

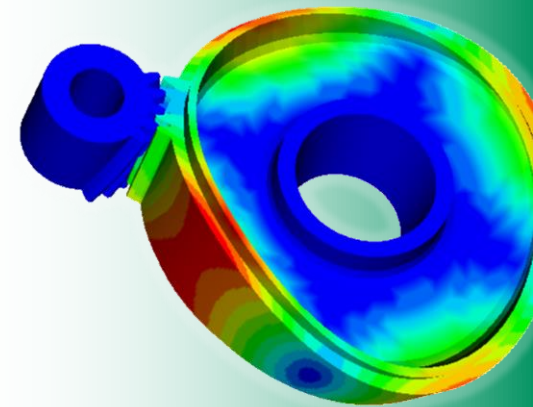
FE-Modalanalyse auf Basis von Z88

Eigenschwingungen in der Antriebstechnik

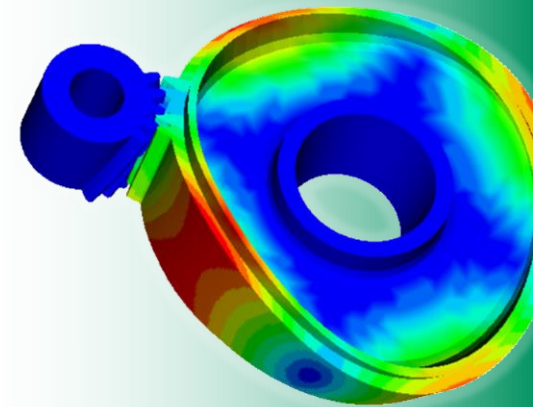
Johannes Wittmann, Florian Hüter

23. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

Bayreuth, 14.09.2022



- Motivation
- Eigenschwingungsanalyse auf Basis von Z88
- Zwangsbedingungen bei Eigenschwingungen
- Modalanalyse mit Betriebspunkt-Tangentensteifigkeit
- Zusammenfassung, Fazit & Ausblick



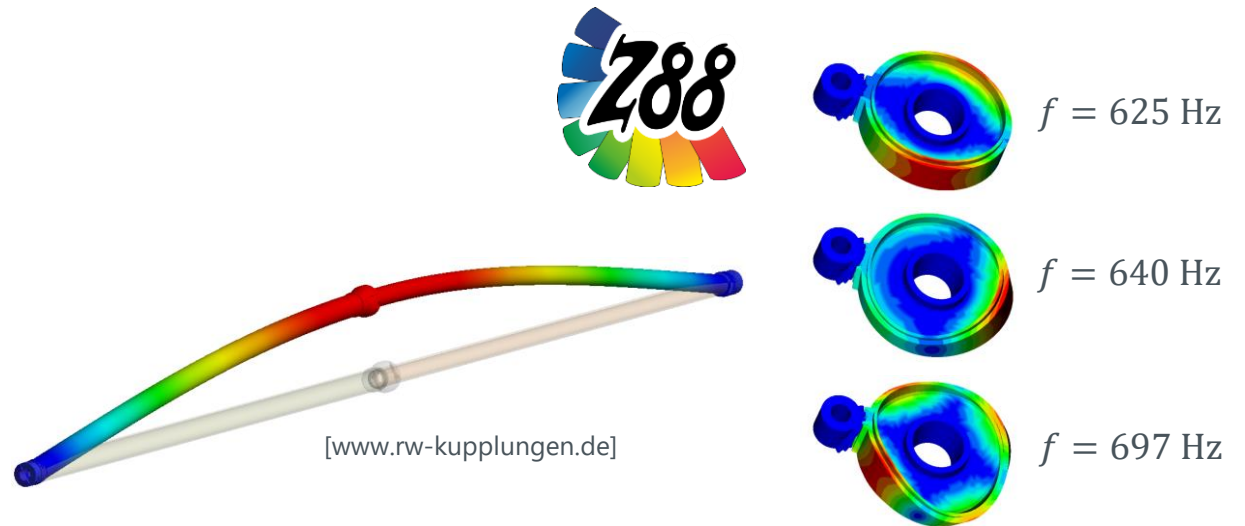
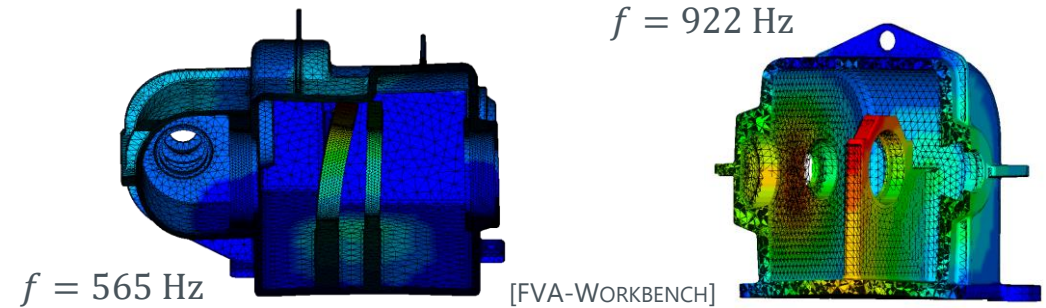
Motivation

