzen können.



## 8 Der Kanonizitätstest

Beim ordnungstreuen Erzeugen muss jedes Mal, wenn ein neues Objekt  $\mathcal{O}$  erzeugt wurde, getestet werden, ob  $\mathcal{O}$  kanonisch, semi-kanonisch oder nichts von beidem ist. Eine Möglichkeit diese Entscheidung zu treffen besteht darin, den kanonischen Repräsentanten der Isomorphieklasse von  $\mathcal{O}$  zu bestimmen und ihn mit  $\mathcal{O}$  zu vergleichen. Die Bestimmung des kanonischen Repräsentanten bezeichnet man auch als **Kanonisierung**. In unserer Situation brauchen wir  $\mathcal{O}$  nicht zu **kanonisieren** sondern nur auf Kanonizität zu testen. Oftmals können wir aus diesem kleinen Unterschied nicht wirklich Vorteile ziehen, so dass das erste Verfahren, das wir vorstellen, auch kanonisiert.

Die einfachste Möglichkeit,  $\mathcal{O}$  zu kanonisieren ist, alle Nummerierungen  $\sigma$  von  $\mathcal{O}$  zu durchlaufen und den maximalen Wert  $\sigma(\mathcal{O})$  auszuwählen. Da es für Punkt-mengen  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten  $n!$  Nummerierungen  $\sigma$  gibt, ist dieses Vorgehen nur für eine sehr kleine Anzahl von Punkten praktikabel.

In den folgenden zwei Abschnitten werden wir Methoden kennen lernen, mit denen man die **Kandidatenmenge**, dies ist die Menge der Nummerierungen  $\sigma$ , die ausprobiert werden müssen, reduzieren kann. Hierbei beschränken wir unsere Betrachtungen der Einfachheit halber zunächst auf die Entscheidung kanonisch oder nicht kanonisch (lassen also den Fall semi-kanonisch aus).

Die vorgestellten Techniken nutzen die Einschränkungen durch die Geometrie des  $\mathbb{E}^m$  nicht explizit aus. Für derartige Untersuchungen verweisen wir auf die Literatur, siehe z.B. [18, 19, 84].

### 8.1 Der Lerneffekt

Der Vergleich von  $\mathcal{O}$  mit  $\sigma(\mathcal{O})$  hat drei mögliche Ausgänge,  $\mathcal{O} \{ \prec, =, \succ \} \sigma(\mathcal{O})$ . Diese Information kann man nutzen, um die Kandidatenmenge zu reduzieren, oder in den Worten von Grund [52]:

*Man kann etwas lernen!*

Falls  $\mathcal{O} \prec \sigma(\mathcal{O})$  kann  $\mathcal{O}$  nicht kanonisch sein, da es ein größeres Objekt in seiner Nebenklasse gibt und wir können den Kanonizitätstest sofort beenden. Im

Fall  $\mathcal{O} \succ \sigma(\mathcal{O})$  können wir häufig mit  $\sigma$  auch noch weitere Nummerierungen aus der Kandidatenmenge streichen.

**8.1.1 Beispiel** Betrachten wir die Abstandsmatrix

$$\Delta(\mathcal{P}, id) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und den zugehörigen Vektor  $\tau(\Delta(\mathcal{P}, id)) = (4, 4, 3, 2, 2, 1)$ , siehe Abschnitt 2.2. Für die Nummerierung  $\sigma = (02)(13) = [2, 3, 0, 1]$  gilt  $\tau(\Delta(\mathcal{P}, \sigma)) = (1, 4, 2, 3, 2, 4)$ . Vergleichen wir die zwei Vektoren, so stellen wir fest, dass sie sich schon in der vordersten Stelle unterscheiden. Da hierfür die ersten zwei Punkte der Anordnung  $\sigma$  verantwortlich sind, können wir alle Anordnungen der Form  $[2, 3, *, *]$  bzw. aus Symmetriegründen auch alle Anordnungen der Form  $[3, 2, *, *]$  aus der Kandidatenmenge streichen.  $\diamond$

Um die Kandidatenmenge nicht im Speicher halten zu müssen, wollen wir die Anordnungen in lexikographischer Ordnung ordnungstreu durchlaufen. Hierfür nehmen wir eine Funktion  $next(\sigma, p)$ , die zu einer Anordnung  $\sigma$  einen Nachfolger bestimmt, als gegeben an. Hierbei soll  $p$  die Position bezeichnen, an der sich die Anordnung ändern muss. Für die Bestimmung von  $p$  benutzen wir eine **Lernfunktion**, z.B. die in Beispiel 8.1.1 angedeutete Lernfunktion:

### 8.1.2 Algorithmus (Einfaches Lernen)

*Eingabe:*  $\delta, \sigma, n$

*Ausgabe:*  $p$

**begin**

**for**  $i$  **from** 1 **to**  $n - 1$  **do**

**for**  $j$  **from** 0 **to**  $i - 1$  **do**

**if**  $\delta(i, j) > \delta(\sigma(i), \sigma(j))$  **then return**  $i$  **end**

**end**

**end**

**return**  $n - 2$

**end**

Durchlaufen wir nun die Kandidatenmenge der Abstandsmatrix aus Beispiel 8.1.1 mit Hilfe von Algorithmus 8.1.2 als Lernfunktion, so müssen wir nur 16 anstatt  $4! = 24$  Kandidaten testen. Für die planare Punktmenge  $\mathcal{P}_{2,9}$  mit minimalem Durchmesser aus 9 Punkten, siehe Abschnitt 5.1, sind nur 114 anstatt  $9! = 362.880$

Kandidaten zu testen. Diese Reduktion scheint schon ganz gut zu sein, aber es lässt sich zeigen, dass mit Algorithmus 8.1.2 als Lernfunktion immer mindestens  $o(n^2)$  Kandidaten durchlaufen werden, und falls alle Abstände identisch sind, sogar  $n!$  Kandidaten getestet werden müssen.

Allgemein muss bei dem eben beschriebenen Backtrackverfahren immer mindestens die ganze Automorphismengruppe durchlaufen werden. Nach Lemma 7.1.1 stellt dies für planare Punktmengen noch kein Problem dar, da diese sehr kleine Automorphismengruppen besitzen. Für den planaren Fall haben wir auch diesen einfachen Backtrackalgorithmus, mit leichten Modifikationen, verwendet. Bei steigender Dimension  $m$  kann die Ordnung der Automorphismengruppe allerdings, wie bereits erwähnt, bis zu  $(m+1)!$  betragen. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, wie man den Durchlauf der kompletten Automorphismengruppe beim Backtracking vermeiden kann.

Eine weitere Idee zur Verbesserung der Backtrackverfahren kann man aus den entsprechenden Verfahren in der diskreten Optimierung übernehmen, die Verwendung von oberen Schranken.

Die Endknoten im Backtrackbaum entsprechen jeweils einer Nummerierung bzw. Permutation  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \dots & n-1 \\ p_0 & \dots & p_{n-1} \end{pmatrix}$  der  $n$  Knoten einer Punktmenge  $\mathcal{P}$ . Zu jeder Permutation  $\sigma$  bezeichnen wir die zugehörige Abstandsmatrix mit  $\Delta(\mathcal{P}, \sigma)$ , siehe Abschnitt 2.1. Bei den inneren Knoten im Backtrackbaum sind noch nicht alle Werte der  $p_i$  bekannt und wir sprechen von einer **unvollständigen Permutation**  $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & r-1 & r & \dots & n-1 \\ p_0 & \dots & p_{r-1} & \star & \dots & \star \end{pmatrix}$ , wobei die  $\star$  bedeuten sollen, dass diese Werte noch nicht festgelegt sind. Die Menge der Endknoten die *unterhalb* des zu  $\tilde{\sigma}$  zugehörigen Knoten liegen bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}(\tilde{\sigma})$ . Formaler bedeutet dies

$$\mathcal{F}(\tilde{\sigma}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & n-1 \\ p'_0 & \dots & p'_{n-1} \end{pmatrix} \mid p'_i = p_i \forall 0 \leq i < r \right\},$$

wobei wir für  $\tilde{\sigma}$  obige Bezeichnungen voraussetzen. Eine Abbildung  $f$ , die eine unvollständige Permutation  $\tilde{\sigma}$  auf eine Abstandsmatrix  $\Delta'$  von  $\mathcal{P}$  abbildet, bezeichnen wir als **obere-Schranken-Abbildung**, falls für alle unvollständigen Permutationen  $\tilde{\sigma}$

$$\forall \sigma \in \mathcal{F}(\tilde{\sigma}) : \Delta(\mathcal{P}, \sigma) \leq f(\tilde{\sigma})$$

gilt. Der Vorteil einer solchen Abbildung ist, dass wir in einem zu  $\tilde{\sigma}$  zugehörigen Knoten im Backtrackbaum nur weiter nach unten gehen müssen, wenn  $f(\tilde{\sigma}) > \Delta(\mathcal{P}, id)$  gilt.

Betrachten wir zunächst ein Beispiel für eine solche obere-Schranken-Abbildung.

**8.1.3 Beispiel** Betrachten wir eine Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit Abstandsmatrix

$$\Delta(\mathcal{P}, id) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 6 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 7 & 7 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 0 & 5 & 7 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

und eine unvollständige Permutation  $\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & * & * & * \end{pmatrix}$ . Tragen wir die Werte, die durch  $\tilde{\sigma}$  bereits festgelegt sind, in die Abstandsmatrix ein, so ergibt sich

$$\Delta(\mathcal{P}, \tilde{\sigma}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & * & * & * \\ 9 & 0 & 7 & * & * & * \\ 8 & 7 & 0 & * & * & * \\ * & * & * & 0 & * & * \\ * & * & * & * & 0 & * \\ * & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

Um nun eine obere Schranke  $f(\tilde{\sigma})$  zu bestimmen, betrachten wir die noch nicht verwendeten Abstände der ersten Zeile und sortieren sie der Größe nach abfallend. Dies führt zu  $(7, 6, 5)$ , was wir in dieser Reihenfolge in die erste Zeile von  $\Delta(\mathcal{P}, \tilde{\sigma})$  auf die freien Plätze ( $*$ ) schreiben. Entsprechend für die zweite und dritte Zeile. Bei den restlichen drei Zeilen würde sich  $(5, 5, 0)$ ,  $(7, 5, 0)$  und  $(7, 5, 0)$  ergeben. Diese drei Tupel sortieren wir nun auch noch lexikographisch, so dass die neue Reihenfolge nun  $(7, 5, 0)$ ,  $(7, 5, 0)$ ,  $(5, 5, 0)$  lautet. Eintragen der zwei größten Werte des ersten Tupels in die vorvorletzte Zeile und des größten Wertes des zweiten Tupels in die vorletzte Zeile ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ & 0 & 7 & 9 & 7 & 5 \\ & & 0 & 7 & 6 & 5 \\ & & & 0 & 7 & 5 \\ & & & & 0 & 7 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

was man noch symmetrisch zu einer vollen Matrix ergänzen kann, so dass sich  $f(\tilde{\sigma})$  ergibt. Es lässt sich zeigen, dass das eben skizzierte Verfahren zu einer oberen-Schranken-Abbildung  $f$  führt.  $\diamond$

Die Nützlichkeit der obere-Schranken-Abbildung  $f$  aus Beispiel 8.1.3 zeigt sich besonders drastisch bei  $m$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{S}$  mit gleichen Kantenlängen. Ohne die Verwendung von  $f$  hätte der Backtrackbaum  $(m + 1)!$  Endknoten und mit Verwendung von  $f$  können wir in einem Schritt feststellen, dass die Abstandsmatrix  $\Delta(\mathcal{S}, id)$  kanonisch ist.

Da die Reduktion der Kandidatenmenge im Allgemeinen nicht so drastisch ist, wie bei den Simplex mit identischen Kantenlängen haben wir die Verwendung von obere-Schranke-Abbildungen allerdings in der praktischen Implementierung nicht benutzt.

## 8.2 Lerneffekte durch gefundene Automorphismen

Falls für einen Vergleich  $\mathcal{O} = \sigma(\mathcal{O})$  mit einer Permutation  $\sigma$  gilt, so ist  $\sigma$  ein Automorphismus von  $\mathcal{O}$ . Diese Information können wir nutzen um die Kandidatenmenge zu reduzieren.

Bisher sind wir, für ein Objekt  $\mathcal{O}$  auf  $n$  Punkten, durch die Permutationen der  $S_n$  gelaufen und haben zusätzlich eine Lernfunktion genutzt, um gewisse Permutationen zu überspringen. Ist  $Aut(\mathcal{O})$  die Automorphismengruppe von  $\mathcal{O}$  so gilt  $\sigma_0(\mathcal{O}) = \sigma_1(\mathcal{O})$  für alle  $\sigma_0, \sigma_1 \in Aut(\mathcal{O})$ . Wir brauchen also nur eine Transversale von  $S_n/Aut(\mathcal{O})$  anstelle von  $S_n$  zu durchlaufen.

Da wir die Automorphismengruppe von  $\mathcal{O}$  zunächst noch nicht kennen, starten wir mit einer Gruppe  $G = \{id\}$  und durchlaufen  $S_n/G$ . Jedes Mal wenn wir einen Automorphismus gefunden haben, fügen wir ihn zu  $G$  hinzu, bis  $G$  am Ende die komplette Automorphismengruppe von  $\mathcal{O}$  enthält. Eine Alternative wäre zunächst die Automorphismengruppe mit einem anderen Verfahren, z.B. der iterierten Klassifizierung, zu berechnen und anschließend direkt  $S_n/Aut(\mathcal{O})$  zu durchlaufen.

Für den Durchlauf von  $S_n/G$  setzen wir eine Funktion  $next(\sigma, p, G)$  voraus, die zu einem Transversalelement  $\sigma$  von  $S_n/G$  den Nachfolger bestimmt, der sich mindestens an der Stelle  $p$  unterscheidet. Für die Bestimmung von  $p$  benutzen wir eine Lernfunktion  $learn(\sigma)$ . Als Lernfunktion können wir eine Variante von Algorithmus 8.1.2 benutzen. Für die Nachfolgerfunktion  $next$  verweisen wir den Leser auf eine sehr aktuelle Arbeit [56] von R. Gugisch, in der eine Methode von D. Knuth [97] unter Verwendung topologischer Sortierungen verallgemeinert und ausführlich beschrieben wird. Wir haben die dort beschriebene Methode nachimplementiert und geben an dieser Stelle nur die Laufzeitabschätzung  $O((n - p)^2)$  an, wobei  $p$  wiederum die Position sein soll, an der sich die übergebene Permutation ändert.

Nehmen wir die zwei Funktionen *next* und *learn* als gegeben an, so können wir einen verbesserten Kanonizitätstest in Pseudocode angeben. Hierbei soll *next* den Rückgabewert  $-1$  liefern, falls es keinen Nachfolger mehr gibt.

### 8.2.1 Algorithmus (Kanonizitätstest mit Lerneffekten)

*Eingabe:* nummeriertes Objekt  $\mathcal{O}$  auf  $n$  Punkten, Lernfunktion *learn*, Nachfolgerfunktion *next*

*Ausgabe:* *kanonisch* oder *nicht kanonisch*

**begin**

$G = \{id\}$

$\sigma = id$

**While**  $next(\sigma, learn(\sigma), G) \neq -1$  **do**

**if**  $\sigma(\mathcal{O}) \succ \mathcal{O}$  **then return** *nicht kanonisch* **end**

**if**  $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$  **then füge**  $\sigma$  **zu**  $G$  **hinzu** **end**

**end**

**return** *kanonisch*

**end**

Für die effiziente Verwaltung der Gruppe  $G$  verweisen wir auf die in Abschnitt 7.2 angegebene Literatur.

Für das Konstruktionsprinzip der ordnungstreu erzeugung durch Verschmelzen kann man Algorithmus 8.2.1 noch weiter verbessern, indem man nicht zwingend mit der Gruppe  $G = \{id\}$  startet. Durch unser Konstruktionsverfahren entsteht ein Objekt  $\mathcal{O}$  immer durch verschmelzen von zwei Objekten  $\mathcal{O}_0$  und  $\mathcal{O}_1$ . D.h. wir können davon ausgehen, dass wir bereits zwei Gruppen  $G_0 \leq Aut(\mathcal{O}_0)$  und  $G_1 \leq Aut(\mathcal{O}_1)$  kennen. Für den Schnitt gilt

$$G_0 \cap G_1 \leq Aut(\mathcal{O}).$$

Weiter kann man einzelne Elemente aus  $G_0$  bzw.  $G_1$  darauf testen ob sie Automorphismen von  $\mathcal{O}$  sind. Gute Kandidaten könnten die Elemente von  $G_0$  bzw.  $G_1$  sein, die den jeweils letzten Punkt von  $\mathcal{O}_0$  bzw.  $\mathcal{O}_1$  bewegen. Hier steht allerdings eine Analyse für eine gute Heuristik noch aus.

Wir haben bewusst darauf verzichtet  $G_0 = Aut(\mathcal{O}_0)$  und  $G_1 = Aut(\mathcal{O}_1)$  zu fordern, um die Speicherung bzw. die Berechnung der Automorphismengruppe im Konstruktionsprozess bei jedem Objekt einzeln, je nach Bedarf, *ein-* oder *abschalten* zu können. Kennen wir z.B.  $G_0$  nicht durch den vorangegangenen Konstruktionschritt, so setzen wir einfach  $G_0 = \{id\}$ .

### 8.3 Kanonizitätstests ohne Testen von Permutationen

Bisher haben wir immer eine Kandidatenmenge von Permutationen  $\sigma$  durchlaufen, um dann über Vergleiche zwischen  $\mathcal{O}$  und  $\sigma(\mathcal{O})$  herauszufinden, ob  $\mathcal{O}$  kanonisch ist oder nicht. Da so ein Vergleich bei einem Objekt  $\mathcal{O}$  auf  $n$  Punkten mit  $\Omega(n^2)$  relativ teuer ist und die Kandidatenmenge im schlimmsten Fall die  $S_n$  sein kann, haben wir bisher Methoden vorgestellt die Kandidatenmenge zu reduzieren.

In diesem Abschnitt wollen wir nun Kanonizitätstests vorstellen, die ohne Vergleiche von  $\mathcal{O}$  mit  $\sigma(\mathcal{O})$  auskommen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns nun wieder auf die Abstandsmatrizen von ganzzahligen Punktmenge und betrachten zunächst eine  $4 \times 4$  Matrix

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{0,1} & \delta_{0,2} & \delta_{0,3} \\ \delta_{0,1} & 0 & \delta_{1,2} & \delta_{1,3} \\ \delta_{0,2} & \delta_{1,2} & 0 & \delta_{2,3} \\ \delta_{0,3} & \delta_{1,3} & \delta_{2,3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ob  $\Delta_4$  kanonisch ist, hängt nun nicht von den absoluten Werten der  $\delta_{i,j}$ , sondern nur von den Kleiner-, Größer- bzw. Gleichheitsbeziehungen zwischen den Paaren  $\delta_{i,j}, \delta_{k,l}$  ab. Da die Abstände  $\delta_{i,j}$  total geordnet sind, kann man die Gleich- bzw. Ungleichheitsbeziehungen durch eine Zuordnung

$$\begin{pmatrix} \delta_{0,1} & \delta_{0,2} & \delta_{1,2} & \delta_{0,3} & \delta_{1,3} & \delta_{2,3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$$

darstellen, mit der Bedeutung, dass genau  $p_0$  Abstände größer sind als  $\delta_{0,1}, \dots$ , genau  $p_5$  Abstände größer sind als  $\delta_{2,3}$ . Den Vektor  $(p_0, \dots, p_5)$  bezeichnen wir als **Kanonizitätsvektor** von  $\Delta_4$ , da man anhand dieses Vektors entscheiden kann, ob  $\Delta_4$  kanonisch oder nicht (bzw. semi-kanonisch) ist. Der große Vorteil an Kanonizitätsvektoren ist, dass es hiervon nur endlich viele gibt, unabhängig vom Durchmesser der Punktmenge. Die Anzahl ganzzahliger Tetraeder, welche ja  $4 \times 4$ -Matrizen sind, mit Durchmesser  $d$  hat dagegen die Größenordnung  $\Omega(d^5)$  und wächst mit wachsendem  $d$  über alle Grenzen, siehe Abschnitt 10.1. Allgemein können wir für die Kanonizitätsvektoren einer  $n \times n$ -Matrix im voraus berechnen, ob sie zu einer kanonischen, semi-kanonischen bzw. weder kanonischen noch semi-kanonischen Matrix gehören und die Ergebnisse in einer Hashtabelle ablegen. Um nun eine beliebige symmetrische  $n \times n$  Matrix  $\Delta_n$  auf Kanonizität zu testen, brauchen wir dann nur noch ihren Kanonizitätsvektor berechnen und in

der Hashtabelle das Ergebnis nachschlagen. Durch Sortieren der Einträge von  $\Delta_n$  können wir den Kanonizitätsvektor in  $O(n^2 \log n)$  bestimmen.

Dieses Vorgehen ist allerdings nur für kleine Werte von  $n$  praktikabel, da die Anzahl der *möglichen* Kanonizitätsvektoren sehr stark ansteigt, siehe Tabelle 8.1. Möglich soll hier bedeuten, dass die Kanonizitätsvektoren bei unserer Konstruktionsmethode der ordnungstreu Erzeugung durch Verschmelzung auch wirklich vorkommen können. Für unsere  $4 \times 4$ -Matrix  $\Delta_4$  gilt z.B.  $\delta_{0,1} \geq \delta_{0,2} \geq \delta_{1,2}$  und somit  $p_0 \leq p_1 \leq p_2$ , da das Dreieck  $\downarrow\Delta_4$  laut unserer Konstruktionsvorschrift kanonisch sein muss. Weiter setzen wir voraus, dass  $\delta_{0,1}$  der größte Abstand ist und somit  $p_0 = 0$  gilt.

	# Kanonizitätsvektoren	kanonisch	semi-kanonisch	weder noch
$2 \times 2$ -Matrizen	1	1	0	0
$3 \times 3$ -Matrizen	6	4	2	0
$4 \times 4$ -Matrizen	392	225	73	94
$5 \times 5$ -Matrizen	2.812.522	856.608	1.923.628	32.286

Tabelle 8.1: Anzahl von Kanonizitätsvektoren.

Für eine  $3 \times 3$ -Matrix gibt es die folgenden möglichen Kanonizitätsvektoren:

$$(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1) \text{ und } (0, 1, 2).$$

Hierbei gehören genau die Kanonizitätsvektoren  $(0, 2, 0)$  und  $(0, 2, 1)$  zu semi-kanonischen und die restlichen zu kanonischen Matrizen. In diesem einfachen Fall einer  $3 \times 3$ -Matrix gibt es einen Trick, wie man, ohne den zugehörigen Kanonizitätsvektor zu bestimmen, mit einem einzigen Vergleich zweier Abstände entscheiden kann, ob die Matrix kanonisch oder semi-kanonisch ist. Man testet einfach, ob  $\delta_{0,2} < \delta_{1,2}$  erfüllt ist. Falls ja, ist die Matrix semi-kanonisch, ansonsten ist sie kanonisch.

Diesen *Trick* können wir verallgemeinern. Wir betrachten hierzu einen binären Entscheidungsbaum, bei dem in jedem Knoten eine *Frage* der Form  $\delta_{i,j} < \delta_{k,l}$ ,  $\delta_{i,j} = \delta_{k,l}$  oder  $\delta_{i,j} > \delta_{k,l}$  gestellt wird, so lange bis entschieden werden kann, ob die Matrix kanonisch, semi-kanonisch oder keines von beidem ist. Für  $4 \times 4$ -Matrizen geben wir den von uns verwendeten Entscheidungsbaum als Algorithmus an. (D.h. man kann die kompakte Darstellung des Algorithmus so transformieren, dass ein Entscheidungsbaum mit den beschriebenen Fragen entsteht.)

**8.3.1 Algorithmus (Kanonizitätstest für  $4 \times 4$ -Matrizen)**Eingabe:  $4 \times 4$ -Abstandsmatrix  $\Delta$ 

$$\text{Ausgabe: } \chi(\Delta) = \begin{cases} 1 & : \text{kanonisch} \\ -1 & : \text{semi-kanonisch} \\ 0 & : \text{weder noch} \end{cases}$$

**begin**    // **if**  $\delta_{0,1} < \delta_{2,3}$  **then return 0 end**    **if**  $\delta_{0,1} = \delta_{0,2}$  **then**        **if**  $\delta_{0,2} = \delta_{1,2}$  **then**            **if**  $\delta_{0,3} \geq \delta_{1,3}$  **then**                **if**  $\delta_{1,3} \geq \delta_{2,3}$  **then return 1 else return -1 end**            **else return -1 end**        **else**            **if**  $\delta_{0,2} = \delta_{0,3}$  **then**                **if**  $\delta_{2,3} > \delta_{1,2}$  **then return 0**                **else**                    **if**  $\delta_{1,2} < \delta_{1,3}$  **then return 0**                    **else**                        **if**  $\delta_{2,3} > \delta_{1,3}$  **then return -1 else return 1 end**                    **end**                **end**        **else**            **if**  $\delta_{1,2} < \delta_{0,3}$  **then**                **if**  $\delta_{1,3} < \delta_{2,3}$  **then**                    **if**  $\delta_{2,3} = \delta_{0,1}$  **then return 0 else return -1 end**                **else**                    **if**  $\delta_{1,3} = \delta_{0,1}$  **then return 0 else return 1 end**                **end**            **else**                **if**  $\delta_{1,3} < \delta_{2,3}$  **then return -1 else return 1 end**            **end**        **end**    **end**    **else**        **if**  $\delta_{0,2} \leq \delta_{1,3}$  **then**            **if**  $\delta_{0,2} < \delta_{1,3}$  **then return 0**        **else**            **if**  $\delta_{0,2} = \delta_{1,2}$  **then**                **if**  $\delta_{0,3} < \delta_{1,3}$  **then return -1 else return 1 end**

```

else
    if  $\delta_{1,2} < \delta_{0,3}$  then return 0 else return 1 end
end
else
    if  $\delta_{0,2} = \delta_{0,3}$  then
        if  $\delta_{0,1} = \delta_{2,3}$  then
            if  $\delta_{0,2} = \delta_{1,2}$  then return 1 else return 0 end
        else
            if  $\delta_{1,2} < \delta_{1,3}$  then return 0 else return 1 end
        end
    else
        if  $\delta_{0,2} = \delta_{1,2}$  then
            if  $\delta_{0,3} < \delta_{1,3}$  then return -1 else return 1 end
        else
            if  $\delta_{0,1} = \delta_{2,3}$  and  $\delta_{1,2} < \delta_{0,3}$  then return 0 else return 1 end
        end
    end
end
end
end
end

```

Schaut man sich die Verzweigungen in Algorithmus 8.3.1 genauer an, so stellt man fest, dass er maximal 6 Vergleiche bis zu einer Ausgabe benötigt. Alleine das Sortieren der 6 Abstände würde länger dauern (ohne Benutzung von konstruktionsbedingt erfüllten Ungleichungen). Die Effizienz von Algorithmus 8.3.1 ermöglicht es z.B. erst die ganzzahligen Tetraeder mit Durchmesser 800 in einer vernünftigen Laufzeit zu konstruieren, siehe Abschnitt 10.1. Aber Algorithmus 8.3.1 könnte möglicherweise noch weiter verbessert werden. Er stellt nur eine Implementierung eines bestimmten Entscheidungsbaumes dar, den wir per Hand und mit Bauchgefühl so entwickelt haben, dass er relativ wenig Vergleiche benötigt. Evtl. gibt es andere Entscheidungsbäume, die *besser* sind, also im Schnitt weniger Vergleiche benötigen.

Um das Ganze als Optimierungsproblem über die möglichen Entscheidungsbäume formalisieren zu können, definieren wir, was wir als Kosten eines Entscheidungsbaumes betrachten. Zu jedem möglichen Kanonizitätsvektor  $v$  können wir experimentell eine Häufigkeit des Auftretens  $h_v$  während der Konstruktion bestimmen. Für einen gegebenen Entscheidungsbaum  $B$  und einen Kanonizitätsvektor  $v$  können wir leicht die Anzahl  $c_v$  der benötigten Vergleiche bis zu einer Entscheidung ausrechnen. Ziel ist es nun die durchschnittliche Anzahl an

Vergleichen  $\sum_v c_v h_v$  über alle möglichen Entscheidungsbäume, die natürlich auch die korrekte Antwort liefern müssen, zu minimieren.

Es ist klar, dass der Test  $\delta_{0,2} < \delta_{1,2}$  für  $3 \times 3$ -Matrizen optimal ist. Doch schon für  $4 \times 4$ -Matrizen müsste der optimale Algorithmus, für eine gegebene Häufigkeitsverteilung, erst noch bestimmt werden. Für  $5 \times 5$ -Matrizen benutzen wir bisher eine Hashtabelle, da wir einen Entscheidungsbaum für die 2.812.522 möglichen Kanonizitätsvektoren nicht mit der Hand aufstellen wollten. In der Optimierung bzw. der Bestimmung *guter* Entscheidungsbäume steckt sicherlich noch viel Potential und Stoff für weitere Untersuchungen. Darauf können wir allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter eingehen.



## 9 Punktmengen in höheren Dimensionen

In Kapitel 5 haben wir ganzzahlige planare Punktmengen behandelt. Hier wollen wir nun Punktmengen in höheren Dimensionen betrachten. Als erstes holen wir den Beweis der Existenzaussage ganzzahliger Punktmengen für beliebige  $m$  und  $n \geq m + 1$  aus Kapitel 1 nach. Von der Vielzahl der bekannten Konstruktionsmethoden für ganzzahlige Punktmengen wurde der folgende Satz und sein Beweis aus [65] ausgewählt, da er auch gleichzeitig eine obere Schranke für  $d(m, n)$  liefert.

**9.0.1 Satz** Für  $n \geq m + 1$  existieren ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmengen aus  $n$  Punkten und es gilt

$$d(m, n) \leq \begin{cases} 2^{n-m+1} - 2 & \text{für } n - m \equiv 0 \pmod{2}, \\ 3(2^{n-m} - 1) & \text{für } n - m \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

**Beweis.** Es werden  $n$  Punkte des  $\mathbb{E}^m$  angegeben, die paarweise ganzzahlige Abstände haben und nicht alle in einer Hyperebene liegen. Sei hierzu  $s = \lceil \frac{n-m}{2} \rceil$  und  $b_i = 2^{2s-i} - 2^i$  für  $0 \leq i < s$ . Für  $0 \leq i < m$  definieren wir die Punkte

$$P_i = \frac{2^{s+1}}{\sqrt{2}}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

und für  $0 \leq i < s$  die Punkte

$$Q_i = P_0 + \frac{b_i}{\sqrt{m}}(1, \dots, 1) \quad \text{und} \quad Q_{i+s} = P_0 - \frac{b_i}{\sqrt{m}}(1, \dots, 1).$$

Die Punkte  $Q_0, \dots, Q_{2s-1}$  liegen alle auf einer Strecke mit Mittelpunkt  $P_0$ , die senkrecht auf der durch  $P_0, \dots, P_{m-1}$  bestimmten Hyperebene steht. Die entstehenden Abstände und den Durchmesser rechnet man leicht aus, wobei für ungerade  $n - m$  der Punkt  $Q_0$  weggelassen wird, damit die Punktmenge aus  $n$  Punkten besteht.  $\square$

Fordert man von den Punktmengen Nebenbedingungen wie semi-allgemeine Lage bzw. allgemeine Lage, so sind nur sehr eingeschränkte Existenzaussagen

bekannt. Nach Satz 1.1.2 existieren planare ganzzahlige Punktmengen in semi-allgemeiner Lage für jede beliebige Anzahl  $n \geq 3$  von Punkten. Die Existenz von  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen in allgemeiner Lage aus  $m + 1$  Punkten ist klar, da man einfach ein  $m$ -dimensionales Simplex mit identischen Seitenlängen nehmen kann. Für ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage aus  $m + 2$  Punkten geben wir folgenden Satz aus [141] an.

**9.0.2 Satz** *Zu jeder Dimension  $m \geq 3$  gibt es eine ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmenge  $\mathcal{P}$  in allgemeiner Lage aus  $m + 2$  Punkten mit*

$$\text{diam}(\mathcal{P}) \leq \begin{cases} m & \text{falls } 2 \nmid m \equiv 2 \pmod{4} \text{ oder } m \equiv 3 \pmod{4}, \\ 2m & \text{falls } m \equiv 0 \pmod{4} \text{ oder } m \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Beweis.** Wir wählen  $\mathcal{P}$  mit den Punkten  $P_0, \dots, P_{m-1}, A$  und  $B$ , wobei  $P_i$  die Eckpunkte eines regelmäßigen  $(m - 1)$ -dimensionalen Simplex mit Seitenlänge  $a$  sind. Die Punkte  $A$  und  $B$  wählen wir so, dass  $\delta(A, P_i) = \delta(B, P_i) = b$  für  $0 \leq i < m$  gilt. Man überlegt sich leicht, dass  $\mathcal{P}$  eine Bipyramide in allgemeiner Lage ist. Setzen wir  $c = \delta(A, B)$  so folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$a^2 \frac{m-1}{2m} + \frac{c^2}{4} = b^2.$$

Für die vier Restklassen von  $m$  modulo 4 können wir folgende Parameterlösung dieser Diophantischen Gleichung angeben,

$$\begin{aligned} m \equiv 0 \pmod{4}: & \quad a = 2m, \quad b = \frac{3m-2}{2}, \quad c = m-2, \\ m \equiv 1 \pmod{4}: & \quad a = 2m, \quad b = \frac{3m-1}{2}, \quad c = m+1, \\ 2 \nmid m \equiv 2 \pmod{4}: & \quad a = m, \quad b = \frac{3m-2}{4}, \quad c = \frac{m-2}{2}, \\ m \equiv 3 \pmod{4}: & \quad a = m, \quad b = \frac{3m-1}{4}, \quad c = \frac{m+1}{2}. \end{aligned}$$

Mit  $\text{diam}(\mathcal{P}) = \max(a, b, c)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Anstatt die Diophantische Gleichung aus diesem Beweis allgemein zu lösen, kann man auch für kleine Dimensionen  $m$  die ganzzahlige Lösung mit minimalem  $\max(a, b, c)$  bestimmen, um bessere Schranken für  $d(m, m + 2)$  zu erhalten. Mit den Kombinationen  $(a, b, c) = (3, 2, 2)$ ,  $(3, 2, 1)$ ,  $(2, 2, 3)$  und  $(5, 4, 4)$  erhalten wir  $d(3, 5) \leq 3$ ,  $d(6, 8) \leq 3$ ,  $d(8, 10) \leq 3$  und  $d(25, 27) \leq 5$ . Alle anderen Kombinationen führen zu Durchmessern größer gleich 6.

Außer den angegebenen Resultaten sind keine weiteren allgemeinen Existenzaussagen für ganzzahlige Punktmengen bekannt und so geben wir in den folgenden Abschnitten nur vereinzelte Beispiele an, die wir durch vollständige Konstruktion der ganzzahligen Punktmengen mit einem gegebenen Durchmesser gefunden haben. Durch dieses Vorgehen, können wir auch gleichzeitig die zugehörigen minimalen Durchmesser bestimmen.

### 9.1 Räumliche ganzzahlige Punktmengen

Die minimalen Durchmesser  $d(3, 4) = \bar{d}(3, 4) = \dot{d}(3, 4) = 1$  werden vom regulären Tetraeder mit Kantenlänge 1 erreicht. Die einzige 3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge mit Durchmesser 3 ist durch die Bipyramide aus Satz 9.0.2 gegeben und liegt somit in allgemeiner Lage. Da wir in Folgerung 11.1.2  $d(m, n) \geq 3$  für  $n \geq m + 2$  zeigen, gilt  $d(3, 5) = \bar{d}(3, 5) = \dot{d}(3, 5) = 3$ . Das einzige Beispiel einer 3-dimensionalen ganzzahligen Punktmenge mit Durchmesser 4 aus 6 Punkten ist in Abbildung 9.1 zusammen mit der zugehörigen Abstandsmatrix abgebildet. In Lemma 11.3.1 werden wir eine Verallgemeinerung dieses Beispiels auf höhere Dimensionen vorstellen. Wir möchten bemerken, dass die Seitenflächen aus gleichseitigen Dreiecke bzw. aus einer der zwei planaren ganzzahligen Punktmengen aus 4 Punkten mit minimalem Durchmesser bestehen, siehe Abb. 5.1.

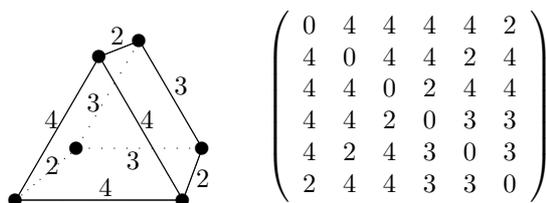


Abbildung 9.1: 3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 6 Punkten mit minimalem Durchmesser.

Nimmt man zu der Punktmenge aus Abbildung 9.1 noch einen weiteren Punkt hinzu, so ergibt sich eine ganzzahlige Punktmenge mit Durchmesser 8, siehe Lemma 11.3.1. Da wir diese Konstruktion für beliebige Dimensionen  $m \geq 2$  durchführen können, gilt  $d(m, 2m + 1) \leq 8$ . Für  $m = 3$  gilt sogar Gleichheit, wie wir durch vollständige Konstruktion der 3-dimensionalen ganzzahligen Punktmengen mit Durchmesser kleiner gleich 8 bestätigt haben. Eine weitere ganzzahlige Punktmenge aus 7 Punkten mit Durchmesser 8 ist zusammen mit ihrer Abstands-

matrix in Abbildung 9.2 dargestellt. Sie besteht aus zwei regelmäßigen Tetraedern mit Kantenlänge 3 bzw. 8 die so an einem Punkt miteinander verbunden sind, dass die "Grundflächen" der zwei Tetraeder in einer Hyperebene liegen und sich die zwei Spitzen auf unterschiedlichen Seiten dieser Hyperebene befinden. Auch dieses Beispiel lässt sich leicht auf Dimensionen  $m \geq 3$  verallgemeinern, so dass man wiederum  $d(m, 2m + 1) \leq 8$  erhält.

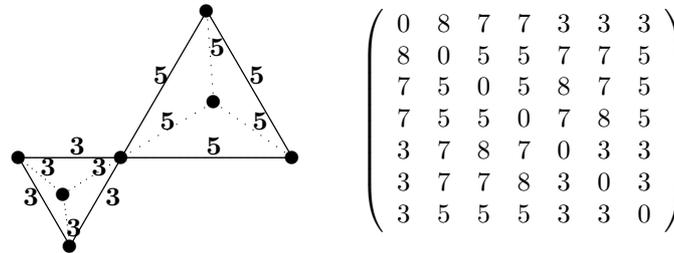


Abbildung 9.2: 3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 7 Punkten mit minimalem Durchmesser.

Außer den zwei angegebenen Punktmengen gibt es noch 5 weitere ganzzahlige 3-dimensionale Punktmengen aus 7 Punkten mit Durchmesser 8. Für 8 Punkte gilt für den minimalen Durchmesser  $d(3, 8) = 13$ . Die zwei Punktmengen mit diesem Durchmesser haben wir in Abbildung 9.3 und 9.4 dargestellt. Die Punktmenge aus Abbildung 9.3 besteht aus 2 Kopien einer planaren ganzzahligen Punktmenge aus 6 Punkten, die direkt daneben noch mal vollständig abgebildet ist. Im nächsten

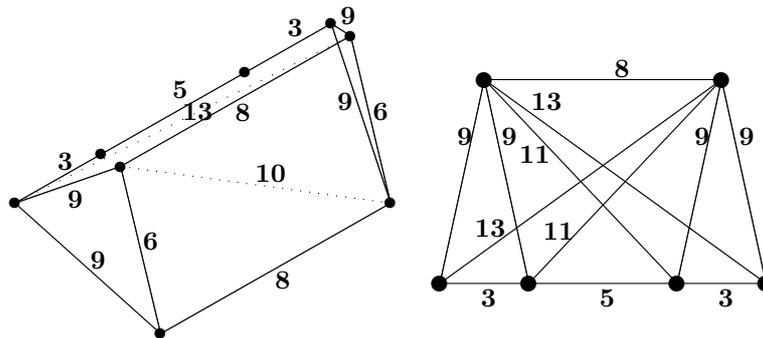


Abbildung 9.3: 3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 8 Punkten mit minimalem Durchmesser.

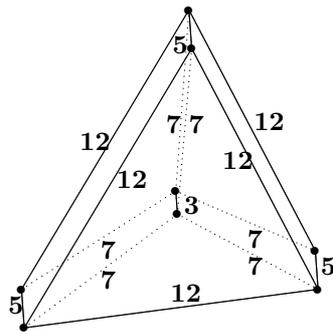


Abbildung 9.4: Zweites Beispiel für  $d(3, 8) = 13$ .

Abschnitt werden wir sehen, wie man mit Hilfe dieser planaren Punktmenge bzw. strukturell ähnlichen Punktmengen, obere Schranken für  $d(m, n)$  konstruktiv bestimmen kann. Die Punktmenge aus Abbildung 9.4 besteht aus einem geraden Prisma, mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 12 als Grundfläche, und zwei weiteren inneren Punkten. Die zwei Abstandsmatrizen der 3-dimensionalen ganzzahligen Punktmengen mit minimalem Durchmesser lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & 13 & 13 & 11 & 9 & 9 & 8 & 3 \\ 13 & 0 & 6 & 9 & 10 & 8 & 9 & 11 \\ 13 & 6 & 0 & 9 & 8 & 10 & 9 & 11 \\ 11 & 9 & 9 & 0 & 13 & 13 & 3 & 8 \\ 9 & 10 & 8 & 13 & 0 & 6 & 11 & 9 \\ 9 & 8 & 10 & 13 & 6 & 0 & 11 & 9 \\ 8 & 9 & 9 & 3 & 11 & 11 & 0 & 5 \\ 3 & 11 & 11 & 8 & 9 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 13 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 & 5 \\ 13 & 0 & 12 & 13 & 5 & 7 & 8 & 12 \\ 13 & 12 & 0 & 5 & 13 & 7 & 8 & 12 \\ 12 & 13 & 5 & 0 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 12 & 5 & 13 & 12 & 0 & 8 & 7 & 13 \\ 8 & 7 & 7 & 8 & 8 & 0 & 3 & 7 \\ 7 & 8 & 8 & 7 & 7 & 3 & 0 & 8 \\ 5 & 12 & 12 & 13 & 13 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

In [141] wurde  $d(3, 9) = 17$  angegeben. Wir müssen diesen Wert auf  $d(3, 9) = 16$  berichtigen. Es gibt bis auf Isomorphie genau eine ganzzahlige dreidimensionale Punktmenge aus 9 Punkten mit Durchmesser 16. Ihre Abstandsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & 16 & 15 & 15 & 14 & 11 & 11 & 10 & 10 \\ 16 & 0 & 11 & 11 & 6 & 9 & 9 & 14 & 6 \\ 15 & 11 & 0 & 15 & 14 & 16 & 11 & 10 & 10 \\ 15 & 11 & 15 & 0 & 14 & 11 & 16 & 10 & 10 \\ 14 & 6 & 14 & 14 & 0 & 6 & 6 & 16 & 6 \\ 11 & 9 & 16 & 11 & 6 & 0 & 9 & 14 & 6 \\ 11 & 9 & 11 & 16 & 6 & 9 & 0 & 14 & 6 \\ 10 & 14 & 10 & 10 & 16 & 14 & 14 & 0 & 10 \\ 10 & 6 & 10 & 10 & 6 & 6 & 6 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

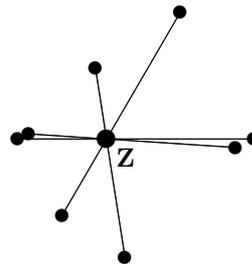


Abbildung 9.5:  $d(3, 9) = 16$ .

In Abbildung 9.5 haben wir die Anordnung der 9 Punkte in einer zweidimensionalen Projektion dargestellt. Die Punktmenge besteht aus 4 Strecken der Länge 16, die sich in einem Punkt  $Z$  schneiden. Die 4 Strecken der Länge 16 werden von  $Z$  jeweils im Verhältnis 6 zu 10 geteilt.

Für  $10 \leq n \leq 12$  gilt  $d(3, n) = 17$ . Das eindeutige Beispiel für 12 Punkte haben wir in Abbildung 9.6 dargestellt. Die Punktmenge ist konvex und besteht

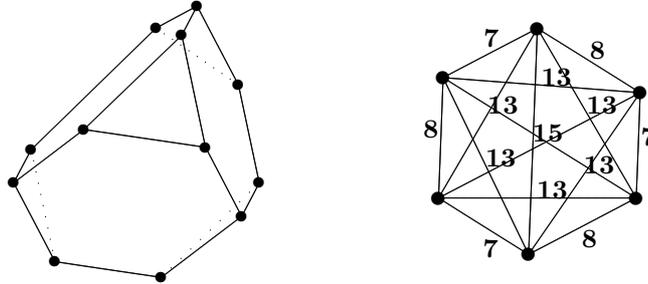


Abbildung 9.6: 3-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 12 Punkten mit minimalem Durchmesser.

aus 4 gleichseitigen Dreiecken, mit Seitenlänge 8, und 4 identischen Sechsecken, wovon wir eines auf der rechten Seite von Abbildung 9.6 dargestellt haben. Die vollständige Abstandsmatrix lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & 17 & 17 & 15 & 15 & 13 & 13 & 13 & 13 & 8 & 8 & 7 \\ 17 & 0 & 7 & 13 & 8 & 15 & 13 & 13 & 8 & 15 & 13 & 17 \\ 17 & 7 & 0 & 8 & 13 & 13 & 15 & 8 & 13 & 13 & 15 & 17 \\ 15 & 13 & 8 & 0 & 15 & 7 & 13 & 8 & 17 & 13 & 17 & 13 \\ 15 & 8 & 13 & 15 & 0 & 13 & 7 & 17 & 8 & 17 & 13 & 13 \\ 13 & 15 & 13 & 7 & 13 & 0 & 8 & 13 & 17 & 15 & 17 & 8 \\ 13 & 13 & 15 & 13 & 7 & 8 & 0 & 17 & 13 & 17 & 15 & 8 \\ 13 & 13 & 8 & 8 & 17 & 13 & 17 & 0 & 15 & 7 & 13 & 15 \\ 13 & 8 & 13 & 17 & 8 & 17 & 13 & 15 & 0 & 13 & 7 & 15 \\ 8 & 15 & 13 & 13 & 17 & 15 & 17 & 7 & 13 & 0 & 8 & 13 \\ 8 & 13 & 15 & 17 & 13 & 17 & 15 & 13 & 7 & 8 & 0 & 13 \\ 7 & 17 & 17 & 13 & 13 & 8 & 8 & 15 & 15 & 13 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für 13 Punkte gilt  $d(3, 13) = 56$ . Die zugehörige Punktmenge ist wiederum bis auf Isomorphie eindeutig. Sie entsteht indem man 3 Kopien der planaren Punkt-mengen aus Abbildung 9.8 entlang der Strecke  $\overline{AB}$  zusammenklebt. Die 3 Punkte

$P_0, P_1$  und  $P_2$  arrangiert man so, dass sie zusammen mit dem Fußpunkt  $C$  (von  $P_i$  auf die Strecke  $\overline{AB}$ ) so wie in Abbildung 9.7 (nicht maßstabsgetreu) angeordnet sind. Der Abstand  $h = \overline{CP_0} = \overline{CP_1} = \overline{CP_2} = 4\sqrt{15}$  ist durch die planare Punktmenge aus Abbildung 9.8 bestimmt. Die drei restlichen Abstände  $a = \overline{P_0P_1}$ ,  $b = \overline{P_0P_2}$  und  $c = \overline{P_1P_2}$  wurden so bestimmt, dass  $a, b, c$  ganzzahlig sind und eine planare Punktmenge aus 4 Punkten, wie in Abbildung 9.7, entsteht.

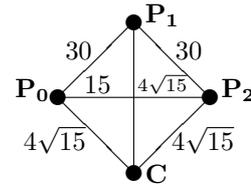


Abbildung 9.7:

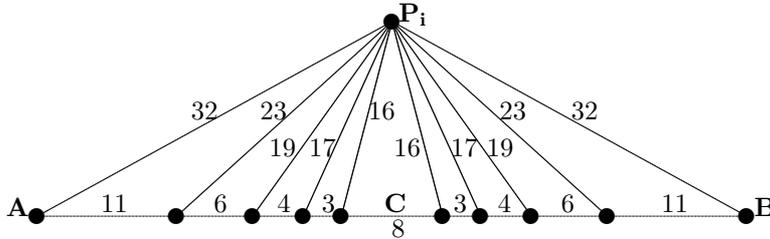


Abbildung 9.8: 2-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 11 Punkten mit Durchmesser 56.

