UNIVERSITÄT BAYREUTH

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jak rozpoznat a podpořit matematicky nadané žáky a žákyně

Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erkennen und fördern

Tom Köcher, Volker Ulm (Hrsg.)

UNIVERSITÄT BAYREUTH

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jak rozpoznat a podpořit matematicky nadané žáky a žákyně

Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erkennen und fördern

Tom Köcher, Volker Ulm (Hrsg.)

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj

Ziel ETZ | Cíl EÚS
Freistaat Bayern – Tschechische Republik
Česká republika – Svobodný stát Bavorsko
2014 – 2020 (INTERREG V)

Tato kniha je výsledkem projektu „Matematické nadání“ v rámci programu pro přeshraniční spolupráci země Freistaat Bayern a České republiky, cíl ETZ 2014-2020. Získal podporu Evropské unie z prostředků Evropského fondu pro mezinárodní rozvoj (EFRR).
Další informace najdete na: www.by-cz.eu
Odpovědnost za obsah této publikace nese výhradně autor; Evropská komise nenese odpovědnost za další použití údajů v ní obsažených.

Dieses Buch ist ein Resultat des Projekts „Mathematische Begabung“ im Rahmen des Programms zur grenzübergreifenden Zusammenarbeit Freistaat Bayern-Tschechische Republik, Ziel ETZ 2014-2020. Es wurde von der Europäischen Union aus Mitteln des Europäischen Fonds für regionale Entwicklung (EFRE) gefördert.
Weitere Informationen unter: www.by-cz.eu
Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung trägt allein der Verfasser; die Europäische Kommission haftet nicht für die weitere Verwendung der darin enthaltenen Angaben.

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj

ZIEL ETZ
CÍL EÚS

Ziel ETZ | Cíl EÚS
Freistaat Bayern – Tschechische Republik
Česká republika – Svobodný stát Bavorsko
2014 – 2020 (INTERREG V)

Obsah / Inhalt

Předmluva

Co je to matematické nadání? Jak lze ve škole rozpoznat a podpořit matematicky mimořádně nadané děti a mladistvé? Těmto otázkám se věnovala Univerzita Bayreuth a Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích v rámci společného projektu s deseti partnerskými školami. Byly vyvíjeny modely matematického nadání a didaktické koncepty pro diagnostiku a podporu matematicky mimořádně nadaných žáků na druhém stupni. Tento projekt umožnil studentům pedagogických oborů z Bavorka a Česka rozvoj kompetencí v rámci tohoto tématu – mimo jiné ve společných seminářích. Kromě toho se konaly různé akce pro vyučující.

Tato publika shromažďuje výsledky. Měla by přispět k tomu, aby se diagnostika a podpora matematicky mimořádně nadaných žáků stala přirozenou součástí přístupu k výuce ve školách.

Vorwort

Was ist mathematische Begabung? Wie können mathematisch besonders begabte Kinder und Jugendliche in der Schule erkannt und gefördert werden? Diesen Fragen widmeten sich die Universität Bayreuth und die Universität Südböhmen in Budweis im Rahmen eines gemeinsamen Projekts mit zehn Partnerschulen. Es wurden Modelle für mathematische Begabung sowie didaktische Konzepte zur Diagnostik und Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe entwickelt. Das Projekt ermöglichte Lehramtsstudierenden aus Bayern und Tschechien, Kompetenzen zu dieser Thematik zu entwickeln – u. a. in gemeinsamen, länderverbindenden Seminaren. Zudem fanden entsprechende Veranstaltungen für Lehrkräfte statt.

Die vorliegende Publikation stellt Ergebnisse zusammen. Sie soll dazu beitragen, dass die Diagnostik und Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler als natürliche Komponenten des Umgangs mit der Vielfalt von Lernenden in der Schule reflektiert gestaltet werden.

Tom Köcher

A Ein Konzept zur Modellierung mathematischer Begabung

1 Einleitung

„Begabung“ ist aktuell ein viel diskutiertes Feld und gerade Pädagogen begegnet häufig die Bezeichnung des „begabten Kindes“. Doch was ist mit *Begabung* eigentlich genau gemeint? Der Umgang mit der Thematik ist nicht einfach, denn der Begriff *Begabung* selbst ist als theoretisches Konstrukt nicht direkt sichtbar oder gar messbar und daher schwer zu fassen. Auch die Auseinandersetzung mit aktueller pädagogischer, psychologischer und mathematikdidaktischer Literatur zeigt, dass die Auffassungen von *Begabung* durchaus unterschiedlich sind und keine allgemeingültige Begriffsdefinition existiert. Demgemäß bestehen auch unterschiedliche Ansätze, dieses vielschichtige Konstrukt anhand von Modellen und Konzepten zu erklären.

Um sich mit der Thematik von mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern zu befassen, ist es nützlich, sich zunächst mit der Bedeutung des Begriffs *Begabung* auseinanderzusetzen. Dementsprechend werden in diesem Kapitel geläufige Theorien aus der Psychologie und Pädagogik vorgestellt und Erkenntnisse für die Frage nach der Modellierung von *Begabung* zusammengefasst, um daraus einen einheitlichen Grundkonsens für das Begriffsverständnis von *Begabung* vorzuschlagen.

Dabei ist es notwendig, eine Abgrenzung zu Begriffen zu ziehen, welche sehr eng mit dem Kontext *Begabung* verknüpft sind und mitunter auch häufig ähnlich verwendet werden – wie *Intelligenz, Leistung* und *Hochbegabung*.

Auf einem soliden Begriffsverständnis von *Begabung* kann dann ein Modell für *mathematische Begabung* vorgeschlagen werden.

2 Modell des Intelligenzquotienten

Eine sehr populäre Auffassung von Begabung ist das Erreichen eines bestimmten Werts des sogenannten Intelligenzquotienten (IQ), welcher als Maß für die Intelligenz eines Menschen angesehen werden kann. Dieser IQ wird innerhalb standardisierter Intelligenztests erhoben.

Folgt man dem Intelligenzquotientenmodell für Begabung, so spricht man bei einer Person von einer *Hochbegabung*, wenn diese in einem Intelligenztest einen Intelligenzquotienten von 130 oder mehr erreicht. Dieses Kriterium erfüllen 2% der Bevölkerung. Diese Grenzziehung ist eine statistische Konvention.

Es existieren unterschiedliche Intelligenztests, welche wiederum unterschiedliche Schwerpunkte legen. Hierdurch können sich die Ergebnisse zwischen verschiedenen Intelligenztest und somit die Zuschreibung einer Hochbegabung bei ein und derselben Person durchaus unterscheiden.

In dem personorientierten Ansatz der Begabtenförderung von Weigand et al. (2014) wird auf einen geringen Mehrwert bei der Unterscheidung zwischen den beiden Begriffen *Begabung* und *Hochbegabung* hingewiesen, wenn Schulkultur mit einer Förderung für alle angestrebt wird, egal ob hoch begabt, durchschnittlich begabt oder besonders begabt (vgl. Weigand 2014, S. 44).

Im Nachfolgenden wird somit auf eine quantitative Unterscheidung zwischen *Hochbegabung* und *Begabung* verzichtet und nur der Begriff *Begabung* verwendet.

Zudem kann eine Etikettierung als hochbegabt auch soziale Probleme im Umgang mit der betreffenden Person bergen.

Daher sollte man im schulischen Kontext zwischen den Vor- und Nachteilen abwägen und anhand dieser Gegenüberstellung entscheiden, ob solche Testungen durchgeführt werden.

Wird Begabung wie z. B. bei Rost (2009) als das Vorhandensein einer hohen allgemeinen Intelligenz verstanden, so ergibt sich die Auffassung einer fachspezifischen mathematischen Begabung wie folgt:

> Die vielfältigen Befunde der einschlägigen Literatur lassen keinen Zweifel daran zu, dass mathematische Befähigung und mathematische Leistungen eng mit der Intelligenz und anderen – auch sprachlichen – Schulleistungen verknüpft sind […]. Pollmer […] resümiert kurz und bündig, eine „besondere mathematische Begabung" stelle „lediglich eine besonders hohe intellektuelle Begabung" dar. (Rost 2009, S. 23)

Mathematische Begabung ist nach dieser Auffassung ein Bestandteil allgemein hoher Intelligenz. Sie ist Grundlage für entsprechende sehr gute Schulleistungen.

Nach dem Intelligenzquotientenmodell wird Begabung also mit Intelligenz gleichgesetzt – bzw. mit dem, was mit einem Intelligenztest gemessen und im Intelligenzquotienten quantifiziert wird. Wer intelligent ist, ist begabt und umgekehrt. Diese wechselseitige Zuschreibung ist durchaus diskutabel. Ulm (2009) merkt dahingehend an, dass, wenn man von einem weiten Begabungsbegriff ausgeht, durch die obige Auslegung handwerkliche Begabungen unbeachtet bleiben. Angelehnt an Gardner (2010) könnten hier beispielsweise auch soziale-emotionale (interpersonelle), sportliche oder musische Begabungen angeführt werden, welche keinerlei Berücksichtigung in einer eindimensionalen Definition anhand des IQ finden.

Zudem würde die Zuschreibung einer Begabung durch eine hohe getestete Intelligenz nur einen bestimmten, momentanen „Ausschnitt aus den intellektuellen Fähigkeiten" (Holling et al. 1999, S. 39) der getesteten Person repräsentieren. Hinzu kommt, dass dieser Ausschnitt wesentlich durch das Intelligenzverständnis beziehungsweise das Begabungsverständnis bestimmt ist, welches dem

Test von den Testdesignern zugrunde gelegt worden ist.

Die Kritik, dass durch das Beschreiben von Begabung mittels Intelligenz nur eine ganz bestimmte Facette abgebildet wird, greift auch Käpnick (2013) auf und schreibt: „Die Beschränkung des Begabungsbegriffs auf kognitive Fähigkeiten entspricht nicht seiner Komplexität, wonach sich gemäß heutiger einschlägiger Auffassungen (Begabungs-) Potenziale eines Kindes stets in einem dynamischen Prozess wechselseitiger Beeinflussung von intra- und interpersonalen Katalysatoren entwickeln." (Käpnick 2013, S. 12). Hier wird zusätzlich die Kritik deutlich, dass die Reduzierung von Begabung auf die momentane, während des Intelligenztests erbrachte Leistung, der Ansicht von Begabung als ein dynamisches Konstrukt, als ein über die Zeit entwicklungsfähiges Potential nicht gerecht wird. Gerade im schulischen Alltag sollte es eben nicht nur um das Fördern bereits erkannter und diagnostizierter Stärken gehen. Es sollten auch vermuteten und noch nicht gezeigten Begabungen Raum zur Entwicklung gegeben werden (vgl. Weigand 2014, S. 44).

Die Annahme eines multifaktoriellen Begabungsbegriffs führt zu einem weiteren Diskussionspunkt. Den Grad der Ausprägung einer mehrdimensional begriffenen und auf einem komplex zugrunde liegenden Konstrukt abhängiger Faktoren basierenden Begabung mit einer einzigen Zahl – wie dem IQ – zu manifestieren, erscheint unmöglich. Weigand (2014) merkt dahingehend an, dass Begabung als komplexes Konstrukt nicht messbar gemacht werden kann (vgl. Weigand 2014, S. 38–39).

Folgend seien daher einige ausgewählte Theorien und Modelle, welche alle Begabung als ein mehrdimensionales Konstrukt ansehen, vorgestellt.

3 Multiple Intelligenzen nach Gardner

Anstatt von einer allgemeinen Intelligenz auszugehen, weitete der Psychologe Howard Gardner in seiner Theorie über „multiple Intelligenzen" den Intelligenzbegriff aus. Er geht davon aus, dass Intelligenz ein komplexes, multidimensionales Konstrukt ist und sich in diverse, unter anderem auch nicht-kognitive Facetten untergliedern lässt (vgl. Gardner 2013, S. 55 ff.):

- Sprachliche Intelligenz (u. a. Sensibilität für geschriebene und gesprochene Sprache)
- Logisch-abstrakte Intelligenz (u. a. logisch-schlussfolgerndes Bearbeiten von Problemen, Erkennen von Mustern und Strukturen und Umgang damit)
- Räumliche Intelligenz (u. a. Wahrnehmung des Raumes, gedankliches Operieren in räumlichen Situationen)
- Musikalische Intelligenz (u. a. Komponieren von Musik, Spielen eines Instruments)
- Körperlich-kinästhetische Intelligenz (u. a. Koordination von Körperbewegungen)
- interpersonale Intelligenz (u. a. Empathiefähigkeit)
- intrapersonale Intelligenz (u. a. Wahrnehmung eigener Gefühle und angemessener Umgang damit)
- naturalistische Intelligenz (u. a. Erkennen von Phänomenen in der Natur)
- existentielle Intelligenz (Auseinandersetzung mit grundlegenden Fragen des Seins)

In einem seiner Hauptwerke „Abschied vom IQ" (1991) hinterfragt Gardner daher wie oben angedeutet, inwiefern mit einer einzigen Maßzahl Intelligenz gemessen werden kann. Er schreibt auch, dass Intelligenztests hauptsächlich nur die ersten drei seiner aufgestellten Intelligenzen messen (vgl. Gardner 1991, S. 9 ff.).

Die „Theorie der multiplen Intelligenzen" ist nicht unumstritten. Gerade die Fragen nach der Trennschärfe zwischen den verschiedenen Intelligenzen und die Existenz von noch weiteren Intelligenzbereichen sind durchaus begründet. Für die Schule bietet das Modell trotzdem hilfreiche Handlungsentscheidungen; es ermöglicht, Fähigkeiten und Defizite bei Schülerinnen und Schülern differenzierter betrachten zu können.

Folgt man dem Intelligenzbegriff weiter, so ist für die Schule eine wichtige Erkenntnis, dass sich also verschiedene Intelligenzen in einer Person wiederfinden können und somit auch mathematische Begabung aus mehreren dieser Intelligenzen entspringen kann.

Obwohl gerade im Alltag häufig die Begriffe *Intelligenz* und *Begabung* sinngleich verwendet werden, gibt es in der Wissenschaft eine klare Unterscheidung. *Intelligenz* wird allgemein als Begriff verstanden, welcher kognitive Fähigkeiten beschreibt. *Begabung* hingegen wird als theoretisches Konstrukt angesehen, welches das individuelle Potential für gute oder ausgezeichnete Leistungen auf einem oder mehreren Gebieten beschreibt. Nachfolgend seien daher Begabungsmodelle vorgestellt, welche versuchen, die Grundlagen des Konstrukts *Begabung* und der Wechselwirkungen mit anderen Faktoren zu veranschaulichen.

4 Modelle nach Renzulli und Mönks

Joseph S. Renzulli geht davon aus, dass es für Begabung mehr benötigt als nur einen hohen Intelligenzquotienten und hat deshalb sein Drei-Ringe-Modell entwickelt (siehe Abb. 1), bei welchem Begabung aus mehreren Blickwinkeln betrachtet wird (vgl. Renzulli 2005).

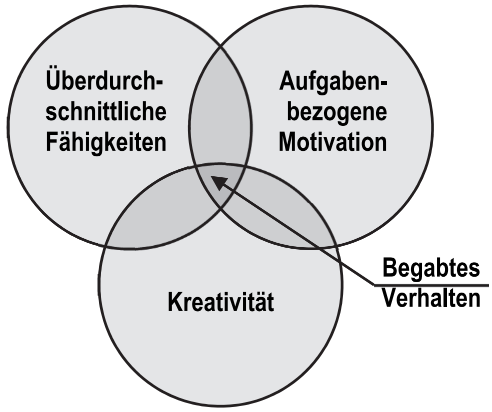


Abb. 1: Drei-Ringe-Modell nach Renzulli

In diesem mehrfaktoriellen Modell werden die Komponenten

- Kreativität,
- aufgabenbezogene Motivation und
- überdurchschnittliche Fähigkeiten

in Abhängigkeit zueinander dargestellt und in Beziehung gesetzt. Als Resultat der Interaktionen der überdurchschnittlich ausgeprägten drei Komponenten kann sich dann „gifted behavior", also „begabtes Verhalten", entwickeln. Dieses von Renzulli als Hochleistungsverhalten beschriebene Verhalten ist nicht mit Hochbegabung im Alltagssinn als ein permanenter, gegebener Zustand zu verwechseln. Hochleistungsverhalten ist ein situatives Verhalten, welches sehr eng mit einer ergebnisorientierten Tätigkeit verbunden ist und somit an hohe Leistung gekoppelt ist (vgl. Renzulli 2001, S. 23–24).

Wichtig ist Renzulli dabei herauszustellen, dass keiner der Faktoren allein Hochleistung bewirken kann, sondern dies erst im Zusammenspiel aller drei möglich wird. Des Weiteren kann zum Beispiel eine herausragende Motivation keine unterdurchschnittlich ausgeprägte Kreativität ausgleichen.

Renzulli stellt weiter fest, dass Kinder und Jugendliche, welche ein Verhalten zeigen, das auf Begabung schließen lässt, eine Vielzahl von Bildungschancen, Ressourcen und Ermutigungen auch außerhalb des regulären Unterrichts benötigen. Darauf aufbauend hat er sein komplexes *Schoolwide Enrichment Model* zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler entwickelt (vgl. Renzulli 2005).

Das Triadische Interdependenzmodell des niederländischen Begabungsforschers Franz Mönks (vgl. Mönks 1992) nimmt auf das Drei-Ringe Modell direkten Bezug und erweitert dieses um das soziale Umfeld, in dem Begabte heranwachsen. Dies wird von Familie, Freunden und Schule repräsentiert (siehe Abb. 2).

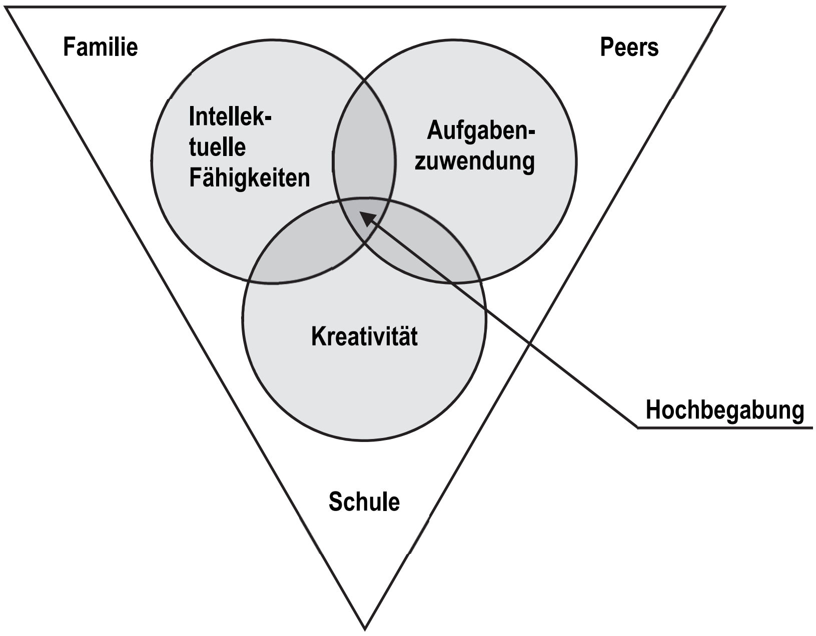


Abb. 2: Triadisches Interdependenzmodell nach Mönks

Wie bei Renzulli wird hier graphisch mit den gleichen drei Persönlichkeitsmerkmalen dargestellt, unter welchen Bedingungen sich Begabung entwickeln kann. Zusätzlich zu den bereits vorhandenen drei Ringen bedarf es nach Mönks aber noch einer begabungsförderlichen Umgebung. Durch das erfolgreiche Zusammenwirken der drei Persönlichkeitsmerkmale und der Umwelt kann eine Begabungsentwicklung schlussendlich gelingen. Diese wechselseitige Abhängigkeit der drei inneren und drei äußeren Faktoren, *Triaden*, wird als *Interdependenz* bezeichnet.

Jedoch bleibt in dem Modell unklar, inwiefern genau die inneren Ringe untereinander interagieren und wie sie voneinander abzugrenzen sind. Zudem bleibt ungeklärt, wie die Ringe mit dem äußeren Dreieck in Verbindung stehen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass beide Modelle den Einzelnen und dessen Entwicklung in den Mittelpunkt stellen und das Modell von Mönks einen dynamischen Prozess zwischen den anlagebedingten Personenmerkmalen und äußeren Einflussfaktoren beschreibt (vgl. Bardy 2013, S. 19–20).

5 Modell nach Heller

Den Punkt, dass Begabung einem komplexen und dynamischen Wirkprozess unterliegt, griff auch der Psychologe Kurt A. Heller auf. Er entwickelte das in Abb. 3 dargestellte Modell (vgl. Heller 2001), in welchem er zwischen intrapersonellen Begabungsfaktoren (links in der Grafik) und Leistungsbereichen (rechts in der Grafik) differenziert, welche von Moderatorfaktoren, der Umwelt (unten in der Grafik) und nicht-kognitiven, persönlichkeitsbedingenden Merkmalen (oben in der Grafik) beeinflusst werden.