Geräusch- und Schwingungsanregung

- Anwendungsgebiete: Zahnradgetriebe und Getriebegehäuse mechanischer Antriebsstränge
- Lösung der Eigenschwingungen im relevanten **Frequenzbereich** wünschenswert

Betriebspunkt-Modalanalyse

- Resonanzfrequenzen bei zugrunde liegendem nichtlinearem Strukturverhalten
- Lösung der Eigenschwingungen unter Berücksichtigung der **Tangentensteifigkeit**

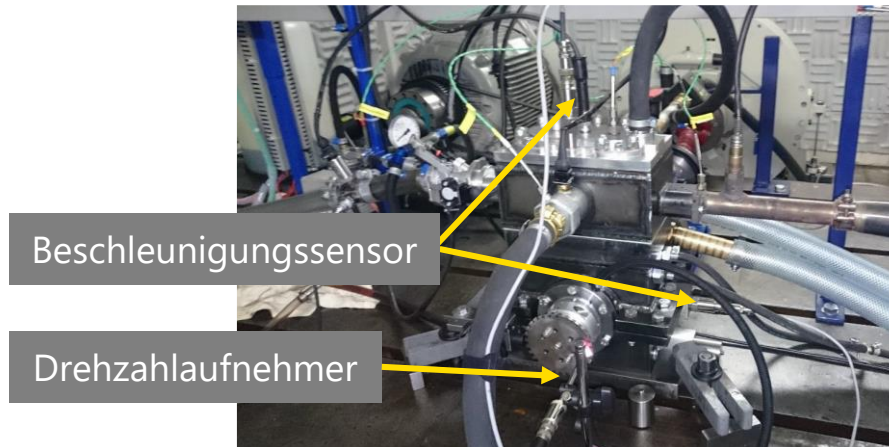


Eigenschwingungsanalyse mit Z88

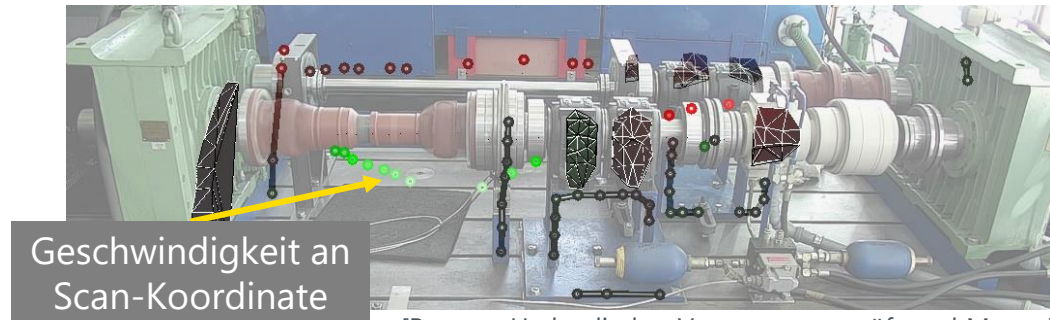
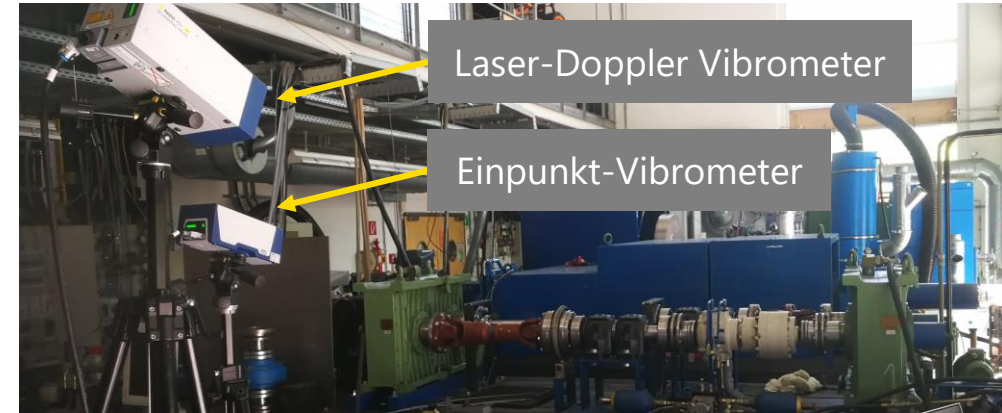
Motivation - Möglichkeiten zur Messung von Schwingungen

