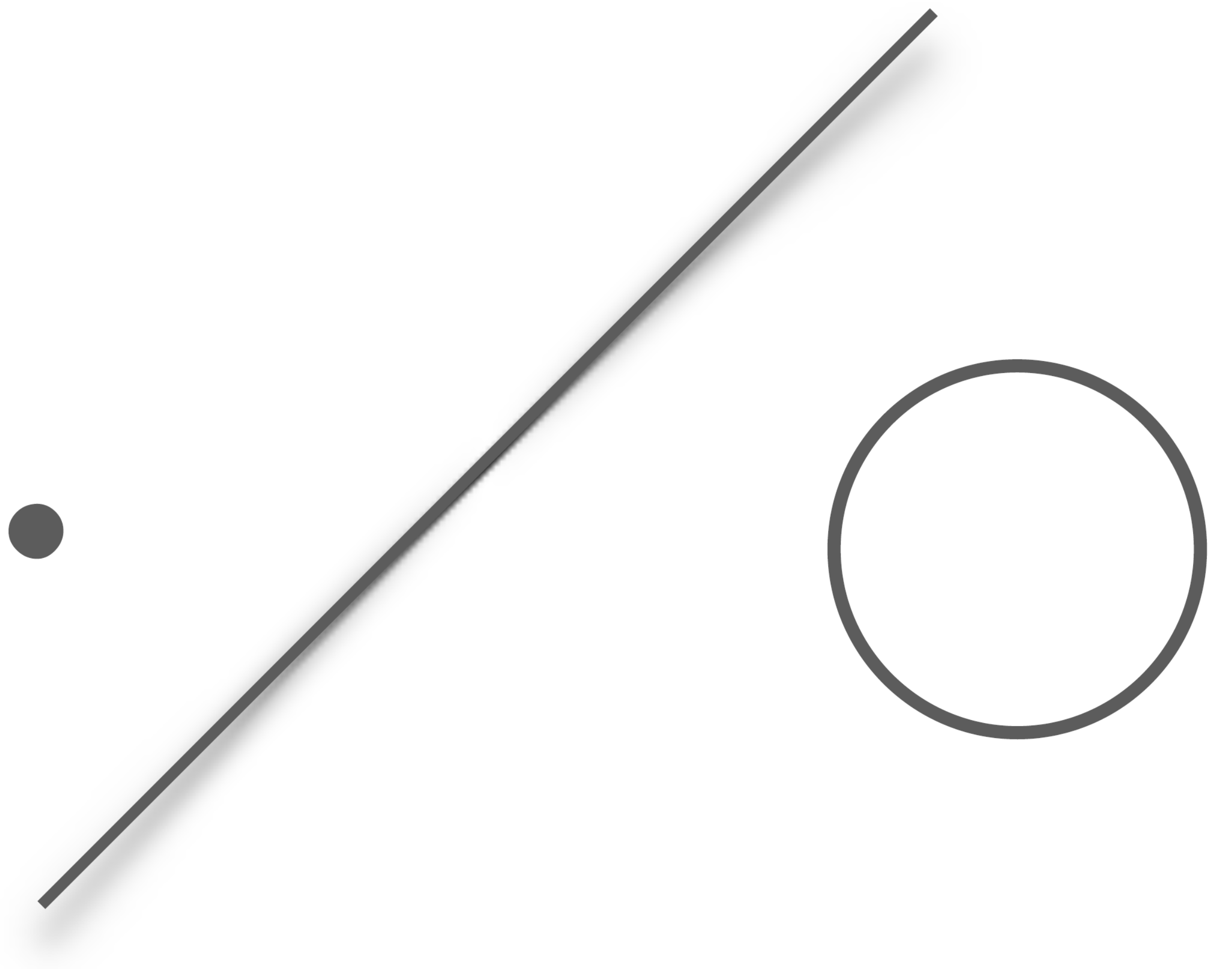
Tobias Zeitler

ISSN 2568-0331

Punkt, Gerade, Kreis:

Eine verfahrensbasierte Herleitung von Grundvorstellungen



Mathematikdidaktik im Kontext

Heft 9

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Grundvorstellungen zu den mathematischen Begriffen Punkt, Gerade und Kreis. Konkret werden anhand eines theoriebasierten Verfahrensrahmens normative Grundvorstellungen zu diesen Begriffen im Kontext der Sekundarstufe an Gymnasien nach dem bayerischen LehrplanPLUS hergeleitet. Dabei werden im Rahmen einer Sachanalyse jeweils das mathematische Konzept sowie relevante Phänomene analysiert, d. h. Anwendungen, die historische Begriffsgenese und typische Darstellungen, bevor unter Einbezug relevanter empirischer Ergebnisse verschiedene Klassen gebildet werden. Auf Grundlage dieser Klassen können im folgenden Schritt die einzelnen Grundvorstellungen formuliert und auf Zusammenhänge untersucht werden. Anhand der für die einzelnen Vorstellungen erforderlichen Grundkenntnisse kann der eingangs gewählte Bezugsrahmen daraufhin weiter präzisiert werden. Nachdem auf diese Weise normative Grundvorstellungen zum Begriff des Punktes, der Geraden und des Kreises entwickelt wurden, erhält die Arbeit durch einen abschließenden Praxisteil auch eine deskriptive Dimension. Dazu wurden Lernende der 5. und 11. Jahrgangsstufe bezüglich ihrer Vorstellungen zu den genannten Begriffen befragt und ihre Anworten hinsichtlich der hergeleiteten Grundvorstellungen eingeordnet. Insgesamt werden in dieser Arbeit 24 verschiedene Grundvorstellungen entwickelt, die ein breites Spektrum an Möglichkeiten aufzeigen, sich den Begriffen Punkt, Gerade und Kreis zu nähern.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das Konzept der Grundvorstellung ermöglicht eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit dem Vorgang des Verstehens mathematischer Inhalte. Grundvorstellungen können dabei als gedankliche Modelle aufgefasst werden, die eine Darstellung von Inhalten auf unterschiedlichen Repräsentationsebenen ermöglichen. (Padberg & Wartha 2017, S. 1 f.) Wichtige Aspekte dafür sind die Sinnkonstituierung, der Aufbau entsprechender Repräsentationen und die Fähigkeit, einen Begriff anzuwenden. (Ludwig et al. 2015, S. 3) Ein mathematisches Konzept benötigt dabei in der Regel mehrere Grundvorstellungen, um wirklich erfasst zu werden, zudem ist eine Vernetzung der einzelnen Vorstellungen nötig. (Bruder et al. 2023, S. 111) Vor diesem Hintergrund erscheint es lohnenswert, gezielt *verschiedene* normative Grundvorstellungen zu einem beliebigen mathematischen Begriff theoretisch herleiten und anschließend auf ihre praktische Relevanz überprüfen zu können. Genau diesen Prozess beschreibt das „Salle-Clüver-Verfahren“ im Detail. Dieser Verfahrensrahmen bildet dabei das Gerüst des theoretischen Teils der vorliegenden Arbeit, welche wie folgt aufgebaut ist: Zuerst wird eine kurze Einführung in das Verfahren an sich gegeben, bevor es nacheinander auf die Begriffe Punkt, Gerade und Kreis angewandt wird. Dabei wird zunächst der gewünschte Gültigkeitsbereich und Bezugsrahmen der zu entwickelnden Grundvorstellungen festgelegt, bevor der jeweilige Begriff im nächsten Schritt im Rahmen einer Sachanalyse aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet wird. Diese umfassen die fachliche Sicht auf das mathematische Konzept, die Betrachtung von inner- und außermathematischen Anwendungen sowie der historischen Begriffsgenese und die Untersuchung des Begriffs anhand empirischer Ergebnisse. Eine Zusammenschau schließt die Sachanalyse ab, indem mithilfe der gesammelten Ergebnisse Klassen gebildet werden, welche die Grundlage für die Formulierung der Grundvorstellungen im nächsten Schritt bilden. Im Hinblick auf das auszubildende Grundverständnis und möglicherweise beim Übergang zwischen verschiedenen Grundvorstellungen auftretende Umbrüche werden die formulierten Grundvorstellungen zudem auf ihre Zusammenhänge untereinander analysiert. Anhand der konkreten Grundvorstellungen kann im folgenden Schritt schließlich eine Präzisierung des anfangs gewählten Bezugsrahmens vorgenommen werden, indem die zur erfolgreichen Ausbildung und Anwendung der einzelnen Grundvorstellungen erforderlichen Grundkenntnisse betrachtet werden. Das Salle-Clüver-Verfahren sieht in einem finalen Schritt die Überprüfung der didaktischen Relevanz der entwickelten Grundvorstellungen vor. Diese Überprüfung wird durch den Praxisteil dieser Arbeit angestoßen mit dem Ziel, einen ersten Ausgangspunkt für weiterführende empirische Untersuchungen zu schaffen. Dazu wurden Lernende der 5. und 11. Jahrgangsstufen zweier Gymnasien zu ihren Vorstellungen zu den Begriffen Punkt, Gerade und Kreis befragt und ihre Antworten den theoretisch entwickelten Grundvorstellungen zugeordnet.

2. Das Salle-Clüver-Verfahren

Salle und Clüver (2021) schildern ein Verfahren zur systematischen Herleitung von normativen Grundvorstellungen, welches nachfolgend als „Salle-Clüver-Verfahren“ bezeichnet wird. Es besteht aus fünf Schritten, in denen jeweils spezifische Aspekte der mathematischen Begriffe untersucht werden, zu denen Grundvorstellungen entwickelt werden sollen:

1. Bestimmung von **Richtlinien** für den Herleitungsprozess
2. **Sachanalyse** des mathematischen Begriffs und seiner Phänomene sowie Einbezug **empirischer Ergebnisse**
3. Formulierung konkreter **Grundvorstellungen** und Analyse des **Grundverständnisses**
4. Präzisierung des **Bezugsrahmens**
5. Feststellung und Bewertung der **didaktischen Relevanz**

Der beschriebene Verfahrensrahmen ist dabei primär als flexibles Gerüst zur Herleitung von Grundvorstellungen zu sehen und nicht als starrer Algorithmus. Ein wesentlicher Grund dafür ist die multidirektionale Interdependenz der einzelnen Schritte ohne eine notwendigerweise feste Hierarchie oder Abfolge. In jedem Schritt gewonnene Erkenntnisse können zur nachträglichen Anpassung jedes anderen Schritts verwendet werden, wodurch die resultierenden Grundvorstellungen in einem Prozess mit teilweise iterativem Charakter entwickelt werden. Darüberhinaus kann es sich nicht um einen exakt definierten Algorithmus mit eindeutigem Ergebnis handeln, weil viele der Schritte subjektiv getroffene Entscheidungen, Einteilungen und Einschätzungen erfordern. Die beschriebenen Schritte sind somit eher als Zusammenstellung sich gegenseitig ergänzender Werkzeuge zu verstehen.

Eine hervorhebenswerte Eigenschaft des Salle-Clüver-Verfahrens ist, dass die mit ihm generierten Grundvorstellungen auf normativer Ebene den drei zentralen Eigenschaften des Grundvorstellungskonzepts genügen: Aufgrund der Berücksichtigung des Erfahrungshorizonts der Lernenden kann eine Sinnkonstituierung stattfinden, indem an bekannte Handlungszusammenhänge angeknüpft wird, und aufgrund des Einbezugs relevanter Phänomene wird sowohl ein mentales Operieren auf der Vorstellungsebene ermöglicht als auch die Anwendung der mathematischen Objekte. Bei der nachfolgenden Vorstellung der einzelnen Verfahrensschritte wurde sich weitestgehend an den Ausführungen von Salle und Clüver (2021) orientiert.

Schritt 1: Richtlinien für den Herleitungsprozess

Während das Salle-Clüver-Verfahren aufgrund der oben beschriebenen Flexibilität hinsichtlich der Abfolge der einzelnen Schritte prinzipiell an verschiedenen Stellen begonnen werden kann, bietet es sich im Interesse einer effizienten Verwendung des Verfahrens an, von Anfang an möglichst zielgerichtet zu arbeiten. Bevor sich also näher mit der zugrundeliegenden Mathematik sowie der Anwendbarkeit der zu entwickelnden Grundvorstellungen in der Praxis befasst wird, erscheint es daher sinnvoll, die zu bearbeitenden Schritte bereits im Voraus möglichst stark hinsichtlich ihrer Relevanz für das gewünschte Endergebnis einzuschränken. Bei der Bestimmung dieser Richtlinien stehen drei Schlagworte im Mittelpunkt der Überlegungen: Konzepte, Gültigkeitsbereiche und Bezugsrahmen.

Mit **Konzepten** sind im Bezug auf das betrachtete Verfahren die mathematischen Begriffe gemeint, welche auf potenzielle Grundvorstellungen hin untersucht werden sollen. Die Festlegung von **Gültigkeitsbereichen** beinhaltet die Angabe mathematischer Bereiche bzw. Teilbereiche, innerhalb derer die zu entwickelnden Grundvorstellungen gelten bzw. „funktionieren" sollen. Je nach gewähltem Gültigkeitsbereich können also mögliche Grundvorstellungen hinzukommen oder wegfallen bzw. Vereinfachungen oder Erweiterungen erfordern. Als **Bezugsrahmen** werden die zur Behandlung der gewählten mathematischen Konzepte erforderlichen Voraussetzungen auf Seiten der Lernenden bezeichnet. Diese beinhalten sowohl fachliches Vorwissen, d. h. grundlegende Begriffe und zugehörige Grundvorstellungen, als auch das Vorhandensein bestimmter Kompetenzen. Der Bezugsrahmen ist dabei stark mit dem gewählten Gültigkeitsbereich verknüpft. Einerseits kann beispielsweise eine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs das Wegfallen von erforderlichem Vorwissen bedeuten und somit den Bezugsrahmen beeinflussen, andererseits erfordert auch eine Reduktion von vorausgesetzem Fachwissen und Kompetenzen unter Umständen eine Anpassung des möglichen Gültigkeitsbereichs.

Schritt 2: Sachanalyse und empirische Ergebnisse

Nachdem im vorangegangenen Schritt eine erste Eingrenzung der zu betrachtenden Mathematik stattgefunden hat, können nun die gewählten Fachbegriffe im Rahmen einer Sachanalyse detailliert untersucht werden. Dabei werden zunächst die mathematischen Konzepte sowie zugehörige Phänomene analysiert und anschließend relevante empirische Ergebnisse einbezogen. Abgeschlossen wird dieser Verfahrensschritt durch die Zusammenschau der gesammelten Ergebnisse mit dem Ziel der Bildung von Klassen. Diese Klassen bilden dann im dritten Schritt die Grundlage für die Formulierung der konkreten Grundvorstellungen.

Die Analyse der **mathematischen Konzepte** beschäftigt sich primär mit den zugrunde liegenden Definitionen. Zuerst werden relevante Definitionen identifiziert und gesammelt sowie im Hinblick auf ihre Bestandteile, d. h. mathematische Begriffe und Operationen, analysiert und entsprechend ihrer Eignung hinsichtlich des in Schritt 1 festgelegten Bezugsrahmens ausgewählt. Anschließend werden die für geeignet befundenen Definitionen mit dem Ziel der Vorstrukturierung für die später folgende Klassenbildung in Relation zueinander gesetzt. Dabei werden Zusammenhänge sowie Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Definitionen untersucht, wobei die Behandlung ähnlicher Formulierungen als eigenständige Definitionen lohnenswert erscheint, „[…] da sich auch kleine Unterschiede durch die Einbettung in die Phänomene als wichtige Distinktionsmerkmale herausstellen und so unterschiedliche Grundvorstellungen entstehen können." (Salle & Clüver 2021, S. 566)

Als Nächstes werden die **relevanten Phänomene** zusammengetragen und analysiert. Dabei geht es konkret um Anwendungen der Mathematik, womit neben innermathematischen Zusammenhängen vor allem Alltagsphänomene gemeint sind, in denen die untersuchten Inhalte eine identifizierbare Rolle spielen. Hier können beispielsweise Schul- oder andere Lehrbücher geeignete Kontexte aufzeigen. Aufgrund der noch folgenden Einbeziehung empirischer Ergebnisse zur Überprüfung der Relevanz der Anwendungen für die Erfahrungswelt der Lernenden, lohnt es sich dabei bereits an dieser Stelle, bei der Suche nach geeigneten Phänomenen besonderes Augenmerk speziell auf den Alltag der Zielgruppe zu richten. Auch Anwendungen der Begriffe in anderen wissenschaftlichen Bereichen werden in diesem Schritt gesammelt und in die Analyse miteinbezogen. Die hier identifizierten Zusammenhänge zwischen der Mathematik und Alltagsphänomenen sowie anderen wissenschaftlichen Arbeitsfeldern können außerdem wertvolle, über die Untersuchung von Grundvorstellungen hinausgehende Impulse für fächerübergreifenden Unterricht geben.

Zusätzlich zur gerade beschriebenen Untersuchung gegenwärtiger Phänomene ist auch die historische Entwicklung der mathematischen Konzepte von Interesse. Dies umfasst obsolet gewordene Anwendungen, die seinerzeit jedoch Motivation zur Entwicklung der betrachteten Begriffe gaben, vorausgegangene Konzepte, auf Grundlage derer die Begriffe entstehen konnten, sowie erkennbare Zwischenschritte der Begriffsgenese.

Aufgrund ihrer Bedeutung für die Entstehung von Grundvorstellungen werden auch typische Darstellungen in die Analyse miteinbezogen. Besondere Bedeutung kommt dabei Situationen zu, in denen zwischen verschiedenen Darstellungen gewechselt werden soll, da dazu Grundvorstellungen benötigt werden. Aus diesem Grund stehen besonders die in Phänomenen vorkommenden Darstellungen und dabei relevante Übersetzungsprozesse sowie die für die Begriffsgenese zentralen Darstellungen im Mittelpunkt der Betrachtungen.

Die Berücksichtigung **empirischer Ergebnisse** ist der letzte noch fehlende Schritt, bevor mit der Klassenbildung begonnen werden kann. Mit Blick auf die didaktische, praxisnahe Ausrichtung des Grundvorstellungskonzepts, welche unter anderem in der in Schritt 5 durchzuführenden Untersuchung der didaktischen Relevanz der formulierten Grundvorstellungen zum Ausdruck kommt, können Studienergebnisse eine wichtige Rolle bei der Beurteilung der Bedeutung von Phänomenen für den Alltag bzw. die Erfahrungswelt der Lernenden spielen.

Das Zentrum dieses Verfahrenschritts bildet die nun folgende **Zusammenschau**. Dabei werden mathematische Konzepte und Phänomene zusammengeführt, indem die gefundenen Definitionen und die vielfältigen identifizierten Anwendungen einander zugeordnet werden. Vergleicht man ähnliche Definitionen einerseits hinsichtlich ihrer Komponenten und andererseits hinsichtlich ihrer Rolle in den zugeordneten Anwendungen, so lassen sich spezifische zentrale Bestandteile der mathematischen Konzepte identifizieren, welche als Kernelemente bezeichnet werden.

Ausgehend von den gefundenen Kernelementen werden unter Berücksichtigung der empirischen Ergebnisse nun Klassen gebildet, welche sowohl die entsprechenden mathematischen Elemente als auch den jeweiligen phänomenologischen Rahmen beinhalten. Das Ergebnis ist dabei im Allgemeinen nicht eindeutig, da es verschiedene Möglichkeiten der Klassenbildung gibt. Wichtig ist außerdem, dass die gebildeten Klassen keineswegs disjunkt sein müssen: Wenn ein bestimmtes Kernelement einer Definition in unterschiedlichen Phänomenen identifiziert werden kann, kann dies zur Bildung mehrerer Klassen führen. Andererseits muss nicht jedes gefundene Kernelement zur Bildung einer Klasse führen, wenn diese im Hinblick auf die in Schritt 1 festgelegten Richtlinien sowie die vorausgegangene Sachanalyse und die empirischen Ergebnisse nicht zielführend erscheint. Neben dem Wegfallen von theoretisch möglichen Klassen können Studienergebnisse jedoch auch zu zusätzlichen Klassen führen, wenn sie direkt Vorstellungen implizieren oder zusätzliche Betrachtungsweisen liefern, die bisher nicht in der Sachanalyse behandelt wurden. Nach der erfolgten Klassenbildung können für Grundvorstellungen ungeeignet erscheinende Klassen gegebenenfalls verworfen werden.

Schritt 3: Grundvorstellungen und Grundverständnis

Der dritte Verfahrensschritt befasst sich einerseits mit der Übersetzung der zuvor gewonnenen Klassen in ausformulierte Grundvorstellungen und andererseits mit der Untersuchung der Beziehungen der Grundvorstellungen zueinander, da diese für die Ausbildung des Grundverständnisses eines Begriffs und eventuell auftretende Grundvorstellungsumbrüche eine wichtige Rolle spielen.

Möchte man nun ausgehend von einer bestimmten Klasse eine **Grundvorstellung formulieren**, so beginnt man mit den für diese Klasse identifizierten Kernelementen, weshalb sich eine Benennung von Grundvorstellungen anhand der zugrunde liegenden Kernelemente anbietet. Betrachtet man alle in einer Klasse enthaltenen Kernelemente, so wird nun versucht, eine diesen Kernelementen zugrunde liegende idealtypische Darstellung des betrachteten mathematischen Begriffs zu finden.

Im Hinblick auf das auszubildende **Grundverständnis**, d. h. die Kenntnis der zum betrachteten Begriff gehörenden Grundvorstellungen sowie ihrer Verbindungen, werden die formulierten Grundvorstellungen als Nächstes auf Zusammenhänge und Unterschiede hin analysiert. Insbesondere im Hinblick auf die Antizipation von im Unterricht wahrscheinlich auftretenden **Grundvorstellungsumbrüchen** sind diese Beziehungen von elementarer Bedeutung, da sie ein Leitfaden für die Anordnung von zu vermittelnden Grundvorstellungen sein können. Durch das Wissen, dass bestimmte Grundvorstellungen beispielsweise im Sinne von Erweiterungen aufeinander aufbauen oder relativ unabhängig voneinander sind, da sie ein Phänomen aus voneinander weit entfernten Blickwinkeln betrachten, kann so die Reihenfolge, mit der ausgewählte Vorstellungen im Unterricht thematisiert werden, möglichst vorteilhaft gestaltet werden.

Schritt 4: Präzisierung des Bezugsrahmens

Die Reevaluierung des Bezugsrahmens mithilfe der neu formulierten Grundvorstellungen kann nun für eine Präzisierung der eingangs getroffenen Einschränkungen sorgen. Zusätzlich zu den prinzipiell jederzeit möglichen spontanen Anpassungen vorheriger Verfahrensschritte als Reaktion auf neu gewonnene Erkenntnisse werden dabei in diesem Schritt zwei Aspekte gesondert betrachtet:

Die erfolgte Formulierung konkreter, greifbarer Grundvorstellungen ermöglicht einerseits eine präzisere Festlegung der für sie erforderlichen **Grundkenntnisse**, d. h. sowohl fachliches Vorwissen als auch allgemeine Kompetenzen. Andererseits können nun auch die **Zusammenhänge zu anderen Grundvorstellungen**, die im festgelegten Bezugsrahmen vorkommen, präziser analysiert werden. Dadurch kann sichergestellt werden, dass die formulierten Grundvorstellungen auch tatsächlich in den gewünschten Unterrichtsszenarien anwendbar sind, weil sie auf unbedingt erforderliche Grundvorstellungen aufbauen können.

Schritt 5: Didaktische Relevanz

Um eine gewinnbringende Anwendung der entwickelten Grundvorstellungen im Unterrichtsalltag zu gewährleisten, werden diese in einem abschließenden Schritt auf ihre tatsächliche Zweckmäßigkeit hin überprüft. Dabei wird das Unterrichtsgeschehen von beiden Seiten beleuchtet: Einerseits werden die neuen Grundvorstellungen mit Fokus auf den Lernenden evaluiert, was insbesondere das Vorhandensein beobachtbarer Vorstellungen und Fehlvorstellungen beinhaltet. Andererseits werden die Grundvorstellungen auf ihre Nützlichkeit und ihren Mehrwert in den Händen der Lehrkräfte analysiert.

Nachem die einzelnen Schritte des Verfahrens nun im Detail besprochen wurden, soll es in den beiden folgenden Kapiteln, welche den Hauptteil dieser Arbeit bilden, konkret auf die Begriffe des Punktes, der Geraden und des Kreises angewandt werden.

3. Theorie: Entwicklung der Grundvorstellungen

> *„Definition. Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt.“*
>
> *(Perron 1962, S. 11)*

In diesem Kapitel sollen nun mithilfe des vorgestellten Salle-Clüver-Verfahrens ausformulierte Grundvorstellungen zu den mathematischen Begriffen Punkt, Gerade und Kreis entwickelt werden. Salle und Clüver (2021) führen an, dass sich das beschriebene Verfahren in mindestens zwei konkreten Situationen anwenden lässt: Es ermöglicht einerseits die theoretische Herleitung möglicher Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten, zu denen sich in der Literatur bislang keine explizit ausformulierten Grundvorstellungen finden lassen. Andererseits kann es auch gewinnbringend zur Rekonstruktion bereits existierender Grundvorstellungen eingesetzt werden, was z. B. weitere Ausdifferenzierungen sowie die Kontrolle der theoretischen Fundiertheit beinhalten kann.

In dieser Arbeit wird der erste Ansatz verfolgt, es sollen also neue normative Grundvorstellungen entwickelt werden. Im Hinblick auf die Richtlinien für den Herleitungsprozess wird dabei für alle Begriffe der Gültigkeitsbereich und Bezugsrahmen durch die Sekundarstufe des bayerischen Gymnasiums im Rahmen des LehrplanPLUS festgelegt. Da zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit noch keine zugelassenen Schulbücher für die 12. und 13. Jahrgangsstufe des LehrplanPLUS erschienen sind, wird für die in diesen Jahrgangsstufen behandelten relevanten Themen auf Bücher für den vorherigen Lehrplan, d. h. das achtjährige bayerische Gymnasium, zurückgegriffen, da bei diesen hinsichtlich der Darlegung des Stoffes eine große Ähnlichkeit zu den neuen Büchern zu erwarten ist.

Da insbesondere die Begriffe Punkt und Gerade als Grundbegriffe der Geometrie eine besondere Rolle einnehmen, werden grundsätzliche Schwierigkeiten im Umgang mit Grundbegriffen sowie deren besondere Bedeutung für Lernende aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst gesondert betrachtet.

3.1. Vorüberlegungen zu Grundbegriffen

In der Mathematikdidaktik meint man mit dem Ausdruck *Begriff* mathematische Objekte und deren Eigenschaften, Beziehungen zwischen Objekten sowie mathematische Tätigkeiten, Vorstellungen und Ideen. (Ruwisch & Weigand 2023, S. 281) Nach Reiss und Hammer gibt es dabei im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, mathematische Begriffe mit Bedeutung zu verbinden: Einerseits gibt es *Grundbegriffe* mit einer mehr oder minder anschaulichen Grundlage, z. B. die Begriffe Punkt, Gerade und Ebene. Diese werden in der Geometrie nicht näher erklärt. Andererseits gibt es Begriffe, die über Definitionen auf andere Begriffe, inklusive auf Grundbegriffe, zurückgeführt werden. Beispielsweise heißen zwei Geraden parallel, wenn alle Punkte der einen Geraden den gleichen Abstand von der anderen haben. Das Ziel ist dabei insgesamt, mithilfe von Grundbegriffen und neuen Definitionen ein stimmiges mathematisches Gefüge aufzubauen. (Reiss & Hammer 2021, S. 85) Da Begriffe also nicht nur für sich selbst stehen, sondern auch als Ausgangspunkt für weitere Begriffe dienen können, kommt insbesondere den undefinierten Grundbegriffen eine herausragende Bedeutung zu. Dies bezieht sich nicht nur auf die formale mathematisch-logische Ebene, sondern, sofern es sich nicht um eine vollständig abstrakte und von der Anschauung losgelöste Axiomatik wie beispielsweise Hilberts Geometrie handelt, auch auf die Ebene der Grundvorstellungen. Wie die im Rahmen des Salle-Clüver-Verfahrens durchzuführende Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den entwickelten Grundvorstellungen und Grundvorstellungen zu anderen Begriffen aus dem Bezugsrahmen verdeutlicht, nehmen die undefinierten Grundbegriffe eine herausragende Rolle ein, da die zugehörigen Grundvorstellungen die Basis für das Verständnis vieler auf sie aufbauender Begriffe bilden. Fehlerhafte oder mit den auf ihnen aufbauenden Begriffen inkompatible Grundvorstellungen können somit weitreichende Fehlvorstellungen erzeugen, sofern sie nicht von Lehrenden erkannt und korrigiert bzw. als für die weiterführenden Überlegungen ungeeignet deklariert werden. Im Gegensatz dazu erscheint das Gesamtpotenzial für „Folgefehler" aus Fehlvorstellungen zu eher fortgeschrittenen Konzepten, aus denen keine oder nur wenige weitere Begriffe hergeleitet werden, verhältnismäßig gering zu sein. Auch wenn Fehlvorstellungen selbstverständlich grundsätzlich vermeidenswert sind und die betroffenen Begriffe in nachfolgenden Curricula, beispielsweise einem an die Schullaufbahn anschließenden Studiengang, sehr wohl Ausgangspunkt für weiterführende Konzepte sein können, sind sie weniger tief bzw. umfassend im Grundvorstellungsgeflecht verwurzelt und vermutlich einfacher zu korrigieren, als wenn bereits die elementarsten Vorstellungen und entsprechend viele darauf aufbauende Begriffe betroffen sind. Die nähere Untersuchung der theoretisch möglichen und in der Praxis tatsächlich vorkommenden Grundvorstellungen zu einem mathematischen Begriff scheint vor diesem Hintergrund somit an zusätzlicher Bedeutung zu gewinnen, je grundlegender und damit implikationsreicher er ist. Diese Überlegungen lassen die Beschäftigung mit elementaren Begriffen wie Punkt, Gerade und Kreis besonders lohnenswert erscheinen.

Im Hinblick auf ihre „einfache" Beschaffenheit stellt die mathematisch exakte Definition geometrischer Objekte wie Punkt und Gerade eine überraschend große Herausforderung dar. Zunächst sollte man sich im Klaren darüber sein, was eine Definition überhaupt sein soll bzw. welche Eigenschaften sie haben muss. Nach Weigand erfüllen Definitionen im Geometrieunterricht verschiedene Funktionen: Einerseits geht es darum, für einen umständlichen Ausdruck einen kürzeren einzuführen. Beispielsweise wird eine Gerade, die einen Kreis in genau einem Punkt berührt, als Tangente bezeichnet. Andererseits dienen Definitionen aber auch der Präzisierung von Begriffen, die aus der Umgangssprache bekannt sind, z. B. Abstand, Winkel oder Streckung. Hinsichtlich der Anforderungen an eine Definition lässt sich nennen, dass es sich dabei einerseits um eine Minimalerläuterung handeln sollte, welche nur zur Festlegung des Begriffs unbedingt erforderliche Eigenschaften beinhaltet. Gleichzeitig wird aber auch angestrebt, dass sie einprägsam ist und Vorstellungen über den definierten Begriff erlaubt. (Weigand 2018, S. 97) Wenn in der Fachliteratur im Kontext von Punkten und Geraden von „Definitionen" die Rede ist, sind diese mit Vorsicht zu genießen, da es sich dabei häufig lediglich um Erklärungsversuche, aber nicht um tatsächliche Definitionen im strengeren mathematischen Sinne handelt: „Punkt und Gerade werden in der modernen Mathematik nicht definiert. Man legt lediglich die Beziehungen zwischen ihnen durch Axiome fest.“ (Bronstein et al. 2008, S. 131) Hinsichtlich des Geometrieunterrichts stellt Weigand jedoch klar, dass Definitionen dort nicht am Anfang des Begriffslernens stehen, da das bewusste Definieren und die Verwendung des Wortes Definition Kenntnisse über den Aufbau eines mathematischen Gebiets erfordern und deshalb erst im fortgeschrittenen Lehrgang möglich sind. Die Definitionen bauen im Unterricht stattdessen auf Vorstellungen, Kenntnissen und Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff auf. (Weigand 2018, S. 98) Dies ist kein Problem, da dem heutigen Geometrieunterricht laut Weigand kein axiomatischer Aufbau zugrunde liegt und Definitionen deshalb nicht im Rahmen einer derartigen wissenschaftlichen Systematik gesehen werden können. Dennoch ist darauf zu achten, dass die in Definitionen verwendeten Begriffe im Sinne eines Vorliegens angemessener Vorstellungen bzw. ausreichend fundierter mentaler Modelle bekannt sind. (Weigand 2018, S. 98) Diese Ansicht findet sich auch bei Meschkowski et al., die betonen, dass eine Definition der geometrischen Grundbegriffe nur implizit durch ein geeignetes Axiomensystem möglich ist, worüber in der Oberstufe des Gymnasiums gesprochen werden kann. Für den Beginn des Geometrieunterrichts in der Grundschule folgt jedoch, dass „[…] der Lehrer auf alle Definitionen von Punkt und Gerade verzichtet und von der Anschauung ausgeht.“ (Meschkowski et al. 1969, S. 309) Die Anschauung bildet sich dabei am physikalischen Raum aus. (Behnke & Tietz 1976, S. 124) Auch Sträßer bezeichnet das Verweisen auf möglichst viele und allgemein bekannte bzw. zugängliche Beispiele als Lösung des Problems der undefinierbaren Grundbegriffe im elementaren Geometrie-Unterricht. (Sträßer 2015, S. 2) Dieser Gewinn geometrischer Erkenntnisse aus der Intuition heraus fand bereits vor mehreren Jahrtausenden statt, lange bevor die Geometrie beispielsweise durch die Einführung von Beweisen zu einer typisch mathematischen Disziplin wurde (Scheid & Schwarz 2017, S. 1). Der Bereich des intuitiven Benutzens von Begriffen, Formen und Verfahren sowie des Wissens und Könnens, welches nicht in Worte gekleidet ist, könnte dabei als „unbewusste“ Mathematik bezeichnet werden. (Scriba & Schreiber 2010, S. 3)

Krtitik an der Herangehensweise, anstelle einer expliziten Diskussion des axiomatischen Aufbaus der euklidischen Geometrie zunächst von der Anschauung auszugehen, findet sich bei Behnke und Tietz in Form von Bedenken bezüglich einer möglichen Diskrepanz zwischen einem intuitiv gewonnenen Verständnis der Grundbegriffe und der „tatsächlichen“ euklidischen Geometrie: „Wenn man versucht, den geometrischen Grundbegriffen einen ‚natürlichen‘ Sinn zu geben, sei es in physikalischem Bereich, sei es in einem sog. ‚Anschauungsraum‘, so ist es keineswegs denknotwendig, daß man dabei die euklidische Geometrie erhält.“ Die Mathematik könne die Geometrie nicht auf einen absolut gegebenen Anschauungsraum gründen. Die Fragen, was dann der euklidische Raum ist und was unter „Punkt“ und „Gerade“ in der euklidischen Geometrie zu verstehen ist, werden dadurch beantwortet, dass ein Modell verwendet wird, das sich nicht auf außermathematische Begriffe stützt. Das Problem der Undefinierbarkeit der Grundbegriffe wird somit gelöst, indem rein innermathematische Begriffe aus der Analysis verwendet werden: Ein Punkt wird als geordnetes Paar zweier beliebiger reeller Zahlen definiert, eine Gerade als Menge von Punkten, die eine allgemeine lineare Gleichung mit zwei Variablen erfüllen. Die euklidische Geometrie wird auf diese Weise im Sinne der analytischen Geometrie in die Lehre der reellen

Zahlen eingeordnet und die geometrischen Gebilde als spezielle, mithilfe der Zahlen konstruierte Mengen aufgefasst. (Behnke & Tietz 1976, S. 125 f.)

Eine Möglichkeit, die geometrischen Grundbegriffe sowohl ausgehend von der intuitiven Anschauung einzuführen als auch einer gewissen mathematischen Exaktheit zu genügen, ist die Betrachtung der Begriffe als Ergebnis eines Abstraktionsprozesses. Dieser scheint insbesondere sinnvoll, weil es sich bei Punkt und Gerade um idealisierte theoretische Objekte handelt, die in der sinnlich erfahrbaren Welt nicht vorkommen. Lardner fasst den Standpunkt zusammen: „[…] the terms used in geometrical science, are not designed to signify any real, material or physical existences. They signify certain abstracted notions or conceptions of the mind, derived, without doubt, originally from material objects by the senses, but subsequently corrected, modified, and, as it were, purified by the operations of the understanding.“ (Lardner 1848, S. 1) Die Abstraktion wird dabei häufig als Grenzprozess aufgefasst, als Übergang von der sinnlich erfahrbaren, sichtbaren Welt hin zur lediglich denkbaren Idealisierung. Für Law stellt beispielsweise das Verstehen von Worten wie „Punkt“ und „Gerade“ einen Prozess dar, weswegen es für jede formale Definition eines neuen Begriffs unmöglich sei, dessen genaue Bedeutung erstmalig zu vermitteln. Es sei notwendig, dass die erstmalige akkurate Vermittlung einer einfachen Idee mit einer gewissen Schwierigkeit verknüpft ist. Sie sei nur mithilfe eines Systems von Abstraktionen möglich, d. h. indem zunächst eine komplexere Idee betrachtet wird, in welcher die einfache Idee mit bereits bekannten Ideen verknüpft ist, und die anschließend sukzessive abstrahiert wird. Ohne entsprechende vorausgehende Beschreibungen würde beispielsweise die Definition eines mathematischen Punktes jemandem, der noch nie damit zu tun hatte, keine Idee vermitteln. (Law 1853, S. 1 f.) Auch die moderne Mathematikdidaktik bejaht eine Begriffsbildung durch Abstraktion. So kann laut Weigand die Entwicklung interner Repräsentationen bzw. die Konstruktion mentaler Modelle als Abstraktionsprozess beschrieben werden, bei dem ausgehend von realen Gegenständen bestimmte Eigenschaften *ignoriert* werden, um so mathematische Vorstellungen über das Objekt aufzubauen. Dieser Idealisierungsprozess beinhaltet allerdings auch, gewisse Eigenschaften in das reale Objekt *hineinzusehen*, die in der Realität gar nicht vorhanden sind bzw. sein können. Beispielsweise lassen sich Vorstellungen über den Begriff „Gerade“ entwickeln, indem ausgehend von einer mit dem Lineal gezogenen Linie, der Faltlinie eines Papierblattes oder einer Zimmerkante deren Unebenheiten, Dicke und räumliche Begrenztheit ignoriert und die unbegrenzte Länge einer Geraden in den Begriff hineingesehen werden. (Weigand 2018, S. 89)

3.2. Grundvorstellungen zum Begriff „Punkt“

Der Punkt nimmt innerhalb der Geometrie einen besonderen Platz ein. Unter der Auffassung, dass alle anderen geometrischen Objekte aus Punkten zusammengesetzt sind, kann er als *das* Grundelement der Geometrie angesehen werden. Aufgrund seiner Rolle als undefinierter Grundbegriff ist er dabei insbesondere im Hinblick auf die Sachanalyse mit Problemen behaftet. Trotzdem — oder vielleicht gerade deswegen — stellt sich der Begriff im Zuge der nachfolgenden Untersuchungen als überraschend facettenreich heraus.

3.2.1. Sachanalyse und empirische Ergebnisse

3.2.1.1. Mathematisches Konzept

Aufgrund der diskutierten Problematik, Grundbegriffe wie den Punkt zu definieren, wird der Begriff in vielen Lehrwerken häufig gar nicht direkt angesprochen. Da in den analysierten Schulbüchern, inklusive aller zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit zugelassenen Lehrbücher für das bayerische Gymnasium nach dem LehrplanPLUS, keine expliziten Definitionen des Begriffs gefunden werden konnten, wird für die Analyse des mathematischen Konzepts auf Literatur jenseits der Schule zurückgegriffen. Dabei werden zunächst auch Definitionen betrachtet, die teilweise über den gewählten Gültigkeitsbereich und Bezugsrahmen hinausgehen.

In der untersuchten Literatur werden unter anderem exemplarisch beschreibende Definitionsversuche unternommen, wobei dabei gelegentlich auch mehrere unterschiedliche Anschauungen angeführt werden. Teilweise stößt man auf Aussagen wie „Dieses sind die sog. Grundbegriffe, deren anschauliche Bedeutung jedermann klar ist.“ (Behnke & Tietz 1976, S. 122) Andere Autoren verweisen auf den axiomatischen Aufbau der Geometrie: „Punkt, Grundbegriff der Geometrie, dessen Inhalt durch die Axiome der Geometrie festgelegt wird.“ (Walz et al. 2017, S. 283) Vereinzelt wird auf die Axiome Euklids verwiesen, welche als „Definitionen“ jedoch kritisiert werden, da durch sie eigentlich nicht gesagt wird, was ein Punkt ist, sondern was er nicht ist (Meschkowski et al. 1969, S. 157). Die vor diesem Hintergrund dennoch verfügbaren Definitionen bzw. Definitionsansätze wurden auf inhaltliche Ähnlichkeiten untersucht und ggf. gruppiert. Die jeweils für die Sachanalyse des Konzepts des Punktes relevanten Aspekte werden im Folgenden, ausgehend von der bedeutenden Definition Euklids, herausgearbeitet.

„1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat, […]“

(Euklid, S. 1)

Einerseits wird an dieser Definition kritisiert, dass ihr Bestandteil „keine Teile haben“ völlig undefiniert bleibt. Andererseits hat sich oben bereits gezeigt, dass Vieles für ein intuitives Verständnis der Grundbegriffe jenseits formal korrekter mathematischer Definitionen spricht, was hier insbesondere angemessen erscheint, da es sich in Euklids Elementen nach griechischem Verständnis um „sinnlich wahrnehmbare Dinge“ (Scriba & Schreiber 2010, S. 62) handelt. Es ist somit plausibel, die Formulierung im Sinne von „unteilbar sein“ aufzufassen (vgl. auch Euklid, S. 417). Auch wenn der Aspekt der **Unteilbarkeit** von keiner anderen Definition innerhalb der untersuchten Literatur aufgegriffen wird, so erscheint er vor dem Hintergrund der fundamentalen Bedeutung von Euklids Elementen für die Mathematik dennoch potenziell relevant für unser heutiges Verständnis der Geometrie.

Nach den griechischen Worten ließe sich Euklids Punktdefinition auch wie folgt übersetzen: „Punkt ist, dessen Teil Nichts (ist).“ (Euklid, S. 418) Zum Vorkommen dieser Übersetzung in der Literatur sagt Thaer: „So ist gelegentlich geschehen, doch scheint mir die sprachlich mindestens gleichberechtigte Deutung, daß Teile nicht existieren, sinnvoller.“ (Euklid, S. 418) Die Unteilbarkeitsdeutung scheint also zu bevorzugen zu sein. Die Übersetzung „dessen Teil Nichts ist“ nimmt den infinitesimalen Aspekt vieler moderner Definitionsansätze (s. u.) voraus, wenn man sie dahingehend interpretiert, dass dessen (An-)Teil am gesamten Raum gemeint ist. In dieser Deutung handelt es sich also um ein existierendes Objekt, das dennoch keinen Raum einnimmt: „[Der Punkt] bezeichnet nur eine Stelle im Raum, ohne selbst einen Theil des Raums auszumachen.“ (Kries 1826, S. 286) Für Smith ist bereits die obige Übersetzung im Sinne von „keine Teile haben“ äquivalent dazu, dass ein Punkt **keine Größe** besitzt, da er nach diesem Verständnis der Definition nicht in kleinere Teile unterteilt werden kann. Dass ein Objekt Größe besitzt, wird bei ihm dabei über die Eigenschaft definiert, aus Teilen zu bestehen, welche in jeder Hinsicht wieder dem Objekt selbst gleichen. (Smith 1871, S. 2)

„2. Eine Linie [ist eine] breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.“

(Euklid, S. 1)

Unmittelbar auf die gerade besprochene Definition des Punktes folgend führt Euklid ein Objekt namens „Linie“ ein und setzt es in einen Zusammenhang zu Punkten, wobei es sich dabei vermutlich um eine Remineszenz an eine verworfenen Punktdefinition handelt, welche (strenger aufgefasst unter Hinzufügung von „wenn Enden existieren“) eher unter die Postulate gehört. (Euklid, S. 418) Dennoch lässt sich auch dieser Reminsezenz in Ansätzen die Deutung des Punktes als Objekt ohne Größe abgewinnen, wenn man davon ausgeht, dass die Endpunkte Teil der Linie sein sollen und damit zumindest breitenlos sind, d. h. mindestens in Ausdehnungsrichtung *senkrecht zur Linie* infinitesimal. Auch wenn hier das Problem vorliegt, dass undefinierte Begriffe wie „Länge“ und „Enden“ als Grundlage dienen, erscheint die folgende Auffassung und Argumentation plausibel: Mit „Ende“ ist das auch *in Richtung der Linie* infinitesimale Endstück gemeint, da es sich dabei andernfalls nicht um ein andersartiges Objekt, sondern selbst wieder um eine Linie handeln würde. Somit ist der Punkt auch auf Grundlage dieser Remineszenz sowohl senkrecht als auch parallel zum Verlauf des Linienendes infinitesimal und entspricht damit dem Punktverständnis der nachfolgenden modernen Quellen. Weitere Überlegungen zu Euklids Punktdefinition im Hinblick auf die historische Entwicklung des Begriffs finden sich im Unterkapitel „Relevante Phänomene“.

„informally, a geometrical element having no dimensions;“

(Borowski & Borwein 1989, S. 452)

Neben dem Hinweis, dass es sich dabei nicht um eine formale Definition im strengeren Sinne handelt, wird der Punkt in dieser Quelle als geometrisches Element ohne Ausdehnung beschrieben und erhält damit auch hier einen infinitesimalen Charakter. „Dimensions“ kann prinzipiell auch mit „Dimensionen“ übersetzt werden, aufgrund des Wortlauts scheint hier jedoch eine Übersetzung mit „Ausdehnung“ näherzuliegen. Zur Beschreibung der Null-dimensionalität wäre eher die Formulierung „zero dimensions“ bzw. „zero-dimensional“ zu erwarten — ein Aspekt, der jedoch im Kontext einer anderen Definition noch besprochen wird.

Der Aspekt der Ausdehnungslosigkeit verlangt danach, bewusst zwischen dem infinitesimalen theoretischen Punkt und seiner ausgedehnten visuellen Repräsentation auf dem Papier bzw. Bildschirm in Form von kleinen Flecken, Kreuzen oder ähnlichen Markierungen zu unterscheiden. Insbesondere die Verwendung des Wortes „Punkt“ in beiden Fällen bedarf der Vergegenwärtigung, dass es sich bei dem, was in der Alltagssprache als Punkt bezeichnet wird, nicht um das handelt, was in der Mathematik darunter verstanden wird, sondern um ausgedehnte Objekte. In einem Kommentar zu Euklids Elementen wird die Notwendigkeit betont, Punkten in der Praxis, im Gegensatz zu ihrer theoretischen Entsprechung, eine gewisse Größe zu geben: „Tho‘ a Point, strictly taken, has no Parts, or is of no Bigness; yet in Practice, there is a Necessity of taking it of some Bigness […]: as upon Paper a Point is represented by a Prick with the Point of the Compasses, a Dott with the Pen, etc. but on the Ground by a Peg, Stake, etc.“ (Stone 1728, S. 1) Die Notwendigkeit wiederum, im Rahmen des Lehrens der Geometrie auf diese sichtbaren Repräsentationen zurückzugreifen, wird von einem anderen Kommentar hervorgehoben: „That a Point is that which hath no Parts, as Euclid defines it, without any Idea of Magnitude or Extension, is very difficult for a young Beginner in Geometry to conceive; therefore, in order to give a clear Notion of this Definition, and free it from all Ambiguity, the Reader will please to observe, that whatever Ideas we have, or can conceive of Points, are communicated to our Senses by visible or solid Objects only.“ (Milliet D’Chales 1748, S. 2 f.) Der Übergang zwischen dem durch die Sinne wahrnehmbaren, physikalischen und dem mathematischem Punkt wird von Lardner beschrieben: „A notion being obtained by the senses of the smallest magnitude distinctly perceptible, this is called a *physical point*. If this point were indivisible even in idea, it would be strictly what is called a mathematical point. But this is not the case. No material substance can assume a magnitude so small that a smaller may not be imagined. The mind, however, having obtained the notion of an extremely minute magnitude, may proceed without limit in a mental diminution of it; and that state at which it would arrive if this diminution were infinitely continued, is a *mathematical point*.“ (Lardner 1848, S. 2)

„Ein Punkt ist etwas, was eine Lage, aber keine Größe hat.“

(Meschkowski et al. 1969, S. 157)

„Ein Punkt ist ein idealisiertes Gebilde in der Geometrie, das zwar eine Lage, aber keine Ausdehnung hat.“

(Knerr 1978, S. 259)

„A Point is that which has position, but not magnitude.“

(Playfair 1795, S. 1)

„Ein mathematischer Punkt hat weder Länge, noch Breite, noch Dicke und bezeichnet nur eine Stelle im Raume. Er kann nicht gesehen, sondern nur gedacht werden.“

(Immel 1873, S. 2)

Neben dem infinitesimalen Charakter findet sich in diesen Definitionen auch ein Verweis auf die **Lage**, was insgesamt das Bild des Punkts als „infinitesimalen Ort“ zeichnet. Dabei werden die Begriffe „Ausdehnung“ und „Größe“ verwendet, um dessen infinitesimalen Charakter auszudrücken. Es wird typischerweise zwischen dem Punkt und seiner Lage unterschieden, d. h. der Punkt wird als Objekt verstanden, das auf einem bestimmten Ort *liegt* bzw. einen bestimmten Ort *bezeichnet*. Darstellungen des Punktes als Ergebnis von Grenzprozessen können jedoch auch den Eindruck vermitteln, dass der Punkt ohne Ausdehnung ein Ort *ist.* Wichtig ist an dieser Stelle, dass die obigen Definitionen für die Existenz eines Punktes explizit die Notwendigkeit einer Lage hervorheben — im Gegensatz dazu fordert Euklid lediglich die Ausdehnungsfreiheit.