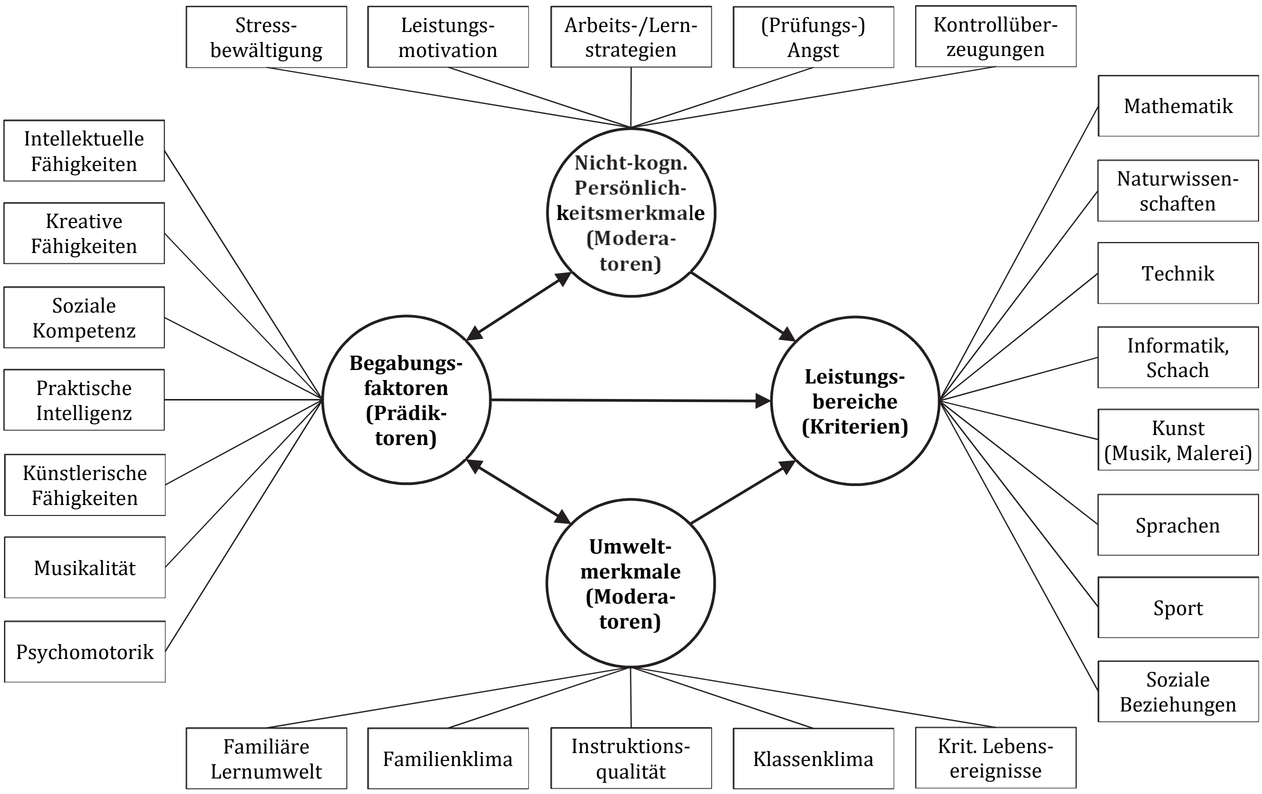


Abb. 3: Münchener (Hoch-)Begabungsmodell von Kurt Heller

Heller stellt den Prozesscharakter der Begabungsentwicklung in den Fokus. Durch die Abhängigkeit der Begabungsentwicklung von verschiedenen äußeren Faktoren über die Lebensspanne hinweg wird der stetige Entwicklungsprozess erkennbar.

Zentrales Merkmal dieses Modells ist hierbei jedoch die Unterscheidung von Begabung und Leistung. Inwiefern sich Begabungsfaktoren in messbare und sichtbare Leistungen, auch Performanz genannt, niederschlagen, hängt sowohl von den individuellen Persönlichkeitsmerkmalen als auch von den Umweltfaktoren ab. Daher eignet sich dieses Modell, um aufzuzeigen, welche Vielfalt an Faktoren und Einflussbereichen zusammenspielen müssen, damit aus einer hohen Begabung auch eine vergleichbare Leistung entspringen kann.

Resümierend ist Begabung also an sich bereichsspezifisch und unterliegt einer dynamischen Entwicklung, da fachspezifische sowie fachübergreifende Einflüsse prozesshaft über die Lebensspanne hinweg berücksichtigt werden müssen.

Für die Modellbildung von Begabungen lässt sich konstatieren, dieselben nicht als gegebene statische Phänomene anzusehen. Begabungen können im Laufe der Biographie eines Menschen auftreten, sich weiterentwickeln und ausdifferenzieren, aber auch wieder verschwinden.

Somit kann geschlossen werden:

> *Begabung ist im weitesten Sinne ein individuelles Potential für gute oder ausgezeichnete Leistungen auf einem oder mehreren Gebieten.*

6 Fachspezifisches Modell mathematischer Begabung

Auf Grundlage dieses allgemeinen Begabungsverständnisses kann man den Begriff der *mathematischen Begabung* schärfen. Hierbei kann die inhaltliche Beschreibung des Begriffs der *mathematischen Kompetenzen* laut den Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz (vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister) beziehungsweise laut den kompetenzorientierten Lehrplänen der Bundesländer berücksichtigt werden (vgl. z. B. Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB)).

Im Kompetenzstrukturmodell des LehrplanPLUS für Bayern ist beispielhaft zu sehen, welche mathematischen Kompetenzen von den Schülerinnen und Schülern während ihrer Schulzeit erworben werden sollen (vgl. Abb. 4). Dieses fachbezogene Kompetenzmodell unterscheidet mathematische Kompetenzen in zwei Bereichen:

- *Inhaltsbezogene Kompetenzen* beziehen sich auf die Beschäftigung mit mathematischen Inhalten in den Bereichen Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall.
- *Prozessbezogene Kompetenzen* lassen sich durch Modellieren, Problemlösen, Argumentieren, Kommunizieren, Verwenden von Darstellungen sowie Umgehen mit symbolischen Elementen als typische Arten mathematischen Tätigseins beschreiben.

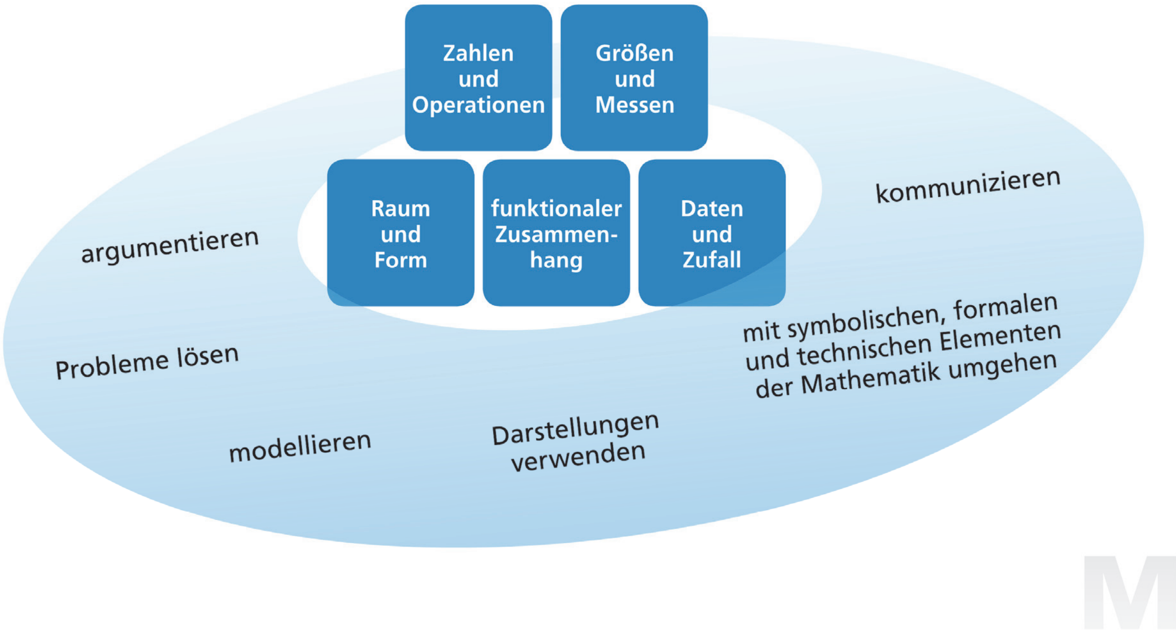


Abb. 4: Kompetenzstrukturmodell nach dem LehrplanPLUS Gymnasium Mathematik

Eine genauere Beschreibung bezüglich welcher mathematischer Themen mit welcher Tiefe diese Aneignung geschehen soll, ist in den KMK-Bildungsstandards näher ausgeführt (vgl. Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister).

Mit Hilfe dieses Kompetenzmodells ergibt sich folgender Vorschlag einer Definition von mathematischer Begabung:

> *Mathematische Begabung ist das individuelle Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.*

Die Bedeutung des Begriffs *mathematische Begabung* wird noch deutlicher, wenn man sich die einzelnen Aspekte der vorgeschlagenen Definition näher anschaut:

- *Begabung als Potential:* Mathematische Begabung ist ein Potential. Allein das Vorhandensein eines gewissen Potentials zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist kein hinreichender Faktor dafür, dass auch eine solch entwickelte Kompetenz vorliegt beziehungsweise muss das vorliegende Potential nicht zwingend dazu führen, dass sich eine Kompetenz daraus entwickelt. Gründe könnten hierfür das Fehlen einer passenden Anregung durch die Umwelt sein.
- *Fachspezifik von Begabung*: Mathematische Begabung ist ein bereichsspezifisches Konstrukt. Über den Begriff der mathematischen Kompetenzen ist es eng an Mathematik gekoppelt.
- *Komplexität von Begabung*: Die Vielschichtigkeit und Fülle von Mathematik spiegelt sich in der Komplexität des Kompetenzmodells der KMK-Bildungsstandards wider und überträgt sich damit auf den Begabungsbegriff. Beispielsweise kann man dadurch differenziert bereichsspezifisch von mathematischer Begabung in verschiedenen Gebieten der Mathematik (wie Geometrie, Algebra, Stochastik) oder für mathematische Prozesse (wie Modellieren, Problemlösen, Argumentieren) sprechen.

- *Begabung als individuelle Personeneigenschaft*: Die Ansicht, dass Begabung als individuell angesehen wird, führt zu zwei Folgeaspekten: Zum einen besitzt jede Person ein gewisses Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen und damit auch eine gewisse Begabung. Zum anderen ist mathematische Begabung individuell ausgeprägt, d. h. Menschen unterscheiden sich in ihrem individuellen Potential, mathematische Kompetenzen zu entwickeln. Mathematisch besonders Begabte zeichnen sich dadurch aus, dass dieses Potential in vielen Facetten deutlich überdurchschnittlich ausgeprägt ist.

Auf diesem Verständnis von mathematischer Begabung baut das im Folgenden vorgestellte fachspezifische Modell zur Entwicklung von Begabung, Kompetenzen und Leistung nach Ulm und Zehnder (2020) auf. Im Modell in Abb. 5 ist die Gesamtheit aller Personeneigenschaften (außer mathematischer Begabung und mathematischen Kompetenzen) und aller Umweltfaktoren jeweils mit einem langgezogenen Rechteck symbolisiert. Die Pfeile illustrieren vielfältige Wechselwirkungen.

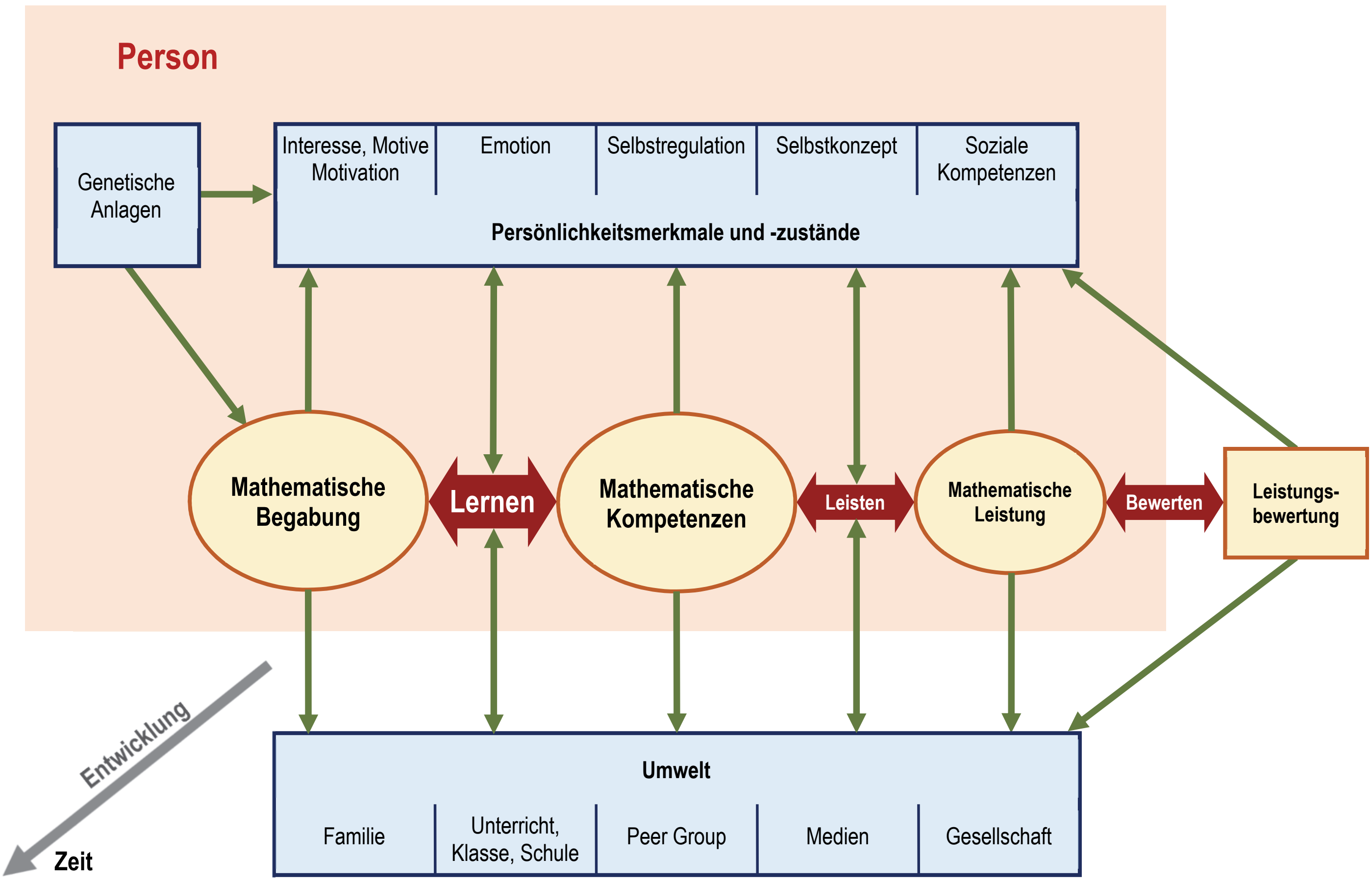


Abb. 5: Modell zur Entwicklung mathematischer Begabung, Kompetenzen und Leistung nach Ulm und Zehnder (2020)

Lernen wird in dem Modell als der zentrale Prozess für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen angesehen. Der Erwerb solcher Kompetenzen erfolgt durch die geistige Beschäftigung mit mathematischen Inhalten. Die dabei stattfindenden Lernprozesse im Kopf der Person können dann zu einer (Weiter-)Entwicklung mathematischer Kompetenzen führen. Basis dieses Lernens ist die individuelle mathematische Begabung – das Potential zur Kompetenzentwicklung.

Im Modell erfolgt die Entwicklung mathematischer Begabung, wie oben schon angedeutet, gleichzeitig zur natürlich-biologischen, genetisch bedingten Entwicklung des Gehirns und der Person selbst. Zusätzlich spielt aber auch das individuelle Lernen eine tragende Rolle. Bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen mit Hilfe von Lernprozessen werden durch das Lernen neuronale Veränderungen im Gehirn ausgelöst, welche wiederum das individuelle Potential zur Kompetenzentwicklung und somit die mathematische Begabung beeinflussen und steigern können. Ebenso kann sich aber dieses vorhandene Potential auch im Laufe des Lebens verringern, wenn keine entsprechenden Lernprozesse stattfinden. Ein plastisches Beispiel: Ein Kind beziehungsweise ein Jugendlicher mag etwa ein hohes Potential zum Erlernen einer (Fremd-)Sprache, zum Spielen eines Musikinstruments oder zu mathematischem Denken besitzen. Wenn entsprechendes Lernen nicht stattfindet, reduziert sich dieses Potential im Lauf des Lebens.

Begabung wird, wie auch bei Weigand et al. (2014), als ein im Lauf des Lebens veränderbares Konstrukt angesehen. Es entwickelt sich dynamisch durch das Zusammenwirken der verschiedenen Einflussfaktoren.

Mathematische Begabung und Kompetenzen können zwar nicht unmittelbar, jedoch aber indirekt durch den Lernprozess von allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften und der Umwelt beeinflusst werden. Diese stehen in einem komplexen Wirkgeflecht zueinander in Verbindung.

Personeneigenschaften bezeichnen zum einen zeitlich relativ stabile Merkmale der Person. Darunter fallen zum Beispiel Motive, Fähigkeiten zur Selbstregulation, generelle Interessen, das Selbstkonzept und soziale Kompetenzen. Zum anderen sind zeitlich kurzfristig variable Zustände der Person eingeschlossen, wie etwa die aktuelle Motivation für die konkrete Tätigkeit oder entstehende Emotionen innerhalb der aktuellen Situation. Diese Vielfalt an Eigenschaften einer Person hat Auswirkungen, in welcher Art und in welchem Umfang sich die Person mit Mathematik beschäftigt und sich dadurch mathematische Kompetenzen und mathematische Begabung entwickeln.

Die Umwelt, in der sich eine Person befindet, nimmt auch entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung mathematischer Begabung und Kompetenzen durch das Lernen. Bestandteile der Lebensumwelt von Kindern und Jugendlichen sind insbesondere die Familie, die Schule, die Peergroup sowie die Medien und unsere Gesellschaft als Ganzes. Wenn in der Umwelt der Person entsprechende Lernsituationen und Anreize auftreten, lernförderliche Unterstützung und Wertschätzung vorherrscht und die Person sozial eingebunden ist, so kann dies sich förderlich auf das mathematische Lernen auswirken. Diese Faktoren sind maßgeblich dafür, ob und wie intensiv sich ein Kind oder Jugendlicher mit Mathematik nicht nur in, sondern auch außerhalb der Schule befasst.

Zudem basieren Begabung im Allgemein sowie mathematische Begabung im Speziellen auch in diesem Modell auf den genetischen Anlagen.

Mathematische Leistung wiederum kann auf der Basis mathematischer Kompetenzen erbracht werden, indem diese genutzt werden, um ein bestimmtes Ergebnis zu erzielen. Die Leistung ergibt sich also aus der Anwendung von Kompetenzen innerhalb mathematikhaltiger Situationen und wird sichtbar. Zugehörige Prozesse des Leistens werden dabei, wie auch Lernprozesse, von außen durch Umweltfaktoren und von innen durch Persönlichkeitseigenschaften beeinflusst.

Auch Friedhelm Käpnick fasst das theoretische Konstrukt *mathematische Begabung,* vor allem bezogen auf das Grundschulalter, als ein „individuell geprägtes bereichsspezifisches Potential für eine mit großer Wahrscheinlichkeit im Jugend- und Erwachsenenalter entfaltete überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähigkeit auf." (Käpnick et al. 2005, S. 22).

Auch Käpnick betrachtet mathematische Begabung als bereichsspezifisch. Ihre Entwicklung wird von äußeren Faktoren und Persönlichkeitseigenschaften beeinflusst. Begabung und Leistung werden unterschieden: auf der Basis von Begabung kann eine Person Leistung zeigen.

Der hohe Stellenwert der Prozesse des Lernens innerhalb des vorgestellten mathematikspezifischen Begabungsmodells von Ulm und Zehnder (2020) findet sich auch bei Weinert (2000): „Lernen ist der entscheidende Mechanismus bei der Transformation (hoher) Begabung in (exzellente) Leistung." (Weinert 2000). Dadurch wird zusätzlich ersichtlich, dass hohe Begabung nicht immer hohe Leistung implizieren muss.

Als weiterführende Literatur findet sich eine ausführlichere Betrachtung des Themenkomplexes „Mathematische Begabung, Kompetenzen, Leistung" bei Ulm und Zehnder (2020).

7 Zusammenfassung

Abschließend werden die dieser Publikation zu Grunde liegenden Verständnisse von *Intelligenz, Hochbegabung, Begabung* und *mathematischer Begabung* nochmals zusammengefasst.

Intelligenz ist das, was mit dem einem Intelligenztest gemessen und im Intelligenzquotienten ausgedrückt wird.

Begabung kann man nach Heller (1996) allgemein als ein „individuelles, relativ stabiles und überdauerndes Fähigkeits- und Handlungspotenzial auffassen, bestehend aus kognitiven, emotionalen, kreativen und motivationalen Bestandteilen, die durch bestimmte Einflüsse weiter ausgeprägt werden können und so eine Person in die Lage versetzen, in einem mehr oder weniger eng umschriebenen Bereich besondere Leistungen zu erbringen." (Heller 1996, S. 12)

Von *Hochbegabung* wird im Zusammenhang mit Intelligenztests gesprochen, um Personen mit besonders hoher Intelligenz (z. B. mit einem IQ größer oder gleich 130) zu kennzeichnen. Wenn man aber – wie im vorliegenden Text – ein mehrschichtiges Begabungsverständnis vertritt, sind die Verwendung des Begriffs *Hochbegabung* und die Unterscheidung zu *Begabung* nicht erforderlich.

Mathematische Begabung ist das individuelle Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen.

Literaturverzeichnis

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Gardner, Howard (2013): Intelligenzen. Die Vielfalt des menschlichen Geistes. Stuttgart: Klett-Cotta.

Heller, Kurt A. (1996): Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule? *Grundschule* 28 (5), 12–14.

Heller, Kurt A. (Hg.) (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Käpnick, Friedhelm (2013): Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In: Torsten Fritzlar und Friedhelm Käpnick (Hg.): Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM Verlag, 9–40.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Mönks, Franz. J. (1992): Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. In: Ernst A. Hany (Hg.): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte – empirische Befunde – praktische Konsequenzen. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, 17–22.

Renzulli, Joseph S. (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Renzulli, Joseph S. (2005): The Three-Ring Conception of Giftedness: A Developmental Model for Promoting Creative Productivity. In: Robert J. Sternberg und Janet E. Davidson (Hg.): Conceptions of giftedness. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 246–279.

Rost, Detlef H. (2009): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB): LehrplanPLUS – Gymnasium – Mathematik – Fachprofile. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele (2014): Begabung oder Hochbegabung? In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 37–46.

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (Hg.) (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Weinert, Franz Emanuel (2000): Lernen als Brücke zwischen hoher Begabung und exzellenter Leistung. 2. internationale Salzburger Konferenz zu Begabungsfragen und Begabtenförderung. Salzburg, 13.10.2000.

Tom Köcher

B Konzepte zur Diagnostik mathematischer Begabung

1 Einleitung

Dieses Kapitel widmet sich der Frage, wie mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler diagnostiziert werden können. Die Identifizierung potentiell mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler ist von großer Bedeutsamkeit, damit adäquate Maßnahmen zur individuellen Förderung angeboten werden können – im Sinne einer differenzierenden Schulkultur. Durch eine frühzeitige Identifikation kann mit daran anschließenden Fördermaßnahmen eventuell auftretenden Problemen, wie Unterforderung und daraus resultierender Langeweile oder Störungen des Unterrichts, vorgebeugt werden.

Demgegenüber steht die Problematik, dass kein einheitliches Identifikationsmodell existiert, was unter anderem auf eine uneinheitliche Auffassung des Begriffes *Begabung* zurückzuführen ist (vgl. Ziegler und Stöger 2003, S. 8). Gemäß der Begriffsbildung in Kapitel A wird im Folgenden *Begabung* als ein theoretisches Konstrukt angesehen, welches das individuelle Potential zur Entwicklung von Kompetenzen in einem oder mehreren Gebieten beschreibt.