Allgemein müssen die natürlichen Zahlen  $a, b$  und  $c$  die Dreiecksungleichungen und die, sich aus Lemma 2.1.2 ergebende, Gleichung  $4h^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - 2h^2(a^4 + b^4 + c^4) + 2a^2b^2c^2 = 0$  erfüllen. Wir möchten erwähnen, dass die zu  $d(2, 11) = 51$  zugehörige Punktmenge zu  $h = \frac{3}{2}\sqrt{35}$  führt und die eben erwähnte Gleichung keine Lösung mit  $\max(a, b, c) \leq 25.000$  besitzt.

Die Abstandsmatrix der zu  $d(3, 13) = 56$  zugehörigen Punktmenge lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & 56 & 45 & 39 & 35 & 32 & 32 & 32 & 32 & 24 & 21 & 17 & 11 \\ 56 & 0 & 11 & 17 & 21 & 32 & 32 & 32 & 24 & 32 & 35 & 39 & 45 \\ 45 & 11 & 0 & 6 & 10 & 23 & 23 & 23 & 13 & 21 & 24 & 28 & 34 \\ 39 & 17 & 6 & 0 & 4 & 19 & 19 & 19 & 7 & 15 & 18 & 22 & 28 \\ 35 & 21 & 10 & 4 & 0 & 17 & 17 & 17 & 3 & 11 & 14 & 18 & 24 \\ 32 & 32 & 23 & 19 & 17 & 0 & 30 & 30 & 16 & 16 & 17 & 19 & 23 \\ 32 & 32 & 23 & 19 & 17 & 30 & 0 & 15 & 16 & 16 & 17 & 19 & 23 \\ 32 & 32 & 23 & 19 & 17 & 30 & 15 & 0 & 16 & 16 & 17 & 19 & 23 \\ 32 & 24 & 13 & 7 & 3 & 16 & 16 & 16 & 0 & 8 & 11 & 15 & 21 \\ 24 & 32 & 21 & 15 & 11 & 16 & 16 & 16 & 8 & 0 & 3 & 7 & 13 \\ 21 & 35 & 24 & 18 & 14 & 17 & 17 & 17 & 11 & 3 & 0 & 4 & 10 \\ 17 & 39 & 28 & 22 & 18 & 19 & 19 & 19 & 15 & 7 & 4 & 0 & 6 \\ 11 & 45 & 34 & 28 & 24 & 23 & 23 & 23 & 21 & 13 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für Punktmengen aus 14 bzw. 15 Punkten haben wir  $d(3, 14) = 65$  bzw.  $d(3, 15) = 77$ . Die zugehörigen Abstandsmatrizen lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & 65 & 56 & 44 & 38 & 38 & 38 & 38 & 36 & 30 & 23 & 21 & 14 & 8 \\ 65 & 0 & 9 & 21 & 53 & 53 & 53 & 53 & 29 & 35 & 42 & 44 & 51 & 57 \\ 56 & 9 & 0 & 12 & 46 & 46 & 46 & 46 & 20 & 26 & 33 & 35 & 42 & 48 \\ 44 & 21 & 12 & 0 & 38 & 38 & 38 & 38 & 8 & 14 & 21 & 23 & 30 & 36 \\ 38 & 53 & 46 & 38 & 0 & 60 & 60 & 30 & 34 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 \\ 38 & 53 & 46 & 38 & 60 & 0 & 30 & 60 & 34 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 \\ 38 & 53 & 46 & 38 & 60 & 30 & 0 & 45 & 34 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 \\ 38 & 53 & 46 & 38 & 30 & 60 & 45 & 0 & 34 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 \\ 36 & 29 & 20 & 8 & 34 & 34 & 34 & 34 & 0 & 6 & 13 & 15 & 22 & 28 \\ 30 & 35 & 26 & 14 & 32 & 32 & 32 & 32 & 6 & 0 & 7 & 9 & 16 & 22 \\ 23 & 42 & 33 & 21 & 31 & 31 & 31 & 31 & 13 & 7 & 0 & 2 & 9 & 15 \\ 21 & 44 & 35 & 23 & 31 & 31 & 31 & 31 & 15 & 9 & 2 & 0 & 7 & 13 \\ 14 & 51 & 42 & 30 & 32 & 32 & 32 & 32 & 22 & 16 & 9 & 7 & 0 & 6 \\ 8 & 57 & 48 & 36 & 34 & 34 & 34 & 34 & 28 & 22 & 15 & 13 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & 77 & 68 & 56 & 48 & 46 & 46 & 46 & 46 & 42 & 35 & 33 & 26 & 20 & 12 \\ 77 & 0 & 9 & 21 & 29 & 53 & 53 & 53 & 53 & 35 & 42 & 44 & 51 & 57 & 65 \\ 68 & 9 & 0 & 12 & 20 & 46 & 46 & 46 & 46 & 26 & 33 & 35 & 41 & 48 & 56 \\ 56 & 21 & 12 & 0 & 8 & 38 & 38 & 38 & 38 & 14 & 21 & 23 & 30 & 36 & 44 \\ 48 & 29 & 20 & 8 & 0 & 34 & 34 & 34 & 34 & 6 & 13 & 15 & 22 & 28 & 36 \\ 46 & 53 & 46 & 38 & 34 & 0 & 60 & 60 & 30 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 & 38 \\ 46 & 53 & 46 & 38 & 34 & 60 & 0 & 30 & 60 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 & 38 \\ 46 & 53 & 46 & 38 & 34 & 60 & 30 & 0 & 45 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 & 38 \\ 46 & 53 & 46 & 38 & 34 & 30 & 45 & 60 & 0 & 32 & 31 & 31 & 32 & 34 & 38 \\ 42 & 35 & 26 & 14 & 6 & 32 & 32 & 32 & 32 & 0 & 7 & 9 & 16 & 22 & 30 \\ 35 & 42 & 33 & 21 & 13 & 31 & 31 & 31 & 31 & 7 & 0 & 2 & 9 & 15 & 23 \\ 33 & 44 & 35 & 23 & 15 & 31 & 31 & 31 & 31 & 9 & 2 & 0 & 7 & 13 & 21 \\ 26 & 51 & 41 & 30 & 22 & 32 & 32 & 32 & 32 & 16 & 9 & 7 & 0 & 6 & 14 \\ 20 & 57 & 48 & 36 & 28 & 34 & 34 & 34 & 34 & 22 & 15 & 13 & 6 & 0 & 8 \\ 12 & 65 & 56 & 44 & 36 & 38 & 38 & 38 & 38 & 30 & 23 & 21 & 14 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zwei zugehörigen Punktmengen können analog zur 3-dimensionalen Punktmenge aus 13 Punkten mit minimalem Durchmesser konstruiert werden. Wir benutzen jeweils eine ganzzahlige planare Punktmenge bei der alle bis auf einen Punkt auf einer Gerade liegen. Genauer benutzen wir je 4 Kopien von der Punktmenge aus Abbildung 9.9 bzw. aus der Punktmenge die aus Abbildung 9.9 hervorgeht wenn man den rechten unteren Punkt entfernt und verkleben sie entlang der

Strecke  $\overline{AB}$ . Den Fußpunkt von  $P_i$  auf die Strecke  $\overline{AB}$  bezeichnen wir wieder mit  $C$ . Die 4 Punkte  $P_0, P_1, P_2$  und  $P_3$  können nun so arrangiert werden, dass sie auf einem Kreis mit Radius  $8\sqrt{15}$  und Mittelpunkt  $C$  liegen, da  $\overline{CP_i} = 8\sqrt{15}$  gilt. Wenn wir die Punkte  $P_i$  noch so auf dem Kreis arrangieren, dass sie paarweise ganzzahlige Abstände haben, erhalten wir die ganzzahligen Punktmenge, die zu  $d(3, 14) = 65$  und  $d(3, 15) = 77$  führen. Für die ganzzahlige Anordnung auf dem Kreis können wir die ganzzahlige planare Punktmenge zu  $\overline{d}(2, 4) = 4$  benutzen, siehe Abbildung 5.1 bzw. Abschnitt A.2.

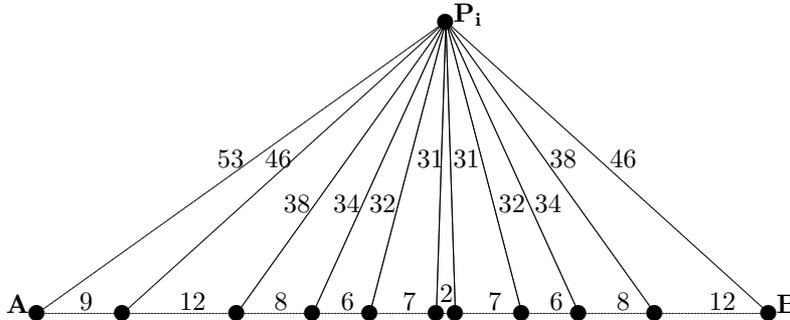


Abbildung 9.9: 2-dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus 12 Punkten mit Durchmesser 77.

Allgemein führt die eben beschriebene Konstruktion zu Lemma 9.2.5, welches wir im nächsten Abschnitt nachreichen. Für  $13 \leq n \leq 23$  gehen die ganzzahligen dreidimensionalen Punktmenge mit minimalem Durchmesser aus dieser Konstruktion hervor, siehe Tabelle 9.5 für die zugehörigen Werte.

Für Punktmenge in semi-allgemeiner bzw. allgemeiner Lage konnten wir noch  $\overline{d}(3, 6) = \overline{d}(3, 6) = 16$  und  $\overline{d}(3, 7) = \overline{d}(3, 7) = 44$  bestimmen. Die zugehörigen Punktmenge sind jeweils eindeutig und ihre Abstandsmatrizen lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & 16 & 13 & 13 & 10 & 9 \\ 16 & 0 & 11 & 9 & 10 & 13 \\ 13 & 11 & 0 & 10 & 9 & 16 \\ 13 & 9 & 10 & 0 & 13 & 10 \\ 10 & 10 & 9 & 13 & 0 & 13 \\ 9 & 13 & 16 & 10 & 13 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 44 & 41 & 30 & 27 & 20 & 16 \\ 44 & 0 & 21 & 22 & 25 & 40 & 36 \\ 41 & 21 & 0 & 29 & 28 & 35 & 27 \\ 30 & 22 & 29 & 0 & 27 & 22 & 28 \\ 27 & 25 & 28 & 27 & 0 & 35 & 22 \\ 20 & 40 & 35 & 22 & 35 & 0 & 20 \\ 16 & 36 & 27 & 28 & 22 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine zweidimensionale Projektion dieser zwei Punktmenge haben wir in Abbildung 9.10 dargestellt.

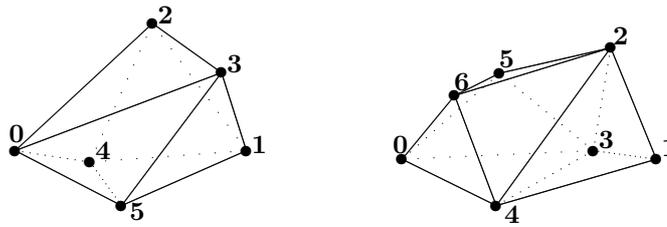


Abbildung 9.10: 3-dimensionale ganzzahlige Punktfolgen aus 6 bzw. 7 Punkten in allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

Die minimalen Durchmesser  $d(3, n)$  für  $n \leq 10$ ,  $n \neq 9$  und  $\bar{d}(3, n)$  bzw.  $\dot{d}(3, n)$  für  $n \leq 6$  waren bereits bekannt [64, 141]. Weitere Überlegungen zu ganzzahligen räumlichen Punktfolgen finden sich in [5, 71, 137, 138, 139, 140].

## 9.2 Obere Schranken für minimale Durchmesser

In diesem Abschnitt wollen wir konstruktiv allgemeine obere Schranken für minimale Durchmesser von  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktfolgen bestimmen. Grundlage sind dabei ganzzahlige planare Punktfolgen mit kleinen Durchmessern. Betrachten wir zunächst die ganzzahlige planare Punktfolge  $\mathcal{P}$  aus 9 Punkten mit Durchmesser 29, siehe Abbildung 5.1. Diese Punktfolge besteht aus 8 Punkten auf einer Geraden und einem weiteren Punkt, den wir die **Spitze** nennen wollen. Kleben wir nun zwei Versionen von  $\mathcal{P}$  entlang der Gerade aus 8 Punkten zusammen und arrangieren die zwei Spitzen im Abstand 1, so erhalten wir eine 3-dimensionale ganzzahlige Punktfolge aus 10 Punkten mit Durchmesser 29. Kleben wir eine weitere Version von  $\mathcal{P}$  an der Gerade aus 8 Punkten an und arrangieren die drei Spitzen derart, dass sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 bilden, so erhalten wir eine 4-dimensionale ganzzahlige Punktfolge aus 11 Punkten mit Durchmesser 29. Für Dimensionen  $m \geq 3$  kleben wir entsprechend  $m - 1$  Versionen von  $\mathcal{P}$  zusammen und arrangieren die  $m - 1$  Spitzen zu einem  $(m - 2)$ -dimensionalen Einheitssimplex. Wir bezeichnen diese Konstruktion auch als **aufblasen** der Spitze von  $\mathcal{P}$  zu einem  $(m - 2)$ -dimensionalen Einheitssimplex. Allgemein ergibt sich somit folgende obere Schranke für minimale Durchmesser.

**9.2.1 Lemma** *Ist  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige planare Punktfolge mit  $n - 1$  Punkten auf einer Geraden und einem weiteren Punkt, so gilt*

$$d(m, n - 2 + m) \leq \text{diam}(\mathcal{P})$$

für  $m \geq 2$ .

Da die ganzzahligen planaren Punktmenge aus  $9 \leq n \leq 89$  Punkten mit minimalem Durchmesser die in Lemma 9.2.1 benötigte Struktur besitzen ergibt sich

### 9.2.2 Folgerung

$$d(m, n - 2 + m) \leq d(2, n)$$

für  $9 \leq n \leq 89$  und  $m \geq 2$ .

Aus Abschnitt 5.2 und Lemma 9.2.1 ergibt sich mit

### 9.2.3 Satz

$$d(m, n) \in O\left((n - m)^{c \log \log(n - m)}\right)$$

ein Resultat, welches bereits in [67] auf anderem Wege bewiesen wurde.

In [141] wird die planare ganzzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus 8 Punkten mit Durchmesser 21, siehe Abbildung 5.1 dazu genutzt die obere Schranken  $d(m, 2m + 2) \leq 13$ ,  $d(m, 2m + 3) \leq 17$  und  $d(m, 2m + 4) \leq 21$  für  $m \geq 2$  herzuleiten. Die Punktmenge  $\mathcal{P}$  besteht aus 6 Punkten auf einer Geraden  $g$  und 2 weiteren Punkten  $P_0, P_1$  auf einer dazu parallelen Geraden mit  $\overline{P_0 P_1} = 8$ . Blasen wir nun jeweils  $P_0$  und  $P_1$  zu einem regulären  $(m - 2)$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{S}_0$  bzw.  $\mathcal{S}_1$  mit Kantenlänge 6 auf, so erhalten wir eine  $m$ -dimensionale ganzzahlige Punktmenge  $\mathcal{P}'$  aus  $2m + 4$  Punkten mit Durchmesser 21. Ist  $Q_0$  ein Punkt aus  $\mathcal{S}_0$  und  $Q_1$  ein Punkt aus  $\mathcal{S}_1$ , so beträgt der Abstand zwischen  $Q_0$  und  $Q_1$  entweder 8 oder 10, da  $6^2 + 8^2 = 10^2$ . Lassen wir auf der Geraden  $g$  den linken bzw. den linken und den rechten Punkt weg, so erhalten wir die anderen zwei Ungleichungen. In Abbildung 9.3 ist dies für den letzten Fall mit  $|g| = 4$  und  $m = 3$  graphisch dargestellt. Allgemein ergibt sich,

**9.2.4 Lemma** *Ist  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige planare Punktmenge mit  $n - 2$  Punkten auf einer Geraden  $g$  und zwei weiteren Punkten  $P_0, P_1$  auf einer dazu parallelen Geraden mit  $\overline{P_0 P_1} = u$ , und existieren  $v, w \in \mathbb{N}$  mit  $u^2 + v^2 = w^2$ , so gilt*

$$d(m, n - 2 + 2(m - 2)) \leq \max(w, \text{diam}(\mathcal{P}))$$

für  $m \geq 2$ .

**Beweis.** Blase  $P_0$  und  $P_1$  in  $\mathcal{P}$  jeweils zu einem regulären Simplex mit Kantenlänge  $v$  auf.  $\square$

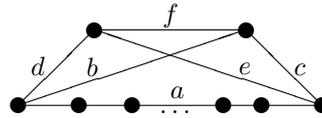


Abbildung 9.11: Planare Punktmenge mit Punkten auf zwei parallelen Geraden.

Um Lemma 9.2.4 nutzen zu können, müssen wir die benötigten Punktmenge  $\mathcal{P}$  konstruieren. Hierzu definieren wir  $\hat{d}(2, n)$  als minimalen Durchmesser für derartige Punktmenge und bestimmen die ersten paar Werte durch eine vollständige Suche. Es ergibt sich

$$\left(\hat{d}(2, n)\right)_{n=4, \dots, 14} = 4, 9, 13, 17, 21, 123, 143, 252, 297, 598, 793.$$

Um die zugehörigen Punktmenge kompakt darstellen zu können, benutzen wir die Bezeichnungen aus Abbildung 9.11 und geben in Tabelle 9.1 jeweils nur die Anzahl der Punkte  $n$ , die Seitenlängen  $a, b, c, d, e, f$  und den Durchmesser der Punktmenge an. Die fehlenden Punkte auf der Seite der Länge  $a$  können mit Hilfe von Algorithmus 5.2.3 schnell bestimmt werden.

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f = u$	$v$	$w$	$\text{diam}(\mathcal{P})$
4	4	4	2	2	4	3	4	5	5
5	8	9	7	7	9	4	3	5	9
6	11	13	9	9	13	6	8	10	13
7	16	13	11	9	17	6	8	10	17
8	21	17	11	11	17	8	8	10	21
9	120	107	97	87	123	40	30	50	123
10	143	123	97	97	123	40	30	50	143
11	252	222	114	141	183	99	20	101	252
12	297	222	141	141	222	99	20	101	297
13	598	331	331	514	176	195	28	197	598
14	793	514	331	331	514	195	28	197	793

Tabelle 9.1: Punktmenge mit minimalem Durchmesser  $\hat{d}(2, n)$ .

In [87] wurde die ganzzahlige Punktmenge aus Abbildung 9.12 für beliebige Dimensionen  $m$  betrachtet, wobei jeweils die Strecken der Länge 60 durch ein  $(m - 1)$ -dimensionales reguläres Simplex der Kantenlänge 60 ersetzt wurden.

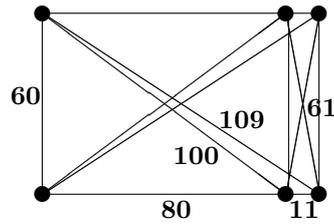


Abbildung 9.12: Ganzzahliges Prisma aus  $3m$  Punkten für  $m = 2$ .

Es ergibt sich die obere Schranke  $d(m, 3m) \leq 109$ . Eine andere Art diese Punktmenge zu beschreiben besteht darin, nur die untere Strecke aus 3 Punkten zu betrachten und die Punkte zu gleich großen regulären Simplizes aufzublasen. Unter diesen Punktmenge ist das Beispiel aus Abbildung 9.12 die kleinste Möglichkeit, bezüglich dem Durchmesser, mit paarweise ganzzahligen Abständen. Bläst man eine Strecke aus 2 Punkten auf, so beruht das kleinste Beispiel auf dem pythagoräischen Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Dies liefert  $d(m, 2m) \leq 5$ . Aufblasen eines einzelnen Punktes zu einem regulären Einheitssimplex liefert  $d(m, m + 1) \leq 1$ . Als neues Ergebnis präsentieren wir in Abbildung 9.13 die kleinste Möglichkeit eine Strecke aus 4 Punkten zu einem ganzzahligen Prisma aufzublasen. Es gilt somit  $d(m, 4m) \leq 409$ . Für 5 Punkte auf einer Strecke ist der Durchmesser der kleinsten Möglichkeit, falls sie überhaupt existiert, bereits größer als 1.000.000. Als weitere Möglichkeit könnte man noch das Aufblasen von Punkten zu regulären Simplizes mit verschiedenen Kantenlängen betrachten. So könnte z.B. die Konstruktion aus Lemma 11.3.1, die zu  $d(m, 2m) \leq 4$  führt, beschrieben werden. Wir werden hierauf jedoch nicht weiter eingehen.

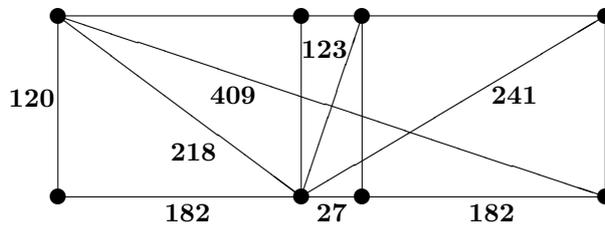


Abbildung 9.13: Ganzzahliges Prisma aus  $4m$  Punkten für  $m = 2$ .

In Tabelle 9.2 geben wir die oberen Schranken für minimale Durchmesser an, die mit Hilfe von  $d(m, m+1) \leq 1$ ,  $d(m, 2m) \leq 5$ ,  $d(m, 3m) \leq 109$ ,  $d(m, 4m) \leq 409$ , Lemma 9.2.1 und Lemma 9.2.4 bestimmt werden können.

In [67] wurden ganzzahlige Punktmengen  $\mathcal{P}$  aus  $n$  Punkten auf einem Kreis mit Radius  $R\sqrt{3}$ ,  $R \in \mathbb{N}$  betrachtet, siehe auch Abschnitt 5.5. Legt man nun weiter im  $\mathbb{E}^m$  einen  $(m-2)$ -dimensionalen regulären Simplex  $\mathcal{S}$  mit Kantenlänge  $2R$  in den zu  $\mathcal{P}$  orthogonalen Raum, so dass der Schwerpunkt von  $\mathcal{S}$  Mittelpunkt des Kreises  $\mathcal{P}$  ist, so entsteht eine ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmenge aus  $n + m - 1$  Punkten mit Durchmesser  $2R$ . Es lässt sich jedoch zeigen, dass diese Konstruktion zu schlechteren oberen Schranken für den minimalen Durchmesser als Lemma 9.2.1 führt.

Die Verallgemeinerung der ganzzahligen 3-dimensionalen Punktmengen aus 14 bzw. 15 Punkten mit minimalem Durchmesser führt zu folgendem Lemma.

**9.2.5 Lemma** *Sei  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige planare Punktmenge aus  $n$  Punkten, bei der  $n - 1$  Punkte auf einer Strecke  $\overline{AB}$  liegen,  $h$  die Länge der Höhe auf die Strecke  $\overline{AB}$  und  $\mathcal{P}'$  eine ganzzahlige planare Punktmenge aus  $n'$  Punkten, bei der die Punkte alle auf einem Kreis mit Radius  $h$  liegen. Dann gilt*

$$d(3, n + n' - 1) \leq \max(\text{diam}(\mathcal{P}), \text{diam}(\mathcal{P}')).$$

**Beweis.** Wir konstruieren eine ganzzahlige 3-dimensionale Punktmenge aus  $n + n' - 1$  Punkten mit Durchmesser  $\max(\text{diam}(\mathcal{P}), \text{diam}(\mathcal{P}'))$ . Hierzu kleben wir  $n'$  Kopien von  $\mathcal{P}$  entlang der Strecke  $\overline{AB}$  zusammen. Die  $n'$  Punkte, die nicht auf  $\overline{AB}$  liegen, befinden sich alle in einer zu  $\overline{AB}$  orthogonalen Hyperebene und wir können sie so arrangieren, dass sie äquivalent zu  $\mathcal{P}'$  sind.  $\square$

Mit Hilfe von Lemma 9.2.5 könnte man nun mit den bekannten Punktmengen zu  $\bar{d}(2, n)$  und den Methoden aus Abschnitt 5.2 gute obere Schranken für  $d(3, n)$  bestimmen. Da wir dies, aus Zeitgründen, jedoch noch nicht durchgeführt haben bzw. uns noch keine Verallgemeinerung auf Dimensionen  $m > 3$  eingefallen ist, haben wir die sich aus Lemma 9.2.5 ergebenden oberen Schranken nicht in Tabelle 9.2 mit aufgenommen. Eine entsprechende Tabelle unter Verwendung aller bekannten Ergebnisse, insbesondere Lemma 11.3.1 und Satz 9.2.6, werden wir unter [101] bereitstellen und versuchen sie auf dem neuesten Stand zu halten.

Quasi in letzter Minute vor Fertigstellung dieser Arbeit konnte die ganzzahlige 3-dimensionale Punktmenge aus 12 Punkten mit Durchmesser 17, siehe Abbildung 9.6, noch zu einer Konstruktion einer  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmenge mit kleinem Durchmesser und vielen Punkten verallgemeinert werden.

**9.2.6 Satz**

$$d(m, m^2 + m) \leq 17 \quad \text{für } m \geq 2.$$

$n \setminus m$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	1										
5	4	1									
6	5	4	1								
7	7	5	4	1							
8	13	5	5	4	1						
9	17	13	5	5	4	1					
10	17	13	5	5	5	4	1				
11	21	17	13	5	5	5	4	1			
12	21	17	13	5	5	5	5	4	1		
13	63	21	17	13	5	5	5	5	4	1	
14	74	21	17	13	5	5	5	5	5	4	1
15	91	74	21	17	13	5	5	5	5	5	4
16	104	91	21	17	13	5	5	5	5	5	5
17	121	104	91	21	17	13	5	5	5	5	5
18	134	121	104	21	17	13	5	5	5	5	5
19	153	134	121	104	21	17	13	5	5	5	5
20	164	153	134	121	21	17	13	5	5	5	5
21	196	164	153	134	109	21	17	13	5	5	5
22	212	196	164	153	123	21	17	13	5	5	5
23	228	212	196	164	143	109	21	17	13	5	5
24	244	228	212	196	143	109	21	17	13	5	5
25	272	244	228	212	196	143	109	21	17	13	5
26	288	272	244	228	212	143	109	21	17	13	5
27	319	288	272	244	228	212	109	109	21	17	13
28	332	319	288	272	244	228	143	109	21	17	13
29	364	332	319	288	272	244	228	109	109	21	17
30	396	364	332	319	288	272	244	109	109	21	17
31	437	396	364	332	319	288	272	244	109	109	21
32	464	437	396	364	332	319	288	272	109	109	21
33	494	464	437	396	364	332	319	288	109	109	109
34	524	494	464	437	396	364	332	319	288	109	109
35	553	524	494	464	437	396	364	332	319	109	109
36	578	553	524	494	464	437	396	364	332	109	109
37	608	578	553	524	494	464	437	396	364	332	109
38	642	608	578	553	524	494	464	409	396	364	109

Tabelle 9.2: Obere Schranken für den minimalen Durchmesser  $d(m, n)$ .

**Beweis.** Wir betrachten ein regelmäßiges  $m$ -dimensionales Simplex  $S$  mit Kantenlänge 23. An den  $m + 1$  Ecken von  $S$  schneiden wir jeweils ein regelmäßiges  $m$ -dimensionales Simplex der Kantenlänge 8 ab und bezeichnen die entstehende Punktmenge mit  $\mathcal{P}$ . Die Anzahl der Punkte von  $\mathcal{P}$  beträgt  $(m + 1)m$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige Punktmenge mit Durchmesser kleiner gleich 17 ist und bezeichnen dafür die Ecken von  $S$  mit  $P_0, \dots, P_m$ . Für zwei beliebige Punkte  $u, v$  aus  $\mathcal{P}$  existieren nun  $i_0, i_1, i_2, i_3 \in \{0, \dots, m\}$ , so dass  $u$  in der Strecke  $\overline{P_{i_0}P_{i_1}}$  und  $v$  in der Strecke  $\overline{P_{i_2}P_{i_3}}$  enthalten ist. Abhängig von der Mächtigkeit  $|\{P_{i_0}, P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}\}|$  spannen diese Punkte ein regelmäßiges Tetraeder, ein regelmäßiges Dreieck bzw. eine Strecke mit Kantenlänge 23 auf. Wir brauchen also nur noch für  $m \leq 3$  zu zeigen, dass unsere Konstruktion eine ganzzahlige Punktmenge mit Durchmesser kleiner gleich 17 liefert. Hierzu betrachten wir Abbildung 9.6 und die zugehörige Abstandsmatrix.  $\square$

Betrachten wir allgemein  $m$ -dimensionale Punktmengen  $\mathcal{P}$ , die dadurch entstehen, dass an den Ecken eines  $m$ -dimensionalen regelmäßigen Simplex mit Kantenlänge  $x + 2y$  jeweils ein  $m$ -dimensionaler regelmäßiger Simplex mit Kantenlänge  $y$  abgeschnitten wird, so bilden die Abstände von  $\mathcal{P}$  für  $m \geq 3$  die Menge  $\{x, y, x + y, \sqrt{x^2 + xy + y^2}, \sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}\}$ . Die kleinste ganzzahlige Möglichkeit ist durch  $x = 7$  und  $y = 8$  gegeben. Wir möchten erwähnen, dass es keine weitere ganzzahlige Lösung mit  $\text{ggT}(x, y) = 1$  und  $\max(x, y) \leq 10.000$  gibt. Für  $m = 2$  tritt  $\sqrt{x^2 + 2xy + 2y^2}$  nicht als Abstand auf. Hier gibt es eine unendliche Serie von nicht äquivalenten ganzzahligen planaren Punktmengen aus 6 Punkten [80]. Die kleinste Möglichkeit besitzt den minimalen Durchmesser  $d(2, 6) = 8$ , siehe Abbildung 5.1.

Satz 9.2.6 verbessert die in Tabelle 9.2 angegebenen oberen Schranken für minimale Durchmesser zum Teil erheblich.

### 9.3 Minimale Durchmesser für höhere Dimensionen

In diesem Abschnitt wollen wir die erzielten unteren Schranken für minimale Durchmesser von ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen mit  $m \geq 3$  zusammenfassen. Die minimalen Durchmesser von planaren ganzzahligen Punktmengen haben wir bereits in Kapitel 5 ausführlich behandelt. Ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 3 bzw. 4 behandeln wir in Kapitel 11. Alle weiteren angegebenen Werte bzw. Schranken für die minimalen Durchmesser haben wir durch vollständige Konstruktion der zugehörigen ganzzahligen Punktmengen bestimmt. Die bisher noch nicht bekannten unteren Schranken haben wir in den Tabellen 9.3,

9.4 und 9.5 jeweils fett gedruckt. Die Abstandsmatrizen der ganzzahligen Punkt-  
mengen  $\mathcal{P}$  mit minimalem Durchmesser und  $\text{diam}(\mathcal{P}) \geq 4$  listen wir in Abschnitt  
A.4 auf.

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1										
4	4	1									
5	8	3	1								
6	8	16	<b>4</b>	1							
7	33	<b>44</b>	7	<b>4</b>	1						
8	56	$\geq 66$	<b>11</b>	<b>5</b>	3	1					
9	56		$\geq 17$	<b>8</b>	$\geq 6$	<b>4</b>	1				
10	<b>105</b>			$\geq 9$		$\geq 6$	3	1			
11	<b>105</b>						$\geq 4$	<b>3</b>	1		
12	<b>105</b>							$\geq 4$	<b>3</b>	1	
13	<b>532</b>								$\geq 4$	<b>3</b>	1
14	<b>532</b>									$\geq 4$	<b>3</b>
15	<b>735</b>										$\geq 4$

Tabelle 9.3: Minimale Durchmesser  $\bar{d}(m, n)$ .

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1									
4	8	1								
5	73	3	1							
6	174	16	<b>4</b>	1						
7	$\geq 15.000$	<b>44</b>	7	<b>4</b>	1					
8		$\geq 66$	<b>14</b>	<b>5</b>	3	1				
9			$\geq 17$	<b>8</b>	$\geq 6$	<b>4</b>	1			
10				$\geq 9$		$\geq 6$	3	1		
11							$\geq 4$	<b>3</b>	1	
12								$\geq 4$	<b>3</b>	1
13									$\geq 4$	<b>3</b>
14										$\geq 4$

Tabelle 9.4: Minimale Durchmesser  $\dot{d}(m, n)$ .

Bei den ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen ohne Einschränkungen an die Lage mit  $m \geq 4$  geben wir vorsichtiger Weise keine unteren Schranken, die wir durch eine vollständige Konstruktion erzielt haben, an. Wir nehmen die Ausführungen aus Abschnitt 1.3 über die Verlässlichkeit von computerunterstützten vollständigen Suchen ziemlich ernst. Für die ganzzahligen Punktmengen ohne Einschränkungen an die Lage ist die Konstruktion zum einen vom Softwareentwicklungsstandpunkt komplizierter als für Punktmengen in semi-allgemeiner bzw. allgemeiner Lage, siehe Abschnitt 3.4. Zum anderen haben wir hierfür Programme verwendet, die wir nur ein einziges Mal implementiert haben und nicht mit Daten aus anderer Quelle überprüfen konnten. Die nötigen Korrekturen von, wenn auch sehr wenigen, Ergebnissen bzw. Daten aus [87, 141] sind ein ernst zu nehmendes Anzeichen dafür, dass die vollständige Konstruktion ganzzahliger Punktmengen mit Computerunterstützung großer Sorgfalt, bei der Implementierung und den anschließenden Tests auf Korrektheit, bedarf.

Gewissermaßen als Ausgleich geben wir nun theoretisch hergeleitete untere Schranken an. Hierzu betrachtet man sogenannte **normierte Punktmengen** aus  $n$  Punkten im  $\mathbb{E}^m$ , siehe z.B. [142]. Dies sind Punktmengen bei denen die Abstände zwischen verschiedenen Punkten größer gleich 1 sind und sich verschiedene Abstände um mindestens 1 unterscheiden. Ganzzahlige Punktmengen erfüllen beispielsweise diese Eigenschaft. Bezeichnen wir den minimalen Durchmesser von  $m$ -dimensionalen normierten Punktmengen aus  $n$  Punkten mit  $M(m, n)$  so gilt  $d(m, n) \geq M(m, n)$ .

Aus den in [85] bestimmten unteren Schranken für  $M(m, n)$  lässt sich somit

$$d(m, n) \geq M(m, n) > \sqrt{\frac{3}{2m}} n^{1/m}$$

und schärfer für  $m = 3$  und  $n \geq 5$ ,

$$d(3, n) \geq M(3, n) > \frac{1}{\sqrt{14}} n^{1/2}$$

folgern.

Für  $m = 2$  wurde 1982 die Ungleichung  $M(2, n) > \frac{n^{3/4}}{4}$  für  $n \geq 16$  bewiesen [44]. Bezeichnen wir die minimale Anzahl verschiedener Abstände einer planaren Punktmenge aus  $n$  Punkten, ohne weitere Einschränkungen an die Abstände, mit  $f(n)$ , so gilt  $M(2, n) \geq f(n)$ . Interessant ist, dass Chung, Szemerédi und Trotter im Jahr 1992

$$f(n) > \frac{n^{4/5}}{(\log n)^c}$$

$n \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	1										
4	4	1									
5	7	3	1								
6	8	4	4	1							
7	17	8	4	4	1						
8	21	13	4	4	3	1					
9	29	<b>16</b>	$\leq 5$	4	<b>4</b>	4	1				
10	<b>40</b>	17	$\leq 8$	4	<b>4</b>	4	3	1			
11	<b>51</b>	<b>17</b>		$\leq 5$	<b>4</b>	4	<b>4</b>	<b>3</b>	1		
12	<b>63</b>	<b>17</b>		$\leq 5$	4	4	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	1	
13	<b>74</b>	<b>56</b>		$\leq 5$	$\leq 5$	4	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	1
14	<b>91</b>	<b>65</b>		$\leq 5$	$\leq 5$	4	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>
15	<b>104</b>	<b>77</b>		$\leq 5$	$\leq 5$		<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
16	<b>121</b>	<b>86</b>			$\leq 5$		4	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
17	<b>134</b>	<b>99</b>						<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
18	<b>153</b>	<b>112</b>						4	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
19	<b>164</b>	<b>133</b>							<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
20	<b>196</b>	<b>154</b>							4	<b>4</b>	<b>4</b>
21	<b>212</b>	<b>195</b>								<b>4</b>	<b>4</b>
22	<b>228</b>	<b>212</b>								4	<b>4</b>
23	<b>244</b>	<b>228</b>									<b>4</b>
24	<b>272</b>										4

Tabelle 9.5: Minimale Durchmesser  $d(m, n)$ .

für hinreichend großes  $n$  zeigen konnten [26]. In 2003 gelang es dann Solymosi  $d(2, n) > cn$  zu zeigen. Ansonsten verweisen wir für die minimalen Durchmesser im planaren Fall auf Kapitel 5.



# 10 Anzahl ganzzahliger Simplizes

In diesem Kapitel wollen wir die Anzahl  $\alpha(d, m)$  der ganzzahligen Simplizes der Dimension  $m$  mit Durchmesser  $d$  näher betrachten. In Tabelle 10.1 und Tabelle 10.2 geben wir diese Anzahlen für Simplizes mit kleinen Dimensionen  $m$  an. Da

$d$	$\alpha(d, 1)$	$\alpha(d, 2)$	$\alpha(d, 3)$	$\alpha(d, 4)$	$\alpha(d, 5)$
1	1	1	1	1	1
2	1	2	4	6	10
3	1	4	16	56	197
4	1	6	45	336	3.133
5	1	9	116	1.840	41.308
6	1	12	254	7.925	403.753
7	1	16	516	29.183	3.076.647
8	1	20	956	91.621	18.364.836
9	1	25	1.669	256.546	91.171.940
10	1	30	2.760	648.697	
11	1	36	4.379	1.508.107	
12	1	42	6.676	3.267.671	
13	1	49	9.888	6.679.409	
14	1	56	14.219	12.957.976	
15	1	64	19.956	24.015.317	
16	1	72	27.421	42.810.244	
17	1	81	37.062	73.793.984	
18	1	90	49.143	123.240.964	
19	1	100	64.272	200.260.099	
20	1	110	82.888	317.487.746	

Tabelle 10.1: Anzahl  $\alpha(d, m)$  von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d$  für kleine Dimensionen  $m$  - Teil 1.

$d$	$\alpha(d, 1)$	$\alpha(d, 2)$	$\alpha(d, 3)$	$\alpha(d, 4)$
21	1	121	105.629	492.199.068
22	1	132	133.132	747.720.800
23	1	144	166.090	1.115.115.145
24	1	156	205.223	1.634.875.673
25	1	169	251.624	2.360.312.092
26	1	182	305.861	3.358.519.981
27	1	196	369.247	4.716.186.332
28	1	210	442.695	6.541.418.450
29	1	225	527.417	8.970.194.384
30	1	240	624.483	12.168.243.592
31	1	256	735.777	16.344.856.064
32	1	272	861.885	21.748.894.367
33	1	289	1.005.214	28.688.094.208
34	1	306	1.166.797	37.529.184.064
35	1	324	1.348.609	48.713.293.955
36	1	342	1.552.398	62.769.489.452
37	1	361	1.780.198	80.321.260.053
38	1	380	2.033.970	102.108.730.634
39	1	400	2.315.942	128.999.562.925
40	1	420	2.628.138	162.007.000.505
41	1	441	2.973.433	202.323.976.907
42	1	462	3.353.922	251.321.436.143
43	1	484	3.773.027	310.607.982.160
44	1	506	4.232.254	382.002.253.424
45	1	529	4.735.254	467.627.887.530

Tabelle 10.2: Anzahl  $\alpha(d, m)$  von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d$  für kleine Dimensionen  $m$  - Teil 2.

es zu jedem Durchmesser  $d$  genau eine Strecke mit diesem Durchmesser gibt, gilt für die erste Spalte  $\alpha(d, 1) = 1$ . Für die zweite Spalte kann man aus Algorithmus 5.2.2 eine Formel für  $\alpha(d, 2)$  ableiten.

$$\alpha(d, 2) = \sum_{b=\lfloor \frac{d+2}{2} \rfloor}^d \sum_{c=d+1-b}^b 1 = \left\lfloor \frac{(d+1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Summiert man  $\alpha(d', 2)$  für alle  $d' \leq d$  auf, so erhält man, dass es

$$\alpha_{\leq}(d, 2) = \left\lfloor \frac{1}{24}(d+1)(d+3)(2d+1) \right\rfloor$$

ganzzahlige Dreiecke mit Durchmesser kleiner gleich  $d$  gibt. Zählt man nicht nach dem Durchmesser, sondern nach dem Umfang der Dreiecke ab, so kann man der Literatur [8, 83] entnehmen, dass es

$$\left\lfloor \frac{u^2}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u}{4} \right\rfloor \left\lfloor \frac{u+2}{4} \right\rfloor$$

ganzzahlige Dreiecke mit Umfang  $u$  gibt. Bemerkenswert ist ein Zusammenhang mit dieser Anzahl und den Partitionen einer Zahl in drei Summanden. In Abschnitt 10.2 werden wir einen weiteren Zusammenhang zwischen der Anzahl von ganzzahligen Simplizes und der Anzahl von Partitionen präsentieren.

Für die dritte Spalte von Tabelle 10.1 bzw. Tabelle 10.2 wurde bisher keine einfache Formel gefunden, deshalb gehen wir im nächsten Abschnitt ausführlich auf sie ein. Bevor wir uns nun mit den ganzzahligen Tetraedern beschäftigen, geben wir in Tabelle 10.3 noch ein paar Anzahlen  $\alpha(d, m)$  von ganzzahligen Simplizes für größere Dimensionen an.

$d$	$\alpha(d, 6)$	$\alpha(d, 7)$	$\alpha(d, 8)$	$\alpha(d, 9)$	$\alpha(d, 10)$	$\alpha(d, 11)$
1	1	1	1	1	1	1
2	14	21	29	41	55	76
3	656	2.127	6.548	19.130	53.394	144.156
4	31.771	329.859	3.336.597	32.815.796		
5	1.197.137	42.534.683				
6	30.793.707					

Tabelle 10.3: Anzahl  $\alpha(d, m)$  von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d$  für größere Dimensionen  $m$ .

## 10.1 Anzahl ganzzahliger Tetraeder

Nachdem wir nun für die ersten beiden Spalten von Tabelle 10.1 und Tabelle 10.2 exakte Formeln gefunden haben, wollen wir uns die dritte Spalte anschauen, die

ganzzahligen Tetraeder. Für Durchmesser kleiner gleich 962 geben wir ihre Anzahlen im Anhang in Abschnitt C.4 an, wobei wir betonen möchten, dass diese Punktmengen auch wirklich erzeugt und nicht nur gezählt wurden.

Da sich die Cayley-Menger-Determinante für  $m \geq 3$  nicht mehr so schön faktorisieren lässt wie für  $m = 2$ , siehe Abschnitt 2.4, lassen sich Formeln für  $\alpha(d, m)$  mit  $m \geq 3$  nicht mehr so elementar herleiten wie für  $m = 2$ . Wir können aber zumindest die Anzahl  $\hat{\alpha}_{\leq}(d, 3)$  der Abstandsmatrizen von 4 Punkten mit ganzzahligen Abständen zwischen 1 und  $d$ , welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, bestimmen. Eine längere Rechnung und eine Anwendung von Lemma 2.6.1 ergibt

$$\begin{aligned} 24\hat{\alpha}_{\leq}(d, 3) &= 1 \cdot \left\lceil \frac{34d^6 + 55d^4 + 136d^2}{240} \right\rceil + \\ &+ 6 \cdot \frac{37d^4 - 18d^3 + 20d^2 - 21d + (36d^2 + 42) \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor}{96} + \\ &+ 3 \cdot \left\lceil \frac{4d^4 + 5d^2}{12} \right\rceil + 6 \cdot \left( d^2 - d \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor^2 \right) + \\ &+ 8 \cdot \left( d^2 - d \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor^2 \right), \end{aligned}$$

was sich zu

$$\hat{\alpha}_{\leq}(d, 3) = \begin{cases} \frac{17d^6 + 425d^4 + 1628d^2}{2880} & \text{für } d \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{17d^6 + 425d^4 + 1763d^2 + 675}{2880} & \text{für } d \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

vereinfachen lässt. Um in dieser nicht angegebenen Berechnung Flüchtigkeitsfehler auszuschließen, haben wir diese Formel für  $d \leq 50$  auch durch Konstruktion der zugehörigen Strukturen verifiziert. Setzen wir  $\hat{\alpha}(d, 3) = \hat{\alpha}_{\leq}(d, 3) - \hat{\alpha}_{\leq}(d-1, 3)$  so gilt

$$\hat{\alpha}(d, 3) = \begin{cases} \frac{34d^5 - 85d^4 + 680d^3 - 962d^2 + 1776d - 960}{960} & \text{für } d \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{34d^5 - 85d^4 + 680d^3 - 908d^2 + 1722d - 483}{960} & \text{für } d \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Die Formeln für  $\hat{\alpha}(d, 3)$  und für  $\alpha(d, 2)$  legen die Vermutung nahe, dass sich  $\alpha(d, 3)$  vielleicht ebenfalls als eine zusammengesetzte Funktion von Polynomen für die verschiedenen Restklassen einer Zahl  $k$  schreiben lässt. Mit Hilfe der bekannten Werte von  $\alpha(d, 3)$  können wir dies aber für  $k \leq 52$  ausschließen. Wenn wir schon keine Formel für  $\alpha(d, 3)$  finden können, so bestimmen wir wenigstens

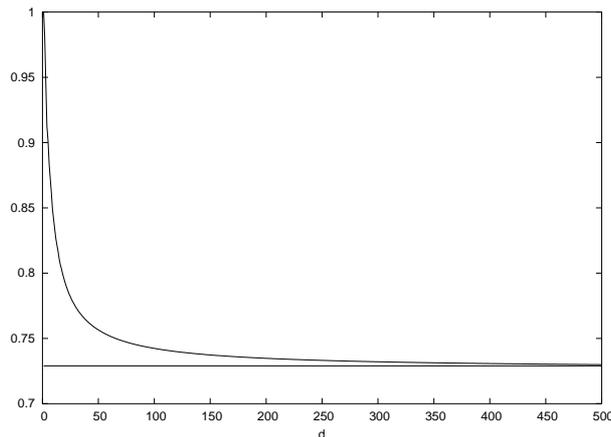


Abbildung 10.1:  $\frac{\alpha(d,3)}{\hat{\alpha}(d,3)}$  vs.  $\frac{729}{1000}$ .

auf empirischen Wege die *Wahrscheinlichkeit*  $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\alpha(d,3)}{\hat{\alpha}(d,3)}$ , dass eine ganzzahlige Abstandsmatrix, welche die Dreiecksungleichungen erfüllt, ein nicht entartetes Tetraeder ist. In Abbildung 10.1 haben wir hierfür  $\frac{\alpha(d,3)}{\hat{\alpha}(d,3)}$  mit  $\frac{729}{1000}$  verglichen. Es ergibt sich somit die Näherung

$$\alpha(d, 3) \approx \frac{12393d^5}{480000}.$$

Obwohl wir die Existenz des Grenzwerts  $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\alpha(d,3)}{\hat{\alpha}(d,3)}$  nicht theoretisch beweisen können, vermuten wir, dass er existiert, da die (endliche) Folge  $\left(\frac{\alpha(d,3)}{\hat{\alpha}(d,3)}\right)_{d=1, \dots, 962}$  streng monoton fallend ist. Um eine ungefähre Vorstellung von diesem vermuteten Grenzwert zu bekommen, haben wir

$$\alpha(800, 3) = 8.430.487.428.682$$

und

$$\alpha(1000, 3) = 25.728.695.195.597$$

bestimmt, was zu  $\frac{\alpha(800,3)}{\hat{\alpha}(800,3)} \approx 0,72869$  bzw.  $\frac{\alpha(1000,3)}{\hat{\alpha}(1000,3)} \approx 0,72826$  führt.

Wir möchten erwähnen, dass die Rechenzeit zur Berechnung von  $\alpha(800, 3)$  knapp 10 Stunden betragen hat. Das Hochzählen, mit einer einfachen Schleife,

bis zu dieser Zahl hätte alleine schon knapp 9 Stunden gedauert. Für noch größere Durchmesser  $d \geq d_0$  geht die Bestimmung von  $\alpha(d, 3)$  ab einen gewissen Durchmesser  $d_0$  sogar schneller als das Hochzählen mit einer Schleife. In Abschnitt C.4 werden wir näher beschreiben, wie dies möglich ist.