Law spricht sogar davon, dass die einzige in der Geometrie anerkannte Qualität des Punktes seine Position ist. Die Idee des mathematischen Punktes würde einer Person durch den folgenden Abstraktionsprozess erstmalig vermittelt werden: Als Ausgangspunkt präsentiert man die komplexe Idee eines physischen Punktes, z. B. einen durch Stift oder Nadel erzeugten Punkt, mit welchem die Person bereits vertraut ist. Anschließend erklärt man, dass der physische Punkt zwei Ideen beinhaltet, nämlich Position und Größe, und dass die Position, welche der Punkt einnimmt und markiert, umso präziser bestimmt ist, je kleiner seine Größe wird. Auf diese Weise wird die Idee der Größe des Punktes schrittweise abstrahiert, bis er als infinitesimal klein betrachtet wird und nur noch mit der Idee seiner Position verbunden ist. (Law 1853, S. 1 f.) Immel betrachtet das Konzept des Punktes ebenfalls ausgehend von einem Bleistiftpunkt oder dem Einstich eines Zirkels und erklärt, dass man durch schrittweise Verkleinerung des betrachteten Objekts dem mathematischen Punkt immer näher kommt. (Immel 1873, S. 2) Auch bei Heath finden sich Beschreibungen des Punktes als Ergebnis eines Grenzprozesses, der bei einem realen oder angenommenen materiellen Punkt beginnt: Man stelle sich ein Sandkorn oder einen Staubpartikel vor, welche kontinuierlich kleiner werden. Man erreicht die Größenordnung von Atomen und erhält schließlich mit zunehmender Sicherheit eine eindeutige Position im Raum, die nicht weiter unterteilt werden kann. Der Punkt kann folglich als Grenzbegriff aufgefasst werden, als Grenzwert einer Lokalisierung, nachdem der eingeschlossene Raum verschwunden ist und nur die Position übrig geblieben ist. (Heath 1908, S. 157 f.)

Knerr hebt in seiner Definition außerdem hervor, dass es sich bei Punkten im mathematischen Sinne um eine **Idealisierung** handelt und fügt hinzu, dass Vieles dafürspricht,

„[…] dass es in der wirklichen Welt Punkte im idealen Sinne nicht gibt.“ (Knerr 1978, S. 259). Auch Immel weist auf diesen Aspekt hin, wenn er sagt, dass mathematische Punkte lediglich gedacht werden können. Insbesondere im Hinblick auf die infinitesimale Größe scheint das Bewusstsein wichtig zu sein, dass es sich um ein theoretisches Konstrukt handelt und nicht um ein Objekt, dass in der Realität existieren könnte.

> *„A geometrical construct which has position but no size. The position is often specified by coordinates."*
>
> *(Clapham & Nicholson 2014, S. 365)*

> *„[…] in Cartesian space, an element that can be located by a single n-tuple of coordinates.“*
>
> *(Borowski & Borwein 1989, S. 452)*

> *„So our points have coordinates (x, y) and every such pair corresponds to a point [of the two-dimensional real plane].*
>
> *(Silvester 2001, S. 9)*

Diese Quellen bringen einen weiteren Aspekt ins Spiel: **Koordinaten**. Auch hier wird wieder zwischen dem Punkt und seinem Ort, nun dargestellt durch Koordinaten, unterschieden. Insbesondere wird im Gegensatz zu anderen Quellen der Punkt nicht mit dem zugehörigen Koordinatentupel gleichgesetzt. Auch Bronstein et al. differenzieren diesbezüglich. Für den zweidimensionalen Fall wird dort geschrieben: „Die Lage jedes Punktes P einer Ebene kann mit Hilfe beliebiger Koordinatensysteme beschrieben werden. Die Zahlen, die die Lage des Punktes bestimmen, heißen die Koordinaten. Meistens werden die kartesischen Koordinaten und die Polarkoordinaten benutzt.“ (Bronstein et al. 2008, S. 195) Im dreidimensionalen Fall gilt: „Jeder beliebige Punkt P im Raum kann mit Hilfe eines Koordinatensystems festgelegt werden. […] Die gebräuchlichsten räumlichen Koordinatensysteme sind kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.“ (Bronstein et al. 2008, S. 214) Aufgrund der Dominanz des kartesischen Koordinatensystems, insbesondere in der Schule, ist es wenig verwunderlich, wenn dieses häufig stillschweigend vorausgesetzt wird. Eine frühe Thematisierung der Tatsache, dass Positionen mithilfe *unterschiedlicher* Koordinatensysteme dargestellt werden können, könnte hier potenziell zu einem größeren Bewusstsein beitragen, dass zwischen Positionen und Koordinaten differenziert werden kann bzw. muss.

„A point is a member (x, y) of the set $\mathbb{R}^2$."

(Silvester 2001, S. 24)

Diese Definition ist im Hinblick auf die oben angesprochene Unterscheidung zwischen dem Punkt und seinem Ort, ausgedrückt durch Koordinaten, interessant. Hier ist die Rede davon, dass der Punkt das Koordinatentupel (x, y) *ist.* Laut der bereits betrachteten Formulierung „[…] our points have coordinates (x, y) and every such pair corresponds to a point […]" (Silvester 2001, S. 9), welche in der selben Quelle, ebenfalls im Kontext der reellen ebenen Geometrie auftaucht, *haben* Punkte jedoch Koordinaten (x, y) bzw. entsprechen sich je ein Koordinatenpaar und ein Punkt. Der Begriff des Punktes wird also innerhalb einer Quelle und bezogen auf den selben Kontext sowohl verwendet, um einen Ort bzw. das zugehörige Koordinatentupel zu bezeichnen, als auch, um ein lokalisiertes, aber von seinem Ort bzw. Koordinatentupel verschiedenes Objekt zu bezeichnen. Die Ursache für derartige, feine aber vorhandene Inkonsistenzen bei der Verwendung des Begriffs „Punkt" ist vermutlich in den bereits besprochenen Schwierigkeiten hinsichtlich seiner sauberen Definition zu finden. Die Bezeichnung des Punkts als „member", also Element, der Menge $\mathbb{R}^2$ findet sich auch in anderen Quellen wieder, worauf unten noch näher eingegangen wird.

„‚Punkt' wird jedes geordnete Paar [bzw. Tripel] von zwei [bzw. drei] reellen Zahlen genannt."

(Behnke & Tietz 1976, S. 126)

„Punkte der Ebene sind festgelegt durch Paare, Punkte des gewöhnlichen Raums durch Tripel von reellen Zahlen. Für die Theorie macht es keine Probleme, gleich n-Tupel zu betrachten, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist. Damit erhält man den reellen Standardraum der Dimension n $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$*, d. h. die Menge der geordneten n-Tupel von reellen Zahlen."*

(Fischer & Springborn 2020, S. 13)

Gemäß diesen Definitionen lassen sich Punkte auch einfach als abstrakte, geordnete **Zahlentupel** verstehen, jenseits einer möglichen Interpretation dieser Tupel als Orte, die von Koordinaten beschrieben werden. Typischerweise werden dabei reelle Zahlen verwendet, prinzipiell können aber auch andere Zahlenmengen wie die natürlichen oder rationalen Zahlen zugrunde liegen.

Die Festlegung des reellen Standardraums bei Fischer und Springborn als die Menge der Tupel reeller Zahlen, d. h. als (größtmögliche) Punktmenge, sowie die allgemein übliche Darstellung geometrischer Objekte als Punktmengen ermöglichen die Identifizierung einer weitere Anschauung von Punkten. Auch wenn in Euklids Elementen Linien, Flächen, Kreise etc. nicht explizit als Mengen von Punkten, sondern als eigenständige Objekte aufgefasst werden, ist der dort beschriebene Aspekt der Unteilbarkeit von Punkten dennoch für das Konzept der Punktmenge von Bedeutung: In Analogie zum griechischen Verständnis von physikalischen Atomen, deren Bezeichnung auf das griechische Wort átomos zurückgeht, welches mit „unteilbar" oder „unteilbarer Urstoff" übersetzt werden kann (Brockhaus 2024), kann der Punkt als unteilbarer **Grundbaustein** der „geometrischen Materie" aufgefasst werden. Punkte sind gewissermaßen das Material bzw. die elementaren Einheiten, aus denen der geometrische Raum bzw. geometrische Objekte als dessen Teilmengen bestehen. Die Auffassung des Punktes als Grundbaustein räumlicher Größe in Analogie zur Eins als Einheit der Zahlen spiegelt sich auch in Kommentaren zu Euklids Elementen wider: „Gleich wie eins aller Zahlen / also ist der Punct ein Anfang aller Grösse." (v. Pirkenstein 1699, S. 3) Auch Fröhlich sieht die Möglichkeit, Punkte als geometrische Atome aufzufassen und verweist dabei unter anderem auf die Anschauungen Aristoteles' von Punkten als etwas Unzerteilbares (Fröhlich 2024, 1).

> *„Die Elemente [des metrischen Raumes] M heißen die Punkte des Raumes und die Zahl D(x,y) die Entfernung der Punkte x und y."*
>
> *(Meschkowski et al. 1969, S. 154)*

> *„Die (euklidische) Geometrie ist die Theorie einer Menge R, deren Elemente (A,B,C,…) Punkte heißen."*
>
> *(Meschkowski et al. 1969, S. 160)*

> *„a basic element (along with line) of an axiomatic geometry;"*
>
> *(Borowski & Borwein 1989, S. 452)*

> *„Die Grundelemente unserer Geometrie sind die Punkte und die Geraden. Die Menge aller Punkte bezeichnen wir mit $\mathbb{P}$ […]. Wir schreiben also: $\mathbb{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$ […]"*
>
> *(Zeitler 1972, S. 20)*

„Wir nehmen eine Menge E, die Ebene, als Ausgangspunkt unserer Überlegungen. Die Elemente P, Q, … von E heißen Punkte.“

(Stein 1999, S. 134)

„Weil oft eine geometrische Deutung möglich ist, nennt man die Elemente [eines Vektorraums] V auch Punkte von V.“

(Koecher 1997, S. 4)

„an element of a topological space or a vector space. […]“

(Borowski & Borwein 1989, S. 452)

“Unter der euklidischen Ebene $\mathbb{E} := (\mathbb{R}^2, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ *verstehen wir den reellen Vektorraum* $\mathbb{R}^2$*, ausgestattet mit einem Skalarprodukt (als Messinstrument). Die Punkte dieser Geometrie sind die Elemente von* $\mathbb{R}^2$*.“*

(Berchtold 2017, S. 18)

„We shall often denote points by capital letters A, B, …, and write ‚A is a point‘ to mean the same as $A \in \mathbb{R}^2$ *[…].“*

(Silvester 2001, S. 24)

Unabhängig davon, ob man sich der Geometrie ausgehend von Vektorräumen oder im Rahmen eines axiomatischen Aufbaus nähert, mit dem Begriff „Punkt“ ist in jedem dieser Kontexte die selbe Rolle verbunden: Der Punkt als **Element einer Menge**. Knerr führt an, dass Punkte oft mit großem Erfolg als Modellvorstellung nicht nur im geometrischen Sinn verwendet werden, was man in der Mengenlehre wie folgt ausdrückt: „Räume sind Punktmengen, und Punkte sind Elemente von Räumen, die bestimmte Eigenschaften haben, z. B. eine Metrik.“ (Knerr 1978, S. 259) Auch Meschkowski et al. betonen, dass die Lehre von den Räumen aus der mengentheoretischen Grundkonzeption gedeutet werden kann. Für den allgemeinen Fall wird beschrieben: „Der Mathematiker nennt eine Menge M gerade dann einen ‚Raum‘, wenn sie gewisse Eigenschaften hat, die uns aus dem physikalischen Raum vertraut sind.“ (Meschkowski et al. 1969, S. 153) Speziell für die euklidische Geometrie gilt: „Auch die euklidische Geometrie fügt sich in die mengentheoretische Deutung der gesamten Mathematik ein: Sie ist die Theorie einer Menge E, die man ‚euklidischen Raum‘ nennt; ihre Elemente heißen Punkte und haben Eigenschaften, die durch die

Axiome der euklidischen Geometrie festgelegt sind […].“ (Meschkowski et al. 1969, S. 309) In der Sekundarstufe handelt es sich bei der Menge dabei typischerweise um $\mathbb{Q}^2$, $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, die Elemente bzw. Punkte haben hier also die Form (x, y) bzw. (x, y, z).

„3. Die Enden einer Linie sind Punkte.“

(Euklid, S.1)

„Unter einem Punkt versteht man die Schnittstelle zweier Geraden.“

(Bronstein 2008, S. 131)

„Man wird daher von den Ecken [eines Quaders] als ‚Punkten‘, von den Kanten als Teilen von ‚Geraden‘ […] sprechen, wobei der Auffassung von Geraden […] als Punktmengen nichts im Wege steht.“

(Meschkowski et al. 1969, S. 390 f.)

Diese Aussagen nähern sich der Frage, was ein Punkt ist, indem sie ausgezeichnete Stellen bestehender geometrischer Objekte betrachten: Sie definieren ihn als die **Enden einer Linie** oder den **Schnitt zweier Geraden**. Die Festlegung als **Ecke eines Quaders**, einer in der Umwelt häufig anzutreffenden Form, entspricht dabei laut Meschkowski et al. dem Wunsch viele Methodiker und Psychologen. (Meschkowski et al. 1969, S. 390) Verfolgt man diesen Ansatz, den Punkt ausgehend von anderen Objekten festzulegen, so muss man sich mit zwei Problemen auseinandersetzen: Erstens scheint die Wahl der (typischerweise möglichst einfachen) Referenzobjekte primär aus didaktischen Gründen zu erfolgen und damit aus rein mathematischer Sicht einer gewissen Willkür zu unterliegen, da statt des Schnittpunkts zweier Geraden genauso gut die „Berührstelle“ zweier Kreise oder statt der Ecke eines Quaders ausgezeichnete Stellen komplexerer Formen verwendet werden könnten. Zweitens liegt die Problematik vor, dass Geraden und andere geometrische Objekte häufig als Punktmengen definiert werden und somit bereits die Definiertheit eines Punktes voraussetzen. Abgesehen von diesen beiden Kritikpunkten ist die Festlegung des Punktes als die Schnittstelle von Linien bzw. Geraden durchaus plausibel, da beispielsweise Hartmann argumentiert: „Wenn zwei mathematische Linien sich schneiden, so wird an der Durchschnittstelle die Ausdehnung der einen durch jene der andern aufgehoben; da nun der mathematischen Linie nur eine einzige Ausdehnung zukommt, so muss also jene Stelle gar keine Ausdehnung haben, somit ein mathematischer Punkt sein. Daher ist es auch nicht unpassend, einzelne Stellen einer mathematischen Linie Punkte zu nennen.“ (Hartmann 1855, S. 1) Weitere Zusammenhänge zu anderen geometrischen Objekten sind beispielsweise die Betrachtung des Punktes als Spezialfall eines Kreises (mit Radius 0) oder allgemeiner eines Kegelschnitts. Diese bieten mögliche Ausgangssituationen für Grenzwertbetrachtungen zur Veranschaulichung der infinitesimalen Ausdehnung von Punkten.

In einer weiteren Definition des Begriffs im Kontext von affinen Teilräumen von Vektorräumen wird der Blick des Lesers auf ein Charakteristikum von Punkten gelenkt, das in anderen Kontexten und Quellen häufig völlig unerwähnt bleibt, dort jedoch genauso zutrifft: In Analogie zu Ebenen und Geraden als affine Teilräume der Dimension 2 bzw. 1 wird festgelegt, „[…] dass die 0-dimensionalen affinen Teilräume, also die einelementigen Mengen $\{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0}\}$, die Punkte sind.“ (Arens et al. 2008, S. 506) Die Betrachtung des Punktes als **0-dimensionales** Objekt lässt sich auch in den Definitionen wiederfinden, die ihn als Objekt „ohne Größe“ definieren, d. h. als Etwas, das keine Ausdehnung in allen zwei bzw. drei Dimensionen hat. „A Point […] has neither length, breadth, nor thickness.“ (Bonnycastle 1803, S. 1) Casey skizziert den Punkt als Ergebnis der schrittweisen Verringerung der Dimensionen der Elemente: Eine geometrische Größe, welche drei Dimensionen (Länge, Breite, Dicke) besitzt, ist ein Körper. Das, was zwei Dimensionen hat (z. B. Länge und Breite), ist eine Fläche und was nur eine Dimension besitzt, eine Linie. Da ein Punkt jedoch weder ein Körper, noch eine Fläche oder Linie ist, kann er folglich keine Dimensionen besitzen, d. h. er hat weder Länge, noch Breite oder Dicke. (Casey 1885, S. 4)

3.2.1.2. Relevante Phänomene

a) Anwendungen

Eine detaillierte Übersicht über schulische, berufliche und private Kontexte, für welche die Fähigkeit zu räumlichen Vorstellungen im Allgemeinen von Bedeutung ist, findet sich bei (Maier 1999, S. 123 ff.), im Folgenden wird jedoch auf konkretere Anwendungen des Punktbegriffs eingegangen. Als Erstes werden dabei die für den Bezugsrahmen relevanten innermathematischen Zusammenhänge analysiert. Am Anfang der Sekundarstufe I finden sich Punkte zunächst im Rahmen der Einführung geometrischer Grundbegriffe bzw. der zweidimensionalen euklidischen Geometrie. Gleich zu Beginn wird dabei das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem vom Schulbuch mathe.delta 5 mit den folgenden Worten eingeführt: „Mit einem Koordinatensystem beschreibt man die Lage von Punkten. […] Der Schnittpunkt beider Achsen heißt Nullpunkt oder Ursprung. Der Punkt A (3|2) hat die x-Koordinate 3 und die y-Koordinate 2.“ (Eisentraut et al. 2017, S. 110) Der Begriff des Punktes wird dabei nicht erklärt oder definiert. Lambacher Schweizer 5 führt das Koordinatensystem aus dem Gedanken heraus ein, die Lage von Punkten in der Zeichenebene mithilfe zweier Zahlenstrahlen zu beschreiben, die miteinander einen rechten Winkel bilden und Koordinatenachsen genannt werden. Jeder Punkt in einem Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben, wobei die Zahlen Koordinaten des Punktes heißen. (Frohmader et al. 2017, S. 7) Fokus Mathematik 5 veranschaulicht das Koordinatensystem mithilfe einer Schatzkarte und erklärt, dass ein bestimmter Ort auf der Karte beispielsweise mit A (5|3) bezeichnet wird. Im Anschluss wird der Begriff des Punktes eingeführt: „Punkte werden in Zeichnungen oft mit einem kleinen Kreuz markiert und mit Großbuchstaben A, B, … bezeichnet. Durch zwei Punkte kannst du mit einem Lineal oder Geodreieck eine gerade Linie zeichnen.“ Im Kontext der Lagebeziehungen geometrischer Objekte wird der Abstand zweier Punkte bzw. eines Punktes von einer Geraden untersucht. Der Begriff des Punktes wird also zusätzlich zu seiner Lage im Koordinatensystem auch mit der Eigenschaft verknüpft, eine Lage relativ zu anderen Objekten zu besitzen. Der Kreis wird als Menge aller Punkte mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt definiert. Bei der Einführung des Koordinatensystems wird gesagt, dass ein Punkt immer zwei Zahlen besitzt, die Koordinaten genannt werden. (Distel et al. 2016, S. 70 ff.) Der Begriff der Strecke wird als geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten definiert. (Eisentraut et al. 2017, S. 112) Der Punkt tritt also früh auch als das Ende einer Strecke in Erscheinung. Bezüglich der Lage zweier Geraden wird wenig später erklärt, dass sich diese in einem Punkt schneiden, parallel zueinander verlaufen oder aufeinander liegen können. (Eisentraut et al. 2017, S. 114) Ähnlich wie bei der Definition des Nullpunkts des Koordinatensystems findet sich der Punkt auch hier wieder als der Schnitt zweier Objekte. Allgemein treten Punkte häufig als Eckpunkte geometrischer Grundfiguren wie Drei- und Vierecke sowie in Bezeichnungen weiterer ausgezeichneter Stellen von Objekten, wie beispielsweise Lotfußpunkt, Scheitelpunkt, Mittelpunkt und Berührpunkt auf.

In der 7. Jahrgangsstufe taucht der Punkt im Rahmen der Untersuchung achsen- und punktsymmetrischer Figuren als zentraler Bestandteil des Konzepts der Punktsymmetrie auf und wird in diesem Kontext als Symmetriezentrum bezeichnet. (Eisentraut et al. 2019, S. 58) Die Einführung funktionaler Zusammenhänge in der 8. Jahrgangsstufe lässt den Punkt erstmals im Zusammenhang mit Funktionsgraphen auftreten. Dabei wird gesagt, dass ein Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Graphen einer Funktion f liegt, wenn seine Koordinaten x und y die Funktionsgleichung $y = f(x)$ erfüllen. (Distel et al. 2020, S. 12) Nun werden auch Schnittpunkte von Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen oder anderen Graphen betrachtet. Insbesondere werden jetzt auch rechnerisch die Schnittpunkte zweier Geraden bestimmt. In Lambacher Schweizer 8 wird beschrieben, dass Funktionen ebenso wie Terme durch Punkte $P(x \mid f(x))$ im Koordinatensystem dargestellt werden können und die Menge dieser Punkte der Graph ist. Am Beispiel einer gebrochen rationalen Funktion wird erklärt, dass bei geeignetem Definitionsbereich aus der Menge der unendlich vielen Punkte des Graphen eine (für das Auge) ununterbrochene Linie entsteht. (Biburger et al. 2020, S. 12)

In der 12. Jahrgangsstufe werden die Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum besprochen, wodurch nun auch Punkte in drei Dimensionen, dargestellt durch kartesische Koordinaten, betrachtet werden können. Bei der Einführung des dreidimensionalen Koordinatensystems wird die aus der Ebene bekannte Koordinatenschreibweise um eine dritte Koordinate erweitert, um die Eckpunkte einer geometrischen Figur im Raum beschreiben zu können. (Birner et al. 2009, S. 186) Es wird erklärt, dass die Lage jedes Punktes im Raum durch ein Zahlentripel beschrieben werden kann, dessen Zahlen als Koordinaten bezeichnet werden. (Schätz et al. 2009, S. 87) Bei der Einführung von Spaltenvektoren wird gesagt, dass sich die Lage von Punkten im Koordinatensystem nun auch durch Vektoren beschreiben lässt, indem man den Pfeil vom Koordinatenursprung zum jeweiligen Punkt verwendet und diesen als Ortsvektor des Punktes bezeichnet, wobei ein Punkt und sein Ortsvektor stets dieselben Koordinaten haben. (Schätz et al. 2009, S. 91) Punkte treten außerdem als Ausgangs- und Zielorte von Vektoren in Erscheinung, wenn gesagt wird, dass ein Pfeil von Punkten des Raumes ausgeht bzw. zu Punkten verläuft. (Feuerlein & Distel 2009, S. 174) In der 13. Jahrgangsstufe wird die dreidimensionale Koordinatengeometrie um Geraden und Ebenen erweitert. Dabei wird erklärt, dass eine Geradengleichung die Ortsvektoren aller Geradenpunkte beschreibt und durch einen Punkt bzw. seinen Ortsvektor und einen

Richtungsvektor oder durch zwei Punkte angegeben werden kann. Analog werden Ebenengleichungen für einen Punkt und zwei Richtungsvektoren bzw. drei Punkte als Möglichkeit, die Ortsvektoren aller Ebenenpunkte zu beschreiben, eingeführt. (Schätz et al. 2010, S. 119 ff.) Schnittpunkte werden jetzt auch bezüglich Geraden und Ebenen im Raum berechnet. Als „Punktprobe“ wird das Vorgehen bezeichnet, durch Einsetzen eines beliebigen Punktes in eine Geradengleichung zu überprüfen, ob dieser Punkt auf der Geraden liegt. (Birner et al. 2010, S. 73) Auch der Begriff des Abstandes wird auf den dreidimensionalen Fall ausgeweitet, wodurch die relative Lage von Punkten bezüglich anderer Punkte, Geraden und Ebenen quantifiziert werden kann, im Fall von Ebenen beispielsweise mithilfe der Hesse’schen Normalform. (Feuerlein & Distel 2010, S. 156 f.)

Die Identifikation des Konzepts des Punktes in anderen wissenschaftlichen Disziplinen bietet Ansatzpunkte für eine Bereicherung und Öffnung des Mathematikunterrichts im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts. Hier lässt sich unter anderem die Geographie nennen, welche ohne eine Betrachtung von Landkarten und darin eingetragenen Städten oder anderen ausgezeichneten Orten kaum vorstellbar wäre. Je nach Maßstab der betrachteten Karte werden Positionen dabei nicht als ausgedehnte Flächen eingetragen, sondern durch näherungsweise ausdehnungsfreie Punkte dargestellt. Landkarten können dabei durch eingetragene Breiten- und Längengrade als anschauliches Beispiel eines Koordinatensystems verstanden werden. Auch die Physik bietet aufgrund ihrer Mathematiklastigkeit vielfältige Anwendungen des Punktbegriffs. Einerseits können physikalische Kontexte den Achsen von Koordinatensystemen und damit den eingetragenen Punkten eine anschauliche Bedeutung geben, beispielsweise bei der graphischen Darstellung von Messwerten oder berechneten Größen. Auch der Begriff des Zeitpunkts bedient sich der Bedeutung des mathematischen Punktes, um die infinitesimale zeitliche Ausdehnung auszudrücken. In Analogie zu Landkarten können auch astronomische Karten mit eingetragenen Himmelskörpern betrachtet werden. Für das physikalische Konzept des Schwerpunkts ist der Punktbegriff essenziell: Zur Vereinfachung von Überlegungen und Berechnungen wird die vollständige Masse eines ausgedehnten Körpers einem einzigen ausgezeichneten, infinitesimalen Punkt zugeschrieben. Die Physik arbeitet sehr oft mit solchen Punktmassen, etwa bei der Beschreibung von Bewegungen. Das Konzept des Punktes wird zudem in Form von Punktladungen auch als Idealisierung für stark lokalisierte elektrische Ladungen verwendet. Auch in der Chemie werden Elementarteilchen als Punkte dargestellt, beispielsweise Elektronen in Zeichnungen von Atommodellen. Der Wirtschaftsunterricht bietet weitere Möglichkeiten, Punkte mit Bedeutung zu verbinden, beispielsweise kann die Entwicklung wirtschaftlicher Größen wie Angebot und Nachfrage durch Diagramme veranschaulicht werden. In der Informatik können Pixel oder Bildpunkte, die kleinsten Einheiten, aus denen digitale Bilder zusammengesetzt sind, als Veranschaulichung für mathematische Punkte, aus denen geometrische Objekte bestehen, verwendet werden. Analog kann im Kunstunterricht die Stilrichtung des Pointillismus dazu dienen, Objekte als aus winzigen Punkten zusammengesetzt zu begreifen, zudem werden dort auch beim Zeichnen von Entwürfen Punkte gesetzt. Im Sportunterricht werden Spielfelder mithilfe geometrischer Objekte festgelegt, beispielsweise deren Eck- und Mittelpunkte. Auch bei der Besprechung von taktischen Spielzügen können Spieler durch Punkte dargestellt werden.

In der Umwelt der Lernenden vorkommende und damit für die zu entwickelnden Grundvorstellungen relevante Phänomene finden sich neben den gerade besprochenen Anwendungen auch in vielfältigen anderen Alltagskontexten. Für jüngere Lernende bieten etwa Punkt-zu-Punkt-Malbücher einen Einstieg in das Konzept, die Ecken geometrischer Figuren durch Punkte festzulegen. Die Eigenschaft, eine Lage zu besitzen, lässt den Punkt im Alltag häufig im Sinne eines Markierungsobjekts auftreten: „Auf dem Felde werden Punkte durch Pflöcke, Stangen etc. oder andere Merkmale kenntlich gemacht. Auch Thurmspitzen und andere hervorragende Gegenstände können als Punkte angesehen werden.“ (Immel 1873, S. 2) Auch in verschiedensten handwerklichen Kontexten werden wichtige Stellen durch Punkte markiert, etwa beim Nähen oder dem Bohren von Löchern. Beim Geocaching, einer Art Schnitzeljagd, können die Verstecke mithilfe von GPS-Daten gefunden werden, die zur Orientierung als Punkte in eine Karte eingetragen werden können. Partikel sind eine weitere der Erfahrungswelt entnommene Möglichkeit, sich dem Punktbegriff zu nähern. Beispielsweise Sandkörner, aufgewirbelte Staubpartikel oder Nebeltröpfchen können dazu beitragen, eine Intuition für winzige Objekte zu entwickeln. Auch das grammatikalische Satzzeichen „Punkt“ am Ende von Sätzen wird durch einen kleinen Kreis bzw. Quadrat symbolisiert und verknüpft den Begriff mit Objekten einfacher, kompakter Form und geringer Größe. Es ist anzunehmen, dass besonders die Alltagssprache einen starken Einfluss darauf hat, welche Vorstellungen Lernende mit dem mathematischen Begriff des Punktes verbinden, insbesondere, da dieser im Mathematikunterricht nicht mehr explizit definiert wird. Neben der auf die Mathematik bezogenen Bedeutung „gedachtes geometrisches Gebilde mit bestimmter Lage (ohne Ausdehnung)“ gibt der Duden folgende allgemeine Bedeutungen für das Wort „Punkt“ an:

- kleiner (kreisrunder) Fleck, Tupfen
- Stelle, (geografischer) Ort
- Zeitpunkt, Stadium innerhalb einer Entwicklung, eines Prozesses o. dergleichen
- einzelner Gegegenstand der geistigen Auseinandersetzung innerhalb eines größeren Zusammenhangs
- Abschnitt, Absatz der Gliederung eines Textes, Vortrags o. Ä.
- Einheit einer Wertung im Sport, Spiel, bei Leistungsprüfungen o. Ä.
- punktförmiges Zeichen, punktförmiger Teil eines Zeichens
- (Punktförmige) Wertmarke, aufzuklebender oder abzutrennender (punktförmiger) Bon, Abschnitt

Zur Etymologie wird gesagt, dass das Wort Punkt auf das lateinische „punctum“ zurückgeht, was mit „das Gestochene“ übersetzt werden kann. (Duden 2024, Punkt). Der Wortursprung scheint einen Einstich und damit ein Objekt mit geringer Ausdehnung ausdrücken zu wollen. Darüberhinaus unterstreichen auch zahlreiche Redewendungen und Ausdrücke des alltäglichen Sprachgebrauchs dieses Charakteristikum des Punktes, beispielsweise „etwas auf den Punkt bringen“, „punktgenau“ oder, bezogen auf die zeitliche Ausdehnung, „pünktlich“. Für die visuell-anschauliche Verwendung des Punktbegriffs im Mathematikunterricht der Sekundarstufe scheinen vor allem die beiden allgemeinen Bedeutungen „kleiner Fleck“ und „Stelle bzw. Ort“ relevant zu sein. Diese enthalten bereits alle für den mathematischen Punktbegriff nötigen Bestandteile, lediglich die Idealisierung im Sinne einer Grenzwertbildung bezüglich der Größe und damit verbunden auch der Lokalisierung muss noch „dazugedacht“ werden, um den mathematischen Punkt zu erhalten. Es erscheint somit plausibel, dass Lernende durch die Verwendung des Wortes in nicht-mathematikbezogenen Alltagskontexten bereits eine angemessene Vorstellung des Punktbegriffs besitzen, welche nur noch durch die Verwendung in mathematischen Kontexten wie Koordinatensystemen präzisiert bzw. idealisiert werden muss. Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen kann das Ausbleiben einer formalen Definition des Punktes im Unterricht als sinnvoll bewertet werden, da dadurch die möglicherweise unnötige Verkomplizierung eines bereits intuitiv verstandenen Begriffs vermieden werden kann. Die Bedeutung „Einheit einer Wertung“ verknüpft das Wort Punkt zudem mit der Funktion, eine Einheit bzw. ein Grundelement zu sein. Häufig werden auch andere Einheiten im Alltag, abseits eines Wertungskontexts, durch Punkte symbolisiert. Beispielsweise werden in Fortschrittsanzeigen bei Ladevorgängen 10%-Schritte durch jeweils einen Punkt, oder die einzelnen Bestandteile von Listen mithilfe von Aufzählungspunkten (siehe vorherige Seite) dargestellt.

b) Historische Begriffsgenese

Der Punkt gehört zu den ältesten Elementen der Geometrie (Scriba & Schreiber 2010, S. 32). Scheid und Schwarz führen an, dass Formen und Eigenschaften der Objekte ihrer Lebenswirklichkeit die Menschheit seit Jahrtausenden beschäftigen. So lassen sich die Anfänge der Geometrie beispielsweise in Höhlenornamenten der Steinzeit oder Strecken- und Winkelmessungen sowie Berechnungen mithilfe einfacher geometrischer Figuren im zweiten Jahrtausend v. Chr. erkennen. Diese stellten zunächst lediglich das Ergebnis der Verarbeitung individueller Wahrnehmungen von Figuren des Anschauungsraums bzw. der Anschauungsebene dar. (Scheid & Schwarz 2017, S. 1) So wurden im alten Ägypten praktische Methoden zur Landvermessung entwickelt, jedoch ohne diese zu beweisen — erst nachdem Thales von Milet diese Vermessungsregeln um 600 v. Chr. aus Ägypten nach Griechenland brachte, wurden dort formalere Beweisversuche unternommen. (Silvester 2001, S. 1)

Die erste uns bekannte Definition eines Punktes findet sich bei den Pythagoräern. (Heath 1908, S. 155) Diese hatten sich bereits um 550 v. Chr. mit dem Wesen des Punktes auseinandergesetzt und diesen als „Monade, welche eine Position besitzt“ definiert. (Kavanaugh 2007, S. 106) Der Begriff der Monade kann dabei als “unteilbare Einheit ohne Größe oder Position“ verstanden werden. (Kavanaugh 2007, S. 110) Analoge Ideen, bezogen auf die Bestandteile tatsächlicher Materie im Sinne der Physik, finden sich ab ca. 450 v. Chr. in der von Leukipp und Demokrit begründeten Atomistik — die Anschauung, dass es feste, nicht weiter teilbare Urteilchen der Dinge geben muss. (Wußing 2008, S. 164) Auch Platon hatte sich um 400 v. Chr. mit Punkten beschäftigt, wies jedoch die pythagoreische Idee der „Punkt-Einheit“ als geometrische Fiktion und eine zu zerstörende Hypothese zurück und sah Punkte stattdessen als den Anfang von Linien. (Copleston 2003, S. 159 f.) Aristoteles hingegen verwendet um 350 v. Chr. entweder die Definition der Pythagoräer oder äquivalente Formulierungen (Heath 1908, S. 155) und definiert eine Monade als Substanz ohne Position, einen Punkt als Substanz mit Position. (Kavanaugh 2007, S. 114 f.) Bei seinem von der Monade abgegrenzten Begriff des Punktes handelt es sich dabei um den geometrischen Punkt. (v. Kirchmann 1871, S. 241) Wie Heath beschreibt, diskutierte Aristoteles auch den

Ansatz, die Begriffsabfolge Punkt, Linie, Fläche und Körper jeweils in Abhängigkeit des vorherigen Begriffs zu definieren: Den Punkt als Extremität der Linie, die Linie als Extremität der Fläche, die Fläche als Extremität des Körpers. Dabei bezeichnet er die Definition des Punktes als Extremität einer Linie als unwissenschaftlich, was als Kritik an Platon aufgefasst werden kann. Aristoteles‘ Auffassung von Punkten als unteilbar und lokalisiert wird durch weitere seiner Beobachtungen illustriert: So seien Punkte beispielsweise keine Körper und hätten kein Gewicht, zudem könne nicht zwischen einem Punkt und dem Ort, an dem sich dieser befindet, unterschieden werden. (Heath 1908, S. 155 f.)

Einen Meilenstein in der Geschichte der Mathematik stellen Euklids „Elemente“ dar. Seine axiomatische Geometrie um ca. 300 v. Chr. war der erste Versuch, ein System unbewiesener Grundsätze aufzustellen, aufbauend auf unmittelbar einsichtigen Eigenschaften von Figuren der Anschauungsebene. (Scheid & Schwarz 2017, S. 1) Dieses Axiomensystem hat das geometrische Denken über 2000 Jahre lang entscheidend geprägt. (Berchtold 2017, S. 5) Die Elemente werden als das möglicherweise einflussreichste Werk der gesamten mathematischen Literatur bezeichnet, wurden bis in die nahe Vergangenheit vielfach studiert und aufgrund ihrer meisterhaften Darlegung des Stoffes sogar im Elementarunterricht an allgemeinbildenden Schulen verwendet. (Wußing 2008, S. 193) Die euklidische Geometrie kann als die Theorie einer mathematischen Struktur verstanden werden, die eigens zur Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit geschaffen wurde (Meschkowski et al. 1969, S. 153) und nach griechischer Auffassung handelt es sich bei den in den Elementen gegebenen Objekten wie Punkt, Strecke und Kreis um sinnlich wahrnehmbare Dinge. (Scriba & Schreiber 2010, S. 62) Dabei wird der Punkt, wie oben bereits besprochen wurde, als dasjenige Objekt definiert, welches keine Teile hat. Für eine umfangreiche Sammlung verschiedener, im Laufe der vergangenen Jahrhunderte entstandener Übersetzungen von Euklids Punktdefinition sei auf (Fröhlich 2024, 1) verwiesen. Wie Aristoteles’ regelmäßige Hinweise zeigen, ist Euklids Definition dabei, abgesehen von der fehlenden Forderung einer Position, identisch mit den zu seiner Zeit üblichen. (Heath 1908, S. 156)

Euklids Axiomatik erfüllt hinsichtlich ihrer mathematischen Präzision in vielen Aspekten nicht die Anforderungen der modernen Mathematik (Knörrer 2006, S. 88). Insbesondere die Definition „Ein Punkt ist, was keine Teile hat, […]“ (Euklid, S. 1) wurde bis heute vielfach kritisiert. Silvester kommentiert: „The tendency nowadays, when first confronted by this, is to start to poke fun. What are these *parts*, whose absence apparently will enable us to recognize a point?“ (Silvester 2001, S. 2) Das Wort „Teile“ bleibt undefiniert oder muss anschaulich gedeutet werden. (Weigand 2018, S. 97) Da die beschreibende Eigenschaft „keine Teile zu haben“ dadurch ebenfalls nicht definiert ist, trifft diese Definition keine Aussage. (Walz et al. 2017, S. 283) Auch laut Berchtold wurde an den euklidischen Axiomen bzw. Definitionen unter anderem besonders kritisiert, „[…] dass die Formulierungen keiner heutigen Strenge genügen. So werden Begriffe durch andere unbekannte Begriffe definiert oder vage sprachliche Aussagen gemacht, die keine präzise Bedeutung haben.“ (Berchtold 2017, S. 5) Thaer erkennt zunächst an, dass die Definitionen logisch nicht auf der Höhe des übrigen Werkes stehen, verteidigt die Elemente jedoch gegen derartige Vorwürfe, indem er den Blick auf Euklids Intentionen lenkt: „Neue Begriffe wollen sie [die Definitionen] eigentlich nicht schaffen; die geistige Einstellung, deren Hauptvertreter Platon ist und die Proklos wohl mit Recht auch bei Euklid annimmt, spricht ja den Ideen ein selbständiges Sein zu. Euklid will höchstens abgrenzen, was an sich bereits existiert.“ Einen eigenen Kritikpunkt anbringend fährt er fort: „Aber auch dies tut er meist nur so, daß er die Anschauung schon voraussetzt, bloß einzelne Merkmale hervorhebt, wie in Def. 1 vom Punkt die Unteilbarkeit. Wer nicht weiß, was ein Punkt ist, wird es aus Euklids Definition nicht lernen." Zudem sei die Existenz des Definierten für Euklid mit der bloßen Definition noch nicht gesichert und müsste durch Postulate oder aus solchen hergeleitete Konstruktionen sichergestellt werden. (Euklid, S. 417 f.) Auch Fröhlich nimmt die Position ein, dass Euklids Definitionen eher als Beschreibungen zu verstehen sind. Der obige Kommentar Thaers beziehe sich auf eine platonische Ideenlehre, nach welcher Punkte im Reich der Ideen bereits, ohne unser Zutun, existieren, was eine strenge Definition überflüssig macht. Es besteht lediglich noch die Aufgabe, sie durch ihre charakteristischen bzw. abgrenzenden Eigenschaften zu beschreiben. (Fröhlich 2024, 1) Scriba und Schreiber betonen, dass man mit „Definitionen", welche versuchen, einen Grundbegriff zu beschreiben, offensichtlich keinen mathenmatischen Satz über die definierten Begriffe beweisen kann. Sie seien vom modernen Standpunkt aus unnötig, würden aber auch von Euklid selbst im Weiteren nirgends benutzt. (Scriba & Schreiber 2010, S. 51) Wußing vertritt einen ähnlichen Standpunkt: „Dies sind nicht eigentlich Definitionen, sondern Beschreibungen. Wer z. B. noch nicht den Begriff des Punktes aus der Anschauung mittels Abstraktion gewonnen hat, kann ihn aus dieser Definition auch nicht erwerben." (Wußing 2008, S. 192)

Playfair bezieht sich in seiner Kritik auf die folgende Übersetzung von Euklids Punktdefinition: „Ein Punkt ist, was keine Größe hat." Er behauptet dabei, dass die Ergänzung einer Position notwendig ist. Einerseits enthalte Euklids Definition nur ein Negativum, andererseits sei sie nicht umkehrbar, wie es jede gute Definition sein sollte. Es sei offensichtlich, dass sie nicht umkehrbar ist, da zwar jeder Punkt ohne Ausdehnung oder Größe ist, aber nicht jedes Ding ohne Ausdehnung oder Größe ein Punkt. Da es unmöglich sei, darauf zu antworten, sei eine Änderung der Definition notwendig. Die Definition des Punktes als das, was *Position aber keine Größe* hat, zeichne sich nun dadurch aus, dass der positive Teil alles enthält, was für einen Punkt essenziell ist, und der negative Teil alles ausschließt, was für ihn nicht essenziell ist. (Playfair 1795, S. 347 f.) Dieser Kritik an Euklids Definition lassen sich die folgenden Ausführungen Heaths entegensetzen: Bezüglich der Frage, ob die Unteilbarkeit bzw. keine Teile zu haben bereits ausreichend ist, wenn es doch andere unteilbare Dinge gibt, die keine Punkte sind, z. B. das Jetzt der Zeit oder die Einheit der Zahlen, verweist er auf den Euklid-Kommentator Proklos. Da der Punkt laut diesem das einzige unteilbare Ding *in der Geometrie* ist, ist die Definition auf diese konkrete Wissenschaft bezogen ausreichend. Bezüglich der Kritik, dass Euklids Definition rein negativ ist, wird erneut auf Proklos verwiesen, laut welchem negative Beschreibungen für Urbegriffe angemessen sind. Auch Aristoteles gibt zu, dass die Formulierung von Definitionen durch Negationen manchmal notwendig ist, beispielsweise bei entziehenden Begriffen wie „blind", und er scheint das negative Element in der Punktdefinition als angemessen zu akzeptieren, wenn er sagt, dass der Punkt sowie jede Unterteilung (z. B. einer Länge oder Zeitdauer) und alles, was in diesem Sinne unteilbar ist, als Mangel dargelegt wird. (Heath 1908, S. 156 f.)

Wie bei der Analyse der Definitionen zu Beginn dieses Kapitels bereits deutlich wurde, haben viele Mathematiker nach Euklid versucht, bessere Definitionen für Punkt (und Gerade) zu finden, die jedoch jeweils wieder andere schwer zu definierende Begriffe wie Lage, Größe oder Entfernung voraussetzen (Meschkowski et al. 1969, S. 157). Weitere historische Definitionen des Punktbegriffs, welche allerdings gegenüber den bereits besprochenen

Ansätzen keine neuen Aspekte beinhalten, finden sich unter anderem bei (Heath 1908). Walz et al. ziehen Resümee: „Da es sich um einen Grundbegriff handelt, ist die Definition des Begriffes ‚Punkt' nicht möglich, obwohl lange versucht wurde, schlüssige Definitionen dafür anzugeben." (Walz et al. 2017, S. 283)

Das um 60 n. Chr. entstandene Werk Herons von Alexandria kann als eine Art Gegenstück zu Euklids Elementen verstanden werden. (Wußing 2008, S. 205) Im Gegensatz zu Euklids Ansatz, seine Geometrie mit der Definition des Punktes zu beginnen, beschreibt Heron den Punkt als das Endergebnis einer Reihe von Abstraktionen: „Die Geometrie hat ihre Darstellung durch Abstraktion aufgebaut; sie nimmt nämlich den physischen Körper, der drei Dimensionen hat und Stofflichkeit, und durch Entfernung seiner Stofflichkeit hat sie den mathematischen Körper gebildet, der solide ist, und durch Abstraktion hat sie dann den Punkt erreicht [...]". (Wußing 1989, S. 75, zitiert nach Wußing 2008, S. 207)

Die oben besprochene Auffassung von Punkten als Bestandteile bzw. Elemente anderer geometrischer Objekte findet sich schon in der Antike. Bereits bei den Griechen war es üblich, die im Rahmen einer axiomatisch-synthetischen Behandlung von Kurven formulierten Definitionen in äquivalente Bedingungen zu übersetzen, die die Zugehörigkeit eines Punktes zu einer solchen Kurve durch algebraische Beziehungen zwischen variablen, von diesem Punkt abhängigen, und festen, von der Kurve abhängigen, Größen ausdrücken. Diese geometrische Algebra der Griechen diente vor allem der Arbeit mit solchen Beziehungen mit dem Ziel, Aufgaben zu lösen und Sätze zu beweisen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 325)

Neben den Landvermessungen der alten Ägypter ist die Kartographie der Antike ein weiterer historischer Anwendungsbereich des mathematischen Modells des Punktes. Geographen versuchten beispielsweise größere Bezirke oder den ganzen ihnen bekannten Ausschnitt der bewohnten Erde darzustellen. Dabei wurde etwa von Eratosthenes ein rechtwinkliges Koordinatensystem aus Parallelkreisen und Meridianen eingeführt, welche durch feste Punkte hindurchgingen. Diese Punkte waren dabei Städte, deren Koordinaten man bestimmt hatte, wodurch sich eine geometrisch klar bestimmte Zuordnung von Punkten auf der Erdkugel zu ihren Bildpunkten in der Kartenebene ergibt.
(Scriba & Schreiber 2010, S. 83 ff.)

Im Mittelalter entstanden eine Reihe von Schriften zur praktischen Geometrie. Eine Vorbildrolle für die Folgezeit nimmt dabei das in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts von Hugo St. Victor verfasste „Practica geometriae" ein. Über den Punkt wird gesagt, dass dieser das Vermögen habe, von sich eine Linie in jeder beliebigen Richtung ausgehen zu lassen oder in sich aufzunehmen. (Scriba & Schreiber, S. 223)

Im 14. Jahrhundert wurde in Thomas Bradwardines sowohl philosophischer als auch physikalischer und mathematischer Abhandlung „De continuo" die Frage untersucht, ob das Raumkontinuum aus unteilbaren Atomen bestehen kann. Zur Begründung seiner Auffassung, dass dies nicht möglich sei, verwendete er das mathematische Modell einer aus endlich vielen, nicht weiter teilbaren Punkten zusammengesetzten Strecke. (Scriba & Schreiber 2010, S. 232) Zum gleichen Schluss war auch schon Aristoteles gelangt. Dieser vertrat die Ansicht, dass Kontinua wie beispielsweise Raum und Zeit nicht aus Punkten zusammengesetzt sein können. (Scriba & Schreiber 2010, S. 40) Heath erläutert Aristoteles' Gedankengänge: So sieht er Schwierigkeiten beim Übergang vom Unteilbaren bzw. unendlich Kleinen hin zur teilbaren bzw. endlichen Größe. Da ein Punkt unteilbar ist, könne keine Anhäufung von Punkten, egal wie lange fortgeführt, etwas Teilbares ergeben. Ein Punkt könne nicht kontinuierlich mit einem anderen Punkt liegen. (Heath 1908, S. 156)

Auch dem unter anderem durch den Schiffsbau motivierten aufstrebenden Interesse an Problemen der Schwerpunktsbestimmung in Mittelalter und Renaissance (Scriba & Schreiber 2010, S. 305) lag die Anwendung des mathematischen Konzepts des Punktes zugrunde. Dieses bereits angesprochene physikalische Modell taucht dabei schon um 250 v. Chr. in den Schriften Archimedes' auf. (Wußing 2008, S. 196)

Im 16. Jahrhundert finden sich nach Scriba und Schreiber bei dem Pariser Gelehrten Pierre de la Ramèe erste Ansätze eines Nachdenkens über den strukturellen Charakter einer axiomatisch aufgebauten Geometrie. Über Punkte wird dabei gesagt, dass die Klärung des (physikalischen) Wesens von Objekten wie Punkt und Gerade nicht die Aufgabe einer solchen Geometrie sei. Zudem seien Axiome nicht denknotwendig, sollten aber aus einer philosophischen bzw. didaktischen Motivation heraus angenommen werden. (Scriba & Schreiber 2010, S. 251)

Scriba und Schreiber sehen auch die geometrischen Keime der Infinitesimalmathematik in der Renaissance, für welche die Versuche charakteristisch seien, die strengen aber mühsamen Beweismethoden eines Archimedes für Formeln zu Flächeninhalten und Volumina durch heuristische und verallgemeinerungsfähige Überlegungen zu ersetzen. Ein typisches Beispiel dafür sei der Beginn der 1615 veröffentlichten Schrift „Neue Stereometrie der Fässer" von Johannes Kepler, in welcher aus der Antike bekannte Resultate mit neuen Begründungen versehen würden: „Der Umfang eines Kreises hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele; jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze im Mittelpunkt des Kreises liegt." Von dieser Annahme ausgehend werde daraufhin gefolgert, dass sich der Flächeninhalt eines Kreises aus den Inhalten unendlich vieler Dreiecke zusammensetzt. (Scriba & Schreiber 2010, S. 305) Der Punkt tritt hier also als *das* infinitesimale Referenzobjekt in Erscheinung — der aus unendlich vielen (und dadurch implizit unendlich kleinen) Punkten zusammengesetzte endliche Kreisumfang wird als geltende Tatsache angenommen und daraus durch Analogie gefolgert, dass dies ebenso für unendlich kleine „Teile" gelten muss, womit die Kreisbögen gemeint sind.