Experimentelle Modalanalyse allgemein

- Vibrationsmessungen über montierte Beschleunigungs- und Drehzahlreferenzaufnehmer
- Berührungsfreie Messung über Laser-Doppler-Vibrometrie (optische Interferenz & DOPPLER-Effekt)



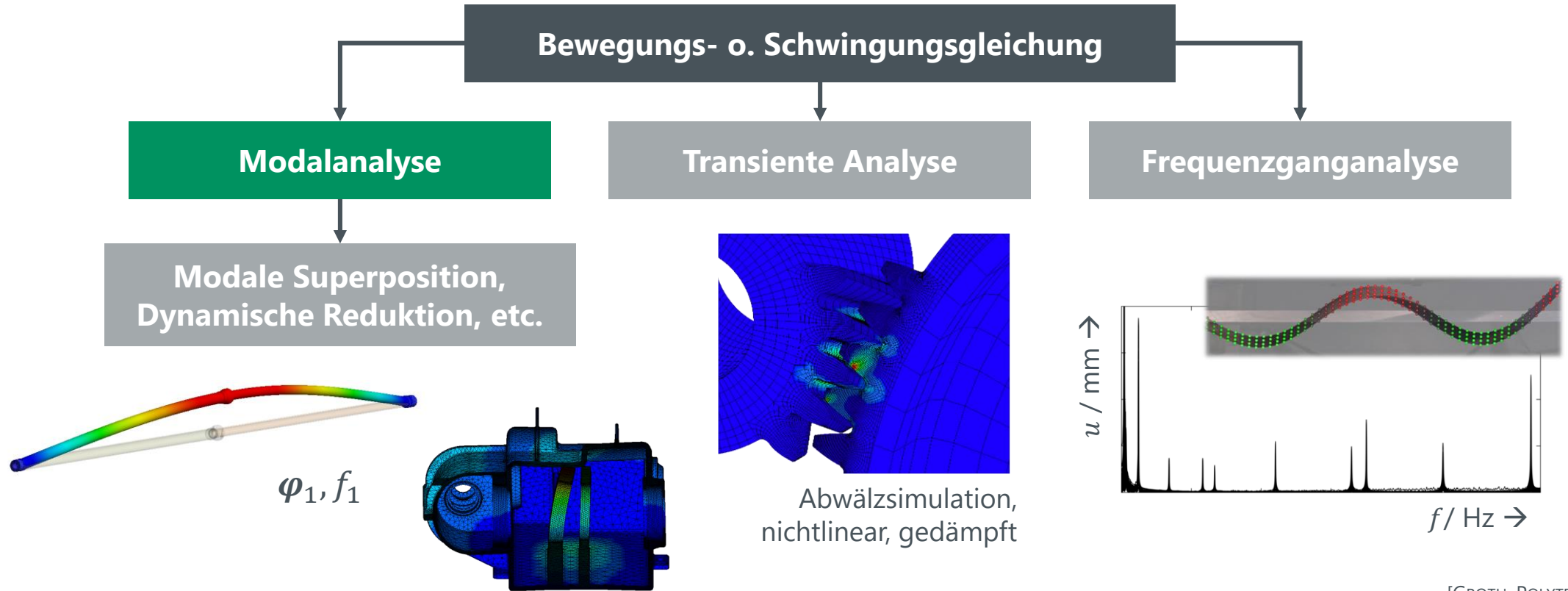
[BRENDL, Doppelkolbenmotor nach RIEG]



[POLYTEC, Hydraulischer Verspannungsprüfstand MORITZ]

→ **Messtechnische Validierung der FE-Modalanalyse**





[GROTH, POLYTEC]

Trägheitsabbildung

Elementweise Erzeugung der Massenmatrix

- Konsistente Form

$$\mathbf{M}_e = \rho_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, s, t)} \right| dr ds dt$$

x			x	x	
	x	x			x
	x	x	x		
x		x	x		x
x				x	
	x		x		x

- Diagonalform nach HINTON

$$\mathbf{M}_{ii}^{diag} = \vartheta_e \mathbf{M}_{ii} \mathbf{I}$$

$$\text{mit } M_{ii} = \int_{V_e} \rho_e N_i^2 dV, \quad \vartheta_e = \frac{m_e}{\sum_{i=1}^{dof} M_{ii}}$$

x					
	x				
		x			
			x		
				x	
					x

- Compilation zu **Gesamtmassenmatrix**
- **Schwingungsgleichung** aus der FE-Strukturdynamik

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$$

[HINTON, BATHE, RIEG]



Ungedämpftes Eigenwertproblem

- Ausgangsgleichung des Schwingungssystems

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t)$$

- Vernachlässigung der Dämpfung in Bewegungsgleichung
→ reelle Eigenwerte und Eigenvektoren als Ergebnis