Weitere derartige Betrachtungen für die Spalten von Tabelle 10.1 bzw. Tabelle 10.2 erscheinen wenig vielversprechend, zumal schon für  $m = 4$  keine weiteren Anzahlen  $\alpha(d, 4)$  außer den angegebenen mehr bekannt sind und der Bestimmung weiterer Werte mittels Konstruktion von der verfügbaren Rechnerleistung her enge Grenzen gesetzt sind. Also wenden wir uns den Zeilen von Tabelle 10.1 und Tabelle 10.3 zu.

## 10.2 Ganzzahlige Simplizes mit Durchmesser kleiner gleich 2

Bei einer Betrachtung der Zeilen von Tabelle 10.1 und Tabelle 10.3 stellen wir fest, dass zum einen  $\alpha(1, m) = 1$  gilt und  $\alpha(1, m) + \alpha(2, m)$  der Anzahl der Partitionen von  $m + 1$  entspricht. Dabei soll unter der Partition einer natürlichen Zahl  $k$  ein  $r$ -Tupel  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  natürlicher Zahlen mit  $i_0 \geq \dots \geq i_{r-1} > 0$  und  $i_0 + \dots + i_{r-1} = k$  verstanden werden. Die Anzahl der Partitionen von  $k$  bezeichnen wir mit  $p(k)$ . Asymptotisch gilt

$$p(k) \sim \frac{1}{k\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2k/3}},$$

setzt man  $p(k) = 0$  für  $k \leq 0$ , so kann man  $p(k)$  für  $k \geq 1$  auf effiziente Art und Weise rekursiv aus

$$p(k) + \sum_{i \geq 1} \left( (-1)^i p \left( k - \frac{i(3i-1)}{2} \right) + (-1)^i p \left( k - \frac{i(3i+1)}{2} \right) \right) = 0$$

berechnen, siehe z.B. [58].

Im Folgenden werden wir eine Bijektion zwischen den Partitionen von  $m + 1$  und den ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Simplizes mit Durchmesser  $d \leq 2$  beweisen. Da in Simplizes mit Durchmesser  $d \leq 2$  nur maximal zwei verschiedene Abstände vorkommen können, gibt es eine natürliche Abbildung in die Menge der Graphen. (Im Folgenden werden wir häufiger Begriffe aus der Graphentheorie verwenden und verweisen den Leser zum Nachschlagen der Definitionen auf [36] oder jede andere Einführung in die Graphentheorie.) Hierzu ordnen wir zwei

Punkten im Graphen genau dann eine Kante zu, falls der Abstand der entsprechenden Punkte im Simplex eins beträgt. Betrachten wir die möglichen Dreiecke mit Seitenlängen 1 und 2,  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$  und  $(2, 2, 2)$ , so stellen wir fest, dass die ganzzahligen Simplex mit Durchmesser  $d \leq 2$  immer auf Vereinigungen von vollständigen Graphen  $K_{i_j}$  abgebildet werden. Wir betrachten also die Abbildung  $\omega$  welche eine Partition  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  auf den Simplex  $\mathcal{S}$  abbildet, der aus einem Graphen  $\mathcal{G} = \bigcup_{0 \leq j < r} K_{i_j}$  hervorgeht, wenn man Kanten und Nichtkanten wie eben

beschrieben den zwei möglichen Abständen zuordnet. Für eine gegebene Dimension  $m$  definieren wir die Quelle von  $\omega$  als Menge der Partitionen von  $m + 1$  und das Ziel als Menge der  $m$ -dimensionalen Simplex mit Abständen aus  $\{1, 2\}$ . Da  $\omega$  offensichtlich injektiv ist, müssen wir nur noch die Surjektivität beweisen.

Bevor wir dies tun bemerken wir, dass obige Überlegungen auch gelten, wenn wir allgemeiner  $m$ -dimensionale Simplex mit Abständen aus  $\{1, \lambda\}$  mit einer reellen Zahl  $\lambda \geq 2$  betrachtet. Also verallgemeinern wir unsere Abbildung  $\omega$  zu  $\omega_\lambda$ , so dass sie eine Nichtkante des Graphen  $\mathcal{G}$  auf den Abstand  $\lambda \geq 2$  abbildet. Nach dem Satz von Menger (2.1.3) müssen wir, um die Surjektivität von  $\omega_\lambda$  zu beweisen, zeigen, dass für alle Partitionen  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  von  $m + 1$  die Bedingungen von Lemma 2.1.2 für  $\omega_\lambda([i_0, \dots, i_{r-1}])$  erfüllt sind. Indem wir die Bijektivität von  $\omega_\lambda$  induktiv über die Dimension  $m$  beweisen, können wir voraussetzen, dass die Teilsimplex von  $\omega_\lambda([i_0, \dots, i_{r-1}])$  mittels  $\omega_\lambda$  aus einer Partition hervorgehen. Wir brauchen also nur für jede Partition  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  zu zeigen, dass für  $\mathcal{S} = \omega_\lambda([i_0, \dots, i_{r-1}])$  die Ungleichung  $(-1)^m C(\mathcal{S}) > 0$  gilt, wobei  $C(\mathcal{S})$  die Cayley-Menger-Determinante von  $\mathcal{S}$  ist und  $m + 1 = i_0 + \dots + i_{r-1}$  gilt.

**10.2.1 Lemma** *Für eine Partition  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  sei  $D = (d_{i,j})$  die Abstandsmatrix von  $\mathcal{S} = \omega_\lambda([i_0, \dots, i_{r-1}])$ ,  $A = (d_{i,j}^2)$  die Matrix der Abstandskvadrat,  $\dim(A)$  die Anzahl der Zeilen der Matrix  $A$  und  $\lambda \geq 1$ . Die Cayley-Menger-Matrix zu einer Matrix  $A$  von Abstandskvadrat bezeichnen wir mit  $\bar{A}$ . Es gelten*

$$(-1)^{\dim(A)} (\lambda^2 \det(\bar{A}) + \det(A)) > 0 \quad \text{und} \quad (-1)^{\dim(A)} \det(\bar{A}) > 0.$$

**Beweis.** Wir beweisen per Induktion über  $r$ . Falls  $r = 1$  so sind alle Abstände  $d_{i,j}$  gleich 1. Eine kurze Rechnung führt zu  $\det(A) = (-1)^{\dim(A)-1} (\dim(A) - 1)$  und  $\det(\bar{A}) = (-1)^{\dim(A)} \dim(A)$ . Somit sind beide Ungleichungen erfüllt.

Für  $r > 1$  definieren wir  $F = (f_{i,j}) = \omega_\lambda([i_1, \dots, i_{r-1}])$ ,  $B = (f_{i,j}^2)$  und  $k = i_0$ .

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 & & & & \end{pmatrix}$$

mit einem  $k \times k$  Block in der linken oberen Ecke bezeichnen wir als  $C_k$ . Da  $\det(A) = \det(C_k)$  und  $\det(\overline{A}) = \det(\overline{C_k})$  gilt, starten wir mit der Berechnung der Determinanten von  $C_k$  und  $\overline{C_k}$ . Dividieren der ersten Zeile und der ersten Spalte von

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & \cdots & \lambda^2 \\ \lambda^2 & & & \\ \vdots & & B & \\ \lambda^2 & & & \end{pmatrix}$$

durch  $\lambda^2$  liefert

$$\det(C_1) = \lambda^4 \det(\overline{B}).$$

Bei

$$\overline{C_1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2 & \cdots & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & & & & 1 \\ \vdots & & B & & \vdots \\ \lambda^2 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ziehen wir  $\lambda^2$ -mal die letzte von der ersten Zeile und  $\lambda^2$  Mal die letzte von der ersten Spalte ab. Dies liefert

$$\det(\overline{C_1}) = \begin{vmatrix} -2\lambda^2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & & & 1 \\ \vdots & & B & & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Entwickeln erhält man

$$\det(\overline{C_1}) = -2\lambda^2 \det(\overline{B}) - \det(B).$$

Für  $k \geq 2$  ziehen wir bei  $C_k$  die zweite von der ersten Zeile und die zweite von der ersten Spalte ab. Dies liefert

$$\det(C_k) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 & \cdots & \cdots & \lambda^2 & & & & \end{vmatrix} \cdot \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ B \end{matrix}.$$

Durch Entwickeln erhalten wir

$$\det(C_k) = -2 \det(C_{k-1}) - \det(C_{k-2}).$$

Analoge Berechnungen für  $\overline{C_k}$  führen zu

$$\det(\overline{C_k}) = -2 \det(\overline{C_{k-1}}) - \det(\overline{C_{k-2}}).$$

Mittels Induktion, obiger zwei Rekursionsgleichungen,  $\det(C_0) = \det(B)$  und  $\det(\overline{C_0}) = \det(\overline{B})$  lässt sich nachrechnen, dass

$$\det(C_k) = (-1)^{k+1} (k\lambda^4 \det(\overline{B}) + (k-1) \det(B))$$

und

$$\det(\overline{C_k}) = (-1)^k ((2k\lambda^2 - k + 1) \det(\overline{B}) + k \det(B))$$

gelten. Mit diesen zwei Gleichungen,  $\dim(C_k) = \dim(B) + k$ ,  $\lambda \geq 1$ ,  $k > 0$  und der Induktionsvoraussetzung für  $B$  folgern wir

$$\begin{aligned} & (-1)^{\dim(A)} (\lambda^2 \det(\overline{A}) + \det(A)) = \\ & (-1)^{\dim(C_k)} (\lambda^2 \det(\overline{C_k}) + \det(C_k)) = \\ & \underbrace{(k\lambda^2 - k + 1)}_{>0} \underbrace{(-1)^{\dim(B)} (\lambda^2 \det(\overline{B}) + \det(B))}_{>0} > 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{\dim(A)} \det(\overline{A}) = \\
 & (-1)^{\dim(C_k)} \det(\overline{C_k}) = \\
 & \underbrace{k(-1)^{\dim(B)} \left( \lambda^2 \det(\overline{B}) + \det(B) \right)}_{>0} + \underbrace{(k\lambda^2 - k + 1)}_{>0} \underbrace{(-1)^{\dim(B)} \det(\overline{B})}_{>0} > 0.
 \end{aligned}$$

□

Mit Lemma 10.2.1 und den vorangegangenen Überlegungen haben wir einen Beweis für den folgenden Satz.

**10.2.2 Satz (in anderer Formulierung, Einhorn, Schoenberg, 1966, [40, 41])**

Für  $\lambda \geq 2$  ist die Abbildung  $\omega_\lambda$  eine Bijektion zwischen den Partitionen von  $m+1$  und den  $m$ -dimensionalen Simplex mit Seitenlängen in  $\{1, \lambda\}$ .

Man kann Satz 10.2.2 auch eleganter beweisen, indem man anstatt Lemma 10.2.1 zu benutzen einfach eine Koordinatendarstellung von  $\omega_2([i_0, \dots, i_{r-1}])$  direkt angibt. Hierzu betrachten wir folgende Konstruktion von Christian Haase [59]. Wir platzieren reguläre  $(i_j - 1)$ -dimensionale Simplex der Seitenlänge 1 in paarweise orthogonale Unterräume, so dass ihr Schwerpunkt jeweils im Ursprung liegt. Anschließend wird der Schwerpunkt des  $j$ -ten Simplex jeweils um einen Betrag von  $\sqrt{\frac{\lambda^2}{2} - \frac{i_j - 1}{2i_j}}$  in eine neue Koordinatenrichtung verschoben. Da die Ecken des  $j$ -ten regulären Simplex den Abstand  $\sqrt{\frac{i_j - 1}{2i_j}}$  von ihrem Schwerpunkt haben, besitzen je zwei Punkte aus unterschiedlichen regulären Simplex den Abstand  $\lambda$ .

Den Beweis von Lemma 10.2.1 haben wir aber dennoch präsentiert, da wir im Folgenden häufiger Lemmata über den Wert oder das Vorzeichen bestimmter Determinanten angeben, bei denen wir die Beweise dem Leser überlassen. In diesen Fällen ist ein Beweis immer mit ähnlichen, teils sehr länglichen aber elementaren, Berechnungen möglich.

Weiter soll erwähnt werden, dass in [72] eine Formel für die Cayley-Menger-Determinante von  $\omega_\lambda$  angegeben wurde und sich Satz 10.2.2 noch weiter verschärfen lässt. In [142], siehe auch [73], wurde u.a. das größtmögliche  $\sigma(m, m+2)$  bestimmt, so dass es eine  $m$ -dimensionale Punktmenge gibt, bei denen alle Abstände aus  $\{1, \sigma(m, m+2)\}$  sind. Wir zitieren ohne Beweis, dass für  $m \geq 2$ ,

$$\sigma(m, m+2) = \sqrt{\frac{9m - 10 + \sqrt{33m^2 - 52m + 20}}{4m - 4}}$$

gilt.

**10.2.3 Satz** (in anderer Formulierung, Piepmeyer, 1993, [73, 142])

Für  $\lambda \geq \sigma(m-1, m+1)$  und  $m \geq 3$  ist die Abbildung  $\omega_\lambda$  eine Bijektion zwischen den Partitionen von  $m+1$  und den  $m$ -dimensionalen Simplizes mit Seitenlängen in  $\{1, \lambda\}$ .

**Beweis.** Da  $\sigma(m-1, m+1)$  für  $m \geq 3$  größer 1 ist, ist  $\omega_\lambda$  injektiv und mit Lemma 10.2.1 folgt, dass sich die Bilder von  $\omega_\lambda$  alle in den  $\mathbb{E}^m$  einbetten lassen. Wir müssen also nur noch zeigen, dass es außer diesen Bildern von  $\omega_\lambda$  keine weiteren Simplizes mit Seitenlängen aus  $\{1, \lambda\}$  im  $\mathbb{E}^m$  gibt. Also nehmen wir an, dass ein weiteres Simplex  $S$  existiert. Wir betrachten nun das Simplex  $S(\lambda')$  welches aus  $S$  hervorgeht, indem wir die Seiten der Länge  $\lambda$  auf Länge  $\lambda'$  strecken. Wegen Satz 10.2.2 ist  $S(\lambda')$  für  $\lambda' \geq 2$  nicht mehr in den  $\mathbb{E}^m$  einbettbar. Daher gibt es wegen der Stetigkeit der Cayley-Menger-Determinanten bzw. der Koordinatendarstellung ein  $\lambda' > \lambda$ , so dass  $S(\lambda')$  eine Punktmenge aus  $m+1$  Punkten im euklidischen  $\mathbb{E}^{m-1}$  ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Definition von  $\sigma(m-1, m+1)$ .  $\square$

Für  $m \geq 3$  gilt  $\sigma(m-1, m+1) \leq \sigma(2, 4) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \approx 1.93185$  und  $\sigma(m-1, m+1) \geq \frac{1}{2}\sqrt{9 + \sqrt{33}} \approx 1.91993$ .

Aus Satz 10.2.2 lässt sich noch eine Aussage über die Anzahl der  $m$ -dimensionalen Simplizes mit Seitenlängen aus einer gegebenen Menge ableiten.

**10.2.4 Folgerung** Die Anzahl  $\alpha(\{a_0, \dots, a_{r-1}\}, m)$  der  $m$ -dimensionalen Simplizes mit Seitenlängen aus  $\{a_0, \dots, a_{r-1}\}$  mit  $a_0 < \dots < a_{r-1}$  ist größer gleich

$$\binom{r}{2}(p(m+1) - 2) + r,$$

wobei  $p(m+1)$  die Anzahl der Partitionen von  $m+1$  bezeichnet. Ist  $2a_i \leq a_{i+1}$  für alle  $i$  erfüllt, so gilt sogar Gleichheit.

## 10.3 Ganzzahlige Simplizes mit höchstens zwei Abständen

Im vorherigen Abschnitt hatten wir bereits Simplizes mit Abständen in  $\{1, \lambda\}$  betrachtet. Nun wollen wir allgemeiner für zwei natürliche Zahlen  $a$  und  $b$  Simplizes mit Abständen in  $\{a, b\}$  betrachten. Hierzu definieren wir für einen Graphen  $\mathcal{G}$  auf  $n$  Knoten die Abbildung  $\omega_{a,b}(\mathcal{G}) \mapsto \mathcal{S}$ , die eine Kante  $\{i, j\}$  auf den Abstand

$\delta(i, j) = a$  und eine Nichtkante auf den Abstand  $\delta(i, j) = b$  abbildet. Mit unserer vorherigen Definition gilt also

$$\omega_\lambda([i_0, \dots, i_{r-1}]) = \omega_{1,\lambda} \left( \bigcup_{0 \leq j < r} K_{i_j} \right).$$

Zu gegebenem  $a$  und  $b$  führen nun nicht alle Graphen  $\mathcal{G}$  zu einem Simplex, der sich in den  $\mathbb{E}^{n-1}$  einbetten lässt. Für den Fall  $2a \leq b$  bzw.  $2b \leq a$  haben wir im vorherigen Abschnitt eine vollständige Charakterisierung, der Graphen, die zu Simplex führen, angegeben, was dann zu exakten Formeln für  $\alpha(\{a, b\}, m)$  führt. Einen Graphen  $\mathcal{G}$  für den  $\omega_{a,b}(\mathcal{G})$ , bei gegebenem  $a$  und  $b$ , kein Simplex ist, bezeichnen wir als **verbotenen** Graphen. Ist  $\mathcal{G}'$  ein Graph, der einen verbotenen Graph  $\mathcal{G}$  als **induzierten Teilgraph** bzw. **Untergraph** enthält, so ist der Graph  $\mathcal{G}'$  ebenfalls verboten. Dabei heißt ein Graph  $\mathcal{G}$  induzierter Teilgraph bzw. Untergraph eines Graphen  $\mathcal{G}'$ , falls die Knoten von  $\mathcal{G}$  eine Teilmenge der Knoten von  $\mathcal{G}'$  bilden und  $\{u, v\}$  genau dann eine Kante in  $\mathcal{G}$  ist, wenn sie es in  $\mathcal{G}'$  ist.

Einen Graphen bezeichnen wir nun als **verbotenen minimalen** Graphen, wenn er verboten ist, aber alle echten Untergraphen von  $\omega_{a,b}$  auf Simplex abgebildet werden. In Abbildung 10.4 stellen wir die Anzahl der  $m$ -dimensionalen Simplexe mit Seitenlängen 2 und 3, der Anzahl der verbotenen minimalen Graphen und der Anzahl der Graphen mit  $m+1$  Knoten gegenüber. Die verbotenen minimalen Graphen aus höchstens 8 Knoten haben wir vollständig in Abschnitt D.1 abgebildet.

$m$	# verbotener minimaler Graphen	$\alpha(\{2, 3\}, m)$	# Graphen
1	0	2	2
2	0	4	4
3	1	10	11
4	1	27	34
5	21	71	156
6	7	172	1.044
7	10	395	12.346
8	33	850	274.668
9	72	1.697	12.005.168

Tabelle 10.4: Anzahl verbotener minimaler Graphen für Simplexe mit Seitenlängen 2 und 3.

Es stellt sich heraus, dass die Anzahl  $\alpha(\{2, 3\}, m)$  der ganzzahligen Simplexe mit Abständen aus  $\{2, 3\}$  für größere Dimensionen  $m$  nur einen Bruchteil der An-

zahl der Graphen beträgt. Die Graphen, die mittels  $\omega_{2,3}$  auf Simplex abgebildet werden, sind somit etwas *besonderes* und man kann sich die Frage stellen, wie man diese spezielle Graphenklasse, allein mit graphentheoretischen Hilfsmitteln, charakterisieren kann.

Für Simplex mit Abständen aus  $\{1, 2\}$  kann man z.B. sagen, dass es genau die Graphen sind, die aus Vereinigungen von vollständigen Graphen entstehen. Eine andere Art diese Graphenklasse zu charakterisieren besteht darin zu sagen, dass diese Graphenklasse aus allen Graphen besteht, die keinen Pfad der Länge 2 als induzierten Teilgraphen enthalten. Wir haben also ausgenutzt, dass es nur endlich viele, hier einen, verbotenen Untergraphen gibt. Leider ist die Situation für Simplex mit Abständen 2 und 3 nicht ganz so einfach, da es hier mehr verbotene minimale Graphen gibt. Ob ihre Anzahl endlich ist, ist ungewiss und Tabelle 10.4 legt eher die gegenteilige Vermutung nahe, wobei man allerdings bei dem vorhandenen Datenmaterial sehr vorsichtig mit Vermutungen sein sollte.

$m$	# verbotener zusammenhängender minimaler Graphen	$\tilde{\alpha}(\{2, 3\}, m)$	# zusammenhängender Graphen
1	0	1	1
2	0	2	2
3	1	5	6
4	1	15	21
5	20	36	112
6	6	77	853
7	6	146	11.117
8	12	271	261.080
9	19	475	11.716.571

Tabelle 10.5: Anzahl verbotener zusammenhängender minimaler Graphen für Simplex mit Seitenlängen 2 und 3.

Da es uns nicht gelungen ist für  $\alpha(\{2, 3\}, m)$  eine einfache Formel anzugeben bzw. die zugehörige Graphenklasse durch verbotene Untergraphen zu charakterisieren, wollen wir das Problem noch weiter vereinfachen. Anstatt allgemeiner Graphen betrachten wir nur noch zusammenhängende Graphen und bezeichnen mit  $\tilde{\alpha}(\{a, b\}, m)$  die Anzahl der  $m$ -dimensionalen Simplex mit Abständen aus  $\{a, b\}$  bei denen das Urbild von  $\omega_{a,b}$  ein zusammenhängender Graph ist. Motiviert ist diese Betrachtungsweise durch die einfache Gleichung  $\tilde{\alpha}(\{1, 2\}, m) = 1$ . Die in Tabelle 10.5 angegebenen Werte für  $\tilde{\alpha}(\{2, 3\}, m)$  machen aber leider ebenfalls wenig Hoffnung eine einfache Formel für  $\tilde{\alpha}(\{2, 3\}, m)$  oder  $\alpha(\{2, 3\}, m)$  zu fin-

den. Deswegen betrachten wir nun ganzzahlige Simplizes mit Seitenlängen  $a < b$  bei denen der Quotient  $\frac{b}{a}$  nahe bei 2 liegt.

Wir untersuchen beispielhaft die Simplizes mit Seitenlängen aus  $\{4, 7\}$  bzw.  $\{5, 9\}$ . Die entsprechenden Werte von  $\alpha(\{4, 7\}, m)$ ,  $\alpha(\{5, 9\}, m)$ ,  $\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m)$  und  $\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m)$  geben wir für  $m \leq 30$  in Tabelle 10.6 an. Zwar können wir auch hier keine Formel für  $\alpha(\{4, 7\}, m)$  bzw.  $\alpha(\{5, 9\}, m)$  angeben, aber zumindest können wir die Werte von  $\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m)$  bzw.  $\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m)$  vollständig bestimmen. Da wir nur eine Formel für  $\tilde{\alpha}$  und nicht für  $\alpha$  herleiten wollen, brauchen wir nur eine Strukturaussage über die zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$ , für die  $\omega_{4,7}(\mathcal{G})$  bzw.  $\omega_{5,9}(\mathcal{G})$  ein Simplex ist, zu finden und zu beweisen. Hierzu definieren wir für zwei vollständige Graphen  $K_u$  und  $K_v$  einen Graphen  $\mathcal{G} = K_u \oplus K_v$  als Vereinigung von  $K_u$  und  $K_v$ , wobei die zwei vollständigen Graphen genau einen Knoten gemeinsam haben, siehe Abbildung 10.2 für ein Beispiel. Allgemein gilt  $K_u \oplus K_1 = K_u$ .

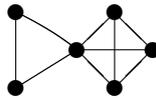


Abbildung 10.2: Der Graph  $K_3 \oplus K_4$ .

**10.3.1 Lemma** *Ist  $\mathcal{G}$  ein zusammenhängender Graph und  $\omega_{4,7}(\mathcal{G})$  oder  $\omega_{5,9}(\mathcal{G})$  ein Simplex, so existieren natürliche Zahlen  $u$  und  $v$ , so dass  $\mathcal{G} = K_u \oplus K_v$  gilt.*

**Beweis.** Man rechnet leicht nach, dass die Graphen in Abbildung 10.3, sowohl für die Abstände  $\{4, 7\}$  als auch für die Abstände  $\{5, 9\}$ , verbotene Graphen sind. Für diesen Beweis bezeichnen wir sie in dieser Reihenfolge als  $\tilde{K}_4$ ,  $C_4$ ,  $P_4$  und  $T$ . Weiter rechnet man leicht nach, dass von den 10 zusammenhängenden Graphen mit höchstens 4 Knoten alle bis auf die Graphen der Form  $K_u \oplus K_v$  verboten sind. Wir beweisen nun unsere Behauptung per Induktion über  $u + v$ .

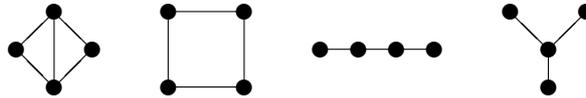


Abbildung 10.3: Verbotene Graphen für die Abstandsmengen  $\{4, 7\}$  und  $\{5, 9\}$ .

$m$	$\alpha(\{4, 7\}, m)$	$\alpha(\{5, 9\}, m)$	$\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m)$	$\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m)$
1	2	2	1	1
2	4	4	2	2
3	7	7	2	2
4	12	12	3	3
5	21	20	3	3
6	34	29	4	4
7	49	40	4	4
8	73	55	5	5
9	103	74	5	4
10	144	98	6	3
11	197	135	6	3
12	264	179	7	3
13	353	238	7	3
14	471	315	8	3
15	625	412	8	3
16	821	537	9	3
17	1.080	701	9	3
18	1.403	904	10	3
19	1.823	1.166	10	3
20	2.351	1.496	11	3
21	3.026	1.909	11	3
22	3.867	2.424	12	3
23	4.939	3.074	12	3
24	6.264	3.870	13	3
25	7.931	4.863	13	3
26	9.996	6.087	14	3
27	12.574	7.591	14	3
28	15.741	9.431	15	3
29	19.676	11.694	15	3
30	24.489	14.436	16	3

Tabelle 10.6: Anzahl von Simplex mit Seitenlängen 4 und 7 bzw. 5 und 9.

Entfernt man aus  $\mathcal{G}$  einen Knoten  $y$  derart, dass der Graph immer noch zusammenhängend bleibt, entsteht ein Graph  $\mathcal{G}'$ , für den nach Induktionsvoraussetzung  $u$  und  $v$  existieren mit  $\mathcal{G}' = K_u \oplus K_v$ . Den gemeinsamen Knoten von  $K_u$  und  $K_v$  bezeichnen wir mit  $x$ . Der Knoten  $y$  hat in  $K_u$  entweder 0, 1 oder  $u$  Nachbarn, da

$\mathcal{G}'$  sonst  $\tilde{K}_4$  als Untergraphen enthalten würde, entsprechend für  $K_v$ . Diese zwei Anzahlen an Nachbarn fassen wir als Tupel  $\nu = (n_u, n_v)$  zusammen. Der Fall  $\nu = (0, 0)$  kann nicht eintreten, da  $\mathcal{G}$  nach Voraussetzung zusammenhängend ist. Im Fall  $\nu = (0, 1)$  gilt  $\mathcal{G} = K_2 \oplus K_v$  falls  $u = 1$  oder  $\mathcal{G}$  enthält den  $P_4$  als Untergraphen falls  $u > 1$ , entsprechend für  $\nu = (1, 0)$ . Da  $C_4$  und  $T$  verbotene Graphen sind, kann im Fall  $\nu = (1, 1)$  nur  $\mathcal{G} = K_2 \oplus K_v$  oder  $\mathcal{G} = K_u \oplus K_2$  gelten. Der Fall  $\nu = (0, v)$  bzw.  $\nu = (u, 0)$  kann nicht auftreten, da  $y$  entweder mit  $x$  benachbart ist oder nicht. Für  $\nu = (1, v)$  bzw.  $\nu = (u, 1)$  gilt  $\mathcal{G} = K_u \oplus K_{v+1}$  bzw.  $\mathcal{G} = K_{u+1} \oplus K_v$ . Falls  $u, v \geq 2$  und  $\nu = (u, v)$  so würde  $\mathcal{G}$  den Graphen  $\tilde{K}_4$  als Untergraphen enthalten, was nicht möglich ist. Somit haben wir alle Fälle für  $\nu$  behandelt.  $\square$

### 10.3.2 Lemma

$$\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m) = \begin{cases} 1 & : m = 1, \\ 3 & : m = 4, 5 \vee 10 \leq m \leq 41, \\ 4 & : m = 6, 7, 9, \\ 5 & : m = 8, \\ 2 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beweis.** Nach Lemma 10.3.1 brauchen wir zu gegebenem  $m$  nur für die Graphen  $\mathcal{G} = K_u \oplus K_v$  mit  $u + v = m + 2$  testen, ob  $\omega_{5,9}(\mathcal{G})$  ein Simplex ist. Eine kleine Computerberechnung bestätigt die angegebenen Werte von  $\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m)$  für  $m \leq 41$ . Da  $K_3 \oplus K_{41}$  für die Abstände  $\{5, 9\}$  ein verbotener Graph ist, gilt  $\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m) \leq 2$  für  $m \geq 42$ . Per Induktion zeigt man für die Cayley-Menger-Determinanten

$$C(\omega_{5,9}(K_1 \oplus K_v)) = (-1)^v 5^{2(v-2)} v$$

und

$$C(\omega_{5,9}(K_2 \oplus K_v)) = (-1)^{v-1} 5^{2(v-2)} (961 + 289v).$$

Somit sind  $\omega_{5,9}(K_1 \oplus K_v)$  und  $\omega_{5,9}(K_2 \oplus K_v)$  nach Lemma 2.1.4 Simplizes.  $\square$

### 10.3.3 Lemma

$$\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m) = \begin{cases} \lceil \frac{m+1}{2} \rceil & : m \leq 31, \\ 16 & : m = 32, \\ 14 & : m = 33, \\ 13 & : m = 34, 35, \\ 12 & : 36 \leq m \leq 39, \\ 11 & : 40 \leq m \leq 48, \\ 10 & : 49 \leq m \leq 71, \\ 9 & : 72 \leq m \leq 295, \\ 8 & : m \geq 296. \end{cases}$$

**Beweis.** Analog zum Beweis von Lemma 10.3.2 bestätigen wir die Werte von  $\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m)$  für  $m \leq 71$  durch eine Computerberechnung. Per Induktion zeigt man folgende Formeln für die Werte von Cayley-Menger-Determinanten,

$$\begin{aligned}
 C(\omega_{4,7}(K_1 \oplus K_v)) &= (-1)^v 2^{4v-4} v, \\
 C(\omega_{4,7}(K_2 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-1} 2^{4v-4} (289 + 223v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_3 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-2} 2^{4v-3} (289 + 95v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_4 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-3} 2^{4v} (867 + 157v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_5 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-4} 2^{4v+6} (289 + 31v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_6 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-5} 2^{4v+8} (1445 + 91v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_7 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-6} 2^{4v+13} (867 + 29v), \\
 C(\omega_{4,7}(K_8 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-7} 2^{4v+16} (2023 + 25v) \quad \text{und} \\
 C(\omega_{4,7}(K_9 \oplus K_v)) &= (-1)^{v-8} 2^{4v+23} (289 - v).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 2.1.4 folgt die Behauptung für  $m \geq 72$ . □

Wir möchten bemerken, dass Lemma 10.3.2 und Lemma 10.3.3 zwar eigentlich nur eine Aussage über die Anzahl  $\tilde{\alpha}(\{5, 9\}, m)$  bzw.  $\tilde{\alpha}(\{4, 7\}, m)$  geben, sich die zugehörigen Simplex aber leicht mit Hilfe von Lemma 10.3.1 ablesen lassen. In den Tabellen 10.7, 10.8 und 10.9 geben wir weitere Werte von  $\alpha(\{a, b\}, m)$  an.

$m$	$\alpha(\{1, 2\}, m)$	$\alpha(\{2, 3\}, m)$	$\alpha(\{3, 4\}, m)$	$\alpha(\{4, 5\}, m)$
1	2	2	2	2
2	3	4	4	4
3	5	10	11	11
4	7	27	33	34
5	11	71	139	155
6	15	172	752	1.013
7	22	395	5.445	11.195
8	30	850	48.807	213.822
9	42	1.697	503.307	6.896.920
10	56	3.346		
11	77	6.539		
12	101	12.342		
13	135	40.079		

Tabelle 10.7: Anzahl ganzzahliger Simplex mit höchstens 2 Abständen - Teil 1.

$m$	$\alpha(\{5, 6\}, m)$	$\alpha(\{6, 7\}, m)$	$\alpha(\{7, 8\}, m)$	$\alpha(\{8, 9\}, m)$	$\alpha(\{9, 10\}, m)$
1	2	2	2	2	2
2	4	4	4	4	4
3	11	11	11	11	11
4	34	34	34	34	34
5	156	156	156	156	156
6	1.043	1.044	1.044	1.044	1.044
7	12.286	12.343	12.346	12.346	12.346
8	270.577	274.537	274.666	274.668	274.668
9	11.512.070	11.990.444	12.004.931	12.005.164	12.005.168

Tabelle 10.8: Anzahl ganzzahliger Simplizes mit höchstens 2 Abständen - Teil 2.

$m$	$\alpha(\{3, 5\}, m)$	$\alpha(\{5, 7\}, m)$	$\alpha(\{5, 8\}, m)$	$\alpha(\{7, 9\}, m)$
1	2	2	2	2
2	4	4	4	4
3	9	11	10	11
4	15	31	23	34
5	25	115	50	152
6	40	481	92	936
7	65	2.419	146	9.015
8	104	13.165	223	132.627
9	166	70.916	349	2.807.075
10	253	336.123	558	
11	377		918	
12	546		1.498	
13	786		2.450	

Tabelle 10.9: Anzahl ganzzahliger Simplizes mit höchstens 2 Abständen - Teil 3.

Vergleichen wir die Anzahl der Graphen und die Anzahl der Simplizes mit Abständen in  $\{a, a + 1\}$ , siehe Tabelle 10.7 und Tabelle 10.8, so stellen wir fest, dass sie für  $a \leq 9$  und  $m \leq a$  übereinstimmen. Betrachten wir die Anzahl  $\alpha(\{1, x\}, m)$  der Simplizes mit Abständen  $1 < x$  für eine feste Dimension  $m$ , so folgt aus Satz 2.1.3 und der Stetigkeit der Determinante, dass  $\alpha(\{1, x\}, m)$  mit der Anzahl der Graphen auf  $m + 1$  Punkten übereinstimmt, sobald  $x$  hinreichend nahe an 1 liegt. Es stellt sich die Frage, ob man das *hinreichend nahe* quantitativ

bestimmen kann. In die eine Richtung haben wir folgendes Lemma.

**10.3.4 Lemma** *Die Abstandsmatrix*

$$\omega_{a+1,a} \left( K_{\lceil \frac{a+2}{2} \rceil} \cup K_{\lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor} \right)$$

ist für  $a \geq 1$  kein Simplex, wobei  $K_u \cup K_v$  die disjunkte Vereinigung von zwei vollständigen Graphen bezeichnet.

**Beweis.** Für eine natürliche Zahl  $a \geq 1$  und eine reelle Zahl  $x > 1$  betrachten wir die Abstandsmatrix

$$\Delta(a) = \omega_{x,1} \left( (K_{\lceil \frac{a+2}{2} \rceil} \cup K_{\lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor}) \right).$$

Mittels Induktion lässt sich zeigen, dass für die Cayley-Menger-Determinante

$$C(\Delta(a)) = (-1)^{a+2} \left( (a+2)x^{2a+2} - 4tx^{2a+1} + 2tx^{2a} \right)$$

mit  $t = \lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor \lceil \frac{a+2}{2} \rceil$  gilt. Einsetzen von  $x = \frac{a+1}{a}$  liefert zusammen mit Lemma 2.1.2 die Behauptung.  $\square$

Wir bemerken, dass aus einer genaueren Analyse der Nullstellen von  $C(\Delta(a))$  unter Verwendung eines Resultats aus [41], die Einbettbarkeit von

$$\omega_{a+2,a+1} \left( K_{\lceil \frac{a+2}{2} \rceil} \cup K_{\lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor} \right)$$

in den  $\mathbb{E}^{a+1}$  folgt. In Abschnitt D.2 geben wir für  $a \leq 8$  alle Abstandsmatrizen auf  $a+2$  Punkten mit Abständen  $a$  und  $a+1$ , die keine Simplex sind, an. Für die andere Richtung motivieren wir eine Vermutung.

## 10.4 Ganzzahlige Simplex mit Durchmesser 3

Im vorherigen Abschnitt haben wir Simplex mit höchstens zwei Abständen  $a$  und  $b$  betrachtet. Wir wollen nun den Spezialfall  $\{a, b\} = \{2, 3\}$  nutzen, um ganzzahlige Simplex mit Durchmesser  $d \leq 3$  zu konstruieren bzw. Informationen über ihre Struktur zu gewinnen. Hinter diesem Vorgehen steckt eine allgemeine Strategie, um kompliziertere Probleme in mehrere einfachere Probleme zu zerlegen, das **Homomorphieprinzip**. Eine allgemeine Beschreibung dieses Prinzips entnehmen wir z.B. [153]:

Zur Lösung eines Problems  $\mathfrak{P}$  einer Struktur  $\mathfrak{S}$  kann man, wie folgt, in vier Schritten vorgehen.

1. Vereinfachung der gegebenen Struktur  $\mathfrak{S}$  mit Hilfe eines Homomorphismus  $f : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}'$ , wobei  $\mathfrak{S}'$  eine gröbere Struktur ist.
2. Transformation des Problems  $\mathfrak{P}$  auf der ursprünglichen Struktur in ein Problem  $\mathfrak{P}'$  auf den homomorphen Bildern von  $f$  in der vergrößerten Struktur  $\mathfrak{S}'$ .
3. Lösung des Problems  $\mathfrak{P}'$  auf  $\mathfrak{S}'$ .
4. Verfeinerung jeder Lösung von  $\mathfrak{P}'$ , so dass die Lösungen von  $\mathfrak{P}$  auf  $\mathfrak{S}$  entstehen.

Eine Stärke des Homomorphieprinzips ist, dass es bei iterierter Anwendung und unter *günstigen Umständen* den **Aufwand logarithmieren** kann. Wir wollen dies an einem, in [16] näher beschriebenen, Beispiel belegen.

#### 10.4.1 Beispiel (Hensels Lemma)

Für eine Primzahl  $p \neq 2$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei das Problem gegeben, eine Lösung  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  für die Kongruenz  $x^2 \equiv -1 \pmod{p^n}$ , mit  $\bar{x} = x + p^n\mathbb{Z}$ , zu finden.

Für  $2 \leq i \leq n$  kann man Homomorphismen  $f_i : \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{i-1}\mathbb{Z}$  durch  $y + p^i\mathbb{Z} \mapsto y + p^{i-1}\mathbb{Z}$  definieren. Wir suchen zunächst eine Lösung  $\bar{x}_1 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  von  $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ . Falls keine Lösung existiert brechen wir ab, ansonsten testen wir für  $1 \leq i < n$  alle Elemente der Menge

$$\{x_i + jp^i + p^{i+1}\mathbb{Z} \mid 0 \leq j \leq p-1\} = f_{i+1}^{-1}\{x_i + p^i\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}$$

bis ein  $\bar{x}_{i+1} \in \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}$  mit  $x_{i+1}^2 \equiv -1 \pmod{p^{i+1}}$  gefunden ist.  $\diamond$

Wir möchten bemerken, dass die Anwendung des Homomorphieprinzips dafür sorgt, dass wir in Beispiel 10.4.1 anstatt von  $p^n$  Kandidaten maximal  $n \cdot p$  Kandidaten testen müssen, der Aufwand also logarithmiert wird. Zwar kann es vorkommen, dass wir bei dem Problem unserer Wahl keine geeigneten Homomorphismen finden bzw. sie nicht mit speziellen problemangepassten Methoden der Aufwandsreduktion verträglich sind, versucht werden sollte dieser Ansatz aber in jedem Fall.

Im Folgenden wollen wir nun einen geeigneten Homomorphismus von der Menge der ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d \leq 3$  auf einer Menge mit einfacherer Struktur konstruieren. Hierzu betrachten wir eine Abbildung  $\tilde{f}$  von der Menge der ganzzahligen Simplizes bestehend aus  $n$  Punkten mit Abständen aus  $\{\delta_0, \dots, \delta_{r-1}\}$  in die Menge der Graphen auf  $n$  Knoten, welche die Abstände der Länge 1 auf Kanten und die restlichen Abstände auf Nichtkanten abbildet. Da das Dreieck mit Seitenlängen 1, 1 und  $a$  für  $a \geq 2$  die Dreiecksungleichungen nicht

erfüllt, sind die Bilder von  $\tilde{f}$  disjunkte Vereinigungen vollständiger Graphen. Ein ganzzahliges Simplex  $\mathcal{S}$  lässt sich also so in Teilsimplizes  $\mathcal{S}_i$  mit  $\bigcup \mathcal{S}_i = \mathcal{S}$  partitionieren, dass für alle  $v \neq v'$ ,

$$\exists i : v, v' \in \mathcal{S}_i \iff \delta(v, v') = 1$$

gilt. Betrachtet man weiter zwei ganzzahlige Abstände  $1 < a < b$ , so ist  $1 + a \leq b$  ebenfalls eine Verletzung der Dreiecksungleichung für nicht entartete Dreiecke, und so gilt

$$i \neq j, v_0, v'_0 \in \mathcal{S}_i, v_1, v'_1 \in \mathcal{S}_j \implies d(v_0, v_1) = d(v'_0, v'_1).$$

In Abbildung 10.4 haben wir als Beispiel ein ganzzahliges Simplex mit Seitenlängen 1,  $a$  und  $b$  dargestellt, indem wir für Abstand 1 eine durchgezogene, für Abstand  $a$  eine stark gepunktete und für Abstand  $b$  eine schwach gepunktete Kante verwendet haben.

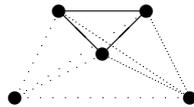


Abbildung 10.4: Ganzzahliges Simplex mit Seitenlängen 1,  $a$  und  $b$ .

Da wie oben bemerkt der Abstand zwischen zwei Knoten nur davon abhängt in welchen Teilsimplizes  $\mathcal{S}_i$  sie liegen, komprimieren wir jedes solche Teilsimplex in einen einzelnen Knoten und notieren die Anzahl der Punkte des Simplex in der Mitte des Knotens. In unserem speziellen Beispiel von ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d \leq 3$  können wir somit Abstände der Länge 2 auf Kanten bzw. Abstände der Länge 3 auf Nichtkanten abbilden, und erhalten einen Isomorphismus. Der Multigraph in Abbildung 10.4 wird somit mit  $a = 2$  und  $b = 3$  zum **knotengewichteten Graph** in Abbildung 10.5.

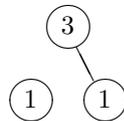


Abbildung 10.5: Knotengewichteter Graph für ein Simplex mit Seitenlängen aus  $\{1, 2, 3\}$ .

Die ganzzahligen Simplizes mit Durchmesser  $d \leq 3$  entsprechen somit knotengewichteten Graphen, wobei die Summe über die Knotengewichte der Anzahl

der Punkte des zugehörigen Simplex entspricht. In dieser Darstellung ist es leicht einen Homomorphismus  $f$  anzugeben, der auf eine einfachere Struktur abbildet. Wir *vergessen* einfach die Gewichte der Knoten und erhalten Graphen bzw. Simplizes mit Abständen 2 und 3.

Nun brauchen wir uns nur noch zu überlegen, wie wir den 4. Schritt des Homomorphieprinzips geschickt durchführen können, wie wir also einen gegebenen Graphen auf jede mögliche Art und Weise mit Knotengewichten versehen können. Hierzu skizzieren wir im nächsten Abschnitt theoretische Grundlagen und Methoden, müssen aber für eine ausführlichere Darstellung auf die Literatur verweisen.

Mit dieser Methode haben wir, außer den in Tabelle 10.3 angegebenen Werten, noch  $\alpha(3, 12) = 379.350$  und  $\alpha(3, 13) = 978.775$  bestimmt.

## 10.5 Gruppenaktionen, Doppelnebenklassen und das Leiterspiel

In Abschnitt 3.1 hatten wir die Objekte diskreter Strukturen bereits als Äquivalenzklassen beschrieben, ohne jedoch genauer auf die Details einzugehen. Dies wollen wir nun nachholen, um eine Lösung für den 4. Schritt des Homomorphieprinzips für unser Problem aus dem vorherigen Abschnitt beschreiben zu können.

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $X$  eine endliche Menge. Eine **Gruppenoperation**  ${}_G X$  von  $G$  auf  $X$  (von links) ist eine Abbildung

$$G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto gx,$$

so dass für alle  $g, g' \in G$  und  $x \in X$  die Bedingungen  $g(g'x) = (gg')x$  und  $id_G x = x$  erfüllt sind. Mittels

$$x \sim_G x' \iff \exists g \in G : gx = x'$$

lässt sich für jede Gruppenoperation eine Äquivalenzrelation definieren. Die Äquivalenzklassen bezeichnen wir im Folgenden auch als **Bahnen**  $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ . Die Menge der Bahnen notieren wir als  $G \backslash X$ . In dieser Sprechweise haben wir bisher auf der Menge von ganzzahligen Abstandsmatrizen mit der symmetrischen Gruppe  $S_n$  durch Umnummerierung der Punkte operiert und in jeder Bahn ein Element nach einer bestimmten Regel als kanonisch ausgezeichnet. Für weitergehende Grundlagen zu Gruppenaktionen verweisen wir den Leser auf [91, 92], siehe auch [94].

Seien nun  $A$  und  $B$  Untergruppen einer endlichen Gruppe  $G$ , so operiert  $A \times B$  via

$$(A \times B) \times G \rightarrow G, ((a, b), g) \mapsto agb^{-1}$$

auf  $G$ . Die Bahnen heißen **Doppelnebenklassen** von  $A$  und  $B$  in  $G$ ,

$$A \backslash G / B = \{AgB \mid g \in G\} = A \times B \backslash G.$$

Eine Bahn  $AgB$  heißt Doppelnebenklasse von  $A$  und  $B$  bezüglich  $g$ .

Wir möchten bemerken, dass sich jede beliebige Operation  ${}_G X$  auf ein Doppelnebenklassenproblem transformieren lässt.

### 10.5.1 Das Fundamentallemma [93, Lemma 3.1]

Sei  ${}_H X$  eine endliche Gruppenoperation,  $x \in X$  und  $G$  eine Untergruppe von  $H$ . Dann gilt:

1. Die Abbildung  $H(x) \rightarrow H/H_x$ ,  $hx \mapsto hH_x$  ist bijektiv.
2. Die Operationen  ${}_H H(x)$  und  ${}_H H/H_x$  sind äquivalent.
3. Die Bahnlänge ist der Index des Stabilisators,  $|H(x)| = |H|/|H_x|$ .
4. Die Abbildung  $G \backslash H(x) \rightarrow G \backslash H/H_x$ ,  $G(hx) \mapsto GhH_x$  ist eine Bijektion zwischen den Bahnen von  $G$  auf  $H(x)$  und den Doppelnebenklassen  $G \backslash H/H_x$ .

Hierzu betrachten wir den Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow S_X$ ,  $g \mapsto \bar{g}$  mit  $\bar{g} : x \mapsto gx$  und kürzen das Bild durch  $\bar{G}$  ab. Setzen wir  $H = S_X$  so gilt  $H(x) = X$  für ein beliebiges Element  $x \in X$ . Wenden wir das Fundamentallemma an, so erhalten wir eine Bijektion zwischen der Bahnenmenge  $G \backslash X$  und  $\bar{G} \backslash S_X / (S_X)_x$  für ein Element  $x \in X$ .