Einen weiteren Beitrag zu unserem heutigen Verständnis von Punkten lieferte die um 1637 von René Descartes und Pierre de Fermat nahezu gleichzeitig und im wesentlichen unabhängig voneinander begründete Koordinatenmethode, welche eine Verzahnung von Geometrie und Algebra ermöglichte, die heute Voraussetzung für eine leistungsfähige Mathematik ist. Einerseits ermöglicht sie die algebraische Behandlung geometrischer Probleme, andererseits die visuelle Veranschaulichung algebraischer Sachverhalte. (Scriba & Schreiber 2010, S. 324) Der dabei zugrunde liegende Ansatz, u. a. Punkte mithilfe kartesischer Koordinaten darzustellen, ist heute als analytische Geometrie bekannt. (Silvester 2001, S. 6) Für eine detaillierte Analyse der Entwicklung der Koordinatenmethode sei auf (Scriba & Schreiber 2010, S. 324 ff.) verwiesen, für unsere Zwecke sei an dieser Stelle festgehalten, dass bei Fermat beispielsweise die Neuerung auftritt, die beiden variablen Größen einer Gleichung, z. B. x und y, immer als Koordinaten eines variablen Punktes bezüglich eines typischerweise rechtwinkligen Achsensystems zu betrachten, sodass jede sinnvolle algebraische Gleichung zwischen x und y eine Punktmenge in der Ebene beschreibt, welche nun ausgehend von dieser Gleichung auf ihre geometrischen Eigenschaften untersucht werden kann. Die Hauptleistung Descartes' besteht in diesem Kontext vermutlich darin, dass er die antiken Beziehungen zwischen Algebra und Geometrie von bisherigen Beschränkungen befreien konnte (Scriba & Schreiber 2010, S. 327 f.), etwa dass die Dimension der betrachteten Größen höchstens räumlich sein konnte. (Scriba & Schreiber 2010, S. 325 f.)

Da die euklidischen Axiome seit ihrer Verfassung unter anderem aufgrund der fehlenden Strenge der Formulierungen wie bereits erwähnt immer wieder kritisiert wurden, haben viele Mathematiker versucht, eine befriedigendere Axiomatik zu entwickeln. (Berchtold 2017, S. 5 f.) 1899 verfasste schließlich David Hilbert seine axiomatische Geometrie, bei der unter anderem die Begriffe Punkt und Gerade an sich undefiniert bleiben (Silvester 2001, S. 5). Berchtold formuliert dies wie folgt: „Die Grundobjekte sind dabei zwei Mengen P und G, deren Elemente wir als ‚Punkte' und ‚Geraden' bezeichnen werden, wobei diese […] lediglich Bezeichnungen sind und keinerlei reale Anschauung wiedergeben müssen." Dabei liegt die Idee zugrunde, die Axiome von realen Objekten loszulösen und, wie es für die moderne Mathematik typisch ist, die Beziehung zwischen den Objekten ins Zentrum der Betrachtung zu stellen, wodurch die Art der Objekte keine Rolle mehr spielt und man „Punkte und Geraden" genausogut "Tische und Stühle" nennen könnte. (Berchtold 2017, S. 6) Der bei Hilbert verwendete Punktbegriff und davon abgeleitete Überlegungen sind somit vollständig abstrakt und von den ursprünglichen intuitiven Vorstellungen von Punkten losgelöst.

Vermutlich unabhängig von der geschilderten Entstehung des Punktbegriffs in Europa wurden „Punkte" auch in anderen Breitengraden in einem mathematischen Kontext verwendet. Wußing beschreibt beispielsweise die Kultur der Maya, welche sich seit etwa 2000 v. Chr. im Süden Mexikos entwickelte: In ihrem Zahlensystem, einem Positionssystem zur Basis 20, wurden die Zahlen 1 bis 19 durch eine Kombination aus Punkten und waagerechten Strichen dargestellt. Dabei stand ein Punkt für eine Einheit und ein Strich für fünf Einheiten. (Wußing 2008, S. 30) Im Gegensatz zu den Überlegungen der Pythagoräer bzw. Aristoteles', bei denen der Punkt selbst als (geometrische) Einheit gesehen wurde, wird er bei den Maya lediglich als Symbol für eine Zahl verwendet. Man könnte spekulieren, dass der (nicht-infinitesimale) Punkt aufgrund seiner primitiven Gestalt dabei intuitiv bevorzugt wurde, um ein elementares, einfachstes Objekt im Sinne einer Einheit zu symbolisieren.

Im Rahmen seiner Ausführungen zur Ethnomathematik wird von Wußing auch die Verwendung von Punkten im Kontext geometrischer Figuren im Süden Zentralafrikas beschrieben: Sogenannte Sona sind Sandzeichnungen, denen die Geometrie der dort ansässigen Bantu-Völker zugrunde liegt und die der Überlieferung von Wissen dienen, wobei sie sich häufig auf Sprichwörter, Fabeln, Spiele, Rätsel und Tiere beziehen. Zur Erstellung der Sona wird zunächst der Sandboden mit der Hand geglättet und mit den Fingern ein Bezugsgitter aus versetzten Punktreihen markiert. Dieses Punkteschema stellt eine Art Koordinatensystem für die geplante Linie dar, welche anschlißend mit dem Zeigefinger gezeichnet wird. Das dabei entstehende Muster folgt geometrischen Algorithmen und zeichnet sich häufig durch Symmetrien sowie Monolinearität aus, es besteht also aus einer einzigen zusammenhängenden Linie. Ähnliche Muster finden sich auf Funden aus Mesopotamien und Ägypten sowie in Indien. (Wußing 2008, S. 20 ff.) Der Punkt ist in derartigen Mustern untrennbar mit seiner Rolle als Referenzobjekt im Sinne eines Koordinatengitters verbunden. Dabei ist insbesondere der Aspekt, eine (relative) Lage zu besitzen, ein notwendiges Charakteristikum des Punktes.

c) Typische Darstellungen

Nach Bruner ist die Denkentwicklung mit der Repräsentation der Inhalte auf verschiedenen Ebenen verbunden, nämlich der enaktiven Ebene für Handlungen, der ikonischen Ebene, welche bildliche Darstellungen beinhaltet, sowie der symbolischen Ebene für abstraktere Darstellungen. (Reiss & Hammer 2021, S.47 ff.) Diesen Darstellungen kommt eine fundamentale Bedeutung zu, da mathematische Objekte an sich — im Gegensatz zu Phänomenen anderer Naturwissenschaften — nicht wahrgenommen oder gemessen werden können. (Duval 2006, S. 107) Da Darstellungen eines mathematischen Objekts jeweils nur einzelne Aspekte erkennbar machen können (Katter 2023, S. 28), scheint es für eine möglichst vollständige Erfassug des Objekts sinnvoll zu sein, mehrere seiner Aspekte darzustellen. Vor diesem Hintergrund ergeben sich zahlreiche Möglichkeiten, wie der Begriff des Punktes erschlossen werden kann, wobei die nachfolgenden Darstellungen teilweise als Vorschläge zu interpretieren sind. In die spätere Klassenbildung sind nur diejenigen Darstellungen einzubeziehen, die im Rahmen der oben untersuchten inner- und außerschulischen Anwendungen Relevanz besitzen.

Auf der enaktiven Ebene können die Lernenden beispielsweise mit immer feineren Stiften nebeneinander angeordnete Punkte auf einem Blatt Papier erzeugen. Auf diese Weise kann der Grenzprozesses veranschaulicht werden, der bei unendlicher Fortführung die Idealisierung des physischen, ausgedehnten Punktes hin zum ausdehnungsfreien mathematischen Punkt bewirkt. Denkbar wäre auch die Anordnung von unterschiedlich großen Steinen bis hin zum Sand- und Staubkorn. Diese Darstellungen rücken den Aspekt der infinitesimalen Größe ins Zentrum der Beobachtungen. Um den Aspekt der Lage zu verdeutlichen, können Punkte etwa in eine Landkarte eingezeichnet oder mit Spielfiguren eingetragen und so bestimmte Positionen markiert werden. Ebenso können Lernende selbst Punkte verkörpern und bestimmte Positionen auf einem Sportplatz o. Ä. einnehmen. Der Aspekt der Unteilbarkeit von Punkten kann handelnd dargestellt werden, indem ein leicht zu teilender Gegenstand (Knetmasse, Ton, …) iterativ (nicht notwendigerweise exakt) halbiert werden soll. Nach jedem Teilungsvorgang wird eine Hälfte verworfen und die andere erneut zerteilt, wodurch früher oder später ein winziger „Krümel“ entsteht, der aufgrund seiner Größe nicht weiter zerteilt werden kann. Die Erläuterung, diesen Vorgang in Gedanken weiter fortzuführen, führt auf den Begriff des mathematischen Punktes. Der Aspekt des Punktes, Koordinaten zu besitzen kann durch die Einzeichnung von Punkten in ein Koordinatensystem veranschaulicht werden, alternativ kann eine dynamische Geometriesoftware verwendet werden, um einen Punkt mit ständig angezeigten Koordinaten innerhalb eines Koordinatensystems zu bewegen, da enaktive Darstellungen nach Salle et al. auch Handlungen mit digitalen Objekten umfassen können. (Salle et al. 2023, S. 433) Der Punkt als Grundbaustein geometrischer Objekte kann dargestellt werden, indem beispielsweise aus einer dünnen Schicht Sand eine Dreiecksfläche erzeugt werden soll. Aus hinreichend großer Entfernung lässt sich nur die Dreiecksform erkennen, aber mit sinkendem Abstand werden die einzelnen Sandkörner erkennbar, aus denen diese besteht. Anhand dieses Beispiels kann der Punkt auch als Element einer Menge dargestellt werden, indem ein einzelnes Sandkorn aus der Menge der figurbildenen Sandkörner herausgenommen wird. Der Punkt als Schnitt zweier Geraden, Ende einer Linie oder Ecke eines Rechtecks kann erschlossen werden, indem diese exakten Positionen auf möglichst dünn gezeichneten Skizzen mithilfe einer Lupe und einer Stecknadel markiert werden sollen. Die Nulldimensionalität des Punktes könnte enaktiv mithilfe dynamischer Geometriesoftware erschlossen werden, indem ein Quader betrachtet wird, dessen Seitenlängen durch Schieberegler variiert werden können. Ausgehend von einem dreidimensionalen Objekt kann durch Verringerung einer beliebigen Seitenlänge auf den Wert Null ein zweidimensionales Rechteck erzeugt werden. Verringert man eine weitere Seitenlänge, so entsteht eine eindimensionale Strecke und durch Verringerung der noch verbleibenden Seitenlänge kontrahiert diese Strecke zu einem nulldimensionalen Punkt.

Ikonische Repräsentationen des Aspekts der infinitesimalen Größe sind die Darstellung als möglichst kleiner Kreis oder als Kreuz. Zudem kann eine Abfolge immer kleiner werdender Kreise betrachtet werden, um den Punkt als Ergebnis eines Grenzprozesses zu erfassen. In ein Koordinatensystem eingetragen veranschaulichen kleine Punkte oder Kreuze den Koordinatenaspekt des Punktes. Der Aspekt der Unteilbarkeit kann beispielsweise auf einem Bildschirm durch eine Quadratfläche dargestellt werden, welches iterativ geviertelt wird. Die Abbildung mehrerer Iterationsschritte veranschaulicht den Grenzprozess immer kleiner werdender Quadratflächen, bis schließlich die Größe eines einzelnen Pixels erreicht ist, welches nicht weiter geteilt werden kann. Der Punkt als Grundbaustein mathematischer Objekte kann beispielsweise anhand von Funktionsgraphen mit hebbarer Definitionslücke bzw. Definitionsbereichen, aus denen willkürlich ein bestimmer Wert ausgeschlossen wurde, dargestellt werden. Die Vorstellung, dass der Graph aus Punkten zusammengesetzt ist, ist eng mit der Beobachtung verknüpft, dass durch Herausnahme eines einzelnen Punktes eine „Lücke" entsteht, symbolisiert durch einen kleinen Kringel. Ein weiterer Ansatz ist die Betrachtung (schwarz-weißer) pointillistischer Zeichnungen, welche die einzelnen Punkte als elementare Bestandteile der Motive erkennen lassen. Anhand der gerade genannten Darstellungen lässt sich auch der Aspekt des Punktes darstellen, das Element einer Menge zu sein, nämlich ein Element des als Punktmenge aufgefassten Funktionsgraphen bzw. Motivs der Zeichnung. Auch die ikonische Darstellung des Punktes als Schnitt zweier Geraden (oder anderer geeigneter Funktionen bzw. Objekte) in Form einer einfachen Zeichnung zweier möglichst dünner, sich schneidender Linien ist möglich. Die winzige Schnittmenge kann sich dabei farblich vom Rest der Linien abheben. Eine Darstellung des Punktes als das Ende von Linien ist beispielsweise mithilfe eines abgebildeten Funktionsgraphen mit eingeschränktem, abgeschlossenem Definitionsbereich möglich. Um zu betonen, dass die Ränder des Graphen Teil des Intervalls sind, können sie dabei als ausgefüllte Kringel bzw. Punkte dargestellt werden. Analog kann der mathematische Punkt dargestellt werden, indem in die Ecken eines Rechtecks durch ausgedehnte Punkte hervorgehoben werden. Der Aspekt der Nulldimensionalität kann durch eine Aneinanderreihung von Abbildungen dargestellt werden: Ein Würfel mit einer Ecke auf dem Koordinatenursprung und drei, auf den positiven Koordinatenachsen verlaufenden, hervorgehobenen Seiten als Beispiel für ein dreidimensionales Objekt, daneben analog eine Quadratfläche mit zwei hervorgehobenen Seiten als Beispiel für ein zweidimensionales Objekt, daneben eine Strecke als eindimensionales Objekt und daneben ein kleiner Punkt als nulldimensionales Objekt. Zudem können geeignete Phasen der enaktiven Darstellungen jeweils bildlich fixiert werden und ebenfalls als ikonische Darstellungen dienen. (Salle et al. 2023, S. 433)

Die Darstellung mathematischer Konzepter mithilfe von Tabellen wird häufig als eigene Ebene aufgefasst, da Tabellen als Ganzes einerseits etwas Ikonisches sind, aber ihr Inhalt in der Regel etwas Symbolisches ist. Die Darstellung von Punkten in tabellarischer Form verdeutlicht dabei deren Koordinatenaspekt, da die Tabelleneinträge genau jene Zahlen sind, welche in den Koordinatentupeln vorkommen.

Auf der symbolischen Ebene finden sich ebenfalls verschiedene Repräsentationsmöglichkeiten. Punkte werden einerseits häufig durch Großbuchstaben symbolisiert („Der Punkt A"). Falls die Lage quantifiziert werden soll, werden Punkte zusätzlich als Zahlentupel dargestellt („Der Punkt $(3\,|\,4)$ "). Auch die Beschreibung von Punkten durch ihre Ortsvektoren lässt sich auf der symbolischen Ebene ausdrücken: Durch Buchstaben mit Vektorpfeil („Der Punkt mit Ortsvektor $\overrightarrow{A}$ ") bzw. durch Spaltenvektoren mit Zahlen als Einträgen („Der Punkt mit Ortsvektor $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$“). Eine weitere abstrakte Darstellungsmöglichkeit ist die algebraische Darstellung durch Gleichungen, welche die Koordinaten x, y bzw. x, y, z eines Punktes mit Zahlenwerten verknüpfen. Der Punkt wird somit als die Lösungsmenge eines Gleichungssystems dargestellt („Der Punkt, der die Gleichungen $x = 2,\ \ y = 3,\ \ z = 4$ erfüllt“). In diesem Kontext können Punkte auch als Schnittmengen von Funktionen dargestellt werden („Der Punkt bzw. die Punkte mit $f = g$“). Auch vor dem Hintergrund des Zuordnungscharakters von Funktionen lassen sich Punkte symbolisch darstellen: Einerseits als Gleichung, die einem Wert des Definitionsbereichs einen Funktionswert zuordnet („Der durch $f(3) = 4$ festgelegte Punkt“), andererseits mithilfe eines Zuordnungspfeils („Der durch $3 \mapsto 4$ festgelegte Punkt“). Sofern im Rahmen des Vertiefungskurses der 12. Jahrgangsstufe die komplexen Zahlen besprochen werden, können als Punkte der komplexen Zahlenebene aufgefasste Zahlen auch durch Gleichungen der Form $z = a + ib$ dargestellt werden („Der durch $z = 2 + i5$ festgelegte Punkt“) bzw. durch Angabe von Real- und Imaginärteil („Der Punkt mit Realteil 2 und Imaginärteil 5“).

3.2.1.3. Empirische Ergebnisse

Angesichts der mangelnden verfügbaren Literatur, die sich im Rahmen empirischer Studien explizit dem Punktbegriff widmet, wird dieser im Folgenden überwiegend anhand empirischer sowie theoretischer Ergebnisse zu ausgewählten oben herausgearbeiteten Aspekten des Begriffs analysiert. Konkret stehen dabei die drei Aspekte „infinitesimale Größe“, „Lage“ und „Koordinaten“ im Zentrum der Betrachtungen, da diese die tragenden Säulen des Punktbegriffs im Schulkontext darstellen. Zunächst werden jedoch einige allgemeine Ergebnisse bezüglich des Lernprozesses von geometrischen Inhalten in die Sachanalyse einbezogen.

Nach Hattermann et al. sind eine streng deduktive Vorgehensweise und die Verwendung axiomatischer Systeme im Mathematikunterricht in Grundschule und Sekundarstufe I aufgrund entwicklungspsychologischer Faktoren zu vermeiden. Gebiete, die geordnet werden sollen, müssen den Lernenden bereits bekannt sein (Hattermann et al. 2023, S. 207 f.), weshalb das Nachvollziehen der Ordnung einer solchen Axiomatik durch die Lernenden problematisch erscheint. Es spricht laut Hattermann et al. einiges für eine an außermathematischen Kontexten und Erfordernissen orientierte Strukturierung des Geometrieunterrichts, welche die Rolle geometrischer Problemlösestrategien für die Lösung alltagsrelevanter Fragestellungen verdeutlicht. Ein solches deskriptives Vorgehen scheint aufgrund seines höheren Motivationspotenzials im Schulalltag gegenüber einer Unterrichtsausrichtung an innermathematischen Strukturen zu bevorzugen zu sein. (Hattermann et al. 2023, S. 208) Vor diesem Hintergrund erscheinen abstrakt-axiomatische Behandlungen des Punktbegriffs wie beispielsweise bei Hilbert, der den Begriff lediglich als Bezeichnung für eine abstrakte Klasse von Objekten verwendet, völlig ungeeignet für die Verwendung im Schulkontext. Hershkowitz führt an, dass Geometrie nur bedeutungsvoll sein kann, wenn sie eine Beziehung zum Erlebnisraum herstellt. Es besteht ein breiter Konsens, dass der praktisch-intuitive Aspekt der Geometrie, d. h. die Interaktion mit Formen in einem Raum, und das Lernen der Geometrie als formal-logische Struktur miteinander verknüpft sind. Zudem spielen die Aufnahme visueller Informationen sowie die Visualisierung als eine Form mathematischen Denkens eine wichtige Rolle, da sie als Eingang zur Geometrie bezeichnet werden können — die erste Internalisierung der Realität, bevor sie von den Lernenden in Form geometrischer Konstrukte mathematisiert werden kann. (Hershkowitz 2014, S. 542 ff.) Auch Hattermann et al. betonen die Bedeutung visueller Darstellungen für die Geometrie. (Hattermann et al. 2023, S. 224 f.)

Grundlegend für die Untersuchung der Begriffsbildung in der Geometrie ist laut Hattermann et al. die Arbeit des Ehepaars van Hiele, deren Modell sich primär dadurch von Piaget unterscheidet, dass die Entwicklung geometrischen Denkens nicht als Reife-, sondern als Lernprozess betrachtet wird, was aktuellere Studien zunehmend stützen. (Hattermann et al. 2023, S. 218 f.) Der Entwicklungsstand hängt somit von Lehre und Lernerfahrungen ab und ist relativ unabhängig von der Reife der Lernenden. (Hershkowitz 2014, S. 544) Laut Pegg weist das Modell dennoch viele Gemeinsamkeiten mit den Ideen Piagets auf, da das Verständnis der Lernenden dem Durchlaufen einer Abfolge von Stufen zugeschrieben wird: Die erste Stufe umfasst das Erkennen von Figuren anhand ihrer Erscheinung bzw. Form, wobei die Eigenschaften einer Figur keine explizite Rolle spielen. Die zweite Stufe ermöglicht die Identifikation einer Figur aufgrund ihrer Eigenschaften, welche als voneinander unabhängig gesehen werden. Auf der dritten Stufe verlieren die Eigenschaften ihre Unabhängigkeit, da erkannt wird, dass eine Eigenschaft anderen vorausgeht oder aus ihnen folgt. Zudem werden Beziehungen zwischen verschiedenen Figuren verstanden. Auf der vierten Ebene verstehen die Lernenden die Rolle der Deduktion und sind in der Lage, das Konzept notwendiger und hinreichender Bedingungen zu verwenden, Beweise zu entwickeln statt auswendig zu lernen sowie Definitionen aufzustellen. Die fünfte und höchste Ebene ermöglicht schließlich, verschiedene deduktive Systeme zu vergleichen und unterschiedliche auf Postulaten basierende Geometrien zu entdecken. (Pegg 2014, S. 613 f.)

Laut Hershkowitz resultieren Schwierigkeiten beim Lernen geometrischer Figuren in der Grundschule unter anderem aus der mathematischen Strukturierung der Inhalte. Geometrische Konzepte leiten sich, wie andere mathematische Konzepte auch, von ihren Definitionen ab, die eine minimale Menge der für ein Konzept kritischen Eigenschaften enthalten. Diese kritischen Eigenschaften können von Lernenden verwendet werden, um einzelne Fälle zu klassifizerien. Probleme treten auf, wenn ein einführendes Beispiel für ein Konzept, ein Prototyp, nachfolgend zur Klassifizierung anderer Fälle verwendet wird. Da dieser Prototyp zuerst gelernt wird, findet er sich im concept image junger Lernender wieder. Er weist jedoch zusätzliche, nicht für das Konzept notwendige Eigenschaften auf, beispielsweise besitzen Quadrate als prototypisches Beispiel für Vierecke alle kritischen Eigenschaften eines Vierecks, darüberhinaus jedoch auch gleich lange Seiten, was zu einer falschen Klassifizierung anderer Vierecke führt. Ein verwandtes Problem tritt auf, wenn eine isolierte Zeichnung die einzige Repräsentation einer Figur, d. h. des geometrischen Konzepts, ist: Es besteht grundsätzlich eine Lücke zwischen Figuren und einzelnen Zeichnungen, die diese darstellen, da eine Zeichnung einerseits für das Konzept nicht-kritische Eigenschaften aufweist, die Elemente der Figur eine Variabilität besitzen, welche in einer einzelnen Zeichnung nicht vorhanden ist, und eine einzelne Zeichnung verschiedene Figuren darstellen kann. Diese Schwierigkeiten können durch variable Figuren, die mit dynamischer Geometriesoftware erzeugt werden, überwunden werden. (Hershkowitz 2014, S. 544 f.)

Viele psychologische Ansätze führen den Faktor Raumvorstellung explizit als wichtige Komponente der allgemeinen Intelligenz an und stufen ihn im Hinblick auf unsere Gesellschaft teilweise als „unschätzbaren Vorteil" ein. (Maier 1999, S. 29) Studien bestätigen nach Maier, dass die Raumvorstellungsfähigkeit dabei einer zeitlichen Entwicklung unterliegt. Sie nimmt ab der Geburt mit fortschreitendem Lebensalter zu und ist erst mit etwa 20 Jahren nahezu vollständig ausgeprägt. Hinsichtlich der Trainierbarkeit der Raumvorstellung wird das Fazit gezogen, dass es in Analogie zu anderen kognitiven Fähigkeiten einerseits zahlreiche empirische Belege für eine starke erbliche Komponente gibt, aber andererseits auch viele Studienergebnisse für eine prinzipielle Trainierbarkeit bei Personen unterschiedlichen Alters sprechen. (Maier 1999, S. 78 ff.) Im Allgemeinen zeigen die empirischen Daten dabei nach Maier eine deutliche, geschlechtsunabhängige Verbesserung der räumlichen Fähigkeiten. Probanden mit schwachem räumlichem Vorstellungsvermögen waren eher in der Lage, ihre Fähigkeiten zu verbessern, als Personen mit gut entwickelter Raumvorstellung. Einzelne Studien verzeichnen einen leichten Trend zur stärkeren Leistungsverbesserung weiblicher Personen und deuten darauf hin, dass Frauen zwar auf einer tieferen Ebene starten, sich allerdings schnell verbessern können. (Maier 1999, S. 83 ff.) Generell zeigen sich in zahlreichen Studien, dass männliche Personen mehr oder wenig stark ausgeprägte Leistungsvorteile im Bereich des räumlichen Vorstellungsvermögens besitzen, wobei die Geschlechtsunterschiede vor der Pubertät kaum in Erscheinung treten. (Maier 1999, S. 204 f.) Empfohlene Maßnahmen zur Verringerung dieser Unterschiede umfassen ausreichende zeitliche Vorgaben, die Schulung effizienter Lösungsstrategien, die Verwendung spielerischer und experimenteller Tätigkeiten sowie eine adäquate Verbalisierung räumlicher Bezüge. (Maier 1999, S. 208 f.)

Nachfolgend werden Schwierigkeiten von Lernenden im Bezug auf die infinitesimale Größe von Punkten betrachtet. Bei Kasparek findet sich ein Überblick über empirische Untersuchungen zu Lernendenvorstellungen bezüglich des Unendlichkeitsbegriffs. Diese zeigen, dass Lernende aller Schultypen lediglich ein „intuitives Verständnis" des Begriffs besitzen, was sich im Lehrmaterial widerspiegelt, welches den Begriff der Unendlichkeit zwar an verschiedenen Stellen verwendet, ihn aber nie explizit behandelt. Lernende werden folglich häufig mit ihren selbst entwickelten individuellen Vorstellungen zur Unendlichkeit allein gelassen. Auch hinsichtlich unendlicher Prozesse findet man, dass Folgen und ihre Grenzwerte im Mathematikunterricht an vielen Stellen auftauchen, jedoch selten explizit besprochen werden. Eine auf Basis empirischer Untersuchungen identifizierte Fehlvorstellung zum Grenzwertbegriff ist die Interpretation des Ausdrucks „unendlich klein" als eine Art sehr kleine Zahl, was in der Vorstellung resultiert, dass dieses unendliche Kleine beim Durchlaufen der Folge tatsächlich erreicht wird und eine Art letztes Folgenglied darstellt. Dieser Fehlvorstellung liegt für Kasparek ein fehlendes Verständnis der gängigen mathematischen Formulierung „beliebig klein" zugrunde, die auf den Begriff der potenziellen Unendlichkeit zurückgeht, welche nur als Prozess und nicht im Sinne eines Objekts tatsächlich vorliegen kann. (Kasparek 2023, S. 32 ff.) Die genannten Ergebnisse wurden im Kontext der Analysis bzw. auf Zahlen bezogen gewonnen. Da eine explizite Behandlung des Begriffs „unendlich klein" jedoch auch im Geometrieunterricht üblicherweise ausbleibt, erscheint es plausibel, ähnliche Probleme auch im Kontext geometrischer Objekte zu erwarten, insbesondere da deren Größe bzw. Ausdehnung auch durch Zahlen charakterisiert wird (z. B. Durchmesser eines Kreises oder Punktes).

Der Aspekt der Lage im Sinne räumlicher Orientierung wurde von zahlreichen Studien untersucht, die von Clements zusammengefasst werden. Nach ihm weisen bereits Kinder im Vorschulalter Kompetenzen im Bezug auf die Verwendung und Erstellung von Landkarten auf. Mentale Karten von sowohl Kindern als auch Erwachsenen sind dabei keine rein graphischen Abbildungen, sondern bestehen aus vielen Arten von Ideen und Prozessen, beispielsweise besitzen blinde Kinder ein Bewusstsein für räumliche Beziehungen. Zudem zeigen sich bei der Übersetzung mentaler Karten in zweidimensionale Zeichnungen Schwierigkeiten. Bedingt durch unterschiedliche Fähigkeiten hinsichtlich des Zeichnens und der Kartenerstellung können ähnliche mentale Repräsentationen zu relativ unterschiedlichen Karten führen. Die Strukturierung, Abstraktion und Transformation des Wissens über ihre eigenen Zuhause mit dem Ziel, eine zweidimensionale Karte davon zu erstellen, bereitet vielen Lernenden der dritten bis fünften Klasse große Probleme. Umgekehrt führt auch die Übersetzung zweidimensionaler Karten in mentale Vorstellungen zu Schwierigkeiten, selbst bei Erwachsenen. Ein Beispiel ist die Situation, sich in eine nordwärts ausgerichtete Karte hineinzuversetzen, während sich der Betrachtende Richtung Süden bewegt. (Clements 164 f.) Im Zusammenhang mit der Betrachtung von Landkarten bzw. Positionen „im Kopf“ treten weitere interessante Phänomene auf, die von Pinkernell diskutiert werden: Wenn ein mentales Objekt ein reales Pendant besitzt, dann kann das reale Objekt sehr gut zur Beschreibung des mentalen verwendet werden. Die Bearbeitungsdauer für die mentale Operation, sich auf direktem Weg so schnell wie möglich zwischen zwei Punkten auf einer ins Gedächtnis eingeprägten Karte zu bewegen ist annähernd direkt proportional zum Abstand der Punkte auf der realen Karte. Diese Abhängigkeit suggeriert, dass die Positionen von Punkten auf mentalen Karten mittels solcher Abstände beschrieben werden können. (Pinkernell 2003, S. 67) Bei der Beurteilung der relativen Lage einzelner Orte wird nach Pinkernell zudem (unbewusst) auf Fakten über die relative Lage übergeordneter geographischer Einheiten bzw. Gebiete zurückgegriffen. Erinnerungen über räumliche Relationen scheinen hierarchisch strukturiert zu sein, sodass bei der Rekonstruktion nicht explizit gespeicherter Informationen über die räumliche Relation zweier Objekte auf die relative Lage der Gebiete, denen die Objekte angehören, zurückgegriffen wird.

Befragten wurde eine Karte gezeigt, auf welcher der Punkt X westlich des Punkts Y liegt, jedoch einem Gebiet angehört, welches als Ganzes östlich von dem Gebiet liegt, dem Y angehört. Auf Basis der Erinnerung, dass X zum Gebiet B und Y zum Gebiet A gehört sowie A westlich von B liegt, wurde später von fast der Hälfte der Befragten fälschlicherweise rekonstruiert bzw. gefolgert, dass X östlich von Y liegt — deutlich weniger falsche Antworten traten auf, wenn die Befragten zuvor Karten ohne Gebiete oder mit Gebieten gesehen hatten, deren räumliche Anordnung mit der Anordnung der enthaltenen Punkte übereinstimmt. Die visuelle Information wird also auf abstrakte Relationen reduziert abgespeichert und dieses abstrakte Wissen beeinflusst die Ausprägung der mentalen Landkarte beim Abrufen der Erinnerungen. Der genaue Verlauf der Grenze zwischen beiden Gebieten rückt dabei in den Hintergrund. (Pinkernell 2003, S. 60 f.)

Zusammenfassend müssen Kinder nach Clements die Fähigkeit entwickeln, Beziehungen zwischen Objekten im Raum herzustellen, diesen Raum vergrößern und die verschiedenen Bedeutungen und Verwendungen räumlicher Informationen miteinander verknüpfen. Ebenso wie die Entwicklung von Fähigkeiten zur Erstellung und Benutzung mentaler Karten ist auch die Entwicklung geometrischer Ideen durch Erfahrungen mit Landkarten wichtig. Anstelle isoliertem „Kartenlese-“ und Geometrieunterricht sollten nahegelegene Landschaftsgebiete tatsächlich überblickt, vermessen und gezeichnet werden. Bei diesen Tätigkeiten stellen sich vier Fragen, zu deren Beantwortung verschiedene Fähigkeiten entwickelt werden müssen: Richtung — wohin? Entfernung — wie weit? Ort — wo? Identifizierung — welche Objekte? Die Arbeit mit räumlichen Anordnungen und Karten beinhaltet dabei die zentralen Prozesse der Abstraktion, Verallgemeinerung und Symbolisierung. Beispielsweise kann die Darstellung lokalisierter Objekte durch ikonische Symbole wie Flugzeuge für Flughäfen oder abstrakte Symbole wie Punkten daraus folgen, zunächst mit Miniaturmodellen Anordnungen von Gebäuden nachzubauen, anschließend Zeichnungen der dargestellten Objekte und ihrer relativen Lage anzufertigen und diese letzten Endes durch Punktsymbole zu ersetzen. (Clements 2003, S. 165 f.) Eine ausführliche Diskussion verschiedener psychologischer und mathematikdidaktischer Modelle zur Entwicklung von räumlichem Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht findet sich unter anderem bei (Pinkernell 2003). Auch (Maier 1999) gibt einen breit angelegten Überblick über Begrifflichkeiten, Theorien, empirische Studien sowie Vorschläge für die Unterrichtspraxis zur Raumvorstellung.

Hinsichtlich des Aspekts, Koordinaten zur Quantifizierung der Lage zu verwenden, findet sich bei Clements die Feststellung, dass die Verwendung von Koordinantensystemen eine Voraussetzung für räumliche Organisation und damit räumlich-geometrisches Denken ist. Bei Piaget sind solche Bezugssysteme analog zu einem Behälter, der aus einem Netzwerk von unbeweglichen Orten oder Positionen besteht, wobei die Objekte innerhalb des Behälters beweglich sind. Das Konzept des Koordinatensystems entsteht als gleichzeitige Einordnung aller möglichen Positionen in eine Struktur. Diese Konzeptualisierung beinhaltet die Ersetzung von Ordnungs- und Abstandsbeziehungen zwischen Objekten durch ähnliche Beziehungen zwischen den Positionen selbst — der Raum wird gewissermaßen entleert. Die Intuition bezüglich des Raumes kann folglich nicht als ein angeborenes Begreifen der Eigenschaften von Objekten, sondern als System von Beziehungen aufgefasst werden, die durch Handlungen mit diesen Objekten entstandenen sind. Die Strukturierung des Raumes durch Gitter und Koordinaten als Referenzsysteme entspricht der geistigen Operation, eine Ordnung oder Form für ein Objekt oder eine Menge von Objekten in diesem Raum zu konstruieren. Um in Koordinatensystemen mit Punkten arbeiten zu können, müssen sie nach Clements mit Beschriftungen in Form geordneter Koordinatenpaare verknüpft und in die Ordnungs- und Abstandsrelationen des Gitters integriert werden, was eine Integration von numerischen und räumlichen Schemata erfordert. Die Fähigkeit von Lernenden, koordinatenbezogene Aufgaben zu lösen, nimmt von der ersten bis zur sechsten Klasse stetig zu: So können in der ersten Klasse Punkte in eindimensionalen Situationen lokalisiert werden, in der vierten Klasse in zwei Dimensionen und in der sechsten Klasse in drei Dimensionen. (Clements 2003, S. 166 f.) Somerville & Bryant zeigen, dass bereits vier- bis sechsjährige Kinder in zweidimensionalen Szenarien Punkte in Koordinaten und Koordinaten in Punkte umwandeln können, d. h. Positionen mithilfe von gegebenen Koordinaten bestimmen. Ein zentraler Schritt ist dabei die Extrapolation vertikaler Linien ausgehend von der horizontalen Koordinatenachse und horizontaler Linien ausgehend von der vertikalen Achse, um ihren Schnittpunkt und damit die gesuchte Position zu bestimmen. (Somerville & Bryant 1985, S. 604 ff.) Bezogen auf den Unterricht sagt Clements, dass Alltagskontexte anfangs hilfreich sein können, aber mathematische Ziele und Perspektiven zu jeder Zeit klar artikuliert werden sollten. Zudem sollten die Kontexte ausgeblendet werden, wenn sie von den Lernenden nicht mehr benötigt werden. Nach Clements sind Lernende prinzipiell in der Lage, Punkte auf Graphen einzuzeichnen und abzulesen, jedoch kann es sich dabei um gelernte Handlungen ohne tiefergehendes Verständnis handeln, da oft keine Achsen konstruiert werden können. Außerdem wird unter anderem Punkten von Graphen eine Dichte zuerkannt und die Idee, dass eine Linie mehr Punkte besitzt, als zuvor von Hand eingezeichnet wurden, bereitet Schwierigkeiten. (Clements 2003, S. 166)

3.2.1.4. Zusammenschau

Die Betrachtung und Veknüpfung der gesammelten Ergebnisse zum Begriff des Punktes ermöglicht die Identifikation unterschiedlicher Kernelemente, aus denen die nachfolgenden für den gewählten Bezugsrahmen relevanten Klassen gebildet werden können.

Erste Klasse: Unendlich kleiner Fleck

In dieser Klasse wird der Punkt in Anlehnung an die Verwendung des Wortes in der Alltagssprache aufgefasst. Dort meint der Begriff einen kleinen Fleck, d. h. ein typischerweise kreisförmiges zweidimensionales Objekt mit geringer Ausdehnung, im Kontext des Mathematikunterricht trifft man auf die zusätzliche Eigenschaft, dass Punkte sogar *unendlich* klein sind. In diesem Sinne kann der mathematische Punkt als das Ergebnis eines Grenzprozesses aufgefasst werden: Er entsteht, wenn man ein ausgedehntes Objekt immer kleiner werden lässt. Aufgrund der Identifizierung von Punkten im Alltag mit Kreisformen kann der Punkt beispielsweise als Ergebnis des Prozesses verstanden werden, den Durchmesser eines Kreises gegen 0 laufen zu lassen. Dabei sind auch Formulierungen wie „Objekt ohne Ausdehnung“ in diese Klasse einzuordnen. Da der Punkt hier durch einen Prozess „entsteht“, besitzt diese Klasse einen genetischen Charakter.

Wesentliche Kernelemente dieser Klasse sind:

- ein ausgedehntes geometrisches Objekt, beispielsweise ein Kreis
- die Größe des Objekts, z. B. charakterisiert anhand des Durchmessers
- der (anschauliche) Grenzprozess „Größe gegen 0“ bzw. „Durchmesser gegen 0“
- der Punkt als das Ergebnis des Grenzprozesses

Zweite Klasse: Beschreibung einer Stelle

Diese Klasse fasst den Punkt als räumliche Stelle auf, d. h. als einen exakt bestimmten Ort oder eine Lage in der Ebene oder im Raum. Anwendungen, für welche diese Klasse Bedeutung besitzt, umfassen beispielsweise die Arbeit mit Landkarten oder die Beschreibung von Bewegungsvorgängen.

Die Kernelemente dieser Klasse sind:

- eine zwei- oder dreidimensionale räumliche Umgebung
- eine ausgewählte Stelle dieser Umgebung
- der Punkt als Bezeichnung für diese Stelle

Dritte Klasse: Zahlentupel

In dieser Klasse wird der Punkt als Zahlentupel bezüglich eines (kartesischen) Koordinatensystems aufgefasst. Je nach Situation ist ein Punkt also ein Zahlenpaar bezüglich eines zweidimensionalen Koordinatensystems oder ein Zahlentripel bezüglich eines dreidimensionalen Koordinatensystems. Diese Vorstellung benötigt dabei keine anschauliche Interpretation der Koordinaten als Stellen im Raum o. Ä.. Die Vorstellung kommt dabei in verschiedenen mathematischen Kontexten zur Geltung, beispielsweise beim Einsetzen von Punkten in Gleichungen im Zuge von Berechnungen oder der Auswertung von Datenpunkten im Rahmen statistischer Untersuchungen.

Die zentralen Elemente dieser Klasse sind:

- das zwei- oder dreidimensionale Koordinatensystem
- ein Koordinatenpaar bzw. -tripel bezüglich dieses Koodinatensystems
- der Punkt als Bezeichnung für dieses Koordinatentupel

Vierte Klasse: Elementarer Baustein

In dieser Klasse tritt der Punkt in der Rolle eines Bausteins auf, aus dem andere Objekte zusammengesetzt sind. Es handelt sich dabei um eine Art Einheit, die den kleinstmöglichen

Bestandteil darstellt, in den die untersuchten Objekte zerlegt werden können. Üblicherweise werden in diesem Zusammenhang ebene oder räumliche Objekte betrachtet, wobei auch Funktionsgraphen als zusammengesetzte Objekte verstanden werden können. Anwendungsbeispiele dieser Klasse sind die Betrachtung der „Eckpunkte“ eines Würfels sowie der „Extrempunkte“ oder „Wendepunkte“ eines Funktionsgraphens.

Wesentliche Kernelemente dieser Klasse sind:

- ein anschauliches Objekt (z. B. Dreieck, Würfel oder Funktionsgraph)
- die Wahrnehmung des Objekts als aus Einzelteilen zusammengesetzt
- der Punkt als kleinstmöglicher Bestandteil des Objekts

Fünfte Klasse: Schnitt zweier Geraden

Diese Klasse legt Punkte mithilfe des Geradenbegriffs fest. Ein Punkt entsteht in dieser Auffassung, wenn sich zwei verschiedene nicht-parallele (und im dreidimensionalen Fall nicht windschiefe) Geraden schneiden. Dabei wird der Schnitt dieser Geraden als Punkt bezeichnet. Die Entstehung des Punktes kann beim Zeichnen der zweiten Geraden im Moment des Zusammentreffens mit der ersten Geraden nachvollzogen werden, weshalb diese Klasse einen genetischen Charakter besitzt. Diese Auffassung findet beispielsweise Anwendung, wenn die Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene oder im Raum untersucht werden sollen. Auch der Ursprung des kartesischen Koordinatensystems wird als der Schnittpunkt der Koordinatenachsen festgelegt und entspricht somit dem Schnitt von Geraden.

Wesentliche Kernelemente der Klasse sind:

- zwei verschiedene nichtparallele Geraden (in dreidimensionalen Kontexten zusätzlich nicht windschief)
- der Schnitt der beiden Geraden
- der Punkt als Bezeichnung für diesen Schnitt

Sechste Klasse: Ende von Linien

In dieser Klasse wird der Punkt mithilfe des Linienbegriffs festgelegt. Dabei werden die Enden von Linien (im Sinne von Randpunkten) als Punkte bezeichnet. Diese Klasse besitzt beispielsweise Relevanz, wenn der Begriff der Strecke als gerade Linie, die von zwei Punkten begrenzt wird, oder die Halbgerade als gerade Linie, die von einem Punkt begrenzt wird, eingeführt wird.

Die Kernelemente dieser Klasse sind:

- eine Linie
- das bzw. die Enden der Linie
- der Punkt als Bezeichnung für ein Ende

3.2.2. Formulierung und Diskussion der Grundvorstellungen

Auf Basis der gebildeten Klassen können nun die konkreten Grundvorstellungen für den Punkbegriff formuliert sowie im Hinblick auf das auszubildende Grundverständnis und mögliche Grundvorstellungsumbrüche auf Zusammenhänge untersucht werden.

Infinitesimal-Vorstellung

„Ein Punkt ist ein unendlich kleines Objekt."

Diese Grundvorstellung leitet sich vom Verständnis von Punkten im Alltag als kleine Flecken ab und ergänzt es um den Aspekt der infinitesimalen Ausdehnung. Der Punkt wird dabei implizit als Ergebnis eines Grenzwertprozesses dargestellt, weshalb dieser Vorstellung ein genetischer Charakter zugesprochen werden kann.

Stellen-Vorstellung

„Ein Punkt ist eine Stelle in der Ebene bzw. im Raum."

Diese Vorstellung setzt den Punkt in einen Bezug zu seiner Umgebung, indem er als eine bestimmte Position aufgefasst wird. Die Vorstellung betrifft dabei sowohl den zweidimensionalen als auch den dreidimensionalen Raum.

Tupel-Vorstellung

„Ein Punkt ist ein Paar bzw. Tripel von Zahlen bezüglich eines Koordinatensystems."

Diese Grundvorstellung des Punktes fasst ihn als Zahlentupel bezüglich eines (kartesischen) Koordinatensystems auf. Je nach Dimension des betrachteten Koordinatensystems handelt es sich dabei also um ein ggf. abstraktes Zahlenpaar oder Zahlentripel, da für diese Vorstellung weder Koordinatensystem noch Tupel eine anschauliche Bedeutung besitzen müssen.

Einheits-Vorstellung

„Ein Punkt ist der elementare Baustein geometrischer Objekte."

Der Punkt entspricht in dieser Vorstellung einer Einheit bzw. einem Baustein, aus dem andere Objekte zusammengesetzt sind. Je nach Situation kann es sich dabei um zwei- oder dreidimensionale Objekte handeln, welche in dieser Vorstellung als Punktmengen aufgefasst werden, z. B. Dreiecke, Würfel oder Funktionsgraphen.

Schnitt-Vorstellung

„Ein Punkt entsteht, wenn sich zwei verschiedene nicht-parallele (und im dreidimensionalen Fall nicht windschiefe) Geraden schneiden."

In dieser Grundvorstellung wird der Begriff des Punktes auf den Begriff der Geraden zurückgeführt. Der Schnitt zweier Geraden, die nicht identisch, nicht parallel und ggf. nicht windschief sind, wird dabei als Punkt bezeichnet. Die Vorstellung deckt damit sowohl zweidimensionale als auch dreidimensionale Kontexte ab. Da diese Vorstellung die Entstehung eines Punktes schildert, besitzt sie einen ausgeprägten genetischen Charakter.

End-Vorstellung

„Ein Punkt ist das Ende einer Linie."

Diese Vorstellung legt den Begriff des Punktes anhand des Begriffs der Linie fest. Sie hebt dabei besonders die Begrenzung von Strecken durch Punkte hervor. Die Vorstellung kann ebenfalls in zweidimensionalen und dreidimensionalen Szenarien angewandt werden.

Im Folgenden werden die formulierten Grundvorstellungen auf Zusammenhänge untereinander hin analysiert. Die Infinitesimal-Vorstellung lässt sich etwa mit der Stellen-Vorstellung verbinden, indem die betrachtete exakte Stelle des Raumes als infinitesimal kleiner Teil des Raumes und damit infinitesimal kleines Objekt interpretiert wird. Analog kann die Infinitesimal-Vorstellung mit der Einheits-Vorstellung verknüpft werden: Der elementare Baustein der geometrischen Objekte muss ein kleinstmögliches (und damit unendlich kleines) Objekt sein, da er andernfalls selbst aus noch kleineren Bausteinen zusammengesetzt sein könnte. Die Infinitesimal-Vorstellung kann mit der Tupel-Vorstellung verknüpft weden, indem die Zahlen des Tupels jeweils als exakte Striche auf der Zahlengeraden interpretiert werden, d. h. dort eine infinitesimale Ausdehnung besitzen, die sich auf die räumliche Ausdehnung des beschrieben Objekts überträgt. Auch die Schnitt-Vorstellung lässt eine Thematisierung der infinitesimalen Ausdehnung von Punkten zu: Da Geraden als Spezialfall von Linien unendlich dünn sind und lediglich eine Ausdehnung in Längsrichtung besitzen, wird bei einem Schnitt zweier verschiedener nicht-paralleler Geraden die Längsausdehnung der einen durch die infinitesimale Breite der anderen „ausgelöscht" bzw. auch auf eine infinitesimale Größe reduziert, wodurch der Punkt als Schnittobjekt in keine Richtung eine Ausdehnung besitzen kann. Der infinitesimale Aspekt der End-Vorstellung lässt sich ähnlich aufzeigen: Da eine Linie ausschließlich entlang ihres Verlaufs eine nicht-infinitesimale Ausdehnung besitzt, kann ihr „äußerstes Ende" in gar keine Richtung ausgedehnt sein. Hätte es eine Ausdehnung entlang des Linienverlaufs, so würde es sich nicht um das Ende an sich, sondern um ein das Ende beinhaltende Linienstück und damit selbst um eine Linie handeln.

Die Stellen-Vorstellung lässt sich mit der Tupel-Vorstellung verknüpfen, indem auf die übliche Interpretation des Koordinatensystems als Quantifizierung des zwei- bzw. dreidimensionalen Anschauungsraums zurückgegriffen wird, d. h. die Zahlentupel werden als Beschreibung der räumlichen Stellen aufgefasst. Zudem lässt sich die Stellen-Vorstellung mit der Einheits-Vorstellung durch die Einsicht in Zusammenhang bringen, dass die Einheiten, d. h. Punkte, eines im Raum liegenden geometrischen Objekts ebenfalls eine Position im Raum darstellen. Die Schnitt-Vorstellung kann mir der Stellen-Vorstellung verknüpft werden, da der Schnitt zweier verschiedener nicht-paralleler Geraden genau eine Stelle im Raum markiert bzw. ausfüllt. Analog beschreibt auch das Ende einer Linie exakt eine Stelle des Raumes, wodurch die End-Vorstellung mit der Stellen-Vorstellung verbunden werden kann. Tupel- und Einheits-Vorstellung können in Zusammenhang gebracht werden, indem beispielsweise einzelne Ecken, d. h. elementare Bestandteile, einer Figur im Koordinatensystem durch die entsprechenden Zahlentupel beschrieben werden. Analog können Tupel- und Schnitt-Vorstellung verknüpft werden, indem der Schnitt zweier Geraden im Koordinatensystem durch das entsprechende Zahlentupel beschrieben wird. Auf die gleiche Weise kann auch das Ende einer Linie im Koordinatensystem mit einem Zahlentupel beschrieben werden, wodurch die Tupel-Vorstellung mit der End-Vorstellung verbunden wird. Die Einheits- und End-Vorstellung lassen sich verbinden, indem das Ende einer Linie als der äußerste „Baustein" bzw. Bestandteil des Linie verstanden wird. Die Schnitt- und End-Vorstellung können verknüpft werden, indem man ausgehend von zwei sich in einem Punkt schneidenden Geraden aus einer der beiden Geraden derart eine Halbgerade macht, dass der Schnittpunkt gerade noch Teil von ihr ist. Auf diese Weise kann der Schnittpunkt gleichzeitig als das Ende der Halbgeraden und damit einer Linie erfasst werden.