2 Hoher IQ = mathematisch begabt?

Gerade in den letzten Jahren rückte das Thema der Identifikation begabter Kinder in der pädagogisch-psychologischen Diagnostik zunehmend in den Fokus. Die Feststellung besonderer Begabungen, insbesondere auch mathematischer Begabung, richtet sich dabei grundsätzlich nach der Auffassung von *Begabung*, was man also unter diesem Begriff versteht. Nach Ziegler und Stöger (2003) ist das Identifikationsvorgehen maßgeblich vom zugrunde gelegten Begabungsverständnis abhängig (vgl. Ziegler und Stöger 2003, S. 8).

Folgt man der bereits in Kapitel A vorgestellten Ansicht von Rost (2009a), dass mathematische Begabung Bestandteil hoher allgemeiner Intelligenz ist, so ist eine Identifikation über einen allgemeinen Intelligenztest möglich. Die Grundannahme aus Kapitel A, dass allgemeine Begabung multidimensional ist und sich demnach in verschiedene, eigenständige Facetten gliedern lässt, steht jedoch im Gegensatz dazu. Gardner (1991) hinterfragt vor dem Hintergrund seiner Intelligenztheorie daher kritisch, ob mittels einer einzigen, aus einem Intelligenztest gewonnenen Zahl das multidimensionale Geflecht der Begabung widergespiegelt werden kann (vgl. Gardner 1991, S. 9–11). Auf einer eindimensionalen Skala ist es nicht möglich, die Mehrdimensionalität von Begabung und die verschiedenen Wechselwirkungen gemäß den in Kapitel A dargestellten Modellen adäquat abzubilden. Kreativität, Ausdauer und andere Facetten eines weit gefassten mathematischen Begabungsbegriffs würden durch einen Intelligenztest unberücksichtigt bleiben. Intelligenztests können nur einen kleinen Teil der für Begabung relevanten Faktoren erfassen und ihr Aussagegehalt für die Diagnostik sollte daher nicht überschätzt werden. Deshalb sollte das Ergebnis eines allgemeinen Intelligenztests unter Beachtung der ausgewählten, dem Identifikationsvorgehen zugrunde liegenden, allgemeinen und fachspezifischen Begabungstheorien interpretiert werden.

Des Weiteren ist es auf Basis der Begriffsbildung zu mathematischer Begabung aus Kapitel A möglich, dass mathematische Begabung auch durchaus ohne (andere) exzellente Schulleistungen oder Begabungen in weiteren Bereichen auftreten kann.

In Hinblick auf den Intelligenzquotienten haben Käpnick et al. (2005) in ihren Untersuchungen feststellen können, dass zwar viele, an den jeweiligen Forschungsprojekten zu mathematischer Begabung teilnehmende Kinder über eine hohe allgemeine Intelligenz verfügen, es aber auch einige mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler gab, welche einen durchschnittlichen IQ besaßen (vgl. Käpnick et al. 2005, S. 25).

Zudem kann ein einziger Intelligenztest die natürliche Entwicklung eines Kindes nicht berücksichtigen. In schulischen Identifikationsvorhaben sollte es auf Basis eines den zeitlichen Aspekt einbeziehenden Begabungsmodells (vgl. Kapitel A) nicht nur um die Feststellung von bereits vorhandenen Begabungen bei Schülerinnen und Schülern gehen. Es sollte auch Raum für Prognosen bezüglich noch nicht gezeigter, noch unentdeckter und erahnter Potentiale von Schülerinnen und Schülern geschaffen werden (vgl. Weigand 2014a, S. 44).

Ein Intelligenztest kann also nicht alleiniges Mittel der Wahl bei der Begabungsdiagnostik sein, da mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler ohne überdurchschnittlichen Intelligenzquotienten im Identifikationsprozess nicht erfasst würden. Zudem würde dabei der Entwicklungsaspekt von Begabung nicht ausreichend berücksichtigt und somit Kinder mit entsprechendem Entwicklungspotential keine Förderung erhalten.

Hinzu kommt die Existenz vieler verschiedener Intelligenztests, welche wiederum unterschiedliche Schwerpunkte setzen und somit verschiedene Aspekte von Intelligenz erfassen. Infolgedessen können sich die Ergebnisse verschiedener Intelligenztest durchaus unterscheiden, weshalb eine belastbare Diagnose anhand teils widersprüchlicher Resultate schwer aufzustellen ist (vgl. Käpnick et al. 2005, S. 23–25).

Mit dem Standpunkt, dass mathematische Begabung das individuelle Potential zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen ist (vgl. Kapitel A), kann fachspezifische Begabung anhand der Leistungen bzw. der Performanz eines Kindes bzw. Jugendlichen in mathematisch reichhaltigen Situationen erkannt werden – während des Bearbeitungsprozesses oder bei der Analyse der Ergebnisse.

Allerdings kann der Einsatz eines IQ-Tests bei gleichzeitiger Betrachtung eines Begabungsmodells – z. B. dem von Heller (2000) vorgeschlagenen – durchaus eine wertvolle Komponente der Begabungsdiagnostik darstellen. Beispielsweise weist ein durch einen Intelligenztest attestierter hoher Intelligenzquotient bei gleichzeitig unterdurchschnittlichen schulischen Leistungen auf *Underachievement* hin. Die Ursachenforschung zu einer solchen Diskrepanz zwischen Intelligenz und Performanz kann etwa auf die Umwelteinflüsse und intrapersonellen Faktoren fokussieren.

Der Mehrwert des Einsatzes von spezifischen Intelligenztests ist auch bei der Identifikation mathematischer Begabung nicht zu unterschätzen. Wird, wie auch von Ziegler und Stöger (2003) gefordert, für die Diagnostik mathematischer Begabung kein allgemeiner Intelligenztest, sondern ein spezifisch mathematikbezogenes Testverfahren gewählt, so kann das Ergebnis neue Aufschlüsse über die mathematische Begabung der getesteten Person geben und im Rahmen eines breit angelegten Identifikationsprozesses das Gesamtbild eines Kindes vervollständigen.

Zusätzlich sei an dieser Stelle angemerkt, dass eine professionelle IQ-Testung nur von qualifizierten, psychologisch geschulten Personen, wie zum Beispiel Schulpsychologen, durchgeführt werden kann, welche über das nötige Wissen verfügen, geeignete fachspezifische, dem Identifikationszweck dienliche Tests für den jeweiligen Einzelfall auszuwählen (vgl. Ziegler und Stöger 2003, S. 17).

Für die Durchführung von Intelligenztests spricht, dass durch verschiedene Intelligenztests die Intelligenz durchaus verlässlich erhoben werden kann. Laut Ziegler und Stöger (2003) erscheint „eine Erfassung der Intelligenz mit Hilfe eines IQ-Tests unabdingbar, da Testverfahren den Intelligenzeinschätzungen durch Lehrkräfte, Eltern und selbst geschulte Diagnostiker weit überlegen sind.“ (Ziegler und Stöger 2003, S. 17). Diese Forderung richtet sich aber auf einen innerhalb eines mehrstufigen Identifikationsprozesses weiter vorangeschrittenen Zeitpunkt. Ob aber die Feststellung des IQ und die damit verbundene Etikettierung einen Mehrwert für den Betroffenen und die Schule darstellt, ist vorab zu bedenken.

Dass bestimmte Intelligenztests den Identifikationsprozess bereichern können, wurde durch dieses Kapitel offensichtlich. Da dies aber nicht mehr in der Hand der betreuenden Lehrkräfte liegt, widmet sich der nachfolgende Abschnitt den vielfältigen Möglichkeiten auf Schulebene, welche den Identifikationsprozess einleiten können. Wenn von Schulseite gewünscht, kann es dann, auf Basis dieser Ergebnisse, zu einer Zusammenarbeit mit Psychologen kommen, um eine perspektivenreiche Diagnose des komplexen und mehrdimensionalen Konstrukts der mathematischen Begabung vorzunehmen.

Verfolgt eine Schule den personorientierten Ansatz von Weigand et al. (2014) zur Begabungsförderung, ist es aus pädagogischer Sicht durchaus sinnvoll aufgrund der möglichen Probleme bei der Durchführung einer belastbaren Testung als auch beim Umgang mit ihren Ergebnissen auf eine Etikettierung Hochbegabter zu verzichten. In Hinblick auf die Vermeidung eventuell auftretender Probleme im sozialen Umfeld von Personen, die als hochbegabt getestet wurden, hält Weigand (2014b) fest: „Eine »Lösung« läge darin, auf die Diagnose, nicht aber auf die Förderung der Hochbegabung zu verzichten, das heißt, die Potenziale aller Kinder zu erkennen und sie, ohne Zuschreibung oder spezifischen Nachweis einer Hochbegabung (oder einer anderen Besonderheit), bestmöglich zu fördern.“ (Weigand 2014b, S. 24).

Da zum einen in der Schule nur von speziell ausgebildeten Lehrkräften Intelligenztests durchgeführt werden dürfen und zum anderen die oben aufgeführten Bedenken gegenüber Intelligenztests zu beachten sind, werden nun folgend Möglichkeiten vorgestellt, die von Weigand (2014b) benannten Potentiale von Kindern innerhalb der Schulfamilie in der Alltagspraxis zu identifizieren.

3 Identifikation in der Schule

Folgt man den Positionen zur Auffassung allgemeiner beziehungsweise mathematischer Begabung von Gardner (2010), Heller (2000), Käpnick et al. (2005) und Ulm und Zehnder (2020), so wird offensichtlich, dass eine umfassende und dadurch zuverlässige Diagnostik mathematischer Begabung erst durch das Zusammenspiel verschiedener Maßnahmen vorgenommen werden kann.

Lehrerinnen und Lehrern wird dabei eine wichtige und tragende Rolle innerhalb des Identifikationsprozesses zugeschrieben. Denn zum einen benötigt es für eine Identifikation eine „sehr enge Kooperation mit Praktikern (Lehrkräften, Kindergartenbetreuern, Eltern), denen es in den meisten Fällen obliegt, (...) eine Erstdiagnose zu stellen und potentielle Hochbegabte an die Experten weiterzuvermitteln." (Ziegler und Stöger 2003, S. 8)

Zum anderen ist das Beobachten und Erkennen von Potentialen durch Lehrkräfte ein wesentlicher Schritt zu einer personorientierten Betrachtung des Kindes, welche den Weg hin zu individuellem, differenziertem Fördern ebnet (vgl. Weigand 2014c, S. 17).

Das explizite Vorgehen im Diagnoseprozess wird erheblich vom Zweck der Identifikation bedingt (vgl. Ziegler und Stöger 2003, S. 12). Die schulische Erstdiagnose mathematischer Begabung sollte daher, aufgrund des weiten Begabungsverständnisses und des Einbezugs der zeitlichen Entwicklung von mathematischer Begabung, auf einer offen gehaltenen Erstauswahl für Fördermaßnahmen basieren. Diese kann durch die betreuenden Lehrkräfte stattfinden und mit Selbstnominierungen der Schülerinnen und Schüler und Fremdnomination durch weitere Personen kombiniert werden. Dadurch soll gewährleistet werden, dass möglichst viele potentiell begabte Kinder bzw. Jugendliche eine Förderung erhalten. Die Fördermaßnahmen können somit bewusst auch solche Schülerinnen und Schüler mit erfassen, die von der Lehrkraft als „nur" interessierte eingeschätzt werden (vgl. Baudson 2009, S. 6–7).

Das Ziel einer Erstdiagnose in der Schule sollte daher sein, eine Gruppe von mathematisch interessierten und potentiell begabten Schülerinnen und Schülern zu generieren. Anschließend können dann innerhalb verschiedener Fördermaßnahmen weitere Beobachtungen angestellt werden, da eine mathematische Begabung wohl eher „durch besondere Leistungen in mathematischen Problemlöseprozessen" (Käpnick et al. 2005, S. 23) erfasst werden kann als durch einen Intelligenztest. Besondere Leistungen können einerseits im normalen Unterricht sichtbar werden. Andererseits können Schülerinnen und Schüler auch über den regulären Unterricht hinaus komplexere Aufgaben mit hohem Anforderungspotential erhalten, damit sie ihre mathematische Begabung zeigen können (vgl. Holling et al. 2015, S. 44).

Je nachdem, wie breit eine Diagnostik angelegt werden soll, kann im Laufe dieses Prozesses dann zusätzlich eine Zusammenarbeit mit Psychologen erfolgen. Aber auch ohne das Hinzuziehen von Psychologen können an einer Schule vielfältige Hinweise auf eine eventuell vorliegende mathematische Begabung gesammelt werden.

Im Folgenden werden deshalb verschiedene Verfahren für eine Diagnostik auf Schulebene vorgestellt, welche dann in ihrer Summe ein belastbareres Bild der mathematischen Begabung einer Schülerin oder eines Schülers ergeben können.

4 Identifikationskriterien

Die Festlegung der Faktoren, welche für besondere Begabungen bedeutsam sind, „ist hochgradig vom jeweiligen Begabungsmodell abhängig.“ (Ziegler und Stöger 2003, S. 15). Zudem ist es notwendig „allen Anzeichen von Begabung nachzuspüren und Schülerbeurteilungen auf möglichst viele Informationen zu stützen.“ (Hauptmann et al. 2000, S. 20). Da wir ein mehrfaktorielles und weites Begabungsverständnis zugrunde legen, gilt es also, bei der Identifikation der Schülerinnen und Schüler fachlich-kognitive, aber auch, je nach Identifikationszweck, musische, sportliche, handwerkliche Fähigkeiten sowie Kreativität und nicht-kognitive Persönlichkeitseigenschaften wie Interesse und Ausdauer mit zu berücksichtigen.

Hierdurch begründet sich auch, weshalb es nicht das eine typisch mathematisch begabte Kind gibt und zugleich warum es in den meisten Fällen nicht ausreichend ist, nur ein einziges Diagnoseinstrument zu wählen. Eine an die gegebenen Umstände angepasste Auswahl von Methoden gestattet es, aus möglichst vielen Perspektiven eine Einschätzung eines Begabungsprofils zu erhalten. Dabei kann auf objektive sowie subjektive Auswahlverfahren zurückgegriffen werden.

Viele der Identifikationsmöglichkeiten finden sich bei Mönks (1999, S. 68) aufgelistet. Nachfolgend werden einige der Möglichkeiten vorgestellt und im speziellen Kontext mathematischer Begabung erläutert.

5 Lehrerurteil

Lehrkräfte verbringen einen Großteil des Tages mit Schülerinnen und Schüler und können sie über einen relativ langen Zeitraum beobachten. Zudem sind sie oft wichtige Kontaktpersonen. Gerade die kognitive Entwicklung, Gedächtnisleistungen, das Denken in Strukturen, Problemlösen etc. sowie Persönlichkeitseigenschaften und deren Entwicklung können von Lehrkräften wahrgenommen werden. Beobachtungen durch Lehrkräfte sind daher eine naheliegende Quelle für Informationen zur Beurteilung des Potentials von Schülerinnen und Schülern.

Auf Basis ihrer pädagogischen und fachdidaktischen Ausbildung können Lehrkräfte bestehende Begabungen durchaus treffend einschätzen. Hany (1999) stellt dazu fest:

> Wenn man hochintelligente Schüler mit Hilfe eines Tests bestimmt und dann prüft, wie gut Lehrkräfte dieselben Schüler als besonders begabt nominieren und wie gut dies auf der Grundlage anderer Tests möglich ist, so schneiden Lehrkräfte eigentlich nicht schlechter ab als psychometrische Verfahren. (Hany 1999, S. 15)

Dadurch wird die entscheidende Rolle und Bedeutung von Lehrkräften im diagnostischen Prozess unterstrichen. Zudem können betreuende Lehrkräfte auch Merkmale wahrnehmen, welche in standardisierten Intelligenztests nur schwer zu erheben sind. Ein weiterer Vorteil der Diagnostik durch Lehrerinnen und Lehrer besteht darin, dass sie tagtäglich mit einer großen Anzahl an Lernenden arbeiten und so besser Vergleiche zwischen Schülerinnen und Schülern ziehen können, als dies beispielsweise Eltern im Allgemeinen möglich ist.

Es ist daher ratsam, in allen Phasen der Lehrerbildung auch die (Weiter-)Entwicklung professioneller Kompetenzen von Pädagogen im Bereich der Diagnostik und Förderung begabter Schülerinnen und Schüler zu fokussieren. In Seminaren für Lehramtsstudierende, thematisch ausgelegten Fachsitzungen im Referendariat oder bei regionalen oder schulinternen Lehrerfortbildungen kann es gelingen, nicht nur die Sensibilität für das Thema zu erhöhen, sondern auch die Diagnosefähigkeit von Lehrkräften zu verbessern. Insbesondere sollten sich die Lehrkräfte einer Schule auf einen gemeinsamen Begabungsbegriff sowie Konzepte zur Diagnostik und zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler verständigen.

Eine gewissenhafte Beobachtung ist als bewusster und aktiver Vorgang des Wahrnehmens aber immer auch interpretativ. Das dadurch möglicherweise auftretende Problem einer Fehldiagnose wird daher zu Recht häufig im Zusammenhang mit Lehrerurteilen erwähnt. Eine Einschätzung ist und bleibt in gewissen Maßen subjektiv, woraus auch Fehlurteile resultieren können.

Bei Lernenden, welche fleißig, wissbegierig, interessiert und im schulischen Rahmen dadurch auch hochleistend sind, kann man nachvollziehbarerweise durchaus zunächst eine mathematische Begabung vermuten. Ob eine solche tatsächlich vorliegt, ist aufgrund der Merkmale jedoch noch nicht sicher. So kann es also passieren, dass Schülerinnen und Schüler durch betreuende Lehrkräfte als potentiell mathematisch begabt identifiziert werden, sich diese Vermutung aber im weiteren Förderverlauf nicht bestätigt.

Wenn eine Erstdiagnose aber dazu dient, interessierten Schülerinnen und Schülern die Teilnahme an einem freiwilligen Förderprogramm, wie z. B. in Kapitel C beschrieben, zu ermöglichen, löst sich dieser „Diagnosefehler“ auf. Denn im Hinblick auf eine, die Individualität der Lernenden beachtende, Interessen fördernde Schulkultur, in welcher Wert auf die „individuellen und begabungsgerechten Unterrichts- und Umgangsformen“ (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) 2011, S. 8) gelegt wird, ist ein wie eben beschriebener „Erstdiagnosefehler“ kein Fehler mehr. Bei einer auf einem Lehrerurteil basierenden Erstdiagnose geht es nicht um eine eindeutige Identifikation mathematisch begabter Kinder, sondern sie stellt den Anfang eines Prozesses weiterer Diagnose- und Fördermaßnahmen dar, innerhalb welcher dann weitere Beobachtungen angestellt werden können.

Genauso wie das Lehrerurteil nicht „präzise“ angeben kann, ob eine Person begabt ist oder nicht, stellt sich auch bei Intelligenztests die Frage, wo der Grenzwert für Begabung gezogen werden soll. Rost (2009a) bemerkt dazu, dass die Festlegung, ab wann eine Person als begabt eingestuft wird, eine willkürliche Entscheidung ist, sowohl in der Pädagogik als auch in der Psychologie – „genauso wie es lediglich eine Konvention ist, ob wir jemanden als ‚groß‘ oder ‚klein‘ oder als ‚dick‘ oder ‚dünn‘ bezeichnen.“ (Rost 2009a, S. 15–16).

Auch wenn sich also im Laufe des weiteren Diagnoseprozesses ergibt, dass bei einem Kind sehr wahrscheinlich keine besondere mathematische Begabung vorliegt, so konnte es sich gemäß seinen Interessen weiterbilden und diese vertiefen oder gar neue entdecken. Dies ist innerhalb einer chancengleichen Bildungsgesellschaft ein genauso erstrebenswertes Ziel wie die Förderung besonders begabter Schülerinnen und Schüler. So ist auch auf der Website des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) zu lesen: „Letztlich gilt es vor allem die Fähigkeiten der Kinder zu würdigen und Interesse an ihren Vorgehensweisen zu zeigen, um langfristig ihre Freude an der Mathematik erhalten zu können.“ (Leistungsstarke Kinder | KIRA 2020)

Eine Diagnose mathematischer Begabung ist nun mal dafür da, einschätzen zu können, ob eine mathematische Begabung vorliegt oder nicht. Somit werden unter anderem auch Lernende ohne besondere mathematische Begabung für Fördermaßnahmen nominiert. Abschließend sei nochmal verdeutlicht, dass im schulischen Kontext nicht negativ von einem „Fehler“ gesprochen werden sollte, wenn das Lehrerurteil sich nicht bestätigt und sich herausstellt, dass die vermutete Begabung vielleicht doch nicht vorliegt, denn ggf. könne der Schüler bzw. die Schülerin dennoch von den Fördermaßnahmen profitieren.

Ein anderes Problem bei der lehrerbasierten Erstdiagnose ist das Übersehen potentiell förderwürdiger Kinder, welche eben keine für die Lehrerinnen und Lehrer sichtbaren Merkmale oder Verhaltensweisen, wie Interesse oder außergewöhnliche Schulleistungen, erkennen lassen. Es ist jedoch möglich, dass diese Lernenden trotzdem eine besondere mathematische Begabung besitzen, welche sie aber aufgrund der vielfältigen Einflussfaktoren, wie Klassenklima, kritische Lebensereignisse, Lernstrategien oder Stress (vgl. Kapitel A), nicht zeigen, sogenannte *Underachiever*. Auch wenn man sich auf die allgemeine Intelligenz zum Beispiel nach Rost (2009b), anstatt auf einen mehrdimensionalen Begabungsbegriff nach Ulm und Zehnder (2020), bezieht, ist festzuhalten, dass auch dann solche Schülerinnen und Schüler durchaus schwer von Lehrkräften zu erkennen sind: „Die Hochbegabung von sog. Underachievern wird von ihnen leider kaum erkannt.“ (Rost 2008, S. 26). Für solch spezielle Fälle können sich Lehrkräfte zu dieser Thematik zum Beispiel bei Greiten (2013) oder Ziegler et al. (2000) weiter informieren.