Auch die Bestimmung der nichtisomorphen Beschriftungen der Knoten  $(v_0, \dots, v_{n-1})$  eines Graphen  $\mathcal{G}$  mit Gewichten aus  $\Omega = (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ , bei denen jedes Gewicht genau ein Mal verwendet werden soll, lässt sich auf ein Doppelnebenklassenproblem zurückführen. Jede solche Beschriftung lässt sich als bijektive Abbildung  $f : (v_0, \dots, v_{n-1}) \mapsto (\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$  darstellen und entspricht somit einer Permutation  $\pi \in S_n$  mittels  $f_\pi(v_i) = \omega_{\pi(i)}$ . Mit  $Aut(\mathcal{G}) \leq S_n$  bezeichnen wir die Automorphismengruppe des Graphen und mit  $Aut(\Omega) \leq S_n$  die Automorphismengruppe bzw. den Stabilisator von  $\Omega$ . Ist nun  $\pi_0 \in Aut(\mathcal{G})$  und  $\pi_1 \in Aut(\Omega)$ , so wollen wir die Abbildung  $g$ , die  $v_{\pi_0(i)}$  auf  $\omega_{\pi_1(\pi(i))}$  abbildet, als isomorph zur Abbildung  $f$  betrachten. Das Element  $\pi_1$  vertauscht nur  $\omega_i$  und  $\omega_j$  im Bild mit  $\omega_i = \omega_j$ , führt also zur selben Beschriftung, und das Element  $\pi_0$  ändert nur die Nummerierung der Knoten von  $\mathcal{G}$  ohne die Adjazenzmatrix zu verändern. Wegen der Gleichung

$$g(v_i) = f_{\pi_1 \pi \pi_0^{-1}}(v_i) \quad \forall i$$

lautet unser Doppelnebenklassenproblem

$$Aut(\Omega) \backslash S_n / Aut(G).$$

Um die besondere Struktur der Automorphismengruppe von  $\Omega$  zu beschreiben, ordnen wir o.E. die  $\omega_i$  um, so dass

$$\omega_0 = \cdots = \omega_{\lambda_0-1} < \omega_{\lambda_0} = \cdots = \omega_{\lambda_1-1} < \cdots < \omega_{\lambda_{r-1}} = \cdots = \omega_{\lambda_r-1}$$

mit  $\sum_{i=0}^r \lambda_i = n$  erfüllt ist. Somit gilt  $Aut(\Omega) = S_{\lambda_0} \times \cdots \times S_{\lambda_r}$ . Diese sogenannte

**Young-Gruppe** kürzen wir auch als  $S_{\lambda_0, \dots, \lambda_r}$  ab. Aber auch die Bestimmung der Bahnen von  $S_{\lambda_0, \dots, \lambda_r} \backslash S_n / Aut(\mathcal{G})$  ist i.A. noch zu schwer bzw. beansprucht zu viel Rechenzeit, so dass wir das Homomorphieprinzip erneut anwenden wollen. Hierzu benötigen wir, siehe z.B. [112, 153], eine Untergruppenkette

$$S_{\lambda_0, \dots, \lambda_r} = A_l \leq A_{l-1} \cdots \leq A_1 \leq A_0 = S_n$$

zwischen  $S_{\lambda_0, \dots, \lambda_r}$  und  $S_n$ , zusammen mit den Homomorphismen

$$f_i : A_i \backslash S_n / Aut(\mathcal{G}) \rightarrow A_{i-1} \backslash S_n / Aut(\mathcal{G}), \quad A_i g Aut(\mathcal{G}) \mapsto A_{i-1} g Aut(\mathcal{G}).$$

Wählt man o.E.  $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_r$  so ist durch

$$A_i = S_{\sum_{j=0}^{r-i} \lambda_j, \lambda_{r-i+1}, \lambda_{r-i+2}, \dots, \lambda_r}$$

eine geeignete Untergruppenkette definiert, da der Aufwand wesentlich durch  $|A_{i-1} \backslash A_i|$  bestimmt wird.

**10.5.2 Beispiel** Sei  $\Omega = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$ , so gilt  $\lambda_0 = 6$ ,  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 4$  und die Untergruppenkette ist durch

$$S_{6,5,4} \leq S_{11,4} \leq S_{15}$$

gegeben. Für die Indizes gilt  $|S_{15} \backslash S_{11,4}| = 1.365$ ,  $|S_{11,4} \backslash S_{6,5,4}| = 462$  und  $|S_{15} \backslash S_{6,5,4}| = 630.630$ . Somit wurde der "Aufwand" durch die Verwendung des Homomorphieprinzips mit Untergruppenketten von  $630.630 = 1.365 \cdot 462$  auf  $1.827 = 1.365 + 462$  reduziert, also sozusagen *logarithmiert*.  $\diamond$

In Beispiel 10.5.2 wären noch die beiden anderen Untergruppenketten  $S_{6,5,4} \leq S_{10,5} \leq S_{15}$  und  $S_{6,5,4} \leq S_{9,6} \leq S_{15}$  möglich. Bei denen sind allerdings die Summen der Indizes größer als bei  $S_{6,5,4} \leq S_{11,4} \leq S_{15}$ . Da die Aufwandsreduktion durch Verwendung des Homomorphieprinzips so enorm ist, lohnt es sich sogar manchmal Umwege zu gehen und zwischendurch schwierigere statt einfache Probleme zu lösen. Dies führt uns zum **Leiterspiel** [154].

**10.5.3 Beispiel** Wir setzen Beispiel 10.5.2 fort und betrachten die Untergruppenleiter aus Abbildung 10.6. Hier gibt es ‘‘Aufwärts-’’ und ‘‘Abwartsschritte’’, dies bedeutet, dass die Homomorphismen in unterschiedliche Richtungen gehen. Für eine algorithmische Beschreibung, wie man durch diese Untergruppenleiter durchgeht und dabei die gewünschten Bahnen der Doppelnebenklassen bestimmt, verweisen wir auf [113, 153, 154]. Wir möchten jedoch erwähnen, dass der Aufwand wieder im Wesentlichen durch die Summe der Indizes zwischen den einzelnen Untergruppen auf dem Weg der Leiter besteht. In unserem Beispiel ergibt sich

$$15 + 14 + 2 + 13 + 3 + 12 + 4 + 11 + 10 + 2 + 9 + 3 + 8 + 4 + 7 + 5 = 122.$$

◊

Dieser Abschnitt kann nur ein sehr grober Abriss der verwendeten theoretischen Grundlagen sein. Für eine genauere Beschreibung und Implementationsdetails verweisen wir auf die Literatur, z.B. [113, 153, 154].

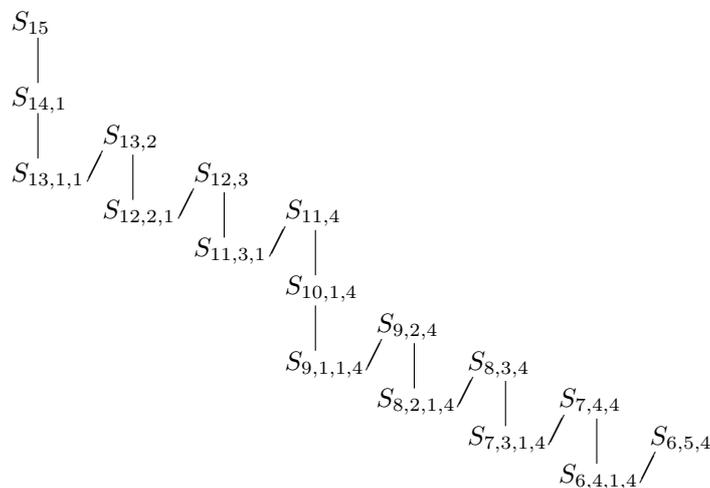


Abbildung 10.6: Untergruppenleiter zur Untergruppenkette  $S_{6,5,4} \leq S_{11,4} \leq S_{15}$ .



# 11 Punktmengen mit kleinen Durchmessern

Ganzzahlige Punktmengen mit kleinen Durchmessern besitzen naturgemäß auch wenige verschiedene Abstände. Deshalb ist es sinnvoll, den eigentlich recht speziellen Fall zu betrachten, bei dem die quadrierten Abstände modulo einer Zahl  $k$  alle kongruent zu  $l$  sind.

**11.0.1 Satz ([141, Satz 2.7])** *Sei  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige Punktmenge im  $\mathbb{E}^m$  und  $k, l \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(k, l) = 1$ . Falls für alle  $v \neq v' \in \mathcal{P}$  der quadrierte Abstand  $\delta^2(v, v')$  kongruent zu  $l$  modulo  $k$  ist, so besitzt  $\mathcal{P}$  höchstens  $m + 2$  Punkte. Wird diese obere Schranke angenommen, so gilt  $k \mid m + 2$  und  $\mathcal{P}$  ist in allgemeiner Lage.*

**Beweis.** Wir nehmen an, dass  $\mathcal{P}$  aus  $m + 3$  Punkten besteht und betrachten die Cayley-Menger-Determinante, die nach Lemma 2.1.2 für je  $m + 2$  und für  $m + 3$  Punkte verschwinden muss. Dies führt zu den notwendigen Bedingungen

$$\begin{aligned}(-1)^{m+2}(m+2)l^{m+1} &\equiv 0 \pmod{k}, \\(-1)^{m+3}(m+3)l^{m+2} &\equiv 0 \pmod{k}.\end{aligned}$$

Wegen  $\text{ggT}(k, l) = \text{ggT}(k, -1) = 1$  gelten  $m + 2 \equiv 0 \pmod{k}$  und  $m + 3 \equiv 0 \pmod{k}$ , was für kein ganzzahliges Paar  $m, k$  gleichzeitig erfüllt werden kann.

Nehmen wir nun an, dass  $\mathcal{P}$  aus  $m + 2$  Punkten besteht, so gilt  $m + 2 \equiv 0 \pmod{k}$ . Analog könnten wir für  $m + 1$  Punkte in einer Hyperebene oder nach Lemma 2.5.2 für  $m + 2$  Punkte auf einer Sphäre,  $m + 1 \equiv 0 \pmod{k}$  schließen, was nicht gemeinsam mit  $m + 2 \equiv 0 \pmod{k}$  gelten kann. Die Punktmenge  $\mathcal{P}$  liegt also in allgemeiner Lage.  $\square$

Da sich hieraus eine Aussage über ganzzahlige Punktmengen mit zwei Abständen gewinnen lässt (siehe Folgerung 11.1.1), und da Punktmengen mit kleinem Durchmesser, wie bereits erwähnt, wenig verschiedene Abstände besitzen können, beschäftigen wir uns nun mit ganzzahligen Punktmengen mit zwei Abständen.

## 11.1 Ganzzahlige Punktmengen mit zwei Abständen

**11.1.1 Folgerung ([141, Korollar 2.8])** Sei  $\mathcal{P}$  eine ganzzahlige Punktmenge im  $\mathbb{E}^m$ , deren Abstände nur die Werte  $\delta_0$  und  $\delta_1$  annehmen, so besteht  $\mathcal{P}$  höchstens aus  $m + 2$  Punkten. Wird diese obere Schranke angenommen, so befindet sich  $\mathcal{P}$  in allgemeiner Lage und es gilt  $\frac{\delta_0^2 - \delta_1^2}{\text{ggT}^2(\delta_0, \delta_1)} \mid m + 2$ .

**Beweis.** Wir setzen o.E.  $\text{ggT}(\delta_0, \delta_1) = 1$  voraus und benutzen Satz 11.0.1 mit  $k = \delta_0^2 - \delta_1^2$  und  $l = \delta_1^2$ .  $\square$

Mit Hilfe von Folgerung 11.1.1 kann man z.B. zeigen, dass es keine ganzzahlige planare Punktmenge aus vier Punkten gibt, die nur zwei verschiedene Abstände besitzt. In [141] wurde gezeigt, dass sich hieraus ein weiterer Beweis für die Irrationalität von  $\sqrt{2}$  ergibt. Hierzu nimmt man  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  an. Durch strecken der zugehörigen Punktmenge mit  $q$  erhält man eine ganzzahlige planare Punktmenge mit Abständen  $p$  und  $q$ , ein Widerspruch. Es soll erwähnt werden, dass ganzzahlige Punktmengen, bei denen alle bzw. viele Abstände ungerade sind, von mehreren Autoren untersucht wurden, siehe z.B. [51, 143, 150].

Für den Spezialfall  $\delta_0 = 1, \delta_1 = d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  kann man Folgerung 11.1.1 verschärfen [141]. Es gibt keine ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmenge aus  $m + 2$  Punkten mit Abständen 1 und  $\delta (\neq 1)$ . Hierzu betrachtet man das Dreieck  $\Delta = (1, 1, \delta)$ . Wegen der Dreiecksungleichungen ist nur  $\delta = 2$  möglich. In diesem Fall ist das Dreieck aber entartet und die Hinzunahme eines beliebigen weiteren Punktes würde zu einer ganzzahligen planaren Punktmenge aus 4 Punkten mit Durchmesser 2 führen, die es nicht gibt. Der Rest folgt aus dem Beweis von Satz 10.2.2. Aus dieser Verschärfung folgt sofort:

### 11.1.2 Folgerung

$$\text{Für } n \geq m + 2 \text{ gilt } d(m, n) \geq 3.$$

Da  $d(m, m + 1) = 1$  trivialerweise gilt, wollen wir uns im nächsten Abschnitt mit ganzzahligen Punktmengen mit Durchmesser 3 beschäftigen.

Folgerung 11.1.1 bietet eine prinzipielle Möglichkeit für eine gegebene Dimension  $m$  in endlicher Zeit zu entscheiden, ob es eine ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmenge aus  $m + 2$  Punkten gibt, in der höchstens zwei verschiedene Abstände vorkommen. Und so wird auch in [141] gefragt, für welche Dimensionen derartige Punktmengen existieren. Bisher wurde die Frage nur für  $m = 2, 3, 8$  entschieden. In Lemma 11.1.4 werden wir zeigen, dass für ungerade Dimensionen  $m \geq 3$

derartige Punktmengen existieren. Zunächst benötigen wir jedoch ein technisches Lemma über den Wert bestimmter Determinanten.

**11.1.3 Lemma** *Definieren wir für gegebene  $n, t, x \in \mathbb{N}$  eine symmetrische Matrix  $\Delta(n, t, x) = (\delta_{i,j})_{i,j < n}$  durch*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & : i = j, \\ x & : i, j < t, i \neq j, \\ x - 1 & : \text{sonst}, \end{cases}$$

so gilt  $C(\Delta(n, t, x)) =$

$$(-1)^n x^{2(t-1)} (nx^2 - 2t(n+1-t) + t(n+1-t)) (x-1)^{2(n-t-1)},$$

wobei  $C(\Delta)$  die Cayley-Menger-Determinante von  $\Delta$  bezeichnet.

Ein Beweis gelingt leicht mittels Induktion. Für ungerade Dimensionen  $m$  können wir die Parameter  $n, t$  und  $x$  geeignet wählen, so dass wir eine ganzzahlige  $m$ -dimensionale Punktmenge aus  $n = m + 2$  Punkten mit Abständen aus  $\{x, x - 1\}$  erhalten.

**11.1.4 Lemma** *Für ungerade  $m \in \mathbb{N}$  ist  $\Delta(m + 2, \frac{m+3}{2}, \frac{m+3}{2})$  die Abstandsmatrix einer  $m$ -dimensionalen Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus  $m + 2$  Punkten mit Abständen aus  $\{\frac{m+3}{2}, \frac{m+1}{2}\}$ .*

**Beweis.** Wir müssen nur nachrechnen, dass die Bedingungen von Lemma 2.1.2 erfüllt sind. Da die Teilpunktmengen von  $\mathcal{P}$  Abstandsmatrizen der Form  $\Delta(n', t', \frac{m+3}{2})$  mit  $n' \leq n$  und  $t' \leq \min(t, n')$  besitzen, kann man hierfür Lemma 11.1.3 verwenden.  $\square$

Wir möchten erwähnen, dass für  $m = 8$  die Matrizen  $\Delta(10, 2, 3)$  und  $\Delta(10, 8, 3)$  ebenfalls Abstandsmatrizen von  $m$ -dimensionalen Punktmengen sind. Insgesamt gibt es 11 nicht äquivalente 8-dimensionale ganzzahlige Punktmengen aus 10 Punkten mit nur zwei verschiedenen Abständen. In Abschnitt 10.2 haben wir eine Abbildung  $\omega$  betrachtet, die einer Partition  $[i_0, \dots, i_{r-1}]$  ein Simplex mit maximal zwei verschiedenen Abständen zuordnet. Um weitere Beispiele von ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen aus  $n = m + 2$  Punkten zu finden, die zwei verschiedene Abstände benutzen, kann man Folgerung 11.1.1 benutzen, um die Möglichkeiten für die zwei Abstände zu bestimmen, und anschließend alle Partitionen von  $n$  durchlaufen. Leider hat dieses Vorgehen bisher zu keinen weiteren Beispielen geführt und wir haben nur die zwei Abstandsmatrizen  $\Delta(10, 2, 3)$  und  $\Delta(10, 8, 3)$  wiederentdeckt.

Durch vollständige Konstruktion bzw. Suche konnten wir zeigen, dass es für  $m = 2, 4, 6$  und 10 keine Beispiele gibt.

## 11.2 Ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 3

Wie wir in Abschnitt 10.4 gesehen haben, ist die Anzahl der Simplizes mit Durchmesser 3 auch für mittelgroße Dimensionen  $m$  noch konstruktiv handhabbar und wir können die Punktmengen mit Durchmesser 3 einfach rekursiv aus den Simplizes mit Durchmesser 3 konstruieren. Die Ergebnisse für  $m \leq 12$  geben wir in Tabelle 11.1 an. Wir möchten erwähnen, dass ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 3 bisher nur in den Dimensionen  $m = 3, 6, 8$  bekannt waren [141].

$m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d(m, m+2)$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	3	3	3	3	3
$\bar{d}(m, m+2)$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	3	3	3	3	3
$\dot{d}(m, m+2)$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	$\geq 4$	3	$\geq 4$	3	3	3	3	3
$d(m, m+3)$	$\geq 4$										
$\bar{d}(m, m+3)$	$\geq 4$										
$\dot{d}(m, m+3)$	$\geq 4$										

Tabelle 11.1: Schranken für minimale Durchmesser von Punktmengen mit wenigen Punkten.

Da wir die ganzzahligen Punktmengen mit Durchmesser 3 für die Dimensionen  $m \leq 12$  vollständig konstruiert haben, konnten wir die Anzahlen  $\hat{\beta}(3, m, m+2)$  der ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen aus  $m+2$  Punkten in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 bestimmen, siehe Tabelle 11.2.

$m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\hat{\beta}(3, m, m+2)$	0	1	0	0	4	0	15	8	14	48	48

Tabelle 11.2: Anzahl  $\hat{\beta}(3, m, m+2)$  ganzzahliger  $m$ -dimensionaler Punktmengen aus  $m+2$  Punkten in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3.

### 11.2.1 Vermutung Für $m \geq 8$ gilt

$$d(m, m+2) = \bar{d}(m, m+2) = \dot{d}(m, m+2) = 3.$$

Leider haben wir bisher keine allgemeine Konstruktion für  $m$ -dimensionale ganzzahlige Punktmengen aus  $m + 2$  Punkten in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 entdeckt und so listen wir im Anhang in Abschnitt A.3 die konstruierten Punktmengen für  $m \leq 12$  vollständig auf. Vielleicht entdeckt der Leser ja ein Muster. Konstruiert man diese Punktmengen nicht vollständig, sondern sucht nur bis zum ersten Beispiel, so kann man in etwas höhere Dimensionen vordringen und Vermutung 11.2.1 für  $m \leq 24$  bestätigen. Durch eine heuristische unvollständige Suche konnten wir noch Beispiele in den Dimensionen  $m = 26, 28, 29, 32, 34, 35, 36$  und  $41$  finden.

### 11.3 Ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 4

Der Diplomarbeit [141] von L. Piepmeyer entnehmen wir folgendes Lemma.

**11.3.1 Lemma**

Sei  $A = \frac{\sqrt{7m+1}-1}{\sqrt{2m}}(1, \dots, 1)$  und  $B_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , wobei für  $0 \leq i < m$  die von der Null abweichende Koordinate jeweils an der  $i$ -ten Stelle steht. Setzt man  $P_i = 3(A + B_i)$  und  $Q_i = 4(A + B_i)$  für  $0 \leq i < m$ , so ist die Punktmenge  $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_{m-1}, Q_0, \dots, Q_{m-1}\}$  ganzzahlig und besitzt Durchmesser 4. Nimmt man noch den Ursprung des Koordinatensystems hinzu, so ergibt sich eine ganzzahlige Punktmenge mit Durchmesser 8.

**Beweis.** Für  $0 \leq i \neq j < m$  gilt  $\delta(P_i, P_j) = 3, \delta(Q_i, Q_j) = 4, \delta(P_i, Q_j) = 4$  und  $\delta(P_i, Q_i) = 2$ . Bezeichnet man den Ursprung mit  $O$ , so gilt weiter  $\delta(P_i, O) = 6$  und  $\delta(Q_i, O) = 8$ . □

Es soll erwähnt werden, dass die Punktmenge  $\mathcal{P}$  in Lemma 11.3.1 ein verallgemeinerter Pyramidenstumpf ist, siehe Abbildung 11.1 für den Fall  $m = 3$ .

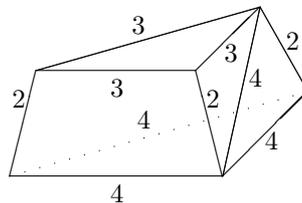


Abbildung 11.1: Ganzzahliger Pyramidenstumpf.

Somit gilt

$$3 \leq d(m, n) \leq 4 \quad \text{für} \quad m + 2 \leq n \leq 2m.$$

Für  $n = 2m$  hat man sogar den folgenden Satz.

### 11.3.2 Satz [141, Satz 3.2]

$$d(m, 2m) = 4 \quad \text{für} \quad m > 1.$$

**Beweis.** Wir beweisen per Induktion über  $m$ . Der Induktionsanfang  $d(2, 4) = 4$  wurde in Kapitel 5 gezeigt. Da für  $m > 2$  die Ungleichung  $2m > m + 2$  gilt, genügt es die Annahme  $d(m, 2m) = 3$  zu einem Widerspruch zu führen. Sei nun  $\mathcal{P}$  eine solche Punktmenge. Wegen Folgerung 11.1.1 tritt jeder der Abstände 1, 2 und 3 mindestens einmal auf. Wir wählen zwei Punkte  $A$  und  $B$  aus  $\mathcal{P}$  mit Abstand 1. Für jeden weiteren Punkt  $P_i$  gilt wegen der Dreiecksungleichung  $\delta(A, P_i) = \delta(B, P_i)$ , und somit bilden die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $P_i$  jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis  $\overline{AB}$ . Dies bedeutet, dass die Punkte  $P_i$  in einer Hyperebene liegen, die orthogonal zur Gerade durch  $A$  und  $B$  ist. Die  $P_i$  bilden somit eine  $(m-1)$ -dimensionale ganzzahlige Punktmenge aus  $2m-2$  Punkten mit Durchmesser 3, ein Widerspruch zur Induktionsannahme.  $\square$

Schaut man sich den Beweis etwas genauer an, so kann man ihn leicht verallgemeinern.

### 11.3.3 Folgerung

Falls  $d(m, n) = 4$  für  $m > 1$  und  $n \leq 2m$ , so gilt  $d(m+1, n+2) = 4$ .

Möchten wir nun wissen, ob es zu gegebenen  $m$  ganzzahlige Punktmengen mit Durchmesser 4 aus mehr als  $2m$  Punkten gibt, so müssen wir versuchen, sie zu konstruieren. Dabei stoßen wir allerdings auf ein ähnliches Problem wie in Abschnitt 5.4. Es gibt sehr wenige ganzzahlige Dreiecke mit Durchmesser 4, aber mit  $i \leq m$  steigt die Anzahl der  $i$ -dimensionalen ganzzahligen Simplexes mit Durchmesser 4 rapide an. Bei den  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen mit Durchmesser 4 fällt die Anzahl mit steigender Anzahl  $n$  der Punkte wieder rapide auf 0 ab. Schaut man sich die Anzahlen  $\alpha(d, 4)$  ganzzahliger Simplexes an, so sind die ganzzahligen Punktmengen mit Durchmesser 4 für  $m \geq 11$ , mit dem in Kapitel 3 beschriebenen Konstruktionsalgorithmus, nicht mehr mit der uns zur Verfügung stehenden Rechenleistung zu erzeugen. (Auch für  $m = 9$  bzw.  $m = 10$  würde eine derartige Konstruktion ziemlich lange dauern.)

Hier könnte das Homomorphieprinzip helfen – falls man einen geeigneten Homomorphismus finden kann. Ein möglicher Homomorphismus wäre die Abbildung  $f$ , welche die Abstände  $\delta_{i,j}$  einer Abstandsmatrix  $\Delta$  auf 0, falls  $\delta_{i,j}$  gerade

ist, und auf 1, falls  $\delta_{i,j}$  ungerade ist, abbildet. Bezeichnen wir die Punkte einer Punktmenge  $\mathcal{P}$  mit  $P_i$  und die zugehörige Abstandsmatrix mit  $\Delta$ , so können wir die Bedingung  $C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}) = 0$  für  $t \geq m + 2$  aus Lemma 2.1.2 zu

$$C(P_{i_0}, \dots, P_{i_{t-1}}) \equiv 0 \pmod{4}$$

umformulieren und damit abschwächen. Wegen  $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod{4}$  und  $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod{4}$  können wir sie auch testen, wenn wir nur  $f(\Delta)$  kennen. Leider gibt es sehr viele 0-1-Matrizen  $\Delta'$ , die  $C(\Delta') \equiv 0 \pmod{4}$  erfüllen.

**11.3.4 Lemma** *Die Anzahl der symmetrischen  $n \times n$  Matrizen  $\Delta'$  mit Einträgen aus  $\{0, 1\}$  und Nullen auf der Hauptdiagonale, die  $C(\Delta') \equiv 0 \pmod{4}$  erfüllen, ist mindestens so groß, wie die Anzahl der Graphen auf  $n - 1$  Knoten.*

**Beweis.** Zu jedem Graph  $\mathcal{G}$  aus  $n - 1$  Knoten füllen wir die linke obere Teilmatrix von  $\Delta'$  mit der Adjazenzmatrix von  $\mathcal{G}$ , hängen die Kopie einer beliebigen Zeile als letzte Zeile an und füllen die letzte Spalte geeignet auf. Da somit  $\Delta'$  zwei identische Zeilen enthält, gilt  $C(\Delta') \equiv 0 \pmod{4}$ .  $\square$

Da es bereits 1.018.997.864 Graphen auf 11 Knoten bzw. 165.091.172.592 Graphen auf 12 Knoten gibt, ist der Homomorphismus  $f$  nicht wirklich geeignet, das Problem zu vereinfachen. In Ermangelung eines geeigneten Homomorphismus können wir das Homomorphieprinzip hier leider nicht einsetzen.



## 12 Ausblick

Nach der Habilitationsschrift von A. Kemnitz [87], der Dissertation von B. E. Peterson [137] und der Diplomarbeit von L. Piepmeyer [141] ist dies, neben einer Reihe von Forschungsartikeln, die vierte größere Arbeit über ganzzahlige Punktmengen. Ein paar offene Fragen auf diesem Gebiet konnten wir beantworten. Doch in vielen Fällen haben wir sie nur teilweise beantwortet bzw. neue Ansätze und Methoden präsentiert, die noch nicht vollständig ausgereizt sind. Mit dieser mehr in die *Breite* statt in die *Tiefe* gehenden Arbeit möchten wir, sozusagen, die zweite Runde einläuten und hoffen, dass es in nicht allzu ferner Zukunft noch einige Fortschritte auf diesem Gebiet geben wird.

In diesem abschließenden Kapitel wollen wir kurz beschreiben, welche - zumindest nach Meinung des Autors - aussichtsreichen Untersuchungen in Zukunft durchgeführt werden könnten.

Nahezu alle Computerberechnungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, könnten mit einem intensiveren bzw. länger andauernden Rechereinsatz fortgeführt werden.

Für die planaren ganzzahligen Punktmengen aus  $n$  Punkten mit minimalem Durchmesser vermuten wir, dass sie für  $n \geq 9$  jeweils  $n - 1$  kollineare Punkte besitzen. Es wäre schön, wenn diese Strukturaussage bewiesen werden könnte. Realistischer ist es allerdings, dass die hier vorgestellten Strategien zur Ermittlung einer guten unteren Schranke für  $d(2, n)$  in einen Beweis weiterentwickelt werden können. Für planare ganzzahlige Punktmengen in semi-allgemeiner Lage hatten wir vermutet, dass die Punkte von Beispielen mit minimalem Durchmesser sämtlich auf einem Kreis liegen. Viele der Punktmengen mit minimalem Durchmesser gehen aus der in Abschnitt 5.5 beschriebenen Konstruktion hervor und es stellt sich die Frage, ob es nicht doch noch andere Konstruktionen gibt, die auch für eine höhere Anzahl an Punkten zu Punktmengen mit minimalem Durchmesser führen. Hierzu könnte man gezielt ganzzahlige Punktmengen auf Kreisen untersuchen. Im 3-dimensionalen Raum haben wir zwar noch nicht so viele minimale Durchmesser bestimmt, aber wir vermuten dennoch, dass die Punktmengen mit minimalen Durchmesser und  $n \geq 13$  durch Lemma 9.2.5 bestimmt sind, also aus einer ganzzahligen planaren Punktmenge mit  $n' - 1$  kollinearen Punkten und einer ganzzahligen planaren Punktmenge auf einem Kreis hervorgehen. Für

höhere Dimensionen und eine größere Anzahl an Punkten haben wir noch keine Vorstellung, wie die ganzzahligen Punktmengen mit minimalem Durchmesser aussehen könnten. Hier wäre es interessant, die vorgestellten algorithmischen Tricks für den 4-dimensionalen Fall weiter zu entwickeln und die entsprechenden minimalen Durchmesser samt zugehöriger Punktmengen zu bestimmen. Mit Blick auf Abbildung 9.6 erscheint es interessant, sich Polytope [175] mit ganzzahligen Kantenlängen und einer großen Automorphismengruppe bzw. vielen isomorphen Unterstrukturen genauer anzuschauen.

In Abschnitt 7.3 haben wir zwar gezeigt, dass wir die iterierte Klassifizierung in der bisherigen Form nicht als Kanonizitätstest für ordnungstreu erzeugen durch Verschmelzen benutzen können, aber mit den gewonnenen Ergebnissen und den neuen Resultaten aus [56] könnte es uns evtl. gelingen eine Normalform aus der iterierten Klassifizierung zu konstruieren, die mit ordnungstreuer Erzeugung verträglich ist.

Die in Abschnitt 8.3 grob skizzierte theoretische Möglichkeit Kanonizitätstests unter Verwendung von Entscheidungsbäumen zu optimieren ist sicherlich eine Fragestellung mit Potential für weitere Untersuchungen.

# A Punktmengen mit minimalem Durchmesser

## A.1 Planare Punktmengen

Die planaren ganzzahligen Punktmengen mit minimalem Durchmesser für  $9 \leq n \leq 29$  geben wir aus Platzgründen in der kompakten Form

$$\begin{pmatrix} a_s & a_{s-1} & \cdots & a_1 & a_0 & a'_1 & \cdots & a'_t \\ b_s & b_{s-1} & \cdots & b_1 & b_0 & b'_0 & \cdots & b'_{t-1} & b'_t \end{pmatrix},$$

siehe Abbildung 5.2 bzw. Abschnitt 5.2 für eine Erläuterung der Notation, an, wobei es für  $n = 13, 18$  und  $21$  jeweils zwei minimale Punktmengen gibt:

$$\begin{aligned} n = 9 : & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 \end{pmatrix} \\ n = 10 : & \begin{pmatrix} 11 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 27 & 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 \end{pmatrix} \\ n = 11 : & \begin{pmatrix} 11 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 11 \\ 27 & 17 & 13 & 11 & 9 & 9 & 11 & 13 & 17 & 27 \end{pmatrix} \\ n = 12 : & \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 & 7 & 5 & 4 & 5 & 7 & 5 & 7 \\ 43 & 34 & 29 & 26 & 23 & 22 & 22 & 23 & 26 & 29 & 34 \end{pmatrix} \\ n = 13 : & \begin{pmatrix} 11 & 7 & 5 & 7 & 5 & 4 & 5 & 7 & 5 & 7 & 11 \\ 43 & 34 & 29 & 26 & 23 & 22 & 22 & 23 & 26 & 29 & 34 & 43 \end{pmatrix} \\ n = 13 : & \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 & 46 & 49 & 53 \end{pmatrix} \\ n = 14 : & \begin{pmatrix} 17 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ 66 & 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 & 46 & 49 \\ & & & & & & & & & & & 53 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 15 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 13 & 17 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 77 & 66 & 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 & 46 \\ & & 6 & & & & & & & & & \\ & & 49 & 53 & & & & & & & & \end{array} \right) \\
n = 16 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 13 & 17 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 77 & 66 & 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 & 46 \\ & & 6 & 17 & & & & & & & & \\ & & 49 & 53 & 66 & & & & & & & \end{array} \right) \\
n = 17 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 13 & 17 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 77 & 66 & 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 & 46 \\ & & 6 & 17 & 13 & & & & & & & \\ & & 49 & 53 & 66 & 77 & & & & & & \end{array} \right) \\
n = 18 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 19 & 13 & 17 & 6 & 5 & 8 & 9 & 7 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 94 & 77 & 66 & 53 & 49 & 46 & 42 & 39 & 38 & 38 & 39 & 42 \\ & & 5 & 6 & 17 & 13 & & & & & & \\ & & 46 & 49 & 53 & 66 & 77 & & & & & \end{array} \right) \\
n = 18 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 11 & 9 & 14 & 15 & 4 & 7 & 6 & 10 & 12 & 10 & 6 & 7 \\ 98 & 89 & 82 & 72 & 63 & 61 & 58 & 56 & 54 & 54 & 56 & 58 \\ & & 4 & 15 & 14 & 9 & & & & & & \\ & & 61 & 63 & 72 & 82 & 89 & & & & & \end{array} \right) \\
n = 19 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 11 & 9 & 14 & 15 & 4 & 7 & 6 & 10 & 12 & 10 & 6 & 7 \\ 98 & 89 & 82 & 72 & 63 & 61 & 58 & 56 & 54 & 54 & 56 & 58 \\ & & 4 & 15 & 14 & 9 & 11 & & & & & \\ & & 61 & 63 & 72 & 82 & 89 & 98 & & & & \end{array} \right) \\
n = 20 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 32 & 11 & 9 & 14 & 15 & 4 & 7 & 6 & 10 & 12 & 10 & 6 \\ 126 & 98 & 89 & 82 & 72 & 63 & 61 & 58 & 56 & 54 & 54 & 56 \\ & & 7 & 4 & 15 & 14 & 9 & 11 & & & & \\ & & 58 & 61 & 63 & 72 & 82 & 89 & 98 & & & \end{array} \right) \\
n = 21 : & \left( \begin{array}{cccccccccccccc} 9 & 8 & 25 & 5 & 13 & 14 & 6 & 13 & 11 & 4 & 11 & 13 \\ 134 & 127 & 121 & 104 & 101 & 94 & 88 & 86 & 83 & 82 & 82 & 83 \\ & & 6 & 14 & 13 & 5 & 25 & 8 & 9 & & & \\ & & 86 & 88 & 94 & 101 & 104 & 121 & 127 & 134 & & \end{array} \right) \\
n = 21 : & \left( \begin{array}{cccccccccccc} 7 & 18 & 19 & 8 & 17 & 3 & 11 & 5 & 7 & 22 \\ 146 & 141 & 129 & 118 & 114 & 107 & 106 & 103 & 102 & 101 \end{array} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccccccc}
5 & 7 & 22 & 7 & 5 & 11 & 3 & 17 & 8 & 19 \\
103 & 102 & 101 & 101 & 102 & 103 & 106 & 107 & 114 & 118 \\
18 & 7 & 16 & 31 & 13 & & & & & \\
129 & 141 & 146 & 158 & 183 & 194 & & & & 
\end{array} \\
n = 28 : \left( \begin{array}{cccccccccc}
32 & 13 & 31 & 16 & 7 & 18 & 19 & 8 & 17 & 3 \\
222 & 194 & 183 & 158 & 146 & 141 & 129 & 118 & 114 & 107 \\
11 & 5 & 7 & 22 & 7 & 5 & 11 & 3 & 17 & 8 \\
106 & 103 & 102 & 101 & 101 & 102 & 103 & 106 & 107 & 114 \\
19 & 18 & 7 & 16 & 31 & 13 & & & & \\
118 & 129 & 141 & 146 & 158 & 183 & 194 & & & 
\end{array} \right) \\
n = 29 : \left( \begin{array}{cccccccccc}
32 & 13 & 31 & 16 & 7 & 18 & 19 & 8 & 17 & 3 \\
222 & 194 & 183 & 158 & 146 & 141 & 129 & 118 & 114 & 107 \\
11 & 5 & 7 & 22 & 7 & 5 & 11 & 3 & 17 & 8 \\
106 & 103 & 102 & 101 & 101 & 102 & 103 & 106 & 107 & 114 \\
19 & 18 & 7 & 16 & 31 & 13 & 32 & & & \\
118 & 129 & 141 & 146 & 158 & 183 & 194 & 222 & & 
\end{array} \right)
\end{array}$$

Für die Punktmengen mit Durchmesser  $d(2, n)$  für  $30 \leq n \leq 89$  verweisen wir auf Tabelle 5.1 und Tabelle 5.2, da in Abschnitt 5.4 gezeigt wurde, dass diese oberen Schranken die exakten Werte sind.

## A.2 Planare Punktmengen in semi-allgemeiner Lage

Für die Punktmengen in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser  $\bar{d}(2, n)$  geben wir jeweils eine Koordinatendarstellung und den Radius  $R$  an.

$$n = 3, \quad R = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right].$$

$$n = 4, \quad R = \frac{8}{15}\sqrt{15}, \quad \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{15}}{2} \end{pmatrix} \right].$$

Diese zwei Punktmengen hatten wir bereits in Abbildung 5.1 dargestellt.

$$n = 6, \quad R = \frac{7}{3}\sqrt{3}, \quad \left[ \begin{array}{cccccc} \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{39}{14} & \frac{55}{14} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{6} & -\frac{7\sqrt{3}}{6} & \frac{7\sqrt{3}}{3} & -\frac{47\sqrt{3}}{21} & \frac{71\sqrt{3}}{42} & \frac{23\sqrt{3}}{42} \end{array} \right].$$

$$n = 7, \quad R = \frac{64}{15}\sqrt{15},$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{5}{2} & \frac{33}{2} & \frac{61}{2} & 33 & \frac{49}{2} \\ 0 & \frac{5\sqrt{15}}{2} & \frac{9\sqrt{15}}{2} & \frac{5\sqrt{15}}{2} & 0 & -\frac{7\sqrt{15}}{2} \end{array} \right].$$

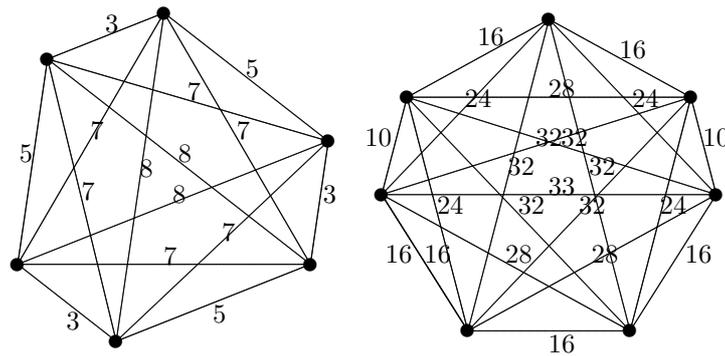


Abbildung A.1: Ganzzahlige planare Punktmengen aus 6 bzw. 7 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

$$n = 9, \quad R = \frac{49}{3}\sqrt{3},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{49}{2} & -\frac{49}{2} & 0 & -8 & -\frac{39}{2} & \frac{55}{2} & -\frac{2769}{98} & \frac{752}{49} \\ -\frac{49\sqrt{3}}{6} & -\frac{49\sqrt{3}}{6} & \frac{49\sqrt{3}}{3} & -\frac{47\sqrt{3}}{3} & \frac{71\sqrt{3}}{6} & \frac{23\sqrt{3}}{6} & \frac{239\sqrt{3}}{294} & \frac{2017\sqrt{3}}{147} \\ \frac{1265}{98} & & & & & & & \\ -\frac{4273\sqrt{3}}{294} & & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$n = 12, \quad R = \frac{91}{3}\sqrt{3},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{91}{2} & -\frac{91}{2} & 0 & \frac{105}{26} & -\frac{616}{13} & \frac{1127}{26} & -\frac{104}{7} & -\frac{507}{14} \\ -\frac{91\sqrt{3}}{6} & -\frac{91\sqrt{3}}{6} & \frac{91\sqrt{3}}{3} & -\frac{2359\sqrt{3}}{78} & \frac{511\sqrt{3}}{39} & \frac{1337\sqrt{3}}{78} & -\frac{611\sqrt{3}}{21} & \frac{923\sqrt{3}}{42} \\ \frac{715}{14} & -\frac{9095}{182} & \frac{1991}{182} & \frac{3552}{91} & & & & \\ \frac{299\sqrt{3}}{42} & -\frac{5113\sqrt{3}}{546} & \frac{16199\sqrt{3}}{546} & -\frac{5543\sqrt{3}}{273} & & & & \end{bmatrix}.$$

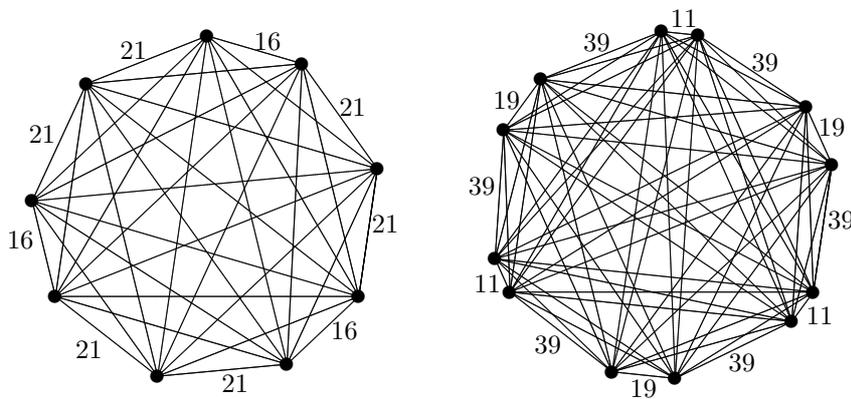


Abbildung A.2: Ganzzahlige planare Punktmengen aus 9 bzw. 12 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

$$n = 14, \quad R = \frac{704}{7}\sqrt{7},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 532 & 522 & \frac{4203}{8} & 496 & \frac{855}{2} & 370 & 306 \\ 0 & 0 & 30\sqrt{7} & -\frac{159\sqrt{7}}{8} & -48\sqrt{7} & \frac{165\sqrt{7}}{2} & -90\sqrt{7} & 102\sqrt{7} \\ 226 & \frac{479}{2} & 162 & \frac{611}{8} & 36 & 10 & & \\ 102\sqrt{7} & -\frac{195\sqrt{7}}{2} & -90\sqrt{7} & \frac{585\sqrt{7}}{8} & -48\sqrt{7} & 30\sqrt{7} & & \end{bmatrix}.$$

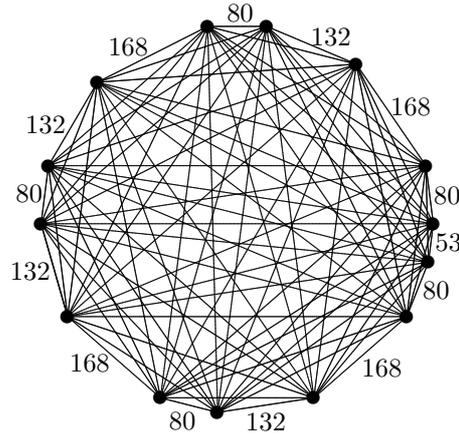


Abbildung A.3: Ganzzahlige planare Punktmenge aus 14 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

$$n = 18, \quad R = \frac{637}{3}\sqrt{3},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{637}{2} & -\frac{637}{2} & 0 & \frac{735}{26} & -\frac{4312}{13} & \frac{7889}{26} & -104 \\ -\frac{637\sqrt{3}}{6} & -\frac{637\sqrt{3}}{6} & \frac{637\sqrt{3}}{3} & -\frac{16513\sqrt{3}}{78} & \frac{3577\sqrt{3}}{39} & \frac{9359\sqrt{3}}{78} & -\frac{611\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{507}{2} & \frac{715}{2} & -\frac{9095}{26} & \frac{1991}{26} & \frac{3552}{13} & -\frac{35997}{98} & \frac{9776}{49} \\ \frac{923\sqrt{3}}{6} & \frac{299\sqrt{3}}{6} & -\frac{5113\sqrt{3}}{78} & \frac{16199\sqrt{3}}{78} & -\frac{5543\sqrt{3}}{39} & \frac{3107\sqrt{3}}{294} & \frac{26221\sqrt{3}}{147} \\ \frac{16445}{98} & -\frac{122600}{637} & \frac{468369}{1274} & -\frac{223169}{1274} & & & \\ -\frac{55549\sqrt{3}}{294} & \frac{345769\sqrt{3}}{1911} & \frac{22031\sqrt{3}}{3822} & -\frac{713569\sqrt{3}}{3822} & & & \end{bmatrix}.$$

$$n = 24, \quad R = \frac{1729}{3}\sqrt{3},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1729}{2} & -\frac{1729}{2} & 0 & -\frac{21021}{38} & -\frac{16835}{38} & \frac{18928}{19} & \frac{1995}{26} \\ -\frac{1729\sqrt{3}}{6} & -\frac{1729\sqrt{3}}{6} & \frac{1729\sqrt{3}}{3} & -\frac{54691\sqrt{3}}{114} & \frac{58877\sqrt{3}}{114} & -\frac{2093\sqrt{3}}{57} & -\frac{44821\sqrt{3}}{78} \\ -\frac{11704}{13} & \frac{21413}{26} & -\frac{493087}{494} & \frac{120456}{247} & \frac{252175}{494} & -\frac{1976}{7} & -\frac{9633}{14} \\ \frac{9709\sqrt{3}}{39} & \frac{25403\sqrt{3}}{78} & -\frac{11263\sqrt{3}}{1482} & \frac{372631\sqrt{3}}{741} & -\frac{733999\sqrt{3}}{1482} & -\frac{11609\sqrt{3}}{21} & \frac{17537\sqrt{3}}{42} \\ \frac{13585}{14} & -\frac{124696}{133} & \frac{203645}{266} & \frac{45747}{266} & -\frac{172805}{182} & \frac{37829}{182} & \\ \frac{5681\sqrt{3}}{42} & \frac{78949\sqrt{3}}{399} & \frac{295139\sqrt{3}}{798} & -\frac{453037\sqrt{3}}{798} & -\frac{97147\sqrt{3}}{546} & \frac{307781\sqrt{3}}{546} & \\ \frac{67488}{91} & -\frac{854319}{3458} & \frac{3323599}{3458} & -\frac{1234640}{1729} & & & \\ -\frac{105317\sqrt{3}}{273} & \frac{5792879\sqrt{3}}{10374} & -\frac{1614961\sqrt{3}}{10374} & -\frac{2088959\sqrt{3}}{5187} & & & \end{bmatrix}.$$

$$n = 27, \quad R = \frac{8281}{3}\sqrt{3},$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \frac{8281}{2} & -\frac{8281}{2} & 0 & \frac{735}{2} & -4312 & \frac{7889}{2} \\ -\frac{8281\sqrt{3}}{6} & -\frac{8281\sqrt{3}}{6} & \frac{8281\sqrt{3}}{3} & -\frac{16513\sqrt{3}}{6} & \frac{3577\sqrt{3}}{3} & \frac{9359\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{629552}{169} & -\frac{247695}{338} & \frac{1506799}{338} & -1352 & -\frac{6591}{2} & \frac{9295}{2} \\ -\frac{877247\sqrt{3}}{507} & \frac{2765903\sqrt{3}}{1014} & -\frac{1011409\sqrt{3}}{1014} & -\frac{7943\sqrt{3}}{3} & \frac{11999\sqrt{3}}{6} & \frac{3887\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{9095}{2} & \frac{1991}{2} & 3552 & -\frac{1280169}{338} & \frac{747080}{169} & -\frac{213991}{338} \\ -\frac{5113\sqrt{3}}{6} & \frac{16199\sqrt{3}}{6} & -\frac{5543\sqrt{3}}{3} & \frac{1708151\sqrt{3}}{1014} & \frac{533089\sqrt{3}}{507} & -\frac{2774329\sqrt{3}}{1014} \\ -\frac{467961}{98} & \frac{127088}{49} & \frac{213785}{98} & -\frac{122600}{49} & \frac{468369}{98} & -\frac{223169}{98} \\ \frac{40391\sqrt{3}}{294} & \frac{340873\sqrt{3}}{147} & -\frac{722137\sqrt{3}}{294} & \frac{345769\sqrt{3}}{147} & \frac{22031\sqrt{3}}{294} & -\frac{713569\sqrt{3}}{294} \\ \frac{32252209}{16562} & \frac{46502735}{16562} & -\frac{39377472}{8281} & & & \\ \frac{125257679\sqrt{3}}{49686} & -\frac{111007153\sqrt{3}}{49686} & -\frac{7125263\sqrt{3}}{24843} & & & \end{array} \right].$$

Die ganzzahligen planaren Punktmengen aus 6 bzw. 7 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit Durchmesser  $\bar{d}(2, 6)$  bzw.  $\bar{d}(2, 7)$  haben wir in Abbildung A.1 dargestellt. Da die Beschriftungen der Kanten mit den Abständen für mehr als 6 Punkte zu unübersichtlich wird, haben in den Abbildungen A.2 und A.3 nur bei den äußeren Kanten die Abstände mit angegeben. Mit den angegebenen Koordinatendarstellungen können die weggelassenen Abstände jedoch leicht berechnet werden. Für 18, 24, 27 bzw. 36 Punkte kann man die Punktmengen mit minimalem Durchmesser aus der in Abschnitt 5.5 beschriebenen Konstruktion erhalten. Um dem Leser die Berechnungen zu ersparen, geben wir jeweils die Koordinaten an, verzichten aber auf Abbildungen der entsprechenden Punktmengen. Die bisher betrachteten Punktmengen in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser waren jeweils durch die Angabe der Anzahl der Punkte  $n$  eindeutig bestimmt. Für 28 Punkte gibt es nun gleich drei nicht äquivalente Punktmengen. In Abbildung A.4 stellen wir eine von diesen Punktmengen graphisch dar und geben im Anschluss daran jeweils eine Koordinatendarstellung für jede der drei Punktmengen an. Vereinigt man diese drei Koordinatendarstellungen und streckt sie um den Faktor 8, so erhält man eine ganzzahlige planare Punktmenge  $\mathcal{P}$  aus 40 Punkten, die auf einem entsprechend gestreckten Kreis liegen und einen Durchmesser von 85.376 haben. Schaut man sich die Abstände von  $\mathcal{P}$  genauer an, so stellt man fest, dass sie recht häufig durch 2, 4 oder 8 teilbar sind. Und so kann man aus  $\mathcal{P}$ , zum Teil mehrere, Punktmengen mit Durchmesser 42.688, 21.344 bzw. 10.672 bestehend aus 36, 32 bzw. 28 Punkten ableiten. Diese Punktmengen haben zwar nicht den minimalen Durchmesser  $\bar{d}(2, n)$ , liegen aber in der Nähe davon.