Probleme bereitet der Versuch, die Einheits- und Schnitt-Vorstellung zu verknüpfen: Einerseits soll der Schnitt beider Geraden ein einziger Punkt sein, andererseits soll dieser jedoch gleichzeitig als „Baustein" für zwei verschiedene Objekte fungieren. Abgesehen von dieser Ausnahme kann allerdings festgehalten werden, dass sich die verschiedenen Grundvorstellungen zum Punktbegriff gut miteinander vernetzen lassen und dabei wenig Unstimmigkeiten auftreten.

3.2.3. Präzisierung des Bezugsrahmens

An dieser Stelle kann der Eingangs gewählte Bezugsrahmen weiter präzisiert werden, indem die Grundkenntnisse diskutiert werden, die bei den Lernenden für eine erfolgreiche Entwicklung und Anwendung der einzelnen Grundvorstellungen vorhanden sein müssen. Desweiteren können Zusammenhänge zu anderen Vorstellungen aus dem Bezugsrahmen betrachtet werden.

Die Infinitesimal-Vorstellung scheint eine gute Möglichkeit zu sein, einen Bezug zur Alltagswelt der Lernenden herzustellen. Da das geläufige Verständnis von Punkten als kleine, oft kreisförmige Flecke aufgegriffen und lediglich um den Gedanken erweitert wird, ihn immer kleiner werden zu lassen, besitzt der mathematische Begriff des Punktes von Anfang an eine anschauliche Grundlage. Die Infinitesimal-Vorstellung setzt dabei neben der Kenntnis von Punkten aus dem Alltag und dem Konzept der Größe von Objekten den Begriff des Unendlichen voraus. Da Lernende üblicherweise lediglich ein intuitives Verständnis des Unendlichkeitsbegriffs entwickeln (Kasparek 2023, S. 32), erscheint dabei eine explizite Thematisierung des Begriffs sinnvoll. Die Stellen-Vorstellung leitet sich ebenfalls mehr oder weniger unmittelbar vom Alltagsgebrauch des Wortes bzw. Symbols „Punkt“ zur Markierung von Positionen ab. Auch der Begriff der Stelle entspricht genau der Alltagsbedeutung des Wortes. Bezogen auf den Gebrauch dieser Grundvorstellung in mathematischen Kontexten sind nur die Begriffe Ebene und Raum in einem geometrischen Sinne erforderlich. Für die Tupel-Vorstellung ist der Begriff des Koordinatensystems erforderlich, zudem der damit verbundene Begriff des Zahlen- oder Koordinatenpaars bzw. Koordinatentripels. Für diese Grundvorstellung ist dabei keine anschauliche Vorstellung von Koordinatensystemen erforderlich. Eine begrüßenswerte Eigenschaft der (abstrakten) Tupel-Vorstellung ist dabei, dass sie durch die Verallgemeinerung von Paaren oder Tripeln auf n-Tupel leicht für beliebige höherdimensionale Räume erweiterbar ist, welche beispielsweise in der Hochschulmathematik eine wichtige Rolle spielen.

Die Einheits-Vorstellung fußt im Wesentlichen auf der Vorstellung, dass geometrische Objekte im Sinne von Bausteinen aus winzigen Teilchen zusammengesetzt sind. Da diese „atomistische“ Vorstellung von Objekten die Vorstellung von Punkten als Bausteine jedoch bereits mehr oder weniger voraussetzt, erscheint es plausibel anzunehmen, dass sich diese beiden Vorstellungen parallel entwickeln. Die Einheits-Vorstellung kann dabei an beliebigen geometrischen Objekten diskutiert werden und setzt keine spezielle Kategorie von Formen oder Begriffen voraus. Die Schnitt-Vorstellung setzt im Wesentlichen nur den Begriff der Geraden im zwei- oder dreidimensionalen Raum sowie die Kenntnis der Lagebeziehungen zweier Geraden voraus: Parallel, identisch, sich schneidend und ggf. windschief. Für eine erfolgreiche Entwicklung der End-Vorstellung ist der Begriff der Linie im zwei- oder dreidimensionalen Raum erforderlich sowie das Verständnis, dass (endliche) Linien ein Ende besitzen. Insgesamt setzen die Grundvorstellungen zum Punktbegriff verhältnismäßig wenig mathematisches Vorwissen voraus und leiten sich überwiegend aus einem intuitiven Geometrieverständnis und Alltagserfahrungen ab, was für Vorstellungen zu einem früh auftretenden Grundbegriff auch angemessen erscheint.

3.3. Grundvorstellungen zum Begriff „Gerade“

3.3.1. Sachanalyse und empirische Ergebnisse

3.3.1.1. Mathematisches Konzept

Die vorausgegangen Überlegungen bezüglich der Undefinierbarkeit von Grundbegriffen treffen prinzipiell auch auf den Begriff der Geraden zu. In zahlreichen fachwissenschaftlichen Quellen und insbesondere in Schulbüchern werden dennoch Definitionsversuche für die Gerade angegeben. Die für den bayerischen LehrplanPLUS zugelassenen Bücher bieten dabei in der fünften Jahrgangsstufe im Kontext der Einführung in die Grundbegriffe der Geometrie die folgenden Definitionen an:

> *„Eine **Strecke** $\overline{AB}$ ist die geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten A und B. Eine Strecke ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Man kann ihre **Länge** messen, die mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet wird.*
>
> *Verlängert man die Strecke geradlinig über beide Endpunkte unendlich weit hinaus, so erhält man die **Gerade AB**.*
>
> *Verlängert man die Strecke nur über den Anfangs- bzw. Endpunkt unendlich weit hinaus, so erhält man eine **Halbgerade AB]** bzw. **[AB**. Eine Halbgerade nennt man auch Strahl.“*
>
> *(Eisentraut et al. 2017, S. 112)*

Die eingeführten Begriffe werden zudem jeweils durch eine einfache Skizze veranschaulicht. Der Definition wird der Arbeitsauftrag vorausgeschickt, mithilfe der Werkzeuge „Punkt zeichnen“ und „Strecke zeichnen“ in einer Geometrie-App oder auf kariertem Papier den kürzesten Weg zu finden, der mehrere gegebene Punkte verbindet. Anschließend wird die Definition mit dem Gedanken eingeleitet, dass in vielen Situationen geradlinige Verbindungen zwischen zwei Punkten oder Orten betrachtet werden. Im Randbereich findet sich eine Gegenüberstellung der Begriffe Punkt A, Strecke $\overline{AB}$, Streckenlänge $|\overline{AB}|$, Halbgerade $AB]$; $[AB$ und Gerade AB sowie der Hinweis, dass Geraden oft mit Kleinbuchstaben a, b, g, h, … bezeichnet werden. Im Anschluss an die Definition sollen in Beispielaufgaben verschiedenen skizzierten Objekten die Bezeichnungen Strecke, Halbgerade und Gerade richtig zugeordnet werden, außerdem soll darüber reflektiert werden, ob eine Halbgerade halb so lang ist wie eine Gerade und warum es schwierig sein kann, im Alltag Geraden zu finden.

*„Eine **Strecke** a oder $\overline{AB}$ ist die geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten. Die Länge der Strecke wird mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet.*

*Eine **Halbgerade** h hat einen Anfangs-, aber keinen Endpunkt.*

*Eine **Gerade** g oder PQ hat keinen Anfangs- und keinen Endpunkt.“*

(Distel et al. 2016, S. 70)

Vor der Definition wird als Einstieg eine Schatzkarte mit Koordinatengitter und eingetragenen Orten bzw. Punkten betrachtet, gefolgt von der Erklärung, dass Punkte in Zeichnungen oft mit einem kleinen Kreuz markiert, mit Großbuchstaben A, B, … bezeichnet werden und dass man durch zwei Punkte mit einem Lineal oder Geodreieck eine gerade Linie zeichnen kann. Im Randbereich wird ergänzt, dass früher die Schreibweisen Strecke $[AB]$, Länge der Strecke $\overline{AB}$, Halbgerade $[RS$ verwendet wurden. In einer nachfolgenden Beispielaufgabe soll geprüft werden, ob zwei gegebene Punkte auf der Geraden liegen, die durch zwei weitere Punkte verläuft, zudem ist die Länge einer gegebenen Strecke zu messen.

*„Eine **Strecke** ist von zwei Punkten begrenzt.*

*Eine **Halbgerade** (Strahl) hat einen Anfangspunkt, aber keinen Endpunkt.*

*Eine **Gerade** hat keinen Anfangspunkt und keinen Endpunkt.“*

(Frohmader et al. 2017, S. 72)

Frohmader et al. schicken ihrer Definition den Arbeitsauftrag voraus, ein Blatt Papier so zu falten, dass die Faltlinien ein Rechteck bilden, und das eigene Vorgehen zu beschreiben. Die Definition wird schließlich mit der Erklärung eingeleitet, dass bei geraden Linien zwischen Strecken, Halbgeraden und Geraden unterschieden wird. Im Anschluss an die Definition folgen auch hier Erläuterungen zur Nomenklatur: Punkte werden in der Regel mit großen, Halbgeraden und Geraden mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Eine Strecke mit den Endpunkten A, B wird auch mit $\overline{AB}$ und ihre Länge mit $|\overline{AB}|$ bezeichnet. Eine Halbgerade durch die Punkte F, G wird mit $[FG$ für den Anfangspunkt F bzw. $[GF$ für den Anfangspunkt G bezeichnet. Die Gerade g durch die Punkte P und Q wird auch mit PQ bezeichnet. Liegt ein Punkt R auf der Geraden h bzw. nicht auf der Geraden g , so schreibt man kurz $R \in h$ bzw. $R \notin g$, wobei die entsprechenden Schreibweisen auch für Punkte auf Halbgeraden und Strecken gelten. Zudem wird erklärt, dass zwei verschiedene Geraden höchstens einen gemeinsamen Punkt haben können, den man als Schnittpunkt der beiden Geraden bezeichnet. Die Inhalte der Definition und der genannten nachfolgenden Erläuterungen verwenden dabei durchgehend durch Skizzen veranschaulicht. Im Randbereich wird angemerkt, dass häufig sowohl eine Strecke als auch ihre Länge mit demselben kleinen

Buchstaben bezeichnet werden und dass Geraden und Halbgeraden keine Länge besitzen, da sie keine Endpunkte haben.

Die wesentliche Gemeinsamkeit der betrachteten Definitionen der Geraden als geometrisches Objekt ist, dass der Begriff ausgehend vom Begriff der Strecke festgelegt wird: Eisentraut et al. schildern die Entstehung der Geraden durch die unendliche geradlinige Verlängerung einer Strecke über deren Anfangs- und Endpunkt hinaus. Die beiden anderen Schulbücher definieren den Begriff der Geraden lediglich anhand der Eigenschaft, weder Anfangs- noch Endpunkt zu besitzen, entwickeln ihn durch die Abfolge der Begriffe Strecke, Halbgerade, Gerade jedoch durch sukzessives Wegfallen von Anfangs- und Endbegrenzung implizit auch ausgehend vom Begriff der Strecke. Die zentralen Bestandteile, anhand derer diese Definitionen der Geraden aufgebaut werden, sind somit zwei Punkte sowie eine Strecke. Darüberhinaus verwenden alle Bücher durchgehend Skizzen, um die neu definierten Begriffe graphisch darzustellen.

Einen weiteren möglichen Zugang zum Begriff der Geraden bieten lineare Funktionen, die in der 8. Jahrgangsstufe besprochen werden. Die zugelassenen Schulbücher definieren dabei wie folgt:

> *„Eine Funktion mit einer Funktionsgleichung $y = mx + t$ heißt **lineare Funktion**. Ihr Graph ist eine Gerade.*
>
> *m und t sind die Parameter der linearen Funktion. Der Parameter m ist die **Steigung**. Der Parameter t ist der **y-Achsenabschnitt**.*
>
> *Für $m = 0$ ergibt sich eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft.“*
>
> *(Distel et al. 2020, S. 34)*

Die lineare Funktion wird dabei von Distel et al. als Verallgemeinerung direkt proportionaler Funktionen eingeführt, welche bereits im Vorfeld behandelt wurden. In diesem Zusammenhang wurde festgehalten: „Stellst du die Wertepaare [einer direkt proportionalen Funktion] in einem Koordinatensystem dar, so liegen die zugehörigen Punkte auf einer Geraden, die durch den Urprung verläuft (Ursprungsgerade).“ (Distel et al. 2020, S. 26) Die Definition der allgemeinen linearen Funktion wird mit dem Beispiel eingeleitet, dass zu jedem Funktionswert einer Ursprungsgeraden eine konstante Zahl addiert wird. Es wird erklärt, dass der Graph dabei eine Gerade bleibt, jetzt allerdings nicht mehr durch den Ursprung verläuft, sofern die konstante Zahl ungleich null ist. Im Anschluss an die Definition werden Beispielaufgaben mit Lösungen zu linearen Funktionsgleichungen und ihre graphische Darstellung durch Geraden gegeben. Im Gegensatz zu Distel et al. führen Eisentraut et al. und Biburger et al. zunächst die allgemeine lineare Funktion ein und behandeln das Thema direkte Proportionalität erst später als Spezialfall linearer Funktionen.

*„Jede Funktion $f : x \mapsto mx + t,\ m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$, heißt **lineare Funktion**.*

*Ihr Graph **G_f ist eine Gerade**, die …*

- *die y-Achse im Punkt $T(0\,|\,t)$ schneidet. t heißt y-Achsenabschnitt.*
- *die Steigung m besitzt. Verläuft die Gerade durch die Punkte $P(x_P\,|\,y_P)$ und $Q(x_Q\,|\,y_Q)$, $x_P \neq x_Q$, so gilt $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$.*
- *für $m > 0$ steigt, für $m < 0$ fällt und für $m = 0$ parallel zur x-Achse verläuft.*
- *für $m \neq 0$ die x-Achse im Punkt $N(x_N\,|\,0)$ schneidet. x_N heißt Nullstelle der Funktion. x_N wird durch die Gleichung $mx_N + t = 0$ ermittelt.“*

(Eisentraut et al. 2020, S. 24)

Begleitet wird die Definition von einer Skizze, in der die gerade definierten Punkte für eine Beispielfunktion eingezeichnet sind, zudem wird anhand eines Steigungsdreiecks die Geradensteigung berechnet. Der Definition wird die Aufgabe vorausgeschickt, den gleichmäßig steigenden Wasserstand eines zu befüllenden Aquariums in Abhängigkeit der Zeit graphisch darzustellen sowie eine Gleichung zur Berechnung des Wasserstands in Abhängigkeit der Zeit anzugeben. Im Anschluss an die Definition werden einige Beispielaufgaben mit Lösungen zum Zeichnen von Graphen linearer Funktionen und der Berechnung von Schnittpunkten und Punkten, die auf den Graphen liegen, vorgestellt.

*„Eine Funktion $f : x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ heißt **lineare Funktion**.*

*Der Graph einer linearen Funktion $f : x \mapsto mx + t$ ist eine **Gerade**. Die Zahl m gibt die Steigung, die Zahl t den y-Achsenabschnitt des Graphen an. Ist $m > 0$, so steigt die zugehörige Gerade. Ist $m < 0$, so fällt die Gerade.*

*Die zum Funktionsterm $mx + t$ einer linearen Funktion gehörende Gleichung $y = mx + t$ wird auch als **Geradengleichung** bezeichnet.“*

(Biburger et al. 2020, S. 29)

Auf diese Definition wird hingeführt, indem zunächst mehrere lineare Funktionsgleichungen und ihre Graphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem vorgegeben werden und die Lernenden ihre Beobachtungen beschreiben sollen. Als Nächstes findet sich auch hier das Beispiel eines Füllvorgangs mit gleichmäßig steigendem Wasserspiegel. Dabei wird der Wasserstand in Abhängigkeit der Zeit mithilfe einer Wertetabelle dargestellt, die Wertepaare in ein Koordinatensystem eingetragen und durch Verbinden der eingetragenen Punkte festgestellt, dass sie auf einer Geraden liegen. Es wird erklärt, dass eine solche Funktion als lineare Funktion bezeichnet wird und anhand des vorliegenden Beispiels ihr Funktionsterm und die Begriffe Steigung und y-Achsenabschnitt besprochen. Desweiteren werden am Beispiel eines sinkenden Wasserstands negative Steigungen bzw. fallende Geraden erklärt. Im Randbereich findet sich der Hinweis, dass dieser Funktionstyp „lineare Funktionen" genannt wird, weil „Geraden umgangssprachlich manch-mal als Linien bezeichnet werden". (Biburger et al. 2020, S. 28) Im Anschluss an die Definition wird anhand konkreter Beispielfunktionen noch auf die Sonderfälle konstanter Funktionen und Ursprungsgeraden sowie das Zeichnen von Graphen linearer Funktionen mithilfe von Steigungsdreiecken oder zwei Punkten eingegangen, bevor ein Hinweis bezüglich der Verwendung dynamischer Mathematiksoftware zur Untersuchung von Graphen und zwei Aufgabenbeispiele mit Lösungen zum Zeichnen linearer Funktionsgraphen folgen.

Hinsichtlich der Charakterisierung von Geraden haben die untersuchten Definitionen die folgenden Bestandteile gemeinsam: Eine (rationale) lineare Funktion, festgelegt durch ihren Funktionsterm $mx + t$ bzw. ihre Funktionsgleichung $y = mx + t$ mit den beiden (rationalen) Parametern m & t. Der Graph dieser Funktion, welcher eine Gerade ist. Die Steigung m des Graphen. Der y-Achsenabschnitt t des Graphen. Da der Begriff der Geraden bereits im Kontext geometrischer Grundbegriffe in der 5. Jahrgangsstufe definiert wurde und in den Vorüberlegungen zur Definition der linearen Funktion exemplarisch gezeigt wird, dass die einzelnen Punkte solcher Funktionen auf dem bereits bekannten Objekt „Gerade" liegen, sind die Aussagen zur Geraden in diesen Definitionen zunächst im Sinne eines Satzes zu verstehen: „Der Graph einer linearen Funktion ist das, was zuvor als Gerade definiert wurde." Für sich betrachtet können die Aussagen prinzipiell jedoch auch als Definition des Geradenbegriffs aufgefasst werden und so ermöglichen, sich diesem aus einem neuen Blickwinkel zu nähern: „Der Graph einer linearen Funktion wird als Gerade bezeichnet." Die Vorüberlegungen in den Schulbüchern suggerieren dabei die Auffassung der Geraden als Punktmenge, die aus den Wertepaaren der linearen Funktion zusammengesetzt ist.

Eng mit der Auffassung der Geraden als Funktionsgraph linearer Funktionen verknüpft ist die Darstellung von Geraden im dreidimensionalen Raum in der 13. Jahrgangsstufe des LehrplanPLUS. Die zum Zeitpunkt der Verfassung dieser Arbeit aktuellsten verfügbaren, in Bayern zugelassenen Schulbücher, die dieses Thema behandeln, sind die Bücher für die 12. Jahrgangsstufe des auslaufenden achtjährigen Gymnasiums. Darin finden sich die folgenden Definitionen der Parameterform der Geradengleichung:

> *„Die Gerade g gehe durch den Punkt A mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ und verlaufe in Richtung von $\vec{u}$. Dann ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$*
>
> $$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$$
>
> *der Ortsvektor eines Punktes X der Geraden g."*
>
> *(Feuerlein & Distel 2010, S. 128)*

Die Beschreibung von Geraden im Raum wird von Feuerlein & Distel anhand des Beispiels eines Industrieroboters eingeführt, dessen „Hand" mithilfe der Vektorrechnung gesteuert wird, wobei der einfachste Weg geradlinig verläuft. Dies führt auf die Frage, wie sich Geraden im Raum beschreiben lassen. Es folgt die Erklärung, dass eine Gerade durch zwei Punkte oder einen Punkt und eine Richtung festgelegt ist, und dass in der Ebene die Steigung genügt, um die Richtung einer Geraden festzulegen, im Raum hingegen nicht. Es wird daraufhin die in einer Skizze dargestellte Situation beschrieben, dass ein Körper zum Zeitpunkt 0 den Punkt A durchläuft und sich innerhalb 1 Sekunde jeweils um den Vektor $\vec{u}$ geradlinig weiterbewegt. Der Körper passiert also zum Zeitpunkt λ Sekunden den Punkt X mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$, wobei $\vec{u}$ als Richtungsvektor und $\overrightarrow{A}$ als Stützpunkt der Geraden bezeichnet wird. Es folgt die obige Definition. Im Anschluss daran wird erklärt, dass es zu jedem reellen Parameterwert λ einen Punkt der Geraden gibt und dass die Punkte der Geraden durch die Parameterwerte nummeriert werden. Der λ-Wert könne entweder als Zeitpunkt, zu welchem der Punkt durchlaufen wird, oder als „Hausnummer" des Punktes X aufgefasst werden, zudem muss es einen zugehörigen Paramterwert geben, wenn ein Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt. Anhand einer konkreten Geradengleichung wird gezeigt, dass man durch Einsetzen der „Hausnummer" $\lambda = 2$ einen bestimmten Ortsvektor bzw. den zugehörigen Punkt berechnet. Desweiteren wird überprüft, ob ein weiterer gegebener Punkt auf der Geraden liegt, indem seine Koordinaten in die Geradengleichung eingesetzt werden. Es stellt sich dabei heraus, dass es keinen Wert für λ gibt, der alle drei Koordinatengleichungen erfüllt, folglich liegt der Punkt nicht auf der Geraden. Anhand einer weiteren Skizze wird das Vorgehen erklärt, im Falle zweier bekannter Punkte einer Geraden ihre Gleichung aufzustellen: Man wählt einen der beiden Punkte als Stützpunkt und den Verbindungsvektor beider Punkte oder einen dazu parallelen Vektor als Richtungsvektor. Das Vorgehen wird anschließend an einem konkreten Beispiels demonstriert.

> *„Eine Geradengleichung beschreibt die Ortsvektoren $\overrightarrow{OX}\ (= \overrightarrow{X})$ aller Geradepunkte. Sie lässt sich in der Form $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda\vec{u}; \lambda \in \mathbb{R}$ (**Punkt-Richtungs-Form** der Geradengleichung) angeben. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}\ (= \overrightarrow{A})$ heißt **Stützvektor**; der Vektor $\vec{u}$ heißt **Richtungsvektor**.*
>
> *Ist eine Gerade durch zwei Punkte A und B festgelegt, so kann man als Richtungvektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$ wählen […]:*
> *$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}); \lambda \in \mathbb{R}$ (**Zweipunkteform** der Geradengleichung).*
>
> *Punkt-Richtungs-Form und Zweipunkteform sind Vektorformen der Geradengleichung."*
>
> *(Schätz et al. 2010, S. 119)*

Schätz et al. stellen ihrer Definition einige Arbeitsaufträge voran, die sich zunächst mit den Möglichkeiten beschäftigen, Geraden im zweidimensionalen Koordinatensystem eindeutig festzulegen, wobei die Geradengleichungen in Koordinatenform $x_2 = m x_1 + t$ und Vektorform $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$ gegenübergestellt werden. Die Koordinatenform erhält dabei den Zusatz „falls dies möglich ist", da in der Aufgabe auch eine zur x_2-Achse parallele Gerade als Gleichung dargestellt werden soll. Die nächsten beiden Arbeitsaufträge umfassen die Darstellung von Punkten im dreidimensionalen Koordinatensystem durch ihre Ortsvektoren, wobei die Gleichung $\overrightarrow{OX} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ für verschiedene k-Werte bzw. Vektoren $\overrightarrow{OA}$ ausgewertet werden soll. Es folgt die von Skizzen begleitete Erklärung, dass Gleichungen von Geraden in der Ebene und im Raum angegen werden können, wobei jede Gerade g durch einen Geradenpunkt A und ihre Richtung eindeutig festgelgegt ist. Der Punkt $A \in g$ lässt sich dabei durch einen Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ $(= \overrightarrow{A})$ und die Richtung von g durch einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{u}$ angeben. Es folgt die obige Definition. Im Anschluss finden sich mehrere Beispielaufgaben mit Lösungen zum Aufstellen von Geradengleichungen aus gegebenen Punkten bzw. Richtungsvektoren, zudem sollen Punkte auf ihre Lage bezüglich der Geraden untersucht werden, indem sie in die Geradengleichung eingesetzt werden und man überprüft, ob eine gemeinsame Lösung für alle drei Koordinatengleichungen existiert. Abschließend sollen (ohne Lösungen) zu einem gegebenen Richtungsvektor weitere Richtungsvektoren derselben Geraden angegeben werden. Desweiteren soll eine allgemeine Geradengleichung aus der Koordinatenform in die Vektorform überführt werden und der Zusammenhang zwischen dem Parameter m und dem Vektor $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Man soll zuletzt erklären, warum eine Gerade zwar durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist, jedoch beliebig viele Darstellungen in Vektorform angegeben werden können.

> *„Ist A ein Aufpunkt und $\vec{u}$ ein Richtungsvektor der Geraden g, so nennt man*
>
> $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ *mit* $\lambda \in \mathbb{R}$
>
> *eine* ***Parameterdarstellung der Geraden*** *g."*

(Birner et al. 2010, S. 73)

Birner et al. schicken ihrer Definition mehrere Arbeitsaufträge voraus: Einerseits werden Kondensstreifen von Flugzeugen durch einzelne Punkte im Raum beschrieben. Es soll nach dem Anfertigen einer Skizze u. a. begründet werden, dass eine gegebene Geradengleichung in Parameterform die Ortsvektoren aller Punkte auf einem Kondensstreifen beschreibt, zudem soll ein Verfahren angegeben werden, mit dem anhand der Koordinaten eines Punktes geprüft werden kann, ob er auf dieser Geraden liegt. Für einen weiteren Kondensstreifen soll nun ebenfalls eine Gleichung angegeben werden, zudem wird ein

Verfahren gesucht, um die Lagebeziehung zweier Geraden zu untersuchen. Die nächsten Aufträge geben eine allgemeine dreidimensionale Geradengleichung in Parameterform $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ vor. Zunächst tritt sie im Kontext einer Seilbahn auf, wobei die $\overrightarrow{X}$ die Position der Kabine während der Fahrt entlang $[AB]$ beschreibt. Die Fahrt beginnt mit $\lambda = 0$ und endet mit $\lambda = 1$. Berechnet werden sollen u. a. die Koordinaten des Punktes in der Mitte der Seilbahn, anschließend soll eine Skizze der Punkte in ein Koordinatensystem gezeichnet werden. Auch hier sollen Prüfverfahren angegeben werden: Einerseits um zu bestimmten, ob ein allgemeiner Punkt auf einer Geraden AB liegt, und andererseits zur Bestimmung der Lagebeziehung zweier Geraden. Auch die übrigen Arbeitsaufträge beinhalten ähnliche Aufgaben, einmal im Kontext eines Würfels im dreidimensionale Koordinatensystems und einmal im Kontext eines Quaders, der das Modell des Klassenzimmers darstellt. Hier sollen Schnüre entlang der Raumdiagonalen gespannt werden und anhand von Symmetrieüberlegungen die Koordinaten ihres Schnittpunkts bestimmt werden. Zudem sollen u. a. die Punkte auf einer Raumdiagonalen durch die Geradengleichung beschrieben werden. Anschließend wird kurz auf die begrenzte Aussagekraft von Zeichnungen hingewiesen. Je nach Blickwinkel lässt sich nicht eindeutig feststellen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt — eine rechnerische Entscheidung ist also notwendig. Schließlich wird, begleitet von Skizzen, die Parameterform der Geradengleichung hergeleitet: Wie gelangt man von einem festen Ursprung O aus zu einem beliebigen Punkt X einer Geraden AB? Vom Urprung aus erreicht man eine Gerade AB beispielsweise entlang des Vektors $\overrightarrow{A}$ im Punkt A und geht von diesem „Aufpunkt" ein geeignetes Vielfaches des "Richtungsvektors" $\overrightarrow{AB}$ entlang, um den Punkt X auf der Geraden zu erreichen. Dieser Gedanke wird durch die allgemeine Geradengleichung in Parameterform festgehalten, zusammen mit der Erklärung, dass der Parameter λ als „Hausnummer" gedeutet werden kann, da jeder Punkt auf der Geraden einem bestimmten Wert von λ entspricht. Nach einem Zahlenbeispiel folgt schließlich die obige Definition. Im Anschluss an diese wird angemerkt, dass die Parameterdarstellung einer Geraden nicht eindeutig ist, da sich ihr Richtungsvektor durch jedes Vielfache ersetzen lässt und sich jeder Geradenpunkt als Aufpunkt eignet. Die Bemerkung wird anhand zweier Geraden mit je mehreren Gleichungen verdeutlicht.

Die untersuchten Definitionen zur Beschreibung von Geraden mithilfe der Parameterform haben die folgenden zentralen Bestandteile gemeinsam: Eine Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ bezüglich eines zwei- oder dreidimensionalen Koordinatensystems. Einen Ortsvektor $\overrightarrow{X}$ zu einem allgemeinen Punkt X. Einen Ortsvektor $\overrightarrow{A}$ zu einem als Aufpunkt bezeichneten Punkt A. Einen reellen Parameter λ. Einen als Richtungsvektor bezeichneten Vektor $\vec{u}$. In Analogie zum Kontext linearer Funktionen wird die Gerade dabei ebenfalls im Sinne einer Punktmenge durch eine mathematische Gleichung beschrieben. Aufgrund der Überlegegungen, die den Definitionen vorausgeschickt werden, liegt auch hier die Auffassung im Sinne eines Satzes nahe, d. h., dass die Geradengleichung jenes Objekt beschreibt, welches bereits als Gerade bekannt ist. Gleichzeitig scheint auch hier ein weiterer Zugang zum Geradenbegriff möglich, wenn im Sinne einer Definition interpretiert wird, d. h., dass das durch die Gleichung beschriebene Objekt als Gerade bezeichnet wird.

Im Unterschied zu den Definitionen linearer Funktionen, bei welchen die vorkommenden Größen auf rationale Werte beschränkt waren, sind nun sogar reelle Zahlen zulässig.

3.3.1.2. Relevante Phänomene

a) Anwendungen

Innermathematische Anwendungen des Geradenbegriffs in der Sekundarstufe des bayerischen Gymnasiums finden sich in mehreren Jahrgangsstufen. Der Fachlehrplan Mathematik des LehrplanPLUS sieht dazu die folgenden Themengebiete vor:

In der 5. Jahrgangsstufe taucht zunächst der Begriff der Zahlengeraden auf, welche durch Erweiterung des Zahlenstrahls um die negativen ganzen Zahlen entsteht. (Distel et al. 2016, S. 27) Da es dabei kein größtes bzw. kleinstes Element gibt, wird bereits hier die unendliche Ausdehnung der Zahlengeraden in beide Richtungen angedeutet. Das zweidimensionale kartesische Koordinatensystem wird später als zwei senkrecht zueinander stehende Zahlengeraden eingeführt, die als x- und y-Achse bezeichnet werden. (Distel et al. 2016, S. 71) Auch wenn dies in der Regel nicht explizit angesprochen wird, stellen auch die Gitterlinien des üblicherweise karierten Papiers parallel zu den Koordinatenachsen verlaufende Hilfsgeraden dar. Geraden werden zusammen mit Punkten, Strecken und Kreisen im kartesischen Koordinatensystem dargestellt, wobei abkürzende Schreibweisen zur leichteren Kommunikation über diese geometrischen Objekte verwendet werden. Es werden die möglichen Lagebeziehungen zwischen Geraden und Punkten, Kreisen oder anderen Geraden untersucht, was die fachsprachlich korrekte Verwendung der Begriffe Abstand, parallel, senkrecht, Lot beinhaltet. Die Begriffe Tangente, Sekante und Passante werden als Bezeichnungen für Geraden mit bestimmter Lage bezüglich eines Kreises eingeführt. (Distel et al. 2016, S. 78)

Die 7. Jahrgangsstufe sieht die Behandlung von achsen- und punktsymmetrischen Figuren sowie die Betrachtung von Winkeln an Figuren vor. Der Begriff der Symmetrieachse bzw. Achse wird dabei von (Distel et al. 2019, S. 61) lediglich als „Faltlinie“, von (Eisentraut et al. 2019, S. 44) und (Biburger et al. 2019, S. 62) jedoch als „Faltgerade“ bzw. „Gerade“ eingeführt. Auch die Begriffe der Mittelsenkrechten, des Lots und der Winkelhalbierenden werden aufbauend auf den Begriff der Symmetrieachse und damit als Spezialfall einer Geraden festgelegt. (Eisentraut 2019, S. 46 ff.) Kreuzungen und Doppelkreuzungen von Geraden werden auf Winkelzusammenhänge wie Scheitel-, Neben-, Stufen- und Wechselwinkel hin untersucht.

Die Einführung funktionaler Zusammenhänge in der 8. Jahrgangsstufe eröffnet den Lernenden ein neues Anwendungsfeld für den Begriff der Geraden. Der Lehrplan sieht dabei sowohl das Zeichnen von Graphen linearer Funktionen als auch das Ermitteln der Werte der Parameter anhand gegebener Graphen vor. Die rechnerische Bestimmung von Geradengleichungen, Nullstellen linearer Funktionen und Schnittpunkten zweier Geraden sind weitere zentrale Aufgaben. Im Kontext von Sachzusammenhängen werden passende lineare

Funktionen aufgestellt und ihre Graphen interpretiert, zudem werden lineare Ungleichungen graphisch und rechnerisch gelöst. Die Zuordnung zweier direkt proportionaler Größen wird zudem als Spezialfall einer linearen Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $y = a \cdot x$ besprochen, was anhand der zugehörigen Ursprungsgeraden erläutert wird. Im Kontext gebrochen-rationaler Funktionen treten Geraden in Form von Asymptoten auf: Für eine Funktion $f : x \mapsto \frac{a}{x+b} + c$ mit $a \neq 0,\, b, c \in \mathbb{Q}$ werden die Geraden $y = c, x = -b$ als waagrechte bzw. senkrechte Asymptote bezeichnet. (Eisentraut et al. 2020, S. 60) Auch beim Lösen linearer Gleichungssysteme spielen Geraden eine wichtige Rolle. Einerseits werden bei der graphischen Lösung der Systeme die Graphen der linearen Funktionen auf Schnittpunkte untersucht, andererseits können rechnerische Lösungen anhand der Graphen veranschaulicht werden. In diesem Zusammenhang erklären beispielsweise Eisentraut et al., dass eine lineare Gleichung von unendlich vielen Zahlenpaaren (x, y) gelöst wird, welche zusammen eine Gerade bilden, wenn man sie als Koordinaten von Punkten (P_x, P_y) in einem Koordinatensystem auffasst. (Eisentraut et al. 2020, S. 128)

In der 9. Jahrgangsstufe werden sowohl graphisch als auch rechnerisch die Schnittpunkte von Geraden mit Parabeln und Hyperbeln untersucht, u. a. bei der Lösung von linearen Gleichungssystemen mit drei Unbekannten bzw. Bruchgleichungen. Die 10. Jahrgangsstufe greift bei der Einführung der Exponentialfunktion den Begriff der waagrechten Asymptote wieder auf, zudem werden die Graphen ganzrationaler Funktionen auf Achsensymmetrie untersucht. Der Begriff der Achse (und damit der Geraden) taucht außerdem im Kontext der Raumgeometrie auf, wenn Rotationskörper wie gerade Kegel, gerade Zylinder und Kugeln hinsichtlich ihrer Entstehung durch Rotation von Figuren um eine Achse besprochen werden. (Biburger et al. 2022, S. 124)

Die Lernenden der 11. Jahrgangsstufe beschäftigen sich im Rahmen der Kurvendiskussion mit den Schnittpunkten von Funktionsgraphen und den Koordinatenachsen, zudem wird die Untersuchung der Achsensymmetrie von Funktionsgraphen um gebrochen-rationale, trigonometrische und Exponentialfunktionen erweitert. (Brendel et al. 2023, S. 12) Desweiteren wird das Grenzverhalten gebrochen-rationaler Funktionen für betragsgroße x-Werte untersucht, wobei der Begriff der schrägen Asymptote eingeführt und die Geradengleichung $y = m \cdot x + t$ als Gleichung der Asymptote angegeben wird. (Brendel et al. 2023, S. 52) Auch die Schnittpunkte einfacher gebrochen-rationaler Funktionen mit linearen Funktionen werden rechnerisch bestimmt. Die Einführung in die Differentialrechnung beinhaltet die Entwicklung des Differentialquotienten bzw. der Tangente an Funktionsgraphen aus dem Differenzenquotienten bzw. der Sekante. (Biburger et al. 2023, S. 100 ff.)

In der 12. Jahrgangsstufe ist im erhöhten Anforderungsniveau die Behandlung der Grundlagen der Koordinatengeometrie im Raum vorgesehen. Dabei wird nun auch im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem die Symmetrie von Punkten bezüglich der Koordinatenachsen untersucht. Im Vertiefungskurs kann im Rahmen des Statistikmoduls anhand von Streudiagrammen die lineare Regression thematisiert werden, wobei die Gleichungen von Regressionsgeraden aufzustellen sind. Die Lernenden der 13. Jahrgangsstufe betrachten Geraden im Raum und stellen deren Gleichungen in Parameterform auf, untersuchen die gegenseitige Lage von Geraden, wobei der Begriff „windschief“ als neue

Lagebeziehung auftritt, sowie von Geraden und Ebenen oder Kugeln. Sie berechnen die Koordinaten von Schnittpunkten bzw. die Gleichungen von Schnittgeraden und die Größe von Schnittwinkeln. Auch die Abstände von Geraden zu Punkten, anderen Geraden, Ebenen oder Kugeln werden bestimmt.

Fächerübergreifende Anwendungen des Geradenbegriffs finden sich beispielsweise in der Physik: Einerseits, wenn lineare Zusammenhänge bzw. direkte Proportionalität zwischen Größen im Koordinatensystem dargestellt werden, z. B. die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit der Zeit bei Bewegungen mit konstanter Geschwindigkeit, die Auslenkung einer Feder in Abhängigkeit der aufgewendeten Kraft oder die Stromstärke in Abhängigkeit der angelegten Spannung bei einem ohmschen Widerstand, andererseits bei der modellhaften Darstellung von beispielsweise ebenen Wellenfronten, schiefen Ebenen oder, begrenzt auf Halbgeraden, Lichstrahlen. Auch Bewegungen ohne Richtungsänderung spielen sich auf Geraden ab. In der Geographie werden die Längen- und Breitengrade auf Landkarten durch gerade Linien dargestellt, die je nach Maßstab als näherungsweise unendlich lang angenommen werden und somit Geraden entsprechen. In der Informatik ist beispielsweise die Arbeit mit Tabellenkalkulationsprogrammen untrennbar mit dem Konzept der Geraden verknüpft, da die einzelnen Zeilen und Spalten durch unendlich lange, dünne und gerade Linien getrennt werden. Wenn im Sportunterricht das Tor getroffen oder anderen Kindern der Ball zugespielt werden soll, wird dabei häufig eine gerade Flugbahn des Balls angenommen. Im Kunstunterricht entsprechen die Fluchtlinien bei der perspektivischen Zeichnung Geraden, die sich in unendlich entfernt gedachten Punkten, den Fluchtpunkten, treffen. Die Zentralprojektion ist dabei von „elementarer lebenspraktischer Bedeutung, da sie dem natürlichen Sehvorgang des Menschen nachgebildet ist und somit die anschaulichsten Bilder liefert.“ (Maier 1999, S. 258) Auch das kunstvolle Falten von Papier („Origami“) sowie die Identifizierung gerader Linien in modernen Kunstwerken, z. B. des Bauhausstils, bieten Möglichkeiten für eine fächerübergrifende Thematisierung des bzw. der Geraden.

In der Umwelt der Lernenden tauchen gerade Linien bzw. Geraden in verschiedenen Kontexten auf, auch wenn Lernende sie oft nicht bewusst als solche wahrnehmen: Die Kanten von Gebäuden, Räumen und Gegenständen wie Möbeln, Kisten, Bildschirmen oder Büchern können durch das mathematische Modell der geraden Linie beschrieben werden. Streifen- oder Karomuster auf Kleidungsstücken oder Heimtextilien wie Vorhängen sind ein weiterer Grund für die Allgegenwärtigkeit gerader Linien im Alltag. Graphische Benutzeroberflächen von Software wie Betriebssystemen oder Internetbrowsern sind üblicherweise aus geradlinigen Elementen aufgebaut. Beim Billard bewegen sich die gespielten Kugeln überwiegend auf einem geraden Weg und auch in Computerspielen des Shooter-Genres kommen Jugendliche beim Anvisieren (unwissentlich) mit dem Konzept in Berührung, da sich die Geschosse in der Regel geradlinig ausbreiten. Es ist anzunehmen, dass die Begriffe „Gerade“ bzw. „gerade“ bereits vor der Thematisierung im Mathematikunterricht durch ihre Verwendung in der Alltagssprache vorgeprägt werden: Der Duden gibt für „Gerade“ unter anderem die Bedeutung „gerade verlaufender Teil einer Rennstrecke“ und die Synonyme „Linie, Strich“ (Duden 2024, Gerade) an. Der Begriff „gerade“ wird unter anderem mit „in unveränderter Richtung fortlaufend, nicht krumm, gekrümmt; unverbogen“, „in natürlicher Richtung fortlaufend, nicht schief; aufrecht“ oder „nicht schief; waagerecht, horizontal“ erklärt. Als Synonyme werden „geradlinig, in einer Linie, nicht gekrümmt/krumm, pfeilgerade“ angegeben. (Duden 2024, gerade) An diesen Beschreibungen wird deutlich, dass die Begriffe im Sprachgebrauch vor allem auf zwei Weisen charakterisiert werden: Einerseits als das Ergebnis einer unveränderten Bewegungs- bzw. Verlaufsrichtung und andererseits als Antonym zu Krümmungen, Schiefem oder Gebogenem.

b) Historische Begriffsentwicklung

Die Wahrnehmung und systematische Verwendung geometrischer Strukturen dürfte laut Scriba & Schreiber bereits lange vor der Entwicklung von Schrift stattgefunden haben. So kommen in der Natur vielfältig gekrümmte Linien vor und beispielsweise ein Grashalm oder Baumstamm legen den Gedanken der Geraden nahe. (Scriba & Schreiber 2010, S. 6) Die Ursprünge des Begriffs der Geraden als näher definiertem geometrischem Objekt finden sich um 400 v. Chr. im Begriff der „geraden Linie“. Dabei handelt es sich um einen der älteste Begriffe der Geometrie (Scriba & Schreiber 2010, S. 32 f.), der laut Heath zuerst von Platon als „die Linie, deren Mitte die Enden überdeckt“ bzw. „gerade ist das, dessen Mitte vor beiden seiner Enden liegt“ definiert wurde. Der Betrachter befindet sich in dieser Vorstellung an einem Ende und blickt entlang der Linie, wobei diese Definition implizit den Sehsinn anspricht und das Postulat enthält, dass die Sichtlinie gerade verläuft. Eine äquivalente Formulierung dieser Definition wird ca. 350 v. Chr. von Aristoteles zitiert (Heath 1908, S. 165 f.), bezüglich des zugrunde liegenden Begriffs der Linie weicht er jedoch von der Schule Platons ab. Diese fasste laut Heath Linien als breitenlose Längen auf — Aristoteles kritisierte an diesem Verständnis, dass es den Oberbegriff der Längen durch Negation teilt, was auf einen Widerspruch führe, und definiert die Linie stattdessen als Größe, die nur auf eine Art bzw. in eine Richtung geteilt werden kann, oder als Größe, die in einer Richtung ununterbrochen ist. Bei Aristoteles findet sich noch ein weiterer Ansatz in der Beobachtung, dass ein Punkt durch seine Bewegung eine Linie erzeugt, was von Proklos zur Definition der Line als „Fluss eines Punktes“, d. h. die von einem bewegten Punkt erzeugte Spur, komprimiert wird. Diese Definition ist für ihn perfekt, da sie die Essenz der Linie zeige, indem sie ausschließlich immaterielle Linien umfasst und über die Ursache ihrer Genese definiert wird: Der selbst unteilbare Punkt als Grund der Existenz der teilbaren Dinge. (Heath 1908, S. 158 f.)

Um 300 v. Chr. definiert Euklid: „Eine gerade Linie […] ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt“, wobei die Linie in Anlehnung an die platonische Lehre als breitenlose Länge festgelegt wird. (Euklid, S. 1) Proklos beobachtet, dass Euklids Definition der Linie im Gegensatz zu der des Punktes nicht ausschließlich negativ ist, sondern insofern ein positives Element enthält, als sie die erste Ausdehnungsrichtung einführt. (Heath 1908, S. 158) Euklids zusätzliche Charakterisierung von Linien durch die Aussage, dass ihre Enden Punkte sind, erfüllt laut Heath die Funktion, die notwendige Verbindung zwischen Punkt und Linie herzustellen. Dass die Aufteilung einer Linie sowie der Schnitt zweier Linien ebenfalls ein Punkt ist, seien ebenfalls wichtige Fakten, deren Nennung wünschenswert gewesen wäre. (Heath 1908, S. 165) Auch an dieser Stelle sei für zusätzliche historische Übersetzungen von Euklids Liniendefinition auf (Fröhlich 2024, 2) verwiesen. Da sich laut Heath bei Aristoteles keine ähnliche Definition der geraden Linie findet, kann sicher gefolgert werden, dass es sich bei Euklids Definition um eine neue, eigene Herangehensweise handelt. Nach Proklos' Kommentar zeige Euklid durch seine Definition, dass die gerade Linie von allen Linien die kürzestmögliche zwischen zwei Punkten ist. Proklos interpretiert gewissermaßen im Sinne von „Eine gerade Linie ist das, was die Ausdehnung repräsentiert, die gleich den Distanzen ist, welche die auf ihr liegenden Punkten trennen." Auch bei Aristoteles findet man die Beobachtung, dass allgemein jede Distanz mit der eingezeichneten geraden Linie identifiziert wird, und Archimedes nimmt um 250 v. Chr. an, dass die gerade Linie von allen Linien mit den selben Endpunkten die geringste ist. Bei Heath finden sich detaillierte Ausführungen zum Wortlaut und der Grammatik der griechischen Fassung von Euklids Definition sowie eine Diskussion verschiedener Übersetzungen. Er kommt zu dem Fazit, dass man sich trotz der obskuren verwendeten Sprache sicher sein kann, dass Euklid das Bild einer Linie, die an allen und relativ zu allen auf ihr liegenden Punkten die selbe Form aufweist, ohne jegliche irregulären oder asymmetrischen Merkmale, die einen Teil oder eine Seite von anderen unterscheiden. (Heath 1908, S. 166 ff.) Auch Thaer bezeichnet den originalen Wortlaut als dunkel und nennt einige alternative Deutungen. (Euklid, S. 418)

Thaer betont, dass Euklids gerade Linie nicht mit dem heutigen Begriff der Gerade gleichgesetzt werden darf, da sie in der Regel begrenzt ist, und gibt stattdessen den Begriff der Strecke als Synonym an. (Euklid, S. 418) Laut Scriba & Schreiber ist Euklid der Begriff der unendlich ausgedehnten Geraden fremd, da es lediglich gerade Strecken gibt, die laut dem ersten Postulat als Verbindung ihrer Endpunkte konstruiert und laut dem zweiten Postulat sukzessiv verlängert werden können. Hinsichtlich der Bestimmung von Schnittpunkten zweier gerader Linien liegen also häufig nur Teilstrecken bereits konstruiert vor, die je nach gegenseitiger Lage unvorhersehbar oft verlängert werden müssen, um den Schnittpunkt zu erhalten. Mit dem fünften Postulat gibt Euklid ein Kriterium für die Ausführbarkeit dieser Operation und spricht darin davon, die geraden Linien ins Unendliche zu verlängern. (Scriba & Schreiber 2010, S. 54 ff.)