- Freie Schwingungen
→ keine Berücksichtigung äußerer Kräfte

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$$

- Lösungsansatz $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}e^{i\omega t}$ ergibt allgemeines Eigenwertproblem (EWP)

$$(\mathbf{K} - \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$$

mit Eigenwerten $\boldsymbol{\Lambda}$ und Modalmatrix $\boldsymbol{\phi}$

Transformation

- Standard-Eigenwertproblem über Cholesky-Zerlegung:

$$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}$$

$$\text{mit } \mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \text{ und } \mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{L}^{-T}$$

- *Shift & invert spectral transformation:*

$$(\mathbf{K} - \sigma\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} = \nu\boldsymbol{\phi}$$

$$\text{mit } \lambda = \sigma + \frac{1}{\nu}$$

- Rücktransformation größter Eigenwerte ν führt zu kleinsten Eigenwerten λ des Originalsystems (allgemeines EWP)

→ Sehr effektiv, um Eigenwerte nahe σ und im **relevanten Frequenzbereich** zu berechnen

[GASCH, NASDALA, KÖCKLER, LEHOUCQ, HETMANIUK]



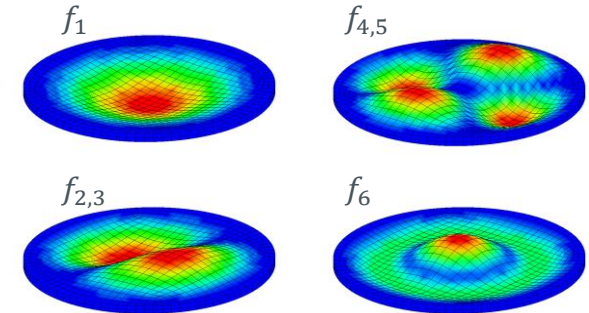
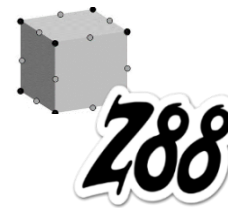
Lösungsmethoden

- LANCZOS-Algorithmus (z. B. in Z88Aurora®)
- *Implicitly Restarted ARNOLDI Method (IRAM)*
 - Geschwindigkeitsvorteil für große & dicht besetzte Strukturen
 - Verbesserte Konvergenz bei Singularitäten



Ergebnisse

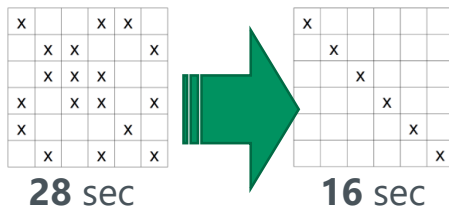
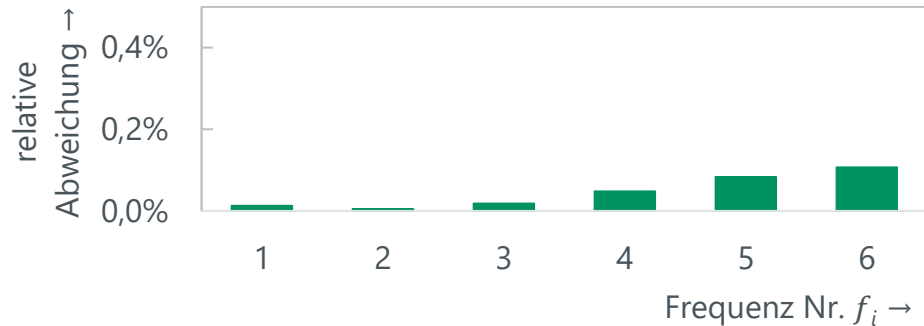
- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
 - Massennormiert: $\varphi_i^T M \varphi_i = I$
 - Verschiebungsnormiert: $\max(|\varphi_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)



[LEHOUCQ, RIEG, www.z88.de]

Konsistent vs. Diagonal

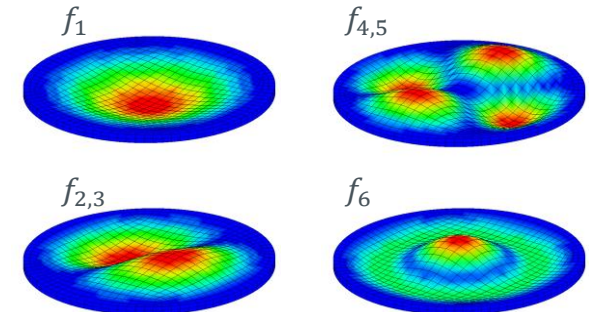
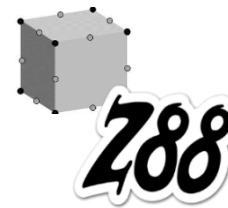
- Gute Übereinstimmung der Eigenfrequenzen aus **konsistent & diagonal** besetzter Massenmatrix