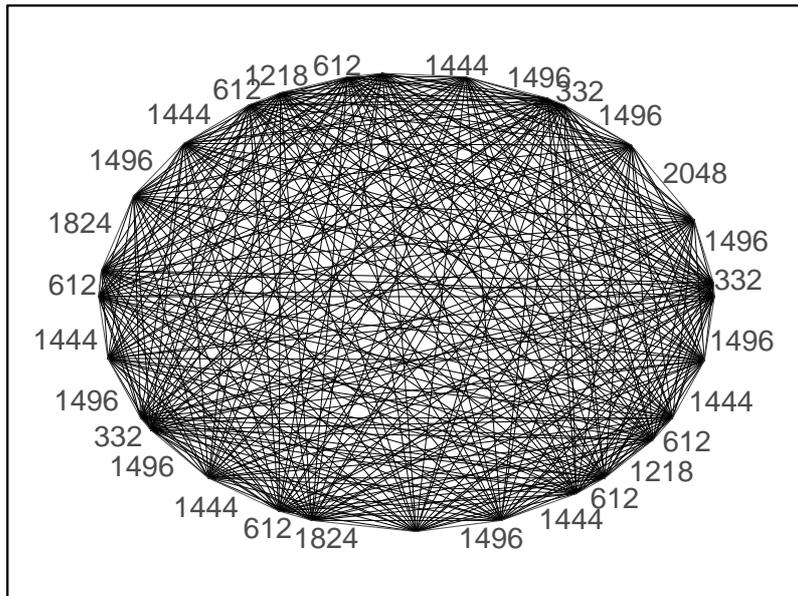


Abbildung A.4: Ganzzahlige planare Punktmenge aus 28 Punkten in semi-allgemeiner Lage mit minimalem Durchmesser.

$$n = 28, \quad R = \frac{20672}{15} \sqrt{15},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1056528}{21344} & \frac{3447056}{21344} & \frac{12934464}{21344} & \frac{15538432}{21344} & \frac{19302980}{21344} \\ \frac{3361680\sqrt{15}}{21344} & -\frac{7907952\sqrt{15}}{21344} & \frac{12934464\sqrt{15}}{21344} & -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & -\frac{17088540\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{31548433}{21344} & \frac{40638976}{21344} & \frac{55665152}{21344} & \frac{67256945}{21344} & \frac{66707337}{21344} \\ \frac{19633145\sqrt{15}}{21344} & -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} & \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} & \frac{26143065\sqrt{15}}{21344} & -\frac{27467727\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{78887424}{21344} & \frac{92035328}{21344} & \frac{104977796}{21344} & \frac{117434688}{21344} & \frac{135747840}{21344} \\ -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} & \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} & \frac{28630308\sqrt{15}}{21344} & -\frac{30095040\sqrt{15}}{21344} & \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{148895744}{21344} & \frac{165917584}{21344} & \frac{172118016}{21344} & \frac{176674960}{21344} & \frac{187144192}{21344} \\ -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} & \frac{25474064\sqrt{15}}{21344} & \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} & -\frac{25239280\sqrt{15}}{21344} & -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{197005120}{21344} & \frac{205017124}{21344} & \frac{212244736}{21344} & \frac{220227392}{21344} & \frac{224055972}{21344} \\ \frac{19423040\sqrt{15}}{21344} & -\frac{18347836\sqrt{15}}{21344} & -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & \frac{9860928\sqrt{15}}{21344} & -\frac{8188092\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{0}{21344} & \frac{227783168}{21344} & \frac{227395641}{21344} & & \\ \frac{0\sqrt{15}}{21344} & \frac{0\sqrt{15}}{21344} & \frac{1826913\sqrt{15}}{21344} & & \end{bmatrix} \cdot$$

$$n = 28, \quad R = \frac{20672}{15} \sqrt{15},$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \frac{1056528}{21344} & \frac{3447056}{21344} & \frac{12934464}{21344} & \frac{15538432}{21344} & \frac{19302980}{21344} \\ \frac{3361680\sqrt{15}}{21344} & -\frac{7907952\sqrt{15}}{21344} & \frac{12934464\sqrt{15}}{21344} & -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & -\frac{17088540\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{31548433}{21344} & \frac{40638976}{21344} & \frac{55665152}{21344} & \frac{78887424}{21344} & \frac{92035328}{21344} \\ \frac{19633145\sqrt{15}}{21344} & -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} & \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} & -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} & \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{104977796}{21344} & \frac{117434688}{21344} & \frac{135747840}{21344} & \frac{148895744}{21344} & \frac{165917584}{21344} \\ \frac{28630308\sqrt{15}}{21344} & -\frac{30095040\sqrt{15}}{21344} & \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} & -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} & \frac{25474064\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{172118016}{21344} & \frac{176674960}{21344} & \frac{187144192}{21344} & \frac{197005120}{21344} & \frac{205017124}{21344} \\ \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} & -\frac{25239280\sqrt{15}}{21344} & -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} & \frac{19423040\sqrt{15}}{21344} & -\frac{18347836\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{212244736}{21344} & \frac{220227392}{21344} & \frac{224055972}{21344} & \frac{0}{21344} & \frac{227783168}{21344} \\ -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & \frac{9860928\sqrt{15}}{21344} & -\frac{8188092\sqrt{15}}{21344} & \frac{0\sqrt{15}}{21344} & \frac{0\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{7555776}{21344} & \frac{30778048}{21344} & \frac{110348480}{21344} & \frac{214848704}{21344} & \\ \frac{9860928\sqrt{15}}{21344} & \frac{19423040\sqrt{15}}{21344} & -\frac{30095040\sqrt{15}}{21344} & \frac{12934464\sqrt{15}}{21344} & \end{array} \right].$$

$$n = 28, \quad R = \frac{20672}{15} \sqrt{15},$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} \frac{12934464}{21344} & \frac{15538432}{21344} & \frac{40638976}{21344} & \frac{55665152}{21344} & \frac{78887424}{21344} \\ \frac{12934464\sqrt{15}}{21344} & -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} & \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} & -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{92035328}{21344} & \frac{117434688}{21344} & \frac{135747840}{21344} & \frac{148895744}{21344} & \frac{172118016}{21344} \\ \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} & -\frac{30095040\sqrt{15}}{21344} & \frac{28174080\sqrt{15}}{21344} & -\frac{28686336\sqrt{15}}{21344} & \frac{24588288\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{187144192}{21344} & \frac{197005120}{21344} & \frac{212244736}{21344} & \frac{220227392}{21344} & \frac{0}{21344} \\ -\frac{23222272\sqrt{15}}{21344} & \frac{19423040\sqrt{15}}{21344} & -\frac{15538432\sqrt{15}}{21344} & \frac{9860928\sqrt{15}}{21344} & \frac{0\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{227783168}{21344} & \frac{7555776}{21344} & \frac{30778048}{21344} & \frac{51108208}{21344} & \frac{61865584}{21344} \\ \frac{0\sqrt{15}}{21344} & \frac{9860928\sqrt{15}}{21344} & \frac{19423040\sqrt{15}}{21344} & -\frac{25239280\sqrt{15}}{21344} & \frac{25474064\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{110348480}{21344} & \frac{214848704}{21344} & \frac{224336112}{21344} & \frac{226726640}{21344} & \frac{208480188}{21344} \\ -\frac{30095040\sqrt{15}}{21344} & \frac{12934464\sqrt{15}}{21344} & -\frac{7907952\sqrt{15}}{21344} & \frac{3361680\sqrt{15}}{21344} & -\frac{17088540\sqrt{15}}{21344} \\ \frac{22766044}{21344} & \frac{122805372}{21344} & \frac{3727196}{21344} & & \\ -\frac{18347836\sqrt{15}}{21344} & \frac{28630308\sqrt{15}}{21344} & -\frac{8188092\sqrt{15}}{21344} & & \end{array} \right].$$

### A.3. Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 187

$$n = 36, \quad R = \frac{12103}{3}\sqrt{3},$$

$$\left[ \begin{array}{cccccc} \frac{12103}{2} & -\frac{12103}{2} & 0 & -\frac{147147}{38} & -\frac{117845}{38} & \frac{132496}{19} \\ -\frac{12103\sqrt{3}}{6} & -\frac{12103\sqrt{3}}{6} & \frac{12103\sqrt{3}}{3} & -\frac{382837\sqrt{3}}{114} & \frac{412139\sqrt{3}}{114} & -\frac{14651\sqrt{3}}{57} \\ \frac{13965}{26} & -\frac{81928}{13} & \frac{149891}{26} & -\frac{3451609}{494} & \frac{843192}{247} & \frac{1765225}{494} \\ -\frac{313747\sqrt{3}}{78} & \frac{67963\sqrt{3}}{39} & \frac{177821\sqrt{3}}{78} & -\frac{78841\sqrt{3}}{1482} & \frac{2608417\sqrt{3}}{741} & -\frac{5137993\sqrt{3}}{1482} \\ -1976 & -\frac{9633}{2} & \frac{13585}{2} & -\frac{124696}{19} & \frac{203645}{38} & \frac{45747}{38} \\ -\frac{11609\sqrt{3}}{3} & \frac{17537\sqrt{3}}{6} & \frac{5681\sqrt{3}}{6} & \frac{78949\sqrt{3}}{57} & \frac{295139\sqrt{3}}{114} & -\frac{453037\sqrt{3}}{114} \\ \frac{37829}{26} & \frac{67488}{13} & -\frac{854319}{494} & \frac{3323599}{494} & -\frac{1234640}{247} & -\frac{683943}{98} \\ \frac{307781\sqrt{3}}{78} & -\frac{105317\sqrt{3}}{39} & \frac{5792879\sqrt{3}}{1482} & -\frac{1614961\sqrt{3}}{1482} & -\frac{2088959\sqrt{3}}{741} & \frac{59033\sqrt{3}}{294} \\ \frac{185744}{49} & \frac{312455}{98} & \frac{1474187}{1862} & \frac{5229120}{931} & -\frac{11932427}{1862} & -\frac{2329400}{637} \\ \frac{498199\sqrt{3}}{147} & -\frac{1055431\sqrt{3}}{294} & \frac{22390667\sqrt{3}}{5586} & -\frac{6703307\sqrt{3}}{2793} & -\frac{8984053\sqrt{3}}{5586} & \frac{6569611\sqrt{3}}{1911} \\ \frac{8899011}{1274} & -\frac{4240211}{1274} & \frac{74739752}{12103} & -\frac{6190039}{24306} & -\frac{143289465}{24206} & \\ \frac{418589\sqrt{3}}{3822} & -\frac{13557811\sqrt{3}}{3822} & \frac{68549713\sqrt{3}}{36309} & -\frac{292768969\sqrt{3}}{72618} & \frac{155669543\sqrt{3}}{72618} & \end{array} \right].$$

### A.3 Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3

In diesem Abschnitt wollen wir für  $m \leq 12$  die Abstandsmatrizen der  $m$ -dimensionalen ganzzahligen Punktmengen in allgemeiner Lage aus  $m+2$  Punkten mit Durchmesser 3 vollständig auflisten.

$$m = 3 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = 6 : \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 2 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$m = 8 :$

$$\left( \begin{array}{c} 032222222 \\ 302222222 \\ 220222222 \\ 222022222 \\ 222202222 \\ 222220222 \\ 222222022 \\ 222222202 \\ 222222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033332222 \\ 302223332 \\ 320223332 \\ 322023332 \\ 322203332 \\ 233330222 \\ 233332022 \\ 233332202 \\ 222222202 \\ 222222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033332222 \\ 303323222 \\ 330122333 \\ 331022333 \\ 322202333 \\ 232220333 \\ 223330111 \\ 223331011 \\ 223331101 \\ 223331110 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333322 \\ 303333222 \\ 330111222 \\ 331011222 \\ 331101222 \\ 331110222 \\ 322220322 \\ 232222302 \\ 222222201 \\ 222222210 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033332222 \\ 303323222 \\ 330233333 \\ 332033333 \\ 331023222 \\ 233320322 \\ 223330222 \\ 223322022 \\ 223322202 \\ 223322220 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} 033332222 \\ 303332222 \\ 330332222 \\ 333032222 \\ 333302222 \\ 222201111 \\ 222210111 \\ 222211011 \\ 222211101 \\ 222211110 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333232 \\ 330332332 \\ 333032332 \\ 333302222 \\ 333220332 \\ 332323022 \\ 323323022 \\ 233322302 \\ 222222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333333 \\ 303333322 \\ 330333322 \\ 333033322 \\ 333301122 \\ 333310122 \\ 333311022 \\ 333311022 \\ 322222201 \\ 322222210 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333332 \\ 330333323 \\ 333033222 \\ 333302322 \\ 333320322 \\ 333232032 \\ 333223022 \\ 332222202 \\ 223222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333332 \\ 330333332 \\ 333033223 \\ 333302323 \\ 333320323 \\ 333233023 \\ 333222023 \\ 333222203 \\ 223333330 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} 033333333 \\ 303333333 \\ 330333333 \\ 333033322 \\ 333302322 \\ 333320232 \\ 333322032 \\ 333233032 \\ 333222302 \\ 333222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333332 \\ 330333332 \\ 333033323 \\ 333302232 \\ 333320232 \\ 333322032 \\ 333233303 \\ 222322230 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333332 \\ 330333332 \\ 333033323 \\ 333303223 \\ 333302323 \\ 333320233 \\ 333232033 \\ 333223303 \\ 222233330 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333333 \\ 303333333 \\ 330333333 \\ 333033322 \\ 333303232 \\ 333302332 \\ 333320332 \\ 333233032 \\ 333233302 \\ 333222220 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} 033333332 \\ 303333332 \\ 330333332 \\ 333033332 \\ 333303332 \\ 333303332 \\ 333303332 \\ 333333032 \\ 333333302 \\ 222222220 \end{array} \right)$$

A.3. Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 189

$$m = 9 : \begin{pmatrix} 0333322221 \\ 3033122223 \\ 3302333333 \\ 3320333333 \\ 3133022223 \\ 2233202222 \\ 2233220222 \\ 2233220222 \\ 2233222022 \\ 2233222202 \\ 1333322220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333333 \\ 3033333333 \\ 3303332221 \\ 3330223323 \\ 3332023323 \\ 3332202223 \\ 3323320122 \\ 3323321022 \\ 3322222022 \\ 3322222202 \\ 3313332220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333332 \\ 3033333332 \\ 3303333323 \\ 3330332122 \\ 3333012232 \\ 3333102232 \\ 3332202222 \\ 3332220222 \\ 3331332202 \\ 3322222202 \\ 2232222220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333333 \\ 3033333333 \\ 3303333333 \\ 3330333222 \\ 3330333222 \\ 3333210222 \\ 3333122022 \\ 3332222022 \\ 3332222202 \\ 3332222202 \\ 3332222220 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0333333332 \\ 3033333332 \\ 3303333332 \\ 3330333222 \\ 3333022222 \\ 3333202222 \\ 3333201322 \\ 33332210322 \\ 3332233022 \\ 2222222201 \\ 2222222210 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333332 \\ 3033333332 \\ 3303333322 \\ 3330333222 \\ 33330331333 \\ 3333013333 \\ 33333103333 \\ 33331330333 \\ 3322333022 \\ 3322333202 \\ 2222333220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333333 \\ 3033333333 \\ 3303333333 \\ 3330333221 \\ 3333033223 \\ 3333012323 \\ 33333102323 \\ 3333220323 \\ 3332233022 \\ 3332222202 \\ 33313333220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0333333332 \\ 3033333332 \\ 3303333332 \\ 3330333332 \\ 3333032213 \\ 33333012233 \\ 33333102233 \\ 3333220223 \\ 3332222023 \\ 33331332203 \\ 2222333330 \end{pmatrix}$$

$$m = 10 : \begin{pmatrix} 03333222211 \\ 30222222233 \\ 32011222233 \\ 32101222233 \\ 32110222233 \\ 22222022222 \\ 22222022222 \\ 22222201122 \\ 22222210122 \\ 22222211022 \\ 13333222201 \\ 13333222210 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30222222223 \\ 32022222223 \\ 32202222223 \\ 32220222223 \\ 32222022223 \\ 32222022223 \\ 32222201112 \\ 32222210112 \\ 32222211012 \\ 32222211102 \\ 23333322220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333333211 \\ 30333323233 \\ 330222132333 \\ 332011233333 \\ 332101233333 \\ 332110233333 \\ 331222032333 \\ 32333303233 \\ 232333230222 \\ 22333322022 \\ 13333332201 \\ 13333332210 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333333311 \\ 30333222233 \\ 33023222233 \\ 33203222233 \\ 332202322233 \\ 323320322233 \\ 322233022233 \\ 32222201133 \\ 32222210133 \\ 32222211033 \\ 13333333301 \\ 13333333310 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 03333322222 \\ 30333233222 \\ 33022332222 \\ 33202332222 \\ 33220323222 \\ 32333033222 \\ 23332303222 \\ 23223330222 \\ 22222220111 \\ 22222221011 \\ 22222221101 \\ 22222221110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333333333 \\ 30333332222 \\ 33022223322 \\ 33202223322 \\ 33220113222 \\ 33221013222 \\ 33221103222 \\ 32333330222 \\ 32333330222 \\ 32332220222 \\ 32222222022 \\ 32222222202 \\ 32222222220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333332222 \\ 30333232222 \\ 33032332222 \\ 33302332222 \\ 33320332222 \\ 33233033222 \\ 32333303222 \\ 23333302222 \\ 22222220111 \\ 22222221011 \\ 22222221101 \\ 22222221110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 03333333311 \\ 30333222233 \\ 33032322233 \\ 33302332233 \\ 33320332233 \\ 33233032233 \\ 32333302233 \\ 32222201133 \\ 32222210133 \\ 32222211033 \\ 13333333301 \\ 13333333310 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303333332222 \\ 330333332222 \\ 333032222222 \\ 333302222222 \\ 333220222222 \\ 333220222222 \\ 333222022222 \\ 222222201111 \\ 222222210111 \\ 222222211011 \\ 222222211101 \\ 222222211101 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333333322 \\ 330333332222 \\ 333033322222 \\ 333301133333 \\ 333310133333 \\ 333311033333 \\ 332233301122 \\ 332233310122 \\ 332233311022 \\ 222233322201 \\ 222233322210 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333333 \\ 303333333321 \\ 33033333123 \\ 33303332323 \\ 333302212323 \\ 333320122323 \\ 333321022323 \\ 333312202323 \\ 33322220323 \\ 33133333023 \\ 3222222202 \\ 31333333320 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333333322 \\ 330333333322 \\ 33303332233 \\ 333303312233 \\ 333303312233 \\ 33330132233 \\ 33330132233 \\ 33331032233 \\ 333313302233 \\ 33322220133 \\ 33322221033 \\ 22233333301 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 033333333332 \\ 303333333332 \\ 330333333332 \\ 33303333223 \\ 33330333223 \\ 333330111332 \\ 333331011332 \\ 333331101332 \\ 333331110332 \\ 33322333023 \\ 33322333203 \\ 22233222330 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333332 \\ 303333333332 \\ 330333333332 \\ 333033333322 \\ 33330333232 \\ 333330111222 \\ 333331011222 \\ 333331101222 \\ 333331110222 \\ 33332222032 \\ 33322222302 \\ 22222222220 \end{pmatrix}$$

$m = 11$  :

$$\begin{pmatrix} 033333222222 \\ 302222332222 \\ 320222332222 \\ 322011132222 \\ 322101132222 \\ 322110132222 \\ 322111032222 \\ 233333022222 \\ 233222202222 \\ 22222220221 \\ 22222222012 \\ 22222222102 \\ 222222221220 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303322111122 \\ 330222333322 \\ 332022333322 \\ 322202222222 \\ 322202222222 \\ 313322011122 \\ 313322101122 \\ 313322110122 \\ 313322111022 \\ 313322111022 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333332221 \\ 303322222323 \\ 33023222223 \\ 33203222223 \\ 323302223223 \\ 322201112223 \\ 322210112223 \\ 322211012223 \\ 322211102223 \\ 23222220222 \\ 22222222012 \\ 22222222102 \\ 133333332220 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333311 \\ 303333222233 \\ 330221222233 \\ 332012222233 \\ 332102222233 \\ 331220222233 \\ 322220222233 \\ 322222022233 \\ 322222022233 \\ 32222201133 \\ 322222210133 \\ 322222211033 \\ 13333333301 \\ 133333333310 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 033333222222 \\ 303332332222 \\ 330221322222 \\ 332012322222 \\ 332102322222 \\ 331220322222 \\ 323330332222 \\ 232223022222 \\ 232223202222 \\ 22222220111 \\ 222222210111 \\ 222222211011 \\ 222222211101 \\ 222222211101 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333332211 \\ 303332233333 \\ 330222222233 \\ 332011332233 \\ 332101332233 \\ 332110332233 \\ 322333013333 \\ 322333103333 \\ 232223301122 \\ 232223310122 \\ 232223311022 \\ 232223311022 \\ 13333332201 \\ 13333332210 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333332211 \\ 303321122233 \\ 330223332233 \\ 332023322233 \\ 332202332233 \\ 323220222233 \\ 313332012233 \\ 313332102233 \\ 222222201122 \\ 222222210122 \\ 222222211022 \\ 222222211022 \\ 13333332201 \\ 13333332210 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} 033333333331 \\ 303332222213 \\ 330223332233 \\ 332023332233 \\ 332202222233 \\ 3233201112223 \\ 3233210112223 \\ 3233211012223 \\ 3233211102223 \\ 32222220223 \\ 32222220223 \\ 32222220223 \\ 313332222023 \\ 13333333330 \end{pmatrix}$$

**A.3. Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 191**

$\begin{pmatrix} 033333333333 \\ 303333222211 \\ 330222332233 \\ 332022222233 \\ 3322011332233 \\ 3322101332233 \\ 3322110332233 \\ 3232333012222 \\ 3232333102222 \\ 322222220222 \\ 322222220222 \\ 322222220222 \\ 313333222201 \\ 313333222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333321 \\ 303333332223 \\ 330222222223 \\ 332022222223 \\ 3322011112223 \\ 3322101112223 \\ 3322110112223 \\ 3322111012223 \\ 3322111102223 \\ 3322111102223 \\ 322222220223 \\ 322222220223 \\ 322222220223 \\ 322222220223 \\ 133333333320 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333321 \\ 303333332223 \\ 330222223333 \\ 332022223233 \\ 3322011133333 \\ 3322101113333 \\ 3322110113333 \\ 3322111013333 \\ 3322111103333 \\ 3322111103333 \\ 323333330223 \\ 323233332023 \\ 223333332202 \\ 133333333320 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333322222 \\ 303333122222 \\ 330222333333 \\ 332023333333 \\ 332203333333 \\ 332203333333 \\ 332203333333 \\ 323330232222 \\ 233332032222 \\ 223333302222 \\ 223333220222 \\ 223333220222 \\ 222222222201 \\ 222222222210 \end{pmatrix}$
---	--	--	--

$\begin{pmatrix} 033333322222 \\ 303332223322 \\ 330222333322 \\ 332022333322 \\ 332202333322 \\ 332203333222 \\ 323330232222 \\ 233332032222 \\ 223333302222 \\ 223333220222 \\ 223333220222 \\ 222222222201 \\ 222222222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303332223322 \\ 330222333333 \\ 332022333333 \\ 332202333333 \\ 332203333333 \\ 323330232222 \\ 323332032222 \\ 323332032222 \\ 323332032222 \\ 233332032222 \\ 233332032222 \\ 233332032222 \\ 223333220222 \\ 223333220222 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333322221 \\ 303333222223 \\ 330331232223 \\ 333011333333 \\ 333101333333 \\ 333110333333 \\ 331333023223 \\ 322332032223 \\ 223333302222 \\ 223333302222 \\ 223333220112 \\ 223333220112 \\ 223333221012 \\ 223333221102 \\ 133333322220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333322221 \\ 303332222223 \\ 330331232223 \\ 333023332223 \\ 333203322223 \\ 331330232223 \\ 322332032223 \\ 222222201112 \\ 222222210112 \\ 222222211012 \\ 222222211102 \\ 133333322220 \end{pmatrix}$
--	--	--	--

$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303333322222 \\ 330322213333 \\ 333022233333 \\ 333202233333 \\ 332202233333 \\ 332220223333 \\ 332222023333 \\ 331332203333 \\ 223333330222 \\ 223333332022 \\ 223333332202 \\ 223333332202 \\ 223333332202 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303332223322 \\ 330322333322 \\ 333023332222 \\ 333203322222 \\ 332330233322 \\ 323332033322 \\ 322333033322 \\ 233323302222 \\ 233223320222 \\ 233223320222 \\ 233223320222 \\ 222222222201 \\ 222222222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303332223322 \\ 330322322322 \\ 333023223223 \\ 333203223223 \\ 332330322322 \\ 323330223322 \\ 322222013222 \\ 322222103222 \\ 233333330222 \\ 232222322022 \\ 223223222202 \\ 222332222202 \\ 222332222202 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303333322222 \\ 330332233322 \\ 333022323322 \\ 333202323322 \\ 333220233322 \\ 332332033322 \\ 332223303322 \\ 223333302222 \\ 223333320222 \\ 223333320222 \\ 222222222201 \\ 222222222210 \end{pmatrix}$
--	--	--	--

$\begin{pmatrix} 033333333221 \\ 303333222333 \\ 330332333223 \\ 333022332233 \\ 333202223333 \\ 333203222333 \\ 332330333223 \\ 323322302233 \\ 323223202333 \\ 323223202333 \\ 232333233022 \\ 232333233022 \\ 133333333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 303333322222 \\ 330333222222 \\ 333022222222 \\ 333202222222 \\ 333220132222 \\ 333221032222 \\ 332223302222 \\ 222222201111 \\ 222222210111 \\ 222222211011 \\ 222222211101 \\ 222222211110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333333 \\ 303333322111 \\ 330333222333 \\ 333022222333 \\ 333202222333 \\ 3332201322333 \\ 3332210322333 \\ 3322233022333 \\ 322222201222 \\ 322222210222 \\ 313333322011 \\ 313333322101 \\ 313333322110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333322233 \\ 330333223223 \\ 333022233322 \\ 333202233322 \\ 333220133332 \\ 333221033332 \\ 332333302233 \\ 323333302233 \\ 322333220233 \\ 322333220233 \\ 322333220233 \\ 233222333302 \\ 233222333320 \end{pmatrix}$
--	--	---	--

$\begin{pmatrix} 033333333332 \\ 303333332223 \\ 330333223223 \\ 333022233332 \\ 333202233332 \\ 333220133333 \\ 333221033333 \\ 332333023223 \\ 332333202323 \\ 323333320323 \\ 322333233023 \\ 32233322203 \\ 23322333330 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333332222 \\ 33033322232 \\ 333022233332 \\ 333202233332 \\ 333220233332 \\ 33322033332 \\ 33233302232 \\ 32233320232 \\ 32233322012 \\ 322333221022 \\ 322333332202 \\ 223333332202 \\ 22222222220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333332222 \\ 33033322323 \\ 333022233322 \\ 333202233322 \\ 333220233322 \\ 33322033322 \\ 33233302323 \\ 33233320323 \\ 32333330222 \\ 32222222022 \\ 223222232201 \\ 223222232210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 30333333233 \\ 33033322322 \\ 33302223332 \\ 33320223332 \\ 33322023332 \\ 33322033332 \\ 33233302322 \\ 332333201332 \\ 332333210332 \\ 32333333033 \\ 23233322203 \\ 23222222320 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333332222 \\ 33033322323 \\ 33302223232 \\ 33320223232 \\ 33322023232 \\ 33322013232 \\ 33322103232 \\ 33233303232 \\ 323222230222 \\ 322333322022 \\ 22333332202 \\ 22222222220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 303333332232 \\ 33033322322 \\ 33302223223 \\ 33320223223 \\ 33322023223 \\ 33322013223 \\ 33322103223 \\ 33233303222 \\ 32333330232 \\ 322222222022 \\ 232222223202 \\ 22233332220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333333 \\ 30333333322 \\ 33033322322 \\ 33302222222 \\ 33330222222 \\ 33322022222 \\ 33322011122 \\ 33322101122 \\ 333221101122 \\ 333221110122 \\ 333221111022 \\ 32222222201 \\ 32222222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 30333333322 \\ 33033322322 \\ 33302222222 \\ 33330222222 \\ 33322022222 \\ 33322022222 \\ 33322022222 \\ 33322022222 \\ 33322022222 \\ 33322022222 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 033333333332 \\ 30333333332 \\ 33033222222 \\ 33303322222 \\ 33330233333 \\ 33332033333 \\ 333233022222 \\ 332233202222 \\ 332233220222 \\ 332233220222 \\ 33223322012 \\ 332233222102 \\ 22233222220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333332222 \\ 30333332222 \\ 33033323322 \\ 33303323332 \\ 33330233332 \\ 33332033332 \\ 33323303332 \\ 33233303332 \\ 22333330222 \\ 22333332022 \\ 223333322022 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333222 \\ 30333333222 \\ 33033323322 \\ 33303331122 \\ 33330222322 \\ 33332011322 \\ 33332101322 \\ 33332110322 \\ 33313330122 \\ 33313331022 \\ 22222222011 \\ 22222222101 \\ 22222222110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 30333333322 \\ 33033322222 \\ 33303323322 \\ 33330223332 \\ 33332023332 \\ 33332032322 \\ 33323302332 \\ 33323320322 \\ 33323330222 \\ 33233322201 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 033333333322 \\ 30333333322 \\ 33033322323 \\ 33303322323 \\ 33330223332 \\ 33332023332 \\ 33332033332 \\ 33323302323 \\ 33323320233 \\ 33233332033 \\ 33223323303 \\ 223322233301 \\ 223322233310 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333333 \\ 30333333222 \\ 33033322222 \\ 33303323332 \\ 33330223332 \\ 33332023332 \\ 33332012332 \\ 33332102332 \\ 33323320332 \\ 32233330222 \\ 322333332022 \\ 322333332202 \\ 32222222220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333332 \\ 30333333322 \\ 33033322323 \\ 33303323233 \\ 33330222332 \\ 33332022332 \\ 33332013332 \\ 33332103332 \\ 33323330233 \\ 33233332033 \\ 33223333303 \\ 32332233302 \\ 223322233320 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 033333333332 \\ 30333333223 \\ 33033322323 \\ 33303323323 \\ 33330222332 \\ 33332022332 \\ 33332013333 \\ 33332103333 \\ 33323330323 \\ 332333330323 \\ 322333332203 \\ 23332233330 \end{pmatrix}$

**A.3. Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 193**

$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333332 \\ 33303333222 \\ 33330222332 \\ 33332023332 \\ 33332203332 \\ 33323330222 \\ 33323332022 \\ 33323332022 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333333 \\ 30333333333 \\ 33033333333 \\ 33303333321 \\ 33330222223 \\ 33332022223 \\ 33332202223 \\ 33332202223 \\ 33332202223 \\ 33332202223 \\ 33322222202 \\ 333133333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333332 \\ 33303322223 \\ 33330322223 \\ 33330222233 \\ 33322011133 \\ 33322101133 \\ 33322110133 \\ 33322110133 \\ 33322111033 \\ 22233333301 \\ 22233333310 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333332 \\ 33303333322 \\ 33330322233 \\ 33330222233 \\ 33332022233 \\ 33332202233 \\ 33332201333 \\ 33332221033 \\ 33223333302 \\ 22223333320 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 03333333333 \\ 30333333333 \\ 33033333333 \\ 33303333221 \\ 33330332333 \\ 33330223323 \\ 33332023323 \\ 33332203223 \\ 33323330333 \\ 33323332302 \\ 33323223202 \\ 33313333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333323 \\ 33303333233 \\ 33330332333 \\ 33330223322 \\ 33332023322 \\ 33332203322 \\ 33332330333 \\ 33323330333 \\ 33233333033 \\ 22333223301 \\ 22333223310 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333332 \\ 33303333323 \\ 33330333323 \\ 33330333233 \\ 33333022323 \\ 33333202233 \\ 33333202233 \\ 33333201323 \\ 33333221032 \\ 33332333033 \\ 22233333330 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333332 \\ 30333333332 \\ 33033333332 \\ 33303333332 \\ 33330333332 \\ 33330333332 \\ 33333022222 \\ 33333202222 \\ 3333320132 \\ 33333221032 \\ 33333221032 \\ 33333222201 \\ 22222222220 \end{pmatrix}$

$m = 12 :$

$\begin{pmatrix} 03333222211 \\ 30222332223 \\ 32022222233 \\ 32201133223 \\ 32210133223 \\ 32211033223 \\ 23233012222 \\ 23233102222 \\ 22222220212 \\ 22222220122 \\ 22222221022 \\ 22222221202 \\ 13333222201 \\ 13333222210 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333322222 \\ 30222333333 \\ 32022233333 \\ 32202213333 \\ 32201222222 \\ 32210222222 \\ 32212203333 \\ 23332230111 \\ 23332231011 \\ 23332231011 \\ 23332231101 \\ 23332231101 \\ 23332231110 \\ 23332231110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333322222 \\ 30222233332 \\ 32022233332 \\ 32202223332 \\ 32202223332 \\ 32220113332 \\ 32221013332 \\ 32221103332 \\ 23333330222 \\ 23333332012 \\ 23333332102 \\ 23333332102 \\ 22222222202 \\ 22222222220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 03333333322 \\ 30333222222 \\ 33022122222 \\ 33201222222 \\ 33210222222 \\ 33122022222 \\ 32222022222 \\ 32222011122 \\ 32222210112 \\ 32222211012 \\ 32222211102 \\ 32222211102 \\ 22222222201 \\ 22222222210 \end{pmatrix}$
--	--	--	--

(0333333332211)	(0333333333211)	(0333333332211)	(0333333332222)
30333332113233	30333333211233	30333222232333	30333332223333
33022212332333	33022211233333	33022333322333	33022223333322
33201123332333	33201122233333	33202333322333	33202223333322
33210123332333	33210122233333	33220222222333	33220113333222
33211023332333	33211022233333	32332011132333	3322103333222
33122202332333	33122201233333	32332101132333	33221103333222
32233320223233	33122210233333	32332110132333	32333330113333
31333332013233	3222222022333	32332111032333	32333331013333
31333332103233	31333333201233	23222333302222	32333331103333
23222223330322	31333333210233	2222222220222	23333333330222
22333332223022	22333333322022	13333333322011	23332223332022
13333333332201	13333333333201	13333333322101	23222223332202
13333333332210	13333333333210	13333333322110	23222223332220

(0333333333311)	(0333333333322)	(0333333333322)	(0333333222221)
30333332222233	30333332222332	30333332222333	30333312222223
33022223332233	33022223333222	33022223333322	33022223333323
33202223332233	33202223333222	33202223333322	33202223333323
33220113332233	33220113333222	33220113333322	33220233333223
33221013332233	33221013333222	33221013333322	3322033333223
33221103332233	33221103333222	33221103333322	31333302222223
32333330112233	32333330222332	32333330222333	22333320222222
32333331012233	32333332011332	32333332011333	22333320222222
32333331102233	32333332101332	32333332101333	22333322202222
3222222220233	32333332110332	32333332110333	22333322202222
3222222222033	23222223333022	2333333333022	2222222222012
13333333333301	23222223333202	23222223333202	2222222222102
13333333333310	2222222222220	23222223333220	13333332222220

(0333333332221)	(0333333333321)	(0333333332221)	(0333333333222)
30333322233223	30333322222223	30333333122223	30333322223333
33022223333323	33033122222223	33033222233323	33033222222222
33202223333323	33302333332233	33302322233323	33302322222222
33220233333323	33320333332233	33320222233323	33320322222222
33220333333323	33133022222223	33232022233323	33233022222222
32333301233223	32233202222223	33222202333223	32222201112222
32333310233223	32233220222223	3322220333223	32222210112222
32222220333223	32233222022223	31333333022223	32222211012222
2333333301222	32233222202223	22333333202222	32222211102222
2333333310222	3222222220123	22333333220222	2322222220111
2233332222022	3222222221023	2222222222012	23222222221011
2222222222202	2223322222202	2222222222102	23222222221101
1333333332220	1333333333320	1333333332220	23222222221110

(0333333332222)	(0333333333321)	(0333333332222)	(0333333332222)
3033333322222	30333333332223	30333333322222	30333332233333
33033222233322	33033322223333	33033322233322	33033322222222
33302322233322	33302233223333	33302212233322	33302233333333
33320322233322	33320133223333	33320122233322	33320233333333
33233022233322	33321033223333	33321022233322	33320322333333
33222201133322	33233301223333	33312202233322	33233303322222
33222210133322	33233310223333	33222220233322	32333230133333
33222211033322	33222220233333	3322222033322	32333231033333
2233333301122	33222222033333	2233333302222	2323332302221
2233333310122	32333333330223	2233333320222	23233323320222
22333333311022	22333333332022	22333333322022	23233323322012
2222222222201	2233333332202	2222222222201	23233323322102
2222222222210	1333333333320	2222222222210	23233323312220

### A.3. Ganzzahlige Punktmengen in allgemeiner Lage mit Durchmesser 3 195

(033333332222)	(033333333322)	(033333332221)	(033333333321)
303333223333	303333332223	303333233323	303333332233
330332332222	330332213332	330333233223	330333223223
333022333333	333022333323	333022333223	333022333223
333202333333	333202333323	333202333223	333202333223
333233033222	332333012332	333220133222	333220133222
323323013333	332333102332	332333033223	332333023223
323323103333	331333203332	323333303323	332322203223
232332330222	323332330133	233322330222	323333302233
232332332022	323332331033	232222232012	322222220123
232332332012	323223333032	232222232102	3222222221023
232332332210	232332223302	223222232202	232222223202
232332332120	22222222220	133333332220	133333333320

(033333333322)	(033333333322)	(033333333322)	(033333333322)
303333332333	303333332322	303333332233	303333332322
330333221322	330333222322	330333222322	330333222322
333022332333	333022332322	333022333322	333022332333
333202333233	333202333222	333202333322	333202333233
333220133333	333220133332	333220133332	333220133233
333221033333	333221033332	333221033332	333221032333
332333012322	332333022322	332333022322	333221103233
332333102322	332333201332	332333201332	332333302222
331333220322	332333210332	332333210332	322222220222
323233330333	323223333032	323333330233	2322222221022
232333223022	232333233022	323333332033	222333322011
232333223202	222222222201	232222223301	2223333222101
232333223220	222222222210	2322222223310	2223333222110

(033333333322)	(033333332222)	(033333333311)	(033333333333)
303333223322	303333332222	303333222233	303333332221
330333233322	330333213332	330333222233	330333213223
333022333322	333032233322	333032223333	333032232323
333202333322	333301233332	333302322233	333302322233
333220333322	333310233332	333320322233	333320322233
332333033322	333220333322	333230223333	333230223323
323333230122	332233023322	332222022233	332222022223
323333231022	331333203332	323222202233	331333203223
233332322012	223333330222	323223220133	323222230222
233332322102	223333332022	323223221013	323223222012
222222222201	223333332202	323223221103	3223223222102
222222222210	222222222201	133333333301	322332222202
	222222222210	133333333310	313333332220

(033333333322)	(033333333332)	(033333333332)	(033333333322)
303333332222	303333333323	303333333322	303333332222
330333221133	330333333122	330333332233	330333223322
333032333322	333033322233	333033221223	333033222332
333302323333	333302213223	333302233322	333302233333
333320323333	333320123233	333320233322	333320233333
333233033322	333321023233	333320333322	333322013333
332323022233	333312203233	333233012223	333322103333
332323202233	333233302233	333233102233	332233301233
331333220133	333222220233	333133322023	332233310233
331333221033	333222222033	332233222023	323233322022
223232333011	331333333022	332233222033	223333332012
223232333101	322333333203	22322333301	223333332102
223232333110	232333333230	22322333310	222233322220

$\begin{pmatrix} 0333333333221 \\ 3033333332223 \\ 33033333312323 \\ 33303333233333 \\ 33330222233333 \\ 33332022233333 \\ 33332201333333 \\ 33332210333333 \\ 33322330333333 \\ 33133333302323 \\ 3223333320323 \\ 2233333333022 \\ 2223333322202 \\ 1333333333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333221 \\ 30333333331223 \\ 33033333323333 \\ 33303333223333 \\ 33330222233333 \\ 33332022233333 \\ 33332201323333 \\ 33332210323333 \\ 33322330233333 \\ 33222222033333 \\ 3133333330223 \\ 2233333332022 \\ 2233333332202 \\ 1333333333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333332 \\ 3303333333222 \\ 33303333221322 \\ 33330222333333 \\ 33332022333333 \\ 33332201333333 \\ 33332210333333 \\ 3332333012232 \\ 3332333102232 \\ 33313333220322 \\ 33233333223032 \\ 3322333332302 \\ 2222333322220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333322 \\ 3033333333122 \\ 33033333323333 \\ 33330222233333 \\ 33332022233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 33332202233333 \\ 2223333333220 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0333333333333 \\ 3033333333321 \\ 33033333333123 \\ 33303333331323 \\ 33330222233323 \\ 33332022233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 33332202233323 \\ 3133333333220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333322 \\ 3303333333232 \\ 3330333332222 \\ 33330332213333 \\ 33333012233333 \\ 33333102233333 \\ 33332201233333 \\ 33332210233333 \\ 33331332203333 \\ 3322333330222 \\ 3232333332022 \\ 2332333332202 \\ 2222333332220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333222 \\ 3303333332322 \\ 3330333332232 \\ 33330332213333 \\ 33333012233333 \\ 33333102233333 \\ 33332201233333 \\ 33332210233333 \\ 33331332203333 \\ 3322333330222 \\ 3232333332022 \\ 3223333332202 \\ 2222333332220 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333322 \\ 3033333333322 \\ 3303333333223 \\ 33303333221333 \\ 33330331223333 \\ 33333023333222 \\ 3333203333222 \\ 33331330223333 \\ 33322332012333 \\ 33322332012333 \\ 33322332012333 \\ 33322332012333 \\ 33322332012333 \\ 2233223333202 \\ 2233223333220 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333332 \\ 33033333333213 \\ 3330333332213 \\ 33330333213233 \\ 33333022232233 \\ 33333201333233 \\ 33333210333233 \\ 33332233022233 \\ 33331333203233 \\ 3332323320223 \\ 3332222222023 \\ 3331333332203 \\ 2223333333330 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333333 \\ 3033333333333 \\ 3303333333333 \\ 3330333333222 \\ 33330333311222 \\ 33333022233222 \\ 33333201133222 \\ 33333210133222 \\ 33333211033222 \\ 33331333301222 \\ 33331333310222 \\ 3332222222011 \\ 3332222222101 \\ 3332222222110 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333322 \\ 33033333332133 \\ 33303333322333 \\ 33330333123333 \\ 33333022333322 \\ 33333202333322 \\ 33333220333322 \\ 33331333023333 \\ 33322333203333 \\ 3322333330233 \\ 3313333332033 \\ 2233322233301 \\ 2233322233310 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0333333333332 \\ 3033333333332 \\ 33033333333213 \\ 3330333332213 \\ 33330333322233 \\ 33333033123233 \\ 33333031322333 \\ 3333310322333 \\ 33333133023233 \\ 33332222022233 \\ 33322322320223 \\ 3332233222023 \\ 3331333332203 \\ 2223333333330 \end{pmatrix}$

#### A.4 Weitere Punktmengen mit minimalem Durchmesser

In diesem Abschnitt listen wir die Abstandsmatrizen der konstruierten  $m$ -dimensionalen Punktmengen  $\mathcal{P}$  mit minimalem Durchmesser,  $m \geq 4$  und  $\text{diam}(\mathcal{P}) \geq 4$  auf. Für die planaren Punktmengen mit minimalem Durchmesser verweisen wir auf Kapitel 5 bzw. Abschnitt A.2, für räumliche mit minimalem Durchmesser auf Abschnitt 9.1 und für Punktmengen mit Durchmesser 3 auf Ab-

schnitt 11.2 bzw. Abschnitt A.3. Zusätzlich verweisen wir noch auf Lemma 11.3.1 für Punktmengen in beliebiger Lage mit Durchmesser 4.

Im 4-dimensionalen sind die angegebenen minimalen Durchmesser  $d(4, n)$ ,  $\bar{d}(4, n)$  bzw.  $\dot{d}(4, n)$  durch folgende Abstandsmatrizen gegeben.

$$\bar{d}(4, 6) = \dot{d}(4, 6) = 4 : \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{d}(4, 7) = \dot{d}(4, 7) = 7 :$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 & 5 & 2 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 0 & 4 & 5 & 7 \\ 7 & 2 & 4 & 4 & 0 & 6 & 5 \\ 5 & 7 & 7 & 5 & 6 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 7 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & 7 & 5 & 5 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & 5 & 7 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 0 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 5 & 0 & 7 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 7 & 0 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 7 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 6 & 7 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{d}(4, 8) = 11 : \begin{pmatrix} 0 & 11 & 11 & 10 & 9 & 7 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 11 & 7 & 7 & 5 & 9 \\ 11 & 10 & 0 & 11 & 5 & 9 & 7 & 7 \\ 10 & 11 & 11 & 0 & 7 & 5 & 9 & 7 \\ 9 & 7 & 5 & 7 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 9 & 5 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 9 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 7 & 5 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{d}(4, 8) = 14 : \begin{pmatrix} 0 & 14 & 14 & 14 & 14 & 13 & 11 & 10 \\ 14 & 0 & 14 & 14 & 11 & 10 & 14 & 13 \\ 14 & 14 & 0 & 14 & 10 & 11 & 7 & 6 \\ 14 & 14 & 14 & 0 & 7 & 6 & 10 & 11 \\ 14 & 11 & 10 & 7 & 0 & 2 & 10 & 10 \\ 13 & 10 & 11 & 6 & 2 & 0 & 10 & 10 \\ 11 & 14 & 7 & 10 & 10 & 10 & 0 & 2 \\ 10 & 13 & 6 & 11 & 10 & 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d(4,9) \leq 5 : \left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 2 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 4 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right),$$

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 0 & 5 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 4 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

$$d(4,10) \leq 8 : \left( \begin{array}{cccccccccc} 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 3 & 5 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 7 & 7 & 5 & 3 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 5 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 5 & 0 & 7 & 3 & 8 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 7 & 3 & 7 & 0 & 8 & 5 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 5 & 7 & 3 & 8 & 0 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 3 & 7 & 8 & 5 & 7 & 0 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Hierbei sind die Auflistungen der Abstandsmatrizen jeweils vollständig, d.h. dass es keine weiteren Abstandsmatrizen mit diesem Durchmesser, der Anzahl der Punkte, der Dimension und der angegebenen Nebenbedingung über die Lage der Punktmenge mehr gibt. Entsprechend geben wir nun weitere Abstandsmatrizen für den 5- und den 6-dimensionalen Raum an. Für  $\bar{d}(7,9) = \dot{d}(7,9) = 4$  gibt es jeweils 150 nicht isomorphe Abstandsmatrizen, die wir aus Platzgründen allerdings nicht vollständig auflisten wollen.

$$\dot{d}(5,8) = 5 : \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\dot{d}(5,9) = 8 : \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 & 4 & 3 \\ 8 & 0 & 8 & 7 & 7 & 4 & 3 & 7 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 3 & 4 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 3 & 0 & 5 & 7 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 7 & 4 & 5 & 0 & 5 & 8 & 5 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 7 & 5 & 0 & 5 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 7 & 8 & 5 & 0 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 8 & 5 & 5 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 8 & 7 & 7 & 7 & 8 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d(5,15) \leq 5 : \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 0 & 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 0 & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0 & 5 & 5 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 & 0 & 4 & 4 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 & 0 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 5 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 0 & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 & 3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 5 & 5 & 3 & 5 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 0 & 5 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 & 0 & 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 4 & 5 & 3 & 4 & 3 & 0 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 0 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d(6, 16) \leq 5 : \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 4 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 0 & 3 & 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 4 & 4 & 4 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 0 & 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 0 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 3 & 0 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 3 & 3 & 0 & 5 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

## B Laufzeitvergleiche

### B.1 Ordnungstreue Erzeugung durch Erweitern vs. ordnungstreue Erzeugung durch Verschmelzen

In Kapitel 3 haben wir ohne Begründung geschrieben, dass wir ganzzahlige Punktmengen durch Verschmelzen zweier Punktmengen mit je einem Punkt weniger erzeugen wollen. In Abschnitt 3.1 haben wir dann die Alternative des Erweiterns von Unterstrukturen kennengelernt. In diesem Abschnitt wollen wir die praktischen Laufzeiten beider Varianten der ordnungstreuen Erzeugung, Erweitern und Verschmelzen, miteinander vergleichen. Betrachten wir als erstes die Konstruktion von ganzzahligen Tetraedern mit gegebenem Durchmesser.

diam	Algorithmus <i>Erweitern</i>	Algorithmus <i>Verschmelzen</i>
30	0,2 s	0,1 s
40	0,7 s	0,5 s
50	1,5 s	1,1 s
60	2,6 s	2,0 s
70	4,9 s	3,5 s
80	8,8 s	6,1 s
90	15,2 s	10,4 s
100	24,7 s	16,7 s
110	38,6 s	26,3 s
120	58,2 s	39,4 s
130	85,3 s	58,0 s
140	121,3 s	82,5 s
150	168,6 s	114,9 s
160	230,3 s	156,6 s

Tabelle B.1: Erweitern vs. Verschmelzen - Konstruktion ganzzahliger Tetraeder.