Aufgrund der vorgeschlagenen offenen Erstdiagnose durch das Lehrerurteil ist es in der Schule nicht unbedingt notwendig, exakte Kriterien festzulegen, welche Schülerinnen und Schüler Begabtenförderung erhalten sollten – nicht zuletzt, weil es auch Begabungen gibt, die sich erst im Laufe der weiteren biologischen Entwicklung des Kindes zeigen. Deshalb wird für den Schulalltag eine breite und offene Erstdiagnostik vorgeschlagen, welche durchaus nach dem Prinzip von *Förderung nach Verdacht* erfolgen kann (vgl. Müller-Oppliger 2008, S. 12). Aufgrund der zeitlichen Komponente im Konstrukt *Begabung* und insbesondere auch mathematischer Begabung kann die Diagnostik einer solchen keine einmalige, temporär begrenzte Handlung sein, sondern muss stattdessen als kontinuierlicher Prozess umgesetzt werden.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass, wenn das Ziel einer Diagnostik durch Lehrerinnen und Lehrer der Anstoß für weitere Beobachtungen und Förderungen ist, einige der häufig genannten Kritikpunkte am Lehrerurteil entkräftet werden können. Eine Diagnose anhand des Lehrerurteils ist zudem hilfreich für den weiteren Diagnoseprozess und dadurch im Schulleben unabdingbar.

Für die angesprochene Diagnostik mathematischer Begabung stehen Lehrkräften zusätzlich zu der Grundlage von aus einem mehrdimensionalen, mathematischen Begabungsmodell (siehe Kapitel A) abgeleiteten Beobachtungskriterien unter anderem Merkmalskataloge beziehungsweise Checklisten, Interviews und Gespräche mit den Lernenden, Indikatoraufgaben oder auch Aufgabenbearbeitungen der Schülerinnen und Schüler zur Verfügung. Auch hier gilt der Grundsatz, sich nicht nur auf ein Verfahren oder eine Informationsquelle zu stützen, sondern, je nach verfügbaren Ressourcen, mehrere dieser Möglichkeiten zur Einschätzung eines Lernenden heranzuziehen. Auf Basis des mehrdimensionalen, mathematischen Begabungsbegriffs sollte ein multimethodisches Vorgehen praktiziert werden, was unter anderem auch den Einbezug möglichst vieler Beobachter einschließt, denn: „Urteile sollten immer auf möglichst vielen Beobachtungen in möglichst unterschiedlichen Situationen beruhen.“ (Holling et al. 2015, S. 44).

Nachfolgend werden daher einige Vorgehensweisen näher erläutert und speziell für das Fach Mathematik anhand konkreter Beispiele illustriert.

6 Merkmalskataloge bzw. Checklisten

Checklisten werden im Zusammenhang mit der Identifikation mathematisch begabter Kinder und Jugendlicher häufig genannt. Solche Merkmalskataloge bieten Anhaltspunkte für Lehrerinnen und Lehrer zur Erkennung potentiell begabter Kinder und Jugendlicher. Aufgrund ihrer einfachen Handhabbarkeit und Anwendung mittels Beobachtung lassen sich diese in der Schule einsetzen, um bei einer Vielzahl von Schülerinnen und Schülern eine für die Identifikation notwendige Anzahl von Hinweisen auf eine Begabung zu sammeln. Treffen dann bei einem beobachteten Kind sehr viele der aufgelisteten Merkmale zu, wobei die Anzahl der zutreffenden Merkmale nicht klar bestimmbar ist, so kann die Vermutung einer eventuell vorliegenden Begabung mit weiteren Identifikationsverfahren bereichert und überprüft werden. Daher bieten sich Merkmalskataloge für Lehrkräfte an, welche ihre Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihrer Begabungen einschätzen wollen.

Krutetskii (1976) hat aufgrund einer umfangreichen Studie Merkmale herausgestellt, die mathematisch begabte Heranwachsende in besonderem Maße besitzen:

- die Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischer Inhalte und zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems,
- die Fähigkeit, in mathematischen Symbolen und Strukturen zu denken und logisch Schlussfolgerungen zu ziehen,
- die Fähigkeit zur Verallgemeinerung konkreter mathematischer Sachverhalte, Objekte und Vorgehensweisen,
- die Fähigkeit, den Prozess des mathematischen Denkens zu verkürzen,
- Flexibilität mentaler Prozesse bei mathematischem Tätigsein,
- Streben nach Klarheit und Einfachheit einer Lösung,
- die Fähigkeit zur Reversibilität von Gedankengängen,
- mathematisches Gedächtnis z. B. für generelle mathematische Beziehungen, Problemlöseansätze oder Beweisschemata,
- positive Einstellung zur Mathematik

(vgl. Krutetskii 1976, S. 350–351, Übersetzung d. V.).

Um Grundschulkinder mit einer potentiellen mathematischen Begabung zu erkennen, entwickelte Käpnick (1998) auf Basis seiner Studien ein spezifisches Merkmalsystem, welches sowohl bereichsspezifische Komponenten als auch auf Mathematik bezogene Persönlichkeitseigenschaften enthält:

I. Mathematikspezifische Begabungsmerkmale

- Mathematische Sensibilität (Gefühl für Zahlen und geometrische Figuren, für mathematische Operationen und andere strukturelle Zusammenhänge sowie für ästhetische Aspekte der Mathematik),
- Originalität und Phantasie bei mathematischen Aktivitäten,
- Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte,
- Fähigkeit zum Strukturieren (Erkennen und Bilden von Mustern bzw. Anordnungs- und Gliederungsprinzipien in vorgegebenen oder zu konstruierenden mathematischen Sachverhalten),
- Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen,
- Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer.

II. Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften

- hohe geistige Aktivität,
- intellektuelle Neugier,
- Anstrengungsbereitschaft, Leistungsmotivation,
- Freude am Problemlösen,
- Konzentrationsfähigkeit,
- Beharrlichkeit,
- Selbstständigkeit,
- Kooperationsfähigkeit

(vgl. Käpnick 1998, S. 119).

Auch wenn dieser Katalog ursprünglich nur für Kinder der dritten und vierten Jahrgangsstufe konzipiert wurde, kann er trotzdem auch ein guter Ausgangspunkt für Lehrkräfte der Sekundarstufen sein, sich für Anzeichen mathematischer Begabung zu sensibilisieren.

Einen Katalog speziell für Lehrerinnen und Lehrer im Hinblick auf allgemeine Begabungsmerkmale findet man zum Beispiel bei Hauptmann et al. (2000, S. 21–22) oder auch bei Bardy (2013, S. 98–99). Eine spezielle Förderung sollte dann angeboten werden, wenn wiederum viele der nachfolgenden Merkmale auf eine Schülerin oder einen Schüler zutreffen. Unter zu Hilfenahme weiterer Identifikationsverfahren können dann noch mehr Aufschlüsse über die Annahme einer (mathematischen) Begabung erhalten werden. Dies schließt aber nicht aus, auch wenn weniger Merkmale auf der Liste bei einem Kind oder Jugendlichen beobachtet werden können, der pädagogischen Intuition zu folgen und bei begründetem Verdacht weitere Maßnahmen hinzuzuziehen. Nachfolgend seien einige Punkte aus Bardy (2013) ausgewählt, welche auch unmittelbar in Verbindung zu einer mathematischen Begabung stehen können:

Die Schülerin bzw. der Schüler

- ist an der Schule interessiert und hat ein breites Allgemeinwissen,
- nimmt Informationen schnell auf und kann sie leicht rekapitulieren,
- hat ein hohes Lern- und Arbeitstempo und freut sich über intellektuelle Aktivitäten,
- ist in seinem Arbeiten unabhängig, bevorzugt individuelles Arbeiten und hat Selbstvertrauen,
- ist in seiner allgemeinen Entwicklung fast allen gleichaltrigen Kindern in der Klasse weit voraus,
- hat viele Hobbies und eine Vielfalt von Interessen,
- kann abstrakt denken,
- kann Probleme erkennen, analysierend beschreiben und Lösungswege aufzeigen,
- denkt schöpferisch und liebt es, ungewöhnliche Wege einzuschlagen und neue Ideen vorzulegen,
- kann sich auf interessante Aufgaben in ungewöhnlicher Weise konzentrieren, die alles andere in der Umgebung vergessen lässt,
- brilliert bei mathematischen Aufgaben,
- erfasst zugrunde liegende Prinzipien eines Problems schnell und kommt bald zu gültigen Verallgemeinerungen,
- denkt und arbeitet systematisch,
- findet Gefallen an Strukturen, Ordnungen und Konsistenzen,
- geht auf Fragen wertend ein,
- ist in seinem Denken flexibel,
- ist kritisch und perfektionistisch

(vgl. Bardy 2013, S. 98–99).

Ein Einsatz dieser Checklisten ist durchaus hilfreich, wenn Checklisten als Anregung für Beobachtungen eines Kindes genutzt werden.

Hier gilt, wie auch bei Merkmalskatalogen, dass aufgrund einer Übereinstimmung des Verhaltens eines Kindes mit den auf einer

Checkliste festgehaltenen Merkmalen, keine gesicherte Unterscheidung zwischen besonders und durchschnittlich begabten Schülerinnen und Schülern möglich ist. Denn die häufig sehr allgemein formulierten Merkmale können auch auf nicht besonders begabte Schülerinnen und Schüler zutreffen. Insbesondere kann kein einzeln beobachtbares Merkmal alleiniges Indiz für eine besondere Begabung nach dem Begabungsverständnis aus Kapitel A sein.

Hinzu kommt, dass es keine Mindestanzahl an Übereinstimmungen innerhalb einer Checkliste gibt, ab welcher von einer besonderen Begabung ausgegangen werden kann (vgl. Rost et al. 2006, S. 210).

Trotz aller Bedenken kann bei kritischer Auseinandersetzung mit Checklisten deren Einsatz hilfreich für sensible Beobachtungen sein und einen bereichernden Aspekt für die Identifizierung von besonders begabten Kindern und Jugendlichen liefern. Checklisten können helfen, Lernende systematisch zu beobachten und Informationen zu sammeln.

Ein Auszug einer Checkliste findet sich als Beispiel in Abbildung 1. Weitere Checklisten können unter anderem über die Webseiten des Staatsinstituts für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) unter http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/materialien/besondere-begabungen-an-weiterfuehrenden-schulen/ oder der Beratungsstelle besondere Begabung (BbB) des Landesinstituts für Lehrerbildung und Schulentwicklung Hamburg unter https://li.hamburg.de/materialien-lehrkraefte/4507150/material/ eingesehen werden.

Checkliste zum Erkennen hochbegabter Schüler

Schätzen Sie das Verhalten des beobachteten Kindes ein! Je mehr Punkte schließlich markiert sind, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine hohe Begabung vorliegt.

Name des beobachteten Kindes: ______________________________

- ☐ zeigt große intellektuelle Neugier, will das Warum und Wie von Ereignissen genau wissen, stellt provokative und forschende Fragen, gibt sich nicht mit einfachen Erklärungen zufrieden.
- ☐ fällt durch sehr gute logische Denkfähigkeit auf, versteht abstrakte Konzepte, findet rasch Verallgemeinerungen und Einzelfakten.
- ☐ besitzt außergewöhnliche Ausdauer, ist bestrebt, Aufgaben bis zur eigenen Zufriedenheit zu Ende zu führen, kann sich dabei über lange Zeit konzentrieren.
- ☐ ist ein sehr schneller Denker, kann rasch auf neue Ideen antworten.
- ☐ lernt rasch und leicht, versteht Aufgaben oft bevor noch die gesamte Anweisung oder Erklärung gegeben wurde, benötigt wenig oder keine Übung, um Kompetenzen zu erwerben.
- ☐ hat ein gutes Gedächtnis, benötigt kaum Übung oder Wiederholungen.
- ☐ besitzt einen großen Wortschatz, gutes Sprachempfinden, besteht auf genaue Ausdrucksweise, verwendet Fachausdrücke.
- ☐ beobachtet genau, legt große Aufmerksamkeit auf Details.
- ☐ beweist große Fantasie, sowohl im sprachlichen als auch im gestalterischen Bereich wie beim Zeichnen oder Basteln.
- ☐ ist ein divergenter Denker, sucht nach ungewöhnlichen Lösungswegen.
- ☐ zeigt große Initiative, bevorzugt unabhängiges Arbeiten.

Abb. 1: Checkliste von Richter (2003)

Allein die Beschäftigung mit solch einer Merkmalsliste hat den Vorteil, dass sich Lehrkräfte intensiver mit dem Thema *Begabung* auseinandersetzen, Gespür für Merkmale von Begabten und deren eventuelle Handlungsweisen entwickeln und entsprechendes Verhalten nicht vorschnell aburteilen. Checklisten können somit Lehrkräfte zu Beginn des Identifikationsprozesses sowohl für das Thema an sich als auch für die unterschiedlichen Ausprägungen von Begabungen und die verschiedenen Verhaltensweisen besonders begabter Schülerinnen und Schüler sensibilisieren. Zudem ermöglichen es Checklisten aufgrund ihrer Handhabbarkeit und des geringen zeitlichen Aufwands beim Einsatz, dass Lehrkräfte im Schulalltag zeitökonomisch bei vergleichsweise vielen Schülerinnen und Schülern Hinweise auf mögliche Begabungen sammeln, welche dann weitere Beobachtungen anstoßen können.

7 Selbstnominierung sowie Fremdnominierung durch Eltern und Peers

Für die Teilnahme an einem Förderprogramm und die weitere Beobachtung der betreffenden Schülerinnen und Schüler ist das Lehrerurteil meist entscheidend. Auf Basis verschiedener Hinweise oder geforderter Kriterien nominieren Lehrkräfte gewisse Lernende und ermöglichen ihnen dadurch die Teilnahme an Förderprogrammen wie zum Beispiel in Kapitel C beschrieben. Die Lehrernomination sollte dabei aber durch Einschätzungen weiterer Personen ergänzt werden. Zum einen ist eine Fremdnominierung auch durch Eltern oder enge Freunde des jeweiligen Kindes oder Jugendlichen denkbar. Zum anderen gibt es die Möglichkeit der Selbstnominierung, bei der sich eine Schülerin oder ein Schüler selbst dazu entscheidet, unter anderem aufgrund ihrer bzw. seiner Interessen oder Fähigkeiten, an einem Förderprogramm teilzunehmen.

Selbstnominierung

Ein wesentlicher Vorteil der Einbeziehung von Selbstnominationen bei der Auswahl von Teilnehmern für ein Förderprogramm ist, dass sich gegebenenfalls das Lehrerurteil dadurch stützen lässt und somit wieder ein Baustein zum Gesamtbild der vermuteten (mathematischen) Begabung hinzugefügt wird. Sollte die Selbsteinschätzung nicht mit dem Lehrerurteil korrespondieren, wäre trotz allem durchaus eine Teilnahme in Form einer Art „Probezeit“ am Förderangebot denkbar. Gerade in Hinblick auf häufig nicht von Außenstehenden identifizierte Underachiever kann der Einbezug von Selbstnominierungen von Vorteil sein. Da aber auch eine Überschätzung der eigenen Fähigkeiten möglich ist, sollten in solchen Fällen während der „Probezeit“ der Schüler bzw. die Schülerin und die schulische Entwicklung genau beobachtet werden.

Zudem kann die Aufnahme der Selbstnominierung und somit die Berücksichtigung der Schülermeinung das Gefühl der Akzeptanz der eigenen Person innerhalb der Schulfamilie sowie die Identifikation mit der Fördermaßnahme stärken. Außerdem kann eine positive Selbsteinschätzung und das Vertrauen in die eigene Person das Selbstkonzept der Teilnehmer positiv beeinflussen, wenn diese infolgedessen ihre eigenen Stärken entdecken und anerkennen (vgl. Kwietniewski et al. 2017, S. 46).

Jedoch sollte gerade bei jüngeren Schülerinnen und Schülern eine Selbsteinschätzung kritisch hinterfragt werden. Das nötige Abstraktionsvermögen ist bei ihnen ggf. noch nicht voll ausgeprägt, sodass sie eine objektive Sicht auf sich selbst nur schwer einnehmen können und häufig nur die Eltern- oder Lehrermeinungen übernehmen (vgl. Hany 2001, S. 167). Hingegen kann man älteren

Schülerinnen und Schülern durchaus zumuten, ihr eigenes Potential gut einzuschätzen. Dabei ist für die jeweiligen Lehrkräfte die Kenntnis über die eigenen Schülerinnen und Schüler wichtig, um deren Aussagen einordnen zu können.

Des Weiteren kann auch eine Fremdnominierung durch die Eltern oder Peers in das Lehrerurteil und schlussendlich auch in die Entscheidungsfindung der Schule zur Diagnostik und Förderung mit aufgenommen werden.

Peernominierung

Peernomination kann es ermöglichen, bislang nicht bedachte Interessen oder Leistungen eines Kindes in die Entscheidungsfindung mit aufzunehmen, denn gleichaltrige Mitschülerinnen und Mitschüler haben mitunter einen anderen Blickwinkel auf ihre Freunde (vgl. Holling et al. 1999, S. 48).

In einer frühen Studie von 1989 befasste sich schon Gagné mit der Peernomination. Unter anderem konnte er herausstellen, dass solch eine Form der Nominierung sehr einfach und ökonomisch durchzuführen ist. Darüber hinaus generiert diese Maßnahme viele urteilende Personen pro Schulklasse, was wiederum zu einer stabileren Einschätzung als der einer einzelnen Person führt. Einzelne starke Abweichungen vom Gesamturteil fallen somit nicht so stark ins Gewicht (vgl. Gagné 1989, S. 55).

Wie auch bei der Selbstnominierung sollte das durch die Peernominierung erhaltene Urteil aber unter Berücksichtigung des Alters der befragten Schülerinnen und Schüler interpretiert werden. Jüngere Kinder beeinflusst zum Beispiel das Erscheinungsbild oder die persönlich empfundene Sympathie mit dem einzuschätzenden Gleichaltrigen noch erheblich in ihrer Beurteilung (vgl. Holling et al. 1999, S. 48–49).

Elternnominierung

Eltern können, abgesehen von der Schülerin oder dem Schüler selbst, die Interessen ihres Kindes im Alltag am besten einschätzen und somit auch eine große Hilfe im Identifikationsprozess sein. Beobachtungen zur geistigen Entwicklung und Aneignung von Fähigkeiten sind wichtige Hinweise, die Eltern liefern können (vgl. Hany 2001, S. 168).

Aber auch hier sollte bedacht werden, dass Eltern ihrem Kind grundsätzlich wohlwollend gegenüber stehen, dadurch möglicherweise voreingenommen sind und eine objektive Bewertung erschwert ist (vgl. Holling et al. 1999, S. 50). Dennoch können die Einschätzungen der Eltern das Bild über die Begabungen ihres Kindes bereichern.

Käpnick et al. (2005) stellen zum Elternurteil im Rahmen ihrer Studien fest, dass viele Eltern ihre Kinder sehr gut in Bezug auf das Vorliegen einer mathematischen Begabung einschätzen. Oft kommt es aber auch vor, dass Eltern ihre Kinder überschätzen, da diese zwar hohe Leistungen zeigen, welche aber z. B. vom sozialen Umfeld des Kindes stark beeinflusst sind, denn: „Sehr hohe Leistungen können sowohl auf eine hohe Begabung wie auch auf eine sehr gute Förderung des Kindes verweisen.“ (Käpnick et al. 2005, S. 26)

Selbst- und Fremdnomination können also für die generelle Begabungsdiagnostik enorm nützlich sein, sollten aber gleichzeitig stets nur unter kritischer Betrachtung als Anreicherung dienen und auch im speziellen Fall für die Diagnostik durch Lehrkräfte nicht blind übernommen werden, denn: „Daß hierbei bekannte Fehlerquellen, z. B. soziale Erwünschtheitsreaktionen, zu kontrollieren sind, versteht sich von selbst.“ (Heller 2000, S. 251).

8 Indikatoraufgaben

Um mathematikspezifische Begabungsmerkmale (vgl. Abschnitt 6) erkennen zu können, wurden von Wissenschaftlern Aufgaben entwickelt und evaluiert, deren Bearbeitung dann Rückschlüsse auf eine mathematische Begabung zulässt. Dieser Aufgabentyp zeichnet sich durch eine relativ offene und komplexe Problemstellung aus, durch welche versucht wird, mathematisch-produktive Lerntätigkeit zu initiieren, Raum für kreative Lösungswege und Freiheit bei der Bearbeitung zu schaffen (vgl. Fuchs 2015, S. 196–198). Aufgaben dieses Typs bezeichnet man als *Indikatoraufgaben*. Somit stellen Indikatoraufgaben zusammen mit den bereits vorgestellten Verfahren eine weitere Möglichkeit dar, Hinweise auf eine mathematische Begabung zu sammeln, auf deren Grundlage, zusammen mit weiteren Informationen, dann ein durchaus belastbares schulisches Urteil zur mathematischen Begabung eines Schülers oder einer Schülerin gefällt werden kann.

Für Aufgaben aus dem Kindergarten- und Grundschulbereich (Kinder von etwa 4 bis 11 Jahren) sei an dieser Stelle auf Fuchs (2015), Bardy (2013) und Käpnick (2001) verwiesen. Im Sekundarschulbereich, genauer für die Jahrgangsstufen 9 und 10 an Gymnasien (Jugendliche im Alter von circa 15 bis 16 Jahren), wurden von Zehnder (in Vorbereitung) Aufgaben entworfen, welche verschiedene mathematische Fähigkeiten prüfen.

Beispielhaft seien daraus zwei Aufgaben zur Überprüfung mathematischer Kreativität und zum Erkennen von Mustern und Strukturen vorgestellt. Beide Aspekte finden sich dabei sowohl bei Krutetskii (1976) (Fähigkeit, in mathematischen Symbolen und Strukturen zu denken; Flexibilität mentaler Prozesse) als auch bei Käpnick (1998) (Originalität und Phantasie; Fähigkeit zum Strukturieren) wieder. Anschließend sind die Abschriften beispielhafter Originallösungen abgebildet. Bei beiden Aufgaben waren jeweils zehn Minuten Bearbeitungszeit vorgegeben.

Mathematisch kreatives Denken

Zerlege die Quadrate der Seitenlänge von 5 Längeneinheiten in je fünf Teile mit jeweils gleichem Flächeninhalt. Finde so viele verschiedene Zerlegungen wie möglich!