Hinsichtlich den Ursprüngen von Euklids Definition der geraden Linie lässt sich laut Heath Platons Definition als Ausgangspunkt vermuten. Euklid hätte als Platoniker die Substanz dessen Definition übernommen, eine Abänderung des Wortlauts jedoch für essenziell gehalten, um sie von jeglichem implizierten Anklang des Sehens unabhängig zu machen, welches als physikalische Tatsache keinen Platz in einer rein geometrischen Definition hat. Seine Definition kann also als Versuch aufgefasst werden, in Worten, die nicht als ungeometrisch bezeichnet werden können, dasselbe auszudrücken wie Platons Definition. (Heath 1908, S. 168) Die folgende Proposition Euklids kann nach Heath auch als zusätzliche Definition der geraden Linie aufgefasst werden: „Ein Teil davon kann nicht in einer angenommenen Ebene liegen, wenn ein Teil in einer höheren liegt." (Heath 1908, S. 168)

Weitere Definitionen finden sich nach Heath bei Heron von Alexandria, der um 60 n. Chr. die gerade Linie als „eine maximal zu den Enden hin gestreckte Linie" definiert. Ein weiterer Ansatz ist: „Jene Linie, welche bei fixierten Enden selbst fixiert bleibt, wenn sie in der selben Ebene gedreht wird." Außerdem beschreibt er: „Alle ihre Teile passen auf alle anderen Teile in alle [beide] Richtungen." Proklos fügt um 450 n. Chr. die Definition „Jene Linie, die mit einer anderen der selben Art keine Figur vervollständigen kann." hinzu und gibt zusätzlich Variationen von Herons Definitionen an. (Heath 1908, S. 168 f.) Er zitiert außerdem die Definition Platons in nahezu identischer Form. (Heath 1908, S. 166) Die gerade Linie fällt für

Proklos dabei in die Klasse der homöomeren Linien, also solche, die in allen Teilen gleich sind, sodass jeder Teil mit jedem anderen Teil zur Deckung gebracht werden kann. (Heath 1908, S. 162)

Auch in der Neuzeit wurden weitere Definitionen formuliert, welche von Heath diskutiert werden. Gottfried-Wilhelm Leibniz' Definition legt die gerade Linie als eine solche fest, die eine Ebene in zwei bis auf ihre Position identische Hälften teilt. Adrien-Marie Legendre verwendet die von Archimedes formulierte Eigenschaft der geraden Linie, die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten zu sein und Carl Friedrich Gauß definiert in Anlehnung an Heron: „Die Linie, in der alle Punkte liegen, die während der Umdrehung eines Körpers […] um zwei fixierte Punkte, ihre Position unverändert beibehalten, nennt man eine gerade Linie.“ An dieser Formulierung wird kritisiert, dass sie die Vorstellung einer geraden Linie und deren Eigenschaft, durch zwei Punkte bestimmt zu sein, unbewusst annimmt und so zu einem logischen Kreisschluss führt. (Heath 1908, S. 168 f.)

In Analogie zum Punktbegriff findet sich bei Heath auch bezüglich des Begriffs der geraden Linie wieder die Meinung, dass er aufgrund seiner Einfachheit nicht durch gewöhnliche Definitionen erklärt werden kann, die ohne Begriffe auskommen, welche implizit bereits den zu definierenden Begriff enthalten (wie beispielsweise Richtung oder Gleichmäßigkeit). Stattdessen greifen viele Autoren auch hier wieder auf Beispiele zurück, um die zugrunde liegende abstrakte Idee zu vermitteln, z. B. eine durch ein Gewicht gespannte Schnur oder ein Lichtstrahl, der durch ein kleines Loch in einen dunklen Raum fällt. Für Heath illustrieren die verschiedenen Definitionen, dass alle Definitionsversuche eines simplen Begriffs wie „gerade“ scheitern müssen — hat man die passende Idee jedoch einmal verinnerlicht, kann sie in den verschiedenen Definitionen wiedergefunden werden. Alle Definitionen müssten deshalb als Erklärungen aufgefasst und danach bewertet werden, wie unmittelbar aus ihnen weitere Schlussfolgerungen bezüglich der Essenz der geraden Linie gezogen werden können. (Heath 1908, S. 168 f.)

In der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts finden sich laut Scriba & Schreiber in Pierre de Fermats Abhandlung zur Koordinatenmethode „Ad locos planos et solidos isagoge“ unter anderem Gleichungen, in denen nur flächenhafte Größen einander gleichgesetzt werden. Dies entspricht Geradengleichungen der Form $ax + by = cd$, wobei die Variablen x & y die Koordinaten eines variablen Punktes bezüglich eines typischerweise rechtwinkligen affinen Achsensystems sind. René Descartes blieb auf dem antiken Stand, die Lage eines Kurvenpunktes durch zwei problemabhängig gewählte Strecken zu beschreiben. Die Gerade gehört für ihn zur Klasse der einfachsten Kurven, da sie durch eine einzige Bewegung erzeugt werden kann. (Scriba & Schreiber 2010, S. 327 ff.) In dieser Auffassung findet sich die bei Aristoteles und Proklos vorkommende Vorstellung der Linie als Fluss bzw. Trajektorie eines Punktes wieder.

1639 wird laut Scriba & Schreiber Girard Desargues‘ Abhandlung „Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan“ (Erster Entwurf der Beschreibung der Ereignisse beim Zusammentreffen eines Kegels mit einer Ebene) veröffentlicht, die heute als die Geburtsstunde der projektiven Geometrie gilt. Zentral ist darin die grundsätzliche unendliche Ausdehnung von Geraden und Ebenen — bisher hatte die Darstellung Euklids von Geraden als potenziell verlängerten Strecken die Geometrie dominiert. Parallelen Geraden wird folglich ein unendlich ferner Schnittpunkt zugeordnet und die Betrachtung von Kegelschnitten wird vom einfachen Kegel auf den heute üblichen Doppelkegel erweitert. (Scriba & Schreiber 2010, S. 347 f.) Durch diese Erweiterung gehört auch die unendlich ausgedehnte Gerade zu den Kegelschnitten.

In den zu Beginn des 19. Jahrhunderts von Gaspard Monge verfassten Lehrbüchern zur Anwendung von Algebra und Analysis auf die Geometrie findet sich Ansätze der ungewöhnlichen Idee, Geraden anstelle von Punkten als die Grundelemente des Raumes aufzufassen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 338) Dieser Gedanke findet sich Mitte des Jahrhunderts beispielsweise bei Julius Plücker wieder, der sich unter anderem mit der Vertauschung der Rolle von Punktkoordinaten und den Koeffizienten von Geradengleichungen beschäftigte und alle Geraden des dreidimensionalen Raums als Elemente eines vierdimensionalen Raums beschrieb, z. B. im 1868 veröffentlichten „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der Geraden als Raumelement“. (Scriba & Schreiber 2010, S. 397 & 431) Augustin-Louis Cauchy entwickelte etwa zur gleichen Zeit einen zur Auffassung algebraischer bzw. geometrischer Objekte als Elemente höherdimensionaler Räume ähnlichen Ansatz. (Scriba & Schreiber 2010, S. 431) Karl Georg Christian von Staudt begründet im Rahmen seines 1847 veröffentlichten Beitrags zur projektiven Geometrie „Geometrie der Lage“ die Einführung unendlich entfernter Elemente unter anderem damit, dass Punkt und Richtung für die Bestimmung einer Geraden dasselbe leisten wie zwei verschiedene Punkte. (Scriba & Schreiber 2010, S. 398)

Das Ende des 19. Jahrhunderts ist nach Scriba & Schreiber geprägt von geometrischer Grundlagenforschung und einem Nachdenken über logisch-methodologische Fragen, die sich unter anderem mit der Mathematik als Ganzem und der Existenzweise mathematischer Objekte beschäftigen. Im Zuge dieser Anstrengungen wird der Begriff der unendlich ausgedehnten Geraden von Moritz Pasch, der als Empirist (bei aller logischen Strenge) vom Anschauungs- oder Erfahrungsraum ausgeht, wieder verworfen. Er kehrt stattdessen zu Euklids Strecke, welche zwei Punkte eindeutig verbindet und sukzessive verlängert werden kann, als Grundbegriff zurück. Im Gegensatz zu Paschs anschaulicher Ausrichtung strebte David Hilbert die völlige Loslösung des formalen Systems „Geometrie“ von einer festen und möglicherweise anschaulichen Deutung an. (Scriba & Schreiber 2010, S. 497 ff.) In seinen „Grundlagen der Geometrie“ lässt er den Begriff der Geraden — wie auch den des Punktes — undefiniert. (Silvester 2001, S. 5)

Historische Anwendungen der geraden Linie bzw. Geraden finden sich in antiken Schriften über die römischen Agrimensoren bzw. Feldmesser, in denen Einzelheiten des Vermessungswesens um Chr. Geburt besprochen werden. Dabei werden an die Arbeitspraxis angepasste Definitionen der Gerade verwendet, die eine hohe Ähnlichkeit mit Euklid aufweisen: „Eine Gerade ist, was wir als Länge ohne Breite messen.“ Im Gegensatz zu den theoretischen Betrachtungen Euklids wird also die praktische Tätigkeit des Messens in die Definition mit aufgenommen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 86 ff.) Von der peruanischen Nazca-Kultur wurden laut Wußing in den Jahrhunderten um Chr. Geburt neben riesigen Tierfiguren und geometrischen Gebilden auch kilometerlange gerade Linien in sogenannten Scharrbildern auf einer Fläche von ca. 500 Quadratkilometern verewigt. Indem Steine beiseite gelegt wurden, enstanden ca. 2 Fuß breite Spuren, die sich farblich von der Umgebung abheben und aufgrund ihrer Dimensionen erst aus großer Höhe als ganzes Motiv erfasst werden können. Hinsichtlich ihrer Nutzung wird vermutet, dass es sich um Wege zu ehemaligen Wasserstellen handelte oder sie zeremoniellen Zwecken dienten — ihre tatsächliche Bedeutung konnte jedoch bis heute nicht sicher geklärt werden. (Wußing 2008, S. 34 f.) Die Kartographie stellt (wie schon für den Punkt) auch für den Begriff der Geraden ein wichtiges historisches Anwendungsfeld dar, da die Meridiane der Erde bei den zur Erstellung der Karten verwendeten Projektionen häufig auf Geraden abgebildet wurden. Auch in den Anfängen der Astronomie finden sich (bei der Abbildung von Himmelskreisen auf eine Ebene) Geraden als Bilder von Meridianen. Derartige Abbildungen liegen beispielsweise dem ebenen Astrolabium zugrunde, dem beliebtesten astronomischen Instrument des Mittelalters. (Scriba & Schreiber 2010, S. 82 ff.) Zur Bestimmung der Flugbahnen von Geschossen wurden laut Wußing im 16. Jahrhundert ballistisch-geometrische Fragen untersucht. Die Bahnen wurden dabei als aus Geradenstücken und Kreisbögen zusammengesetzt gedacht. Erst im darauffolgenden Jahrhundert wurde erkannt, dass Flugbahnen keine Geradenstücke enthalten, sondern parabolisch verlaufen. (Wußing 2008, S. 308) Auch für die Mathematisierung der Perspektive in Zeichnung und Malerei im 18. Jahrhundert spielte das Ziehen von Geraden eine wichtige Rolle. (Scriba & Schreiber 2010, S. 352)

c) Typische Darstellungen

Auch der Begriff der Geraden kann auf mehreren Ebenen dargestellt werden. Enaktive Darstellungen umfassen beispielsweise das Falten von Papier, wobei die Faltkante den Gedanken der Gerade verkörpert, das Spannen von Schnüren, etwa zur Veranschaulichung von Raumdiagonalen oder das Experimentieren mit Modellgeraden. Dilling beschreibt das Arbeiten mit Kunststoffmodellen zur Darstellung von Geraden und Ebenen in Koordinatensystemen, die durch 3D-Druck erzeugt wurden. (Dilling 2019, S. 178 ff.) Der Einsatz dynamischer Geometriesoftware bietet zahlreiche Möglichkeiten der flexiblen Manipulation von Geraden. Der Begriff der Geraden kann beispielsweise, wie auch in den Schulbüchern, ausgehend vom Begriff der Strecke entdeckt werden, indem die Verbindungslinie zweier Punkte dynamisch angezeigt wird, während beide Punkte immer weiter voneinander entfernt werden. Auch mit Licht- bzw. Laserstrahlen können (Halb-)Geraden enaktiv dargestellt und bewegt werden.

Die ikonische Ebene umfasst zunächst das Bild des geometrischen Objekts „Gerade“ in Form einer geraden, langen und dünnen Linie. Eine weitere Darstellung ist das Bild zweier Punkte, deren Verbindungslinie auf beiden Seiten bis zum Rand der Abbildung verlängert ist. Im Kontext eines zweidimensionalen Koordinatensystems ergibt sich daraus die Darstellung der Geraden als Graph einer linearen Funktion, zudem können Steigungsdreiecke sowie einzelne Punkte eingezeichnet sein, die auf der Geraden liegen. Im zwei- oder dreidimensionalen Koordinatensystem ist die Darstellung der Geraden mithilfe zwei auf einer geraden Linie liegender Punkte oder einem auf der Geraden liegenden Aufpunkt und einem Richtungsvektor möglich. Eine interessante ikonische Darstellung der Geraden findet sich bei Wyss et al., welche sie als einen im höchsten Ausmass geöffneten Kreisbogen oder als einen Kreis mit unendlich fernem Zentrum beschreiben: „Wir müssen im Sinn der nachstehenden Figur die geschlossene Form des Kreises in immer weiter sich öffnenden Bogen aufschliessen. Die einzelnen Bogen werden flacher, bis wir letzten Endes in der waagrechten Geraden ankommen. Veranlassen wir den Schüler, den vollzogenen Formverwandlungsprozess weiterzuführen, werden wir über nach unten sich immer enger schliessende Bogen wieder in einen Kreis zurückkehren.“ (Wyss et al. 2018, S. 9 f.)

Betrachtet man die Tabellenform als eigene Darstellungsebene, so ist auch hier eine Darstellung der Geraden möglich. Wertetabellen direkt proportionaler Größen, d. h. Tabellen, bei denen sich die x- und y-Werte von Wertepaar zu Wertepaar beide um den gleichen Faktor ändern, oder allgemeine lineare Zusammenhänge zweier Größen sind eine Möglichkeit, Geraden in tabellarischer Form darzustellen.

Auf der symbolischen Ebene findet man zunächst die Darstellung von Geraden durch ihre Bezeichnung mit Groß- oder Kleinbuchstaben. Dabei wird eine Gerade beispielsweise mit „g“ bezeichnet, alternativ findet man auch „PQ“, um zu verdeutlichen, dass es sich um die durch die Punkte P und Q festgelegte Gerade handelt. Im Kontext linearer Funktionen $f : x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ wird die Gerade durch die Funktionsgleichung $y = mx + t$ bzw. $f(x) = mx + t$ oder den Funktionsterm $mx + t$ dargestellt. Bewegt man sich im zwei- oder dreidimensionalen Raum, so werden Geraden durch die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ symbolisch dargestellt. Eine ausführliche Diskussion der mathematischen Hintergründe der Beschreibung von Geraden durch Vektorgleichungen findet sich bei (Kaufmann 2021, S. 69 ff.).

3.3.1.3. Empirische Ergebnisse

Neben den bereits im Rahmen der Sachanalyse des Punktbegriffs besprochenen Erkenntnissen zum Lernen und Lehren geometrischer Inhalte im Allgemeinen finden sich in der

Literatur zahlreiche Ergebnisse, die eine spezielle Relevanz für den Begriff der Geraden besitzen.

Einerseits sind Ergebnisse zum Begriff der Strecke bzw. geraden Linie von Bedeutung, da die Analyse des mathematischen Konzepts gezeigt hat, dass der Begriff der Geraden ausgehend vom Begriff der Strecke eingeführt wird. Clements fasst die Literatur zu ausgewählten Themen des Geometrieunterrichts zusammen und stellt dabei fest, dass bereits sehr junge Lernende im Vorschulalter in der Lage sind, eine horizontale oder vertikale Linie räumlich auszurichten und ausgehend von einem Punkt auf einer Achse eine senkrechte Linie zu extrapolieren. (Clements 2003, S. 166) Bei ihrer Untersuchung empirischer Ergebnisse bezüglich des Zusammenhangs von räumlichem Denken und Geometrie halten Clements & Battista unter anderem fest, dass Lernende parallele Linien deutlich besser identifizieren können als senkrechte Linien, da erstere häufiger im Alltags anzutreffen sind. Aus den Ergebnissen wird außderdem gefolgert, dass ein Zusammenhang zwischen der Darstellung geometrischer Problemen in entweder visueller oder verbaler Form und dem Erfolg der Lernenden bei der Bearbeitung der Aufgabe besteht, wobei einige Aufgaben bei visueller Darstellung wesentlich besser gelöst werden können. Hinsichtlich des Begreifens fortgeschrittener räumlicher Konzepte in frühen Entwicklungsphasen von Kindern wird unter Verweis auf die Arbeit von Piaget und Inhelder festgehalten, dass die Idee einer geraden Linie nur auf Grundlage der Handlung, ihr mit Hand oder Auge ohne Änderung der Richtung zu folgen, durch Abstraktion gewonnen werden kann. (Clements & Battista 1992, S. 421 ff.) Maier bezieht sich auf die Entwicklungsstufen der Raumorientierung nach Stückrath, wenn er beschreibt, dass die abstrakten Elemente Länge und Breite ab etwa 11 Jahren anhand von Einzelformen aufgefasst werden, wobei dieser Übergang zur geometrischen Konzeption den letzten Entwicklungsschritt der Raumorientierung im Schulalter darstellt: Im Alter von 6 bis 7 Jahren besitzen Kinder lediglich eine ganzheitliche Auffassung von Formen, sodass die „Dingstruktur“ von Objekten entscheidend ist. Zwischen 8 und 10 Jahren wird die „Formstruktur“ der Objekte wahrgenommen, was die Erfassung verschiedenartiger Formen und ihrer Beziehungen untereinander beinhaltet. Jedoch bleibt die Form auf dieser Stufe untrennbar mit der Körperlichkeit des Dinges verbunden und stellt noch keine eigenständige abstrakte Entität dar. Im Alter von 11 bis 14 Jahren wird schließlich die „geometrische Struktur“ wahrgenommen, d. h. die geometrischen Aspekte von Objekten dominieren und besitzen als gesonderte Gegenstände eine Bedeutung. (Maier 1999, S. 74 f.)

Der Erfahrungsraum ermöglicht Kindern erste Beobachtungen, die auf das geometrische Konzept der Strecke hinführen. Verschiedene Untersuchungen unterstützen nach Maier die These, dass elementare räumliche Vorstellungen bei Kleinkindern auf der Basis zunehmender Raumerfahrungen und Raumwahrnehmungen gewonnen werden. Er diskutiert zudem den Einfluss verschiedener Faktoren auf die Beurteilung von Strecken durch 3½- bis 9-Jährige: Der symmetrische Charakter der Entfernung $AB = BA$ kann von Kindern bis 6½ Jahren noch nicht erfasst werden, da einer vorgegebenen Strecke auf dem Hinweg eine andere Länge zugeschrieben wird als auf dem Rückweg. Zudem beeinflusst die beobachtete Bewegungsgeschwindigkeit offenbar die Wahrnehmung der zurückgelegten Entfernung. Beispielsweise werden gerannte Wegstrecken, obwohl Hüpfen anstrengender ist, meist als länger eingestuft als gehüpfte Strecken, da Hüpfen langsamer ist bzw. mehr Zeit benötigt. Weitere subjektive Einflussfaktoren auf die Beurteilung der Länge einer zurückgelegten Strecke sind die eigene Müdigkeit, das Vorhandensein oder Fehlen eines Gesprächs-partners, ob das Gelände als langweilig oder abwechslungsreich wahrgenommen wird und ob das Ziel mit einer angenehmen oder unangenehmen Erfahrung verknüpft wird. (Maier 1999, S. 76)

Kaufmann diskutiert die Entstehung von Vorstellungen zum Geradenbegriff anhand von Forschungsarbeiten zur Geometriedidaktik der Primarstufe und unterscheidet zunächst zwischen Objektbegriffen (beschreiben ebene und räumliche Objekte, die durch konkrete Gegenstände oder Modelle repräsentiert werden können, z. B. Dreieck, Würfel), Eigenschaftsbegriffen (beschreiben Eigenschaften von Objekten, z. B. krumm, Seite) und Relationsbegriffen (beschreiben Beziehungen zwischen geometrischen Objekten, z. B. senkrecht zu). Er hält dabei fest, dass keine Gegenstände existieren, die einer Geraden vollständig entsprechen, und es sich bei der Geraden daher nicht um einen Objektbegriff handeln kann. Stattdessen wird das Adjektiv „gerade“ als Eigenschaftsbegriff verwendet, um Objektbegriffe zu präzisieren. Auf diese Weise ist es Lernenden möglich, erste Vorstellungen zum Geradenbegriff „empirisch“ aufzubauen, indem Objekte mithilfe des Eigenschaftsbegriffes „gerade“ beschrieben werden. Sie bauen die Vorstellung auf, dass es sich bei Geraden um Linien handelt, die die Eigenschaft „gerade“ besitzen. (Kaufmann 2021, S. 66 f.)

Neben solchen empirisch gewonnenen Vorstellungen exisitiert nach Kaufmann auch die Möglichkeit, Vorstellungen zu Begriffen operativ aufzubauen, was auch als konstruktiver Begriffserweb bezeichnet wird. Beispielsweise kann der Begriff der Strecke von Lernenden der Primarstufe operativ erworben werden. Die Unterscheidung zwischen empirischer, d. h. anhand der Objekte selbst, und operativer, d. h. anhand von Handlungen an Objekten, Bildung von Vorstellungen ist dabei nicht immer trennscharf. Der Streckenbegriff wird häufig als die kürzeste Verbindung zweier Punkte eingeführt und dadurch von Alltagserfahrungen abgeleitet, da es möglich ist, verschiedene Verbindungswege zweier Punkte zu zeichnen und anschließend zu messen, wodurch sich der kürzeste identifizieren lässt. Analog können so auch Vorstellungen zu den Begriffen „Abstand“ und “Länge“ erworben werden. Aufbauend auf den Begriff der Strecke kann nun eine Vorstellung zum Geradenbegriff entwickelt werden, nämlich als eine über beiden Enden hinaus unendlich weit fortgesetzte Strecke. Auch anhand der Gleichung einer linearen Funktion $y = mx + t$ kann eine Vorstellung zum Geradenbegriff aufgebaut werden: Zentral hierfür kann die geometrische Deutung der Parameter m und t sein. Dabei entspricht der y-Achsenabschnitt t einem Punkt, durch welchen die Gerade verläuft. Die Steigung m entspricht der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, wobei die Längen der Katheten durch den Zahlenwert m festgelegt sind. Diese Hypotenuse ist dabei eine Strecke, die an den Schnittpunkt mit der y-Achse angelegt wird und ein Teilstück der Geraden darstellt. Da diese Strecke über beiden Enden hinaus beliebig verlängert werden kann, kann die Gerade damit als vollständig beschrieben betrachtet werden. Eine auf diese Weise aus der linearen Gleichung aufgebaute Vorstellung kann somit als Analogie zur obigen Vorstellung als verlängerte Strecke gesehen werden. Da eine solche Streckenverlängerung der „Entstehung“ einer Geraden im Rahmen ihrer Konstruktion entspricht, können diese beiden Vorstellungen auch im Sinne einer genetische Definitionen betrachtet werden. (Kaufmann 2021, S. 67 ff.)

Arcavi diskutiert den Nutzen von Visualisierungen gegenüber der rein symbolischen Darstellung von Geraden durch ihre Gleichungen und hebt hervor, dass die visuelle Lösung von Problemen den Lernenen ermöglich, mit Konzepten und Bedeutungen in Berührung zu kommen, welche durch die symbolische Lösung leicht umgangen werden können. Die Frage nach der gemeinsamen Eigenschaft der Familie von linearen Funktionen mit der Gleichung $f(x) = bx + b$ wird auf der symbolischen Ebene durch eine einfache Termumformung und die Interpretation des Ergebnisses beantwortet: $f(x) = bx + b = b(x + 1)$. Daran lässt sich ablesen, dass unabhängig von ihrem Wert von b für alle Funktionen der Familie $f(-1) = 0$ gilt bzw. dass alle den Punkt $(-1,0)$ gemeinsam haben. Dieser Argumentation wird die graphische Lösung eines Lernenden gegenübergestellt: Betrachtet man die Funktionsgleichung $f(x) = bx + b$, so ist das erste b die Steigung und das zweite b der y-Achsenabschnitt. Da die Steigung „y-Änderung pro x-Änderung" ist und den selben Wert besitzt wie der y-Achsenabschnitt, muss einer y-Änderung mit dem Wert des y-Achsenabschnitts eine x-Änderung von 1 entsprechen. Dieser Lösung wird dabei ein veranschaulichendes Bild der Geraden mit eingezeichnetem Steigungsdreieck mit Höhe b und Breite 1 beigefügt. (Arcavi 2003, S. 223)

Im Hinblick auf das Erfassen projektiver Relationen, d. h. zwischen Figur und Betrachter, führen Clements & Battista an, dass diese psychologischen Ursprungs sind und entstehen, wenn eine Figur nicht mehr in Isolation gesehen, sondern in Bezug auf einen Standpunkt betrachtet wird. Das Konzept der geraden Linie resultiert vor diesem Hintergrund aus der Handlung des Zielens bzw. Anvisierens. Kinder nehmen gerade Linien zwar ab den frühesten Lebensjahren wahr, können zunächst jedoch noch keine Objekte entlang eines geraden Weges anordnen, der nicht parallel zu den Kanten des Tisches verläuft. Stattdessen tendieren sie dazu, den Tischkanten zu folgen oder ihre Linie zu einem solchen Weg hin zu krümmen. Dies ist kein Wahrnehmungsproblem, da die Kinder verstehen, dass die Linie nicht gerade ist, jedoch keine adäquate Repräsentation konstruieren können, um dies zu erreichen. Sie besitzen lediglich eine intuitive, räumliche Repräsentation, bei der es sich um eine internalisierte Imitation früherer Wahrnehmungen handelt, die durch die Wahrnehmung ablenkender Konfigurationen wie beispielsweise den Kanten eines Tisches verändert werden kann. Im Gegensatz dazu basieren wirkliche interne Repräsentationen auf Operationen, weshalb sie den Einfluss von wahrgenommenen Konfigurationen verringern können. Mit etwa 7 Jahren sind Kinder dadurch in der Lage, gerade Wege durch eigenes Anvisieren entlang einer Trajektorie zu konstruieren, wobei sie sich selbst in eine gerade Linie mit den beiden zu verbindenden Stellen begeben. (Clements & Battista 1992, S. 423) Zudem können ab diesem Alter projektive Geraden in Schrägbildern konstruiert werden. (Maier 1999, S. 91) Hinsichtlich des Lesens solcher Schrägbilder hebt Maier die Notwendigkeit einer angemessenen Schulung hervor, da es sich insbesondere bei perspektivischen Darstellungen, die geometrische Körper beinhalten, um eine in hohem Maße anspruchsvolle Tätigkeit handelt, welche Ungeübten teilweise große Schwierigkeiten bereitet, unter anderem aufgrund auftretender „optischer Täuschungen". (Maier 1999, S. 276) Beispielsweise wird in der Konfiguration der Ponzo-Täuschung eine falsche Anwendung der Größenwahrnehmungsmechanismen im Gehirn als Ursache für die visuelle Verzerrung vermutet, dass zwei gleich lange Strecken im Kontext langer Linien, die das Vorliegen einer zentralprojektiven Abbildung suggerieren, als unterschiedlich lang wahrgenommen werden. (Maier 1999, S. 9 f.) Nach Maier entstehen derartige Täuschungen aufgrund einer räumlichen Verarbeitung insbesondere bei Linienzeichnungen, wie sie häufig im Geometrieunterricht vorkommen, z. B. werden die beiden parallelen Seiten eines Trapezes, an deren Enden sich stumpfe bzw. spitze Winkel befinden, länger bzw. kürzer als in der Wirklichkeit wahrgenommen. Auf die gleiche Weise erscheint bei der Judd-Figur der Mittelpunkt einer Strecke stark zu dem Ende hin verschoben, an dem sich spitze Winkel befinden, und weiter von dem Ende entfernt, an dem sich stumpfe Winkel befinden. Auch die bekannte Müller-Lyer-Täuschung lässt sich raumgeometrisch deuten: Eine Strecke mit spitzen Winkeln an beiden Enden wird als kürzer wahrgenommen als die gleiche Strecke mit stumpfen Winkeln an den Enden, da die Strecken nahen bzw. fernen Kanten von Objekten in einem räumlichen Kontext ähneln. Die Beschäftigung mit derartigen geometrisch-optischen Täuschungen bzw. ihrer räumlichen Interpretation bietet dabei Möglichkeiten zu analysieren, herzustellen, zu zeichnen und experimentell zu erforschen. (Maier 1999, S. 276 f.) Eng verwandt mit solchen Täuschungen sind sogenannte Kippbilder und räumliche Verfremdungen (auch als unmögliche Figuren bezeichnet), die ebenfalls in der subjektiven Wahrnehmung von Strecken begründet liegen und nach Maier einen wertvollen Beitrag zur Schulung der Raumvorstellung leisten können. (Maier 1999, S. 279 f.)

Die Erschließung des Geraden scheint dem Nicht-Geraden in der kindlichen Entwicklung nachgestellt zu sein: Clements & Battista führen an, dass sehr junge Kinder bis etwa 4 Jahren nicht zwischen kurvigen Figuren und solchen mit geraden Seiten unterscheiden. Studienergebnisse deuten an, dass Kinder zunächst lernen, kurvige Linien zu erzeugen, bevor sie in der Lage dazu sind, gerade Linien zu erzeugen. Zudem zeichnen viele junge Kinder bei dem Versuch, ein Rechteck zu zeichnen, einen Kreis. (Clements & Battista 1992, S. 423 ff.) Interessant ist, dass die ab ca. 4 Jahren auftretende Unterscheidung zwischen kurvigen und geradlinigen Formen nicht aufgrund der Gegenüberstellung runder Formen und der geraden Linie an sich auftritt, sondern aufgrund der Gegenüberstellung runder Formen und der Ecken, die beim Zusammentreffen gerader Linien entstehen. (Clements & Battista 1992, S. 445)

Clements & Battista betonen die Bedeutung von Handlungen für die Ausbildung von Vorstellungen über den Raum, da diese nicht durch bloßes Ablesen des Wahrgenommenen, sondern durch aktive Manipulation der räumlichen Umgebung konstruiert werden. Konstruierte Anschauungen besitzen eine enaktive Bedeutung. Da sie die unmittelbare Bedeutung einer Idee für Handlungen ausdrücken, werden sie zudem subjektiv als selbstevident wahrgenommen. Für die Gerade bedeutet dies, dass gebildete Erwachsene davon überzeugt sind, dass die Linie unendlich fortgesetzt werden kann oder dass man den kürzesten Weg zu einem gegebenen Punkt nimmt, wenn man einer geraden Linie folgt. Diese Gedanken scheinen zweifelsfreie Tatsachen und Eigenschaften des als Gerade bezeichneten „Objekts“ auszudrücken, obwohl es sich dabei nicht um etwas tatsächlich Wahrnehmbares handelt, sondern um eine Abstraktion bzw. Konvention, die auf Axiomen basiert, welche jederzeit geändert werden könnten. Dennoch wissen Menschen, dass sie eine gerade Linie bzw. Gerade erkennen oder zeichnen und sich entlang eines geraden Weges bewegen können. Das verinnerlichte abstrakte Konzept der Geraden kann somit als Ergebnis der Extrapolation handlungsbezogener Bedeutungen gesehen werden. (Clements & Battista 1992, S. 426) Insbesondere die Arbeit mit dynamischer Geometriesoftware ermöglicht die Manipulation von geometrischen Objekten mit dem Ziel, diese als Repräsentanten einer Klasse von Objekten, als Beispiele einer geometrischen Idee, zu begreifen, über die relevanten Eigenschaften zu reflektieren und die Fähigkeit zu entwickeln, allgemeiner und abstrakter zu denken. (Clements 2003, S. 160) Trotz der zahlreichen Vorteile, welche die Arbeit mit geometrischen Objekten am Bildschirm bietet, scheinen jedoch auch Handlungen mit einer haptischen Komponente bedeutungsvoll zu sein. Nach Maier werden Erfahrungen im Bereich der visuell-räumlichen Wahrnehmung durch eine Kombination von visuellen und taktilen Informationen gewonnen. Zudem belegen mehrere Studien die These, dass blinde Personen diese Erfahrungen ausschließlich aus taktilen Informationen ziehen. (Maier 1999, S. 11) Maier diskutiert die Ergebnisse von Studien zur Trainierbarkeit der Intelligenzkomponente „Raumvorstellung“ und stellt fest, dass dabei in der Regel ausschließlich visuelle Modelle und nur selten physikalische Modelle zum Einsatz kommen. Er betont, dass jedoch gerade handlungsorientierte Aktivitäten mit Modellen und Medien starke bis sehr starke Trainingseffekte erzielen konnten. (Maier 1999, S. 82 f.) Diese Ergebnisse stehen dabei im Einklang mit der These Piagets, dass Denken durch Verinnerlichung von *gegenständlichen* Handlungen entsteht. (Maier 1999, S. 88) Ein Beispiel für die haptische Auseinandersetzung mit dem Begiff der Geraden findet sich in der bereits besprochenen Darstellung durch gedruckte Kunststoffmodelle nach (Dilling 2019, S. 178 ff.).

Auch die Literatur zum Unendlichkeitsbegriff ist für den Begriff der Geraden relevant, da diese als unendlich verlängerte Strecke bzw. Strecke ohne Anfangs- und Endpunkt definiert wird. Der Begriff der Unendlichkeit tritt bei der Geraden dabei in doppelter Weise auf, ist diese doch unendlich groß hinsichtlich ihrer Länge bzw. Ausdehnung entlang ihrer Verlaufsrichtung und unendlich klein hinsichtlich ihrer Breite bzw. Ausdehnung senkrecht zu ihrer Verlaufsrichtung. Diesbezüglich sei auf die Ergebnisse Kaspareks verwiesen, die bereits für den Begriff des Punktes besprochen wurden: Da der Begriff der Unendlichkeit von mathematischen Objekten und Prozessen im Unterricht in unterschiedlichen Kontexten Verwendung findet, jedoch nie explizit thematisiert wird, entwickeln Lernende Fehlvorstellungen, infolge derer sie unendliche bzw. infinitesimale Objekte als sehr groß bzw. sehr klein, aber dennoch erreichbar auffassen. (Kasparek 2023, S. 32 ff.) Für den Begriff der Geraden legen diese Ergebnisse nahe, im Unterricht näher auf die Bedeutung von „unendlich lang“ und „unendlich schmal“ einzugehen und besonderes Augenmerk darauf zu legen, entsprechende Fehlvorstellungen zu vermeiden.

Das Konzept der Geraden bzw. geraden Linie spielt zudem eine fundamentale Rolle für das Verständnis von Koordinatensystemen: Das euklidische Koordinatensystem entsteht für die Lernenden aus der gleichzeitigen Anordnung aller möglichen Positionen in drei Dimensionen, welcher die Konstruktion der Konzepte der geraden Linie als die Aufrechterhaltung einer konstanten Bewegungsrichtung, der parallelen Linie und des Winkels sowie die Auseinandersetzung mit deren Ausrichtung und Neigung vorausgeht. (Clements & Battista 1992, S. 424)

Nach Kaufmann kann die vektorielle Beschreibung von Geraden im Kontext der analytischen Geometrie als Schnittstelle der abstrakten Begriffe „Variable“, „Vektor“ und „Gerade“ angesehen werden, woraus gefolgert werden kann, dass die Vorstellungen zu Vektorgleichungen und den beschriebenen Objekten auch von den Vorstellungen zu diesen Komponenten abhängen. Für detaillierte Ausführungen zu diesem Gedanken sei auf (Kaufmann 2021, S. 77 ff.) verwiesen. Hinsichtlich empirischer Ergebnisse hält er fest, dass Lernende häufig das Problem haben, Vektoren grundsätzlich als Ortspfeile mit dem

Anfangs-punkt im Ursprung dazustellen, was offenbar aus der Einführung des Hilfskonstrukts „Ortsvektor“ in der Schule resultiert. Kaufmann spricht sich für einen Verzicht auf den Begriff des Ortsvektors aus, weil Lernende dadurch die Möglichkeit erhalten würden, anhand einer Vektorgleichung wie $g : X = P + t \cdot \overrightarrow{v_g}$ eine sinnvolle Vorstellung von Geraden im Sinne einer Punktmenge zu entwickeln. Demgegenüber verwenden Vektorgleichungen der Form $g : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{v_g}$ Ortsvektoren zu Beschreibung von Punkten. (Kaufmann 2021, S. 79 ff.)

Vollrath untersucht die Vorstellungen von Lernenden der 7. und 8. Jahrgangsstufe des Gymnasiums zum Begriff der Strecke und der Geraden. Er stellt dabei fest, dass alle Lernenden die Begriffe Gerade und Strecke kennen und mit ihnen Vorstellungen verbinden. Insbesondere der Unterschied zwischen den beiden Begriffen ist ihnen bewusst. Beim Zeichnen von Geraden und Strecken halten sich die meisten an übliche Konventionen. Ein wesentlicher Aspekt der Strecke ist für die meisten Lernenden, dass sie durch Anfangs- und Endpunkt begrenzt ist sowie eine Länge besitzt. Im Gegensatz dazu ist für Geraden wesentlich, dass sich unbegrenzt sind und folglich keine Länge besitzen. Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Objekten ist für die meisten die Unbegrenztheit der Geraden, für einige ist dies auch der Grund dafür, dass Geraden im Gegensatz zu Strecken nicht in der Realität existieren. Die Bedeutung von Punkten als Begrenzung einer Strecke wird im allgemeinen als sehr hoch eingeschätzt, die Tatsache, dass durch Punkte auch Geraden bestimmt werden, wird für weniger wichtig gehalten. Strecken als Teile von Geraden aufzufassen bereitet den Lernenden Schwierigkeiten. (Vollrath 1998, S. 217 f.)

Kaufmann befragt Lernende der gymnasialen Oberstufe zu ihren Vorstellungen zu Geradengleichungen in der Vektordarstellung der analytischen Geometrie und gibt eine differenzierte Auswertung seiner Ergebnisse. Da es sich dabei ausschließlich um deskriptive Vorstellungen handelt, d. h. tatsächlich beobachtete Vorstellungen von Lernenden, verwendet er dabei bewusst den Ausdruck „Schülervorstellungen“, um diese vom Begriff der Grundvorstellung abzugrenzen, welcher in der Forschungsdiskussion als sowohl normativ als auch deskriptiv angesehen wird und in seiner Arbeit ausschließlich normativ verwendet wird. Er identifiziert dabei 5 Typen von „Schülervorstellungen“, wobei jeder Typus eine Verallgemeinerung darstellt, die auf mehrere Lernende zutrifft. Die Lernenden können dabei neben den für einen Typus charakteristischen Vektorvorstellungen weitere Vorstellungen besitzen, zudem wurden Lernende beobachtet, die keinem dieser Typen zugeordnet werden konnten.

- *Typ 1 - „Geometrisch-ganzheitliche-Vorstellung“*: Dieser Typus beschreibt die Gerade als ein ganzheitliches Objekt, welche durch einen Stützvektor als vorgegeben Punkt und einen Richtungsvektor als Teilstück der Geraden eindeutig festgelegt ist. Die Lernenden stellen sich unter einem Vektor ausschließlich ein Objekt der Geometrie vor, z. B. Punkte, gerichtete Strecken, Geraden, welche durch weitere Eigenschaften charakterisiert sein können. Die Bedeutung der Variablen der Vektorgleichung wird nicht erläutert, sondern stellt primär ein Unterscheidungsmerkmal von Stütz- und Richtungsvektor dar. Die Vorstellung kann als Analogie zur Behandlung von Geraden als Graphen linearer Funktionen aufgefasst werden, bei welcher diese durch den y-Achsenabschnitt als festen

Punkt und die Steigung, dargestellt als Hypotenuse eines Steigungsdreiecks, als Teilstück der Geraden eindeutig festgelegt wird.

- *Typ 2 - „Abstrakt-ganzheitliche-Vorstellung"*: Diese Lernenden beschreiben eine Gerade ganzheitlich durch einen Punkt und eine Richtung. Sie unterscheiden sich von Typ 1 durch eine abstraktere Vektorvorstellung, bei welcher sich vom Vektor als geometrischem Objekt gelöst wird und geometrische Objekte lediglich als eine Darstellungsform von Vektoren aufgefasst werden. Unter einem Vektor wird sich ein abstrakter Gegenstand wie beispielsweise eine Verschiebung vorgestellt, der in der Geometrie anschaulich dargestellt werden kann. Weitere Vektorvorstelltungen sind parallel dazu möglich. Hinsichtlich der Interpretation von Vektorgleichungen und deren Elementen stimmt dieser Typus mit Typ 1 überein.

- *Typ 3 - „Elementar-funktionale-Vorstellung"*: Dieser Typus bezieht in die Interpretation der vektoriellen Geradengleichung die Idee der Bewegung mit ein, welche mit der Vorstellung von Vektoren als Verschiebungen verknüpft ist. Die Variable ist für die Unendlichkeit der Geraden „zuständig". Die Vektorgleichung wird dabei insofern aus einer grundlegenden funktionalen Perspektive interpretiert, als ein eingesetzter Wert einen Punkt auf der Geraden liefert. Diese Punktvorstellung bedeutet auch, dass typischerweise nur ein einzelner Punkt betrachtet wird. Neben einer geometrischen Darstellung lässt sich hier außerdem der Aspekt beobachten, dass die zusammengesetzte Einheit aus mehreren Teileinheiten wie beispielsweise Teilverschiebungen besteht.

- *Typ 4 - „Punktmengen-Vorstellung"*: Hier findet man die Vorstellung von Vektoren als Verschiebungen. Es wird weiter zwischen zwei Untertypen differenziert: Der Typus „funktionale-Punktmengen-Vorstellung" interpretiert die Vektorgleichungen aus einer funktionalen Perspektive, wobei die Variable als Objekt aufgefasst wird, für welches beliebige Werte eingesetzt werden können, um Punkte einer Geraden zu erhalten. Ein Punkt auf der Geraden wird dabei durch das Einsetzen eines beliebigen Wertes auf andere Punkte der Geraden mit dem vervielfachten Richtungsvektor verschoben. Der Richtungsvektor kann also als Verschiebung aufgefasst werden. Der Typus „Punktverschiebungs-Mengen-Vorstellung" interpretiert primär anhand des Richtungsvektors und seiner Vielfachen, durch welche ein fester Punkt auf alle anderen Punkte der Geraden verschoben wird. Die Variable wird bei der Interpretation der Gleichung nicht direkt angesprochen.

- *Typ 5 - „Veränderungs-Vorstellung"*: Die Variable der Vektorgleichung wird als ein Objekt interpretiert, welches den Richtungsvektor bezüglich seines Endpunktes oder seiner Länge verändert, weshalb diese Vorstellung einen eher dynamischen Charakter besitzt. Unter Vektoren stellen sich diese Lernenden im geometrischen Sinne eine gerichtete Strecke vor, welche durch einen Anfangs- und Endpunkt charakterisiert sein kann. (Kaufmann 2021, S. 195 ff.)

3.3.1.4. Zusammenschau

Untersucht man die bisher gewonnenen Ergebnisse hinsichtlich auftretender „Kernelemente“, so lassen sich die nachfolgenden für den gewählten Gültigkeitsbereich und Bezugsrahmen relevanten Klassen identifizieren. Da im Rahmen des hier verwendeten Salle-Clüver-Verfahrens explizit auch empirische Ergebnisse zu mentalen Repräsentationen von Lernenden in die Klassenbildung einfließen sollen, wurde sich bei der Bildung derjenigen Klassen, die auf der Darstellung von Geraden durch Vektorgleichungen in der analytischen Geometrie basieren, an den von Kaufmann empirisch gewonnenen „Schülervorstellungen“ orientiert. Um diesen rein deskriptiven Vorstellungen auch den für unsere Zwecke notwendigen normativen Charakter zu verleihen, wurden sie mit den Ergebnissen der Sachanalyse abgeglichen. Beispielsweise wurde der Typ „Geometrisch-ganzheitliche-Vorstellung“ verworfen, da die Vorstellung von Vektoren als geometrische Objekte im Sinne von Strecken, die ein Teilstück einer Geraden sein können, aus fachlicher Sicht nicht erstrebenswert erscheint.

Erste Klasse: Unendlich verlängerte Strecke

Die Gerade stellt hier einen Grundbegriff sowie ein Objekt der Geometrie dar. Sie wird ausgehend vom Begriff der Strecke festgelegt, indem diese über Anfangs- und Endpunkt hinaus unendlich weit geradlinig verlängert wird. Dieser Vorgang kann dabei entweder als eine sich gleichzeitig vollziehende Verlängerung beider Enden oder zwei nacheinander ausgeführte Verlängerungen aufgefasst werden. Diese Klasse ist u. a. bei zeichnerischen Anwendungen von Bedeutung, da die Vorstellung eines Verlängerungsvorgangs eng mit dem Konstruktionsvorgang von Geraden mit Stift und Lineal verknüpft ist, bei welchem eine Linie bis zum Rand des Zeichenbereichs („ins Unendliche“) gezogen wird — diese Klasse besitzt somit einen genetischen Charakter. Eine mögliche Aufgabe ist beispielsweise die Konstruktion der Geraden, die durch zwei gegebene Punkte verläuft, bei welcher das Lineal zunächst an die Verbinungslinie (Strecke) der beiden Punkte angelegt wird. Besonders bei der Konstruktion von Schnittpunkten zeigt sich durch diesen Vorgang anschaulich, „wann“ bzw. wo eine Gerade ein anderes geometrisches Objekt schneidet.

Zentrale Kernelemente dieser Klasse sind:

- zwei Punkte
- eine Strecke, die beide Punkte verbindet
- die Länge der Strecke
- ein bzw. zwei geradlinige Verlängerungsvorgänge
- die Gerade als das Ergebnis dieses bzw. dieser Verlängerungsvorgänge

Zweite Klasse: Gerade Linie ohne Anfangs- und Endpunkt

Ebenfalls in der Rolle eines Grundbegriffs und Objekts der Geometrie, wird die Idee der Geraden auch hier mithilfe des Begriffs der Strecke entwickelt: Wenn eine gerade Linie von zwei Punkten begrenzt wird, spricht man von einer Strecke, wenn sie einen Anfangs-, aber keinen Endpunkt besitzt, von einer Halbgeraden, und wenn sie weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt, von einer Geraden. In dieser Klasse wird kein Verlängerungsvorgang beschrieben, sondern die unendliche Ausdehnung dadurch charakterisiert, dass kein Anfangs- und Endpunkt vorhanden ist. Eine Gerade „entsteht" hier nicht, sondern ist ein bereits fertig existierendes Objekt. Relevant ist diese Klasse besonders, wenn Geraden als bereits gegebene Objekte vorkommen und nicht mehr konstruiert werden müssen.

Die wesentlichen Kernelemente der Klasse sind:

- eine gerade Linie
- ein Anfangspunkt
- ein Endpunkt
- das Fehlen von Anfangs- und Endpunkt
- die Gerade als das dadurch charakterisierte Objekt

Dritte Klasse: Punktmenge aus Wertepaaren einer linearen Funktion

Hier wird die Gerade im kartesischen Koordinatensystem als aus den einzelnen Punkten zusammengesetzt aufgefasst, welche eine lineare Funktion $f(x) = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ in Form von Wertepaaren $(x, f(x))$ liefert. Die Menge aller für diese Funktion möglichen Wertepaare erzeugt also die Gesamtheit der Geraden im Sinne einer Punktmenge, weshalb auch diese Klasse einen genetischen Charakter aufweist. Diese Klasse ist beispielsweise für die Konstruktion von Geraden aus einer Wertetabelle relevant, anhand derer einzelne Punkte ins Koordinatensystem eingezeichnet werden können, welche dann im Sinne einer Extra- und Interpolation mit dem Lineal verbunden werden.

Die Kernelemente dieser Klasse sind:

- das kartesische Koordinatensystem
- die lineare Funktion $f(x) = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$
- die Definitionsmenge $D_f = \mathbb{Q}$
- Wertepaare $(x, f(x))$ für alle $x \in D_f$
- die Gerade als Menge der Punkte aller Wertepaare im Koordinatensystem

Vierte Klasse: Ganzheitlicher Graph einer linearen Funktion

Im Gegensatz zur dritten Klasse wird eine Gerade in einem kartesischen Koordinatensystem hier als Funktionsgraph im Sinne eines ganzheitlichen Objekts charakterisiert, auf welchem einzelne Punkte lediglich liegen bzw. markiert werden können. Dieses Objekt wird durch die lineare Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ festgelegt, indem die Parameter t und m als y-Achsenabschnitt bzw. Steigung des Graphen interpretiert werden. Dies entspricht der Auffassung, dass die Gerade durch einen Punkt und eine Richtung vollständig beschrieben ist. Diese Klasse kommt in Situationen zur Geltung, in denen die Geradengleichung anhand eines gegebenen Graphen aufgestellt werden soll, d. h. Steigung und y-Achsenabschnitt bestimmt werden sollen.

Die wesentlichen Kernelemente dieser Klasse sind:

- das kartesische Koordinatensystem
- die lineare Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit $D_f = \mathbb{Q}$
- der Graph dieser Funktion
- der Parameter $m \in \mathbb{Q}$, der als Steigung des Graphen aufgefasst wird
- der Parameter $t \in \mathbb{Q}$, der als y-Achsenabschnitt des Graphen aufgefasst wird
- die Gerade als der durch m und t eindeutig bestimmte Graph

Fünfte Klasse: Durch Steigungsdreieck und y-Achsenabschnitt (oder Punkt) festgelegte unendlich verlängerte Strecke

Für diese Klasse ist das Konzept des Steigungsdreiecks zentral: Ausgehend von der linearen Funktionsgleichung $f(x) = mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ wird dabei im Koordinatensystem ausgehend von dem Punkt, welcher durch den y-Achsenabschnitt t festgelegt wird, ein Steigungsdreieck eingezeichnet, dessen Katheten das durch die Steigung m festgelegte Seitenverhältnis besitzen. Auf diese Weise entsteht die Hypotenuse als Strecke zwischen zwei Ecken des Steigungsdreiecks und stellt einen Teil der Geraden dar. In Analogie zur ersten Klasse kann diese Strecke nun von beiden Endpunkten ausgehend unendlich weit geradlinig fortgesetzt werden, wodurch die vollständige Gerade entsteht. Diese Klasse ist in Situationen relevant, in denen eine Gerade konstruiert werden soll, welche eine bestimmte Steigung besitzt und die y-Achse in einem gegebenen Punkt schneidet. Analog kann anstelle des y-Achsenabschnitts auch ein beliebiger Punkt $(x, f(x))$ als „Aufpunkt“ des Steigungsdreiecks verwendet werden.