→ Deutliche **Zeitersparnis** bei ähnlicher Ergebnisgüte

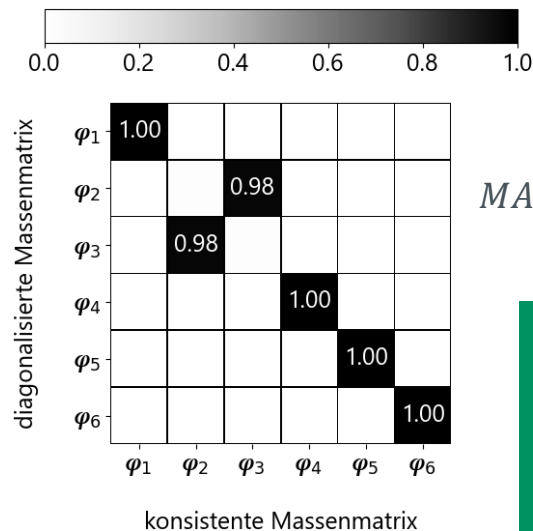
Ergebnisse

- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
 - Massennormiert: $\varphi_i^T M \varphi_i = I$
 - Verschiebungsnormiert: $\max(|\varphi_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)



Konsistent vs. Diagonal

- Vergleichsmethode: *Modal Assurance Criterion*
- Prüft Orthogonalität des Eigenvektorpaars über das normierte Skalarprodukt

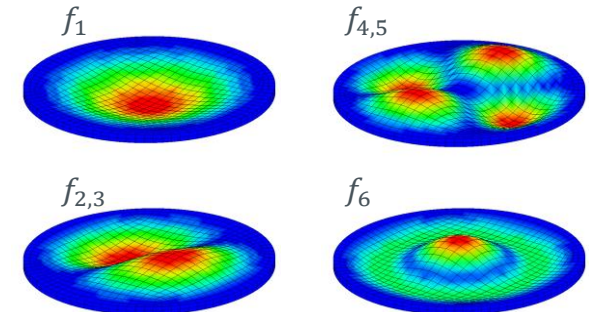
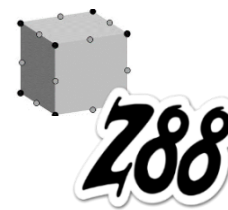


$$MAC(i,j) = \frac{(\varphi_{Ai}^T \varphi_{Bj})^2}{(\varphi_{Ai}^T \varphi_{Ai})(\varphi_{Bj}^T \varphi_{Bj})}$$

→ Gute Korrelation der
Eigenvektoren aus
konsistent & diagonal
besetzter Massenmatrix

Ergebnisse

- Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ mit $\omega = \sqrt{\lambda}$
- Eigenformvektoren
 - Massennormiert: $\varphi_i^T M \varphi_i = I$
 - Verschiebungsnormiert: $\max(|\varphi_i(k)|) = 1$
- Beispiel: Stahlscheibe aus Hexaederelementen (quadr. Ansatz)



[DRESIG]

Zwangsbedingungen bei ungedämpften Eigenschwingungen

Berücksichtigung von Kontakt- oder Koppelbedingungen

- Zwangsbedingungen in Ausgangs-Bewegungsgleichung
 $GU - V = 0 \rightarrow M\ddot{u}(t) + D\dot{u}(t) + Ku(t) = F(t)$
- Einbau in das allgemeine Eigenwertproblem

- LAGRANGE-Ansatz mit Störparameter

$$\left(\begin{bmatrix} K & G^T \\ G & -1/\beta I \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \Phi = 0$$

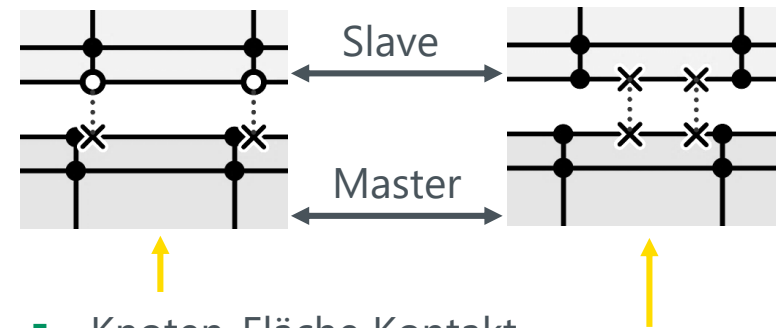
- Penalty-Methode

$$((K + \beta G^T G) - \lambda M) \Phi = 0$$

- Nichtlineare Kontaktzustandsänderung nur in vorgeschalteter quasi-statischer bzw. transienter Simulation