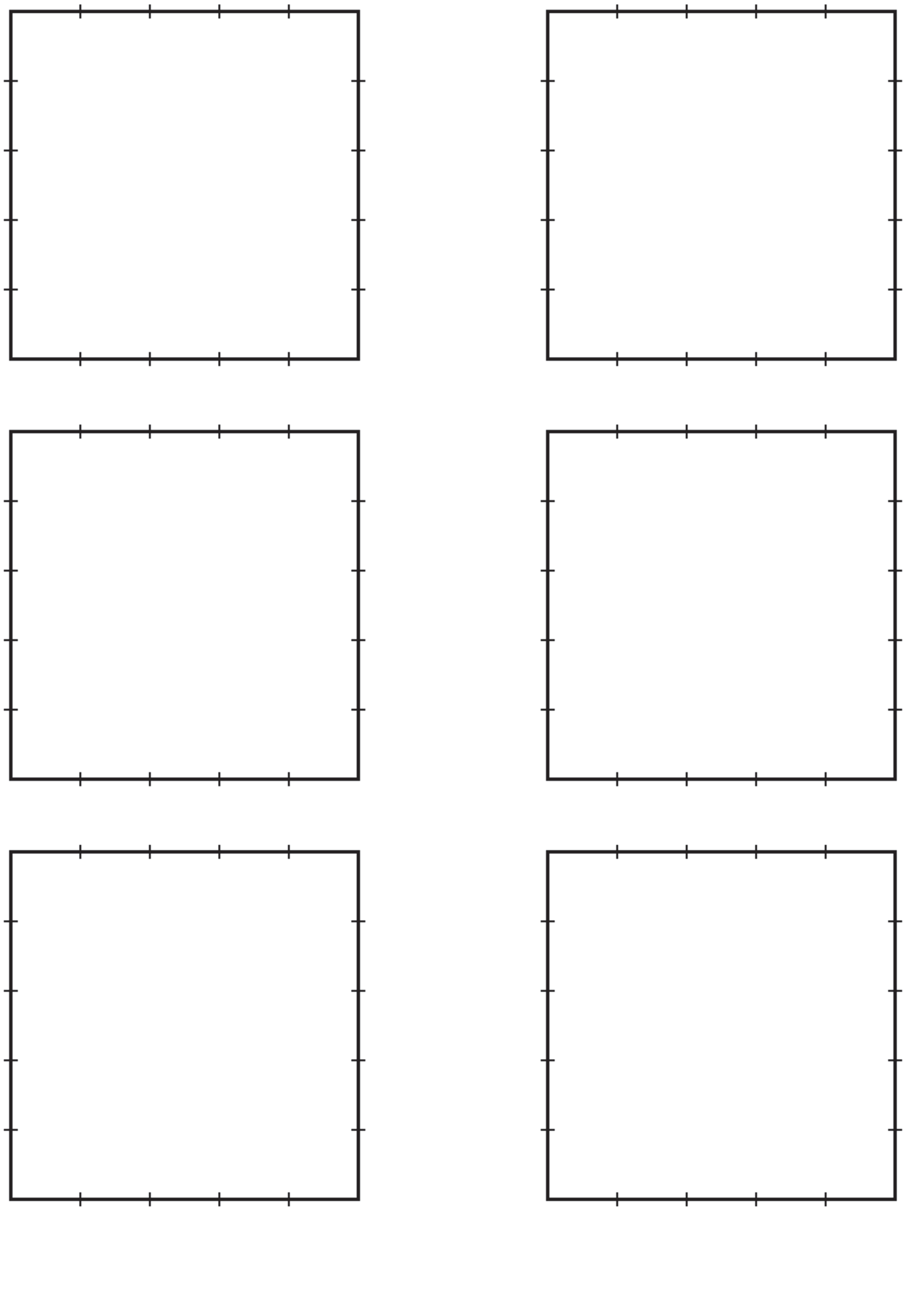
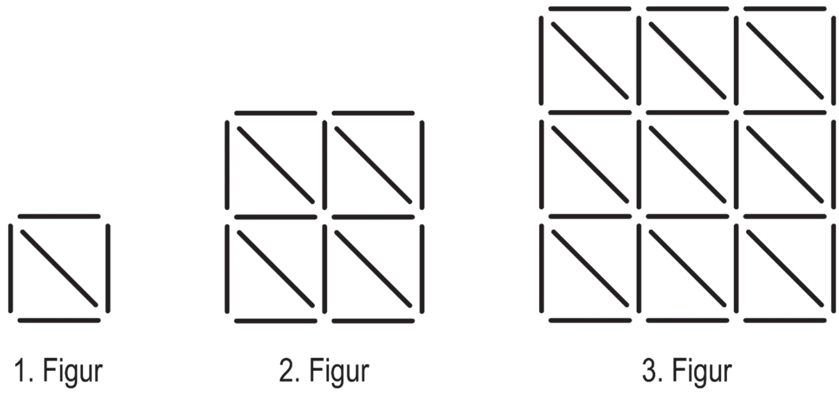


Abb. 2: Indikatoraufgabe zu mathematischer Kreativität

Denken mit mathematischen Mustern

Das folgende Muster wird aus Streichhölzern gelegt.



a) Wie viele Streichhölzer benötigt man für die vierte Figur?

b) Wie viele Streichhölzer benötigt man für die zehnte Figur?

c) Gib eine allgemeine Formel zur Berechnung der Anzahl der Streichhölzer für eine beliebige Figur dieser Figurenfolge an.

Begründe deine Antworten!

Abb. 3: Indikatoraufgabe zum Erkennen von Mustern und Strukturen

Mathematisch kreatives Denken

Zerlege die Quadrate der Seitenlänge von 5 Längeneinheiten in je fünf Teile mit jeweils gleichem Flächeninhalt. Finde so viele verschiedene Zerlegungen wie möglich!

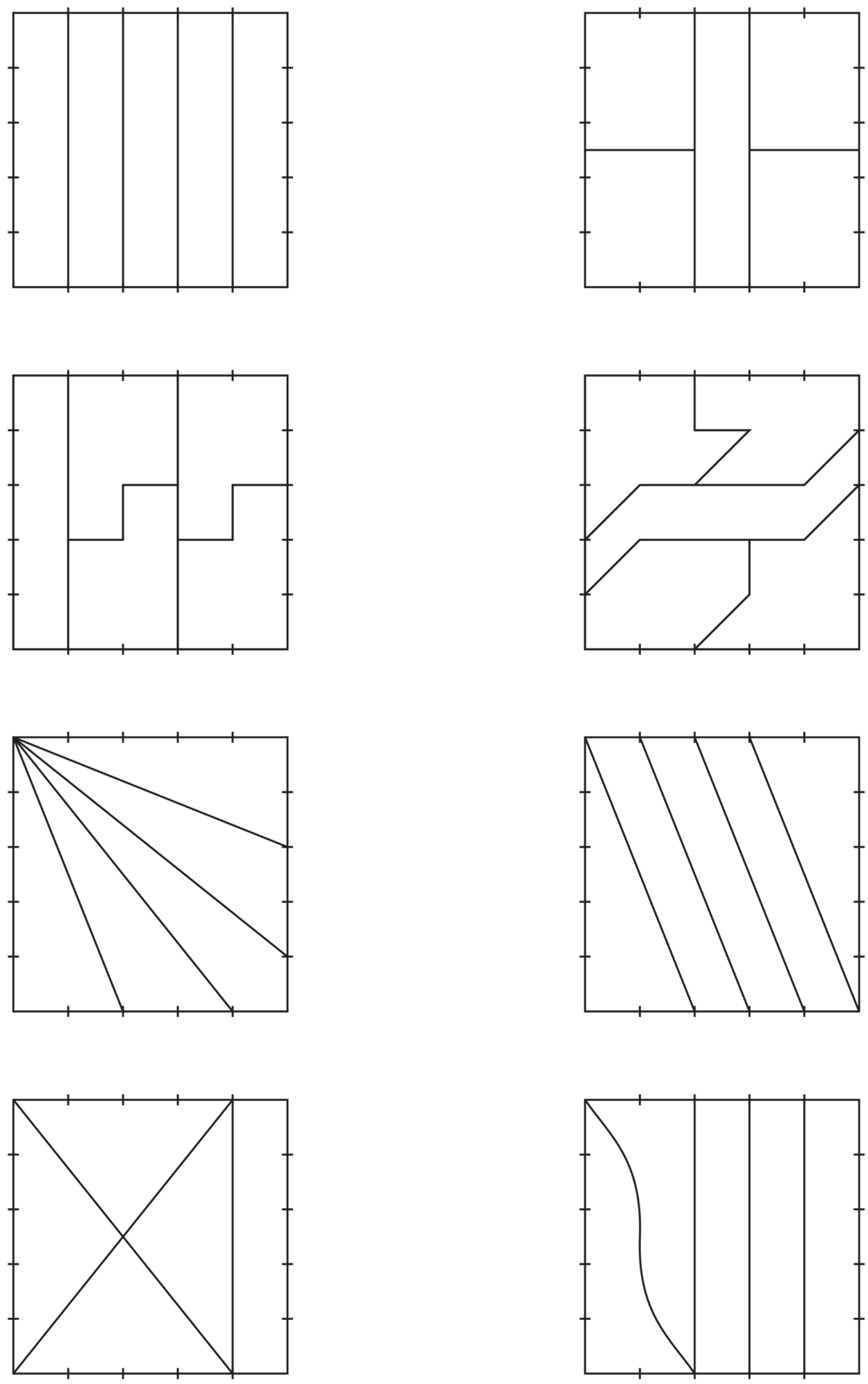


Abb. 4: Schülerlösungen zu mathematischer Kreativität

Relevante Ergebnisse der Evaluation dieses Aufgabenpools zur Identifikation mathematischer Begabung der Sekundarstufe für Schulen und Lehrkräfte sind:

Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler (in der Untersuchung Teilnehmerinnen und Teilnehmer an Mathematikwettbewerben auf Landesniveau) schneiden in den Aufgaben im Schnitt jeweils besser ab als Schülerinnen und Schüler regulärer Gymnasialklassen. Vielen mathematisch Begabten (92 Prozent) gelingt es dabei, die der Aufgabe „Denken mit mathematischen Mustern" zugrunde liegende Struktur zu erkennen und in Form eines Terms anzugeben. Dies gelingt deutlich weniger Schülerinnen und Schülern der Vergleichsgruppe (11 Prozent). Die Aufgabe – und insbesondere die Ergebnisse aus Teilaufgabe c – sind daher gut geeignet, um mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler zu erkennen.

Obwohl auch in der Aufgabe zur Erfassung mathematischer Kreativität Gruppenunterschiede feststellbar sind, überlappen die Ergebnisse der beiden Gruppen deutlich stärker. Dies deutet darauf hin, dass die Aufgabe weniger gut zum Erkennen mathematischer Begabung geeignet ist. Das eher heterogene Abschneiden der untersuchten mathematisch begabten Neunt- und Zehntklässler deutet darauf hin, dass mathematische Kreativität nicht notwendig bei allen mathematisch Begabten vorliegt, sondern stattdessen wohl eher unterschiedliche Begabungstypen kennzeichnet. Dementsprechend ist die hier vorgestellte Aufgabe im Hinblick auf eine umfassende und ganzheitliche Diagnostik trotzdem von Bedeutung.

9 Fazit

Angesichts der Vielzahl an Möglichkeiten der Identifikation begabter Schülerinnen und Schüler ist ein schrittweise gestuftes Vorgehen bei der Begabungsdiagnostik sinnvoll – auch um mehrere dieser Möglichkeiten zu kombinieren. Hierbei sind Lehrkräfte unverzichtbare Stützen. Ziegler und Stöger (2003) beschreiben solch ein mehrstufiges Vorgehen in ihrem *ENTER-Modell*, bei welchem die einzelnen Phasen relativ unabhängig vom zugrunde gelegten Begabungsverständnis sind, sodass die einzelnen Schritte vor dem Hintergrund eines der verschiedenen komplexen Begabungsmodelle erfolgen können. Auch Heller (2000) entwickelte dahingehend seine *Sukzessive Identifikationsstrategie zur Förderung besonders begabter Grundschüler/innen bzw. Gymnasialschüler/innen* und schreibt dazu:

> Zu Beginn erfolgt eine Grobauslese (Screening), etwa aufgrund von Lehrernominationen bei Schülern oder Elternnominationen bei Vorschulkindern, bei älteren Jugendlichen gelegentlich – zusätzlich – auch via Selbstnomination. Weit verbreitet, vor allem im angloamerikanischen Raum, sind Lehrer- und Elternchecklisten auf der Basis von Ratingskalen, die sich auf operationalisierte hochbegabungsspezifische Verhaltensmerkmale sowie soziale Umweltbedingungen der Begabungsentwicklung beziehen. Angestrebt wird dabei ein möglichst breites Universum von kognitiven und motivationalen Verhaltensweisen, die Aufschlüsse über die vermutete Hochbegabung des Jugendlichen und seine Situation vermitteln könnten. Da Ratings und andere „weiche" Daten in der Regel weniger messgenau sind als Testdaten, kommt es beim Screening vor allem darauf an, möglichst keine hochbegabten Kandidaten z. B. für ein bestimmtes Förderprogramm oder eine wissenschaftliche Untersuchungsstichprobe zu

> „verlieren". Dabei wird das Risiko erster Art (Alpha-Fehler) eingegangen, d. h. eine möglicherweise nicht geringe Quote zunächst Fehlplatzierter toleriert. Erst in einer zweiten oder gar dritten Auslesestufe mit Hilfe messgenauerer, aber in der inhaltlichen Erfassungsbreite eingeengter Diagnoseinstrumente (Tests) erfolgt dann sukzessive die Endauswahl, womit eine sukzessive Reduzierung des Beta-Fehlers möglich wird. (Heller 2000, S. 251 f.)

Resümierend lässt sich in Übereinstimmung mit Bardy (2013) feststellen, dass eine Diagnostik mathematischer Begabung so vielfältig wie möglich, unter Ausschöpfung aller Ressourcen erfolgen sollte (vgl. Bardy 2013, S. 95). Nur aufgrund der Tatsache, dass ein Kind sehr gute mathematische Schulleistungen erbringt, sollte nicht auf eine besondere mathematische Begabung geschlossen werden. Bei Abwesenheit offensichtlicher Indizien für eine mögliche mathematische Begabung sollte aber wiederum auch nicht die Möglichkeit ganz ausgeschlossen werden, dass eine mathematische Begabung doch vorliegt. Mathematische Begabung ist ein komplexes Konstrukt, welches vielen Einflüssen unterliegt und das Erkennen einer solchen ist daher nicht immer einfach.

Eine sehr authentische Art, mathematisch begabte Kinder und Jugendliche zu erkennen, ist es, sie bei mathematischem Tätigsein zu beobachten. Dabei können unter Einbezug von Erklärungen der Kinder und Analysen ihrer erarbeiteten Produkte belastbare Hinweise für eine Begabung gesammelt werden (vgl. Ulm und Zehnder 2020). Auch Käpnick et al. (2005) stellen durch ihre Untersuchungen fest: „Die besondere Begabung eines Kindes lässt sich nur dann beobachten, wenn der Unterricht Angebote enthält, die eine solche Beobachtung zulassen. Wir brauchen deshalb einen Unterricht, der Kinder zum Knobeln anregt, der es fordert Probleme zu bearbeiten […]" (Käpnick et al. 2005, S. 27). Daher sollte ein mehrstufiger Diagnoseprozess nach einer ersten Grobauswahl Elemente der Förderung enthalten, in denen die Teilnehmer an anspruchsvollen mathematischen Problemstellungen arbeiten können. Hierbei entstehen vielfältige Möglichkeiten, sie im Sinne fachbezogener Begabungsdiagnostik zu beobachten und ihr mathematisches Arbeiten zu analysieren. Zudem können bei solch einer Förderung auch interessierte, aber nicht überdurchschnittlich begabte Schülerinnen und Schüler ihre mathematischen Fähigkeiten weiterentwickeln sowie ihrer Neugier und ihren Entdeckerfreuden nachgehen (vgl. Weigand 2014c, S. 11).

Bei der Diagnostik kommt der Schule und damit insbesondere den betreuenden Lehrkräften eine große Aufgabe zu. Auf Basis ihrer pädagogisch-didaktischen und mathematisch-fachlichen Kompetenzen können sie Schülerinnen und Schüler beobachten, mit ihnen ins Gespräch kommen, Schülerlösungen analysieren und Gedankengänge nachvollziehen, um damit die mathematischen Begabungen zu erkennen und einzuschätzen.

Ein Ziel jeder Schule sollte es sein, eine personorientierte Schulkultur zu erzeugen, um Schülerinnen und Schüler gemäß ihren potentiellen Begabungen und Interessen zu fördern. Schließlich hat nach Artikel 128 der Bayerischen Verfassung jeder Bewohner Bayerns den Anspruch darauf, „eine seinen erkennbaren Fähigkeiten und seiner inneren Berufung entsprechende Ausbildung zu erhalten." (Bayerische Staatskanzlei 2020) Leitmotiv der Diagnostik und Förderung begabter Kinder und Jugendlicher kann daher sein, dass jeder Lernende ein Recht auf persönliche Entfaltung und individuelle Förderung besitzt.

Literaturverzeichnis

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Baudson, Tanja Gabriele (2009): Nominationen Hochbegabter für Förderprogramme. Das schulische Vorschlagswesen und seine Schwierigkeiten. *MinD-Magazin* (68), 6–8.

Bayerische Staatskanzlei (2020): Art. 128 – Bürgerservice. https://www.gesetze-bayern.de/Content/Document/BayVerf-128.

Fuchs, Mandy (2015): Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen. Seelze: Klett Kallmeyer.

Gagné, Françoys (1989): Peer Nominations as a Psychometric Instrument: Many Questions Asked But Few Answered. *Gifted Child Quarterly* 33 (2), 53–58. DOI: 10.1177/001698628903300201.

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Greiten, Silvia (2013): Hochbegabte Underachiever. Perspektiven und Fallstudien im schulischen Kontext. Berlin: Lit-Verlag.

Hany, Ernst A. (1999): Wie gut können Lehrer Hochbegabung erkennen? Vom diagnostischen Alltag der Lehrkräfte und ihren Problemen. *LVH aktuell* (1a), S. 14–17. https://besondersbegabte.alp.dillingen.de/images/Dokumente_red/Basiswissen/Wie_gut_k%C3%B6nnen_Lehrer_Hochbegabung_erkennen_Hany_1999.pdf.

Hany, Ernst A. (2001): Identifikation von Hochbegabten im Schulalter. In: Kurt A. Heller (Hg.): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe, 42–168.

Hauptmann, Hannes; Hoerburger, Christian; Müller, Sigrun; Ostmeyer, Evelin; Spahn, Christine; Staudacher, Maria; Zevegyi, Monika (2000): HomoSuperSapiens. Hochbegabte Kinder in der Grundschule erkennen und fördern. Ein Projekt des Staatsinstituts für Schulpädagogik und Bildungsforschung München und der BMG Group. München: BMW AG.

Heller, Kurt A. (2000): Hochbegabungsdiagnose (Identifikation). In: Kurt A. Heller (Hg.): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, S. 241–255.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Preckel, Franzis; Vock, Miriam; Roßbach, Hans-Günther; Baudson, Tanja Gabriele; Gronostaj, Anna et al. (2015): Begabte Kinder finden und fördern. Hg. v. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF). https://www.bmbf.de/pub/Begabte_Kinder_finden_und_foerdern.pdf.

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang (Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, 5).

Käpnick, Friedhelm (2001): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler. Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Krutetskii, Vadim Andreevič (1976): The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: Univ. of Chicago Press (Survey of recent East European mathematical literature). http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0608/74033520-d.html.

Kwietniewski, Jan; Cronjäger, Hanna; Momma, Andrea; Tonke, Franziska; Ziesenitz, Anne (2017): Begabtenförderung. Grundlagen der schulischen Begabtenförderung. Hg. v. Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung Hamburg. https://li.hamburg.de/contentblob/3892734/940beee6a77573f12aab2a7826c05a20/data/pdf-broschuere-begabtenfoerderung-bbb-2017.pdf.

Leistungsstarke Kinder | KIRA (2020). https://kira.dzlm.de/lernen-wie-kinder-denken/leistungsstarke-kinder.

Mönks, F. J. (1999): Begabte Schüler erkennen und fördern. In: Christoph Perleth und Albert Ziegler (Hg.): Pädagogische Psychologie. Grundlagen und Anwendungsfelder. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Verlag Hans Huber, 63–72.

Müller-Oppliger, Victor (2008): Ist Lisa Einstein «hochbegabt»? – Erkennen besonderer Begabungen in Unterricht und Schule. Die Stärken der Kinder fördern. *Die Neue Schulpraxis* 78. (10), 9–12. http://www.begabungsfoerderung-schweiz.ch/sites/default/files/publications/erkennen_besonderer_begabungen_in_unterricht_und_schule_nsp_2_10-08.pdf.

Richter, Andrea (2003): Hochbegabung. Information für Lehrer, Edition LAK.

Rost, Detlef H. (2008): Identifkation von Hochbegabten. In: Hessisches Kultusministerium (HKM) (Hg.): Hochbegabung und Schule. 18–27.

Rost, Detlef H. (2009a): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Rost, Detlef H. (Hg.) (2009b): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72).

Rost, Detlef H.; Sparfeldt, Jörn R.; Schilling, Susanne R. (2006): Hochbegabung. In: Karl Schweizer (Hg.): Leistung und Leistungsdiagnostik. Berlin, Heidelberg: Springer, 189–217.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) (Hg.) (2011): Besondere Begabungen an weiterführenden Schulen finden und fördern. https://www.isb.bayern.de/download/9590/cover_besondere_begabungen.pdf.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele (2014a): Begabung oder Hochbegabung? In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 37–46.

Weigand, Gabriele (2014b): Einführung in das Kapitel. In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 22–25.

Weigand, Gabriele (2014c): Zur Einführung: Eine Idee entsteht… Vom Comenius-Projekt zur personorientierten Begabungsförderung. In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 11–20.

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (Hg.) (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Zehnder, Moritz (in Vorbereitung): Mathematische Begabung in den Jahrgangsstufen 9 und 10: Ein theoretischer und empirischer Beitrag zur Modellierung und Diagnostik.

Ziegler, Albert; Dresel, Markus; Schober, B. (2000): Underachievmentdiagnose: Ein Modell zur Diagnose partieller Lernbeeinträchtigungen. In: Kurt A. Heller (Hg.): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, 259–277.

Ziegler, Albert; Stöger, Heidrun (2003): ENTER – Ein Modell zur Identifikation von Hochbegabten. *Journal für Begabtenförderung* (1), 8–21.

Tom Köcher

C Konzepte zur Förderung mathematischer Begabung

1 Einleitung

In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten zur Förderung mathematisch begabter Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufen vorgestellt. Dies erfolgt auf der Grundlage eines weit gefassten Begabungsbegriffs und des Verständnisses von mathematischer Begabung aus Kapitel A sowie der Konzepte aus Kapitel B zur Identifikation mathematisch begabter Kinder und Jugendlicher mit einer schulischen Diagnose als Ausgangspunkt. Das *Drehtürmodell* wird dabei als ein Konzept zur Förderung näher betrachtet und durch einen praktischen Erfahrungsbericht über die Umsetzung einer speziellen Form des Drehtürmodells an zwei bayerischen Gymnasien illustriert.