Die wesentlichen Kernelemente dieser Klasse lauten wie folgt:

- die lineare Funktion $f(x) = mx + t$ mit $D_f = \mathbb{Q}$
- der Parameter $t \in \mathbb{Q}$, der als y-Achsenabschnitt der Geraden aufgefasst wird
- (alternativ: ein beliebiges Wertepaar der Funktion $(x, f(x))$)
- der Parameter $m \in \mathbb{Q}$, der als Steigung der Geraden aufgefasst wird
- das Steigungsdreieck
- die beiden Katheten des Steigungsdreiecks
- das Seitenverhältnis der Katheten
- die Hypotenuse des Steigungsdreiecks
- die beidseitige geradlinige unendliche Verlängerung der Hypotenuse
- die Gerade als Ergebnis der Verlängerung der Hypotenuse

Sechste Klasse: Abstrakte Lösungsmenge linearer Gleichungen

In dieser Klasse wird die Gerade als Lösungsmenge einer abstrakten linearen Gleichung $y = mx + t$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und Parametern $m, t \in \mathbb{Q}$ aufgefasst, ohne auf deren anschauliche Interpretation einzugehen. Das abstrakte Objekt „Gerade“ ergibt sich als Menge aller Lösungen (x, y) der linearen Gleichung. Diese Auffassung spielt insbesondere bei der rechnerischen Lösung linearer Gleichungen bzw. Gleichungssysteme eine zentrale Rolle.

Kernelemente dieser Klasse sind:

- die lineare Gleichung $y = mx + t$
- die Variable $x \in \mathbb{Q}$
- die Variable $y \in \mathbb{Q}$
- die Parameter $m, t \in \mathbb{Q}$
- die Lösungen der Gleichung in Form von Wertepaaren (x, y)
- die Menge aller Lösungen
- die Gerade als Bezeichnung für die Menge aller Lösungen

Siebte Klasse: Ganzheitliches Objekt im Raum

Diese Klasse ist eng mit der vierten Klasse „Ganzheitlicher Graph einer linearen Funktion“ verwandt. Jedoch wird hier die von der Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ beschriebene Gerade als ein ganzheitliches Objekt im dreidimensionalen Raum aufgefasst, welches durch den Vektor $\overrightarrow{A}$ und den Vektor $\vec{u}$ im Sinne eines Punktes bzw. einer Richtung eindeutig festgelegt ist. Vektoren verden dabei als abstrakte und nicht als geometrische Objekte verstanden. Diese Klasse spielt beispielsweise eine Rolle, wenn Geraden auf einer anschaulichen Ebene hinsichtlich ihrer Lage untersucht werden, z. B. Parallelität zu anderen Geraden.

Die zentralen Kernelemente dieser Klasse sind:

- die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
- der Vektor $\overrightarrow{A}$ als Aufpunkt
- der Vektor $\vec{u}$ als Richtung
- die Gerade als dadurch festgelegtes Objekt

Achte Klasse: Funktionale-Punktmenge im Raum

Diese Klasse ist eng mit der dritten Klasse „Punktmenge aus Wertepaaren einer linearen Funktion“ verwandt, wobei hier die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ in einem funktionalen Sinne verstanden, da der Parameter λ als Variable aufgefasst wird: Durch Einsetzen eines Wertes „liefert“ die Gleichung einen Punkt auf der Geraden. Die Gerade ergibt sich nach diesem Verständnis als Menge aller Punkte, die durch die Gleichung erzeugt werden können. Diese Klasse ist relevant, wenn in Schulbüchern erklärt wird, dass der Parameter λ als „Hausnummer“ oder „Zeit“ aufgefasst werden kann, wobei jeder Punkt auf der Geraden einem Wert von λ entspricht. Ein Anwendungsbeispiel ist die Beschreibung von geradlinigen Bewegungsvorgängen, z. B. die Trajektorie von Flugzeugen in Abhängigkeit der Zeit.

Zentrale Kernelemente sind:

- die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
- der Parameter λ, aufgefasst als Variable
- der Ortsvektor $\overrightarrow{X}$, der einen Punkt auf der Geraden beschreibt
- die Gerade als Punktmenge, bestehend aus den so beschriebenen Punkten

Neunte Klasse: Verschiebungs-Punktmenge im Raum

In dieser Klasse spielt die Auffassung von Vektoren als Bewegung bzw. Verschiebung eine zentrale Rolle. Die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ wird so interpretiert, dass man einen durch $\overrightarrow{X}$ beschriebenen Punkt auf der Geraden erhält, indem man bei dem durch $\overrightarrow{A}$ beschriebenen Punkt startet und sich von dort um das λ-fache des Vektors $\vec{u}$ in diese Richtung bewegt bzw. den Punkt verschiebt. Die Gerade erhält ihre unendliche Ausdehnung dadurch, dass beliebig betragsgroße Werte für λ und damit beliebig weit entfernte Punkte „erreicht“ werden können. Die Gerade entsteht hier als Menge aller durch derartige Verschiebungen erreichbaren Punkte. Diese Klasse kann ebenfalls für Situationen relevant sein, in denen Bewegungen entlang einer Geraden beschrieben werden, wobei λ hier die anschauliche Bedeutung einer Stauchung oder Streckung des „Verschiebungsvektors“ besitzt.

Die wesentlichen Kernelemente dieser Klasse sind:

- die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
- der Stützvektor $\overrightarrow{A}$, aufgefasst als Ausgangspunkt der Verschiebung bzw. Bewegung
- der Parameter λ, aufgefasst als Skalierungsfaktor, d. h. Stauchung oder Streckung
- der Richtungsvektor $\vec{u}$, aufgefasst als zu skalierender Vektor
- der Ortsvektor $\overrightarrow{X}$, der einen durch die Verschiebung erreichten Punkt beschreibt
- die Gerade als Punktmenge, bestehend aus den so beschriebenen Punkten

Zehnte Klasse: Abstrakte Lösungsmenge von Vektorgleichungen

Wie bereits in der sechsten Klasse „Abstrakte Lösungsmenge linearer Gleichungen“ wird die Gerade auch hier als Lösungsmenge einer abstrakten Gleichung aufgefasst. Als „Gerade“ wird die Menge aller Lösungen $\overrightarrow{X}$ der Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ bezeichnet, eine geometrische Interpretation ist hier nicht notwendig. Dieses Verständnis von Vektorgleichungen spielt primär bei der Berechnung von Schnittmengen von Geraden mit anderen Objekten im Sinne ihrer Gleichungen im Rahmen der analytischen Geometrie eine Rolle.

Kernelemente dieser Klasse sind:

- die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$
- der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$
- der Vektor $\overrightarrow{X}$, aufgefasst als Lösung der Gleichung
- die Menge aller Lösungen
- die Gerade als Bezeichnung für die Menge aller Lösungen

3.3.2. Formulierung und Diskussion der Grundvorstellungen

Auf Basis der gebildeten Klassen können nun die konkreten Grundvorstellungen zum Begriff der Geraden formuliert werden. Im Anschluss werden das auszubildende Grundverständnis sowie mögliche Grundvorstellungsumbrüche thematisiert.

Streckenverlängerungs-Vorstellung

„Eine Gerade ist eine unendlich weit über Anfangs- und Endpunkt hinaus verlängerte Strecke."

In dieser Vorstellung wird die Gerade im Sinne einer genetischen Definition als das Ergebnis des Verlängerungsvorgangs einer von zwei Punkten begrenzten Strecke aufgefasst. Sie stellt dabei ein geometrisches Objekt dar.

Unbegrenzte-Linien-Vorstellung

„Eine Gerade ist eine gerade Linie ohne Anfangs- und Endpunkt."

Hier wird die Gerade nicht als Ergebnis eines Prozesses, sondern als fertig existierendes Objekt aufgefasst. Auch in dieser Vorstellung stellt die Gerade ein geometrisches Objekt dar.

Funktionale-Punktmengen-Vorstellung

„Eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem ist die Menge aller Punkte, die eine lineare Funktion $f : x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ in Form von Wertepaaren $(x, f(x))$ liefert."

Diese Vorstellung bezieht sich auf die Darstellung von Geraden im kartesischen Koordinatensystem als der Graph linearer Funktionen, wobei dieser als aus einzelnen Punkten zusammengesetzt aufgefasst wird. In diesem Sinne besitzt auch diese Vorstellung einen genetischen Charakter, da der Graph aus den einzelnen Punkten „entsteht".

Achsenabschnitt-Steigungs-Vorstellung

„Eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion $f : x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$, welcher durch seine Steigung m und seinen y-Achsenabschnitt t vollständig beschrieben ist."

Auch bei dieser Vorstellung wird eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem als der Graph einer linearen Funktion $f: x \mapsto mx + t$ mit $m, t \in \mathbb{Q}$ und $D_f = \mathbb{Q}$ aufgefasst, jedoch handelt es sich dabei um ein ganzheitlich existierendes und nicht um ein aus Einzelteilen zusammengesetztes Objekt. Dieses Objekt besitzt die Eigenschaften, eine Steigung zu besitzen und durch bestimmte Punkte zu verlaufen. Zentral für diese Vorstellung ist die Interpretation des Parameters m als Steigung und des Parameters t als y-Achsenabschnitt, an welchem der Schnittpunkt mit der y-Achse leicht abgelesen werden kann.

Punkt-Steigungs-Vorstellung

„Eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem ist der Graph einer linearen Funktion $f: x \mapsto mx + t$ *mit* $m, t \in \mathbb{Q}$ *und* $D_f = \mathbb{Q}$*, welcher durch seine Steigung m und einen beliebigen Punkt* $(x, f(x))$ *vollständig beschrieben ist.“*

Diese Vorstellung stellt eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung der Achsenabschnitt-Steigungs-Vorstellung dar, bei welcher neben dem Schnittpunkt mit der y-Achse nun auch beliebige Wertepaare der Funktion als definierende Punkte fungieren können.

Hypotenusenverlängerungs-Vorstellung

„Eine Gerade im kartesischen Koordinatensystem zur linearen Funktion $f: x \mapsto mx + t$ *mit* $m, t \in \mathbb{Q}$ *und* $D_f = \mathbb{Q}$ *ist die beidseitig unendlich weit verlängerte Hypotenuse des Steigungsdreiecks, welches ausgehend von* $(0,t)$ *(oder einem beliebigen Punkt* $(x, f(x))$*) eingezeichnet wird und dessen Kathentenlängen durch das Seitenverhältnis m festgelegt sind.“*

Diese Vorstellung überträgt die Idee der Streckenverlängerung auf die Konstruktion einer Geraden mithilfe eines Steigungsdreiecks. Die Hypotenuse des Steigungsdreiecks wird dabei als Teil der Geraden aufgefasst, durch unendliche Verlängerung in beide Richtungen erhält man die gesamte Gerade. Zentral hierfür ist die Interpretation des Parameters m als Steigung der Geraden und damit Seitenverhältnis $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ der Katheten des Steigungsdreiecks.

Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung

„Als Gerade wird die Lösungsmenge einer linearen Gleichung $y = mx + t$ *bezeichnet.“*

In dieser Auffasung des Geradenbegriffs wird auf eine anschauliche Deutung verzichtet und das Objekt „Gerade“ als die Lösungsmenge einer abstrakten linearen Gleichung $y = mx + t$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und Parametern $m, t \in \mathbb{Q}$ verstanden.

Punkt-Vektor-Vorstellung

„Eine Gerade im Raum ist das durch die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ *beschriebene Objekt, welches durch den Punkt A und den Richtungsvektor* $\vec{u}$ *eindeutig festgelegt ist.“*

In Analogie zur Punkt-Steigungs-Vorstellung wird die Gerade auch hier durch einen Aufpunkt und eine Richtung eindeutig beschrieben. Die Gerade stellt dabei ein ganzheitliches Objekt mit den Eigenschaften dar, durch bestimmte Punkte zu verlaufen und eine Verlaufsrichtung zu besitzen.

Funktionale-Raum-Punktmengen-Vorstellung

„Eine Gerade im Raum ist die Menge aller Punkte X, die die Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ *durch Einsetzen aller* $\lambda \in \mathbb{R}$ *in Form von Ortsvektoren* $\overrightarrow{X}$ *liefert.“*

Bei dieser Vorstellung wird der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ als Variable aufgefasst, wodurch die Vektorgleichung den Charakter einer Funktion annimmt, die durch das Einsetzen konkreter λ -Werte konkrete Ortsvektoren $\overrightarrow{X}$ bzw. Punkte X „erzeugt“. Die Gerade ergibt sich in dieser Vorstellung als Punktmenge, die aus den einzelnen auf diese Weise gewonnenen Punkten zusammengesetzt ist. Der Parameter λ schlüpft dabei in die Rolle einer „Hausnummer“, welche die einzelnen Punkte der Geraden bezeichnet.

Verschiebungs-Punktmengen-Vorstellung

„Eine Gerade im Raum ist die Menge aller Punkte X, die durch Verschiebung eines gegebenen Punktes A um alle möglichen Vielfachen $\lambda \cdot \vec{u}$*,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *eines gegebenen Vektors* $\vec{u}$ *erreicht werden können.“*

In dieser Vorstellung werden Geraden ebenfalls als Punktmengen aufgefasst, jedoch werden die Punkte hier anders „erzeugt“: Statt den Punkt aus einer Vektorgleichung im Sinne einer Funktion zu erhalten, ergeben sich die Punkte hier als Ergebnisse von Verschiebungen eines gemeinsamen Aufpunkts um alle möglichen Vielfachen eines gemeinsamen Richtungs-vektors.

Vektor-Lösungsmengen-Vorstellung

„Als Gerade wird im Kontext von Vektorgleichungen die Menge der Lösungen $\overrightarrow{X}$ *von* $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *bezeichnet."*

Auch in dieser Vorstellung wird der Begriff „Gerade" als Bezeichnung für die Lösungsmenge einer Gleichung aufgefasst, in diesem Fall der Vektorgleichung $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Vorstellung greift nicht auf räumlich-anschauliche Interpretationen der Gleichung oder der Geraden zurück.

Hinsichtlich des auszubildenden Grundverständnisses und möglicher Grundvorstellungsumbrüche sollten auch die Verbindungen der formulierten Grundvorstellungen untereinander untersucht werden. Hier lässt sich beim Begriff der Geraden ein überwiegend stimmiges Gesamtbild beobachten, da die in den unterschiedlichen Themenfeldern auftretenden Grundvorstellungen größtenteils als aufeinander aufbauend bzw. Erweiterung vorheriger Vorstellungen aufgefasst werden können, sofern sie in der für die Sekundarstufe üblichen Reihenfolge behandelt werden.

Die ersten beiden Vorstellungen mit denen Lernende in der Regel konfrontiert werden sind die Streckenverlängerungs-Vorstellung und die Unbegrenzte-Linien-Vorstellung. Diese beiden Vorstellungen ergänzen sich gegenseitig relativ gut, da die Streckenverlängerungs-Vorstellung einerseits einen genetischen Zugang zu dem Objekt ermöglicht, welches von der Unbegrenzte-Linien-Vorstellung postuliert wird. Diese liefert andererseits eine Vorstellung für das tatsächliche Endprodukt des Streckenverlängerungsvorgangs. Andererseits könnte durch die Streckenverlängerungs-Vorstellung der Eindruck entstehen, dass eine Gerade aus drei unterschiedlichen Teilen zusammengesetzt ist, nämlich der zentralen Strecke und den beiden verlängerten Endstücken. Diesem Gedanken kann die Vorstellung der Geraden als eine einzige unbegrenze Linie entgegenwirken.

Die nächsten Grundvorstellungen zur Geraden treten im Kontext linearer Funktionen auf und ermöglichen verschiedene Blickwinkel auf den Begriff. Einerseits stellt die Funktionale-Punktmengen-Vorstellung das Objekt der Gerade auf eine völlig neue Weise dar, nämlich als Menge einzelner Punkten. Demgegenüber gingen die beiden vorherigen Vorstellungen von einem ganzheitlichen bzw. aus drei ganzheitlichen Teilstücken zusammengesetzen Objekt aus. Dieser Umbruch kann durch den Gedanken begleitet werden, dass es sich nach wie vor um das selbe Objekt handelt, dieses jedoch aus einzelnen Punkten als elementare Bestandteile besteht. Die Achsenabschnitt-Steigungs- bzw. Punkt-Steigungs-Vorstellung umgehen diesen Umbruch, indem die Gerade hier nach wie vor als ein ganzheitliches Objekt behandelt wird. Einen weiteren Ansatz im Hinblick auf die „Zusammensetzung" der Geraden liefert die Hypotenusenverlängerungs-Vorstellung, welche die Idee der Streckenverlängerungs-Vorstellung wiederaufgreift und auf Geraden im Koordinatensystem überträgt. Die Hypotenuse des Steigungsdreiecks entspricht dabei der zentralen Strecke, welche über beide Enden hinaus unendlich weit verlängert wird. Das verbindende Element zwischen dieser und der Achsenabschnitt-Steigungs- bzw. Punkt-Steigungs-Vorstellung ist das dabei der Zusammenhang $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, der die Steigung sowohl als Zahl als auch als Verhältnis der Seitenlängen der Katheten des Steigungsdreiecks darstellt. Die wesentliche Neuerung bei diesen Vorstellungen ist, die relative Lage von Geraden bezüglich eines Koordinatensystems nun einerheits mithilfe der Parameter m und t quantifizieren zu können und die Gerade andererseits als Graph untrennbar mit einer Funktionsgleichung verknüpft zu erfassen. Die unbeschränkte Definitionsmenge $D_f = \mathbb{Q}$ ist dabei essenziell, um die unendliche Ausdehnung der Geraden zu gewährleisten. Bei der Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung löst sich die Verknüpfung von geometrischem Objekt und Funktion wieder und die Bezeichnung „Gerade“ beschreibt ausschließlich die abstrakte Lösungsmenge der als „Geradengleichung“ bezeichneten Funktionsgleichung. Dieser Umbruch wird üblicherweise dadurch begleitet, dass Aufgaben zunächst parallel graphisch und rechnerisch gelöst werden.

Das nächste Anwendungsfeld des Geradenbegriffs ist die analytische Geometrie. Die hier auftretenden Grundvorstellungen stellen im Wesentlichen Verallgemeinerungen der bisherigen Vorstellungen von der zweidimensionalen Koordinatenebene auf den dreidimensionalen Raum dar, wobei die Darstellung in Form einer skalaren Funktionsgleichung hin zur Darstellung als Vektorgleichung wechselt. Eine zentrale Neuerung ist dabei das Konzept des Vektors, welches an sich zahlreiche Schwierigkeiten mit sich bringt, wie (Kaufmann 2021) diskutiert. Im Zusammenhang mit Darstellungen der Geraden kann beispielsweise die Vorstellung entstehen, dass Vektoren geometrische Objekte sind und Teile von Geraden sein können. Die Punkt-Vektor-Vorstellung überträgt die anschauliche Bedeutung des Geradenbegriffs aus der Punkt-Steigungs-Vorstellung auf das dreidimensionale Koordinatensystem, wobei der definierende Punkt nun nicht mehr durch ein Koordinatenpaar, sondern einen Ortsvektor beschrieben wird und anstelle einer Steigung m gibt jetzt ein Richtungsvektor $\vec{u}$ die Orientierung der Geraden an. Auch hier tritt die Gerade wieder im Sinne eines ganzheitlichen Objekts auf. Im Gegensatz dazu bildet die Funktionale-Raum-Punktmengen-Vorstellung das räumliche Analogon zur Funktionale-Punktmengen-Vorstellung und greift auf die mittlerweile bekannte Auffassung von Geraden als aus einzelnen Punkten bestehend zurück. Die Grundidee beider Vorstellungen ist dieselbe: Ein Wert (x bzw. λ) wird in die Gleichung eingesetzt und man erhält ein Ergebnis zurück (y bzw. $\overrightarrow{X}$). Ein Unterschied ist hierbei, dass bei der skalaren Geradengleichung sowohl der eingesetzte Wert als auch das Ergebnis Teil des resultierenden Geradenpunkts (x, y) sind, bei der Vektorgleichung hingegen λ nicht im Sinne einer Koordinate im Geradenpunkt $\overrightarrow{X}$ auftaucht. Auch die Verschiebungs-Punktmengen-Vorstellung basiert auf der Auffassung der Geraden als Punktmenge und ähnelt damit sehr stark der Funktionale-Raum-Punktmengen-Vorstellung. Jedoch ist hier im Gegensatz zu allen anderen Vorstellungen, welche $\lambda \cdot \vec{u}$ nicht explizit interpretieren, die anschauliche Bedeutung der Skalierung von Vektoren als Streckung bzw. Stauchung grundlegend. Bei der Vektor-Lösungsmengen-Vorstellung wird, wie bereits bei der Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung, die von den bisherigen Grundvorstellungen aufgebaute Verknüpfung von mathematischer Gleichung und geometrischem Objekt wieder gelöst und ausschließlich die abstrakte Menge aller Lösungen der Vektorgleichung als „Gerade“ identifiziert.

3.3.3. Präzisierung des Bezugsrahmens

Im Folgenden werden die erforderlichen Grundkenntnisse diskutiert, die bei den Lernenden vorhanden sein müssen, damit die einzelnen Grundvorstellungen zum Geradenbegriff erfolgreich gebildet und angewandt werden können, zudem wird auf Zusammenhänge zu anderen Vorstellungen aus dem Bezugsrahmen eingegangen.

Die Streckenverlängerungs-Vorstellung setzt zunächst den Begriff der Strecke voraus. Im Hinblick auf die Vorstellungen von Lernenden zum Begriff der Strecke hält (Vollrath 1998, S. 217 f.) fest, dass der Begriff des Punktes als begrenzendes Element der Strecke sehr wichtig ist. Auch der Begriff der Länge sowie eine Vorstellung davon, was es bedeutet, eine Linie zu verlängern, sind erforderlich. Für die Unbegrenzte-Linien-Vorstellung spielt ebenfalls der Begriff des Punktes eine tragende Rolle, da das Fehlen von begrenzenden Punkten hier die definierende Eigenschaft der Geraden ist. Nach (Vollrath 1998, S. 217 f.) ist die Unbegrenztheit für viele Lernende sogar *der* zentrale Unterschied zwischen Strecke und Gerade. Da der Begriff der Strecke in dieser Vorstellung nicht explizit auftaucht, genügt es hier theoretisch zu wissen, was eine gerade Linie ist.

Mit Ausnahme der abstrakten Skalare-Lösungsmengen-Vorstellungen setzen alle in diesem Paragraph folgenden Vorstellungen die Kenntnis des zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems voraus, was insbesondere die Darstellung von Punkten im Koordinatensystem als Wertepaare (x, y) beinhaltet, zudem sind die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie der Begriff der Definitionsmenge und der linearen Funktion bekannt. Die Funktionale-Punktmengen-Vorstellung setzt zunächst den Begriff der funktionalen Abhängigkeit bzw. Funktion in der Auffassung voraus, dass man in Funktionsgleichungen Werte (üblicherweise für x) einsetzen kann und dadurch einen Funktionswert (üblicherweise y bzw. $f(x)$) erhält. Diese Auffassung entspricht der von (Vollrath 1989, S. 8 ff.) beschriebenen Zuordnungsvorstellung von Funktionen. Desweiteren besitzen die Lernenden die Vorstellung von Punkten als einerseits Elementen von Mengen und andererseits Stellen im Koordinatensystem. Die Achsenabschnitt-Steigungs-Vorstellung setzt die Kenntnis des Begriffs des Graphs voraus, zudem tritt die Vorstellung von Funktionen als ganzheitliche Objekte, wie sie von (Vollrath 1989, S. 15 ff.) beschrieben wird, in den Vordergrund. In dieser Vorstellung wird zudem der Begriff der Steigung und des y-Achsenabschnitts und damit verbunden des Schnittpunkts benötigt. Die Punkt-Steigungs-Vorstellung kommt prinzipiell ohne den Begriff des Achsenabschnitts aus, jedoch wird sie typischerweise anhand der Achsenabschnitt-Steigungs-Vorstellung im Sinne einer Verallgemeinerung auf andere definierende Punkte entwickelt. Zusätzlich wissen die Lernenden, was es bedeutet, wenn ein Punkt „auf dem Graphen liegt". Die Hypotenusenverlängerungs-Vorstellung setzt weitere geometrische Grundbegriffe voraus, da hier das Steigungsdreieck explizit betrachtet wird: Die Lernenden kennen die Begriffe rechtwinkliges Dreieck, Hypotenuse, Kathete, Seitenverhältnis und auch den Begriff des Steigungsdreiecks sowie dessen Zusammenhang mit der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. In diesem Zusammenhang spielt besonders die Vorstellung von Funktionen als Änderungen einer Größe in Abhängigkeit einer anderen Größe nach (Vollrath 1989, S. 12 ff.) eine Rolle. Die Lernenden wissen, was es bedeutet, eine Strecke geradlinig zu verlängern und kennen ggf. den Begriff des Achsenabschnitts. Die Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung hingegen benötigt neben den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ den Begriff der linearen Funktionsgleichung bzw. Geradengleichung und den Begriff der Lösungsmenge.

Im Kontext der analytischen Geometrie treten zusätzliche Grundkenntnisse auf. Diese umfassen den Begriff des Vektors, den Umgang mit Vektorgleichungen, die Addition von Vektoren sowie die Multiplikation von Vektoren und reellen Zahlen. Zudem wird nun der Umgang mit dem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem vorausgesetzt. Die Punkt-Vektor-Vorstellung setzt hinsichtlich des Richtungsvektors $\vec{u}$ eine Vorstellung von Vektoren voraus, die (Kaufmann 2021, S. 52 f.) als „Pfeilklassen" bezeichnet. Hier wird die von (Kaufmann 2021, S. 79 f.) diskutierte Unterscheidung zwischen „freien Vektoren", die prinzipiell in jedem Punkt ansetzbar sind und der Vorstellung von Pfeilklassen entsprechen, und „gebundenen Vektoren", was den grundsätzlich im Ursprung ansetzenden Ortsvektoren entspricht, deutlich. Im Gegensatz zum Richtungsvektor $\vec{u}$ muss der Stützvektor $\overrightarrow{A}$ nämlich als „gebundener" Ortsvektor aufgefasst werden, der vom Koordinatenursprung ausgeht. Die Funktionale-Raum-Punktmengen-Vorstellung benötigt die oben genannte Zuordnungsvorstellung von Funktionen, wobei die Lernenden in der Lage sein müssen, diese Idee auf eine Vektorgleichung zu übertragen. Der bekannte Begriff des Parameters wird zudem in die Variable einer Funktion „umgedeutet". Der Begriff des Punktes tritt auch hier in der Vorstellung als Element einer Menge auf. Für die Verschiebungs-Punktmengen-Vorstellung ist die Zuordnungsvorstellung nicht explizit erforderlich, der Parameter λ wird jedoch auch hier variiert. Für die dabei auftretende Skalierung des Richtungsvektors ist einerseits die angesprochene Vorstellung von Vektoren als Pfeilklassen von Bedeutung, welche die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar geometrisch als eine Verlängerung oder Verkürzung sowie ein negatives Vorzeichen als Orientierungsumkehr auffasst. (Kaufmann 2021, S. 53) Andererseits tritt der Richtungsvektor offensichtlich in der Rolle einer Verschiebung auf, wobei die Verschiebungs-Vorstellung nach (Kaufmann 2021, S. 55) bereits die Idee der Pfeilklasse enthält oder als äquivalent zu ihr bezeichnet werden kann. Auch hier wird der Parameter λ als variabel aufgefasst und die Vorstellung von Punkten als Elemente von Mengen muss bei den Lernenden vorhanden sein. Die Vektor-Lösungsmengen-Vorstellung benötigt primär den Begriff der Vektorgleichung und der Lösungsmenge und erfordert keine Grundkenntnisse hinsichtlich der anschaulichen Interpretation von Vektoren, Vektoraddition und Vektorskalierung.

3.4. Grundvorstellungen zum Begriff „Kreis"

3.4.1. Sachanalyse und empirische Ergebnisse

3.4.1.1. Mathematisches Konzept

Untersucht man die zugelassenen Schulbücher der Sekundarstufe des bayerischen LehrplanPLUS auf das Konzept des Kreises hin, so findet man in der 5. Jahrgangsstufe die folgenden Definitionen im Rahmen der Einführung in die Grundbegriffe der Geometrie:

*„Ein Kreis (genauer: die **Kreislinie k**) besteht aus allen Punkten P, die gleich weit vom **Mittelpunkt M** entfernt sind. Die Strecke [MP] nennt man **Radius** eines Kreises, ihre Länge r **Radiuslänge**. Schreibweise für einen Kreis:* $k(M; r = |\overline{MP}|)$

*Der **Durchmesser d** ist der Abstand zweier Punkte auf der Kreislinie, deren Verbindungsstrecke durch den Mittelpunkt verläuft. Es gilt:* $d = 2 \cdot r$*."*

(Eisentraut et al. 2017, S. 128)

Begleitet wird die Definition von einer einfachen Zeichnung der definierten Begriffe. In einer Vorbemerkung wird darauf hingewiesen, dass zum Zeichnen von Kreisen im Heft in der Regel der Zirkel verwendet wird und man dafür Mittelpunkt und dessen Abstand von der Kreislinie kennen muss. Im Randbereich wird zudem erklärt, dass man häufig kurz „Radius r" sagt, wenn die Radiuslänge gemeint ist, und $k(M; r)$ als „Kreis um M mit Radius r" gesprochen wird. Nachfolgend finden sich einige anleitende Skizzen zum Zeichnen eines Kreises mit dem Zirkel sowie Beispielaufgaben dazu.

*„Der **Kreis** ist die Menge aller Punkte, die gleich weit vom **Mittelpunkt M** entfernt sind. Dieser Abstand heißt **Radius r**.*

*Verlängerst du den Radius, bis diese Verlängerung den Kreis erneut schneidet, erhältst du den **Durchmesser d**. Er ist doppelt so groß wie der Radius."*

(Distel et al. 2016, S. 71)

Auch Distel et al. fügen eine Skizze bei und schicken ihrer Definition die Erklärung voraus, dass ein Kreis um einen Mittelpunkt mit dem Zirkel gezeichnet werden kann. Zudem wird im Randbereich darauf hingewiesen, dass der Kreis auch mit $k(M; r)$ bezeichnet wird. Im Anschluss finden sich auch hier zwei Beispielaufgaben, in denen Kreise gezeichnet werden sollen.

*„Alle Punkte eines **Kreises** haben von seinem **Mittelpunkt** den gleichen Abstand. Dieser Abstand heißt **Radius** des Kreises.*

Schreibweise: $k(M; r)$ *für den Kreis um M mit Radius r."*

(Frohmader et al. 2017, S. 81)

Frohmader et al. verdeutlichen ihre Definition ebenfalls durch eine Zeichnung der eingeführten Begriffe und stellen ihr den Arbeitsauftrag voran, in ein Koordinatensystem alle

Punkte mit ganzzahligen Koordinaten einzutragen, deren Abstand von einem gegebenen Punkt M gleich bzw. kleiner dem Abstand von M zu einem gegebenen Punkt P beträgt. Die Lernenden sollen dabei eine Vorgehensweise beschreiben, bei der nicht jeder Abstand einzeln bestimmt werden muss. Zudem wird vor der Definition die Bemerkung eingefügt, dass Räder und Rollen gleichmäßig rund — kreisrund — sein müssen und man die Kreisform daran erkennt, dass jeder Punkt auf dem Rand des Rads vom Mittelpunkt den gleichen Abstand hat. Im Randbereich wird darauf hingewiesen, dass Kreise mit dem Zirkel gezeichnet werden können und man nicht vergessen sollte, den Mittelpunkt zu markieren. Im Anschluss an die Definition wird die Schreibweise $P \in k(M; r)$ für einen Punkt P eingeführt, der auf dem Kreis um M mit Radius r liegt. Als Nächstes wird der Begriff der Tangente an einen Kreis definiert, bevor zwei Beispielaufgaben zum Zeichnen von Kreisen und Tangenten folgen.

Die betrachteten Schulbücher definieren den Kreis in leicht unterschiedlichen Formulierungen als Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand von einem gegeben Punkt, dem Mittelpunkt, aufweisen. Die zentralen Bestandteile dieser Definitionen sind somit der Begriff des Punktes, sowohl als Baustein der Kreislinie als auch in der Rolle des Mittelpunkts, der Begriff des Abstands zweier Punkte, sowie (explizit oder implizit verwendet) der Begriff der Menge. Eisentraut et al. spezifizieren das definierte Objekt zudem ausdrücklich als Kreislinie, vermutlich um der zweideutigen Verwendung des Begriffs in der Alltagssprache für sowohl die Kreisfläche als auch ihren Rand Rechnung zu tragen. Wie schon beim Begriff der Geraden werden auch die betrachteten Definitionen des Kreises ausnahmslos von veranschaulichenden Skizzen begleitet. Ergänzt werden die Definitionen jeweils durch die Festlegung der Begriffe Radius und Durchmesser.

3.4.1.2. Relevante Phänomene

a) Anwendungen

Die innermathematischen Anwendungen des Kreisbegriffs im Rahmen des LehrplanPLUS umfassen zunächst das Zeichnen von Kreisen im kartesischen Koordinatensystem mithilfe des Zirkels in der 5. Jahrgangsstufe. Dort werden im Rahmen der Einführung in die Grundbegriffe der Geometrie auch die Lagebeziehungen zwischen Kreis und Gerade sowie zwischen zwei Kreisen untersucht. Die Lernenden wenden ihr Verständnis der grundlegenden Eigenschaften der Kreislinie zudem auf Sachsituationen an und zeichnen mit dem Geodreieck Winkel bis zu einer Größe von 360°.

In der 6. Jahrgangsstufe werden im Kontext von Bruchteilen und Bruchzahlen Anteile unter anderem mit Kreisdiagrammen dargestellt. Derartige Diagramme spielen auch im Zusammenhang mit der Prozentrechnung eine tragende Rolle: Dort werden zur graphischen Darstellung von statistischen Daten mithilfe von beispielsweise Tabellenkalkulationsprogrammen Kreisdiagramme verwendet.

Die 7. Jahrgangsstufe ermöglicht die Betrachtung und Konstruktion achsen- und punktysymmetrischer Figuren mit Zirkel und Lineal. Der Einsatz des Zirkels entspricht dabei jeweils der Konstruktion eines Kreisbogens. Der Kreis tritt als Figur mit unendlich vielen verschiedenen Symmetrieachsen auf. (Eisentraut et al. 2019, S. 44) Die Lernenden übersetzen realitätsnahe Problemstellungen, bei denen Abstände eine Rolle spielen, unter anderem mithilfe ihres Wissens über die gemeinsame Eigenschaft aller Punkte eines Kreises. Zudem werden mithilfe dynamischer Geometriesoftware Begriffe wie Umkreis und Inkreis von Dreiecken sowie der Satz des Thales untersucht. Desweiteren werden Tangenten an Kreise konstruiert, die durch bestimmte Punkte außerhalb der Kreise verlaufen.

Die 8. Jahrgangsstufe widmet sich der Berechnung charakteristischer Größen von Kreisen und Zylindern. Dabei werden Formeln für den Umfang und Flächeninhalt von Kreisen besprochen und auf sowohl inner- als auch außermathematische Fragestellungen angewandt, zudem werden Näherungswerte für die Kreiszahl π bestimmt. Die Formel für den Flächeninhalt wird dabei als nicht-lineare Zuordnung interpretiert. Als Grundfläche von Kreiszylindern spielt der Begriff des Kreises unter anderem beim Skizzieren von Schrägbildern und Netzen gerader Kreiszylinder eine Rolle, wobei anhand der Netze die Formel für den Oberflächeninhalt gerader Kreiszylinder begründet wird. Die Formel zur Bestimmung des Volumens eines geraden Kreiszylinders wird ausgehend von der Betrachtung des Volumens gerader Prismen erklärt, indem der Kreiszylinder als Grenzfall eines Prismas betrachtet wird. Diese Näherung entspricht dem Übergang eines regelmäßigen Vielecks zu einem Kreis, indem die Anzahl der Ecken immer mehr erhöht wird. (Eisentraut et al. 2020, S. 161 f.) Die Formeln für Obeflächen- und Volumeninhalt dieser Körper werden zudem auch in Sachzusammenhängen verwendet.

In der 9. Jahrgangsstufe tritt der Kreis als Einheitskreis im Kontext der Trigonometrie auf. Anhand des Einheitskreises werden dabei die Sinus- und Kosinuswerte für Winkel zwischen 0° und 360° veranschaulicht. Darauf aufbauend werden in der 10. Jahrgangsstufe die Sinus- und Kosinusfunktion eingeführt, wobei zunächst der Zusammenhang zwischen Bogen- und Gradmaß am Einheitskreis veranschaulicht wird. Dadurch können nun auch Sinus- und Kosinuswerte für Winkelgrößen zwischen 0 und 2π am Einheitskreis dargestellt werden, wobei nachvollzogen wird, dass sich Winkelgrößen außerhalb dieses Bereichs auf solche zwischen 0 und 2π zurückführen lassen. Der Verlauf der Graphen von Sinus- und Kosinusfunktion wird mithilfe des Einheitskreises abgeleitet, wobei insbesondere ihre Periodizität und der Zusammenhang beider Funktionen begründet wird. Ein weiterer Anwendungskontext des Kreisbegriffs in der 10. Jahrgangstufe ist die Fortführung der Raumgeometrie. Dabei werden gerade Kreiszylinder, gerade Kreiskegel und Kugeln als Rotationskörper diskutiert, zudem wird die Formel zur Bestimmung des Oberflächeninhalts gerader Kreiskegel anhand von Skizzen begründet. Die Formel zur Berechnung der Volumina von Kreiskegeln wird erklärt, indem diese als Grenzfälle von Pyramiden betrachtet werden. Diese Überlegung entspricht erneut der Betrachtung von Kreisen als Grenzfall von regelmäßigen Vielecken für sehr viele Eckpunkte. (Biburger et al. 2022, S. 138) Es werden außerdem die Volumina schiefer Körper anhand des Satzes von Cavalieri diskutiert. Darüberhinaus werden die Formeln zur Bestimmung des Oberflächeninhalts und des Volumens von Kugeln besprochen, wobei auch die Schnittflächen von Ebenen mit Kugeln als Kreise bzw. Kreisflächen identifiziert werden. (Biburger et al. 2022, S. 144) Die Formeln für Volumina und Oberflächen der genannten Körper werden zudem auch in Sachzusammenhängen flexibel angewandt.

Die Besprechung der komplexen Zahlen im Rahmen des Vertiefungskurses in der 12. Jahrgangsstufe ermöglicht die Berechnung der Lösungen von Kreisteilungsgleichungen der Form $z^n = 1$ und die Interpretation der gewonnenen n-ten Einheitswurzeln am Einheitskreis. In der 13. Jahrgangsstufe werden schließlich die Gleichungen von Kugeln in Koordinatenform aufgestellt und interpretiert sowie mithilfe von Abstandsberechnungen die gegenseitige Lage von Kugeln und Geraden bzw. Ebenen bestimmt. Auch hier können die geometrischen Objekte in Sachzusammenhängen auftreten.

Fächerübergreifende Anwendungen des Kreisbegriffs sind beispielsweise die Betrachtung von auf Kreisbahnen verlaufenden Bewegungen in der Physik, etwa im Kontext der Zentripetalkraft bzw. Zentrifugalkraft, und die Diskussion von mechanischen oder elektromagnetischen Kreiswellen. Weitere Möglichkeiten bieten astronomische Themen wie der kreisförmige Erdschatten auf der Oberfläche des Mondes oder die Geschichte der ellipsenförmigen Planetenbahnen, welche ursprünglich als kreisförmig angenommen wurden. In der Physik bzw. Chemie bewegen sich die negativ geladenen Elektronen im Rahmen des Bohrschen Atommodells auf Kreisbahnen um den positiv geladenen Atomkern. Im Kunstunterricht können Kreise einerseits als geometrische Grundform für gestalterische Anwendungen im Allgemeinen oder anhand konkreter Werke, z. B. Bauhaus, thematisiert und auf ihre psychologische Wirkung auf den Betrachter, z. B. Harmonie, hin untersucht werden. Auch die Analyse oder Erstellung von Mandalas kann ein Weg sein, sich dem Konzept des Kreises und der damit verbundenen Symmetrie zu nähern. In der Geographie können die Längen- und Breitenkreise inkl. Äquator hinsichtlich ihrer Form besprochen werden und die Biologie stellt zyklische Vorgänge wie bestimmte Stoffwechselprozesse oder Lebenszyklen verschiedener Lebewesen als Kreise dar. Im Musikunterricht kann der Quintenzirkel thematisiert werden, der eine modellhafte kreisförmige Anordnung von zwölf Quinten darstellt, zudem besitzen beispielsweise Trommeln in der Regel eine kreisrunde Form. Auch im Sportunterricht treten Kreise auf, beispielsweise bei den Markierungen von Spielfeldern. So besitzt etwa ein Fußballfeld üblicherweise einen Mittelkreis und auf jeder Hälfte des Spielfelds einen das Tor umgebenden „Strafraum“, der durch eine rechteckige Linie mit angefügtem Kreisbogen markiert wird. Auch bestimmte Gruppenbewegungen finden oft auf Kreisbahnen statt, z. B. beim Aufwärmen für den Sportunterricht. Im Religions- bzw. Ethikunterricht können religiös-philosophische Symbole diskutiert werden. Hier treten Kreise häufig auf, um die Vollkommenheit oder Abgeschlossenheit von etwas zu symbolisieren. Beispiele sind das daoistische Yin-Yang-Symbol oder die in den Darstellungen vieler Religionen vorkommenden Aureolen (kreisförmige Heiligenscheine). Da sich der Begriff des Kreises, wie auch Punkt und Gerade bzw. gerade, in Form verschiedener Ausdrücke und Redewendungen (z. B. „sich im Kreis drehen“) in der Alltagssprache wiederfindet, bietet sich auch eine Untersuchung deren Bedeutungen im Deutsch- oder Englischunterricht an.

Neben den genannten Anwendungen werden Lernende im Alltag in vielen weiteren Kontexten mit Kreisen konfrontiert. So stellen etwa im Straßenverkehr die Reifen und Lenkräder von Fahrzeugen, der Straßenverlauf in Kreisverkehren sowie viele Verkehrsschilder Kreise dar. Auch die Ziffernblätter von analogen Uhren sind üblicherweise kreisförmig, ebenso wie die Membranen von Lautsprechern, Knöpfe von Kleidungsstücken, die Bedientasten vieler Geräte, CDs/DVDs/Blu-rays, Münzen, Karussells auf Spielplätzen oder Jahrmärkten, Teller, die Öffnungen von Tassen, Flaschen, Vasen oder Waschmaschinen. Lebensmittel wie Würste, Gurken oder Tomaten besitzen kreisförmige Querschnitte und Möbelstücke wie Tische und Hocker besitzen ebenfalls oft Kreisscheiben als Deckfläche. Auch viele Logos basieren auf Kreisen: Die Olympischen Ringe, Audi, Volkswagen etc. In der Alltagssprache wird häufig nicht zwischen der Kreislinie und der Kreisfläche differenziert — abgesehen davon, dass das Wort "Kreis" außerdem verwendet wird, um allgemein umgrenzte Bereiche sowie Gruppen von Personen oder zusammenhängenden Sachverhalten zu bezeichnen, wird es jedoch im Wesentlichen im geometrischen Sinne verwendet: „Gleichmäßig runde, in sich geschlossene Linie, deren Punkte alle den gleichen Abstand vom Mittelpunkt haben". (Duden 2024, Kreis)

b) Historische Begriffsgenese

Eine kurze Vorbemerkung zur Nomenklatur: Entgegen der modernen Begriffsdefinition, mit „Kreis" die Kreislinie zu bezeichnen, wurde damit in historischen Texten — wie auch heute noch in der Umgangssprache — oft die Kreisfläche bzw. -scheibe gemeint. Bei der Arbeit mit alten Quellen müssen die verwendeten Begriffe aus diesem Grund kritisch analysiert und dem Kontext entsprechend gedeutet werden. Bei den Ausführungen in dieser Arbeit wurde dabei versucht, Zweideutigkeiten soweit möglich zu vermeiden bzw. die intendierte Bedeutung kenntlich zu machen.

Der Kreis gehört neben Punkt und Linie zu den ältesten Elementen der Geometrie (Scriba & Schreiber 2010, S. 32) Wußing beschreibt, wie Menschen der Frühzeit mit Problemen in Berührung kamen, die geometrieartige Grundvorstellungen erforderten. (Wußing 2008, S. 12) Nach Scriba & Schreiber finden sich in der Natur zahlreiche Formen wie etwa die Querschnitte von Baumstämmen, welche dem Betrachter die Idee des Kreises suggerieren. Als Ornamente verwendete und für Kulturgemeinschaften charakteristische geometrische Muster finden sich bereits vor vielen Tausend Jahren, beispielsweise wurden in der kretischen Kultur kongruente Kreise nach einem fest vorgegebenen Schema angeordnet. Neben den ästhetischen Verwendungen wurden erste geometrische Überlegungen unter anderem durch Bau- und Vermessungstätigkeiten angestoßen, wobei alle vorgriechischen Kulturen auf unmittelbar einsichtige Zusammenhänge zurückgriffen, z. B. dass Kreise durch ihren Durchmesser halbiert werden. (Scriba & Schreiber 2010, S. 6 f.) Der Kreis findet sich dabei in zahlreichen Bauvorhaben wieder, etwa im Grundriss von Kreisgrabenanlagen, die in Mitteleuropa um 5000 v. Chr. als Sonnenobservatorien errichtet wurden und neben kultischen Zwecken unter anderem Bauern als Hilfsmittel zur Bestimmung des Jahresverlaufs und der optimalen Zeitpunkte für Aussaat und Ernte dienten. Um 3000 v. Chr. entstand in Südengland auch das berühmte Stonehenge Denkmal, das ebenfalls als Sonnenobservatorium und Kultstätte verwendet wurde. (Scriba & Schreiber 2010, S. 8 f) Etwa zur gleichen Zeit entwickelte sich im Bereich des heutigen Pakistan mit der Induszivilisation eine Hochkultur, die nach Wußing durchaus mit der ägyptischen und babylonischen verglichen werden kann. Diese Kultur kannte geometrische Grundfiguren wie den Kreis und wusste diesen zu halbieren und zu vierteln sowie konzentrische Kreise zu konstruieren, wie man verzierten Vasen, Reliefs u. Ä. entnehmen kann. (Wußing 2008, S. 85 f.) Auch in der Sprache der Jägervölker der Ojibwa und Inuit, die vor ca. 40.000 bzw. 6000 Jahren aus Asien in nördliche Gebiete des heutigen Kanadas einwanderten, finden sich geometrieartige Konzepte: So gibt es bei den Ojibwa durch prototypische Elemente fixierte Kategorien, beispielsweise stellt der Kreis einen solchen Prototypen für eine Kategorie dar, in welche in zwei oder drei Dimensionen mehr oder weniger runde Objekte fallen, z. B. der Querschnitt eines Baumes, Eier oder Kartoffeln. Darüberhinaus basieren gemalte oder in Rinde geritzte Darstellungen der Erde auf kreisähnlichen Formen. Auch in der Sprache der Inuit finden sich ähnliche Gestaltkategorien, wobei die entsprechenden Begriffe durch Anhängen von Suffixen modifiziert werden können, was eine differenziertere Beschreibung der betrachteten Objekte ermöglicht. Beispielsweise kann die Kategorie „angmaluqtuq“ (rund im Allgemeinen) in „angmalu-riq-tuq“ (vollkommen rund) oder „angmalur-lak-tuq“ (einigermaßen rund) unterteilt werden. Die große Variationsbreite der Kategorien beider Sprachen entspricht dabei den typischen, in der Natur auftretenden Formen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 184 ff.)

Um 2000 v. Chr. finden sich nach Scriba & Schreiber in ägyptischen Papyri Grund- und Seitenrisse geometrischer Körper sowie Formeln zur Berechnung verschiedener Größen. Der Flächeninhalt eines Kreises wird darin mithilfe einer interessanten Vorschrift berechnet: „man ziehe vom Durchmesser 1/9 seiner Länge ab und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst […]“. Die erstaunlich gute Näherungsformel für einen gegebenen Durchmesser d lautet also $F_{Kreis} = (\frac{8}{9}d)^2$, wobei das Vorgehen, wie für ähnliche Verfahren üblich, unbegründet bleibt. Das Papyrus enthält jedoch die Zeichnung eines Quadrats mit Seitenlänge 9, aus dem durch Abschneiden der Ecken ein Achteck erzeugt wird, welches als Nährung des Kreises gedeutet werden kann. Die Näherungsformel wurde dabei u. a. bei der Berechnung von Volumina zur Bestimmung des Fassungsvermögens zylinderförmiger Gefäße verwendet. (Scriba & Schreiber 2010, S. 12 ff.)