→ **Betriebspunktlinearisierung:** Kontaktzustand ändert sich in der Eigenschwingungsanalyse nicht

Kontaktdiskretisierung

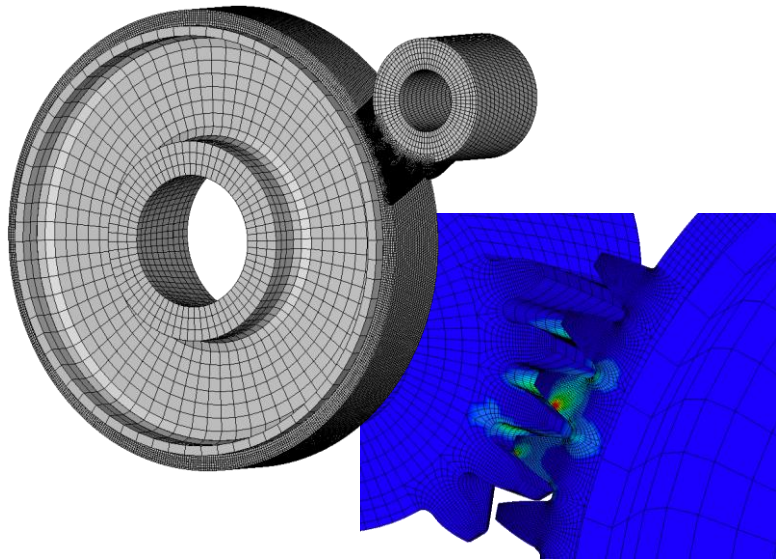


- Knoten-Fläche Kontakt
- Erweiterter Punkt-Fläche Kontakt

[ABAQUS, BILLENSTEIN, WISSMANN, WRIGGERS]

Quasistatische Abwälzsimulation

- Reibungsfreier Kontaktzustand in Tangentensteifigkeit
- Nichtlineare Berechnung

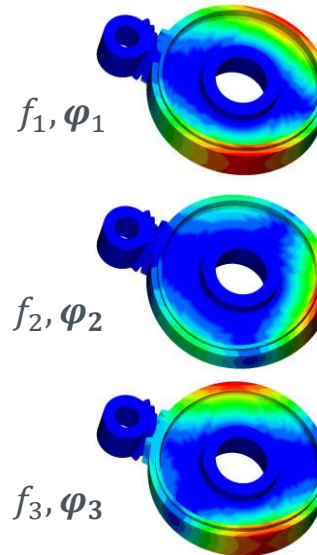


K_T
 M

Modalanalyse

- Eigenfrequenzen
- Eigenformen

$$(K_T - \lambda M)\phi = 0$$

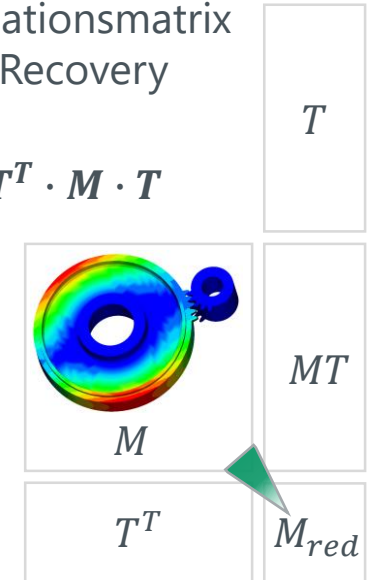


ϕ
 f

Dynamische Reduktion

- statisch-modal gemischte Reduktion: z. B. nach CRAIG-BAMPTON
- Transformationsmatrix
- Optional: Recovery

$$M_{red}^{dyn} = T^T \cdot M \cdot T$$



[FVA 892 I]

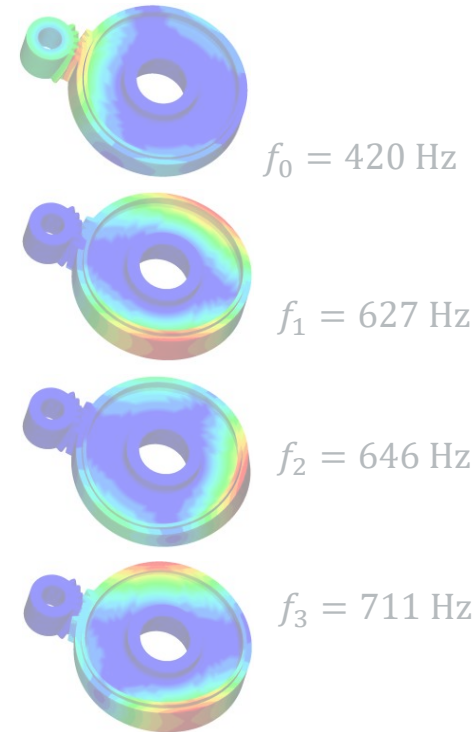
Bedeutung des Shift-Invert-Ansatzes

- Berücksichtigung der Tangentensteifigkeit K_T aus vorgeschalteter nichtlinearer FE-Simulation
- Falls K_T schlecht konditioniert oder singulär und M schlecht konditioniert ist, existiert ein Shift-Parameter σ , sodass $A = (K_T - \sigma M)$ positiv definit und besser konditioniert ist