Um begrifflich zu fundieren, worauf Begabtenförderung im Mathematikunterricht abzielt, wurde in Kapitel A der Begriff der mathematischen Begabung geschärft. Diese Definition mit der engen Kopplung des Begriffs mathematischer Begabung an den Kompetenzbegriff der Bildungsstandards und der Lehrpläne stellt den engen Bezug zwischen Begabtenförderung und Mathematikunterricht heraus. Begabtenförderung bedeutet, Schülerinnen und Schüler bei der Entwicklung mathematischer Kompetenzen zu unterstützen und ordnet sich damit in die regulären Aufgaben des Mathematikunterrichts ein.

2 Fördermöglichkeiten

Mathematikunterricht ist für alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen da. Aber selbst innerhalb des gegliederten Schulsystems finden sich in den Schulklassen Kinder und Jugendliche mit sehr unterschiedlichen Leistungspotentialen und Begabungen. Dies gilt insbesondere auch in Bezug auf das Fach Mathematik. Zugleich zielt der Mathematikunterricht darauf ab, dass alle Lernenden ihre mathematikbezogenen Potentiale bestmöglich entwickeln. Hier stellt sich also die Frage, wie derartige Ziele in der Unterrichtspraxis angesichts der Diversität der Schülerinnen und Schüler erreicht werden können.

Einen Weg hierfür bilden Differenzierungsmaßnahmen. Schon der Philosoph Johann Friedrich Herbart (1776–1841) merkte diesbezüglich an:

„Die Verschiedenheit der Köpfe ist das größte Hindernis aller Schulbildung. Darauf nicht zu achten, ist der Grundfehler aller Schulgesetze.“

Begabte Schülerinnen und Schüler besuchen, genauso wie alle anderen auch, pro Woche etwa vier Unterrichtsstunden den Mathematikunterricht. Diese Zeit gilt es möglichst optimal zu nutzen. Eine außerunterrichtliche Förderung findet bestenfalls wöchentlich statt und beträgt beispielsweise eineinhalb Zeitstunden, was speziell für Mathematik die Hälfte der Zeit entspricht, die die Lernenden im Unterricht verbringen. Förderangebote außerhalb der regulären Unterrichtszeit sind wünschenswert und unabdingbar, aber in Hinblick auf die dadurch erreichten Schülerinnen und Schüler sowie die aufgewandte Zeit sind diese Maßnahmen doch nur ein Zusatz neben dem regulären Mathematikunterricht; er ist für die Förderung begabter Schülerinnen und Schüler von erheblicher Relevanz. In diesem Sinne soll das Folgende einen Überblick über verschiedene Möglichkeiten geben, den regulären Mathematikunterricht als wesentlichen Ort zur Begabtenförderung zu sehen und entsprechend zu gestalten.

Innere Differenzierung

Ein wesentliches Element schulischer Begabtenförderung stellt innere Differenzierung innerhalb der einzelnen Unterrichtsstunden dar. Dazu werden alltäglich umsetzbare Strategien benötigt, um im Unterricht zeitweise und regelmäßig differenziert zu arbeiten. Offene, binnendifferenzierende Unterrichtsformen ermöglichen es allen Schülern, auf ihrem jeweiligen Fähigkeitsniveau Mathematik zu betreiben, was dann zu einem passgenauen Unterricht für alle führen kann.

Zum Beispiel können je nach Arbeits- und Lerntempo der Schülerinnen und Schüler Aufgabenstellungen differenziert gestellt und entsprechende Hilfestellungen angepasst verteilt, Lernenden Wahlfreiheit bei den Aufgaben gewährt oder offene Aufgaben, welche unterschiedliche Bearbeitungstiefen ermöglichen, eingesetzt werden. Eine Vielzahl solcher methodischen Konzepte für offenen Unterricht finden sich beispielsweise bei Barzel et al. (2018) sowie Leuders und Prediger (2016).

Aufgaben, die Leistungsschwächeren substanzielles Lernen ermöglichen und gleichzeitig für begabte Schülerinnen und Schüler Herausforderungen bieten, müssen offen sein. Das heißt, sie sollten eine mathematikhaltige Situation herstellen, die vielfältige Bearbeitungsmöglichkeiten und eine Beschäftigung auf unterschiedlichen Niveaus zulässt. Des Weiteren müssen derartige Aufgaben für alle Schülerinnen und Schüler leicht zugänglich sein, damit auch Leistungsschwächere Ansätze finden und Erfolgserlebnisse haben. Die Einstiegshürde sollte also nicht zu hoch sein. Gleichzeitig müssen Leistungsstärkere entsprechend ihrer Fähigkeiten Mathematik betreiben können. Offene Aufgaben müssen somit alle Schülerinnen und Schüler zum Erkunden einladen und Impulse für mathematisches Denken geben (vgl. Ulm 2009, 100/6).

Ulm und Zehnder (2020) merken zu offenen Aufgaben für Begabtenförderung an, dass diese eine gewisse Reichhaltigkeit und Tiefe besitzen sollten. Mathematische Reichhaltigkeit wird gewährleistet, wenn die durch die Aufgabe angesprochenen mathematischen Inhalte einen gewissen Komplexitätsgrad besitzen, welcher es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, sich über einen gewissen Zeitraum mit der Thematik zu beschäftigen. Aufgabentiefe bedeutet, dass die Aufgaben auch Begabten genügend Herausforderungen bieten, ihre mathematischen Kompetenzen weiterzuentwickeln.

Über den regulären Unterricht hinaus gibt es zahlreiche zusätzliche Angebote zur Förderung begabter Schülerinnen und Schüler. Sie werden häufig in die zwei Maßnahmenkategorien *Akzeleration* und *Enrichment* eingeteilt.

Enrichment

Die Kategorie des *Enrichment* vereint Fördermaßnahmen, bei welchen sich die Lernenden mit Inhalten befassen, die in ihrem Ausbildungsgang regulär nicht vorgesehen sind. Sie können dabei zusätzliche Themenfelder bearbeiten (*horizontales Enrichment*) oder Lehrplanthemen vertiefen (*vertikales Enrichment*). Enrichmentangebote können vollständig losgelöst vom regulären Unterricht organisiert werden, beispielsweise in Form von

- Wettbewerben,
- Wahlunterricht,
- Arbeitsgemeinschaften,
- Pluskursen,
- Feriencamps,
- Schülerakademien,
- Schülerstudium.

Enrichmentangebote können aber auch vom regulären Unterricht ausgehen. Anhand von Zusatzmaterialien können begabte Schülerinnen und Schüler zum Beispiel Begriffe, welche im Unterricht anschaulich, didaktisch reduziert eingeführt werden, mathematisch exakter erschließen. Thematisch würden sich zum Beispiel die Begriffe der Funktion, des Grenzwerts oder des Vektors anbieten. Zudem gibt es Situationen im Unterricht, bei denen aus pädagogisch-didaktischen Gründen die Präzision eines Beweises oder dessen Umfangs reduziert wird (z. B. Ableitungsregeln, Ableitung der Sinusfunktion, Herleitung von Flächeninhaltsformel und Volumenformeln). Hier könnten begabte Schülerinnen und Schüler Impulse erhalten, um Begründungen aus dem Unterricht zu präzisieren oder zu vervollständigen.

In Übungs- oder Freiarbeitsphasen sowie in Vertretungs- oder Freistunden können sich Interessierte und Begabte mit Impulsen für Enrichment auseinandersetzen und sich auch zu Hause noch darin vertiefen. Inhaltliche Anregungen für mögliche Themen finden sich bei fakultativen Lehrplaninhalten, in älteren Lehrplänen oder auf speziellen Themenseiten von Schulbüchern.

Weitere, vertiefende Anregungen für Enrichment im und in Verbindung mit dem Mathematikunterricht geben zum Beispiel Ulm und Zehnder (2020).

Akzeleration

Zudem gibt es die Möglichkeit der *Akzeleration*. Maßnahmen, die eine Verkürzung der Beschäftigungszeit mit einem Thema oder der Verweildauer in der Schule, also eine Beschleunigung des Lernprozesses, mit sich bringen, werden der Akzeleration (lat. acceleratio = Beschleunigung) zugeordnet. Beispiele für solche Maßnahmen wären eine frühere Einschulung, das Überspringen von Jahrgangsstufen oder das Lernen eines Fachs in einer höheren Jahrgangsstufe.

Grouping

Eine besondere Stellung innerhalb der Fördermaßnahmen nimmt das *Grouping*, eine Form der Segregation, ein. Die Einrichtung spezieller Klassen oder Schulen für besonders begabte Kinder und Jugendliche sind zwei Beispiele für solch eine Form der Förderung.

3 Das Drehtürmodell in Deutschland

Der Name *Drehtürmodell* leitet sich vom englischen Begriff des *Revolving Door Model* ab, der durch den amerikanischen Begabungsforschers Joseph R. Renzulli geprägt wurde.

Er bezeichnet die Möglichkeit eines Lernenden, den regulären Unterricht zu verlassen, sich parallel zum Unterrichtsgeschehen mit weiterführenden Themen zu befassen und danach reibungslos wieder zurückgelangen zu können. Es handelt sich also um eine Organisationsform für Differenzierung während der regulären Unterrichtszeit.

Das Drehtürmodell kann sowohl für *Akzeleration* als auch *Enrichment* genutzt werden; es gibt hier vielfältige Realisierungsmöglichkeiten. Wird ein Drehtürmodell zum Beispiel für ein Schülerstudium, zum doppelten Sprachenlernen oder für partielle Teilnahme an Unterricht in höheren Jahrgangsstufen angeboten, so verschwimmen die Grenzen zwischen Akzeleration und Enrichment. Zum einen werden die regulären, durch den Lehrplan vorgegebenen Lernangebote angereichert; zum anderen wird die Zeit, in der sich die Schülerinnen und Schüler im Unterricht mit den regulären Lerninhalten beschäftigen, verkürzt. Im am Ende dieses Kapitels beschriebenen Beispiel entfiel für die Lernenden eine reguläre Mathematikstunde pro Woche (Akzeleration). Während dieser Zeit konnten sie sich mit zusätzlichen Lerninhalten (Enrichment) beschäftigen.

Das Drehtürmodell, so wie es in Deutschland umgesetzt wird, geht, wie schon oben angedeutet, auf das *Triad Enrichment Model*, später auch metaphorisch *Revolving Door Model* genannt, von Joseph R. Renzulli zurück (vgl. Renzulli et al. 2001). Das Grundprinzip ist, dass begabte Schülerinnen und Schüler den regulären Unterricht verlassen und sich anderen Orts mit weiterführenden Themen beschäftigen (vgl. Greiten 2016b, S. 32). Bei der Einrichtung dieses Konzepts in Deutschland entstanden im Zuge von Schulentwicklungsprozessen je nach Zielsetzung der jeweiligen Schule individuelle, variierende Ausprägungen des Drehtürmodells. Über die große Vielfalt der bislang vorhandenen Umsetzungsmöglichkeiten des Drehtürmodells an verschiedensten Schularten in Deutschland gibt Greiten (2016a) einen Überblick. Diese Veröffentlichung liefert eine Zusammenschau der an den Schulen umgesetzten Drehtürmodelle, schlägt eine Typenbildung anhand einer Fragebogenstudie vor, geht auf Schulentwicklungsprozesse ein und lässt in Erfahrungsberichten beteiligte Schülerinnen, Schüler und Lehrkräfte zu Wort kommen.

4 Chancen des Drehtürmodells in Deutschland

Schule muss gemäß dem Prinzip der personorientierten Begabungsförderung nach Weigand et al. (2014) ihren Schülerinnen und Schülern eine ihren individuellen Potentialen entsprechende Bildung ermöglichen. Dahingehend äußerte sich auch der ehemalige Kultusminister Dr. Ludwig Spaenle auf der Internetseite des Bayerischen Staatsministeriums für Unterricht und Kultus:

> Die Förderung des einzelnen Schülers ist die Antwort auf eine gestiegene Heterogenität der Schülerschaft im Hinblick auf Vorwissen, Herkunft und Bildungsbeteiligung. Dabei steht der junge Mensch in seiner ganzen Individualität im Mittelpunkt – und nicht das Prinzip einer Einheitsschule für alle. […] Für alle das Gleiche ist keine Lösung für die Zukunft der Schülerinnen und Schüler im 21. Jahrhundert. (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus o. J.)

Solch einen geforderten, differenzierenden Unterricht im Klassenraum zu realisieren, ist nicht immer einfach und kann mitunter auch zu einer Überforderung der Lehrkraft führen. Hier kann das Drehtürmodell eine große Hilfe sein. Durch das Nutzen neuer Räume und die dadurch entstandene Veränderung und Ausweitung des Lernortes, kann die Lehrkraft entlastet werden.

Die Schwierigkeit, dass bei diesem Modell ggf. zusätzliche Arbeitszeit von Lehrkräften notwendig ist, um die Schüler zu beaufsichtigen, anzuleiten und Hilfestellungen zu geben, ist schulorganisatorisch zu berücksichtigen. Insbesondere zu Beginn einer solchen Maßnahme benötigen mit der Methode noch unerfahrene Kinder und Jugendliche Begleitung und Anleitung. Strategien im Umgang mit offenen Aufgabenformaten, größeren Bearbeitungsfreiheiten, komplexeren und schwierigeren Aufgaben sowie die Informationsbeschaffung müssen erlernt werden. Die Schule ist hier gefordert, die verfügbaren personellen Ressourcen entsprechend ihren Zielen im Bereich der Begabtenförderung einzusetzen.

Zudem ist denkbar, dass man mit begabten Schülerinnen und Schülern Ablauf, Ort und Aufgabenstellung für ein Drehtürmodell vereinbart und diese dann mit einem hohen Maß an Selbstbestimmung und Eigenverantwortung auch ohne permanente körperliche Präsenz einer Lehrkraft ihre fachlichen Kompetenzen und Interessen erweitern und vertiefen.

5 Erfahrungsbericht zu einem mathematischen Förderprojekt mit einem Drehtürmodell

Die Universität Bayreuth hat während des ersten Schulhalbjahres 2018/2019 in Kooperation mit zwei Gymnasien ein Förderprogramm für mathematisch begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler durchgeführt. Bei diesem Projekt konnten Schülerinnen und Schüler eine Stunde des Mathematikunterrichts pro Woche verlassen, um sich, im Sinne von Enrichment, während dieser Zeit mit weiterführenden mathematischen Themen zu beschäftigen.

Für die Beschäftigungszeit wurden seitens der Schulen ein freier Computerraum, ein Klassenzimmer bzw. die Schulbibliothek zur Verfügung gestellt. Betreut wurden die Kinder bzw. Jugendlichen während dieser Zeit von einem Mitarbeiter der Universität, welcher helfend und beratend zur Seite stand und mathematische Themen aufbereitet zur Verfügung gestellt hat, sodass die Schülerinnen und Schüler sich sowohl mit vorgegebenen, als auch mit selbst gewählten Themen befassen konnten.

Die Auswahl der Kinder und Jugendlichen orientierte sich dabei – wie in Kapitel B vorgestellt – an einem sehr offen gehaltenen Verfahren, welches es grundsätzlich allen Schülerinnen und Schülern ermöglichte, an dem Projekt teilzunehmen, um nicht eventuell Schülerinnen und Schüler, deren Begabungen noch nicht erkannt sind, auszuschließen. Vor Beginn des Projekts wurden dazu Gespräche mit der Schulleitung sowie interessierten Lehrkräften geführt. Dabei wurden u. a. typische Merkmale mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler, wie z. B. Leistung, Kreativität, originelle Unterrichtsbeiträge, ungewöhnliche Lösungswege, Interesse, sowie das Phänomen der Prozesshaftigkeit von Begabung (vgl. Kapitel A) angesprochen.

Auf der Basis dieses weiten Begabungsverständnisses erfolgte die Nomination ähnlich wie bei Käpnick (1998). Die Lehrkräfte schlugen geeignete Heranwachsende für das Projekt vor. Schon diese Überlegungen seitens der Lehrkräfte stellen eine erste, grobe Diagnose dar und sind dadurch Wegbereiter einer begabungsfördernden Unterrichtsgestaltung. Anschließend stellten die beteiligten Lehrerinnen und Lehrer das Projekt in den Klassen vor. Daraufhin konnten sich entsprechend der bei Heller (2000) dargestellten *sukzessiven Identifikationsstrategie zur Förderung besonders befähigter Gymnasialschüler/innen* die Schülerinnen und Schüler selbst nominieren oder Mitschüler, die sie für geeignet hielten, vorschlagen (vgl. Heller 2000, S. 251–253). Erwähnenswert ist, dass die Schülernominierungen nahezu identisch mit den Lehrernominierungen ausgefallen sind. Die Teilnehmer hatten das Recht, jederzeit das Projekt wieder zu verlassen. Dadurch war die Hemmschwelle auf Seiten der Schülerinnen und Schüler nicht allzu hoch.

Schließlich erhielten die Eltern der jeweiligen Schülerinnen und Schüler ein Schreiben (siehe Abb. 1), in welchem sie über das Projekt und die Teilnahmeabsicht ihres Kindes informiert wurden. Im hier beschriebenen Fall erteilten alle Eltern ihr Einverständnis zur Teilnahme ihres Kindes.

Schlussendlich haben das Projekt insgesamt 18 Schülerinnen und Schüler aus sieben Klassen der 6., 8., 9. und 10. Jahrgangsstufe im Juni 2018 aufgenommen, von denen sieben Mädchen und elf Buben waren. Zwei Schülerinnen nahmen erst nach persönlicher Ansprache durch die Lehrkraft teil, bei den weiteren Teilnehmern deckten sich die Selbstnominierungen mit den Lehrernominierungen. Zum Ende des Projekts hin nahmen noch 14 Schülerinnen und Schüler die Förderung aktiv wahr. Zwei Schülerinnen konnten nach der zweimonatigen Testphase des Projekts (im Juni und Juli 2018) im darauffolgenden Schuljahr 2018/19 aufgrund ihres Stundenplans nicht mehr teilnehmen, zwei weitere Schülerinnen haben das Projekt aus persönlichen Entscheidungen heraus vorzeitig beendet.

Mit den Teilnehmern wurde ein Lehrer-Schüler-Vertrag (siehe Abb. 2) geschlossen, in welchem die Rechte und Pflichten aller Vertragspartner festgehalten sind. Dazu zählten zum Beispiel, mit Erlaubnis der Lehrkraft eine fest gewählte Unterrichtsstunde über ein Halbjahr hinweg verlassen zu können, die Möglichkeit der sofortigen Beendigung des Projekts, die Erledigung von Hausaufgaben sowie das Nacharbeiten neuer Inhalte der entfallenen Unterrichtsstunden.

Angebot zur Förderung interessierter und begabter Schüler im Fach Mathematik

Sehr geehrte Eltern und Erziehungsberechtigte,

Unterricht soll auf die individuellen Bedürfnisse der Schüler eingehen und sie entsprechend ihrer Potentiale fördern. Um das zu erreichen, ist es unter anderem notwendig, potentiell besonders leistungsstarke, begabte und interessierte Schüler angemessen zu fördern.
Der Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth beschäftigt sich daher mit der Förderung mathematisch besonders interessierter und begabter Schüler.
Im Rahmen dieses Themenfeldes können wir Ihrem Kind für das erste Halbjahr im Schuljahr 2018/2019 das sog. *Drehtürmodell* anbieten, welches nachfolgend kurz erläutert sei.

Vorhaben

Ihrem Kind wird angeboten, speziell vom Mathematiklehrer ausgewiesene Mathematikstunden zu verlassen, um sich gemeinsam mit anderen Schülern verschiedener Klassen und Jahrgangsstufen, welche dieses Angebot ebenfalls wahrnehmen, oder auch allein einem weiterführenden mathematischen Thema zu widmen.
Dies kann pro Woche eine Unterrichtsstunde Mathematik betreffen und je nach gewähltem Thema der Schüler mehrere Wochen in Anspruch nehmen. Den Schülern werden Themenvorschläge unterbreitet, welche über den regulären Lehrplan hinausgehen und keinesfalls künftige Lehrplaninhalte vorwegnehmen. Die Schüler können sich aber gern auch mit eigenen Vorschlägen für ein größeres Projektthema einbringen.
Des Weiteren kann mit dem jeweiligen Mathematiklehrer der betreffenden Klasse individuell die Würdigung der Arbeit Ihres Kindes vereinbart werden. Hierbei bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, z.B. die Präsentation vor der Klasse mit oder ohne mündlicher Note sowie mit oder ohne Wegfall eines kleinen Leistungsnachweises des regulären Unterrichts. Möglich wären aber auch eine Präsentation im Rahmen des Tags der offenen Tür oder ein Beitrag im Jahresbericht oder der Schülerzeitung.
Herr Köcher von der Universität Bayreuth sowie der Mathematiklehrer Ihres Kindes stehen als Ansprechpartner zur Verfügung. Die Projektstunden werden von Herrn Köcher betreut.
Ihr Kind verpflichtet sich dadurch aber, auch weiterhin die Hausaufgaben des regulären Mathematikunterrichts zu erledigen und gegebenenfalls Hefteinträge zu einem neuen Themengebiet nachzuarbeiten.

Ziele

Das Projekt ist sowohl für die Unterrichtspraxis an Gymnasien als auch für die Forschung in der Didaktik der Mathematik von besonderem Interesse. Es soll dabei überprüft werden, inwieweit mathematisch begabte und interessierte Schüler durch das Drehtürmodell gefördert werden können. Sehr positive Erfahrungen liegen dazu bereits in anderen Bundesländern vor.
Begleitend sind Interviews mit den teilnehmenden Schülern und Lehrkräften und gegebenenfalls mit interessierten Eltern geplant. Dabei würde Ihr Kind Fragen hinsichtlich des wahrgenommenen Angebots gestellt bekommen und seine eigenen Erfahrungen innerhalb dieses Projekts äußern können. Dazu ergeht aber zu gegebener Zeit noch ein gesonderter Hinweis mit der Abfrage Ihrer Einverständniserklärung.

Streng vertraulicher Umgang mit den Daten

Die Befragung erfolgt in pseudonymer Form. Die erhobenen Daten werden streng vertraulich behandelt und lediglich zur Beantwortung der obigen wissenschaftlichen Fragestellung im Rahmen der Untersuchung genutzt.
Im Anschluss an die Auswertung ist eine Veröffentlichung der Ergebnisse vorgesehen, ohne dass dadurch Rückschlüsse auf Beteiligte gezogen werden können. Danach werden die erhobenen Daten, d. h. die Transkriptionen der Interviews, vernichtet.
Falls in einer wissenschaftlichen Veröffentlichung auf Ergebnisse Ihres Kindes verwiesen wird, erfolgt dies in einer Form, die keine Rückschlüsse auf Ihr Kind zulässt.