Auch in der babylonischen Mathematik, die sich etwa zur selben Zeit zu entwickeln begann, wurde nach Scriba & Schreiber der Flächeninhalt von Kreisen berechnet. Das Verfahren der Babylonier verwendete dabei einen völlig anderen Ansatz als das ägyptische: „man solle ein Zwölftel des Quadrates des Umfanges nehmen […]“ Da als Kreisumfang u lediglich grob der dreifache Durchmesser d genommen wurde, ergibt sich also insgesamt $F_{Kreis} = \frac{u^2}{12} = \frac{3}{4}d^2$ und damit eine ähnliche Näherungsformel wie bei den Ägyptern. Die Verwendung des Umfangs kann aus heutiger Sicht als seltsamer Umweg bezeichnet werden, da die Verwendung des Durchmessers oder Radius als Ausgangspunkt nahezuliegen scheint. Die Verwendung des dreifachen Durchmessers bzw. sechsfachen Radius als Umfang $u = 3d = 6r$ suggeriert die Annäherung der Kreislinie durch ein einbeschriebenes Sechseck (welches aufgrund der Winkelsummen aus sechs gleichseitigen Dreiecken mit Seitenlänge r zusammengesetzt ist), weshalb auch die Näherung der Kreisfläche durch die Fläche des Sechsecks einen plausiblen Erklärungsansatz zum Ursprung der Formel darstellt. Die altbabylonischen Texte behandeln außerdem durch Sehnen abgeschnittene Kreissegmente, was als Beginn der Sehnengeometrie bezeichnet werden kann. Hinsichtlich geometrischen Körpern wurden auch von den Babyloniern die Volumina von Zylindern mithilfe einer der Näherungsformeln für die Kreisfläche berechnet. (Scriba & Schreiber 2010,

S. 18 ff.) Wußing hebt zudem die Verwendung der Näherung $\pi \approx 3$ bei der Berechnung von Kreisumfang und -fläche sowie verschiedenen Volumina als wesentlich hervor. (Wußing 2008, S. 142)

Ab ca. 600 v. Chr. finden sich nach Scriba & Schreiber bei den griechischen Naturphilosophen Versuche, die damals bekannte Welt darzustellen. Das erste Erdbild wird dabei Anaximandros zugeschrieben. Auch Heketaios von Milet entwarf eine Weltkarte und stellte die Erde dabei als Kreisscheibe dar. (Scriba & Schreiber 2010, S. 29) Etwa zur selben Zeit beschäftigt sich Thales von Milet mit geometrischen Objekten und trifft verschiedene Aussagen über deren Eigenschaften. Er formuliert dabei u. a. die heute als „Satz des Thales" bekannte Aussage „Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter." Auch die Erkenntnis, dass der Durchmesser den Kreis halbiert, wird ihm als Mathematiker zugesprochen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 31 f.) Wie oben erwähnt, wurde diese Tatsache jedoch bereits in vorgriechischen Kulturen verwendet.

Bei Platon findet sich um 400 v. Chr. der Gedanke, Rundheit anhand von gleich weit von der Mitte entfernter Extrema zu beschreiben. (Heath 1908, S. 184) Interessant erscheinen in diesem Zusammenhang die Ausführungen Wußings über Platons Desinteresse und Verachtung an Leistungen der Mathematik für praktische Zwecke, was dessen Verbundenheit mit der Aristokratie entspricht. In Platons Denkweise sollten mechanische Hilfsvorstellungen und Geräte prinzipiell aus der Mathematik verbannt werden, da sie, in den Worten Plutarchs, das Gute an der Geometrie zerstören, indem diese sich wieder zum Sinnlichen zurückwendet, statt sich nach oben zu erheben und die ewigen, unkörperlichen Bilder zu erfassen, bei denen verweilend Gott ewig Gott ist. Weil Zirkel und Lineal jedoch die Vorstellung der beiden vollkommenen „göttlichen" Kurven — Kreis und Gerade — liefern, waren diese als Konstruktionsmittel in der platonischen Schule trotzdem zugelassen. Diese dogmatische Einschränkung auf Zirkel und Lineal, die auch in großen Teilen der griechisch-hellenistischen Mathematik galt, hatte zudem einen starken Einfluss auf die griechische Astronomie. Für Platon waren die Planetenbahnen von göttlicher Vollkommenheit, die Erde der Mittelpunkt, die Sonne ebenfalls ein Planet. Aus dieser Annahme leitete er die Forderung nach einem Weltsystem ab, welches nur Kreisbahnen enthält. Das Dogma der kreisförmigen Planetenbahnen (inklusive möglicher Abweichungen aufgrund des im Gegensatz zu „gedachten" Bewegungen unvollkommenen Charakters real existierender Planeten) beschäftigte Astronomen über zwei Jahrtausende, bevor schließlich Johannes Kepler herausfand, dass die Planetenbahnen ellipsenförmig sind. (Wußing 2008, S. 181 f.) Die vorausgegangene Annahme von Kreisbahnen war dabei nach Wußing nicht auf das damals dominante geozentrische Weltbild beschränkt. Während der Antike wurde auch die Vorstellung eines heliozentrischen Sonnensystems diskutiert, wobei deren Hauptvertreter Aristarch von Samos ebenfalls von einer Kreisbahn ausgeht, auf der sich die Erde um die Sonne bewegt. (Wußing 2008, S. 200 f.)

Aristoteles beobachtet um 350 v. Chr., dass die „kreisförmige ebene Figur" von genau *einer* Linie begrenzt wird. Desweiteren meint er einen Kreis, wenn er von der Ebene spricht, die sich von der Mitte in alle Richtungen gleichmäßig ausdehnt. Er stellt dem Kreis zudem jede andere Figur gegenüber, deren Linien nicht gleich bzw. gleichmäßig bezüglich der Mitte liegen, z. B. eine eiförmige Figur. (Heath 1908, S. 184)

Euklid legt um 300 v. Chr. in seinen Elementen in Definition 15 fest, was für ihn ein Kreis ist. Thaer übersetzt wie folgt: „Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang (Bogen) heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind;“ In Definition 16 fährt Euklid fort: „Und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.“ (Euklid, S. 1) Bezüglich der Begriffsverwendung wird hier also in erster Linie die Kreisfläche als „Kreis“ bezeichnet (Euklid, S. 418), zudem wird mit „Umfang“ die Kreislinie, und nicht wie heute üblich deren Länge, gemeint. Die von Thaer in eckige Klammern gesetzten Ausdrücke werden dabei laut Heath von zahlreichen anderen Übersetzern ausgelassen, da sie nicht in allen alten Quellen vorkommen. Diese Ergänzung wurden zweifelsfrei mit dem Blick auf das in den nachfolgenden Definitionen 17 und 18 vorkommende Wort für „Umfang“ gerichtet eingefügt, welches nicht erklärt wird. Für Heath war jedoch keine Erklärung nötig, da das Wort zwar nicht bei Platon vorkommt, aber mehrfach von Aristoteles verwendet wurde. Einerseits mit der allgemeinen Bedeutung „Kontur“ ohne mathematischen Bezug, andererseits im mathematischen Sinne, bezogen auf den Regenbogen und die Kreislinie sowie den Bogen eines Kreises. Da das Wort universell verstanden wurde und an sich kein mathematisches Konzept beschreibt, war es völlig legitim von Euklid, das Wort in den beiden Definitionen und an anderer Stelle zu verwenden, ohne es zu definieren. (Heath 1908, S. 184)

Mit Blick auf Platon und Aristoteles enthält Euklids Kreisdefinition für Heath insgesamt nichts substanziell Neues, zudem handelt es sich um eine Definition ohne genetischen Charakter, da sie nichts über die Existenz oder Nichtexistenz des definierten Objekts oder dessen Konstruktionsmethode aussagt. Sie ist vielmehr als provisorische Definition zu verstehen, die lediglich erklärt, was mit dem Wort „Kreis“ gemeint ist, und erst verwendet werden kann, wenn die Existenz von Kreisen bewiesen oder angenommen wird. Üblicherweise wird die Existenz in einer solchen Situation durch die tatsächliche Konstruktion des Objekts bewiesen, Euklid *postuliert* die Konstruierbarkeit und damit die Existenz des Kreises jedoch in seinem dritten Postulat. (Heath 1908, S. 184) Thaer übersetzt dieses mit „Gefordert soll sein: […] Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,“ (Euklid, S. 2) Weitere Eigenschaften, die laut Thaer zu fordern oder beweisen wären, werden einfach als vorhanden angenommen, etwa dass die Kreislinie geschlossen ist und den bei der Konstruktion verwendeten festen Punkt umschließt. (Euklid, S. 418)

Eine genetische Definition könnte laut Heath aussagen, dass ein Kreis (im Sinne einer Kreisfläche) diejenige Figur ist, die von einer geraden Linie beschrieben wird, welche sich innerhalb einer Ebene so lange um eines ihrer Extrema als festen Punkt bewegt, bis sie wieder bei ihrer Ausgangsposition angekommen ist. Tatsächlich behauptet der Euklid-Kommentator Simplicius, dass dessen Kreisdefinition mit der Intention formuliert wurde, die Konstruktion des Kreises durch die Umdrehung einer geraden Linie um eines ihrer Enden als Mittelpunkt aufzuzeigen. An-Nairizi deutet dies in seinem Kommentar als Erklärung dafür, dass einerseits der Kreis als ebene Figur definiert wird, d. h. die gesamte von der Kreislinie begrenzte Fläche und nicht nur die Kreislinie selbst, und andererseits, dass der Begriff „Umfang“ (gemeint: Kreislinie) nicht erwähnt wird, da dieser bei der intendierten Konstruktionsweise nicht separat als Linie gezeichnet wird. (Heath 1908, S. 184) Dieses Vorgehen entspricht einer gespannten Schnur, die mit konstanter Länge um einen festen

Punkt bewegt wird. Die Kreisfläche entsteht also als Trajektorie der gesamten Schnur, nicht nur der des äußeren Endes. Auch für Thaer suggeriert Euklids Definition die Konstruktion des Kreises — da die definierende Eigenschaft auch der Konstruktion mit dem Zirkel zugrunde liegt, zielt die Definition seiner Meinung nach allerdings auf den Zirkel als Konstruktionswerkzeug ab, wenn auch ohne Heranziehung der Bewegung. (Euklid, S. 418) Im Hinblick auf den Zirkel beobachtet Simplicius nach Heath, dass der Abstand zwischen den Enden seiner Schenkel einer gerade Linie vom Mittelpunkt zum Umfang entspricht. Da die Auffassung des Kreises als ebene Figur wie erwähnt bereits bei Aristoteles zu finden ist, ist es legitim anzunehmen, dass Euklid ohne eigenen Beitrag lediglich die damals übliche Ansicht übernommen hat. Euklid unterscheidet hinsichtlich seiner Wortwahl im Allgemeinen sorgfältig zwischen dem „Kreis“ (im Sinne einer Kreisfläche) und dem „Umfang bzw. Bogen eines Kreises“ (im Sinne der Kreislinie), an einigen Stellen meint er mit Kreis allerdings trotzdem die Kreislinie. (Heath 1908, S. 184 f.) Ein Beispiel hierfür ist Buch III, § 10: „Ein Kreis kann einen Kreis nicht in mehr als zwei Punkten schneiden.“ (Euklid, S. 53)

Euklid schränkt in seiner Definition die potenziell als Mittelpunkt zu bezeichnenden Punkte auf die „innerhalb der Figur gelegenen“ Punkte ein. Sowohl Heron als auch Proklos und Simplicius weisen laut Heath darauf hin, dass der Mittelpunkt nicht der einzige Punkt ist, der von allen Punkten der Kreislinie äquidistant liegt. Er ist jedoch der einzige Punkt *in der Ebene der Kreislinie*, der diese Bedingung erfüllt. Jeder Punkt außerhalb der Ebene mit dieser Eigenschaft wird als „Pol“ bezeichnet. Bei Proklos findet sich dazu die Anschauung, dass das obere Ende eines geraden Stocks, der vom Mittelpunkt ausgehend senkrecht auf die Kreisebene verläuft, ein Pol ist. Das durch den Mittelpunkt verlaufende Lot beschreibt dabei die Orte aller möglichen Pole. (Heath 1908, S. 185) Hinsichtlich der Nomenklatur verwendet Euklid drei Buchstaben (für drei auf dem Kreis liegende Punkte), um diese zu benennen. Dies verdeutlicht den Aspekt, dass geometrische Objekte nach Scriba & Schreiber in diesem Sinne (im Gegensatz zu Zahlen) an einen Ort gebunden sind. Ohne zugehöriges Bild beschreibt der Name eines geometrischen Objekts für sich alleine dieses noch nicht vollständig. Die Namen von geometrischen Objekten nehmen somit etwa im Kontext von Algorithmen den Charakter von Variablen an. (Scriba & Schreiber 2010, S. 54)

Eine Erklärung für die heutige Stellung des Kreises als Grundfigur der Geometrie und des Geometrieunterrichts findet sich in den damals verfügbaren Hilfsmitteln: Mit Blick auf den Einfluss Euklids auf die heutige Mathematik heben Scriba & Schreiber den Aspekt hervor, dass die Elemente lediglich mit Zirkel und Lineal ausführbare Konstruktionen behandeln. Grund dafür ist, dass bei der ersten Systematisierung der Geometrie durch die Griechen die verwendeten Konstruktionsmittel ausschlaggebend waren — auch heute noch wird die Elementargeometrie deshalb durch diejenigen Figuren bestimmt, die mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind. Die griechische Geometrie stieß dabei auf Probleme, die nicht durch diese beiden Instrumente bzw. ihre theoretischen Entsprechungen lösbar sind, z. B. die Quadratur des Kreises. (Scriba & Schreiber 2010, S. 40) Ein Überblick über verschiedene Anstrengungen zur Lösung dieses Problems findet sich bei (Scriba & Schreiber 2010) und (Wußing 2008). Wußing betont im Hinblick auf die Geschichte des Problems, dass die Unlösbarkeit der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal erst im 19. Jahrhundert definitiv bewiesen werden konnte. (Wußing 2010, S. 172)

Um 250 v. Chr. beweist Archimedes den Zusammenhang $F = \frac{1}{2} \cdot u \cdot r$ für einen Kreis mit Flächeninhalt F, Umfang u und Radius r und damit die Tatsache, dass die beiden bei der Arbeit mit Kreisen auftretenden Proportionalitätsfaktoren identisch sind, nämlich die festen Verhältnisse zwischen einerseits den beiden Längen Durchmesser und Umfang und andererseits den Flächen Radiusquadrat und Kreisfläche. (Scriba & Schreiber 2010, S. 18 f.) In seinem nur teilweise erhaltenen Werk zur Kreisrechnung findet sich zudem die Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$. (Wußing 2008, S. 198) Für Wußing hatte Archimedes durch das Einbeschreiben eines regelmäßigen 96-Ecks einen guten Näherungswert für das Verhältnis von Kreisumfang zum Durchmesser gefunden. (Wußing 2008, S. 296) Der Legende nach soll Archimedes später beim Zeichnen einer geometrischen Figur von einem römischen Soldaten erschlagen worden sein, als er mit den Worten „Störe meine Kreise nicht!“ Widerstand gegen diesen leistete. (Scriba & Schreiber 2010, S. 67) Um 180 v. Chr. findet sich bei Zenodoros die Aussage, dass der Kreis gegenüber allen (polygonen) Figuren mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt besitzt. (Wußing 2008, S. 188 f.) Auch Heron von Alexandria beschäftigt sich um 60 n. Chr. mit den Eigenschaften von Kreisen und formuliert u. a. eine Vorschrift für die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreises mit Durchmesser d: $F = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{14}d^2$ (Scriba & Schreiber 2010, S. 209)

Wußing beschreibt, dass die Berechnung der Kreiszahl π in China eine lange Tradition hat. Zwischen 200 v. Chr. und 300 n. Chr. entsteht dort mit den „Neun Kapiteln“ eine einflussreiche Sammlung von Aufgaben mit Instruktionen zur praktischen Berechnung unterschiedlicher mathematischer Problemstellungen. Darin wird im Kontext der Vermessung von Feldern bzw. der damit verbundenen Berechnung der Flächeninhalte von Kreisen, Kreisringen und Kreissegmenten $\pi \approx 3$ angenähert. (Wußing 2008, S. 55 ff.) Im zweiten Jahrhundert n. Chr. findet sich nach Scriba & Schreiber in der chinesischen Mathematik zudem die Behauptung, dass sich das Quadrat des Kreisumfangs zum Umfangsquadrat des dem Kreis umbeschriebenen Quadrats wie 5:8 verhält, also $\frac{(2\pi r)^2}{(8r)^2} = \frac{5}{8}$, woraus die Näherung $\pi \approx \sqrt{10} = 3{,}162...$ folgt. Auch Ptolemaios verwendet um 150 n. Chr. die Näherung $\pi \approx 3{,}14166$ und der chinesische Mathematiker Liu Hui berechnet im dritten Jahrhundert den Kreisumfang ausgehend vom einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl auf 192 und bestimmt auf diese Weise $\pi \approx \frac{157}{50} = 3{,}14$. Mithilfe der Exhaustionsmethode approximierte er zudem die Kreisfläche und verbessert seine Näherung damit zu $\pi \approx 3{,}14159$. Etwa zwei Jahrhunderte später konnte die Näherung durch Zu Chongzhi sogar zu $\pi \approx \frac{355}{113}$ und den Schranken $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ präzisiert werden. (Scriba & Schriber 2010, S. 116)

In der indischen Geometrie findet sich nach Scriba & Schreiber um 500 n. Chr. die folgende Vorschrift für die Berechnung der Kreisfläche: „Die Hälfte des Umfangs mit dem halben Durchmesser multipliziert, ist der Flächeninhalt des Kreises.“ bzw. $F_{Kreis} = \frac{u}{2} \cdot \frac{d}{2}$. Zudem wird eine gute Näherung für die Kreiszahl π gegeben: „Einhundertvier mal acht, dazu zweiundsechzigtausend, ist näherungsweise der Kreisumfang für den Durchmesser eines Zehntausenderpaares.“ bzw. $\pi \approx \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$. Dieser Wert kann rekonstruiert werden, indem man vom regelmäßigen Sechseck ausgeht und durch wiederholte Halbierung der Sehnen ein 384-Eck erzeugt. (Scriba & Schreiber 2010, S. 154 f.) Im 7. Jahrhundert findet sich in der indischen Literatur auch der bereits in China gefundene Näherungswert $\pi \approx \sqrt{10}$. (Scriba & Schreiber 2010, S. 116) Nachzuweisen, inwieweit Euklids Elemente den indischen Mathematikern dabei bekannt waren und diese in ihrem Denken beeinflusst haben, wird als schwieriges historisches Problem bezeichnet, da einzelne Definitionen oder Sätze zumindest ab dem 6. Jahrhundert bekannt gewesen zu sein scheinen, aber man erst ab dem 14. Jahrhundert mit Sicherheit davon ausgehen kann, dass die Elemente in Indien zugänglich waren. (Scriba & Schreiber 2010, S. 157)

Die islamische Welt entwickelte ab dem 8. Jahrhundert eine eigene mathematische Kultur, wobei dabei Übersetzungen u. a. griechischer und indischer Werke verfügbar waren — beispielsweise die Mathematik Euklids wurde in den folgenden Jahrhunderten selbständig weiterentwickelt. (Scriba & Schreiber 2010, S. 180) Die Kreisberechnung gehörte bei den Muslimen dabei wie in allen Kulturkreisen zu einem zentralen Problemfeld. (Wußing 2008, S. 255) Grundlage für die Beschäftigung mit der Figur des Kreises waren nach Scriba & Schreiber etwa die in den Elementen vorkommenden Konstruktionen und der Versuch, diese auf zusätzliche Fragestellungen anzuwenden. Auch eine genauere Bestimmung der Kreiszahl π wurde angestrebt, wobei die griechischen und indischen Wurzeln der islamischen Mathematik deutlich erkennbar sind. Für die Berechnung des Umfangs u eines Kreises mit Durchmesser d finden sich beispielsweise bei al-Chorezmi die folgenden Vorschriften: $u = d \cdot (3 + \frac{1}{7})$, $u = d \cdot \sqrt{10}$, $u = d \cdot \frac{62832}{20000}$. Die erste geht dabei auf Archimedes zurück, bei den beiden anderen erscheint eine Entnahme aus indischen Schriften möglich. Bezüglich der dritten Vorschrift wird zudem die Astronomie als Verwendungskontext angegeben. Auch für den Flächeninhalt eines Kreises findet sich eine Vorschrift, die große Ähnlichkeit zu dem bereits von Heron gefundenen Zusammenhang aufweist: $F_{Kreis} = d^2 - \frac{1}{7}d^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7}d^2$. (Scriba & Schreiber 2010, S. 165) Eine besondere Leistung der arabischen Mathematik stellt die sehr genaue Berechnung der Kreiszahl π im 14. Jahrhundert durch al-Kaschi dar, bei welcher der Umfang eines Kreises mit einem Durchmesser von 600.000 Erddurchmessern auf eine Haaresbreite genau bestimmt werden sollte. Wie bereits den Berechnungen in Ägypten, Babylon, China und Indien lag auch den Überlegungen al-Kaschis die Näherung des Kreises durch ein regelmäßiges n-Eck zugrunde, jedoch rechnete er mit ca. 800 Millionen Ecken und erreichte dadurch eine Genauigkeit von 17 Dezimalstellen. Erst ab dem 16. Jahrhundert konnte diese Präzision durch die Verwendung von noch mehr Ecken durch u. a. Ludolph van Ceulen auf bis zu 32 Dezimalen gesteigert werden. (Scriba & Schreiber 2010, S. 172 f.)

Ein interessanter Ansatz zur Bestimmung der Kreisfläche findet sich 1615 bei Johannes Kepler. Auch wenn diese Methode aus heutiger Sicht eine unzureichende mathematische Strenge aufweist, so ist sie als Beispiel für den von Kepler eingeleiteten neuen Abschnitt der Infinitesimalrechnung doch bedeutend. (Wußing 2008, S. 439) In seiner Schrift „Neue

Stereometrie der Fässer“ wird der Kreis, wie bereits im Zuge der historischen Begriffsentwicklung des Punktbegriffs erwähnt, als aus unendlich vielen unendlich kleinen, radialsymmetrisch angeordneten Dreiecken zusammengesetzt angenommen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 305) Dieser Ansatz entspricht also prinzipiell dem Grenzwert $n \to \infty$ der historisch häufig verwendeten Annäherung des Kreises durch ein einbeschriebenes reguläres n-Eck, für den die dicht am Kreis liegenden Seiten des n-Ecks bzw. Basen der gleichschenkligen Teildreiecke in einen Kreisbogen bzw. die gesamte Kreislinie übergehen. Kepler argumentiert jedoch über die Ausstreckung des Kreisumfangs zu einer Geraden, wodurch die Basen der unendlich vielen Dreiecke nebeneinander auf der Geraden abgebildet werden. (Wußing 2008, S. 439 f.)

Die Lehre Descartes‘ und Fermats im 17. Jahrhundert legte schließlich den Grundstein für die heute übliche Beschreibung von Kurven durch ihre algebraischen oder transzendenten Gleichungen und die Einordnung des Kreises unter die Kegelschnitte. (Scriba & Schreiber 2010, S. 40) Descartes selbst deutete eine Klassifizierung des Kreises als eine der „einfachsten“ Kurven an, da er sich — wie auch die Gerade — durch eine einzige Bewegung erzeugen lässt. (Scriba & Schreiber 2010, S. 329 f.)

Historische Anwendungsbeispiele des mathematischen Konzepts des Kreises sind Kartographie, Astronomie und Kunst. So bestand beispielsweise um 250 v. Chr. das von Eratosthenes zur Darstellung der bekannten Welt eingeführte rechtwinklige Koordinatensystem aus Parallelkreisen und Meridianen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 83) Weltkarten im europäischen Mittelalter erfüllten überwiegend einen symbolischen Anspruch, etwa sogenannte Radkarten mit Jerusalem als Mittelpunkt der kreisförmigen Weltscheibe und exakter Teilung in ein Viertel Europa, ein Viertel Afrika und zwei Viertel Asien, getrennt durch Gewässer wie Mittelmeer und rotes Meer. Im Falle von Seekarten wurden die zur Erreichung bestimmter Ziele nötigen Kompasskurse bzw. Windrichtungen symbolisch dargestellt. Erst gegen 1500 setzt eine geometrisch fundierte Kartographie ein. (Scriba & Schreiber 2010, S. 261) Auch zur graphischen Darstellung abstrakter Dinge wurden Kreise schon vor Jahrhunderten eingesetzt, beispielsweise waren im Mittelalter allgemein Kreisdiagramme als Form der Visualisierung sehr beliebt. (Scriba & Scheiber 2010, S. 239) Der Römer Boethius weist um 500 n. Chr. darauf hin, dass die Beschäftigung mit der Astronomie die Seele zum Himmel lenkt und damit auch zur Gestalt der Kugel und der Kreisform. (Scriba & Schreiber 2010, S. 216) So liegt dem im Mittelalter populären ebenen Astrolabium lag die Abbildung von Himmelskreisen auf Kreise im Zuge der stereographischen Projektion zugrunde (Scriba & Schreiber 2010, S. 82 f.) bzw. wurden die Planetenbahnen vor der Verbesserung des Modells durch Kepler wie bereits geschildert als Kreisbahnen angenommen. (Scriba & Schreiber 2010, S. 266) Als eine der Grundformen spielt der Kreis zudem auch in der bildenden Kunst eine Rolle und wurde von zahlreichen Künstlern untersucht, beispielsweise von Albrecht Dürer im Rahmen seiner 1525 erschienenen Abhandlung zur Konstruktion geometrischer Figuren „Underweysung der messung…“. Ein interessanter Aspekt ist die dabei von ihm verwendete Terminologie, die es Lesern ohne Griechisch- oder Lateinkenntnisse ermöglichen soll, die beschriebenen Objekte zu erfassen: Der Kreis wird als eine „zirckel lini“ bezeichnet, die Kreisfläche als eine „runde ebene“. (Scriba & Schreiber 2010, S. 281 ff.) Dürer vermittelt den Kreisbegriff somit einerseits anhand dessen Konstruktion mit dem Zirkel und andererseits anhand seiner runden, ebenen Form.

c) Typische Darstellungen

Auf der enaktiven Darstellungsebene wird der Kreis typischerweise mit dem Zirkel gezeichnet, anstelle eines Zirkels kann jedoch auch eine Schnur verwendet werden, um den festen Abstand des Stiftes vom Mittelpunkt zu verdeutlichen. Maier diskutiert zudem die Vorteile und Relevanz des „Freihandzeichnens“ und beschreibt dabei die Erzeugung eines Kreises mit einem Stift, indem die Hand mit dem kleinen Finger an einer festen Stelle auf dem Papier aufgesetzt wird und dieses anschließend mit der anderen Hand gedreht wird. (Maier 1999, S. 272 f.) Das Ausschneiden von Kreisen mit der Schere stellt eine Möglichkeit dar, sich enaktiv mit deren gleichmäßiger Krümmung auseinanderzusetzen. Weigand beschreibt weitere Möglichkeiten: Durch das Messen von Fadenlängen oder Einbeschreiben regelmäßiger Vielecke kann der Umfang von Kreisen bestimmt werden. Der Flächeninhalt kann durch Auslegen der Kreisscheibe mit Einheitsquadraten oder ebenfalls auf Grundlage der Betrachtung von Vielecken und Berechnung derer Flächen bestimmt werden. (Weigand 2018, S. 103) Kreisscheiben können zudem erzeugt werden, indem kreiszylinder- oder kugelförmige Objekte in Schreiben geschnitten werden.

Um sich auf der ikonischen Ebene mit Kreisen auseinanderzusetzen können zunächst Bilder von Kreislinien oder Kreisflächen betrachtet und auf ihre charakteristischen Eigenschaften hin analysiert werden. Diese Darstellungen können dabei eingezeichnete Größen wie Radius, Durchmesser oder Umfang des Kreises enthalten, zudem kann die Kreiszahl π anhand einer solchen Skizze anschaulich als das Verhältnis der Längen Umfang und Durchmesser aufgefasst werden. Auch Abbildungen, welche die kreisförmigen Querschnitte von Körpern aufzeigen oder Anwendungsbeispiele des Kreisbegriffs aus dem Alltag darstellen, sind hier einzuordnen. Im Allgemeinen gehören auch geeignete Abbildungen enaktiver Darstellungen des Kreises der ikonischen Ebene an. Auch eine tabellarische Darstellung von Wertepaaren, die einen Kreis beschreiben, ist prinzipiell möglich. Die symbolische Ebene umfasst die Charakterisierung von Kreisen mithilfe der Kurzschreibweise $k(M; r)$ bzw. anhand der Buchstaben r, d, U, A, π als Symbole für Radius, Durchmesser, Umfang, Flächeninhalt und Kreiszahl sowie mithilfe der Formeln $U = 2 \cdot r \cdot \pi$, $A = r^2 \cdot \pi$. Prinzipiell wäre auch die Kreisgleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ der symbolischen Ebene zuzurechnen. Da die Behandlung dieser Gleichung jedoch nicht im gymnasialen Mathematikunterricht nach dem LehrplanPLUS vorgesehen ist und damit außerhalb des gesetzten Bezugsrahmens liegt, wird sie nicht in die Klassenbildung einfließen.

3.4.1.3. Empirische Ergebnisse

Auch hier sei zunächst auf die im Rahmen der Sachanalyse des Punktbegriffs gesammelten allgemeinen empirischen Ergebnisse zum Lernen und Lehren geometrischer Inhalte verwiesen. Clements & Battista stellen bei ihrer Untersuchung empirischer Ergebnisse zu Schwierigkeiten von Lernenden im Bereich der Geometrie unter anderem fest, dass Lernende akzeptabel in Aufgaben abschneiden, welche die Identifizierung gebräuchlicher Größen wie den Durchmesser von Kreisen beinhalten, jedoch mangelhaft in Aufgaben, in denen Größen wie der Radius vorkommen, welchen sie nicht regelmäßig im Alltag begegnen. (Clements & Battista 1992, S. 421) Im Gegensatz zu Dreiecken und Rechtecken können junge Kinder Kreise, ebenso wie Quadrate, bereits verhältnismäßig gut identifizieren. (Clements 2003, S. 160) Hinsichtlich der Fähigkeit von Kindern, Kreise zu zeichnen, halten Clements & Battista unter Bezugnahme auf die Ergebnisse von Piaget und Inhelder fest, dass Kinder unter 3 Jahren zunächst ohne Zweck oder Ziel vor sich hin kritzeln. Bis zum Alter von etwa 4 Jahren werden Kreise dann als unregemäßige geschlossene Kurve gezeichnet, wobei Quadrate und Dreiecke nicht von Kreisen unterschieden werden. Die Kinder unterscheiden dabei zwar nicht zwischen geradlinigen und kurvigen Figuren, jedoch werden topologische Eigenschaften korrekt wiedergegeben, beispielsweise ob kleine geschlossene Pfade innerhalb, auf oder außerhalb anderer geschlossener Pfade liegen. Ab 4 Jahren erfolgt schließlich eine zunehmende Differenzierung zwischen den euklidischen Formen. (Clements & Battista 1992, S. 423) Hinsichtlich der Geschlossenheit von Figuren zeigt sich, dass diese nicht von allen Kindern mit der selben Präzision beurteilt wird: Einige Kinder setzen nämlich „fast geschlossene“ Figuren mit geschlossenen Varianten gleich. (Clements & Battista 1992, S. 426)

Ein weiterer Aspekt, der hinreichende Genauigkeit erfordert, ist die korrekte Verwendung von Fachbegriffen. Insbesondere die bereits erwähnte Ungenauigkeit hinsichtlich der Unterscheidung von Kreislinie und Kreisfläche in der Alltagssprache verlangt hier zusätzliche Aufmerksamkeit seitens der Lehrkraft. Nach Clements & Battista ist eine exakte Sprache im Geometrieunterricht ist ein kritischer Faktor für die Entwicklung von Lernenden, weshalb Lehrkräfte sorgfältig auf die Unterschiede zwischen der Verwendung von Begriffen in Alltagskontexten und in der Mathematik hinweisen und sich regelmäßig vergegenwärtigen sollten, dass die von Lernenden mit der Sprache verknüpften Konzepte drastisch von den Erwartungen der Lehrkräfte abweichen können. Sowohl eine zu frühe Einführung der mathematischer Sprache als auch eine fehlende Herstellung von Bezügen zur Alltagssprache führt aus diesem Grund dazu, dass die mathematische Sprache ohne mathematisches Verständnis gelernt wird. (Clements & Battista 1992, S. 433)

Als zentraler Bestandteil der meisten Definitionen des Kreisbegriffs scheint es von grundlegender Bedeutung zu sein, dass Lernende mit dem Konzept des Abstands umgehen können. Clements diskutiert die Bedeutung von Erfahrungen im Umgang mit Landkarten für die Entwicklung verschiedener geometrischer Ideen im Zusammenhang mit räumlichem Denken bei Lernenden. Beim Lesen und der Erstellung von Karten kann dabei unter anderem der Begriff des Abstands verinnerlicht werden. (Clements 2003, S. 165 f.) Vor diesem Hintergrund erscheint die Arbeit mit Landkarten vor oder während der Einführung des Kreisbegriffs und seiner Definition ein plausibler Ansatz zu sein. Maier analysiert das präoperationale Stadium der kognitiven Entwicklung nach Piaget im Hinblick auf die Entwicklung der Raumvorstellung und betont dabei die Bedeutung von gegenständlichen Handlungen, was insbesondere einen gezielten Einsatz von Medien voraussetzt. In diesem Kontext führt er an, dass sich Kinder in diesem Stadium den Schnitt durch einen Zylinder erst dann kreisförmig vorstellen können, wenn das auf der Modelliermasse liegende Messer diese wirklich durchgeschnitten hat, d. h. ein perspektivischer Blickwinkel wird erst dann rekonstruiert, wenn die Person den entsprechenden Standort innehatte. Erst wenn durch tatsächliches Handeln ausreichende Informationen verinnerlicht wurden, kann die Vorstellung das Handeln ersetzen. (Maier 1999, S. 88 f.)

Hattermann beobachtet Studierende bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Kreiskonstruktion mithilfe dreidimensionaler dynamischer Geometriesoftware, um Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang von der zweidimensionalen zur dreidimensionalen Geometrie zu untersuchen. Die betrachteten Konstruktionen geben dabei Anlass, über prägende, in der ebenen Geometrie erworbene Vorstellungen im Zusammenhang mit Kreisen nachzudenken, da eine es eine zentrale Eigenschaft von Grundvorstellungen ist, flexibel erweiterbar zu sein und sich in einem Netzwerk aus mentalen Modellen zu entwickeln. Die verwendete Software ermöglicht die Konstruktion von Kreisen im Raum durch Angabe dreier Randpunkte, Angabe von Kreisachse und einem Randpunkt oder Angabe von Mittelpunkt, einem Randpunkt und Kreisebene. Mehrere Teilnehmende sind dabei auch nach längerer Auseinandersetzung mit der Software nicht in der Lage, einen Kreis im Raum durch Angabe von Mittelpunkt, einem Randpunkt und Kreisebene zu konstruieren. Teilweise wurde mehrfach versucht, einen Kreis durch Angabe von lediglich zwei Punkten zu erstellen, nämlich dem intendierten Mittelpunkt und einem Punkt auf der intendierten Kreislinie, da die Software bereits nach der Angabe von zwei Punkten eine Kreislinie anzeigt, welche für die erfolgreiche Vervollständigung der Konstruktion jedoch noch durch Angabe eines dritten Punktes eindeutig festgelegt werden muss. Die Teilnehmenden versuchten also, die aus der Ebene bekannte Konstruktion des Kreises ohne Weiteres in einer dreidimensionalen Umgebung anzuwenden. Dabei wurde nicht berücksichtigt, dass durch einen Mittelpunkt und einen Randpunkt im räumlichen Fall unendlich viele Kreise beschrieben werden.

Diese Beobachtungen werden dahingehend gedeutet, dass durch die Konstruktion von Kreisen im Zweidimensionalen eine hinreichend starke Prägung stattgefunden hat, wie Kreise (unabhänig von der Dimension des Raumes) zu konstruieren sind, durch die eine Anpassung der zugrundeliegenden Vorstellung an dreidimensionale Situationen unterbunden wird. Da verfügbare Hilfestellungen zur Konstruktion von Kreisen mithilfe der verwendeten Software kaum verwendet wurden, liegt die Vermutung nahe, dass die Teilnehmenden ihre Vorstellungen zur Konstruktion von Kreisen nicht in Frage stellten. Ein weiterer Grund für die beobachteten Schwierigkeiten könnte eine mangelnde Förderung der Raumvorstellungsfähigkeiten in Schule und Hochschule sein, aufgrund der es vielen Teilnehmenden nicht möglich ist, sich anhand der zweidimensionalen Darstellungen auf dem Bildschirm eine tatsächliche dreidimensionale Situation vorzustellen. Neben dem verinnerlichten Vorgehen bei der Konstruktion von Kreisen könnten jedoch auch Definitionen oder bestimmte Eigenschaften des Objekts „Kreis“ die Vorstellungen der Teilnehmenden geprägt haben. Im Hinblick auf seine Ergebnisse trifft Hattermann dabei die folgenden Aussagen: Lernenden sollte ermöglicht werden, mehrere unterschiedliche Grundvorstellungen zum Kreisbegriff zu bilden und die je nach Entwicklungsstufe zu einer Vorstellung beitragenden Aspekte des Begriffs ergänzen und sinnvoll untereinander vernetzen zu können. Die dadurch ermöglichte Flexibilität im Hinblick auf Problemlösungen und Übersetzungsprozesse hilft im Umgang mit der Tatsache, dass einige Definitionen und Vorstellungen aus der ebenen Geometrie in dreidimensionalen Umgebungen nicht mehr ausreichend tragfähig sind, beispielsweise können Zirkel oder ein gespannter Faden dort nur im Zusammenhang mit einer Hilfsebene eingesetzt werden bzw. ist die Menge aller Punkte mit gleichem Abstand von einem gegebenen Punkt im Dreidimensionalen im Bezug auf einen Kreis nicht eindeutig. Vor diesem Hintergrund könnte eine Ergänzung der zweidimensionalen Kreisdefinition in Erwägung gezogen werden: Die Menge aller Punkte, die zu einem Mittelpunkt den gleichen Abstand besitzen und *mit ihm in einer Ebene liegen*.

Die Redundanz dieses Zusatzes im Zweidimensionalen ermöglicht dabei die Übetragung der Definition in den Raum. Weitere Aspekte können durch Analogieüberlegungen dorthin übertragen werden, beispielsweise lässt sich die ebene Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ mithilfe des Satzes von Pythagoras an die Kugelgleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ anbinden. Ebenso suggeriert eine Beschreibung von Punkten auf Kreislinien im Zweidimensionalen mithilfe von Polarkoordinaten die Beschreibung von Punkten auf Kugeloberflächen mithilfe von Kugelkoordinaten.

Auch im Zusammenhang mit der Idee, dass Kreise benutzt werden, um äquidistante Abstände abzutragen, scheinen die in der ebenen Geometrie gewonnenen Vorstellungen bei der Arbeit an räumlichen Konstruktionsaufgaben zunächst zu dominieren. Zu Beginn der Arbeit werden von den Teilnehmenden zum Abtragen gleicher Abstände häufig komplizierte Kreiskonstruktionen gewählt, anstelle auf einfachere Kugelkonstruktionen zurückzugreifen. An die Eigenschaft des Kreises, eine Linie mit konstanter Krümmung zu sein, lässt sich im Raum anknüpfen, indem für jede Ebene, die den Mittelpunkt eines Kreises enthält, die gleiche Konstruktionsvorschrift wie für Kreise im Zweidimensionalen angegeben werden kann: Man geht von einem Punkt der gewünschten Kreislinie eine kleine konstante Strecke und dreht sich um 1°. Durch weiteres „Kippen“ der Ebene durch den Mittelpunkt erhält man auf diese Weise unendlich viele Ebenen mit jeweils einem Kreis mit gleichem Radius. Dieses Bild kann auch hinsichtlich der Vorstellung, dass die Punkte einer Kreislinie die Punkte mit gleichem Abstand zum Mittelpunkt sind, hilfreich sein. Im Raum muss diese dahingehend angepasst werden, als dass jede Kreislinie lediglich eine Teilmenge aller Punkte mit gleichem Abstand vom Mittelpunkt darstellt. In diesem Zusammenhang kann auch die Betrachtung der Schnittkurven von Kugeln und Ebenen, die durch deren Mittelpunkt verlaufen, hilfreich sein, um der Fehlvorstellung entgegenzuwirken, dass zu einem gegebenem Mittelpunkt und einem Punkt auf der Kreislinie im Raum ein eindeutiger Kreis existiert.

Methodische Bedenken äußert Hattermann insofern, als nicht eindeutig geklärt werden kann, ob bestimmte Probleme auf Vorstellungen der Studierenden oder technische Schwierigkeiten bei der Bedienung der verwendeten Software zurückzuführen sind. Zusammenfassend geben die Bearbeitungen der Studierenden Anlass, Vorstellungen der ebenen Geometrie dahingehend zu analysieren, ob sie bei der Arbeit im Dreidimensionalen erweitert werden bzw. wie derartige Vorstellungen aussehen können. Um die Entstehung von Wissensinseln zu verhindern und tragfähige, zur dreidimensionalen Geometrie „aufwärtskompatible“ Strukturen zu ermöglichen, sollten zudem Aufgaben und Anwendungen untersucht werden, die zur Vernetzung dieser Vorstellungen beitragen können. (Hattermann 2015, S. 77 ff.)

3.4.1.4. Zusammenschau

Anhand der gesammelten Ergebnisse zum Begriff des Kreises lassen sich zahlreiche Kernelemente identifizieren, aus denen zusammenfassend die folgenden für den gewählten Bezugsrahmen relevanten Klassen gebildet werden.

Erste Klasse: Gleicher Abstand vom Mittelpunkt

Die Kreislinie wird von den untersuchten Schulbüchern im Sinne einer Punktmenge definiert. Die relevante Eigenschaft jedes Punktes P ist dabei, den gleichen Abstand von einem festen, als Mittelpunkt M bezeichneten Punkt zu besitzen wie jeder andere Punkt der Kreislinie. Für diesen Abstand $|\overline{MP}|$ wird die Bezeichnung „Radius(-länge)" bzw. r eingeführt, wobei nicht alle Quellen explizit zwischen dem Radius im Sinne der Verbindungsstrecke und der Radiuslänge unterscheiden. Diese Klasse besitzt insofern einen genetischen Charakter, als die einzelnen Punkte der Punktmenge nacheinander erzeugt werden können und auf diese Weise ein Kreis entsteht, indem im Kopf oder auf Papier durch Ausmessen mit einem Lineal, dem Zirkel oder einer gespannten Schnur einzelne Punkte gesetzt werden. Diese Klasse ist beispielsweise für die Arbeit mit Landkarten relevant, wenn nach Orten gefragt ist, die sich innerhalb einer bestimmten Reichweite befinden.

Die wesentlichen Kernelemente dieser Klasse sind:

- der Mittelpunkt M
- ein Punkt P auf der Kreislinie
- die Verbindungsstrecke $\overline{MP}$
- ihre Länge $|\overline{MP}|$, bezeichnet als Radius(-länge) r
- der Begriff der Punktmenge
- der Kreis als Menge aller Punkte mit Abstand r vom Mittelpunkt M

Zweite Klasse: Zirkelbewegung

Definitionen des Kreises werden in der Regel von Skizzen und Hinweisen zu seiner Konstruktion mit dem Zirkel begleitet. Dabei wird mit dem Zirkel in eine feste Stelle, den Mittelpunkt, eingestochen und die Mine bei gleichbleibender Öffnung des Zirkels solange bewegt, bis man wieder beim Startpunkt angelangt ist. Dadurch wird erkennbar, dass es sich bei Kreisen um geschlossene Linien handelt. Auch die Darstellung von Kreisen, die durch Bewegung einer gespannten Schnur um einen festen Punkt entstehen, kann dieser Klasse zugeordnet werden. Der Kreis „entsteht" in dieser Klasse vor den Augen der Lernenden als das Ergebnis eines Bewegungsprozesses, weshalb auch dieser Klasse ein genetischer Charakter zukommt. Diese Klasse spielt einerseits bei der üblichen Konstruktion von Kreisen eine Rolle, andererseits jedoch auch in Sachzusammenhängen, in denen Kreisbewegungen beschrieben werden.

Zentrale Kernelemente dieser Klasse sind:

- der Zirkel
- die gleichbleibende Öffnung des Zirkels
- die Einstichstelle als Mittelpunkt
- die Bewegung des Zirkels

- der Kreis als Ergebnis dieses Bewegungsprozesses

Dritte Klasse: Grenzfall regelmäßiger Vielecke

An mehreren Stellen des LehrplanPLUS werden Kreisflächen als Grenzfälle regelmäßiger Vielecke für sehr hohe Eckenzahlen dargestellt. Dieser Gedanke lässt sich auch in zahlreichen historischen Versuchen beobachten, Kreise mathematisch zu beschreiben. Dabei wird zunächst ein regelmäßiges Vieleck mit relativ geringer Seiten- bzw. Eckenzahl sowie dessen Umkreis betrachtet. Anschließend wird die Anzahl der Ecken erhöht, wodurch eine Annäherung des Vielecks an die Kreislinie beobachtet werden kann. Auch in dieser Klasse wird der Kreis dabei als das Ergebnis eines Prozesses beschrieben. Anwendungen dieser Klasse sind beispielsweise die Herleitung von Oberflächeninhalt und Volumen gerader Kreiszylinder ausgehend von geraden Prismen.

Kernelemente dieser Klasse sind:

- das regelmäßige Vieleck
- der Umkreis des Vielecks
- der Kreis als Ergebnis des Grenzprozesses „Erhöhung der Eckenzahl“

Vierte Klasse: Gleichmäßig runde Form

Der Kreis wird in dieser Klasse als ganzheitliches Objekt im Sinne einer Form aufgefasst. Die charakterisierende Eigenschaft ist dabei, „gleichmäßig rund“ oder „kreisrund“ zu sein. Auch wenn der Begriff der Krümmung als mathematischer Fachbegriff im gymnasialen LehrplanPLUS erst im Zuge der Einführung in die Differentialrechnung in der 11. Jahrgangsstufe thematisiert wird, so kann er aufgrund seiner Verwendung im alltäglichen Sprachgebrauch dennoch dazu dienen, den Kreis als „gleichmäßig gekrümmt“ zu charakterisieren. Als Beispiele für diese Form werden unter anderem Räder und Rollen angegeben. Die Form kann dabei sowohl haptisch als auch visuell erfasst werden. Diese Klasse spielt vor allem in alltäglichen Beobachtungen eine Rolle, in denen wahrgenommene Formen beschrieben und kategorisiert werden.

Die Kernelemente der Klasse sind:

- eine enaktive oder ikonische Darstellung eines Kreises
- die haptische bzw. visuelle Wahrnehmung des Kreises als ganzheitliche Form
- beschreibende Ausdrücke wie „gleichmäßig rund“

Fünfte Klasse: Symmetrieeigenschaften

Die Thematisierung der Achsensymmetrie in der ebenen Geometrie ermöglicht eine weitere Charakterisierung der „Gleichmäßigkeit“ von Kreisen. In Schulbüchern sollen Lernende sich mit der Achsensymmetrie verschiedener Objekte auseinandersetzen, unter anderem auch Kreisen. In diesem Zusammenhang finden sich Zeichnungen von Kreisen mit einer durch den Mittelpunkt verlaufenden Geradenschar, was die Existenz unendlich vieler verschiedener Symmetrieachsen andeuten soll. Bei der Charakterisierung des Kreises als Objekt mit unendlich vielen verschiedenen Symmetrieachsen muss jedoch beachtet werden, dass auch die Gerade und der Punkt, sofern dieser nicht als Grenzfall von Kreisen aufgefasst wird, diese Eigenschaft besitzen. Aus diesem Grund ist die zusätzliche Beobachtung hilfreich, dass sich die unendlich vielen Symmetrieachsen des Kreises (und des Punktes) in einem Punkt schneiden, da sich dadurch die Gerade ausschließen lässt, welche unendlich viele verschiedene parallele Symmetrieachsen besitzt. Zudem genügen auch überlagerte konzentrische Kreise bzw. Kreisflächen den beschriebenen Eigenschaften. Der Versuch, diese aus der Klasse aus-zuschließen, würde jedoch zu komplizierte Kriterien erzeugen, womit die Klasse nicht mehr als Grundlage für Grundvorstellungen dienen könnte. Diese Klasse ist beispielsweise für Kreisdiagramme relevant: Da jede Gerade, die durch den Mittelpunkt eines Kreises verläuft, einer Symmetrieachse entspricht, ist es bei der Aufteilung von Kreisen z. B. egal, ob ein Anteil von 50 % durch eine horizontale, vertikale oder beliebig anders ausgerichtete Trennlinie dargestellt wird.

Die wesentlichen Elemente dieser Klasse sind:

- der Begriff der Achsensymmetrie
- der Mittelpunkt des Kreises
- mehrere durch den Mittelpunkt verlaufende Symmetrieachsen
- der Kreis als ausgedehntes Objekt, welches unendlich viele verschiedene Symmetrieachsen besitzt, die sich in einem Punkt schneiden

Sechste Klasse: Querschnitte von Körpern

Diese Klasse fasst die Identifizierung von Kreisen als Querschnitte von Kugeln, Kegeln oder Kreiszylindern zusammen. (Im Falle des Kegels erklärt diese Klasse die Einordnung von Kreisen unter die „Kegelschnitte“.) Der Grundgedanke ist dabei, eine Ebene, ggf. parallel zur Bodenfläche des Körpers, durch den Körper zu legen und die mit der Oberfläche des Körpers erzeugte Schnittkurve bzw. die mit dem Volumen erzeugte Schnittfläche zu betrachten, was auf eine Kreislinie bzw. Kreisfläche führt. Die Boden- und ggf. Deckfläche von Kegel und Kreiszylinder können dabei als Grenzfälle der Querschnitte aufgefasst werden. Entsprechende Beobachtungen können auch durch tatsächliches Durchschneiden realer Objekte gemacht werden. Anwendungen dieser Klasse sind beispielsweise die Betrachtung der Volumina schiefer Kreiszylinder mithilfe des Satzes von Cavalieri sowie sämtliche alltäglichen Kontexte, in denen Scheiben von kreiszylinder- oder kugelförmigen Objekten abgeschnitten werden (Wurst, Tomaten etc.).

Zentrale Elemente der Klasse sind:

- eine Ebene (bei theoretischer Betrachtung) bzw. ein Messer (bei Betrachtung realer Objekte)
- die Kugel, der Kegel oder der Kreiszylinder
- die Schnittfläche bzw. -kurve
- die Kreisfläche bzw. Kreislinie als Form der Schnittfläche bzw. -kurve

Siebte Klasse: Symbolische Kurzschreibweise

Die Schulbücher führen die Notation $k(M; r)$ für den Kreis ein. Anhand dieser Kurzschreibweise kann ein Kreis vollständig beschrieben werden, da die beiden benötigten Informationen „Mittelpunkt“ und „Radius“ dadurch festgelegt sind. Anwendungen dieser Klasse sind die Beschreibung von auszuführenden Konstruktionen in Arbeitsaufträgen („Konstruiere den Kreis $k(M; r)$“) oder die Charakterisierung von Punkten als Elemente von Kreisen („$P \in k(M; r)$“).