Die Ergebnisse von Tabelle B.1 bescheinigen dem Algorithmus *Verschmelzen* zwar einen kleinen Laufzeitvorteil gegenüber dem Algorithmus *Erweitern*, können aber noch nicht hundertprozentig überzeugen. Seine wahre Stärke spielt der Algorithmus *Verschmelzen* erst bei starken Nebenbedingungen aus. Deshalb betrachten wir als nächstes die Konstruktion von ganzzahligen Vierecken in semi-allgemeiner Lage.

diam	Algorithmus <i>Erweitern</i>	Algorithmus <i>Verschmelzen</i>
25	0,1 s	0,01 s
50	0,7 s	0,01 s
100	6,2 s	0,04 s
200	94,2 s	0,13 s
400	1.490,0 s	0,43 s

Tabelle B.2: Erweitern vs. Verschmelzen - Konstruktion ganzzahliger Vierecke in semi-allgemeiner Lage.

Der drastische Unterschied zwischen beiden Algorithmen liegt hauptsächlich daran, dass wir nur beim ordnungstreu Erzeugen durch Verschmelzen Satz 2.4.1 über die Charakteristik einer planaren Punktmenge benutzen können.

Bei der Konstruktion ganzzahliger Simplexes beträgt der Laufzeitunterschied für eine gegebene Dimension  $m$  jeweils einen konstanten Faktor, siehe Tabelle B.1. Dies ist zum einen dadurch begründet, dass die Auswertung von Lemma 2.1.4 um einen konstanten Faktor schneller geht als ein Test der Einbettbarkeit mit Hilfe von Algorithmus 2.3.2. Zum anderen würde man beim Ausfüllen der letzten Spalte bei der ordnungstreu Erzeugung durch Erweiterung häufiger 2.1.2 verletzen als beim Verschmelzen.

## B.2 Punktmengen mit $n - 1$ kollinearen Punkten

In Abschnitt 5.2 waren wir daran interessiert ganzzahlige planare Punktmengen mit  $n - 1$  kollinearen Punkten zu konstruieren. Hierzu durchlaufen wir mit Algorithmus 5.2.2 alle Dreiecke mit gegebenem Durchmesser  $d$ . Bei jedem Dreieck und bei jeder der drei Seiten des Dreiecks testen wir, wie viele und vor allem welche Punkte wir in die Seite einfügen können, so dass die entstehende Punktmenge ganzzahlig ist.

Für diesen Test steht uns zum einen Algorithmus 5.2.3, mit einer theoretischen Komplexität von  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$ , (siehe Satz 4.3.2), für eine geeignete Konstante  $c$

(siehe Satz 4.3.2), zur Verfügung. Die andere Möglichkeit ist, einfach alle Punkte auf der Seite  $\overline{CB}$ , siehe Abbildung 5.4, darauf zu testen, ob sie einen ganzzahligen Abstand zum Punkt  $A$  besitzen. Diesen Algorithmus mit der Komplexität  $O(d)$  wollen wir den *trivialen* Algorithmus nennen.

In Tabelle B.3 vergleichen wir die Laufzeit dieser beiden Algorithmen, wobei wir sie jeweils auf alle ganzzahligen Dreiecke eines gegebenen Durchmessers anwenden. Da die Laufzeit von Algorithmus 5.2.3 im Gegensatz zum trivialen Algorithmus von der Anzahl der möglichen Punkte auf der Seite  $\overline{CB}$  abhängt, wählen wir in Tabelle B.3 immer mal wieder Durchmesser, die zu Punktmengen mit vielen Punkten führen, siehe die Tabellen 5.1 und 5.2.

diam	Algorithmus 5.2.3	trivialer Algorithmus
244	2,8 s	1,1 s
250	2,7 s	1,1 s
494	14,1 s	5,5 s
500	12,4 s	6,3 s
750	32,6 s	19,8 s
754	40,4 s	19,7 s
1000	65,7 s	45,9 s
1026	70,9 s	49,0 s
1500	173,7 s	152,4 s
1514	272,4 s	157,9 s
2494	837,3 s	678,1 s
2500	661,8 s	686,3 s
2993	1.556,4 s	1.167,7 s
3000	920,0 s	1.196,0 s
3465	1.237,0 s	1.835,8 s
3500	1.361,5 s	1.884,9 s

Tabelle B.3: Algorithmus 5.2.3 vs. trivialer Algorithmus.

Wir möchten noch kurz erwähnen, wie man Algorithmus 5.2.3 wirklich mit der Laufzeit  $\left(d^{\frac{c}{\log \log}}\right)$  implementieren kann. Die kritische Stelle ist die Schleife, in der die Teiler einer  $O(d^2)$  großen Zahl  $f$  durchlaufen werden sollen. Alle Zahlen zu durchlaufen und zu testen, ob sie Teiler von  $f$  sind wäre zu langsam. In einem Vorbereitungsschritt berechnen wir die Primfaktorzerlegungen aller Zahlen kleiner gleich  $3d$ , und speichern sie als Listen von Paaren aus je einer Primzahl  $p_i$  und dem zugehörigem Exponenten  $e_i$ . Hierbei sollen die einzelnen Listen nach

der Größe der vorkommenden Primzahlen sortiert sein. Die Berechnung der Primfaktorzerlegung eines Produkts oder eines Quotienten von  $a$  und  $b$  ist nun leicht mittels eines gleichzeitigen Durchlaufs durch die Primfaktorlisten von  $a$  und  $b$  zu verwirklichen. Somit kann man die Teiler von  $f$  durchlaufen, indem man alle Tupel der Form  $(e'_0, \dots, e'_{r-1})$  mit  $0 \leq e'_i \leq e_i$  durchläuft und den Teiler  $t$  durch

$$t = \prod_{i=0}^{r-1} p_i^{e'_i} \text{ berechnet.}$$

# C Anzahlen und komplette Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

In diesem Kapitel geben wir ausführliche Tabellen über Anzahlen von ganzzahligen Punktmengen an bzw. listen sie bis zu einem gewissen Durchmesser vollständig auf. Diese Daten können z.B. genutzt werden, um mögliche eigene Programme zur Erzeugung ganzzahliger Punktmengen auf systematische Fehler zu überprüfen. Zum Teil werden auch ähnliche Tabellierungen korrigiert.

## C.1 Ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage

In diesem Abschnitt geben wir in den folgenden Tabellen die primitiven ganzzahligen Fünfecke in allgemeiner Lage mit einem Durchmesser von höchstens 320 an. Wir nehmen dabei Bezug auf eine entsprechende Tabelle aus [87]. Bei einem Vergleich unserer Daten mit den dort angegeben haben wir festgestellt, dass in der Tabelle aus [87] fünf ganzzahlige Fünfecke fehlen. Im Anschluss an unsere Auflistung geben wir Koordinatendarstellungen für die fehlenden fünf Beispiele an, um zu belegen, dass unsere Auflistung vollständig ist und unsere Konstruktionsprogramme, zumindest für diesen Fall, keine systematischen Fehler enthalten.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	$\text{char}(\mathcal{P})$
73	64	35	26	39	42	63	51	42	39	55
78	65	56	50	65	34	32	33	65	34	1
79	68	51	33	22	32	64	34	46	48	15
79	65	58	26	56	39	57	73	41	48	165
79	76	46	37	45	37	46	58	41	27	770
80	70	47	29	46	55	53	75	57	24	91

Tabelle C.1: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 1.

206 Anhang C. Anzahlen und Aufzählungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
83	65	51	34	60	34	51	38	57	25	154
88	85	73	41	23	21	51	37	56	33	195
102	81	76	45	33	78	63	85	54	41	2
109	95	82	29	36	29	82	23	74	57	770
112	112	104	84	26	96	68	73	49	32	55
114	107	68	49	26	68	68	49	68	51	55
116	104	85	65	44	39	69	61	41	60	42
118	115	88	85	23	102	47	83	60	107	273
119	78	64	57	76	57	64	38	60	23	15
120	100	78	65	60	54	57	78	45	39	14
120	112	104	84	32	49	39	73	49	32	55
123	121	86	41	68	41	86	53	102	55	910
124	120	99	51	76	115	77	51	99	102	21
124	104	85	60	60	41	104	61	116	65	42
125	107	95	40	57	95	95	40	95	99	91
125	125	107	95	75	57	95	24	40	40	91
125	124	120	93	51	115	68	68	35	51	429
126	121	44	44	65	110	86	85	99	56	2
130	114	76	41	68	102	93	50	95	75	154
135	107	72	49	47	93	89	49	72	61	1.235
136	116	95	49	60	49	95	31	95	66	13
141	114	107	73	57	38	94	59	47	76	30.030
143	136	117	99	29	29	88	23	103	81	35
144	136	108	88	112	42	76	119	62	64	455
145	129	99	86	64	116	66	60	86	104	7
149	132	55	50	119	102	101	85	118	35	6
152	145	143	53	88	48	110	128	132	92	7
152	151	37	24	17	141	136	136	133	17	715
153	136	72	64	47	99	121	104	88	88	35
153	129	120	97	48	123	74	141	34	133	715
154	148	102	85	50	80	85	50	105	85	1
154	152	114	101	46	92	57	58	77	85	390
155	142	77	45	77	92	140	117	107	88	17
157	147	133	95	80	48	63	112	73	57	3
161	157	144	18	18	25	157	37	155	138	11

Tabelle C.2: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 2.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
161	119	64	57	70	113	106	57	64	23	15
161	153	92	71	76	71	92	95	88	33	65
165	154	136	80	143	37	91	150	102	72	1
165	162	152	108	57	67	63	118	90	52	2
169	156	96	95	104	95	96	144	64	89	3.927
170	160	96	95	78	130	78	80	75	65	231
170	158	127	87	68	87	127	131	85	136	2.002
174	156	104	60	60	86	129	104	99	86	7
174	170	60	44	64	129	143	145	129	64	7
174	170	143	129	64	44	60	92	44	64	7
174	164	108	67	68	108	136	64	153	119	455
174	173	128	59	4	62	128	59	128	99	455
174	158	131	68	68	85	158	127	170	87	2.002
174	158	131	85	68	85	131	127	87	136	2.002
177	171	155	141	120	43	45	79	87	16	91
180	128	114	68	92	69	113	46	84	52	15
180	172	64	54	22	164	129	164	124	50	119
187	143	121	99	99	88	104	121	47	88	35
188	171	136	85	59	124	117	155	124	59	77
191	143	132	95	114	73	104	121	62	73	105
191	152	133	85	57	124	114	131	93	62	858
195	195	140	99	150	85	168	85	102	85	1
195	170	160	102	40	95	132	110	128	62	15
198	153	140	88	117	82	130	43	143	108	2
200	192	160	55	92	60	170	128	143	145	7
200	171	137	119	49	77	149	35	152	135	299
201	196	154	91	59	85	140	46	161	135	38
201	196	180	154	59	189	85	136	46	106	38
201	167	143	74	64	74	143	90	97	107	95
202	201	154	123	97	84	91	157	84	97	510
203	198	124	94	61	159	143	118	116	38	170
204	188	151	144	128	157	138	51	46	20	15.015
209	205	171	126	76	76	85	136	89	81	2
209	136	111	100	95	100	111	65	44	31	21
209	201	120	82	58	199	159	159	133	58	78

Tabelle C.3: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 3.

208 Anhang C. Anzahlen und Aufzählungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
209	191	143	132	62	88	121	114	73	121	105
214	193	148	138	69	138	148	171	89	190	1.785
216	168	155	135	120	115	117	15	159	145	11
218	198	114	74	160	143	192	87	128	55	7
219	196	182	147	65	128	96	168	119	56	55
219	180	136	85	171	85	136	124	155	59	77
221	169	136	104	65	153	143	143	117	40	35
221	187	143	104	47	104	143	99	99	117	35
221	205	146	114	36	81	159	81	129	120	77
221	202	162	71	71	97	202	136	207	119	2.090
222	185	153	114	185	75	120	130	185	75	1
222	220	169	128	52	68	134	101	108	121	95
225	193	149	94	58	94	149	100	105	107	3.094
226	224	219	189	54	84	40	135	49	96	143
230	184	157	114	114	123	184	171	202	67	1.870
231	224	146	64	169	91	185	130	224	114	3
232	208	193	130	120	87	122	177	82	133	42
234	195	170	150	195	80	96	125	195	80	1
234	225	117	102	81	135	140	162	157	19	14
234	189	180	136	81	174	130	201	59	196	38
237	192	132	128	165	138	115	72	160	92	7
237	231	172	94	78	169	169	221	143	182	30
237	224	187	149	29	104	143	117	117	171	35
238	218	213	114	120	46	128	76	152	114	15
239	205	190	148	106	149	189	45	97	58	770
240	201	165	160	66	90	200	96	209	115	7
240	224	168	168	64	192	78	136	98	171	55
240	214	96	45	58	192	201	190	182	57	231
241	234	164	136	175	85	135	190	110	100	2
242	240	192	167	158	70	120	192	83	125	39
242	174	171	154	128	73	116	105	148	53	255
244	205	174	161	129	110	85	41	124	85	42
244	180	155	124	104	91	144	85	136	59	77
245	226	180	161	107	191	98	98	75	107	286
246	170	99	94	128	150	160	82	128	50	39

Tabelle C.4: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 4.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	$\text{char}(\mathcal{P})$
246	205	170	99	82	128	150	154	128	82	39
246	235	172	98	89	154	188	87	213	186	2.470
247	237	215	152	88	33	147	77	95	117	3
247	204	164	161	61	122	96	122	85	38	15
247	204	176	161	61	72	96	38	85	48	15
247	247	68	58	78	213	195	195	207	78	22
247	232	209	136	99	171	117	243	144	117	35
247	232	216	136	99	221	117	128	144	208	35
247	214	163	111	111	150	214	201	235	76	231
247	244	189	162	117	96	86	183	116	78	935
248	240	102	77	152	154	221	198	173	115	21
248	238	230	184	90	28	156	107	84	161	55
249	152	136	125	145	125	136	120	43	79	91
249	207	205	125	120	79	136	43	152	125	91
249	221	204	166	50	75	85	95	75	50	154
250	228	162	135	198	92	165	150	99	81	14
250	248	220	116	78	195	204	126	168	105	399
252	238	230	204	49	68	51	107	68	49	55
253	243	187	153	82	72	238	70	180	170	2
253	238	89	51	185	228	206	157	221	98	10
253	238	161	138	185	138	161	247	104	161	10
253	247	225	165	150	100	110	230	100	150	21
253	240	186	89	53	89	186	114	161	145	91
253	243	171	143	190	88	124	198	134	76	1.190
255	192	144	122	153	114	152	96	170	76	15
256	212	209	160	52	113	104	69	78	126	15
259	231	189	94	50	98	225	108	215	133	26
259	259	145	69	210	172	250	118	200	98	286
259	254	235	145	37	186	124	151	111	130	1.122
260	247	169	130	195	117	150	234	135	117	14
260	256	252	204	84	17	64	68	68	51	55
260	225	219	203	100	50	174	60	76	128	231
261	240	198	162	221	81	153	238	102	144	35
261	246	162	74	102	162	190	96	192	128	455
262	261	204	158	127	158	204	255	131	254	2.002

Tabelle C.5: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 5.

210 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
263	224	182	169	91	84	192	98	107	156	55
263	257	183	152	58	82	155	80	123	83	3.003
264	221	166	85	85	130	221	145	206	99	1.330
267	225	189	125	168	120	147	216	175	71	11
268	261	196	117	49	184	161	215	168	103	5
273	259	200	177	168	213	135	81	93	87	11
273	259	200	184	168	213	93	81	135	144	11
273	247	223	123	145	71	165	176	200	104	51
274	252	243	154	26	77	248	81	238	181	230
274	223	158	96	79	192	202	191	137	166	95.095
276	253	169	98	161	133	242	98	169	111	10
276	267	214	200	57	70	124	97	83	114	22
276	267	133	124	159	241	160	160	209	159	91
277	221	147	136	186	136	147	178	123	59	570
279	249	154	127	120	127	154	143	134	43	85
279	205	198	171	76	171	198	143	134	243	1.190
279	261	224	131	144	85	160	191	136	135	1.463
280	261	207	163	135	235	135	120	105	125	11
280	258	196	133	122	124	237	194	161	217	4.290
281	265	208	193	21	177	104	177	97	89	555
282	272	168	165	70	198	177	232	133	213	13
282	171	169	143	117	143	169	40	104	136	35
283	268	230	226	65	163	69	102	46	104	2.310
284	280	179	140	158	175	192	102	266	193	319
284	268	181	158	72	257	134	199	146	207	10.010
285	250	118	116	185	169	247	192	146	130	231
286	209	164	133	105	138	159	117	114	33	10
286	231	195	133	205	169	159	276	196	88	10
286	253	236	170	231	58	156	233	117	134	30
286	274	155	118	208	241	184	129	168	87	30
288	272	204	78	65	96	219	119	196	147	55
288	230	162	133	98	138	157	128	123	35	143
288	235	201	111	163	111	201	76	214	150	231
288	263	201	163	65	111	235	64	250	214	231
289	243	168	56	73	219	243	219	191	168	35

Tabelle C.6: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 6.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	$\text{char}(\mathcal{P})$
289	273	168	56	33	219	243	189	231	168	35
291	260	222	108	57	81	201	90	160	150	11
291	247	237	156	148	66	177	94	221	153	70
291	247	182	179	146	143	130	201	84	123	510
294	254	224	182	128	98	119	170	93	98	55
294	265	244	225	169	230	141	69	50	91	66
294	256	185	140	242	116	196	171	284	130	255
296	208	204	185	120	100	185	100	185	95	1
296	287	177	133	121	187	201	121	245	184	195
296	287	177	168	121	187	184	121	245	201	195
296	287	184	133	121	168	201	107	245	177	195
296	281	256	256	48	152	48	185	30	160	231
296	251	142	112	53	210	200	185	165	46	741
299	299	293	185	207	249	264	48	141	117	595
301	252	243	124	133	184	187	261	184	133	65
302	288	138	98	70	197	225	162	230	128	143
303	274	175	153	145	208	156	111	185	148	1
303	256	244	198	143	61	126	108	74	68	95
303	288	154	61	135	229	244	286	229	135	95
303	193	171	138	190	138	171	148	89	69	1.785
303	248	158	134	89	155	239	134	158	156	39.270
304	277	240	86	69	272	250	205	209	158	91
304	265	188	147	56	154	242	147	188	209	255
304	261	176	160	85	180	256	190	179	236	455
304	279	261	160	103	85	256	162	289	179	455
305	204	190	135	171	135	190	54	171	125	14
305	280	221	108	135	266	203	149	212	217	110
306	243	228	162	99	234	156	255	135	130	2
306	295	234	189	209	228	135	69	146	123	2
306	254	224	182	65	170	128	170	93	98	55
306	294	224	182	93	170	128	98	119	98	55
306	294	254	224	93	65	170	128	98	170	55
306	282	172	155	192	244	164	124	148	102	15.015
307	289	238	192	84	184	161	238	107	230	55
307	276	174	162	97	241	161	162	174	192	935

Tabelle C.7: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 7.

212 Anhang C. Anzahlen und Aufzählungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
307	255	205	123	86	174	200	188	174	86	966
307	218	208	128	100	207	195	118	130	192	3.927
308	240	240	212	187	128	128	60	77	32	7
308	282	177	70	70	155	282	165	272	133	13
308	282	268	177	70	48	155	38	165	133	13
309	279	190	161	60	161	190	109	190	169	22
309	305	231	207	36	162	132	186	112	186	65
310	264	247	200	74	193	170	217	176	57	21
310	279	234	185	62	128	134	150	128	62	119
310	309	283	225	41	93	95	130	114	68	154
312	271	207	111	209	111	207	208	178	114	1.785
312	244	220	215	88	118	202	114	116	205	2.415
312	309	239	199	93	199	239	268	178	310	39.270
315	279	180	125	108	255	200	165	196	185	26
315	294	244	237	147	127	120	230	69	169	66
316	259	239	168	225	85	202	160	98	118	47
316	300	261	215	224	73	141	249	125	136	91
316	261	255	127	127	131	261	204	262	158	2.002
316	261	255	131	127	131	255	204	158	254	2.002
316	312	239	93	268	93	239	199	309	178	39.270
317	287	244	138	100	161	205	69	215	206	286
318	280	265	175	46	265	193	265	175	120	1
319	273	221	221	130	252	100	130	130	208	1
319	300	273	225	41	130	104	153	105	78	1
319	308	186	98	165	217	255	130	294	200	6
319	261	242	198	232	99	187	247	81	176	35
319	261	253	242	232	72	99	176	247	81	35
319	288	198	121	143	169	208	234	169	143	35
319	288	208	169	143	121	198	176	121	143	35
319	306	288	242	97	79	99	162	68	130	35
319	312	261	253	91	232	72	153	79	176	35
319	289	170	155	190	159	166	221	204	25	42
319	265	230	94	144	219	237	285	219	144	91
319	291	265	94	50	144	237	166	203	219	91
319	291	265	219	50	144	230	166	240	94	91

Tabelle C.8: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 8.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{3,4}$	char( $\mathcal{P}$ )
319	253	190	124	198	171	205	243	143	134	1.190
319	279	198	171	88	253	190	171	198	243	1.190
319	279	205	171	88	124	190	76	198	134	1.190
319	279	205	198	88	124	253	76	171	143	1.190
320	265	256	184	165	96	144	201	111	120	7
320	265	249	218	65	79	138	64	122	62	15
320	285	138	79	155	218	249	252	244	62	15
320	316	298	125	12	30	205	36	199	188	39

Tabelle C.9: Primitive ganzzahlige Fünfecke in allgemeiner Lage - Teil 9.

Wie bereits am Anfang dieses Abschnitts erwähnt, folgen nun Koordinatendarstellungen der 5 ganzzahligen Fünfecke in allgemeiner Lage, die in der Auflistung aus [87] fehlen.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 125 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{953}{10} \\ \frac{51}{10}\sqrt{91} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{125}{2} \\ \frac{15}{2}\sqrt{91} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{164}{5} \\ -\frac{12}{5}\sqrt{91} \end{pmatrix} \right], \\ & \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 152 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2851}{19} \\ \frac{12}{19}\sqrt{715} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{287}{19} \\ \frac{24}{19}\sqrt{715} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{324}{19} \\ \frac{12}{19}\sqrt{715} \end{pmatrix} \right], \\ & \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 157 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{19929}{157} \\ \frac{6720}{157}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{20017}{157} \\ -\frac{3432}{157}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{29705}{314} \\ -\frac{314}{314}\sqrt{3} \end{pmatrix} \right], \\ & \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 237 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{10968}{79} \\ \frac{3960}{79}\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{18183}{158} \\ \frac{3861}{158}\sqrt{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{9888}{79} \\ -\frac{800}{79}\sqrt{7} \end{pmatrix} \right], \\ & \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 319 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2832}{11} \\ \frac{240}{11}\sqrt{35} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2248}{11} \\ -\frac{72}{11}\sqrt{35} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1571}{11} \\ \frac{168}{11}\sqrt{35} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Abstandsmatrizen lauten

$$\begin{pmatrix} 0 & 125 & 107 & 95 & 40 \\ 125 & 0 & 57 & 95 & 95 \\ 107 & 57 & 0 & 40 & 95 \\ 95 & 95 & 40 & 0 & 99 \\ 40 & 95 & 95 & 99 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 152 & 151 & 37 & 24 \\ 152 & 0 & 17 & 141 & 136 \\ 151 & 17 & 0 & 136 & 133 \\ 37 & 141 & 136 & 0 & 17 \\ 24 & 136 & 133 & 17 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 157 & 147 & 133 & 95 \\ 157 & 0 & 80 & 48 & 63 \\ 147 & 80 & 0 & 112 & 73 \\ 133 & 48 & 112 & 0 & 57 \\ 95 & 63 & 73 & 57 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 237 & 192 & 132 & 128 \\ 237 & 0 & 165 & 138 & 115 \\ 192 & 165 & 0 & 72 & 160 \\ 132 & 138 & 72 & 0 & 92 \\ 128 & 115 & 160 & 92 & 0 \end{pmatrix}$$

und  $\begin{pmatrix} 0 & 319 & 288 & 208 & 169 \\ 319 & 0 & 143 & 121 & 198 \\ 288 & 143 & 0 & 176 & 121 \\ 208 & 121 & 176 & 0 & 143 \\ 169 & 198 & 121 & 143 & 0 \end{pmatrix}.$

## C.2 Anzahl ganzzahliger Vier- und Fünfecke

In Kapitel 10 haben wir Anzahlen  $\alpha(d, m)$  von ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Simplexen mit Durchmesser  $d$  betrachtet. Da diese Anzahlen nicht nur für Simplexe interessant sind, definieren wir  $\beta(d, m, n)$  als die Anzahl der ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmengen mit Durchmesser  $d$  bestehend aus  $n$  Punkten. Entsprechend definieren wir  $\bar{\beta}(d, m, n)$  bzw.  $\dot{\beta}(d, m, n)$  für ganzzahlige Punktmengen in semi-allgemeiner Lage bzw. allgemeiner Lage. Summieren wir diese Werte für alle  $d' \leq d$ , so erhalten wir die Funktionen  $\beta_{\leq}(d, m, n)$ ,  $\bar{\beta}_{\leq}(d, m, n)$  und  $\dot{\beta}_{\leq}(d, m, n)$ . In diesem Abschnitt wollen wir ganz speziell  $\bar{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$ ,  $\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$  und  $\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 5)$  betrachten. In Tabelle C.10 geben wir zunächst ein paar spezielle Werte an, die zum Teil Ergebnisse aus [87] korrigieren.

$d$	$\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$	$\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 5)$	$d$	$\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$	$\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 5)$
10	2	0	120	5.417	17
20	27	0	140	8.122	27
30	100	0	160	11.651	46
40	258	0	180	15.500	66
50	438	0	200	19.881	75
60	763	0	250	34.994	158
80	1.819	6	300	54.739	236
100	3.240	8	320	64.076	314

Tabelle C.10: Anzahl von ganzzahligen Vier- und Fünfecken in allgemeiner Lage.

Um einen ungefähren Eindruck von der Größenordnung von  $\bar{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$  und

$\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$  zu bekommen, geben wir die Werte für  $d \leq 6.000$  in Abbildung C.1 graphisch an.

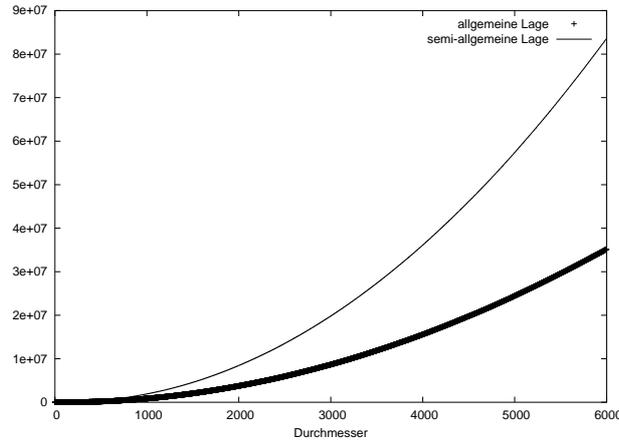


Abbildung C.1: Anzahl  $\bar{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$ , der ganzzahligen Vierecke in semi-allgemeiner Lage, und  $\dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4)$ , der ganzzahligen Vierecke in allgemeiner Lage, für  $d \leq 6.000$ .

Wir möchten erwähnen, dass in diesem Bereich

$$\bar{\beta}_{\leq}(d, 2, 4) \approx d^{2,097} \quad \text{und} \quad \dot{\beta}_{\leq}(d, 2, 4) \approx 0,98 d^2$$

gelten.

In Abschnitt 5.3 hatten wir vorgeschlagen die maximale Anzahl der ganzzahligen Vierecke, die ein gemeinsames Dreieck besitzen, näher zu betrachten, um eine gute untere Schranke für  $d(2, n)$  zu beweisen. Diesen Tipp wollen wir nun empirisch belegen. Hierzu definieren wir

$$\Upsilon(d) = \max_{\Delta} |\{\mathcal{P} \mid \text{diam}(\mathcal{P}) = d, \downarrow \mathcal{P} = \Delta, |\mathcal{P}| = 4\}|,$$

wobei  $\Delta$  alle kanonischen Dreiecke durchlaufen und  $\mathcal{P}$  ebenfalls kanonisch sein soll. Da wir die Anzahl der Punkte auf den Seiten von  $\Delta$ , die zu den drei Ecken ganzzahlige Abstände besitzen, nach Abschnitt 5.2 durch  $O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  abschätzen können, fordern wir von  $\mathcal{P}$ , dass es in semi-allgemeiner Lage bzw. allgemeiner Lage liegen soll und bezeichnen die entsprechende Funktion als  $\bar{\Upsilon}(d)$  bzw.  $\dot{\Upsilon}(d)$ . In Abbildung C.2 geben wir die Werte von  $\bar{\Upsilon}(d)$  und in Abbildung C.3 die von

$\hat{Y}(d)$  jeweils für  $d \leq 15.000$  an. Verglichen mit Abbildung 4.2 sehen sie schon weitaus vielversprechender aus. Wir sehen, dass  $\bar{Y}(d)$ , ähnlich wie  $\tilde{\psi}$ , eine sehr

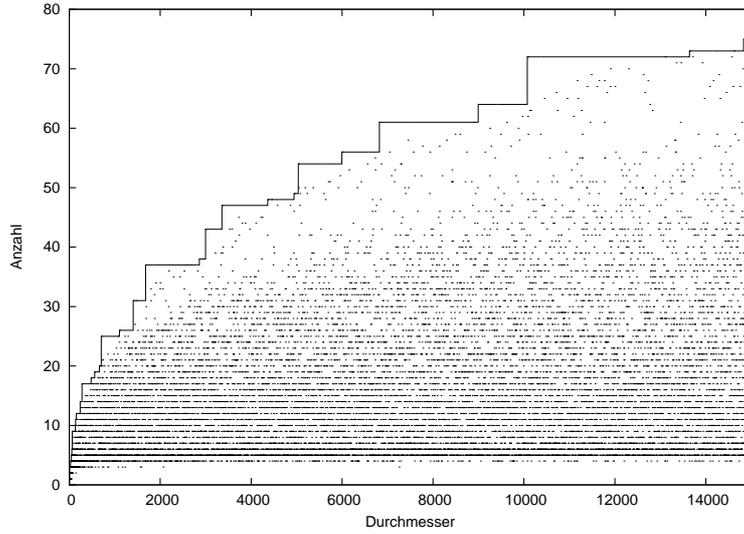


Abbildung C.2:  $\bar{Y}(d)$  für  $d \leq 15.000$ .

unregelmäßige Funktion ist. Wir betrachten nun die beste streng monoton wachsende obere Schranke

$$\hat{Y}(d) = \max_{d' \leq d} \bar{Y}(d').$$

Da wir gerne  $d(2, n) \in o(d^{c \log \log d})$  beweisen würden, haben wir natürlich die Hoffnung, dass  $\hat{Y} \in O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  gilt (siehe Lemma 5.3.3 und Satz 5.2.1). Um diese vermutete Abschätzung für  $\hat{Y}$  zu motivieren, betrachten wir das Maximum  $\Xi(d)$  der Anzahl der Punkte einer planaren ganzzahligen Punktmenge mit Durchmesser kleiner gleich  $d$ , bei denen alle bis auf einen Punkt auf einer Gerade liegen. In Tabelle C.11 vergleichen wir, jeweils an den Stellen, an denen  $\hat{Y}(d)$  springt, die bekannten Werte von  $\hat{Y}(d)$  mit denen von  $\Xi(d)$ . Da wir in Abschnitt 5.2 gezeigt haben, dass  $\Xi(d) \in O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right)$  gilt, formulieren wir aufgrund dieser empirischen Daten unsere Hoffnung als Vermutung.

**C.2.1 Vermutung**

$$\hat{Y}(d) \in O\left(d^{\frac{c}{\log \log d}}\right).$$

Für weitere Informationen zu ganzzahligen bzw. rationalen Vierecken und Polygonen verweisen wir auf die Literatur [2, 3, 4, 9, 13, 14, 32, 33, 34, 88, 100, 124, 157, 158].

$d$	$\hat{\Upsilon}(d)$	$\Xi(d)$	$d$	$\hat{\Upsilon}(d)$	$\Xi(d)$	$d$	$\hat{\Upsilon}(d)$	$\Xi(d)$
1	0	3	240	14	22	3.360	47	77
4	1	4	280	17	24	4.368	48	84
8	3	5	480	18	31	4.947	49	89
30	4	9	560	19	34	5.040	54	$\geq 90$
48	5	10	663	20	37	6.000	56	$\geq 98$
56	6	11	704	25	39	6.825	61	$\geq 103$
64	8	12	1.105	26	45	9.000	64	$\geq 116$
65	9	12	1.408	31	50	10.080	72	$\geq 123$
135	10	17	1.680	37	56	13.650	73	$\geq 141$
140	11	17	2.863	38	72	14.841	75	$\geq 146$
156	12	18	3.000	43	74			

Tabelle C.11: Vergleich von  $\hat{\Upsilon}(d)$  und  $\Xi(d)$ .

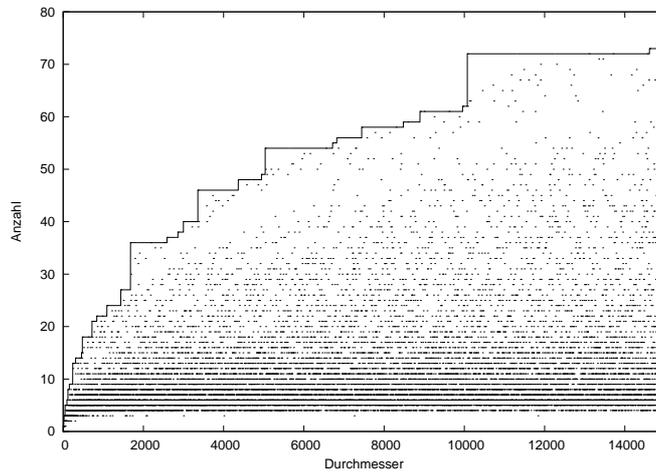


Abbildung C.3:  $\hat{\Upsilon}(d)$  für  $d \leq 15.000$ .

### C.3 Ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage

Bei der Konstruktion ganzzahliger Sechsecke in allgemeiner Lage mit einem Durchmesser kleiner gleich 15.000 hat sich herausgestellt, dass sie sehr selten sind. Deshalb geben wir in den folgenden Tabellen die primitiven ganzzahligen Sechsecke in allgemeiner Lage vollständig an.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
174	158	131	85	68	68	85	131	158	127	87	170	136	87	127	2002
316	261	255	131	127	127	131	255	261	204	158	262	254	158	204	2002
319	279	205	198	171	88	124	253	190	76	171	198	143	134	243	1190
370	271	209	208	178	209	271	178	208	312	207	111	111	207	114	1785
580	523	367	243	113	113	243	367	523	244	290	486	226	290	244	49742
590	342	325	285	256	256	285	325	342	37	141	130	160	141	37	231
645	469	348	303	286	286	303	348	469	247	194	433	99	194	247	690
650	619	404	314	159	159	314	404	619	377	325	628	318	325	377	167314
656	529	463	207	145	145	207	463	529	142	328	414	290	328	142	29393
713	713	645	392	323	713	392	323	645	323	645	392	407	407	407	3
818	725	632	386	327	327	386	632	725	587	409	772	654	409	587	969969
878	841	519	473	219	219	473	519	841	562	402	860	464	402	562	146965
884	683	659	255	233	233	255	659	683	208	442	510	466	442	208	144739
954	881	640	446	277	277	446	640	881	569	477	892	554	477	569	1019711
1046	870	729	367	244	244	367	729	870	339	523	734	488	523	339	49742
1054	841	741	493	345	345	493	741	841	152	696	736	688	696	152	1155
1058	984	621	463	142	142	463	621	984	435	529	926	284	529	435	29393
1120	959	952	561	232	561	232	959	952	637	1102	731	731	816	637	115
1158	1133	915	477	179	179	477	915	1133	332	964	1136	888	964	332	146965
1221	1040	768	603	391	391	603	768	1040	688	473	989	645	473	688	7
1238	975	942	404	377	377	404	942	975	477	619	808	754	619	477	167314
1258	1024	999	703	266	266	703	999	1024	697	737	810	1184	737	697	455
1366	1326	765	659	208	208	659	765	1326	699	683	1318	416	683	699	144739
1386	1122	891	836	684	408	765	850	810	363	858	462	935	225	760	2
1444	1026	920	828	685	950	540	920	913	790	1170	1027	460	395	169	14
1450	1227	1158	632	587	587	632	1158	1227	981	725	1264	1174	725	981	969969
1585	1435	1220	690	656	500	805	1025	993	345	1075	1003	1030	940	98	286
1614	1252	1223	491	466	466	491	1223	1252	515	807	982	932	807	515	15249
1762	1431	1338	640	569	569	640	1338	1431	831	881	1280	1138	881	831	1019711

Tabelle C.12: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 1.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
1779	1646	1125	696	205	205	696	1125	1646	629	970	1529	579	970	629	966
1807	1615	1025	1025	902	692	1012	912	1591	600	1100	1767	820	1353	697	21
1814	1583	1312	774	581	581	774	1312	1583	1025	907	1548	1162	907	1025	70499
1859	1768	1521	1521	1287	377	520	377	1144	253	299	1339	207	1224	1053	35
1870	1241	1200	850	663	663	850	1200	1241	263	759	680	910	759	263	2109
1885	1242	1026	1007	989	1007	989	1242	1026	972	1249	299	299	713	972	770
1886	1886	1392	1246	841	828	610	1200	1275	610	732	1623	610	1015	1275	1
1946	1717	1420	1278	1102	621	918	676	1656	1215	575	1125	710	1710	1100	14
2010	1898	1462	1240	853	1568	1568	910	1183	448	1022	1617	798	1295	637	3
2058	1708	1519	889	466	466	889	1519	1708	427	1347	1426	1400	1347	427	10846
2061	1530	1139	1000	855	855	1000	1139	1530	425	970	1377	589	970	425	1001
2080	1395	1378	1118	1075	1075	1118	1378	1395	1343	347	1370	1404	347	1343	77
2261	1547	1274	1054	1015	1054	1015	1547	1274	819	1377	612	612	441	819	110
2366	2236	1495	1131	598	598	1131	1495	2236	779	1633	2262	1196	1633	779	22
2389	1537	1488	1352	1139	1352	1139	1537	1488	281	1635	1384	1384	1147	281	7315
2475	2375	1525	1343	793	650	1250	1948	1748	900	1518	1782	702	1098	1320	14
2504	2421	1473	1223	515	515	1223	1473	2421	1398	1252	2446	1030	1252	1398	15249
2524	2430	1809	1595	166	166	1595	1809	2430	1431	1825	2344	2294	1825	1431	3458
2542	1681	1488	1426	943	943	1426	1488	1681	529	1105	984	1426	1105	529	385
2552	2231	2120	1840	752	365	1152	1752	1896	851	1679	1615	2280	1752	1152	91
2552	2328	2231	2120	752	400	365	1152	1896	485	1328	1624	851	1615	1752	91
2600	2072	1840	1215	1080	1152	1800	1475	1600	2232	893	1472	1625	1000	675	11
2678	2312	1921	1099	810	810	1099	1921	2312	1391	1339	2198	1620	1339	1391	1121285
2829	2565	2312	1656	1025	2046	605	1725	1886	2123	981	1700	1520	1457	721	21
2875	1665	1495	1480	1240	1240	1480	1495	1665	272	629	595	765	629	272	11
2907	1729	1638	1305	1292	1292	1305	1638	1729	637	434	931	567	434	637	110
2924	2279	2091	1763	935	1763	935	2279	2091	1748	2838	1394	1394	1394	1748	910
2993	2091	2074	1066	1017	1066	1017	2091	2074	833	1435	1092	1092	1309	833	1
3120	2410	2319	970	879	970	879	2410	2319	889	1940	1541	1541	1602	889	133
3166	2721	2322	1312	1025	1025	1312	2322	2721	1743	1583	2624	2050	1583	1743	70499
3206	2879	2410	1524	1223	1223	1524	2410	2879	2251	1603	3048	2446	1603	2251	4370938
3328	2963	2075	1323	509	509	1323	2075	2963	1118	1664	2646	1018	1664	1118	438311
3362	3286	2439	2304	1769	288	926	1334	2006	902	1138	1822	765	1280	685	455
3520	3293	2960	2336	1850	477	1200	2336	1850	1443	1885	1517	2704	1850	966	1
3660	3072	2888	2736	2318	1932	848	1599	1708	1336	528	910	874	874	437	15
3680	3392	3043	2530	2150	2288	858	1380	2220	1573	2702	1258	1272	1368	1920	7
3828	3569	2736	2656	2058	2107	1548	1204	2430	1105	1743	1513	688	918	1334	5

Tabelle C.13: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 2.

**220 Anhang C. Anzahlen und Aufzählungen von ganzzahligen Punktmengen**

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
3834	3161	2680	1306	877	877	1306	2680	3161	1129	1917	2612	1754	1917	1129	66095813
3858	3481	2482	1640	839	839	1640	2482	3481	1751	1929	3280	1678	1929	1751	129614485
3872	3392	2702	1573	1258	928	2262	3135	2622	2530	3043	2150	1272	1920	1368	7
3936	3239	2296	1880	1225	1225	1880	2296	3239	1845	1379	2914	1456	1379	1845	187
3946	3485	2924	1778	1401	1401	1778	2924	3485	2521	1973	3556	2802	1973	2521	8256678
3969	3670	3542	3087	3016	1339	1813	1764	1135	488	667	854	469	1098	799	5
3999	3567	3036	2790	1885	1734	3195	1581	3094	1581	897	1972	1734	1159	1525	42
4015	2916	2350	2185	1189	1189	2185	2350	2916	1034	1739	1927	2115	1739	1034	182
4029	3315	2686	1975	846	846	1975	2686	3315	1139	2300	2679	2449	2300	1139	154
4147	3978	3744	3520	3146	1261	1027	1683	1287	2106	598	884	2336	1690	726	35
4181	2921	2794	2370	1425	2370	1425	2921	2794	1905	3289	1696	1696	1481	1905	7
4181	3476	2921	2370	2185	2185	2370	2921	3476	565	3634	4029	3289	3634	565	7
4181	3476	2921	2794	2370	2185	2370	1425	2921	565	2090	3634	1905	3289	1696	7
4181	3780	3626	1517	551	551	1517	3626	3780	1694	3113	3421	3663	3113	1694	2210
4230	2952	2867	1927	1638	1638	1927	2867	2952	1955	1271	2214	2444	1271	1955	77
4248	4216	2773	1829	368	368	1829	2773	4216	1989	2635	4216	2006	2635	1989	77
4255	2869	2756	2461	1426	1426	2461	2756	2869	1863	1530	1557	3033	1530	1863	770
4501	4251	3627	2923	2299	2200	3520	1740	3000	1560	2780	2000	3404	1480	2220	21
4559	3757	3713	2451	2444	836	1034	2278	2773	330	1618	2223	1748	2397	695	70
4580	3676	2977	2061	1032	1032	2061	2977	3676	1035	2375	2860	2290	2375	1035	14
4582	3968	2923	2449	646	646	2449	2923	3968	1845	2511	3366	2844	2511	1845	455
4624	4017	3297	1921	1391	1391	1921	3297	4017	2430	2312	3842	2782	2312	2430	1121285
4640	4225	4000	3588	2704	1665	960	1156	2640	2175	1157	1599	1148	2544	1508	1
4641	4284	3675	3640	2535	1785	2436	1183	2262	861	1148	2703	1435	2610	1625	1
4660	4533	3276	1864	743	743	1864	3276	4533	2223	2941	4526	2588	2941	2223	513590
4664	4400	4389	3239	3025	2024	2585	2755	1749	4301	3999	2585	1160	2024	1424	91
4775	4375	3871	2794	600	600	2794	3871	4375	2954	3281	4025	4773	3281	2954	741
4862	4264	3549	3076	2652	1482	1339	2058	3094	1573	2340	1924	817	2223	2464	10
4888	4731	4056	3168	1989	641	2288	1976	3289	2727	2133	2970	1224	3393	2187	35
4896	3880	3429	2853	1784	1784	2853	3429	3880	3349	1717	3536	3978	1717	3349	168245
4986	4446	3498	1472	690	2880	3441	3542	4416	1119	3182	4224	2426	3393	1058	7
5094	4660	4331	3904	2599	776	776	1870	2590	564	1116	2346	1281	1884	2085	247
5160	4416	3741	3008	2915	2280	1935	2360	2375	3075	1600	2755	1955	890	1315	91
5175	4255	2997	2232	1840	1840	2232	2997	4255	2072	2093	4025	1071	2093	2072	11
5289	5148	4059	3267	2706	3213	1660	2622	2835	2057	4455	4158	2442	2255	627	2
5408	4765	4507	2699	2547	2547	2699	4507	4765	4498	2704	5398	5094	2704	4498	2557166843
5436	4633	4321	4068	2952	2627	2365	2664	2556	442	4181	2911	3749	2471	1620	665

Tabelle C.14: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 3.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
5461	3876	3610	3204	2945	3145	2109	2945	2774	1406	840	3059	874	1805	2261	858
5548	3857	3654	2755	1978	2755	1978	3857	3654	2233	3762	1991	1991	1936	2233	65
5566	5180	3887	3658	3614	846	3703	2184	3108	2893	1578	3306	1841	4459	2772	10
5590	4096	3401	2378	2257	2378	2257	4096	3401	2025	3690	1935	1935	1440	2025	119
5644	4771	3787	2007	1105	1105	2007	3787	4771	1592	2822	4014	2210	2822	1592	1089878
5750	5644	4625	4350	4150	1458	1539	3240	1620	1053	2106	2106	1755	1215	2700	14
5758	4809	4572	2410	2251	2251	2410	4572	4809	3669	2879	4820	4502	2879	3669	4370938
5773	5290	5225	4225	3835	2691	702	2484	2166	2925	1143	3375	2430	1500	2418	14
5825	4953	3550	2725	1598	1598	2725	3550	4953	2783	2332	4499	2475	2332	2783	266
5830	5467	4187	2597	1573	1573	2597	4187	5467	1440	4536	5544	3816	4536	1440	17
5841	5069	4484	4002	3599	1300	3835	1989	2950	4225	1079	2970	3614	1475	2201	14
5875	4407	3525	3350	2068	2068	3350	3525	4407	1302	3337	3589	3575	3337	1302	646
5926	4992	3969	2075	1118	1118	2075	3969	4992	1527	2963	4150	2236	2963	1527	438311
5952	4526	4240	3074	2173	4526	3248	3074	3965	1326	4180	2849	3074	2173	1749	1
6061	5529	5035	4161	3869	950	2736	4370	2208	3154	4560	1702	1786	2544	3358	91
6084	5850	5135	5130	3950	2106	1781	2466	3686	845	4140	2300	3425	1975	4600	14
6085	3706	3535	3250	2483	2483	3250	3535	3706	1053	2196	1665	3015	2196	1053	4466
6097	5725	5251	2738	2356	1058	2430	3375	4995	3136	3007	5041	3105	3375	2430	11
6104	4901	3422	2794	1917	1917	2794	3422	4901	1537	2755	4258	1332	2755	1537	170
6175	5200	3600	3200	2950	2457	3145	3105	4185	3680	2160	2430	2000	3250	1350	11
6237	4687	4392	2709	1946	1946	2709	4392	4687	2695	2494	3551	3789	2494	2695	56810
6253	5402	4186	4097	2067	2775	2665	5250	5200	1360	2775	3625	2665	2665	2050	1
6253	6253	5402	4186	4097	4056	2775	2665	5250	1449	2665	2706	1360	2775	2665	1
6316	4949	4855	2059	1983	1983	2059	4855	4949	2524	3158	4118	3966	3158	2524	22477026
6322	5751	3918	2680	1129	1129	2680	3918	5751	2631	3161	5360	2258	3161	2631	66095813
6489	5459	4738	2668	2227	2668	2227	5459	4738	3399	5633	3266	3266	3565	3399	130
6496	3965	3828	3712	3536	2544	3074	3712	3072	1007	1748	624	754	578	1216	15
6516	5984	4573	2465	2379	3700	2665	4141	4287	1955	4641	3787	2788	2200	1204	1
6542	5473	5350	2848	2769	2769	2848	5350	5473	4567	3271	5696	5538	3271	4567	3870947311
6549	5795	5007	4371	4089	1096	1566	2262	3348	902	1426	2284	708	1998	1410	210
6579	5719	4998	2583	2499	1012	2829	4662	4182	2737	4046	3430	2499	2583	924	390
6685	4393	3745	3430	2674	2674	3430	3745	4393	2520	1095	2865	2625	1095	2520	286
6688	6498	5184	4221	2304	646	3968	2923	4736	3366	2511	4698	1845	4608	2997	455
6698	6698	3961	3904	3728	4560	5491	3306	3030	3059	3306	4950	2375	3961	1776	1
6700	6096	4488	2596	1980	1540	3619	6080	4928	4158	6100	4620	2783	2541	1760	39
6762	6321	5265	5151	4095	1323	1653	4059	3157	2064	2808	2324	3864	2340	1804	5
6792	6343	4525	3253	1999	1999	3253	4525	6343	4198	3396	6506	3998	3396	4198	693878766

Tabelle C.15: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 4.