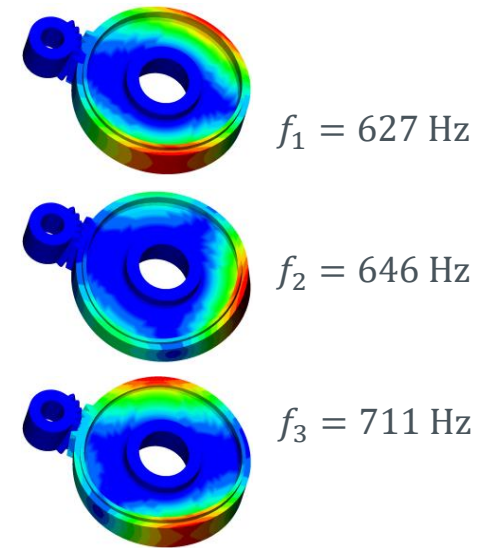
Berücksichtigung des Shift-Parameters in der Modalanalyse am Beispiel Getriebestufe

- Frequenzbereich ab $f_\sigma = 600$ Hz ist von Bedeutung
- Wahl des Shift-Parameters $\sigma = (2\pi f_\sigma)^2$
- ✓ Lösung der Modalanalyse liefert interessantes Frequenzband

$$(K - \Lambda M)\phi = 0$$



$$(K - \sigma M)^{-1} M \phi = \nu \phi$$



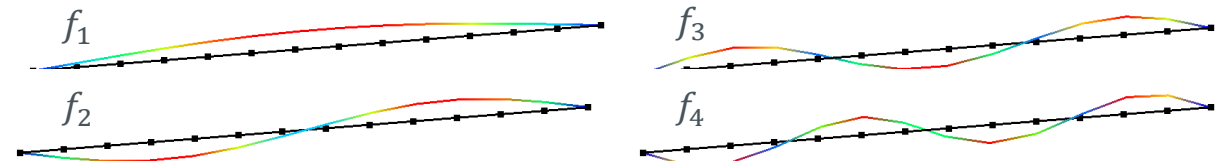
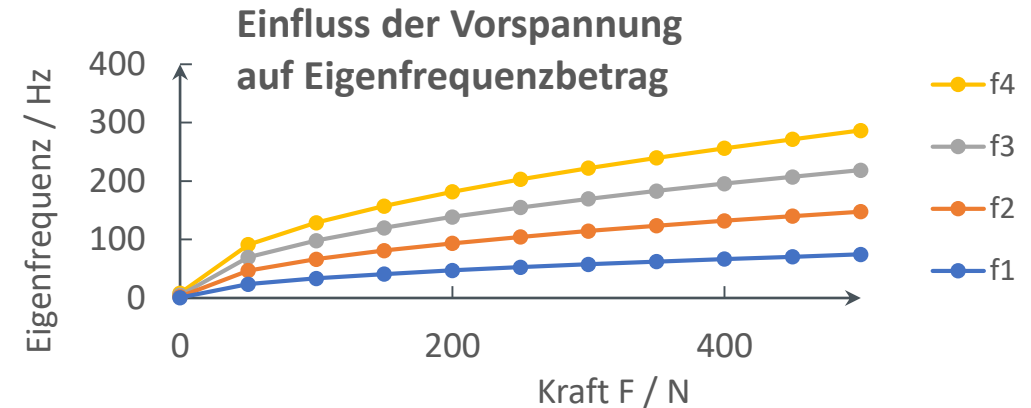
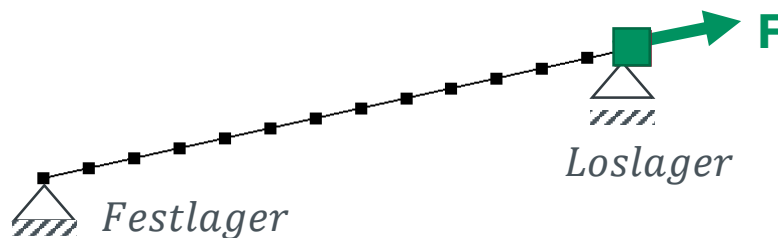
[HETMANIUK, LEHOUCQ]