Die Kernelemente dieser Klasse sind:

- die Bezeichnung M für den Mittelpunkt
- die Bezeichnung r für den Radius
- die Bezeichnung $k(M; r)$ für das dadurch festgelegte Objekt

3.4.2. Formulierung und Diskussion der Grundvorstellungen

Die gebildeten Klassen können nun in ausformulierte Grundvorstellungen überführt werden. Anschließend wird auf das auszubildende Grundverständnis und mögliche Grundvorstellungsumbrüche eingegangen.

Punktmengen-Vorstellung

„Ein Kreis ist die Menge aller Punkte mit dem selben Abstand von einem gegebenen Punkt.“

Diese Vorstellung entspricht der üblichen Definition der Kreislinie. Optional kann die zusätzliche Spezifizierung „Ein Kreis mit Radius r“ und „Abstand r“ hinzugefügt werden, um auch den Begriff des Radius‘ einzubeziehen. Kreise werden in dieser Vorstellung nicht als ganzheitliches Objekt, sondern als aus einzelnen Punkten zusammengesetzt betrachtet, die jeweils das Kriterium erüllen, einen bestimmten Abstand von dem vorgegebenen Mittelpunkt zu besitzen. Die Vorstellung besitzt insofern einen genetischen Charakter, als die punktweise Entstehung der Kreislinie implizit enthalten ist.

Bewegungs-Vorstellung

„Ein Kreis ist das Ergebnis einer vollständigen Bewegung eines Punktes mit festem Abstand um einen anderen Punkt."

Diese Grundvorstellung entspricht der üblichen Konstruktion von Kreisen mit dem Zirkel, alternativ kann auch eine gespannte Schnur, Stange o. Ä. als „fester Abstand" dienen. Das Wort „vollständig" beschreibt in diesem Fall eine Bewegung bis zum Erreichen des Ausgangspunktes bzw. eine 360°-Drehung. Der Kreis besteht in dieser Vorstellung aus einer durchgehenden, geschlossenen Linie. Auch diese Grundvorstellung besitzt einen genetischen Charakter, da der Kreis vor den Augen der Lernenden entsteht. Aufgrund der notwendigen Bewegung besitzt sie zudem einen dynamischen Charakter.

Vieleck-Vorstellung

„Ein Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich vielen Ecken."

Diese Vorstellung entspricht dem häufig zur Annäherung von Kreisen verwendeten Grenzprozess, die Anzahl der Ecken eines regelmäßigen Vielecks immer weiter zu erhöhen. Der Kreis tritt dabei als das Ergebnis dieses Prozesses in Erscheinung, weshalb diese Grundvorstellung einen genetischen Charakter besitzt. Kreise werden dabei nach dieser Vorstellung als ganzheitliche Objekte aufgefasst.

Form-Vorstellung

„Ein Kreis ist eine gleichmäßig runde Form."

Diese Grundvorstellung entspricht am ehesten der Wahrnehmung von Kreisen im Alltag. Der Kreis wird anhand seiner Gestalt charakterisiert, ohne dabei explizit an mathematische Kriterien zu denken. Äquivalent wäre eine Formulierung mit „gleichmäßg gekrümmt", wobei der Begriff der Krümmung dabei im Sinne des alltäglichen Sprachgebrauchs verwendet wird. Kreise sind nach dieser Grundvorstellung ganzheitliche Objekte.

Symmetrieachsen-Vorstellung

„Ein Kreis ist ein Objekt mit unendlich vielen verschiedenen Symmetrieachsen, die sich in einem Punkt schneiden.“

In dieser Vorstellung wird der Kreis anhand seiner Symmetrieeigenschaften beschrieben. Die unendlich vielen Symmetrieachsen von Kreisen entsprechen dabei einer Geradenschar durch den Mittelpunkt. Der Kreis tritt auch in dieser Grundvorstellung als ein ganzheitliches Objekt auf. Zu dieser Vorstellung muss angemerkt werden, dass es sich dabei nicht um eine „definierende“, sondern eine „charakterisierende“ Vorstellung handelt, da wie erwähnt auch überlagerte konzentrische Kreise oder Kreis-flächen diesen Kriterien genügen.

Querschnitt-Vorstellung

„Ein Kreis ist ein beliebiger Querschnitt einer Kugel oder, wenn parallel zu dessen Boden, eines Kegels oder Kreiszylinders.“

Diese Grundvorstellung legt den Kreis ausgehend von einem Körper fest. Dabei kann entweder die Vorstellung durchgeschnittener realer Objekte zugrunde liegen oder es werden theoretische geometrische Objekte mit einer Ebene geschnitten. Der Kreis tritt auch hier als ein ganzheitliches Objekt auf. Da die Kreisform auch hier implizit durch das Durchschneiden eines Körpers erzeugt wird, besitzt diese Grundvorstellung einen genetischen Charakter.

Abstrakte-Objekt-Vorstellung

„Ein Kreis ist ein Objekt $k(M; r)$, welches durch einen Punkt M und eine Zahl r beschrieben wird.“

In dieser Vorstellung wird auf eine anschauliche Interpretation verzichtet und der Kreis rein mithilfe eines Punktes und einer Zahl charakterisiert.

Im Hinblick auf das auszubildende Grundverständnis sowie den Umgang mit möglichen Grundvorstellungsumbrüchen können nun die Verbindungen der genannten Grundvorstellungen untereinander betrachtet werden. Hier fällt beim Begriff des Kreises auf, dass man sich diesem aus mehreren, teils sehr verschiedenen Blickwinkeln nähern kann. Hinsichtlich auftretender Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang von Kreisen in der Ebene hin zu Kreisen in dreidimensionalen Szenarien sei dabei zunächst auf die bereits im Rahmen der Sachanalyse diskutierten Ergebnisse von (Hattermann 2015, S. 77 ff.) verwiesen. Die Punktmengen-Vorstellung stellt im Schulkontext sicher eine zentrale „Anlaufstelle“ dar, da ihr die dort übliche Definition des Kreises zugrunde liegt. Aus diesem Grund scheint es von großer Bedeutung zu sein, insbesondere den Wechsel von dieser zu anderen Grundvorstellungen zu untersuchen: Im Gegensatz zur Bewegungs-Vorstellung beinhaltet die Punktmengen-Vorstellung keine explizite Beschreibung eines dynamischen

Vorgangs. Dennoch kann zwischen den beiden Vorstellungen vermittelt werden, indem die Erzeugung der Kreislinie mithilfe einer Bewegung um den Mittelpunkt als punktweise Erzeugung jener Punkte mit gleichem Abstand zum Mittelpunkt aufgefasst wird, die in der Punktmengen-Vorstellung beschrieben werden. Statt also wahllos ohne feste Reihenfolge Punkte zu setzen, werden dieser entsprechend ihrer räumlichen Anordnung erzeugt. Eine Verbindung zur Vieleck-Vorstellung lässt sich herstellen, da die Ecken des regulären Vielecks, aufgefasst als Punkte, bereits auf seinem Umkreis liegen. Durch Betrachtung höherer Eckenzahlen liegen also immer mehr Punkte auf dem Umkreis des Vielecks, bis für schließlich für den Fall unendlich vieler Ecken unendlich viele Punkte auf dem Umkreis bilden, wobei das Vieleck in seinen Umkreis übergeht. Auf diese Weise kann der aus dem Vieleck entstehende Kreis als Punktmenge aufgefasst werden. Die Form-Vorstellung hängt insofern mit der Punktmengen-Vorstellung zusammen, als das ganzheitliche, gleichmäßig runde Objekt Kreis aus vielen winzigen elementaren Bausteinen, den Punkten, zusammengesetzt aufgefasst werden kann. Die Symmetrieachsen-Vorstellung kann ausgehend von der Punktmengen-Vorstellung erklärt werden, indem man eine beliebige Achse durch den Mittelpunkt zeichnet und anschließend eine senkrecht dazu verlaufende Achse einmal von oben nach unten durch den Kreis fahren lässt. Zu jedem Zeitpunkt stellen die Schnittpunkte dieser bewegten Achse mit der Kreislinie ein Punkte-Paar da, welches bezüglich der ursprünglich eingezeichneten, festen Achse symmetrisch liegt. Da auf diese Weise also alle Punkte der Punktmenge symmetrisch liegen, stellt die feste Achse eine Symmetrieachse des ganzen Kreises dar. Da dieser Prozess für jede beliebig ausgerichtete durch den Mittelpunkt verlaufenden Achse durchgeführt werden kann, besitzt die Punktmenge „Kreis“ also unendlich viele verschiedene derartige Symmetrieachsen. Die Querschnitt-Vorstellung kann aufgebaut werden, indem man sich eine Kugel, einen geraden Kegel oder geraden Kreiszylinder als aus unendlich vielen übereinandergeschichteten Ebenen im Sinne eines „Scheibenturms“ vorstellt, wie er häufig im Zusammenhang mit dem Satz von Cavalieri beschrieben wird. Dabei ist auf jeder Ebene der Abstand aller Oberflächenpunkte von der Rotationsachse des Kegels oder Kreiszylinders (bzw. von der Symmetrieachse der Kugel senkrecht zur Schnittebene) gleich. Der Bezug zur Abstrakte-Objekt-Vorstellung kann aufgebaut werden, indem Aufgabenstellungen für anschauliche Konstruktionsaufgaben parallel auf der symbolischen Darstellungsebene von den Kurznotationen $k(M; r)$ für Kreise und Buchstaben für Punkte und skalare Größen begleitet werden.

Es existieren weitere Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Grundvorstellungen, die aufgezeigt werden können, um möglicherweise auftretende Grundvorstellungsumbrüche zu begleiten. So kann etwa die Bewegungs-Vorstellung mit der Vieleck-Vorstellung in Einklang gebracht werden, indem regelmäßige Vielecke durch Verbinden der zuvor markierten Eckpunkte im oder gegen den Uhrzeigersinn gezeichnet werden. Die Bewegungs- und Form-Vorstellung können verbunden werden, indem man während der Bewegung die gleichmäßige Krümmung der gezeichneten Kurve beobachtet. Ein Zusammenhang zwischen Vieleck- und Form-Vorstellung kann durch die Beobachtung hergestellt werden, dass die Ecken des regelmäßigen Vielecks immer flacher werden und die Form des Vielecks immer runder wird, je mehr Ecken es besitzt. Ausgehend von der Vieleck-Vorstellung kann die Symmetrieachsen-Vorstellung nachvollzogen werden, indem man beobachtet, dass ein regelmäßiges Vieleck genauso viele verschiedene, sich im Mittelpunkt schneidende Symmetrieachsen wie Ecken besitzt. Wenn nun die Anzahl der Ecken gegen unendlich geht, entstehen auch unendlich viele verschiedene Symmetrieachsen. Die Vieleck-Vorstellung kann auch mit der Querschnitt-Vorstellung in Zusammenhang gebracht werden, indem Prismen mit Vielecken als Grundfläche betrachtet werden und anschließend die Eckenzahl erhöht wird, wodurch ein Kreiszylinder entsteht. Form- und Symmetrieachsen-Vorstellung können verbunden werden, indem beobachtet wird, dass man durch Halbieren eines Kreises entlang einer beliebigen durch den Mittelpunkt verlaufenden Achse und anschließendes Spiegeln der Hälfte an dieser Achse wieder den gleichmäßig runden Ausgangskreis erhält. Da diese Spiegelung für jede beliebige und damit unendlich viele verschiedene Achsen durch den Mittelpunkt funktioniert, besitzt die Kreisform also unendlich viele verschiedene Symmetrieachsen. Die Form- und Querschnitt-Vorstellung können durch Beschreibung der Form der Kugeloberfläche bzw. Mantelflächen von Kegel und Kreiszylinder verknüpft werden. Da diese Flächen ebenfalls „gleichmäßig rund“ sind, wird nachvollziehbar, dass dies auch auf jede dünne, ggf. parallel zum Boden verlaufende Scheibe des Körpers zutreffen muss.

3.4.3. Präzisierung des Bezugsrahmens

Im folgenden Abschnitt werden einerseits die erforderlichen Grundkenntnisse betrachtet, mithilfe derer die einzelnen Grundvorstellungen von den Lernenden gebildet und angewandt werden können, andererseits werden Zusammenhänge zu anderen Vorstellungen aus dem Bezugsrahmen thematisiert.

Die Punktmengen-Vorstellung setzt zunächst den Begriff des Punktes und den Begriff der Menge voraus, zudem müssen die Lernenden wissen, was mit „Abstand“ gemeint ist und wie man diesen messen und zeichnen bzw. abtragen kann. Hinsichtlich der Grundvorstellungen des Punktbegriffs erscheint hier einerseits die Auffassung als kleiner Fleck und andererseits die Vorstellung von Punkten als Elemente von Mengen als relevant. Auch für die Bewegungs-Vorstellung müssen die Lernenden eine Vorstellung haben, was ein Punkt ist. Hier tritt dieser jedoch nicht explizit als Element einer Menge in Erscheinung, sondern als bewegtes Objekt, weshalb die Vorstellung als kleiner Fleck angemessen erscheint. Auch der Begriff des Abstands muss den Lernenden vertraut sein. Die Vieleck-Vorstellung an sich erfordert die Kenntnis des Begriffs des regulären Vielecks, für die besprochenen Verbindungen zu anderen Grundvorstellungen des Kreises muss ggf. auch der Begriff des Umkreises bekannt sein. Desweiteren müssen die Lernenden wissen, was mit „unendlich viele“ bzw. „unendlich große Zahl“ gemeint ist. Hinsichtlich Vorstellungen zum Begriff der Unendlichkeit sei erneut auf (Kasparek 2023) verwiesen.

Die Form-Vorstellung stellt vermutlich die intuitivste und primitivste Grundvorstellung zum Kreisbegriff dar. Dementsprechend gering fallen die Anforderungen an die kognitiven Fähigkeiten und das fachliche Vorwissen aus. Die Lernenden müssen ein alltagsübliches Verständnis von Rundheit oder Krümmung besitzen, sowie in der Lage sein, eine gewisse Gleichmäßigkeit hinsichtlich dieser Eigenschaften zu erkennen und benennen. Die Symmetrieachsen-Vorstellung setzt offensichtlich den Begriff der Achsensymmetrie voraus. Bezogen auf die Symmetrieachsen müssen zudem die Lagebeziehungen zweier Geraden in der Ebene insofern bekannt sein, als sich zwei nicht parallele und nicht identische Geraden in einem Punkt schneiden. Zudem muss eine Vorstellung zum Begriff des Punktes vorhanden sein, wobei sich im vorliegenden Fall die Vorstellung von Punkten als der Schnitt zweier Geraden anbietet. Auch hier wird der Begriff der Unendlichkeit im Sinne unendlich großer Zahlen vorausgesetzt. Für die Querschnitt-Vorstellung müssen die Körper Kugel, Kegel und Kreiszylinder bekannt sein. Die Lernenden müssen darüberhinaus wissen, was der Boden eines Kegels oder Kreiszylinders ist. Außerdem muss den Lernenden der Begriff des Querschnitts und der Begriff der Parallelität von Ebenen geläufig sein. Die Abstrakte-Objekt-Vorstellung erfordert die Kenntnis des Begriffs Punkt, wobei dieser nicht mit einer anschaulichen Bedeutung verknüpft sein muss. Die Vorstellung von Punkten als abstrakte Elemente von Mengen scheint hier angemessen zu sein. Zudem müssen die Lernenden wissen, was eine Zahl ist und dass Zahlen und Punkte durch Buchstaben bezeichnet werden.

4. Praxis: Lernendenbefragungen

Um einen Bezug zur Praxis herzustellen und erste Impulse hinsichtlich der Untersuchung der entwickelten Grundvorstellungen hinsichtlich ihrer didaktischen Relevanz im Sinne des Salle-Clüver-Verfahrens zu geben, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit Lernendenbefragungen durchgeführt, welche im folgenden Kapitel besprochen werden.

4.1. Konzeptioneller Rahmen

Die Befragungen wurden mit dem Ziel durchgeführt, einen ersten Überblick über die tatsächlich bei Lernenden beobachtbaren Vorstellungen zu den Begriffen Punkt, Gerade und Kreis zu gewinnen. Da die Einführung dieser Grundbegriffe nach dem gymnasialen LehrplanPLUS für den Mathematikunterricht der 5. Jahrgangsstufe vorgesehen ist, wurde einerseits die Befragung von Lernenden dieser Jahrgangsstufe am Ende des Schuljahres festgelegt. Im Hinblick auf eine möglicherweise auftretende Entwicklung der beobachtbaren Vorstellungen sollte zudem eine möglichst hohe Jahrgangsstufe befragt werden. Da die Lernenden der 12. Jahrgangsstufe (G8) am Ende des Schuljahres bereits entlassen worden waren und es in diesem Schuljahr noch keine 12. und 13. Jahrgangsstufe nach dem neuen LehrplanPLUS gab, fiel die Wahl dabei auf die 11. Jahrgangsstufe.

Im Hinblick auf den verfügbaren Zeitrahmen wurde sich für eine Befragung mittels Fragebögen entschieden, da auf diese Weise in vergleichsweise kurzer Zeit eine größere Anzahl von Lernenden untersucht werden konnten. Um einen Eindruck zu gewinnen, auf welche Weise sich die Lernenden den mathematischen Begriffen Punkt, Gerade und Kreis nähern, wenn keine spezifischen und potenziell lenkenden Hinweise oder Kontextualisierungen angegeben werden, sollten die Aufgaben dabei möglichst offen gestellt werden. Bei der Erstellung der Fragebögen wurde sich dafür entschieden, die folgenden Fragen zu verwenden:

Jemand erzählt dir, dass er nicht weiß, was ein **Kreis** ist. Wie erklärst du es ihm?

Jemand erzählt dir, dass er nicht weiß, was eine **Gerade** ist. Wie erklärst du es ihm?

Jemand erzählt dir, dass er nicht weiß, was ein **Punkt** ist. Wie erklärst du es ihm?

Die ausgewählten Fragen zielen damit auch auf den von Hershkowitz als „Begründung“ bezeichneten Aspekt von Lernprozessen ab, der die vielfältigen Handlungen umfasst, mithilfe derer Lernende anderen und sich selbst erklären, was sie sehen, tun, denken und weshalb. (Hershkowitz 2014, S. 544) Zwischen den Fragen wurde reichlich Platz für die Antworten gelassen. Die angegebene Reihenfolge der Fragen wurde dabei bewusst gewählt, um beim Begriff „Punkt“ zu suggerieren, dass die Frage auf die Verwendung des

Wortes in einem mathematischen Sinne abzielt und nicht beispielsweise auf das als Punkt bezeichnete Satzzeichen.

Die Befragungen wurden in der letzten Schulwoche des Schuljahres 2023/2024 an zwei bayerischen Gymnasien durchgeführt. Dabei wurden die Fragebögen von insgesamt 60 Lernenden der 5. Jahrgangsstufe und 53 Lernenden der 11. Jahrgangsstufe ausgefüllt. Auf inhaltliche Hinweise oder Hilfestellungen zur Beantwortung der Fragen wurde weitestgehend verzich-tet, zudem wurde keine feste Bearbeitungszeit abgesteckt.

Aufgrund des theoretischen Schwerpunkts dieser Arbeit und der Zielsetzung der Befragungen wurde bei der Auswertung der Fragebögen auf die Verwendung umfangreicherer Auswertungsmethoden verzichtet. Antworten wurden einer Grundvorstellung zugeordnet, wenn entsprechende Begriffe oder Zusammenhänge beobachtet werden konnten. Die hergeleiteten Grundvorstellungen wurden dabei im Sinne breit angelegter Kategorien verwendet und mussten nicht vollständig wiedergegeben werden. Es genügte für eine Zuordnung, dass einzelne aufgegriffene Aspekte einen entsprechenden Standpunkt erkennen ließen. Dabei wurden Antworten ggf. auch mehreren Grundvorstellungen zugeordnet.

4.2. Ergebnisse

4.2.1. Lernendenvorstellungen zum Begriff „Punkt“

In der 5. Jahrgangsstufe konnten 48 der 60 Antworten nicht zugeordnet werden. Der Großteil dieser Antworten beschrieb den Punkt explizit als kleinen Kreis, zahlreiche Lernende erklärten das Satzzeichen „Punkt“ am Ende von Sätzen, vereinzelt wurde auf andere Symbole Bezug genommen, z. B. „Malzeichen“ oder „ein Punkt ist ein i. aber ohne den Strich“. Häufig war eine „Konstruktionsbeschreibung“ mit dem Stift zu finden: „Ein Punkt ist, wenn du den Stift auf das Blatt legst aber ihn nicht bewegst[…]“. Eine Person formulierte vermutlich treffend: „Ich kann das leider nich erklären, aber malen:“ In der 11. Jahrgangsstufe konnten 13 der 53 Antworten nicht zugeordnet werden. Überwiegend wurde auch hier auf das Satzzeichen Bezug genommen, 3 Lernende beschrieben den Punkt als ausgefüllten Kreis.

Die Infinitesimal-Vorstellung konnte in der 5. Jahrgangsstufe nicht beobachtet werden. In der 11. Jahrgangsstufe thematisierten 2 der 53 Lernenden die infinitesimale Ausdehnung von Punkten und konnten deshalb diser Grundvorstellung zugeordnet werden: „[…] der Punkt ist so klein, dass nur ein x- und ein y-Wert zugeordnet wird, anders als bei einem Kreis“ und „[…] er hat aber keine Länge, Breite oder Tiefe.“

Der Stellen-Vorstellung konnten 5 der 60 Antworten der 5. Jahrgangsstufe zugeordnet werden, z. B. „Er kennzeichnet auf einer Karte einen Ort.“, „Ein Punkt ist eine Stelle die man ausrechnet“, „Ein Punkt ist eine Stadt ein Ort der Auf einer Karte liegt […]“. In der 11. Jahrgangsstufe wurden 30 der 53 Antworten der Stellen-Vorstellung zugeordnet, z. B. „Ein Punkt ist eine bestimmte Stelle im KoSy“, „Ein Punkt ist an einem Ort definiert“, „Ein Punkt ist eine beliebige Stelle […]“

Die Tupel-Vorstellung konnte bei 4 der 60 Lernenden der 5. Jahrgangsstufe beobachtet werden: „[…] In der Geometrie kriegt man z. B. Koordinaten und zeichnet dann die Punkte ein. […]“. 2 der Lernenden zeichneten dabei ein Koordinatensystem und trugen einen Punkt ein. In der 11. Jahrgangsstufe konnten 24 der 53 Antworten der Tupel-Vorstellung zugeordnet werden. Dabei fanden sich unter anderem folgende Formulierungen: „Ein Punkt liegt in einem Koordinatensystem und wird durch einen x-Wert und einen y-Wert bestimmt.“, „[…] Die Zuordnung von einem x und einem y Wert liefert einen Punkt.“, „ein Punkt besitzt Koordinaten um seinen Standort zu bestimmen.“

Die End-Vorstellung wurde bei 5 der 60 Lernenden der 5. Jahrgangsstufe beobachtet. „Bei einem Punkt fängt z. B. eine Strecke an und endet beim anderen Punkt.“, […] Oder er ist dafür, dass man etwas verbinden kann.“, „Ein punkt kann ein anfang eine Linie oder ende sein“. In der 11. Jahrgangsstufe konnte sie in keiner Antwort identifiziert werden.

Die Einheits- und Schnitt-Vorstellung konnte weder in der 5. Jahrgangsstufe noch in der 11. Jahrgangsstufe beobachtet werden.

4.2.2. Lernendenvorstellungen zum Begriff „Gerade“

Von den 60 Fragebögen aus der 5. Jahrgangsstufe konnten 10 Bögen keiner Grundvorstellung zum Begriff der Geraden zugeordnet werden, weil die Frage entweder gar nicht, nur mit einer Skizze oder zu undetailliert („Ist ein Strich“) beantwortet wurde. 15 weitere Antworten wurden nicht zugeordnet, da sie fachlich falsch waren. Der Großteil dieser Lernenden beschrieb dabei eine Halbgerade oder Strecke: „Eine Gerade hat einen Anfang aber kein Ende“, „Ein Strich der ein Anfang und ein Ende hat.“ Eine Antwort lautete: „Eine Linie wo gerade ist als nich krum“, wobei unter „gerade“ eine vertikale gerade Linie gezeichnet wurde und unter „krum“ zwei kurvige Linien aber auch zwei diagonal verlaufende gerade Linien. In der 11. Jahrgangsstufe wurden aus diesen Gründen 21 der 53 Antworten nicht zugeordnet, wobei 4 dieser Antworten explizit falsch waren, da hier eine Strecke bzw. Halbgerade beschrieben wurde.

Aspekte der Streckenverlängerungs-Vorstellung konnten bei 5 der 60 Antworten insofern identifiziert werden, als die Gerade direkt vom Begriff der Strecke abgeleitet oder die Verbindung zweier Punkte beschrieben wurde: „Eine Gerade ist eine Strecke die von einem zum andern Punkt führt aber nicht endet sonder unendlich ist“ bzw. „Eine Gerade ist eine gerade Linie, die keinen Endpunkt hat. Sie geht über die Punkte hinweg.“ Ein expliziter Verlängerungsvorgang wurde dabei von niemandem beschrieben. In der 11. Jahrgangsstufe konnte der Grundvorstellung eine der 53 Antworten zugeordnet werden: „[…] Sie kann in beide Richtungen fortgesetzt werden“

Der Unbegrenzte-Linien-Vorstellung konnten 33 der 60 Antworten zugeordnet werden. Dabei wurde häufig sehr nah an der Grundvorstellung formuliert, teilweise wurde das Fehlen von Anfangs- und Enpunkten auch durch eine unendliche Länge ausgedrückt oder dadurch, dass sie ins Unendliche führt: „eine gerade hat keine anfang ohne ende“, „Strich mit ohne Ende“, „Eine Gerade ist eine Linie die unendlich lang läuft.“ In der 11. Jahrgangsstufe wurden 21 der 53 Antworten der Unbegrenzte-Linien-Vorstellung zugeordnet. Hier fanden sich ähnliche Formulierungen wie in der 5. Jahrgangsstufe.

Die restlichen Grundvorstellungen konnten bei keiner der Antworten aus der 5. Jahrgangsstufe beobachtet werden. Dies ist wenig überraschend, weil die entsprechenden Inhalte erst in höheren Jahrgangsstufen behandelt werden.

Aspekte der Funktionale-Punktmengen-Vorstellung konnten bei 6 der 53 Anworten aus der 11. Jahrgangsstufe beobachtet werden: „[…] es kann ein Funktionsterm aufgestellt werden. […]“, „Eine Gerade ist die graphische Darstellung einer linearen Funktion […]“, „[…] man kann Geraden mit $y = m \cdot x + t$ beschreiben“.

Aspekte der Achsenabschnitt- und Punkt-Steigungs-Vorstellung konnte in der 11. Jahrgangsstufe bei 9 von 53 Lernenden beobachtet werden. Hier wurden überwiegend der Begriff „Steigung“ zur Charakterisierung von Geraden verwendet: „es ist eine Linie mit der selben Steigung an allen Stellen“, „eine Linie, die eine beliebige Steigung haben kann“. Ein zusätzlicher Bezug zu y-Achsenabschnitt oder einem anderen Bezugspunkt wurde von einer Person hergestellt: „Eine Gerade ist in einem Koordinatensystem eine Linien, die eine bestimmte Steigung und einen bestimmten Schnittpunkt mit der y-Achse besitzt.“

Der Hypotenusenverlängerungs-Vorstellung wurden 2 der 53 Antworten zugeordnet, wobei auch hier nicht explizit von einer Verlängerung gesprochen wurde: „Eine Gerade ist ein gerader Strich, der durch zwei verschiedene Punkte (in einem Koordinatensystem) verläuft. Die Gerade geht nach dem Schneiden der Punkte unendlich weiter.“, „Zwei Punkte sind auf dem kürzesten Weg miteinander verbunden und die Steigung der so entstehenden Linie ist immer gleich.“

Die Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung konnte bei keiner der Antworten aus der 11. Jahrgangsstufe beobachtet werden. Ebenso wurden alle weiteren Grundvorstellungen nicht beobachtet, die den Geradenbegriff im Kontext der analytischen Geometrie betrachten. Auch das ist plausibel, da diese Inhalte nicht in der 11. Klasse behandelt werden.

4.2.3. Lernendenvorstellungen zum Begriff „Kreis“

Die Antworten aus der 5. Jahrgangsstufe wurden überwiegend von Kreisskizzen begleitet, in der 11. Jahrgangsstufe verwendeten nur 6 der 53 Lerndenen eine Skizze. In der 5. Jahrgangstufe enthielten 4 der 60 ausgewerteten Bögen lediglich eine Kreisskizze ohne Beschreibungen. Da anhand dieser Antworten keine Bezüge zu den Grundvorstellungen hergestellt werden konnten, wurden sie keiner der Kategorien zugeordnet. In der 11. Jahrgangsstufe konnte aus dem selben Grund eine der 53 Antworten nicht zugeordnet werden.

Die Punktmengen-Vorstellung konnte fast gar nicht beobachtet werden. 2 der 60 Antworten enthielten einen Bezug zur Idee des Abstands: „[…] der Abstand zwischen Mittelpunkt und Rand ist immer gleich“ und „Ein Kreis zeigt an wo sich etwas im Radius befind.“ Letztere Antwort beschreibt dabei entweder die Kreislinie oder die Kreisfläche. Eine weitere Antwort nahm Bezug zum Begriff des Radius: „[…] Kreise haben einen Radius und einen Durchmesser.“ Zwei weitere Lernende zeichneten in ihre Kreisskizze einen Mittelpunkt ein, wobei er nur in einem Fall mit M und „Mittelpunkt“ beschriftet wurde. Anders sah es in der 11. Jahrgangsstufe aus. 17 der 53 Lernenden konnten der Punktmengen-Vorstellung zugeordnet werden. Dabei wurde größtenteils sehr nah an den üblichen Schulbuch-Definitionen formuliert, z. B. „Ein Kreis ist eine runde Form aus sehr vielen Punkten, wobei jeder den gleichen Abstand zum Mittelpunkt hat.“ Teilweise wurde auch die Kreisfläche beschrieben, z. B. „Ein Kreis ist eine runde Fläche, bei dem alle Punkte des Randes gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind.“

Aspekte der Bewegungs-Vorstellung konnten in der 5. Jahrgangsstufe in 9 der 60 Anworten gefunden werden. Dabei wurde die Kreislinie überwiegend indirekt im Sinne einer Bewegung beschrieben, indem sie als unendlich bezeichnet wurde, von sich treffenden Enden gesprochen oder die Begriffe Anfang und Ende verwendet wurden. In 3 der Antworten wurde die Konstruktion mit dem Zirkel erwähnt, was ebenfalls dieser Vorstellung zugeordnet wurde. Zugeordnete Antworten lauten beispielsweise: „ein kreis ist eine runder strich wo man wen man mit dem finger die linie nachfährt und sie nicht aufhört.“, „Ein Kreis ist eine gleichmäßig gebogene Linie wo sich die Enden treffen.“, „ein Kreis ist eine runde Linie die […] sich irgendwo trifft man aber kein anfang oder ende finden kan“, „Ein Kreis ist was man mit einen zirkel zeichnet. […]“ In der 11. Jahrgangsstufe wurden 16 der 53 Antworten der Bewegungs-Vorstellung zugeordnet. Dabei fanden sich ähnliche Beschreibungen wie in der 5. Jahrgangsstufe, zudem weitere Formulierungen wie „[…] Beim Zeichnen setzt man den Stift nicht ab. […]“ 4 der Antworten verwiesen explizit auf die Konstruktion von Kreisen mit einem Zirkel.

Die Form-Vorstellung konnte in der Mehrheit der Antworten identifiziert werden. 53 der 60 Lernenden konnten dieser Vorstellung zugeordnet werden. Dabei wurde der Kreis überwiegend als rund bzw. etwas Rundes bezeichnet, häufig mit dem Zusatz, dass er keine Ecken oder Kanten besitzt. Bei 2 der Antworten fand sich die Beschreibung der Kreisform als Viereck ohne Ecken. Vereinzelt fanden sich Beschreibungen wie „gleichmäßig gebogene Linie“, häufig wurden (in der Regel kugelförmige) Alltagsgegenstände als Beispiele angegeben: „die gleiche Form wie ein Fußball“. Ähnlich sah es in der 11. Jahrgangsstufe aus. Dort wurden 47 der 53 Antworten der Form-Vorstellung zugeordnet. Auch hier wurden ähnliche Formulierungen wie in der 5. Jahrgangsstufe verwendet. „Rund“ war auch hier das am häufigsten verwendete Wort zur Beschreibung von Kreisen. Teilweise wurden ebenfalls Alltagsbeispiele verwendet, zudem wurde nun auch vereinzelt der Begriff der Krümmung verwendet. Auch hier wurde das Fehlen von Ecken oder Kanten erwähnt.

Aspekte der Symmetrieachsen-Vorstellung konnten in 2 der 60 Antworten idenfiziert werden. Dieser Kategorie zugeordnet wurden die beiden folgenden Aussagen, welche die Symmetrie des Kreises ansprechen: „[…] Er ist rund wenn man von lings nach rechts und von oben nach unten geht ist er gleich lang. Er ist symetrisch.“ und „[…] Er kann groß oder klein sein, aber er immer symetrisch. […]“ In der 11. Jahrgangsstufe wurden 2 der 53 Antworten der Symmetrieachsen-Vorstellung zugeordnet: „Ein Kreis ist rund und hat unendlich viele Symmetrieachsen. […]“ und „Ein Kreis […] ist sowohl Punkt- als auch Achsymmetrisch“, wobei darauf hingewiesen wurde, dass sich die Punktsymmetrie auf den „Mittelpunkt M“ bezieht und die Achsensymmetrie auf alle Geraden, die den Mittelpunkt M enthalten.

Der Vieleck- und Querschnitt-Vorstellung konnte weder in der 5. noch in der 11. Jahrgangsstufe eine Antwort zugeordnet werden. Der Abstrakte-Objekt-Vorstellung konnte keine der Antworten aus der 5. Jahrgangsstufe und eine Antwort aus der 11. Jahrgangsstufe zugeordnet werden. Hier fand sich die folgende Aussage als Teil der Antwort: „[…] Dieser wird durch einen Durchmesser, Radius, Fläche und Umfang definiert.“

4.2.4. Zusammenfassung der Ergebnisse

Zusammenfassend konnte anhand der Lernendenbefragungen festgestellt werden, dass sich die Grundgedanken mehrerer theoretisch hergeleiteter Grundvorstellungen auch in tatsächlichen Lernendenaussagen wiederfinden lassen. Detaillierte Beschreibungen des Punktbegriffs fanden sich in der 5. Jahrgangsstufe nur vereinzelt, was im Hinblick auf die lediglich indirekte Thematisierung des Begriffs in den Schulbüchern plausibel erscheint. In der 11. Jahrgangsstufe konnten vor allem Aspekte der Stellen-Vorstellung und der Tupel-Vorstellung beobachtet werden. Insbesondere beim Punktbegriff wurde ein starker Rückgang der unspezifischen, ausschließlich zeichnerischen oder fachlich falschen Antworten festgestellt. Hier scheint die fortwährende Verwendung des Punktbegriffs im Unterricht zu einer Bildung oder Mathematisierung der Lernendenvorstellungen zu führen.

Beim Begriff der Geraden wurde die Unbegrenzte-Linien-Vorstellung mit Abstand am häufgsten beobachtet, unabhängig von der Jahrgangsstufe. Der Gedanke der Streckenverlängerung wurde insgesamt kaum erwähnt. In der 11. Klasse wurde zudem vereinzelt der Funktionsbegriff zur Charakterisierung von Geraden verwendet. Erwähnenswert ist zudem, dass ein Viertel der Antworten aus der 5. Jahrgangsstufe den Begriff der Geraden mit fachlich falschen Vorstellungen verband, überwiegend wurde die Gerade dabei mit dem Begriff der Strecke oder Halbgeraden verwechselt. Vereinzelt traten diese Fehler auch in der 11. Jahrgangsstufe auf. Es konnte dabei ein Abnahme der fachlich falschen Antworten relativ zur Anzahl der Befragten beobachtet werden, auch wenn sich in der 11. Jahrgangsstufe weiterhin viele unspezifische Antworten fanden.

Kreise wurde in beiden Jahrgangsstufen von den meisten Lernenden zumindest teilweise mithilfe der Form-Vorstellung charakterisiert, häufig unter Verwendung von Alltagsgegenständen als Beispiele. Im Hinblick auf die hohe Anzahl der Lernenden der 11. Jahrgangsstufe, die diesen Ansatz wählten, spielt möglicherweise auch eine Bildung der Grundvorstellungen in früheren Jahrgangsstufen und anschließende Beibehaltung dieser Vorstellungen eine Rolle. Überraschend war, dass die Punktmengen-Vorstellung bei

Lernenden der 5. Jahrgangsstufe kaum beobachtet werden konnte, obwohl diese im Wesentlichen der Definition des Kreisbegriffs in den Schulbüchern entspricht und im Schuljahr der Befragung behandelt worden sein sollte.

Eine Entwicklung der dominanten Vorstellungen zwischen 5. und 11. Jahrgangsstufe konnte somit teilweise beobachtet werden. Insgesamt wurden abstraktere Vorstellungen wie die Skalare-Lösungsmengen-Vorstellung oder die Abstrakte-Objekt-Vorstellung kaum beobachtet. Stattdessen fanden sich in beiden Jahrgangsstufen primär anschauliche Vorstellungen wie die Unbegrenzte-Linien-Vorstellung der Geraden oder die Form-Vorstellung des Kreises. Ob dabei insbesondere Lernende der 11. Jahrgangsstufe aufgrund der Aufgabenstellung, einer mit dem Begriff unvertrauten Person dessen Grundgedanken zu vermitteln, verstärkt anschauliche Erklärungsansätze wählten könnte in weiteren empirischen Untersuchungen geklärt werden.

5. Abschließende Bemerkungen

Im Zuge dieser Arbeit wurden die Begriffe Punkt, Gerade und Kreis aus unterschiedlichen Blickwinkeln analysiert, wobei das von Salle & Clüver vorgestellte Verfahren zur theoretischen Herleitung normativer Grundvorstellungen (Salle & Clüver 2021) als Grundlage diente. Dabei zeigte sich, dass die betrachteten Begriffe im Kontext der Sekundarstufe des bayerischen Gymnasiums jeweils anhand verschiedener Eigenschaften charakterisiert werden können, welche sich in Form ausformulierter Grundvorstellungen festhalten lassen. Es wurden dabei insgesamt 6 verschiedene Grundvorstellungen zum Begriff des Punktes, 11 Grundvorstellungen zum Geradenbegriff und 7 Grundvorstellungen zum Begriff des Kreises hergeleitet. Da es sich dabei um rein normative Vorstellungen handelt wurde durch eine anschließende Lernendenbefragung in zwei verschiedenen Jahrgangsstufen ein erster Überblick geschaffen, wie sich Lernende in der Praxis den untersuchten Begriffen nähern. Dabei stellten sich einzelne Grundvorstellungen als überaus relevant heraus, während andere Vorstellungen überhaupt nicht beobachtet werden konnten. Sowohl die theoretisch als auch empirisch gewonnenen Ergebnisse dieser Arbeit können als Ausgangspunkt für weiterführende Untersuchungen zu Grundvorstellungen von Lernenden dienen, mit dem Ziel, auftretende Schwierigkeiten von Lernenden im Umgang mit den entsprechenden Begriffen zu erklären und die im Schulalltag stattfindenden Lehr-Lern-Prozesse zu optimieren.

Literaturverzeichnis

Anderson, J. R. (1996): Kognitive Psychologie. Heidelberg/Berlin/Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Arcavi, A. (2003): The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 52, S. 215-241.

Arens, T. et al. (2008): Mathematik. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Behnke, H., Tietz, H. (1976): Mathematik 2. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag.

Berchtold, F. (2017): Geometrie. Berlin: Springer Spektrum.

Biburger, J. et al. (2019): Lambacher Schweizer 7. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Biburger, J. et al. (2020): Lambacher Schweizer 8. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Biburger, J. et al. (2021): Lambacher Schweizer 9. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Biburger, J. et al. (2022): Lambacher Schweizer 10. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Biburger, J. et al. (2023): Lambacher Schweizer 11. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Birner, G. et al. (2009): Fokus Mathematik 11. Berlin: Cornelsen.

Birner, G. et al. (2010): Fokus Mathematik 12. Berlin: Cornelsen.

Bonnycastle, J. (1803): Elements of Geometry. London: Printed for J. Johnson.

Borowski, E. J., Borwein, J. M. (1989): Collins Dictionary of Mathematics. Glasgow: Collins.

Brendel, A. et al. (2021): mathe.delta 9. Bamberg: C. C. Buchner.

Brendel, A. et al. (2022): mathe.delta 10. Bamberg: C. C. Buchner.

Brendel, A. et al. (2023): mathe.delta 11. Bamberg: C. C. Buchner.

Brockhaus Enzyklopädie: https://brockhaus.de/ecs/enzy/article/atom-chemie/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Bronstein, I. N. et al. (2008): Taschenbuch der Mathematik. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

Casey, J. (1885): The First Six Books of the Elements of Euclid. Dublin/London: Hodges, Figgis & Co./Longmans, Green & Co.

Clapham, C., Nicholson, J. (2014): The Concise Oxford Dictionary of Mathematics. Oxford: Oxford University Press.

Clements, D., Battista, M. (1992): Geometry and Spatial Reasoning. In: Grouws, D. et al., Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing. S. 420-464.

Clements, D. (2003): Teaching and Learning Geometry. In: Kilpatrick, J. et al., A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. S. 151-178.

Copleston, F. (2003): A History of Philosophy, Volume 1. New York: Continuum.

Dilling, F. (2019): Ebenen und Geraden zum Anfassen. In: Frank, A. et al., Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. Münster: WTM-Verlag. S. 177-180.

Distel, B. et al. (2016): Fokus Mathematik 5. Berlin: Cornelsen.

Distel, B. et al. (2019): Fokus Mathematik 7. Berlin: Cornelsen.

Distel, B. et al. (2020): Fokus Mathematik 8. Berlin: Cornelsen.

Distel, B. et al. (2021): Fokus Mathematik 9. Berlin: Cornelsen.

Distel, B. et al. (2022): Fokus Mathematik 10. Berlin: Cornelsen.

Duden (Gerade): https://www.duden.de/rechtschreibung/Gerade/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Duden (gerade): https://www.duden.de/rechtschreibung/gerade_linear_aufrecht/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Duden (Kreis): https://www.duden.de/rechtschreibung/Kreis/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Duden (Punkt): https://www.duden.de/rechtschreibung/Punkt/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Duval, R. (2006): A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In: Educational Studies in Mathematics 61, S. 103-131.

Eisentraut, F. et al. (2017): mathe.delta 5. Bamberg: C. C. Buchner.

Eisentraut, F. et al. (2019): mathe.delta 7. Bamberg: C. C. Buchner.

Eisentraut, F. et al. (2020): mathe.delta 8. Bamberg: C. C. Buchner.

Euklid: Die Elemente. Buch I-XIII, übersetzt von Thaer, C., 1973. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Feuerlein, R., Distel, B. (2009): Mathematik 11. München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Feuerlein, R., Distel, B. (2010): Mathematik 12. München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Fischer, G., Springborn, B. (2020): Lineare Algebra. Berlin: Springer Spektrum.

Fröhlich, S., (1): https://www.geometrie-und-logik.de/antike/die-elemente/quelleneukldef-i1/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Fröhlich, S., (2): https://www.geometrie-und-logik.de/antike/die-elemente/quelleneukldef-i2/, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Frohmader, B. et al. (2017): Lambacher Schweizer 5. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Gellert, W. et al. (1978): Fachlexikon ABC Mathematik. Thun/Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.

Gerdes, P. (1997): Ethnomathematik – dargestellt am Beispiel der Sona Geometrie. Heidelberg/Berlin/Oxford: Springer Spektrum.

Hartmann, M. (1855): Grundlehren der Geometrie. Wien: Tendler & Comp.

Hattermann, M. (2015): Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie. In: Ludwig, M. et al., Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Wiesbaden: Springer Fachmedien. S. 75-86.

Hattermann, M. et al. (2023). Geometrie: Leitidee Raum und Form. In: Bruder, R. et al., Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. S. 201-242.

Heath, T. L. (1908): The Thirteen Books of Euclid‘s Elements, Volume 1. Cambridge: University Press.

Hershkowitz, R. (2014). Shape and Space - Geometry Teaching and Learning. In: Lerman, S. et al., Encyclopedia of Mathematics Education. Dordrecht: Springer. S. 542-547.

Immel, K. (1873): Die Elemente der Raumlehre in Verbindung mit dem geometrischen Zeichnen. München: Lindauer.

Kasparek, S. (2023): Der Garten der Unendlichkeit. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Katter, V. (2023): Historische, logische und individuelle Genese der Trigonometrie aus didaktischer Sicht. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kaufmann, S.-H. (2021): Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Kavanaugh, L. J. (2007): The Architectonic of Philosophy. Amsterdam: Amsterdam University Press.

Kirchmann, J. H. v. (1871): Die Metaphysik des Aristoteles. Berlin: L. Heimann.

Knerr, R. (1978): Lexikon der Mathematik. Frankfurt am Main: Fischer Taschenbuch Verlag.

Knörrer, H. (2006): Geometrie. Wiesbaden: Vieweg.

Koecher, M. (1997): Lineare Algebra und analytische Geometrie. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Kries, F. (1826): Lehrbuch der reinen Mathematik. Jena: Friedrich Frommann.

Lardner, D. (1848): The First Six Books of the Elements of Euclid. London: Henry G. Bohn.

Law, H. (1853): The Elements of Euclid. London: John Weale.

LehrplanPLUS: https://www.lehrplanplus.bayern.de/schulart/gymnasium, letzter Zugriff: 29.08.2024.

Maier, P. (1999): Räumliches Vorstellungsvermögen. Donauwörth: Auer Verlag.

Meschkowski, H. et al. (1969): Mathematik-Duden für Lehrer. Mannheim/Zürich: Bibliographisches Institut.

Milliet D‘Chales, C. F. (1748): The Elements of Euclid. London: Printed for J. & T. Wilcox, T. Heath.

Padberg, F., Wartha S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung. Berlin: Springer Spektrum.

Pegg, J. (2014). The van Hiele Theory. In: Lerman, S. et al., Encyclopedia of Mathematics Education. Dordrecht: Springer. S. 613-615.

Perron, O. (1962): Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Pinkernell, G. (2003): Räumliches Vorstellungsvermögen im Geometrieunterricht. Hildesheim/Berlin: Verlag Franzbecker.

Pirkenstein, A. E. B. v. (1699): Teutsch-redender Euclides. Lübeck/Frankfurt: In Verlegung Johann Wiedemeyers.

Playfair, J. (1795): Elements of Geometry. Edinburgh: Bell & Bradfute, and G. G. & J. Robinson, London.

Reiss, K., Hammer, C. (2021): Grundlagen der Mathematikdidaktik. Cham: Birkhäuser.

Ruwisch, S., Weigand, H.-G. (2023). Begriffe bilden. In: Bruder, R. et al., Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. S. 281-312.

Salle, A., Clüver, T. (2021): Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. In: Journal für Mathematik-Didaktik 42 (2), S. 553-580.

Salle, A. et al. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In: Bruder, R. et al., Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. S. 429-461.

Schätz, U. et al. (2009): delta 11. Bamberg: C. C. Buchner.

Schätz, U. et al. (2010): delta 12. Bamberg: C. C. Buchner.

Scheid, H., Schwarz, W. (2017): Elemente der Geometrie. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Scriba, C. J., Schreiber, P. (2010): 5000 Jahre Geometrie. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Silvester, J. R. (2001): Geometry - Ancient and Modern. New York: Oxford University Press.

Smith, J. H. (1871): Elements of Geometry, Part I. London/Oxford/Cambridge: Rivingtons.

Somerville, S., Bryant, P. (1985): Young Children's Use of Spatial Coordinates. In: Child Development 56 (3), S. 604-613.

Stein, M. (1999): Geometrie. Heidelberg/Berlin: Springer Akademischer Verlag.

Stone, E. (1728): Euclid's Elements of Geometry. London: Printed for D. Midwinter, J. Osborn, T. Longman.

Sträßer, R. (2015): Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. In: Ludwig, M. et al., Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Wiesbaden: Springer Fachmedien. S. 1-12.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. In: Journal für Mathematik-Didaktik 10, S. 3–37.

Vollrath, H.-J. (1998): Zum Verständnis von Geraden und Strecken. In: Journal für Mathematik-Didaktik 19, S. 201–219.

Walz, G. et al. (2017): Lexikon der Mathematik: Band 4. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G. (2018): Begriffslernen und Begriffslehren. In: Weigand, H.-G. et al., Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin: Springer Spektrum. S. 85-106.

Wußing, H. (1989): Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Wußing, H. (2008): 6000 Jahre Mathematik, Bd. 1. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag.

Wyss, A. et al. (2018): Lebendiges Denken durch Geometrie. Bern: FPV.

Zeitler, H. (1972): Axiomatische Geometrie. München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

Impressum

Mathematikdidaktik im Kontext

ISSN 2568-0331

Heft 9

Punkt, Gerade, Kreis:
Eine verfahrensbasierte Herleitung von Grundvorstellungen

Bayreuth, 2024

Elektronische Fassung unter:
https://epub.uni-bayreuth.de/view/series/Mathematikdidaktik_im_Kontext.html

Autor

Tobias Zeitler

Herausgeber

Carsten Miller und Volker Ulm
Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universitätsstraße 30
95440 Bayreuth

www.dmi.uni-bayreuth.de