Teilnahme

Die Teilnahme an diesem Angebot zur Begabtenförderung ist freiwillig. Sie kann von Schüler-, Lehrer- und Elternseite auch ohne Angabe von Gründen jederzeit beendet werden.

Wenn Sie mit der Teilnahme Ihres Kindes an dem Projekt einverstanden sind, sollte Ihr Kind bitte die beiliegende Einwilligungserklärung unterschrieben bei seiner Mathematiklehrkraft abgeben.

Wir möchten uns an dieser Stelle bei Ihnen für die Unterstützung des Projektes und für Ihr Vertrauen ausdrücklich bedanken. Damit helfen Sie uns entscheidend, Schule noch besser zu machen und Ihr Kind ganz individuell gemäß seinen Interessen und Begabungen zu fördern.

Mit bestem Dank und freundlichen Grüßen

Einwilligungserklärung

Vom Informationsschreiben der Universität Bayreuth zur Durchführung eines Projekts zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Schüler („Drehtürmodell“) haben wir / habe ich Kenntnis genommen.

Mit der Teilnahme meines Kindes an dem Projekt erklären wir uns / erkläre ich mich einverstanden.

Name, Vorname (Kind):

Klasse:

Name, Vorname (eines Erziehungsberechtigten):

Datum:

Unterschrift (eines Erziehungsberechtigten):

Hinweis

Die Teilnahme an der Erhebung im Rahmen des Projekts (v. a. Interviews mit Schülern) ist freiwillig. Bei Nichtteilnahme entstehen keine Nachteile. Eine bereits erfolgte Einwilligung kann jederzeit ohne Angabe von Gründen widerrufen werden. Dies kann formlos in schriftlicher Weise per Post, per Fax oder per E-Mail erfolgen. Die Kontaktinformationen hierfür lauten:

Tom Köcher
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universität Bayreuth
Universitätsstraße 30
95447 Bayreuth
Telefax: (0921) 55 21 61
E-Mail: tom.koecher@uni-bayreuth.de

Abb. 1: Elterninformationsschreiben

Vereinbarung für das Drehtürmodell im Fach Mathematik

im Schuljahr xxx

1. Die Schülerin/Der Schüler xxx erhält die Erlaubnis nach Absprache mit der jeweiligen Fachlehrkraft die Mathematikstunde am xxx in der x. Stunde wöchentlich zu verlassen. Einzelne Termine können durch die Lehrkraft abgesagt werden.
2. Innerhalb dieser Stunde darf sich die Schülerin/ der Schüler gemäß seinen Interessen mit einem weiterführenden mathematischen Projekt, welches über den Lehrplan hinausgeht und mit der jeweilig zuständigen Lehrkraft abgestimmt wird, befassen.
3. Der Schüler verpflichtet sich, versäumte neue Unterrichtsinhalte selbstständig nachzuholen, ggf. Hefteinträge (kein Abschreiben von Übungsaufgaben notwendig) nachzutragen und weiterhin die Hausaufgaben zu erledigen.
4. Die Schülerin/Der Schüler trifft sich mit seiner/m Mathematiklehrerin/Mathematiklehrer alle x Wochen, um sich über den Fortschritt des Projekts auszutauschen.
5. Die Schülerin/Der Schüler führt ein Mitteilungsheft/Betreuungsbogen/… indem die Projektstunden aufgeführt und der Fortschritt dargelegt wird, welches der Lehrkraft regelmäßig nach individueller Vereinbarung überreicht wird.
6. Am Ende des Schulhalbjahres (*oder anderer Zeitraum*) stellt die Schülerin/der Schüler der Klasse (*oder in einem anderen Rahmen*) in einem etwa x minütigen Kurzvortrag vor, welche Projekte/Inhalte bearbeitet und welche Lösungen gefunden wurden.
7. Ein Ausstieg aus dieser Vereinbarung ist jederzeit durch die Schulleitung, die Lehrkraft, die Erziehungsberechtigten und der/dem Schülerin/Schüler ohne Konsequenzen und ohne Angabe von Gründen möglich.

XXX, den ____________________

Schülerin/Schüler	Lehrkraft
Erziehungsberechtige(r)	Schulleitung

Abb. 2: Lehrer-Schüler-Vertrag

Die einzelnen Punkte des Lehrer-Schüler-Vertrages aus Abb. 2 werden nun noch genauer erklärt, um nachvollziehbar aufzuzeigen, wie eine solche Organisation gelingen kann und welche weiteren Varianten es gibt, um ein ähnliches Projekt an die jeweiligen Gegebenheiten einer Schule anzupassen.

Zu Punkt eins in Abb. 2 wurde im konkreten Fall eine Unterrichtsstunde pro Woche auserwählt, bei welcher möglichst viele Klassen parallel Mathematikunterricht hatten. So konnten möglichst viele Interessierte an dem Projekt teilnehmen.

Denkbar wäre bei diesem Punkt aber auch, ganz individuelle Absprachen zwischen einer Lehrkraft und ihren Schülerinnen bzw. Schülern zuzulassen, sodass jede Lehrkraft relativ spontan ihren Kindern und Jugendlichen – zum Beispiel in Übungsstunden – anbieten kann, den Klassenverband zu verlassen und sich einem weiterführenden Vorhaben im Drehtürmodell zu widmen. Dabei ist natürlich je nach Reife der Schülerinnen und Schüler zu entscheiden, ob diese sich mit einem klaren Auftrag an einem anderen Lernort beschäftigen können. Gegebenenfalls könnte zu Öffnungszeiten der Schulbibliothek die jeweilige Aufsicht auch Schüler im Drehtürmodell beaufsichtigen. Eine weitere Alternative wäre, dass eine Mathematiklehrkraft für ein solches Projekt ein gewisses Stundenbudget zugeschrieben bekommt, um zu gewissen Zeiten in der Woche die Lernenden zu beaufsichtigen und sie bei Bedarf auch fachlich zu unterstützen.

Zum zweiten Punkt im Lehrer-Schüler-Vertrag sind am Ende dieses Kapitels C drei Beispiele für Themenblätter vorgestellt, welche sich für horizontales oder vertikales Enrichment anbieten. Zudem wurden im vorliegenden Fall aber auch Themen von den Schülerinnen und Schülern selbst vorgeschlagen.

Viele der im Projekt bearbeiteten Themen ermöglichten eine Bearbeitung auf verschiedenen Niveaustufen und somit auch in verschiedenen Jahrgangsstufen. Dadurch konnten die Schülerinnen und Schüler frei wählen, womit sie sich befassen wollten. Je nach Thema ergaben sich Kurzprojekte für ein bis zwei Stunden – wie Symbolrätsel, mathematische Kartentricks, Spieltheorie – oder aber auch größere Zeitintervalle, in denen sich die Schülerinnen und Schüler mit Themen wie komplexe Zahlen, Folgen und Reihen, Zahlentheorie, Mathematik und Kunst oder Zahlensystemen beschäftigten. Für das Projekt selbst wurden dazu eigene Aufgaben erstellt, aber auch auf die Fülle von schon bereits vorhanden Fördermaterialen zurückgegriffen.

Zu den am Ende dieses Kapitels C vorgestellten drei Beispielaufgaben lassen sich folgende Erfahrungen berichten: Gerade Symbolrätsel erfreuten Schülerinnen und Schüler über alle Jahrgangsstufen hinweg. Mathematik und Kunst wurde von Mädchen häufig ausgewählt. Das Thema MathCityMap wurde in diesem Halbjahresprojekt von keiner Schülerin und keinem Schüler gewählt, bietet aber trotzdem viel Potential für eine ausdauernde und breite Beschäftigung mit Mathematik.

Von den Schülerinnen und Schülern selbst wurden zum Beispiel die Themen komplexe Zahlen, Taylorreihen, Kryptographie oder Gewinnstrategie-Ermittlung bei diversen Lege- und Strategiespielen vorgeschlagen und bearbeitet.

Weitere Möglichkeiten für Themen, die auf dem Lehrplan aufbauen, aber keinen Stoff vorwegnehmen und zum Erforschen und Entdecken einladen, wären zum Beispiel:

- Vorstoß in die vierte Dimension – der Hyperwürfel
- Mandelbrotmenge und Juliamengen
- Zahnräder im Mathematikunterricht
- Diophantische Gleichungen mit Stammbrüchen
- Verlust einer Dimension – die Zentralperspektive
- …

Zur Förderung mathematisch begabter und interessierter Schülerinnen und Schüler finden sich vielfältige Sammlungen von Aufgaben, welche über den Lehrplan hinausgehen, aber mit Schulmathematik erschließbar sind, in eigens hierfür konzipierten Büchern, auf Themenseiten von Schulbüchern und im Internet. Beispielhaft seien das an der Universität Regensburg konzipierte Buch *Quod erat knobelandum* von Löh et al. (2016), die im Rahmen eines „Begabtenkurses für mathematisch interessierte SchülerInnen" entstandene Aufgabensammlung der Universität Siegen unter https://www.uni-siegen.de/fb6/fb6/schueler/begabte.html und die Website Lehrer-Online mit Materialien zu *Begabte fördern: Mathematik* unter https://www.lehrer-online.de/fokusthemen/dossier/do/begabte-foerdern-mathematik/ erwähnt.

Im Punkt drei des Lehrer-Schüler-Vertrags wurde festgehalten, welche Pflichten ein Teilnehmer bzw. eine Teilnehmerin weiterhin zu erfüllen hat. Im konkreten Fall wurde vereinbart, dass die Hausaufgaben stets zu erledigen waren, auch wenn die zugehörige Unterrichtsstunde aufgrund des Drehtürmodells nicht besucht wurde. Hefteinträge mussten ebenso nachgeholt werden. Sollten allerdings keine neuen Themen eingeführt worden sein, so mussten die Übungsaufgaben nicht abgeschrieben werden.

Die betreuenden Lehrkräfte gaben an, dass sie keinerlei Probleme bei ihren Schülerinnen und Schülern feststellen konnten, dem Unterrichtsgeschehen weiterhin zu folgen. Außerdem ergaben sich aufgrund einer vorausschauenden Schulaufgaben- sowie Stegreifaufgabenkonzeption keine wesentlichen Beeinträchtigungen bei der Verlaufsplanung seitens der Lehrerinnen und Lehrer.

Punkt vier war aufgrund der ständigen Betreuung durch den wissenschaftlichen Mitarbeiter der Universität Bayreuth sichergestellt. Bei einer schulinternen Umsetzung des Projekts ist hier abzustimmen, je nachdem, ob die Schülerinnen und Schüler von einer Lehrkraft betreut werden, inwieweit der Fortschritt dokumentiert und vorgelegt werden muss.

Bei den Punkten fünf und sechs auf der Liste könnte den Schülerinnen und Schülern Wahlfreiheit gewährt werden. In welcher Form sie ihre Ergebnisse dokumentieren und präsentieren und in welcher Art und Weise eine Würdigung erfolgt, kann mit den Kindern und Jugendlichen individuell besprochen werden. Denkbar wären hier beispielsweise ein Kurzreferat in der Klasse, ein Plakat für das Schulgebäude bzw. das Klassenzimmer oder das Erstellen eines „Portfolios“. Bei allen diesen Optionen besteht auch die Möglichkeit, diese in Absprache mit allen Beteiligten zu bewerten. Diese Benotung kann dann zum Beispiel einen anderen Leistungsnachweis ersetzen oder die regulären Leistungserhebungen ergänzen.

Der letzte Punkt im Lehrer-Schüler Vertrag war in diesem Projekt ein äußerst gewinnbringender, denn dadurch konnte die Hemmschwelle für die Schülerinnen und Schüler gesenkt werden, an dem neuartigen Projekt teilzunehmen. Laut Aussagen bei abschließenden Interviews haben einige Schülerinnen und Schüler aus Neugier und Interesse teilgenommen, da sie notfalls jederzeit wieder aufhören konnten, falls es ihnen nicht gefällt oder andere Gründe auftreten sollten. Wie oben schon erwähnt, nutzten aber nur zwei Mädchen diese Möglichkeit und stiegen nach drei Wochen wieder aus dem Projekt aus, da sie sich laut eigenen Aussagen unwohl fühlten, regulären Unterricht zu versäumen.

Während der Förderstunden wurde den Heranwachsenden die Wahl der Sozialform freigestellt, wodurch sich Gruppen- als auch Einzelarbeiten ergaben. Durch die klassen- und jahrgangsstufenübergreifende, kooperative Lernsituation konnten die Schülerinnen und Schüler, die von Bardy (2013) geforderten Erfahrungen sammeln: „Konstruktive Erfahrungen in einer anregenden sachlichen Auseinandersetzung mit der Welt, dem Durchhalten gegen Widrigkeiten, aber auch in der Erkenntnis, dass sie nicht allein sind und dass andere ähnlich denken, sprechen und fühlen.“ (Bardy 2013, S. 112).

Zu bisherigen Ergebnissen der Auswertung des Projekts lässt sich Folgendes berichten: Auf Basis der vorangegangenen Pilotierungsphase von zwei Monaten im zweiten Halbjahr des Schuljahres 2017/2018 erfolgte eine Fokussierung auf die drei Kategorien Organisation, Emotion sowie Motivation. Mit Hilfe von leitfadengestützten Interviews und teilnehmender Beobachtung sollte herausgefunden werden, wie solch ein Projekt an bayerischen Gymnasien unter verschiedensten

Bedingungen, auch schulintern, ohne Kooperation mit einer Universität gelingen kann.

Die Schülerinnen und Schüler äußerten nach der Pilotierung, dass sie viel Freude während des Projekts und des dortigen Mathematiktreibens empfanden. Sie gaben aber auch an, dass sie sich im regulären Mathematikunterricht vor Beginn der Pilotierung häufig langweilten. Von daher untersucht die wissenschaftliche Studie Auswirkungen auf die Emotionen Freude und Langeweile bei einer Teilnahme über ein Halbjahr hinweg. Weiterhin werden die Teilnehmerinnen und Teilnehmer bezüglich ihrer Motivation und den nach der *Selbstbestimmungstheorie* von Deci und Ryan postulierten motivationsbedingenden Faktoren (Erleben von Kompetenz, Autonomie und sozialer Eingebundenheit) befragt.

Erste allgemeine Erkenntnisse liegen bereits vor. Zum einen stellten sich weder Verschlechterungen im Notenbild der Teilnehmer ein, noch wurde das Projekt und das damit verbundene selbstständige Nacharbeiten von Unterricht als große Zusatzbelastung empfunden. Die positive Rückmeldung im Laufe des Projektes und die Freude, mit der die Teilnehmer sich mit den Themen beschäftigten, bestärkt diesen Eindruck.

Des Weiteren deutet die regelmäßige Teilnahme darauf hin, dass die Lehrernominierungen wohlüberlegt waren. Es kann daraus geschlossen werden, dass in dem Fallbeispiel die Lehrerinnen und Lehrer ihre Klassen passend einschätzten und interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler erkennen konnten.

Außerdem wurde von den Schülerinnen und Schülern positiv geäußert, dass das Förderangebot während der Schulzeit wahrgenommen werden kann und dadurch keine Freizeit zusätzlich benötigt wird.

Genauere Aufschlüsse zu den einzelnen Themen werden die Analyse der Interviewdokumente mittels qualitativer Inhaltsanalyse und der Einbezug der teilnehmenden Beobachtungen ergeben.

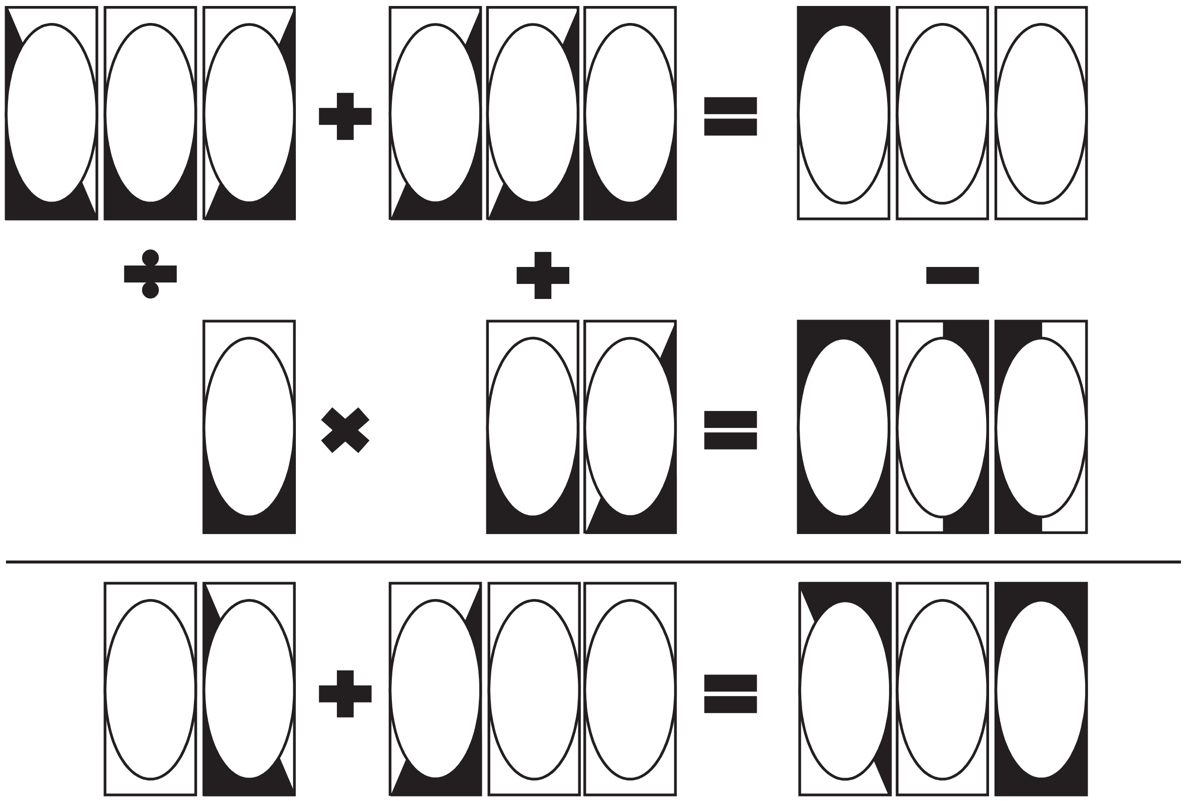
Abschließend kann aus den Erfahrungen und den geäußerten positiven Rückmeldungen geschlossen werden, dass das Angebot sehr gut seitens der Lernenden und der Schulen angenommen wurde. In Hinblick auf den gewährten Freiraum beim Lernen sowie die Möglichkeit, eigenen Interessen nachzugehen und Neues zu entdecken, gab es durchweg positive Resonanz. Zugleich traten keine negativen Begleiterscheinungen, wie ein sich verschlechterndes Notenbild oder Überforderung und Stress, auf. Dies deutet darauf hin, dass die Übertragung von Verantwortung und das damit verbundene, in gewissem Maße selbstorganisierte Lernen sinnvolle Wege zur Förderung vielfältiger fachlicher und überfachlicher Kompetenzen darstellen. Dem Ziel von Schule, jeden Schüler bestmöglich in seiner individuellen Entwicklung zu unterstützen, kann daher mit Hilfe des Drehtürmodells etwas nähergekommen werden.

Symbolrätsel

Hinter jedem Symbol versteckt sich eine Ziffer.

Findest du die entsprechenden Zahlen so heraus, dass sich mathematisch exakte Rechnungen ergeben?

Begründe, dass es nur eine einzige Lösung für dieses Rätsel gibt.



Alles ist Zahl

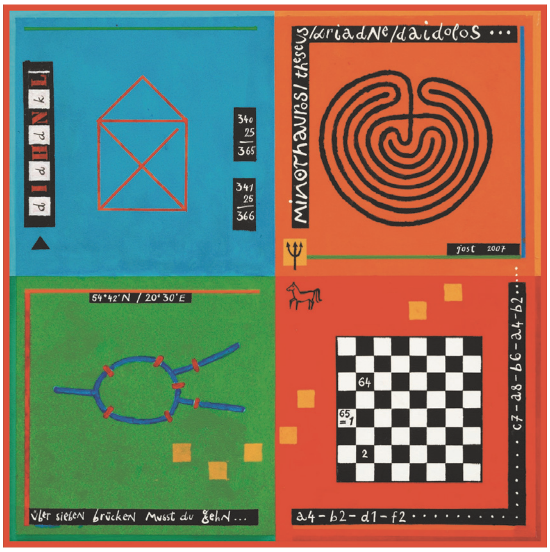
Der Schweizer Künstler Eugen Jost hat in seinen Bildern eine Menge Mathematik „versteckt“.

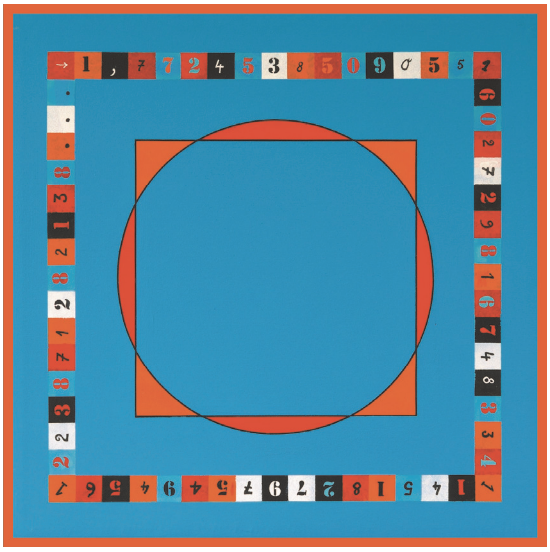
Such dir eines der Bilder heraus, welches dich besonders anspricht und gehe auf mathematische Entdeckungstour!

Wo erkennst du Mathematik?

Gibt es einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen mathematischen Anspielungen auf deinem Bild?

Schreibe dir auf, was du jemanden erzählen würdest, um ihm dieses Bild vorzustellen.





App-basierter mathematischer Schulrundgang

Erstellt einen mathematischen Schulrundgang mit Hilfe der App MathCityMap!

Die App bietet für einige Städte eine Art „Mathematikrundgang“ an. Schaut euch auf der Internetseite einige dieser Rundgänge an, welche schon von mathematisch interessierten Menschen erstellt wurden.

Idee könnte es nun sein, solch einen Rundgang auch für dein Schulgelände zu erstellen, sodass später Schulklassen mit ihrem Lehrer und vielleicht sogar unter eurer Leitung diesen Rundgang absolvieren können. Der Rundgang soll für die Schülerinnen und Schüler eine Auffrischung des bereits Erlernten sein.