Beispiel: Stahlseil unter Zugbelastung

- Modellinformationen
 - Schub-elastische lineare 2D-Balkenelemente
 - Material: Stahl
 - Querschnitt: $1,979 \text{ mm}^2$, Länge: 2,54 m
- Berücksichtigung der Tangentensteifigkeit K_T unterschiedlicher Lastschritte im allgemeinen EWP

$$(K_T - \lambda M)\phi = 0$$



→ Versteifung aus Belastung in **Betriebspunkt** hat Einfluss auf Betrag der **Eigenfrequenzen**

[ABAQUS2]

Zusammenfassung

- Transformation über Shift-Invert-Ansatz
- Massen- oder Verschiebungsnormierung von Eigenformvektoren
- Zwangsbedingungen bei Eigenschwingungen
- Berücksichtigung der Betriebspunkt-Tangentensteifigkeit aus vorliegendem Kontaktzustand bzw. aus geometrisch großer Verformung (Versteifung infolge Belastung)

Fazit & Ausblick

- Hohe Übereinstimmung zwischen Eigenfrequenzen & -vektoren aus diagonal und konsistent besetzter Massenmatrix
- Betriebspunktmodalanalyse als Grundlage für dynamische Reduktionsmethoden
- Integration in die Bedienoberfläche Z88Aurora®



EIGENSCHWINGUNGEN

FVA Workbench	FVA GmbH; https://www.fva-service.de/en/software/ aufgerufen am 14.08.2022
BRENDEL	Brendel, Joachim: Berechnung, Konstruktion und Prüfstandsverifikation des Massenausgleichs am Doppelkolben-Zweitaktmotor. Masterarbeit, Uni Bayreuth, 2016
POLYTEC	Polytec GmbH: PSV-Auswertungssoftware, Version 10. www.polytec.com , aufgerufen am 15.06.2022
GROTH	Groth, Clemens; Müller, Günter; Stelzmann, Ulrich: Strukturdynamik: Basiswissen und Arbeitsbeispiele zu FEM-Anwendungen der Strukturdynamik. expert Verlag, 2000
BATHE	Bathe, K. J.: Finite Element Procedures. 2nd edition, Prentice Hall, Pearson Education Inc, Watertown, MA, 2014
HINTON	Hinton, E.; Rock, T.; Zienkiewicz, O. C.: A Note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, 1976
GASCH	Gasch, Robert; Knothe, Klaus; Liebich, Robert: Strukturdynamik – Diskrete Systeme und Kontinua. 3. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2021
NASDALA	Nasdala, Lutz: FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. München, 3. Auflage, Springer Vieweg, 2015
KÖCKLER	Köckler, Norbert: Numerical Methods and Scientific Computing. Clarendon Press, Oxford, 1994
LEHOUQC	Lehoucq, Richard B.; Sorensen D. C.; Yang C.: ARPACK Users' Guide. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998
HETMANIUK	Hetmaniuk, Ulrich; Lehoucq, Richard B.: Uniform Accuracy of Eigenpairs from a Shift-Invert Lanczos Method. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2006
RIEG	Rieg, Frank; Hackenschmidt, Reinhard; Alber-Laukant, Bettina: Finite Elemente Analyse für Ingenieure. 6. Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 2019
DRESIG	Dresig, Hans; Fidlin, Alexander: Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. 4. Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2020
ABAQUS	Dassault Systemes: Linear perturbation analysis https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt03ch06s01aus36.html#usb-anl-alinearnonlinear , aufgerufen am 24.08.2022
BILLENSTEIN	Billenstein, Daniel; Glenk, Christian; Diwisch, Pascal; Rieg, Frank: Investigation of contact settings on the result of topology optimization to avoid contact stiffness supports, Schumacher, A.; Vietor, T.; Fiebig, S.; Bletzinger, K. U.; Maute, K., Advances in Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO 2017, Springer, Cham, 1455-1467, 2018. doi:10.1007/978-3-319-67988-4_110, 2017
WISSMANN	Wissmann, Johannes; Sarnes, Klaus-Dieter: Finite Elemente in der Strukturmechanik, 1. Auflage, Springer, Berlin Heidelberg, 2006
WRIGGERS	Wriggers, Peter: Computational Contact Mechanics, 2nd edition, Springer, Berlin Heidelberg, 2006
FVA 892 I	Namhoff, Christian; Stephan, Rainer; Hammerl, Georg; Brimmers, Jens; Brecher, Christian; Haefke, Norbert: FE-Berechnung Kunststoffzahnräder in der FVA-Workbench. Abschlussbericht FVA 892 I, Heft 1493, 2022
ABAQUS2	Dassault Systemes: Vibration of a cable under tension, https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEBMKRefMap/simabmk-c-vibrationcable.htm , aufgerufen am 24.08.2022