222 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
6822	6525	5481	4770	3888	1863	4995	2128	3150	6264	2015	3627	4539	3105	1638	11
6864	5588	4233	3753	2948	2948	3753	4233	5588	4585	1945	5720	4110	1945	4585	133
6960	6375	5185	4375	3960	2535	5183	2665	4056	2890	3250	2535	4440	1855	2665	1
6960	6375	5185	5185	3960	2535	5183	1855	4056	2890	2890	2535	4624	1855	3007	1
6960	6375	4920	2482	1751	1751	2482	4920	5787	2517	3481	4964	3502	3481	2517	129614485
6970	5919	5334	2924	2521	2521	2924	5334	5919	4203	3485	5848	5042	3485	4203	8256678
7011	6344	6035	5742	2988	1765	1166	5031	5049	2139	3286	3844	5053	4433	2790	42
7028	5437	5371	2151	2095	2095	2151	5371	5437	2384	3514	4302	4190	3514	2384	24845483
7047	6688	6498	5184	4221	2449	1845	2511	2844	646	3968	2923	3366	2511	1845	455
7074	5690	4979	2197	1516	1516	2197	4979	5690	1319	3537	4394	3032	3537	1319	266865830
7172	6939	5202	5037	3111	4391	3266	2465	4123	6327	3144	4422	3201	3111	1938	70
7175	7175	6969	6020	4263	3150	4624	1855	2968	1586	1855	3458	3007	4056	1855	1
7186	6052	4777	2491	1266	1266	2491	4777	6052	1645	3593	4982	2532	3593	1645	1218151
7194	6194	4635	4341	3508	3508	4341	4635	6194	5929	2023	7042	5376	2023	5929	1495
7198	6786	3900	3380	2301	5888	6052	3956	5428	2964	5980	6900	4160	4551	1495	231
7198	6045	5546	2832	1343	1343	2832	5546	6045	1591	4773	4988	5074	4773	1591	7315
7198	6771	6045	2257	1343	2257	1343	6771	6045	2784	7076	5452	5452	4988	2784	7315
7225	7085	6052	5655	5291	1050	1717	2590	2044	1073	1820	2366	877	1839	2366	1
7260	6061	5164	3448	1727	1727	3448	5164	6061	3625	3525	5170	4940	3525	3625	22134
7263	6600	5580	4950	4590	1513	1749	5487	3141	1260	4050	2070	4050	1458	2700	494
7368	6715	4607	3161	1427	1427	3161	4607	6715	3238	3684	6322	2854	3684	3238	1371608238
7397	6757	5605	3995	3703	1680	5488	5152	4292	6272	5488	4388	1680	2652	1212	33
7436	6253	6253	5402	2067	2535	2535	2190	5785	4056	2775	5200	1449	4264	3625	1
7436	6545	5785	5200	4439	5115	2067	4524	3075	3420	1455	3900	2535	1392	2601	1
7439	5886	5589	3445	2020	3445	2020	5886	5589	3375	6139	3886	3886	3911	3375	7106
7473	7102	4559	3478	1961	1961	3478	4559	7102	4181	3720	7261	3149	3720	4181	170170
7488	6384	4880	4633	1767	3264	3008	6001	5745	4096	3128	5016	5288	3128	4096	15
7511	7462	6090	5510	4214	2499	4669	3741	3325	2632	2208	3976	1160	4144	3016	33
7625	6840	6275	5760	5035	2875	2875	2231	4725	575	1656	2375	1219	2000	2581	11
7630	7630	7110	5760	3318	3815	4160	2990	6713	695	5830	5152	5850	4503	6222	15
7654	5809	5291	3825	2025	2025	3825	5291	5809	3330	3286	4136	5164	3286	3330	266
7680	7040	6528	5720	4730	1280	2112	2200	3910	2752	2320	2810	1012	4118	3135	7
7682	6561	6283	4345	4199	1363	2871	4437	3509	3016	3944	2552	2088	2552	1856	35
7733	7533	5832	4059	2664	2176	3364	5104	5476	4860	6048	4932	2088	4608	3720	455
7765	5464	4747	4251	3468	4251	3468	5464	4747	1563	5963	4444	4444	2971	1563	45885
7820	6804	6669	5346	4644	5984	1241	2494	5016	5049	5346	2376	1485	3825	3510	2
7825	6655	4950	3249	2650	1720	4375	5456	6425	4345	4888	4905	1719	5200	3961	29

Tabelle C.16: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 5.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
7956	6698	6305	3434	2899	3434	2899	6698	6305	4953	7072	4121	4121	5746	4953	168245
7995	6084	4879	4641	4346	4641	4346	6084	4879	1387	7293	5950	5950	4633	1387	1
8029	7475	6475	5957	4600	1786	4144	2590	3431	2430	3312	3105	4662	3375	1863	11
8066	6771	6469	2257	1767	2257	1767	6771	6469	2360	6068	5028	5028	4988	2360	170170
8085	6678	5291	2926	2793	2793	2926	5291	6678	3059	3772	6279	2783	3772	3059	10
8091	5945	5742	5295	4959	2204	4959	3036	5742	4147	1560	3886	2613	7047	4746	1190
8112	6461	6171	5967	4745	1989	2349	3159	3393	2160	3042	2106	918	1566	1872	35
8118	6929	6533	5842	4726	5453	5635	2296	4004	462	4389	3087	4389	2919	1932	10
8179	6135	4408	4341	3836	3836	4341	4408	6135	1807	4524	6149	3107	4524	1807	2170
8352	6785	6726	4465	1974	4465	1974	6785	6726	2773	7886	6137	6137	5340	2773	91
8400	7824	6940	5640	5510	936	1480	3120	3380	986	2964	2561	2000	2000	2600	231
8448	7040	5742	5597	3712	5632	3630	2915	4864	6622	4173	5632	2465	2146	2291	7
8505	6811	5400	5292	2660	3850	3375	5859	6125	2125	2303	5425	2916	3500	4816	26
8526	6769	4774	4565	4340	3325	5852	4199	4774	2793	2356	4669	2299	4774	2655	6
8541	7884	7540	7332	7062	873	2769	1287	2349	1976	1104	1482	2808	798	2106	170
8556	5980	5640	4674	3999	3496	2964	3990	5859	2380	1634	4981	1494	3111	3381	22
8556	6789	5022	3174	1919	4185	5766	6210	6675	2139	3645	5010	1896	3509	1635	182
8590	6919	4995	4085	1739	1739	4085	4995	6919	2366	3626	5292	3080	3626	2366	62
8674	7157	6782	3444	3181	3181	3444	6782	7157	5015	4337	6888	6362	4337	5015	18503914
8755	5411	4977	4118	3694	3694	4118	4977	5411	2492	1339	3033	2609	1339	2492	2259290
8758	7852	5423	4379	1210	1210	4379	5423	7852	3189	4983	7038	4524	4983	3189	1330
8769	8004	6068	5504	5328	7803	6549	3615	6882	2112	5412	2706	3564	814	3608	455
8900	6917	6463	2493	2047	2047	2493	6463	6917	1004	4450	4986	4094	4450	1004	30596566
8959	7602	5642	4046	3136	2162	3534	5202	7505	3136	3584	5642	2688	5054	2422	15
8967	8526	3045	2565	1419	7497	6622	7998	7614	8729	6009	8073	4080	1736	2616	5
9061	7544	5986	3725	3285	3285	3725	5986	7544	4510	3869	7301	4161	3869	4510	37
9114	8736	6678	5642	4626	2562	7728	4991	8448	5586	3458	6810	3059	2304	3473	15
9116	7208	6149	4876	3655	4876	3655	7208	6149	2109	8268	6273	6273	4386	2109	42
9130	8086	8052	7304	7241	5256	7018	5874	7089	1802	1038	2145	1276	853	1233	805
9176	7943	6572	5129	4756	4617	3348	4185	4860	2295	3672	5913	1593	3672	2295	77
9246	8319	8178	7598	7006	2385	3552	5344	3712	5217	6721	4847	1856	1184	1888	7315
9278	9124	5009	4563	1198	1198	4563	5009	9124	4795	4639	9126	2396	4639	4795	249458
9288	8364	7912	7839	4320	5412	4816	6831	5832	724	1617	4116	2033	3608	3969	5
9288	5472	5203	4429	3960	3960	4429	5203	5472	589	2387	2232	2666	2387	589	65
9304	9215	8879	8569	5560	2649	633	3423	5616	3066	1026	7095	3720	5001	7089	2
9315	7625	7605	6885	6745	2860	1800	3078	2750	1580	790	2970	1422	1610	2444	14
9315	7650	7625	6885	6745	2925	2860	3078	2750	4225	3825	1475	790	2970	2444	14

Tabelle C.17: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 6.

224 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
9361	6512	5888	4623	4477	4477	4623	5888	6512	5200	1955	6105	4945	1955	5200	7
9381	8280	6903	4995	3131	4665	7080	5160	6375	2835	3375	6365	3240	6095	3085	11
9408	8878	5418	5145	4459	6970	5586	7497	5243	9256	3848	5448	7098	4046	3136	55
9425	7632	7540	4785	4200	2257	5655	4930	7535	3620	2895	5304	3625	3620	2895	1
9440	8319	5472	4096	2183	2183	4096	5472	8319	3705	4225	7670	2080	4225	3705	231
9471	9016	6868	6728	6552	3857	3857	5551	3087	2204	2752	4816	1764	3220	4816	5
9472	8214	8192	4366	3040	6290	4864	6290	6528	1430	8177	5746	7410	5408	3094	231
9522	9145	8556	7797	7006	2483	5106	2139	4208	2701	3698	2461	5727	1922	4181	36190
9525	8580	7488	6350	5568	1530	5313	6350	4257	5772	6520	3852	1462	3072	3082	7
9530	8112	8097	4507	4498	4498	4507	8097	8112	7641	4765	9014	8996	4765	7641	2557166843
9542	8466	6021	3787	1592	1592	3787	6021	8466	3315	4771	7574	3184	4771	3315	1089878
9555	6253	5740	4655	3458	3458	4655	5740	6253	1463	3498	3289	4235	3498	1463	10
9600	8960	7660	7252	2150	2240	1960	2552	7850	2100	1932	7590	768	5985	5727	663
9648	9112	7236	5896	5632	7504	2814	5092	4720	7973	4154	8584	4288	1916	4488	455
9750	7930	7293	6084	5950	4420	4407	4134	5300	6643	2366	6600	4641	1387	4346	1
9765	7995	7471	7471	6850	7230	6526	5084	7865	836	2206	1405	1446	1521	2829	238
9807	6365	5290	4867	4772	4772	4867	5290	6365	1455	4082	5513	2677	4082	1455	1870
9842	7590	7106	7007	6314	2548	4368	3381	5796	4004	847	5104	4389	1452	5313	10
9898	9474	6177	4855	2524	2524	4855	6177	9474	5949	4949	9710	5048	4949	5949	22477026
9955	9594	8450	7995	4200	5795	3045	3500	5795	3016	7995	6954	5005	4850	4005	1
9984	7680	7600	6760	6660	7680	2800	3640	3540	5200	7400	5100	2800	950	2375	231
10023	9061	6851	4095	4056	8424	4392	6768	6669	4752	9384	5655	5304	2847	3861	35
10043	8729	4741	3234	3136	5472	8448	7348	7107	4800	7700	5775	5500	3075	2450	39
10062	9546	9204	8732	7095	1032	1014	1370	8643	1422	962	8901	944	7659	7973	30
10082	7956	7110	5746	4631	4114	2992	4752	5767	3366	4862	3403	1936	3071	2935	35
10089	8415	8075	8075	6137	3375	6536	2185	4123	8075	3400	2584	4845	6137	2584	91
10089	8840	7650	7446	6902	2950	2610	3000	4888	3400	1700	5916	2040	2584	4352	231
10116	6408	6085	4369	4356	4356	4369	6085	6408	3107	2041	4212	3146	2041	3107	2030
10120	8680	7836	3724	3381	4080	3604	7684	7429	1156	5236	7259	4624	6171	4165	13
10182	9679	5648	4610	811	811	4610	5648	9679	4231	5091	9220	1622	5091	4231	691737123
10240	10240	5610	4740	1580	4480	8630	6020	8668	6250	7700	8916	6525	5084	3239	39
10246	6758	5239	5085	3924	3924	5085	5239	6758	2511	1757	4142	1276	1757	2511	170
10295	9160	7958	6800	3800	2295	4913	3785	8585	5882	3800	6800	2538	8262	6120	1001
10314	7070	6751	6594	3840	3776	6020	3840	6594	2516	896	3910	3140	4879	3174	247
10373	9840	7626	5530	3649	2173	3649	8847	7626	4674	7250	6601	8096	5945	2679	91
10425	10011	8618	8165	7695	2106	2223	2340	4680	1521	3042	3042	1755	2535	3900	14
10449	8250	7680	6144	5676	3576	6513	6150	5160	2950	2756	4576	1728	6228	4680	119

Tabelle C.18: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 7.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
10560	10095	7040	5700	4096	7905	8800	6540	6976	3445	4680	9361	2860	7424	4796	7
10604	9196	8721	6479	6479	5720	1925	6875	5445	5405	9405	2915	5200	4180	6820	29
10625	9675	6665	6579	4925	2450	5390	5236	6550	6020	3402	5000	5390	5220	1678	26
10695	8464	7475	3925	3640	2737	5750	7310	7531	5589	5661	5032	3600	6175	3145	11
10735	10373	9963	9538	8757	628	1532	1273	2852	1840	837	2960	1717	1440	2453	182
10846	8091	6919	5945	5797	5945	5797	8091	6919	1292	9164	7936	7936	6732	1292	455
10874	10542	6453	5371	2384	2384	5371	6453	10542	6285	5437	10742	4768	5437	6285	24845483
10880	9086	8375	8128	6160	7590	3525	4320	4800	8550	9150	6930	825	2475	2640	39
10920	7176	6882	5888	4108	4446	6063	5368	6838	5478	3496	3224	2114	4256	2380	15
10935	9963	9717	8262	8235	6318	8178	7533	4590	1968	2187	2592	1515	3952	2997	77
10946	9813	8544	5350	4567	4567	5350	8544	9813	8307	5473	10700	9134	5473	8307	3870947311
11015	10615	10460	9042	946	470	3795	2077	10511	3925	1793	10131	3118	9706	8492	1345890
11040	9100	7847	6384	6175	4040	3914	5760	5210	1568	2744	5200	1862	3648	3914	31
11115	10875	6875	5225	2805	10680	4760	10750	8544	7600	5950	10680	6050	4840	6050	21
11135	11049	4624	4454	4318	10744	7569	10349	6873	7225	6715	10033	2890	2958	5372	2002
11232	10744	7533	5805	2776	2776	5805	7533	10744	7261	5891	10960	7398	5891	7261	77
11264	9114	8448	7728	4991	2162	5632	7904	7505	4626	6678	5642	2304	3473	3059	15
11288	11100	7475	6474	4212	5220	3915	6786	8700	4959	4698	10440	3393	5655	6786	14
11368	10059	8648	5082	3808	7973	4560	6650	8120	10043	8673	6517	3610	6680	3430	13
11380	10611	6591	4979	1319	1319	4979	6591	10611	4548	5690	9958	2638	5690	4548	266865830
11388	11025	10500	9464	8064	1392	3072	2080	3480	4200	1624	3654	3584	2856	2128	231
11400	10374	8450	7995	5795	6954	4850	4005	5795	3016	7995	5795	5005	3045	3500	1
11492	11492	9116	9009	2492	10816	11040	5525	9200	2720	5525	11184	5525	9200	7595	1
11495	8778	8645	6292	5005	6061	5928	6149	6600	8911	2750	5929	6929	4368	3289	51
11564	10602	8432	6324	6324	3959	9628	5590	5408	6076	6324	4557	8432	6076	2418	55
11583	7189	6422	6399	5832	6422	7189	5832	6399	7189	5530	1771	1771	5530	3969	17
11592	9614	5152	4004	3335	5014	9016	8428	9407	9522	8118	8901	1764	1863	981	5
11594	10043	8448	7348	7107	4620	9130	4620	6580	4741	3234	3136	5500	3075	2450	39
11628	9945	5400	5400	4402	4131	8052	7452	7530	5055	7695	6969	6000	4582	1482	14
11630	9101	8122	4552	3969	3969	4552	8122	9101	5159	4837	7868	6174	4837	5159	71630
11640	11155	10600	4559	3760	2425	6640	8051	8120	4255	6984	8075	6059	8760	3431	91
11696	11286	9880	8721	5814	3526	2136	10591	7174	2546	7695	5700	8569	5054	4845	2
11803	11726	11570	9010	8450	1705	1047	3497	4343	2704	2784	5304	3920	3640	4200	1
11810	10418	8207	5007	3368	3368	5007	8207	10418	6161	5905	10014	6736	5905	6161	2189690321
11906	10924	7583	5277	2690	2690	5277	7583	10924	5893	5953	10554	5380	5953	5893	13990982082
11960	8464	7533	5589	4968	8280	4465	6785	7360	6475	7475	4600	2430	3375	3105	11
11960	9920	8280	7360	6785	5032	8464	4968	5589	3640	3200	6175	4600	7475	3105	11
11968	10048	8256	5330	5291	6144	7552	7002	9339	2176	5082	5253	3914	3173	2964	3255
12104	10779	7473	4777	1645	1645	4777	7473	10779	3798	6052	9554	3290	6052	3798	1218151
12144	11375	4715	3675	3325	3625	7475	11115	9269	6808	9317	9240	4225	2600	5005	51
12168	9375	8450	7200	7080	2832	5408	5328	6144	3200	2550	4080	1900	5920	4080	231
12170	11086	9875	3600	1595	2280	3555	8930	10875	4539	8246	9645	6325	8880	2995	91
12312	10000	6561	6399	5848	5848	6399	6561	10000	7201	3841	10808	4050	3841	7201	1001
12403	11571	9367	7657	6840	2960	8250	5050	6445	5510	5510	4845	7600	3895	3895	1
12444	12339	8671	6696	5646	2145	6325	6900	8910	7700	6075	9735	7015	3355	6630	14
12489	12445	11356	7514	5168	6116	8987	7367	7367	3399	10981	7923	12070	7956	4726	70
12496	10579	9656	5525	3720	5525	3720	10579	9656	6745	11346	6919	6919	7616	6745	123
12544	11088	10854	9801	5136	8736	4190	3527	7488	4554	9603	7488	5508	5898	5235	95
12567	11875	11050	9250	8300	3058	3515	3565	4483	875	2925	5175	2344	4730	2430	14
12597	11571	7344	7267	5616	10944	6279	5824	8463	6735	7552	12567	833	6048	5369	55
12648	11584	10752	10080	8688	2366	4056	2847	4704	5408	1664	5068	4368	2160	3558	55
12674	12182	7757	6219	3044	3044	6219	7757	12182	7465	6337	12438	6088	6337	7465	23834724914

Tabelle C.19: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 8.

226 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
12686	10188	9759	4525	4198	4198	4525	9759	10188	5997	6343	9050	8396	6343	5997	693878766
12720	12342	10527	7888	6460	1302	6783	5152	8260	7623	4522	7378	7105	9947	3332	13
12727	10043	9434	5060	4539	5060	4539	10043	9434	6409	9537	5746	5746	7565	6409	42
12727	12302	10813	3190	1019	1019	3190	10813	12302	2229	10608	11949	9603	10608	2229	555
12744	11800	11475	9288	8397	1416	10971	5832	5103	11375	5952	3813	5553	11457	6075	11
12754	11636	7817	5413	2130	2130	5413	7817	11636	5197	6377	10826	4260	6377	5197	171876562
12768	12350	10545	8645	5705	2318	9633	6517	12103	7505	4845	10695	3800	5720	5880	3
12832	11544	7728	7585	7215	3080	5200	10335	6865	4920	7585	7215	7585	2385	9250	1
12906	11562	11448	6882	4929	5856	6858	6324	7995	1014	7540	7291	8034	7473	2511	77
12920	12818	10268	8738	8381	1818	6732	4838	12699	5250	5644	11475	7306	6375	11305	506
12936	12488	11760	7350	1925	3248	2520	11970	11165	1144	9746	10579	9702	9877	6125	6
12958	8381	8091	5589	5549	5589	5549	8381	8091	4640	5920	2880	2880	4960	4640	455
12988	12439	8093	6375	3301	3301	6375	8093	12439	7804	6494	12750	6602	6494	7804	596539086
13018	10266	7859	5191	4684	4684	5191	7859	10266	4205	5375	9230	2820	5375	4205	90706
13018	12052	7915	5743	2334	2334	5743	7915	12052	5873	6509	11486	4668	6509	5873	249143466
13020	12210	8510	6923	6348	11730	6970	10087	9792	5900	5353	6018	3197	3082	713	247
13034	12635	9268	4802	1045	1045	4802	9268	12635	5031	8631	12312	6930	8631	5031	629
13079	12341	11374	10231	9635	2460	3135	2898	3526	1035	2622	3854	2157	3431	1276	442
13086	12992	11760	8526	4949	2210	1614	6612	8425	3248	5390	8085	6174	7301	3773	6
13090	9856	7392	6314	6144	7238	6650	7623	7198	3136	3850	7040	1106	3936	3670	39
13161	10701	10379	4920	4280	4920	4280	10701	10379	6640	10209	6889	6889	8881	6640	3003
13234	9699	9329	4913	4607	4913	4607	9699	9329	4930	7828	5198	5198	6432	4930	1155
13242	12527	7910	6148	2519	2519	6148	7910	12527	6667	6621	12296	5038	6621	6667	2808910
13266	10787	7889	6901	5795	6901	5795	10787	7889	7406	12328	5382	5382	3956	7406	5
13350	12675	10959	10610	8112	8685	4551	4520	7578	4524	4795	4797	401	3471	3278	1
13370	10360	10017	9805	8555	3150	3367	9315	8875	1127	8325	7475	7208	6392	1360	11
13430	11052	9483	4607	3238	3238	4607	9483	11052	4281	6715	9214	6476	6715	4281	1371608238
13485	12095	9315	6750	6417	1800	12000	8475	8808	11800	7775	7072	4725	11592	6993	11
13632	11745	10440	7040	3432	9537	5928	9792	11016	3915	13345	11577	10120	9192	3672	35
13778	11332	10399	5171	4470	4470	5171	10399	11332	6781	6889	10342	8940	6889	6781	9273226963
13834	13350	7479	6463	1004	1004	6463	7479	13350	6141	6917	12926	2008	6917	6141	30596566
13906	13384	11424	9216	8036	3915	7344	5166	5904	3864	4296	6426	4320	6720	2460	143
14025	11800	11781	9690	9100	5425	2346	5355	6125	5149	2450	7700	4029	3871	5530	6
14079	13833	12445	11400	5225	6288	1976	7011	12464	7112	11973	10048	5225	11400	12635	51
14124	13380	9075	8772	8140	4440	10659	6000	7480	7245	4680	9200	5373	10285	5560	21
14186	11126	10747	4517	4200	4200	4517	10747	11126	5077	7093	9034	8400	7093	5077	3774901
14190	13818	8820	8428	4875	3732	6630	6278	12915	5082	7546	13857	4928	9705	6647	19
14193	10304	8664	7752	7125	4015	8265	7125	7752	6200	3160	4661	6840	2451	4503	91
14250	10170	9834	6150	5125	7320	5616	9000	10075	2184	4080	8645	3816	7259	5125	1
14269	12121	11560	11288	8432	2262	10971	6629	8983	9231	4913	6851	4352	3808	3264	15
14314	13011	10332	6782	5015	5015	6782	10332	13011	9543	7157	13564	10030	7157	9543	18503914
14360	11178	8989	7582	6021	7582	6021	11178	8989	3791	12596	8883	8883	5282	3791	1430
14365	13156	12110	11989	10100	8073	8625	9558	6785	1242	2025	3496	957	2990	3599	14
14370	13682	8143	6607	1832	1832	6607	8143	13682	6511	7185	13214	3664	7185	6511	9804275481
14375	14375	11615	8125	6565	12650	12696	9500	10650	2990	6750	7940	4700	5454	1690	14
14432	11832	11832	9380	7841	9464	4360	5668	11009	11136	5668	4223	5668	11009	5559	1
14501	13544	13038	12818	10370	5955	1939	2669	4199	4394	3626	6506	800	3212	3468	1
14536	14336	11872	11542	8960	5688	4504	3009	8704	2912	6042	5824	3520	4368	6698	15
14575	12675	11050	5200	3778	8500	3625	12625	11391	8125	8125	8939	9750	8104	2686	1
14690	14690	12197	9880	9250	3900	4797	5070	9360	2553	5070	7140	3003	4797	5070	1
14721	12936	12412	9135	7414	5607	2491	6384	7505	4052	7959	7678	4843	5474	1919	78
14742	14168	11440	9352	7999	3430	6422	5530	9559	8712	5040	10881	5832	3969	6399	17

Tabelle C.20: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 9.

$\delta_{0,1}$	$\delta_{0,2}$	$\delta_{0,3}$	$\delta_{0,4}$	$\delta_{0,5}$	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,3}$	$\delta_{1,4}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{2,3}$	$\delta_{2,4}$	$\delta_{2,5}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{3,5}$	$\delta_{4,5}$	char
14790	11135	11049	7569	7225	7225	7569	11049	11135	10744	4624	11560	11832	4624	10744	2002
14814	13832	13104	12257	10752	4636	2340	7912	4758	5824	11214	3416	5698	4368	8645	1015
14911	11830	10478	9100	5846	7293	5239	11661	10175	3380	13650	9988	10478	7224	4346	114
14916	14421	12621	12179	10100	2013	4437	6613	6136	5790	4750	6851	8840	2549	8501	1
14965	11388	10370	8687	5085	8687	5085	11388	10370	4862	13651	9537	9537	6545	4862	1
14976	13275	8414	7550	6021	6021	7550	8414	13275	4931	9575	14166	5596	9575	4931	24871

Tabelle C.21: Primitive ganzzahlige Sechsecke in allgemeiner Lage - Teil 10.

## C.4 Anzahl ganzzahliger Tetraeder

In Abschnitt 10.1 haben wir die Anzahl  $\alpha(d, 3)$  der ganzzahligen Tetraeder mit Durchmesser  $d$  betrachtet und eine Näherungsformel sowie die ersten paar exakten Werte angegeben. In den folgenden Tabellen geben wir alle Werte von  $\alpha(d, 3)$  für  $d \leq 500$  an.

Wir möchten bemerken, dass wir die angegebenen Zahlen durch vollständige Konstruktion bestimmt haben. Dabei haben wir allerdings die Technik des impliziten Erzeugens benutzt, wenn auch auf sehr eingeschränkte Weise. Mit Hilfe von Algorithmus 3.2.2 durchlaufen wir die Kombinationen der kanonischen und semikanonischen Dreiecke, verzichten aber auf den Durchlauf von  $\Gamma(x_1, x_2)$ . Die Verschmelzung von zwei Dreiecken  $x_0$  und  $x_1$  lässt noch einen Abstand unbestimmt. In Abschnitt 3.3 haben wir beschrieben, wie wir ein Intervall  $[u, o]$  bestimmen können, so dass sich die Verschmelzung von  $x_0$  und  $x_1$  genau dann in den  $\mathbb{E}^3$  einbetten lässt, wenn der unbestimmte Abstand aus  $[u, o]$  gewählt wird. Man kann sich überlegen, dass die kanonischen Tetraeder durch eine Teilmenge  $[u, o_k] \subseteq [u, o]$  bestimmt sind. Man braucht also nur das größte  $x \in [u, o]$  bestimmen, mit  $\chi(x) = \text{kanonisch}$ . Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten. Zunächst schränkt man das Intervall auf  $[u, \min(o, d)]$  ein. Eine Möglichkeit ist die Verwendung der binären Suche, die zu einem Aufwand von  $O(\min(o, d) - u)$  führt.

Wir sprechen hier von impliziten Erzeugen, da wir die  $\max(o_k - u + 1, 0)$  ganzzahligen Tetraeder, die sich aus der Verschmelzung von  $x_0$  und  $x_1$  ergeben, nicht wirklich konstruieren. Stattdessen haben wir sozusagen die Abstandsmatrix mit einer Unbestimmten  $x$  angegeben und die Werte von  $x$  durch die zwei Grenzen eines Intervalls beschrieben. Durch diese Technik ist es möglich, ganzzahlige Tetraeder mit Durchmesser  $d$  für hinreichend großes  $d$  schneller zu konstruieren als der Computer die zugehörigen Bits anfassen kann.

Eine weitere Möglichkeit, das größte  $x \in [u, \min(o, d)]$  mit  $\chi(x) = \text{kanonisch}$  zu bestimmen ist es, nur die Werte  $\delta_{i,j}$  und  $\delta_{i,j} - 1$  zu betrachten, wobei  $\delta_{i,j}$  die bestimmten Abstände aus  $\Gamma(x_0, x_1)$  bezeichnen soll. Bei diesem

## 228 Anhang C. Anzahlen und Auffistungen von ganzzahligen Punktmengen

Vorgehen müssen nur maximal  $m(m+1)$  Kanonizitätstests durchgeführt werden, was bei konstanter Dimension  $m$  einem konstanten Aufwand entspricht.

$d$	$\alpha(d, 3)$						
1	1	33	1.005.214	65	29.783.292	97	220.570.260
2	4	34	1.166.797	66	32.145.746	98	232.180.129
3	16	35	1.348.609	67	34.657.375	99	244.275.592
4	45	36	1.552.398	68	37.322.859	100	256.866.619
5	116	37	1.780.198	69	40.149.983	101	269.975.550
6	254	38	2.033.970	70	43.145.566	102	283.610.746
7	516	39	2.315.942	71	46.318.399	103	297.795.621
8	956	40	2.628.138	72	49.673.679	104	312.538.533
9	1.669	41	2.973.433	73	53.222.896	105	327.861.267
10	2.760	42	3.353.922	74	56.969.822	106	343.779.633
11	4.379	43	3.773.027	75	60.926.247	107	360.310.876
12	6.676	44	4.232.254	76	65.098.817	108	377.468.428
13	9.888	45	4.735.254	77	69.497.725	109	395.279.081
14	14.219	46	5.285.404	78	74.130.849	110	413.752.313
15	19.956	47	5.885.587	79	79.008.179	111	432.911.580
16	27.421	48	6.538.543	80	84.138.170	112	452.770.678
17	37.062	49	7.249.029	81	89.532.591	113	473.357.380
18	49.143	50	8.019.420	82	95.198.909	114	494.679.480
19	64.272	51	8.854.161	83	101.149.823	115	516.769.476
20	82.888	52	9.756.921	84	107.392.867	116	539.638.043
21	105.629	53	10.732.329	85	113.942.655	117	563.311.240
22	133.132	54	11.783.530	86	120.807.154	118	587.806.250
23	166.090	55	12.916.059	87	127.997.826	119	613.149.416
24	205.223	56	14.133.630	88	135.527.578	120	639.349.793
25	251.624	57	15.442.004	89	143.409.248	121	666.452.571
26	305.861	58	16.845.331	90	151.649.489	122	694.457.782
27	369.247	59	18.349.153	91	160.268.457	123	723.397.831
28	442.695	60	19.957.007	92	169.272.471	124	753.294.720
29	527.417	61	21.678.067	93	178.678.811	125	784.173.528
30	624.483	62	23.514.174	94	188.496.776	126	816.054.763
31	735.777	63	25.473.207	95	198.743.717	127	848.966.752
32	861.885	64	27.560.402	96	209.427.375	128	882.929.116

Tabelle C.22: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $1 \leq d \leq 128$ .

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
129	917.973.194	164	3.049.559.162	199	8.023.682.148
130	954.119.305	165	3.143.698.500	200	8.227.353.208
131	991.398.384	166	3.240.146.331	201	8.435.150.548
132	1.029.825.039	167	3.338.951.502	202	8.647.118.435
133	1.069.446.680	168	3.440.134.268	203	8.863.330.234
134	1.110.271.536	169	3.543.780.126	204	9.083.837.903
135	1.152.334.932	170	3.649.896.696	205	9.308.721.357
136	1.195.660.068	171	3.758.542.173	206	9.538.028.568
137	1.240.285.329	172	3.869.758.448	207	9.771.841.896
138	1.286.227.132	173	3.983.598.001	208	10.010.209.821
139	1.333.524.594	174	4.100.089.139	209	10.253.222.963
140	1.382.200.653	175	4.219.299.938	210	10.500.903.450
141	1.432.289.098	176	4.341.258.803	211	10.753.379.072
142	1.483.817.182	177	4.466.032.790	212	11.010.665.457
143	1.536.824.477	178	4.593.653.168	213	11.272.858.984
144	1.591.326.553	179	4.724.179.176	214	11.540.029.913
145	1.647.370.931	180	4.857.645.442	215	11.812.239.467
146	1.704.979.654	181	4.994.123.918	216	12.089.543.813
147	1.764.192.720	182	5.133.638.641	217	12.372.071.267
148	1.825.036.265	183	5.276.266.139	218	12.659.826.302
149	1.887.549.071	184	5.422.038.746	219	12.952.913.355
150	1.951.757.450	185	5.571.025.138	220	13.251.404.399
151	2.017.712.225	186	5.723.257.096	221	13.555.395.124
152	2.085.427.843	187	5.878.807.390	222	13.864.909.821
153	2.154.955.009	188	6.037.715.058	223	14.180.068.428
154	2.226.323.422	189	6.200.045.198	224	14.500.918.460
155	2.299.573.962	190	6.365.845.844	225	14.827.566.110
156	2.374.730.742	191	6.535.183.811	226	15.160.068.366
157	2.451.849.496	192	6.708.087.280	227	15.498.506.093
158	2.530.951.605	193	6.884.650.594	228	15.842.955.902
159	2.612.086.272	194	7.064.900.320	229	16.193.521.188
160	2.695.280.888	195	7.248.911.394	230	16.550.246.886
161	2.780.596.426	196	7.436.727.480	231	16.913.236.257
162	2.868.048.149	197	7.628.433.180	232	17.282.565.687
163	2.957.694.293	198	7.824.056.682	233	17.658.332.886

Tabelle C.23: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $129 \leq d \leq 233$ .

230 Anhang C. Anzahlen und Aufzählungen von ganzzahligen Punktmengen

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
234	18.040.591.869	269	36.222.565.121	304	66.776.021.181
235	18.429.446.549	270	36.900.953.395	305	67.881.702.961
236	18.824.978.194	271	37.589.498.715	306	69.001.972.339
237	19.227.281.739	272	38.288.253.684	307	70.137.002.684
238	19.636.418.984	273	38.997.381.171	308	71.286.888.887
239	20.052.509.372	274	39.716.969.687	309	72.451.833.235
240	20.475.584.436	275	40.447.150.514	310	73.631.946.952
241	20.905.826.207	276	41.188.007.560	311	74.827.406.203
242	21.343.233.231	277	41.939.722.247	312	76.038.301.748
243	21.787.936.645	278	42.702.326.875	313	77.264.865.271
244	22.240.025.127	279	43.476.013.590	314	78.507.170.924
245	22.699.589.548	280	44.260.846.692	315	79.765.414.755
246	23.166.712.363	281	45.057.028.301	316	81.039.761.336
247	23.641.513.032	282	45.864.566.583	317	82.330.341.168
248	24.124.035.119	283	46.683.674.823	318	83.637.264.560
249	24.614.429.555	284	47.514.418.542	319	84.960.795.422
250	25.112.753.730	285	48.356.980.088	320	86.300.970.558
251	25.619.124.378	286	49.211.444.440	321	87.658.059.514
252	26.133.616.536	287	50.077.928.783	322	89.032.139.905
253	26.656.371.096	288	50.956.557.623	323	90.423.413.054
254	27.187.425.616	289	51.847.531.687	324	91.831.974.246
255	27.726.924.827	290	52.750.878.982	325	93.258.093.137
256	28.274.949.522	291	53.666.800.656	326	94.701.864.849
257	28.831.622.757	292	54.595.390.546	327	96.163.449.741
258	29.397.000.831	293	55.536.792.603	328	97.643.012.040
259	29.971.246.089	294	56.491.115.791	329	99.140.764.018
260	30.554.402.290	295	57.458.539.448	330	100.656.779.530
261	31.146.611.716	296	58.439.155.413	331	102.191.370.052
262	31.747.975.982	297	59.433.140.480	332	103.744.550.239
263	32.358.593.000	298	60.440.578.760	333	105.316.590.014
264	32.978.539.369	299	61.461.658.788	334	106.907.629.863
265	33.607.991.756	300	62.496.428.392	335	108.517.828.138
266	34.246.990.276	301	63.545.176.640	336	110.147.344.725
267	34.895.687.321	302	64.607.896.475	337	111.796.464.340
268	35.554.164.681	303	65.684.805.319	338	113.465.191.274

Tabelle C.24: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $234 \leq d \leq 338$ .

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
339	115.153.808.855	374	188.217.270.232	409	294.398.515.572
340	116.862.463.817	375	190.747.279.327	410	298.015.449.981
341	118.591.393.246	376	193.304.430.027	411	301.667.890.400
342	120.340.661.184	377	195.888.956.881	412	305.356.017.668
343	122.110.547.407	378	198.500.969.780	413	309.080.167.804
344	123.901.164.748	379	201.140.869.064	414	312.840.509.677
345	125.712.765.766	380	203.808.692.441	415	316.637.407.005
346	127.545.476.592	381	206.504.811.308	416	320.471.044.426
347	129.399.510.030	382	209.229.379.522	417	324.341.780.204
348	131.275.003.995	383	211.982.621.005	418	328.249.789.098
349	133.172.240.148	384	214.764.710.019	419	332.195.407.013
350	135.091.291.098	385	217.576.012.870	420	336.178.761.892
351	137.032.437.489	386	220.416.672.309	421	340.200.430.668
352	138.995.822.720	387	223.286.890.321	422	344.260.373.554
353	140.981.669.021	388	226.186.964.470	423	348.358.970.543
354	142.990.105.758	389	229.117.077.365	424	352.496.548.355
355	145.021.392.187	390	232.077.439.486	425	356.673.346.257
356	147.075.701.467	391	235.068.427.167	426	360.889.642.665
357	149.153.224.453	392	238.090.046.372	427	365.145.743.572
358	151.254.154.886	393	241.142.763.522	428	369.441.844.396
359	153.378.707.430	394	244.226.662.765	429	373.778.340.955
360	155.526.991.341	395	247.342.041.949	430	378.155.411.085
361	157.699.405.308	396	250.489.089.204	431	382.573.467.504
362	159.895.927.415	397	253.668.185.622	432	387.032.607.566
363	162.116.904.447	398	256.879.395.196	433	391.533.379.213
364	164.362.467.506	399	260.123.075.814	434	396.075.825.046
365	166.632.865.162	400	263.399.396.125	435	400.660.329.366
366	168.928.286.004	401	266.708.736.400	436	405.287.210.692
367	171.248.947.225	402	270.051.165.359	437	409.956.798.298
368	173.594.984.150	403	273.427.105.688	438	414.669.209.328
369	175.966.711.782	404	276.836.635.698	439	419.424.964.730
370	178.364.255.326	405	280.280.133.816	440	424.224.122.232
371	180.787.925.048	406	283.757.829.033	441	429.067.235.068
372	183.237.785.998	407	287.269.963.909	442	433.954.446.706
373	185.714.212.935	408	290.816.720.995	443	438.886.088.735

Tabelle C.25: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $339 \leq d \leq 443$ .

232 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
444	443.862.410.857	479	648.669.164.978	514	922.935.912.971
445	448.883.852.108	480	655.468.974.700	515	931.949.466.230
446	453.950.579.502	481	662.325.849.572	516	941.033.256.137
447	459.062.981.878	482	669.239.890.299	517	950.187.884.593
448	464.221.321.997	483	676.211.549.630	518	959.413.475.890
449	469.426.010.051	484	683.241.218.432	519	968.710.675.792
450	474.677.140.160	485	690.329.209.913	520	978.079.728.301
451	479.975.287.283	486	697.475.889.543	521	987.521.224.487
452	485.320.550.345	487	704.681.712.271	522	997.035.394.413
453	490.713.368.610	488	711.946.872.588	523	1.006.622.871.650
454	496.153.997.275	489	719.271.866.926	524	1.016.283.850.255
455	501.642.766.026	490	726.657.026.971	525	1.026.018.902.836
456	507.179.994.548	491	734.102.767.707	526	1.035.828.452.183
457	512.766.118.425	492	741.609.293.480	527	1.045.712.893.579
458	518.401.253.297	493	749.177.291.709	528	1.055.672.510.051
459	524.085.853.718	494	756.806.817.107	529	1.065.708.117.258
460	529.820.175.414	495	764.498.374.503	530	1.075.819.652.783
461	535.604.657.804	496	772.252.331.967	531	1.086.007.916.407
462	541.439.452.586	497	780.069.183.914	532	1.096.273.173.622
463	547.325.114.181	498	787.949.084.861	533	1.106.615.989.114
464	553.261.716.093	499	795.892.673.360	534	1.117.036.621.552
465	559.249.806.718	500	803.900.006.590	535	1.127.535.667.047
466	565.289.609.649	501	811.971.813.224	536	1.138.113.488.139
467	571.381.479.435	502	820.108.276.791	537	1.148.770.604.142
468	577.525.697.652	503	828.309.872.048	538	1.159.507.332.162
469	583.722.794.232	504	836.576.796.926	539	1.170.324.228.932
470	589.972.835.181	505	844.909.812.326	540	1.181.221.582.297
471	596.276.412.668	506	853.309.006.408	541	1.192.200.180.466
472	602.633.663.520	507	861.774.837.685	542	1.203.260.108.221
473	609.045.109.988	508	870.307.762.669	543	1.214.402.009.642
474	615.510.919.875	509	878.908.167.924	544	1.225.626.233.379
475	622.031.632.874	510	887.576.322.187	545	1.236.933.380.588
476	628.607.371.973	511	896.312.905.643	546	1.248.323.735.062
477	635.238.678.668	512	905.117.973.855	547	1.259.798.008.623
478	641.925.821.731	513	913.992.267.356	548	1.271.356.311.468

Tabelle C.26: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $444 \leq d \leq 548$ .

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
549	1.282.999.446.634	584	1.747.577.980.624	619	2.337.933.783.525
550	1.294.727.625.864	585	1.762.592.281.487	620	2.356.880.503.873
551	1.306.541.502.915	586	1.777.709.619.722	621	2.375.950.039.391
552	1.318.441.295.899	587	1.792.930.481.008	622	2.395.142.772.717
553	1.330.427.885.279	588	1.808.255.307.378	623	2.414.459.284.050
554	1.342.501.328.667	589	1.823.684.978.399	624	2.433.900.177.741
555	1.354.662.276.273	590	1.839.219.599.855	625	2.453.466.296.702
556	1.366.911.183.031	591	1.854.860.008.531	626	2.473.157.873.272
557	1.379.248.584.788	592	1.870.606.552.237	627	2.492.975.665.112
558	1.391.674.870.921	593	1.886.460.000.156	628	2.512.920.394.428
559	1.404.190.625.247	594	1.902.420.548.330	629	2.532.992.608.862
560	1.416.796.092.768	595	1.918.489.173.292	630	2.553.192.617.537
561	1.429.492.165.069	596	1.934.666.010.940	631	2.573.521.670.488
562	1.442.278.951.212	597	1.950.951.830.383	632	2.593.979.730.511
563	1.455.157.128.509	598	1.967.347.190.697	633	2.614.567.828.616
564	1.468.127.019.401	599	1.983.852.571.093	634	2.635.286.375.419
565	1.481.189.372.931	600	2.000.468.396.580	635	2.656.136.086.105
566	1.494.344.484.682	601	2.017.195.717.495	636	2.677.117.474.975
567	1.507.592.844.182	602	2.034.034.427.763	637	2.698.231.436.451
568	1.520.935.026.573	603	2.050.985.542.292	638	2.719.478.226.176
569	1.534.371.594.391	604	2.068.049.436.221	639	2.740.858.734.705
570	1.547.902.823.110	605	2.085.226.757.018	640	2.762.373.382.787
571	1.561.529.503.181	606	2.102.517.973.362	641	2.784.023.167.291
572	1.575.251.802.837	607	2.119.923.781.132	642	2.805.808.169.356
573	1.589.070.555.266	608	2.137.444.542.369	643	2.827.729.616.547
574	1.602.986.002.544	609	2.155.081.072.687	644	2.849.787.664.982
575	1.616.998.831.451	610	2.172.833.776.006	645	2.871.983.234.354
576	1.631.109.389.184	611	2.190.703.327.193	646	2.894.316.944.369
577	1.645.318.535.521	612	2.208.690.152.827	647	2.916.789.342.248
578	1.659.626.257.203	613	2.226.795.116.074	648	2.939.400.864.360
579	1.674.033.463.189	614	2.245.018.444.844	649	2.962.152.870.106
580	1.688.540.496.999	615	2.263.360.907.194	650	2.985.045.178.540
581	1.703.148.026.294	616	2.281.823.030.884	651	3.008.078.977.491
582	1.717.856.325.605	617	2.300.405.665.328	652	3.031.254.621.214
583	1.732.666.266.800	618	2.319.108.893.456	653	3.054.572.991.152

Tabelle C.27: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $549 \leq d \leq 653$ .

234 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
654	3.078.034.522.795	689	3.994.716.850.597	724	5.117.846.624.874
655	3.101.640.170.632	690	4.023.791.436.076	725	5.153.290.173.305
656	3.125.390.308.357	691	4.053.035.500.459	726	5.188.929.711.545
657	3.149.285.725.605	692	4.082.448.946.678	727	5.224.766.259.071
658	3.173.327.033.643	693	4.112.033.065.565	728	5.260.800.281.375
659	3.197.515.120.513	694	4.141.788.498.051	729	5.297.033.177.494
660	3.221.850.132.593	695	4.171.715.932.665	730	5.333.465.204.485
661	3.246.333.512.981	696	4.201.815.928.494	731	5.370.097.621.911
662	3.270.965.244.781	697	4.232.089.800.914	732	5.406.930.766.962
663	3.295.746.350.916	698	4.262.537.523.707	733	5.443.966.075.539
664	3.320.677.308.881	699	4.293.160.422.277	734	5.481.203.808.192
665	3.345.759.050.265	700	4.323.958.989.350	735	5.518.644.955.021
666	3.370.992.026.491	701	4.354.934.230.235	736	5.556.290.633.518
667	3.396.377.203.356	702	4.386.086.461.288	737	5.594.141.586.836
668	3.421.914.780.151	703	4.417.417.034.448	738	5.632.198.175.928
669	3.447.605.933.773	704	4.448.926.053.599	739	5.670.461.848.016
670	3.473.451.085.128	705	4.480.614.830.183	740	5.708.932.993.276
671	3.499.451.102.466	706	4.512.483.982.850	741	5.747.612.981.420
672	3.525.606.351.486	707	4.544.534.096.882	742	5.786.502.108.378
673	3.551.918.116.103	708	4.576.765.892.523	743	5.825.601.565.802
674	3.578.386.483.720	709	4.609.180.662.139	744	5.864.911.900.469
675	3.605.012.442.631	710	4.641.778.539.134	745	5.904.434.386.585
676	3.631.796.660.923	711	4.674.560.765.225	746	5.944.169.554.356
677	3.658.739.976.487	712	4.707.527.885.887	747	5.984.118.390.963
678	3.685.842.744.449	713	4.740.680.895.400	748	6.024.281.640.463
679	3.713.106.077.351	714	4.774.020.080.649	749	6.064.660.340.504
680	3.740.530.243.895	715	4.807.546.919.562	750	6.105.255.057.382
681	3.768.116.545.100	716	4.841.261.644.505	751	6.146.067.272.016
682	3.795.865.199.479	717	4.875.165.326.878	752	6.187.097.075.596
683	3.823.777.078.572	718	4.909.258.739.863	753	6.228.345.927.835
684	3.851.852.843.155	719	4.943.542.513.530	754	6.269.814.408.912
685	3.880.093.505.304	720	4.978.017.317.882	755	6.311.503.501.003
686	3.908.499.342.705	721	5.012.684.809.112	756	6.353.413.814.463
687	3.937.071.408.239	722	5.047.544.805.703	757	6.395.546.981.289
688	3.965.810.244.575	723	5.082.598.472.588	758	6.437.902.991.278

Tabelle C.28: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $654 \leq d \leq 758$ .

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
759	6.480.483.219.924	794	8.119.039.958.876	829	10.073.447.344.708
760	6.523.288.334.629	795	8.170.298.138.617	830	10.134.352.633.285
761	6.566.319.651.181	796	8.221.814.981.801	831	10.195.552.425.202
762	6.609.577.387.517	797	8.273.591.490.285	832	10.257.047.318.517
763	6.653.063.131.668	798	8.325.628.158.840	833	10.318.838.899.456
764	6.696.777.169.467	799	8.377.926.739.331	834	10.380.927.509.244
765	6.740.720.730.112	800	8.430.487.428.682	835	10.443.314.970.848
766	6.784.894.908.750	801	8.483.311.873.762	836	10.506.001.740.630
767	6.829.300.283.012	802	8.536.400.668.320	837	10.568.989.420.834
768	6.873.937.508.337	803	8.589.755.007.083	838	10.632.278.808.555
769	6.918.808.325.749	804	8.643.375.455.658	839	10.695.870.926.574
770	6.963.912.738.780	805	8.697.263.802.269	840	10.759.766.492.473
771	7.009.252.419.154	806	8.751.420.418.885	841	10.823.968.132.918
772	7.054.827.728.530	807	8.805.846.385.571	842	10.888.475.179.925
773	7.100.639.975.468	808	8.860.542.781.804	843	10.953.289.498.456
774	7.146.689.672.111	809	8.915.510.840.281	844	11.018.412.183.219
775	7.192.978.242.030	810	8.970.750.902.686	845	11.083.844.172.453
776	7.239.506.094.422	811	9.026.265.140.177	846	11.149.586.485.605
777	7.286.274.586.217	812	9.082.053.287.808	847	11.215.640.679.354
778	7.333.284.410.962	813	9.138.117.232.895	848	11.282.007.354.280
779	7.380.536.625.310	814	9.194.457.670.690	849	11.348.688.081.084
780	7.428.031.732.465	815	9.251.075.605.064	850	11.415.683.412.735
781	7.475.771.656.602	816	9.307.971.891.958	851	11.482.995.121.874
782	7.523.756.424.356	817	9.365.148.300.451	852	11.550.623.495.392
783	7.571.987.185.022	818	9.422.604.900.255	853	11.618.570.602.663
784	7.620.464.885.696	819	9.480.343.279.056	854	11.686.836.816.022
785	7.669.190.874.852	820	9.538.364.312.059	855	11.755.423.596.555
786	7.718.165.609.951	821	9.596.669.273.610	856	11.824.331.976.712
787	7.767.390.386.636	822	9.655.258.664.836	857	11.893.563.385.282
788	7.816.865.741.789	823	9.714.134.329.248	858	11.963.118.190.858
789	7.866.593.056.475	824	9.773.296.398.557	859	12.032.998.537.758
790	7.916.573.028.489	825	9.832.746.509.268	860	12.103.204.603.044
791	7.966.806.824.862	826	9.892.485.720.965	861	12.173.738.315.840
792	8.017.295.016.017	827	9.952.514.906.582	862	12.244.600.382.927
793	8.068.039.424.567	828	10.012.834.904.232	863	12.315.792.173.744

Tabelle C.29: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $759 \leq d \leq 863$ .

236 Anhang C. Anzahlen und Auflistungen von ganzzahligen Punktmengen

$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$	$d$	$\alpha(d, 3)$
864	12.387.314.216.363	897	14.940.778.744.087	930	17.898.972.827.486
865	12.459.168.763.556	898	15.024.249.135.906	931	17.995.414.226.496
866	12.531.356.123.596	899	15.108.092.236.438	932	18.092.270.317.640
867	12.603.877.709.894	900	15.192.308.794.063	933	18.189.543.391.362
868	12.676.734.645.672	901	15.276.901.257.952	934	18.287.234.204.271
869	12.749.928.189.204	902	15.361.869.673.981	935	18.385.344.240.579
870	12.823.459.073.334	903	15.447.215.741.022	936	18.483.874.725.000
871	12.897.329.403.578	904	15.532.940.704.205	937	18.582.827.743.421
872	12.971.539.369.197	905	15.619.046.032.591	938	18.682.203.720.087
873	13.046.090.688.045	906	15.705.532.477.297	939	18.782.004.647.833
874	13.120.984.417.467	907	15.792.402.018.627	940	18.882.231.158.104
875	13.196.221.508.025	908	15.879.655.145.721	941	18.982.885.809.086
876	13.271.803.345.044	909	15.967.293.658.348	942	19.083.968.600.820
877	13.347.731.432.383	910	16.055.318.499.349	943	19.185.481.984.090
878	13.424.006.317.136	911	16.143.731.654.759	944	19.287.426.420.018
879	13.500.629.653.099	912	16.232.533.192.973	945	19.389.804.000.431
880	13.577.602.128.303	913	16.321.725.735.374	946	19.492.615.962.122
881	13.654.925.792.837	914	16.411.309.410.524	947	19.595.863.585.095
882	13.732.600.803.334	915	16.501.286.094.364	948	19.699.547.830.186
883	13.810.629.632.349	916	16.591.657.094.664	949	19.803.671.054.437
884	13.889.012.083.576	917	16.682.423.759.027	950	19.908.233.784.859
885	13.967.750.212.531	918	16.773.586.920.981	951	20.013.237.839.039
886	14.046.845.249.767	919	16.865.148.541.205	952	20.118.684.214.367
887	14.126.298.067.946	920	16.957.109.053.082	953	20.224.575.161.560
888	14.206.109.637.734	921	17.049.470.695.548	954	20.330.910.806.333
889	14.286.282.218.809	922	17.142.234.178.843	955	20.437.693.685.523
890	14.366.815.798.424	923	17.235.401.224.569	956	20.544.924.668.048
891	14.447.712.415.766	924	17.328.972.280.119	957	20.652.605.404.521
892	14.528.972.762.451	925	17.422.950.096.043	958	20.760.736.959.216
893	14.610.598.895.472	926	17.517.334.790.187	959	20.869.321.079.540
894	14.692.590.873.235	927	17.612.128.093.082	960	20.978.358.597.822
895	14.774.950.806.234	928	17.707.331.348.581	961	21.087.852.400.787
896	14.857.679.487.872	929	17.802.946.101.294	962	21.197.802.129.161

Tabelle C.30: Anzahl  $\alpha(d, 3)$  ganzzahliger Tetraeder für  $864 \leq d \leq 962$ .

# D Verbotene minimale Graphen bzw. Abstandsmatrizen

## D.1 Verbotene minimale Graphen für Simplexes mit Seitenlängen zwei und drei

In Abschnitt 10.3 haben wir die Abbildung  $\omega_{a,b}$  betrachtet, die einen Graphen  $\mathcal{G}$  aus  $n$  Knoten auf eine Abstandsmatrix  $\Delta$  mit Abständen aus  $\{a, b\}$  abbildet. Ist  $\Delta$  kein Simplex im  $\mathbb{E}^{n-1}$ , so haben wir  $\mathcal{G}$  als verboten bezeichnet. Einen ver-

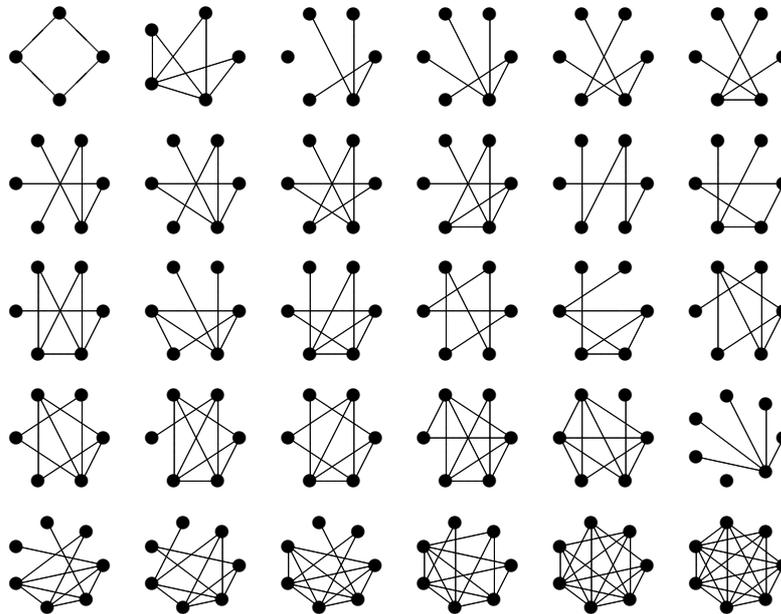


Abbildung D.1: Verbotene minimale Graphen für  $\{a, b\} = \{2, 3\}$  - Teil 1.

botenen Graphen, bei dem kein echter Untergraph verboten ist, haben wir als verbotenen minimalen Graphen bezeichnet. Für  $\{a, b\} = \{2, 3\}$  geben wir in Abbildung D.1 und in Abbildung D.2 die verbotenen minimalen Graphen aus höchstens 8 Knoten vollständig an.

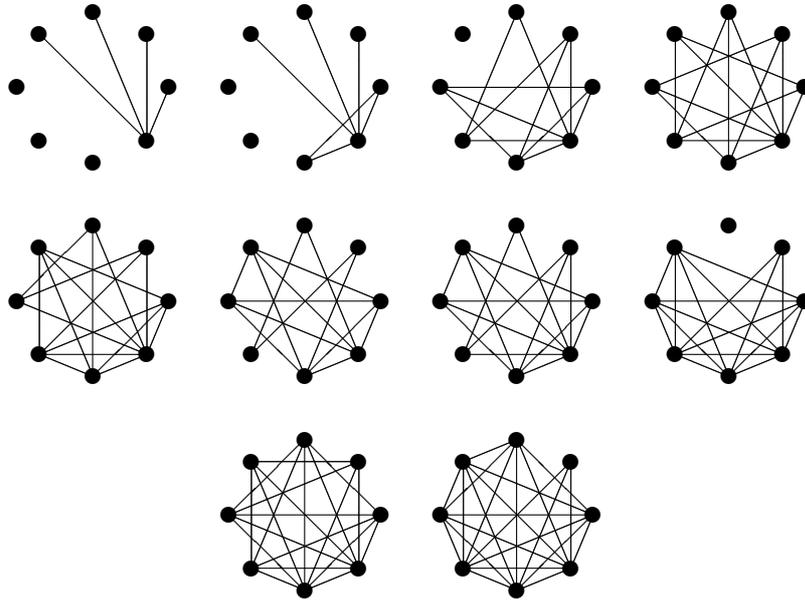


Abbildung D.2: Verbotene minimale Graphen für  $\{a, b\} = \{2, 3\}$  - Teil 2.

## D.2 Verbotene Abstandsmatrizen mit Abständen $a$ und $a+1$

In Abschnitt 10.3 hatten wir empirisch festgestellt, dass für  $a \leq 9$  jeder Graph  $\mathcal{G}$  aus höchstens  $a + 1$  Knoten, zu einem Simplex  $\omega_{a+1,a}(\mathcal{G})$  mit Abständen  $a$  und  $a + 1$  führt. In Lemma 10.3.4 konnten wir zeigen, dass der Graph

$$G = K_{\lceil \frac{a+2}{2} \rceil} \cup K_{\lfloor \frac{a+2}{2} \rfloor}$$

aus  $a + 2$  Punkten zu einer Abstandsmatrix  $\omega_{a+1,a}(\mathcal{G})$  führt, die kein Simplex ist. Für  $a \leq 5$  ist dies das einzige Beispiel dieser Art. Der Vollständigkeit halber listen

wir diese Abstandsmatrizen, die keine Simplizes sind, noch mal explizit auf:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 0 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 0 & 6 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 0 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für  $6 \leq a \leq 9$  gibt es mehrere Abstandsmatrizen mit Abständen  $a$  und  $a+1$ , die keine Simplizes sind. Da wir diese verbotenen Abstandsmatrizen weiter untersuchen möchten, transformieren wir sie auf Abstandsmatrizen mit Abständen 1 und  $x = \frac{a+1}{a}$ . In Abschnitt 10.3 hatten wir bereits erwähnt, dass es für jeden Graph  $\mathcal{G}$  aus  $n$  Knoten einen Wert  $\varsigma$  gibt, so dass  $\omega_{x,1}(\mathcal{G})$  für  $x < \varsigma$  ein Simplex ist, aber für  $x \geq \varsigma$  kein Simplex ist. Im Folgenden geben wir die verbotenen Abstandsmatrizen mit Abständen  $a$  und  $a+1$  zusammen mit den zugehörigen  $\varsigma$ -Werten an.

Verbotene Abstandsmatrizen aus 8 Punkten:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma = \frac{1}{10} \sqrt{90 + 10\sqrt{21}} \approx 1,1654$$

$$\varsigma = \frac{2}{3} \sqrt{3} \approx 1,1547$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma = \frac{1}{34} \sqrt{986 + 102\sqrt{33}} \approx 1,1661$$

Verbotene Abstandsmatrizen aus 9 Punkten:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma = \frac{2}{31} \sqrt{310} \approx 1,1359$$

$$\varsigma = \frac{1}{8} \sqrt{54 + 2\sqrt{217}} \approx 1,1420$$

Verbotene Abstandsmatrizen aus 10 Punkten:

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma = \frac{1}{2} \sqrt{5} \approx 1,11803$$

$$\varsigma = \frac{1}{7} \sqrt{42 + 14\sqrt{2}} \approx 1,12303$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & x & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & x & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 0 & x & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & 0 & x & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & 0 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & x & x & x & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & x & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & 0 & x & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & x & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varsigma = \frac{1}{62} \sqrt{3162 + 62\sqrt{741}} \approx 1,12322 \quad \varsigma = \frac{2}{19} \sqrt{114} \approx 1,12390$$

Wir stellen empirisch fest, dass der Wert von  $\varsigma$  unter den verbotenen Abstandsmatrizen aus  $n$  Punkten für

$$\Delta = \omega_{x,1}(G = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \cup K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

das Minimum annimmt. Zusammen mit  $\frac{n}{n-1} < \varsigma < \frac{n-1}{n-2}$  führt uns dies zu:

**D.2.1 Vermutung** Die Anzahl  $\alpha(\{a, a + 1\}, m)$  der Simplizes mit Abständen  $a$  und  $a + 1$  stimmt genau dann mit der Anzahl der Graphen auf  $m + 1$  Knoten überein, wenn  $a \geq m$  gilt.



# Literaturverzeichnis

- [1] P. P. Alejandro, A. Betten, and A. C. Niemeyer. Orderly generation of half regular symmetric designs via Rahilly families of pre-difference sets. *J. Geom.*, 67(1-2):2–22, 2000.
- [2] J. H. J. Almering. *Rationaliteitseigenschappen in de vlakke meetkunde (Rationalitätseigenschaften in der ebenen Geometrie)*. PhD thesis, Universiteit van Amsterdam, 1950.
- [3] J. H. J. Almering. Rational quadrilaterals. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 66:192–199, 1963.
- [4] J. H. J. Almering. Rational quadrilaterals. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 68:290–304, 1965.
- [5] R. C. Alperin. A quartic surface of integer hexahedra. *Rocky Mt. J. Math.*, 31(1):37–43, 2001.
- [6] M. Altwegg. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elem. Math.*, 7:56–58, 1952.
- [7] W. Anderson, W. Simons, J. Mauldon, and J. C. Smith. Elementary problems and solutions: A dense subset of the unit circle (e2697). *American Mathematical Monthly*, 86(3):225, 1979.
- [8] G. E. Andrews. A note on partitions and triangles with integer sides. *Amer. Math. Monthly*, 86:477–478, 1979.
- [9] D. Ang, D. E. Daykin, and T. K. Sheng. On Schoenberg’s rational polygon problem. *J. Aust. Math. Soc.*, 9:337–344, 1969.
- [10] N. H. Anning and P. Erdős. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51:598–600, 1945.

- [11] P. Bachmann. *Zahlentheorie. I: Die Elemente der Zahlentheorie*. Anastatischer Nachdruck der ersten Aufl. XII + 264 S. Leipzig, B. G. Teubner, 1929.
- [12] J. L. Balcázar, J. Díaz, and J. Gabarró. *Structural complexity. 1.2nd rev. ed.* Berlin: Springer-Verlag. xiii, 208 p., 1995.
- [13] T. G. Berry. Points at rational distance from the vertices of a triangle. *Acta Arith.*, 62(4):391–398, 1992.
- [14] A. S. Besicovitch. Rational polygons. *Mathematica*, 6:98, 1959.
- [15] A. Betten. *Schnittzahlen von Designs. (Intersection numbers of designs)*. PhD thesis, Bayreuth. Math. Schr. 58. Universität Bayreuth, 2000.
- [16] J. Biegholdt. Computerunterstützte Berechnung von Multigraphen mittels Homomorphieprinzip. Master's thesis, Universität Bayreuth, 1995.
- [17] H. Bowman, E. Boiten, J. Derrick, and M. Steen. Strategies for consistency checking. Technical Report 12-95\*, University of Kent, Computing Laboratory, University of Kent, Canterbury, UK, November 1995.
- [18] P. Brass and C. Knauer. Testing the congruence of  $d$ -dimensional point sets. *Int. J. Comput. Geom. Appl.*, 12(1-2):115–124, 2002.
- [19] P. Brass and C. Knauer. Testing congruence and symmetry for general 3-dimensional objects. *Comput. Geom.*, 27(1):3–11, 2004.
- [20] M. Braun. *Konstruktion diskreter Strukturen unter Verwendung von Operationen linearer Gruppen auf dem linearen Verband*. PhD thesis, Bayreuth. Math. Schr. 69. Universität Bayreuth, 2003.
- [21] C. Bron and J. Kerbosch. Finding all cliques of an undirected graph. *Commun. ACM*, 16:575–577, 1973.
- [22] R. H. Buchholz. Perfect pyramids. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 45(3):353–368, 1992.
- [23] P. Bürgisser, M. Clausen, and M. Shokrollahi. *Algebraic complexity theory. With the collaboration of Thomas Lickteig*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 315. Berlin: Springer. xxiii, 618 p., 1997.
- [24] B. F. Burke and F. Graham-Smith. *An introduction to radio astronomy*. Cambridge University Press, second edition, 2002.

- [25] G. Campbell. Points on  $y = x^2$  at rational distance. *Math. Comp.*, 73:2093–2108, 2004.
- [26] F. R. K. Chung, E. Szemerédi, and W. Trotter. The number of different distances determined by a set of points in the euclidean plane. *Discrete Comput. Geom.*, 7:1–11, 1992.
- [27] C. J. Colbourn and R. C. Read. Orderly algorithms for generating restricted classes of graphs. *J. Graph Theory*, 3:187–195, 1979.
- [28] C. J. Colbourn and R. C. Read. Orderly algorithms for graph generation. *Int. J. Comput. Math.*, 7:167–172, 1979.
- [29] G. Cooperman and L. Finkelstein. A strong generating test and short presentations for permutation groups. *Journal of Symbolic Computation*, 1991.
- [30] H. T. Croft, K. J. Falconer, and R. K. Guy. *Unsolved problems in geometry*. 2. New York etc.: Springer-Verlag. xv, 198 p. , 1991.
- [31] C. d’Andrea and M. Sombra. The Cayley-Menger determinant is irreducible for  $n \geq 3$ . *Siberian Mathematical Journal*, 46:90–97, 2005.
- [32] B. Datta. On Mahavira’s solution of rational triangles and quadrilaterals. *Bulletin Calcutta M. S.*, 20:267–294, 1930.
- [33] D. E. Daykin. Rational polygons. *Mathematika, Lond.*, 10:125–131, 1963.
- [34] L. E. Dickson. Rational triangles and quadrilaterals. *Amer. Math. Monthly*, 28:244–250, 1921.
- [35] L. E. Dickson. *History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality. Vol. II: Diophantine analysis. Vol. III: Quadratic and higher forms. Reprint of the 1920-1923 originals*. New York, NY: Chelsea Publishing Co. xii, 486 p./v.1; xxv, 803 p./v.2; v, 313 p./v.3 , 1966.
- [36] R. Diestel. *Graphentheorie. (Graph theory). 2., neu bearb. und erw. Aufl.* Berlin: Springer. xvi, 314 S., 2000.
- [37] S. Dimiev. Problems for Erdős-Diophantine graphs. In *EWM International Workshop on Groups and Graphs*, pages 39–42, 2002.
- [38] S. Dimiev and K. Markov. Gauss Integers and Diophantine Figures. *Mathematics and Mathematical Education*, 31:88–95, 2002. arXiv:math.NT/0203061v1 7 Mar 2002.

- [39] S. Dimiev and I. Tonov. Diophantine Figures. *Mathematics and Mathematical Education*, 15:78–85, 1986. (Auf Bulgarisch).
- [40] S. J. Einhorn. *Positive Semi-definite Functions and Euclidean Sets with only Two Distances*. PhD thesis, University of Pennsylvania, 1966.
- [41] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg. On Euclidean sets having only two distances between points. I, II. *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, 69:479–488, 1966.
- [42] R. Engelking. Dense subsets with rational distances in separable metric spaces (from a letter to P. Hamburger). In *Topics in Topol., Colloqu. Keszthely 1972*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 8, page 241. North-Holland Publishing Company, 1974.
- [43] P. Erdős. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51:996, 1945.
- [44] P. Erdős and H.-J. Kanold. Aufgabe 856a. *Elem. Math*, 37:56–58, 1982.
- [45] P. Erdős and A. Rényi. Asymmetric graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 14:295–315, 1963.
- [46] J. M. R. Espinosa, A. Herrero, and F. SÁCHCHEZ, editors. *Instrumentation for large telescopes*. Cambridge contemporary astrophysics. Cambridge University Press, 1997.
- [47] I. Fary. On straight line representation of planar graphs. *Acta Univ. Szeged., Acta Sci. Math.*, 11:229–233, 1948.
- [48] R. E. Fullerton. Integral distances in Banach spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:901–905, 1949.
- [49] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*. A Series of Books in the mathematical Sciences. San Francisco: W. H. Freeman and Company. X, 338 p., 1979.
- [50] B. Gleijeses. Points at mutual integral distances in  $S^n$ . *Fibonacci Q.*, 19:153–160, 1981.
- [51] R. L. Graham, B. L. Rothschild, and E. G. Straus. Are there  $n + 2$  points in  $E^n$  with odd integral distances? *Amer. Math. Monthly*, 81:21–25, 1974.
- [52] R. Grund. Konstruktion schlichter Graphen mit gegebener Gradpartition. (Construction of simple graphs with given degree partition). *Bayreuth. Math. Schr.*, 44:73–104, 1993.

- [53] R. Grund. *Konstruktion molekularer Graphen mit gegebenen Hybridisierungen und überlappungsfreien Fragmenten*. PhD thesis, Universität Bayreuth, 1994.
- [54] T. Grüner. Ein neuer Ansatz zur rekursiven Erzeugung von schlichten Graphen. Master's thesis, Universität Bayreuth, 1995.
- [55] T. Grüner. *Strategien zur Konstruktion diskreter Strukturen*. PhD thesis, Universität Bayreuth, 1998.
- [56] R. Gugisch. *Konstruktion von Isomorphieklassen orientierter Matroide*. PhD thesis, Universität Bayreuth, (to appear).
- [57] R. K. Guy. *Unsolved problems in number theory. 2nd ed.* Unsolved Problems in Intuitive Mathematics. 1. New York, NY: Springer-Verlag. xvi, 285 p., 1994.
- [58] R. K. Guy and J. H. Conway. *Zahlenzauber*. Birkhäuser, 1996.
- [59] C. Haase and S. Kurz. A bijection between the  $d$ -dimensional simplices with distances in  $\{1, 2\}$  and the partitions of  $d + 1$ . *J. Comb. Theory, Ser. A*, (to appear).
- [60] T. Hagerup. Hybridsort revisited and parallelized. *Inf. Process. Lett.*, 32(1):35–39, 1989.
- [61] H. Harborth. On the problem of P. Erdős concerning points with integral distances. *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, 175:206–207, 1970.
- [62] H. Harborth. Antwort auf eine Frage von P. Erdős nach fünf Punkten mit ganzzahligen Abständen. (Answer to a question of P. Erdős for five points with integer distances). *Elem. Math.*, 26:112–113, 1971.
- [63] H. Harborth. Match sticks in the plane. In R. K. Guy and R. E. Woodrow, editors, *The lighter side of mathematics. Proceedings of the Eugène Strens memorial conference on recreational mathematics and its history*, pages 281–288. Spectrum Series. Washington, WA: Mathematical Association of America., 1994.
- [64] H. Harborth. Integral distances in point sets. In Butzer, P. L. (ed.) et al., *Karl der Grosse und sein Nachwirken. 1200 Jahre Kultur und Wissenschaft in Europa. Band 2: Mathematisches Wissen*. Turnhout: Brepols, pages 213–224. 1998.

- [65] H. Harborth and A. Kemnitz. Diameters of integral point sets. In *Intuitive geometry, Pap. Int. Conf., Siófok/Hung. 1985, Colloq. Math. Soc. János Bolyai 48*, volume 48, pages 255–266. North-Holland Publishing Company, 1987.
- [66] H. Harborth and A. Kemnitz. Integral representations of graphs. In R. Bodendiek, editor, *Contemporary methods in graph theory. In honour of Prof. Dr. K. Wagner*, pages 359–367. Spektrum Akadem. Verlag, 1990.
- [67] H. Harborth, A. Kemnitz, and M. Möller. An upper bound for the minimum diameter of integral point sets. *Discrete Comput. Geom.*, 9(4):427–432, 1993.
- [68] H. Harborth, A. Kemnitz, M. Möller, and A. Süssenbach. Ganzzahlige planare Darstellungen der platonischen Körper. (Integral planar representations of the platonic polyhedra). *Elem. Math.*, 42(5):118–122, 1987.
- [69] H. Harborth and M. Möller. Ebene geradlinige Darstellungen der platonischen Graphen mit wenigen verschiedenen Kantenlängen. (Plane straight-line drawings of the Platonic graphs having only a few distinct edge lengths). *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.*, 45:7–20, 1994.
- [70] H. Harborth and M. Möller. Minimum integral drawings of the platonic graphs. *Math. Mag.*, 67(5):355–358, 1994.
- [71] H. Harborth and M. Möller. Smallest integral combinatorial box. In G. E. Bergum et al., editors, *Applications of Fibonacci numbers*, volume 7, pages 153–159. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
- [72] H. Harborth and L. Piepmeyer. Points sets with small integral distances. In P. Gritzmann and B. Sturmfels, editors, *Applied geometry and discrete mathematics, Festschr. 65th Birthday Victor Klee*, volume 4 of DIMACS, Ser. Discret. Math. Theor. Comput. Sci., pages 319–324. American Mathematical Society, 1991.
- [73] H. Harborth and L. Piepmeyer. Two-distance sets and the golden ratio. In Bergum, G. E. (ed.) et al., *Applications of Fibonacci numbers. Volume 5: Proceedings of the fifth international conference on Fibonacci numbers and their applications, University of St. Andrews, Scotland, July 20-24, 1992*, pages 279–288. Kluwer Academic Publishers, 1993.

- [74] H. Harborth and L. Piepmeyer. On special integral Erdős point sets. In K. Böröczky et al., editors, *Intuitive geometry. Proceedings of the 3rd international conference held in Szeged, Hungary, from 2 to 7 September, 1991. Colloq. Math. Soc. János Bolyai*. 63, pages 139–149. North-Holland Publishing Company, 1994.
- [75] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers. 5th ed.* Oxford etc.: Oxford at the Clarendon Press. XVI, 426 p. , 1979.
- [76] J. Håstad. Clique is hard to approximate within  $n^{1-\epsilon}$ . *Acta Math.*, 182(1):105–142, 1999.
- [77] R. Hohberger. Computerunterstützte Konstruktion diskreter Strukturen mit vorgegebenen Symmetrieeigenschaften. Master’s thesis, Universität Bayreuth, 1994.
- [78] D. F. Holt, B. Eick, and E. A. O’Brien. *Handbook of computational group theory. Discrete Mathematics and its Applications.* Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC Press. xvi, 514 p. , 2005.
- [79] M. Jerrum. A compact representation for permutation groups. *J. Algorithms*, 7:60–78, 1986.
- [80] J. H. Jordan. Almost regular integer hexagons. *J. Geom*, 1:116–119, 1990.
- [81] J. H. Jordan and B. E. Peterson. Almost regular integer Fibonacci pentagons. *Rocky Mt. J. Math.*, 23(1):243–247, 1993.
- [82] J. H. Jordan and B. E. Peterson. The rational heart of the integer Fibonacci pentagons. In G. E. Bergum et al., editors, *Applications of Fibonacci numbers. Volume 6: Proceedings of the sixth international research conference on Fibonacci numbers and their applications, Washington State University, Pullman, WA, USA, July 18-22, 1994*, pages 381–388. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [83] J. H. Jordan, R. Walch, and R. J. Wisner. Triangles with integer sides. *Amer. Math. Monthly*, 86:686–689, 1979.
- [84] V. Kaibel and A. Schwartz. On the complexity of polytope isomorphism problems. *Graphs Comb.*, 19(2):215–230, 2003.
- [85] H.-J. Kanold. Über Punktmengen im k-dimensionalen euklidischen Raum. *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 32:55–65, 1981.

- [86] P. Kaski. Isomorph-free exhaustive generation of designs with prescribed group of automorphisms. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, (to appear).
- [87] A. Kemnitz. Punktmengen mit ganzzahligen Abständen. Habilitationsschrift, TU Braunschweig, 1988.
- [88] A. Kemnitz. Rational quadrangles. *Congr. Numerantium*, 76:193–199, 1990.
- [89] A. Kemnitz. Rational triangles. In Böröczky, K. (ed.) et al., *Intuitive geometry. Proceedings of the 3rd international conference held in Szeged, Hungary, from 2 to 7 September, 1991. Colloq. Math. Soc. János Bolyai. 63*, pages 183–187. North-Holland Publishing Company, 1994.
- [90] A. Kemnitz and H. Harborth. Plane integral drawings of planar graphs. *Discrete Math.*, 236(1-3):191–195, 2001.
- [91] A. Kerber. Algebraische Kombinatorik mittels endlicher Gruppenoperationen. (Algebraic combinatorics via finite group operations.). *Bayreuth. Math. Schr.*, 33:39–90, 1990.
- [92] A. Kerber. *Applied finite group actions. 2nd, rev. and exp. ed.* Algorithms and Combinatorics. 19. Berlin: Springer. xxvi, 454 p., 1999.
- [93] A. Kerber. Constructing finite unlabeled structures using group actions. *Annals of Combinatorics*, 5:363–380, 2001.
- [94] A. Kerber and R. Laue. Group actions, double cosets, and homomorphisms: Unifying concepts for the constructive theory of discrete structures. *Acta Appl. Math.*, 52(1-3):63–90, 1998.
- [95] V. Klee and S. Wagon. *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* The Dolciani Mathematical Expositions. 11. Washington, DC: Mathematical Association of America. xv, 333 p., 1991.
- [96] F. Klein. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Zweiter Band: Geometrie.* Ausgearbeitet von E. Hellinger. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Band 15.) 3. Aufl. Berlin: Verlag von Julius Springer 1925. Nachdruck 1968. XI, 302 S. mit 157 Abb., 1968.
- [97] D. E. Knuth. Lexicographic permutations with restrictions. *Discrete Appl. Math.*, 1:117–125, 1979.

- [98] A. Kohnert and S. Kurz. A note on Erdős-Diophantine graphs and Diophantine carpets. (submitted).
- [99] G. Kolesova, C. W. H. Lam, and L. Thiel. On the number of  $8 \times 8$  Latin squares. *J. Comb. Theory, Ser. A*, 54:143–148, 1990.
- [100] E. E. Kummer. Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind. *J. reine angew. Math.*, 37:1–20, 1848.
- [101] S. Kurz. <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/sascha>.
- [102] S. Kurz. On the characteristic of integral point sets in  $\mathbb{E}^m$ . *Australas. J. Comb.* (to appear).
- [103] S. Kurz and A. Wassermann. On the minimum diameter of plane integral point sets. (submitted).
- [104] A. V. Kuz'minykh. On integral distances. *Sov. Math., Dokl.*, 18:189–191, 1977.
- [105] A. V. Kuz'minykh. On sets with almost integral distances. *Sib. Mat. Zh.*, 23(4):99–102, 1982.
- [106] A. V. Kuz'minykh. Sets with almost-integral distances. *Sib. Math. J.*, 23:527–530, 1983.
- [107] J. Lagrange. Points du plan dont les distances mutuelles sont rationnelles. *Sémin. Théor. Nombres*, 1983.
- [108] C. W. H. Lam. The search for a finite projective plane of order 10. *American Math. Mon.*, 98:305–318, 1991.
- [109] C. W. H. Lam. Computational combinatorics - a maturing experimental approach. 177 pages, privat copy received from R. Laue, 1992.
- [110] C. W. H. Lam and L. Thiel. Backtrack search with isomorph rejection and consistency check. *J. Symb. Comput.*, 7(5):473–485, 1989.
- [111] E. Lang. Datenstrukturen und Algorithmen für Permutationsgruppen. Master's thesis, Universität Bayreuth, 1992.
- [112] R. Laue. Computing double coset representatives for the generation of solvable groups. *Lecture Notes in Computer Science*, 1982.

- [113] R. Laue. Construction of combinatorial objects: A tutorial. *Bayreuth. Math. Schr.*, 43:53–96, 1993.
- [114] H. W. Lenstra Jr. Algorithms in algebraic number theory. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(2):211–244, 1992.
- [115] B. D. McKay. <http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty>.
- [116] B. D. McKay. Practical graph isomorphism. *Congr. Numerantium*, 30:45–87, 1981.
- [117] K. Mehlhorn. *Datenstrukturen und effiziente Algorithmen. Band 1: Sortieren und Suchen. Nach der englischen Fassung durchgesehen und ins Deutsche übertragen von Hans Rohnert. 2. Aufl. (Data structures and efficient algorithms. Vol. 1: Sorting and searching). Leitfäden und Monographien der Informatik.* Stuttgart: B. G. Teubner. X, 317 S.; DM 48.00, 1988.
- [118] K. Menger. Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.*, 100:75–163, 1928.
- [119] M. Meringer. Erzeugung regulärer Graphen. Master's thesis, Universität Bayreuth, 1996.
- [120] M. Meringer. *Mathematische Modelle für die kombinatorische Chemie und die molekulare Strukturaufklärung.* PhD thesis, Universität Bayreuth, 2004.
- [121] T. Miyazaki. The complexity of McKay's canonical labeling algorithm. In L. Finkelstein et al., editors, *Groups and computation II. Workshop on groups and computation, June 7–10, 1995, New Brunswick, NJ, USA. Providence, DIMACS, Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, pages 239–256. American Mathematical Society, 1997.
- [122] M. Möller. *Ganzzahlige Darstellungen von Graphen in der Ebene.* PhD thesis, TU Braunschweig, 1990.
- [123] P. L. Montgomery. A survey of modern integer factorization algorithms. *CWI Q.*, 7(4):337–366, 1994.
- [124] L. J. Mordell. Rational quadrilaterals. *J. Lond. Math. Soc.*, 35:277–282, 1960.
- [125] M. A. Morrison and J. Brillhart. A method of factoring and the factorization of  $F_7$ . *Math. Comput.*, 29:183–205, 1975.

- [126] J. Mozrzymas. Crystal symmetry groups and their representations. I: Lattice extensions of point groups in  $R^2$  and  $R^3$ . *Rep. Math. Phys.*, 6:29–82, 1974.
- [127] A. Müller. Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen. *Elem. Math.*, 8:37–38, 1953.
- [128] <http://www.merlin.ac.uk>.
- [129] <http://www.vla.nrao.edu>.
- [130] O. Nevalainen and T. Raita. An internal hybrid sort algorithm revisited. *Comput. J.*, 35(2):177–183, 1992.
- [131] S. Niskanen and P. R. J. Östergård. Cliquer user's guide, version 1.0. Technical Report T48, Communications Laboratory, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland, 2003.
- [132] L. C. Noll and D. I. Bell.  $n$ -clusters for  $1 < n < 7$ . *Math. Comput.*, 53(187):439–444, 1989.
- [133] P. R. J. Östergård. A new algorithm for the maximum-weight clique problem. *Nord. J. Comput.*, 8(4):424–436, 2001.
- [134] P. R. J. Östergård. A fast algorithm for the maximum clique problem. *Discrete Appl. Math.*, 120(1-3):197–207, 2002.
- [135] C. H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Amsterdam: Addison-Wesley Publishing Company. xv, 523 p., 1994.
- [136] W. D. Peeples Jr. Elliptic curves and rational distance sets. *Proc. Am. Math. Soc.*, 5:29–33, 1954.
- [137] B. E. Peterson. *Integer Polyhedra and the Perfect Box*. PhD thesis, Washington State University, 1993.
- [138] B. E. Peterson and J. H. Jordan. Integer hexahedra equivalent to perfect boxes. *Amer. Math. Monthly*, 102(1):41–45, 1995.
- [139] B. E. Peterson and J. H. Jordan. Integer geometry: Some examples and constructions. *Math. Gaz.*, 81(490):18–28, 1997.
- [140] B. E. Peterson and J. H. Jordan. Integer antiprisms and integer octahedra. *Math. Mag.*, 72(4):277–286, 1999.

- [141] L. Piepmeyer. Räumliche ganzzahlige Punktmengen. Master's thesis, TU Braunschweig, 1988.
- [142] L. Piepmeyer. *Punktmengen mit minimaler Anzahl verschiedener Abstände*. PhD thesis, Technische Universität Braunschweig, 1993.
- [143] L. Piepmeyer. The maximum number of odd integral distances between points in the plane. *Discrete Comput. Geom.*, 16(1):113–115, 1996.
- [144] M. Pohst and H. Zassenhaus. *Algorithmic algebraic number theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 30. Cambridge etc.: Cambridge University Press. xiv, 465 p. , 1989.
- [145] C. Pomerance. Analysis and comparison of some integer factoring algorithms. In H. W. Lenstra and R. Tijdeman, editors, *Computational methods in number theory*, number 154 in Mathematical Centre tracts, pages 89–139. Mathematisch Centrum, 1982.
- [146] R. C. Read. Every one a winner or how to avoid isomorphism search when cataloguing combinatorial configurations. *Ann. Discrete Math.*, 2:107–120, 1978.
- [147] K. R. Reischuk. *Komplexitätstheorie. Band I: Grundlagen. Maschinenmodelle, Zeit- und Platzkomplexität, Nichtdeterminismus. (Complexity theory. Vol. 1: Foundations. Machine models, time and place complexity, nondeterminism)*. 2., völlig neubearb. u. erw. Aufl. Leitfäden der Informatik. Stuttgart: Teubner. xvii, 353 S., 1998.
- [148] H. Riesel. *Prime numbers and computer methods for factorization. 2nd ed.* Progress in Mathematics (Boston, Mass.). 126. Boston, MA: Birkhäuser. xvi, 464 p., 1994.
- [149] O. J. Rödseth. Integer factorization. *Mainz. Semin.ber.*, 3:69–83, 1993.
- [150] M. Rosenfeld. Odd integral distances among points in the plane. *Geombinatorics*, 5(4):156–159, 1996.
- [151] K. R. S. Sastry. Brahmagupta quadrilaterals. *Forum Geom.*, 2:167–173, 2002.
- [152] C. Schade. Exakte maximale Anzahlen gleicher Abstände. Master's thesis, TU Braunschweig, 1993.

- [153] B. Schmalz. Verwendung von Untergruppenleitern zur Bestimmung von Doppelnebenklassen. *Bayreuth. Math. Schr.*, 31:109–143, 1990.
- [154] B. Schmalz. *t-Designs zu vorgegebener Automorphismengruppe. (t-designs with prescribed automorphism group)*. PhD thesis, Bayreuth. Math. Schr. 41. Bayreuth: Univ. Bayreuth, 164 S. , 1992.
- [155] R. L. E. Schwarzenberger. *N-dimensional crystallography*. Research Notes in Mathematics. 41. San Francisco - London -Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. VI, 139 p., 1980.
- [156] M. Senechal. *Crystalline symmetries. An informal mathematical introduction*. Bristol etc.: Adam Hilger. xi, 137 p., 1990.
- [157] T. K. Sheng. Rational polygons. *J. Aust. Math. Soc.*, 6:452–459, 1966.
- [158] T. K. Sheng and D. E. Daykin. On approximating polygons by rational polygons. *Math. Mag.*, 39:299–300, 1966.
- [159] W. Sierpinski. Sur les ensembles de points aux distances rationnelles situés sur un cercle. *Elem. Math.*, 14:25–27, 1959.
- [160] C. C. Sims. Computation with permutation groups. In S. R. Petrick, editor, *Symbolic and algebraic manipulation, Proc. 2nd Symp., Los Angeles 1971*, pages 23–28. ACM Press, 1971.
- [161] M. J. Sippl and H. A. Scheraga. Cayley-Menger coordinates. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83:2283–2287, 1986.
- [162] J. Solymosi. Note on integral distances. *Discrete Comput. Geom.*, 30(2):337–342, 2003.
- [163] D. Sommerville. *An introduction to the geometry of n dimensions. Unabridged and unaltered republ. of the first ed. 1929*. New York: Dover Publications, Inc. XVII, 196 p. , 1958.
- [164] F. Steiger. Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elem. Math.*, 8:66–67, 1953.
- [165] S. K. Stein. Convex maps. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2:464–466, 1951.
- [166] H. S. Stone. *Discrete mathematical structures and their applications*. SRA Computer Science Series. Chicago etc.: Science Research Associates, Inc., a subsidiary of IBM. 402 p., 1973.

- [167] R. E. Tarjan and A. E. Trojanowski. Finding a maximum independent set. *SIAM J. Comput.*, 6:537–546, 1977.
- [168] A. R. Thompson, J. M. Moran, and G. W. Swenson Jr. *Interferometry and synthesis in radio astronomy*. John Wiley & sons, New York, 2001.
- [169] S. M. Ulam. *A collection of mathematical problems*. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. No. 8.) New York and London: Interscience Publishers. XIII, 150 p. , 1960.
- [170] A. van der Poorten. The Hermite-Serret algorithm and  $12^2 + 33^2$ . In K.-Y. Lam et al., editors, *Cryptography and computational number theory*, pages 129–136. Birkhäuser, Basel, 2001. Proceedings of the workshop, CCNT'99, Singapore, November 22-26, 1999.
- [171] K. Wagner. Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 46:26–32, 1936.
- [172] M. Wang. *Canonical forms of discrete objects for databases and internet data exchange*. PhD thesis, Universität Bayreuth, (in preparation).
- [173] T. Wieland. *Konstruktionsalgorithmen bei molekularen Graphen und deren Anwendung*. PhD thesis, Universität Bayreuth, 1996.
- [174] R. Wohlleben, H. Mattes, and T. Krichbaum. *Interferometry in radioastronomy and radar techniques*. Kluwer academic publishers, 1991.
- [175] G. M. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. 152. Berlin: Springer-Verlag. ix, 370 p. , 1995.

# Index

- Abstandsmatrix, 15
- allgemeine Lage, 30
- aufblasen, 133
- Aufwand logarithmieren, 162
- Automorphismengruppe, 17, 103
  
- Bahn, 164
  
- Cayley-Menger-Determinante, 17
- Charakteristik
  - eines Dreiecks, 28
  - einer ganzzahligen  $m$ -dimensionalen Punktmenge, 29
  - einer planaren ganzzahligen Punktmenge, 28
  - eines Simplex, 28
- Clique, 85
  
- diskrete Strukturen, i, 36
- Doppelnebenklasse, 165
- Dreieck
  - ganzzahliges, 1
- Durchmesser, 5, 69
  - minimaler, 69, 125
  
- Einbettbarkeit, 17, 19
- Erweiterungsfunktion, 36, 38
  
- Fünfeck
  - Anzahl ganzzahliger, 216
  - ganzzahliges, 1, 207
- Fehler, 12
  - Hardware-, 12
  - Programmier-, 12
  - systematische, 12
  
- ganzzahlig, 1
- Graph
  - knotengewichteter, 163
  - verbotener, 154
  - verbotener minimaler, 154, 239
- Gruppenoperation, 164
  
- Homomorphieprinzip, 161
- Hybridsort, 50
  
- induzierter Teilgraph, 154
- Interferenz, 1
- iterierte Klassifizierung, 24, 106
  
- Kandidatenmenge, 111
- kanonisch, 36
- Kanonisierung, 111
- Kanonizitätstest, 36
- Kanonizitätsvektor, 117
- Konsistenztests, 12
- Koordinatendarstellung, 25
  
- Labelled Branching, 106
- Lage

- allgemeine, 30
  - semi-allgemeine, 30
- Leiterspiel, 167
- Lerneffekt, 111–116
- Lernfunktion, 112
- minimaler Durchmesser, 69
- n-Cluster, 10, 97
- Normalform von Abstandsmatrizen, 17
- obere-Schranken-Abbildung, 113
- Objekte, 36
- Ordnung
  - lexikographische, 22
  - reduzierte Spalten-lexikographische, 24
  - reduzierte Zeilen-lexikographische, 24
- ordnungstreue Erzeugung, 36
- Permutation
  - unvollständige, 113
- Punktmenge, 1
  - ähnliche, 16
  - äquivalente, 15
  - ganzzahlige, 1
  - maximale, 97
  - nicht erweiterbare, 97
  - normierte, 141
  - primitive, 16
  - rationale, 1
  - unendliche, 4
- Radioantennen, 1–3
- Radioastronomie, 1
- rational, 1
- Sechseck
  - ganzzahliges, 1, 92–95, 220
- semi-allgemeine Lage, 30
- semi-kanonisch, 38
- Simplex
  - Anzahl ganzzahliger, 143
  - ganzzahliger, 5
- Stabilisatorkette, 106
- Streichholzprobleme, 1
- Tetraeder
  - Anzahl ganzzahliger, 145, 229
- Untergraph, 154
- Viereck
  - Anzahl ganzzahliger, 216
  - ganzzahliges, 1
- Volumen,  $m$ -dimensionales, 18
- Young-Gruppe, 166