Verschafft euch dazu zuerst einen Überblick über die Plattform und die dort gestellten Aufgaben.
Bevor ihr euch an das Erforschen eures Schulgeländes und das Aufgabenentwickeln macht, beachtet folgende Grundsätze:

- Die Aufgaben dürfen nur vor Ort und nicht vom Klassenzimmer aus lösbar sein.
- Tipps zu einer Aufgabe müssen wohl überlegt sein, damit sie zwar helfen, aber auch nicht zu viel vorwegnehmen.

Wichtig: Behaltet den Lehrplan und das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler im Blick, für die der Rundgang sein soll!

Literaturverzeichnis

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2018): Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hg.) (o. J.): Leitprinzip: Individuelle Förderung statt Einheitsschule. https://www.km.bayern.de/eltern/meldung/176/leitprinzip-individuelle-foerderung-statt-einheitsschule.html.

Greiten, Silvia (Hg.) (2016a): Das Drehtürmodell in der schulischen Begabtenförderung. Studienergebnisse und Praxiseinblicke aus Nordrhein-Westfalen. *Karg Hefte: Beiträge zur Begabtenförderung und Begabungsforschung* (09). Frankfurt: Karg-Stiftung.

Greiten, Silvia (2016b): School Developments through the "Revolving Door Model" in Germany. A qualitative Empirical Study analyzing Selection Criteria and School Support Programs for Gifted Young Students in Germany. *JEHD* 5 (4), 24–35. DOI: 10.15640/jehd.v5n4a3.

Heller, Kurt A. (2000): Hochbegabungsdiagnose (Identifikation). In: Kurt A. Heller und Markus Dresel (Hg.): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung. Bern: Huber, 241–258.

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang (Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, 5).

Leuders, Timo; Prediger, Susanne (2016): Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen (Sekundarstufe I + II).

Löh, Clara; Krauss, Stefan; Kilbertus, Niki (Hg.) (2016): Quod erat knobelandum. Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Renzulli, Joseph S.; Reis, Sally M.; Stedtnitz, Ulrike (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Michala Plassová

D Ein Modell mathematischer Begabung

1 Einleitung

Es ist entscheidend, das Potential eines Individuums zu erkennen, um auf dieser Basis Methoden zur Förderung seiner Begabung zu entwickeln. Zunächst gilt es allerdings, den Begriff der Begabung zu schärfen und ihn zu Begriffen wie *Talent*, *Potential* und *Veranlagung* in Bezug zu setzen bzw. von diesen abzugrenzen. In den 1930er Jahren wurde die Fachwelt von der Arbeit von Lewis Terman (1925) stark beeinflusst, der als Autor des Stanford-Binet-Intelligenztests diesen Test als Instrument zum Erkennen von Begabten anwendete, wobei als begabt derjenige galt, der mehr als 130 Intelligenzpunkte erreichte (Pfeiffer 2008). Allerdings ist es angebracht, zu betonen, dass zu dieser Zeit der Stanford-Binet-Test vor allem den sogenannten Spearman'schen (1927) „g-Faktor der Intelligenz" widerspiegelte. Von dieser Intelligenz wird angenommen, dass sie allgemein, angeboren und in einem gewissen Maße erblich ist. Dies steht in einem gewissen Spannungsfeld zu Theorien über spezifische Intelligenzen oder kristalliner Intelligenz nach Cattell (1971) – ganz zu schweigen von komplexen Intelligenztheorien wie Gardners Theorie der multiplen Intelligenzen (2018).

Dieses Spannungsfeld wurde von Paul Witty (1958) in seiner Definition elegant aufgelöst; diese wird im Folgenden nach einer kurzen Beschreibung seiner Arbeit vorgestellt. Bis in die 1980er Jahre hinein gehörten seine Publikationen zur dominierenden Literatur innerhalb des Themenfeldes der Begabung.

Die Arbeiten von Paul Witty und Martin D. Jenkins befassten sich mit der Rolle des kulturellen Milieus, der ethnischen Zugehörigkeit und der Rasse von jüngeren schulpflichtigen Kindern in Bezug auf deren gemessene Intelligenz (Pfeiffer 2008).

Von Witty stammt folgende bekannte Definition eines begabten Kindes:

„Begabt oder talentiert ist ein Kind, dessen Leistungen in jedem potentiell wertvollen Bereich seiner Aktivität durchweg bemerkenswert sind." (1965, in Laznibatová 2007, S. 63).

Diese Übersetzung einer Definition von Witty ist ein Beispiel dafür, dass viele Autoren die Begriffe *Begabung* und *Talent* als Synonyme wahrnehmen. Laznibatová (2007) gibt an, dass, wenn in der Literatur zwischen diesen Begriffen unterschieden wird, *Talent* als Realisierungsgrad von *Begabung* angesehen wird.

Um konsistent zu bleiben, widmen wir uns dem Original der Definition von Witty von 1958, in dem es heißt:

> There are children whose outstanding **Potentialities** in art, in writing, or in social leadership can be recognized largely by their performance. Hence, we have recommended that the definition of **giftedness** be expanded and that we consider any child gifted whose performance in a potentially **valuable** line of human activity is consistently remarkable. (Witty 1958, S. 62)

Begabung wird als Resultat eines dynamischen Prozesses gesehen, in dem sich die erblich bedingten Veranlagungen im jeweiligen Umfeld gestalten und formen, in dem sich die begabte Person befindet und bildet. Dabei versteht man unter der Umwelt nicht nur die physische, sondern auch die soziale, ökonomische, psychologische und spirituelle Umgebung.

Es ist interessant, dass Witty (siehe oben) die Wörter *Potential* und *Begabung* als semantische Synonyme verwendet. Somit befreit er den Begriff *Begabung* von seiner lediglich hereditären Natur und eröffnet die Diskussion über die kontinuierliche Entwicklung von Begabung in der Umwelt. So nehmen wir Begabung nicht mehr als einen vollendeten Zustand, sondern als einen lebenslangen Prozess der Gestaltung und Erfüllung der Potentiale eines Einzelnen war.

2 Allgemeines Modell der Begabung

Ein allgemeines Modell der Begabung ist in Abb. 1 entworfen:

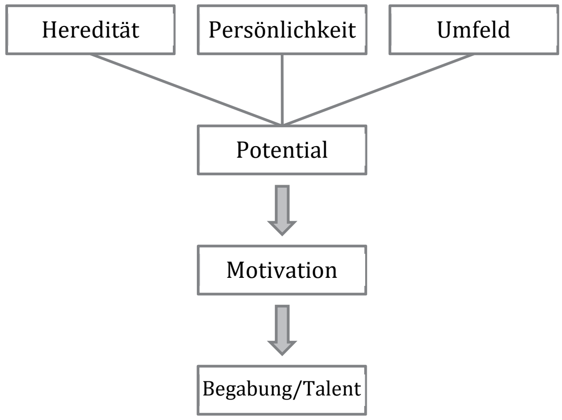


Abb. 1: Allgemeines Begabungsmodell

Hier werden die grundlegenden Variablen vorgeschlagen, die den Entwicklungsprozess der Begabung beeinflussen. Bei der Bestimmung dieser Variablen wurde unter Anwendung der Schlüsselworte „mathematische Begabung“ und „mathematische Leistung“ eine Recherche der verfügbaren Fachliteratur in der Datenbank „ScienceDirect“ vorgenommen. Zugleich wurden lediglich Artikel aus den letzten fünf Jahren berücksichtigt und unter dem Gesichtspunkt ihrer Relevanz für das vorliegende Thema verglichen. Allerdings könnte man mit der Recherche schon in der Epoche des antiken Griechenlands beginnen, da das Konzept von individuellen Unterschieden bereits zum Beispiel in Platons Arbeit (Anastasi, 1958) sowie bei einer Vielzahl weiterer Autoren zu finden ist (z. B. Locke 1692; Galton 1869; Galton 1886; Galton 1892). Aus wissenschaftlichen Arbeiten beeinflussen uns auch klassische Studien aus dem vergangenen Jahrhundert (z. B. Horst 1941; Bennett, Seashore & Wesman 1952; Cronbach 1957; Becker 1970; Taylor 1973; Dočkal 1987). Bei gegenwärtigen Arbeiten befassen wir uns insbesondere mit denen, die sich mit Begabung im Bereich der Mathematik beschäftigen (z. B. Dehaene, Molko, Cohen et al. 2004; Geary 2004; Vinkhuyzen et al. 2009; Baron-Cohen et al. 2014; Davis et al. 2015).

3 Modell mathematischer Begabung

Eine sehr hochwertige, aber auch bisweilen in Vergessenheit geratene Recherche präsentiert Taylor (1973) in ihrer Dissertationsarbeit zum Thema von Faktoren für mathematische Begabung. Sie erfasst insbesondere Studien zur Korrelation zwischen verschiedenen Faktoren und ihren prädiktiven Wert für mathematischen Erfolg. Zu diesen Grundfaktoren gehören:

- Intelligenz und Differenzierungsfähigkeiten,
- Persönlichkeit,
- Interesse an Mathematik,
- Leseniveau,
- Fähigkeit zum Problemlösen,
- sozioökonomischer Status,
- Geschlecht.

An diese Arbeit knüpft Johnson (1976) an, der zu den wichtigen Faktoren die *Einstellung zur Mathematik* hinzufügt.

Mit dem prädiktiven Wert verschiedener Faktoren oder Variablen im Bereich der mathematischen Begabung befassen sich in der gegenwärtigen Fachliteratur beispielsweise Peng und Lin (2019); Chow, Ekholm (2019); Gladstone et al. (2018); Morosanova et al. (2016); Mercader (2018), Gimbert et al. (2019).

Kehren wir nun zu unserem Modell zurück, um einzelne Begriffe und deren Inhalte zu erläutern.

Heredität

Unter Heredität verstehen wir Erblichkeit oder besser gesagt hier den Einfluss der Vererbung auf die mathematische Begabung. Heredität korreliert nach Warrier und Baron-Cohen (2016) mit der mathematischen Begabung in einer Spanne von 0,2 bis 0,9, was freilich eine recht vage Angabe ist. Cerda et al. (2015) zum Beispiel hat an einer Stichprobe (N = 634) chilenischer Grundschulkinder den Early Numeracy Test durchgeführt und seine Probanden im Laufe weiterer vier Jahre beobachtet. Er stellte fest, dass der prädiktive Wert des erwähnten Tests ungefähr 64 % beträgt. Dieser Test beruht, wie seine Bezeichnung andeutet, auf der Numerosität. Die Numerosität ist ein evolutionär entwickelter Mechanismus, der bereits bei Säuglingen anzutreffen ist (z. B. Starkey & Cooper 1980; Feigenson et al. 2004; Izard et al. 2009) und uns rudimentäre arithmetische Rechenoperationen ermöglicht (Plassová 2017). Aber auch beim Test der frühen Rechenfähigkeiten werden wir das alte Problem *nature vs. nurture* (*Natur vs. Erziehung*) nicht los – insbesondere dann, wenn wir sämtliche Variablen in Betracht nehmen, die in diesem Test ihren Einfluss auf das Ergebnis ausüben. Exakt mit dieser Problematik befasst sich Mercader et al. (2018, siehe unten).

Einer der erwähnenswerten Bestandteile der Heredität ist das Geschlecht. Diesem Aspekt schenken zahlreiche Studien Aufmerksamkeit (z. B. Haworth et al. 2007; Markowitz et al. 2005; Vinkhuyzen et al. 2009; Lindberg et al. 2010; Stoet and Geary 2013; Cerda et al. 2014). Warrier und Baron-Cohen (2016) geben an, dass moderne molekulare Genetikstudien dem Einfluss des Geschlechts auf mathematische Begabung keine große Rolle zusprechen, obwohl mathematische Begabung historisch mit dem männlichen Geschlecht verbunden wird. Sie heben vielmehr soziologische Faktoren hervor.

Exekutive Funktionen

Die exekutiven Funktionen gehören in unserem Modell zu dem Bestandteil, der eine Schnittmenge aus Heredität, Persönlichkeit, Umfeld und Motivation darstellt. Mercader et al. (2018) betonen die Notwendigkeit eines multifaktoriellen Ansatzes und der Beachtung insbesondere dieser drei Variablen: *frühe Rechenfähigkeiten, exekutive Funktionen* und *Motivation*. Da wir die Rechenfähigkeiten bereits erwähnt haben, wenden wir uns den *exekutiven Funktionen* zu. Hierunter verstehen wir steuernde Funktionen, die die kognitiven Prozesse während der Lösung von Aufgaben regulieren.

Es gibt selbstverständlich sehr viele solcher Funktionen und dennoch existieren zwei, die unter dem Gesichtspunkt ihres Einflusses auf mathematische Begabung als die wichtigsten (Diamond, 2013) gelten. Dies sind das *Arbeitsgedächtnis* und die *Inhibition*.

Mercader (2018) gibt an, dass die Inhibition einen signifikanten Einfluss auf mathematische Begabung während der frühen Entwicklungsstadien von Kindern zeigt. Allerdings sind die Ergebnisse nicht immer stabil und es existieren auch Studien (z. B. Censabella and Noël 2008), die diese Beziehung nicht bestätigen. Unserer Ansicht nach bestehen wichtige Unterschiede dahingehend, welches Konstrukt der Inhibition die jeweiligen Studien anwenden (z. B. Censabella & Noël 2004; Friedman & Miyake 2004; Blair and Razza 2007; Bull et al. 2008; Lan et al. 2011). Es muss berücksichtigt werden, dass die erwähnten Studien mit Inhibition nicht auf dem Gebiet neuronaler Netze arbeiten und dass die Tests nur behavioral durchgeführt werden.

Pengs et al. (2015) Metaanalyse zeigt eine Korrelation (r = 0,35) zwischen mathematischer Begabung und dem Arbeitsgedächtnis. Hier bestehen allerdings Unterschiede in Bezug auf die mathematische Domäne. So ist die Korrelation höher bei Berechnungen als bei Aufgabenlösung in der Geometrie (Peng, et al., 2015; Mercader, et al., 2018).

Motivation

Laut Mercader (2018) ist das Ausmaß der Kompetenz, die der Einzelne sich selbst zuschreibt, der entscheidende Motivationsfaktor – und zwar dahingehend, dass jene Menschen, die an ihren Erfolg glauben, mehr Fleiß und Mühe an den Tag legen und beharrlicher arbeiten, als jene, die ihre Kompetenzen als unterdurchschnittlich betrachten. Das hat im Grunde genommen bereits Julian Rotter in seiner Theorie der *Lokation der Kontrolle* (locus of control, LOC) (1966) beschrieben, als er die sog. Attributionsstile in internale und externale Kontrolle einteilte. Internalisten suchen bei der Erklärung von Ereignissen nach inneren Ursachen und sind der Meinung, dass ihr Erfolg metaphorisch gesagt in ihren Händen liegt. Externalisten schreiben die Ursachen für den Erfolg und den Misserfolg äußeren Umständen zu. Auch im Allgemeinen haben sie das Gefühl, ihr eigenes Leben nicht unter Kontrolle zu haben. In der bereits klassisch gewordenen Studie von Rodin und Langer (1977) wurde Internalismus als die vorteilhaftere Attributionshaltung bezeichnet, da Internalisten in der Regel gesünder, zufriedener und erfolgreicher sind.

Literaturverzeichnis

Anastasi, A. (1958): Differential psychology: Individual and group differences in behavior. New York: Macmillan, vol. 3.

Baron-Cohen S., Murphy L, Chakrabarti B, et al. (2014): A genome wide association study of mathematical ability reveals an association at chromosome 3q29, a locus associated with autism and learning difficulties: a preliminary study. PloS One 9 (5): e96374.

Becker, J. P. (1970): Research in mathematics education: The role of theory and of aptitude-treatment-interaction. Journal for Research in Mathematics Education, 1, 19-28.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1952): A manual for the Differential Aptitude Tests. New York: The Psychological Corp.

Cattell, R. (1971): Abilities: their structure, growth, and action. (xxii, 583 p.) Boston: Houghton Mifflin.

Censabella, S., Noël, M. P. (2008): The inhibition capacities of children with mathematical disabilities. Child Neuropsychol. 14, 1–20. doi: 10.1080/09297040601052318

Cerda, G., Pérez, C., Navarro, J. I., Aguilar, M., Casas, J. A., Aragón, E. (2015): Explanatory model of emotional-cognitive variables in school mathematics performance: a longitudinal study in primary school. Front. Psychol. 6:1363. doi: 10.3389/fpsyg.2015.0136

Dočkal, V., Musil, M., Palkovič, V., Miklová, M. (1987): Psychológia nadania. Bratislava, SPN.

Galton, F. (1869): Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 1st ed. London: Macmillan.

Galton, F. (1886): Regression towards mediocrity in hereditary stature. Journal of the Anthropological Institute 15: 246–63.

Galton, F. (1892): Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 2nd ed. London: Macmillan.

Gardner, H. (2018): Dimenze myšlení. Praha: Portál, 480 S. ISBN 978-80-262-1303-1.

Gardner, H. (1983): Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Laznibatová, J. (2007): Nadané dieťa: jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie. 3. Ausgabe. Bratislava: Iris. 394 Seiten. ISBN 80-89018-53-X

Locke, J. (1693): Some thoughts concerning education. London: Printed for A. and J. Churchill.

Mercader, J., Miranda, A., Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Rosel, J., F. (2018): Contributions of Motivation, Early Numeracy Skills, and Executive Functioning to Mathematical Performance. A Longitudinal Study. Front Psychol.; 8: 2375. doi: 10.3389/fpsyg.2017.02375

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., Sun, C. (2015): A meta-analysis of mathematics and working memory: moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. J. Educ. Psychol. 108, 455–473. doi: 10.1037/edu0000079

Pfeiffer, S. I. (Ed.) (2008): Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices. New York, NY, US: Springer Science + Business Media. http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-74401-8P

Rodin, J., Langer, E. (1977): Long-Term Effects of a Control-Relevant Intervention With the Institutionalized Aged. Journal of Personality and Social Psychology [online]. vol. 35, no. 12, http://capital2.capital.edu/faculty/jfournie/documents/Rodin_Judith.pdf

Rotter, J. B. (1966): Generalized expectancies for internal versus external control of reinforcement. Psychological Monographs: General and Applied. 80: 1–28. doi:10.1037/h0092976.

Terman, L. M. (1925): Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Genetic Studies of Genius. Volume 1, Stanford University Press, Stanford.

Spearman, C. (1927): The abilities of man: their nature and measurement. New York: Macmillan.

Tom Köcher

E Koncept modelování matematického nadání

1 Úvod

„Nadání" je aktuálně hodně diskutované téma, a právě pedagogové se často setkávají s označením „nadaného dítěte". Co však pojem *nadání* vlastně přesně znamená? Práce s touto tématikou není jednoduchá, protože samotný pojem *nadání* není jako teoretický konstrukt přímo viditelný či dokonce měřitelný, a je proto obtížně uchopitelný. Také studium aktuální pedagogické, psychologické a matematicko-didaktické literatury ukazuje, že pojetí *nadání* je velice různorodé, a že neexistuje žádná všeobecně platná definice tohoto pojmu. V souvislosti s tím pak také existují různé přístupy, jak tento složitý konstrukt vysvětlit na základě modelů a konceptů.

Hodláte-li se zabývat tématem matematicky nadaných žákyň a žáků, je užitečné nejprve rozebrat význam pojmu *nadání*. Z tohoto důvodu představíme v této kapitole běžné teorie z oblasti psychologie a pedagogiky a shrneme poznatky z modelování *nadání* tak, abychom mohli vytvořit jednotný základní náhled pro pochopení pojmu *nadání*.

Je přitom nutné vymezit pojmy, které jsou úzce svázány s kontextem *nadání* a často se používají v podobném kontextu – například *inteligence, výkon* a *vysoké nadání*.

Na dobrém pochopení pojmu *nadání* pak lze navázat vytvořením modelu pro *matematické nadání*.

2 Model inteligenčního kvocientu

Velmi populární je pojetí nadání formou dosažení určité hodnoty tak zvaného inteligenčního kvocientu (IQ), který lze považovat za míru inteligence určitého člověka. IQ se zjišťuje pomocí standardizovaných testů inteligence.

Pokud budeme vycházet z modelu inteligenčního kvocientu pro nadání, hovoří se o *vysokém nadání* určité osoby, pokud dosáhne v testu inteligence inteligenční kvocient ve výši 130 nebo víc. Toto kritérium splňují 2 % obyvatelstva. Stanovení této hranice je statistická konvence.

Existují různé testy inteligence, které mohou mít odlišné zaměření. Výsledky různých testů inteligence, a tím také stanovení vysokého nadání se tak u jedné osoby mohou výrazně lišit.

V rámci přístupu k podpoře nadaných dětí orientovaném na jednotlivé osoby, který vytvořil Weigand a kol. (2014) se upozorňuje na malou nadhodnotu při rozlišování pojmů *nadání* a *vysokého nadání*, pokud dochází ke snaze vytvořit školní kulturu s podporou pro všechny, jedno zda s vysokým nadáním, průměrným nadáním či mimořádným nadáním (viz Weigand 2014, S. 44).

V tomto textu tak ustoupíme od kvantitativního rozlišování mezi *vysokým nadáním* a *nadáním* a budeme používat pouze pojem *nadání*.

Označení za vysoce nadanou může navíc při styku s příslušnou osobou skrývat i sociální problémy.

Proto je třeba ve školním kontextu zvážit výhody a nevýhody, a na základě takového posouzení rozhodnout, zda se takové testování provede.

Pokud se nadání chápe jako například u Rosta (2009) jako existence vysoké všeobecné inteligence, pak vypadá koncepce specifického matematického nadání takto:

> Četné nálezy v příslušné literatuře jasně prokazují, že matematické schopnosti a matematické výkony jsou úzce spojeny s inteligencí a jinými – i jazykovými – školními výkony […]. Pollmer […] stručně shrnuje, že „mimořádné matematické nadání“ představuje „pouze mimořádně vysoké intelektuální nadání“. (Rost 2009, s. 23)

Matematické nadání je podle tohoto pojetí součástí všeobecně vysoké inteligence. Je základem odpovídajících vynikajících školních výsledků.

Podle modelu inteligenčního kvocientu se tedy nadání staví na úroveň inteligenci – respektive tomu, co se měří pomocí testu inteligence a kvantifikuje pomocí inteligenčního kvocientu. Ten, kdo je inteligentní, je nadaný a naopak. Toto vzájemné přiřazení je však poměrně diskutabilní. Ulm (2009) v tomto smyslu poznamenává, že pokud vyjdeme ze širokého pojmu pro nadání, pak výše uvedený výklad zcela ignoruje manuální nadání. Pokud vyjdeme z Gardnera (2010), můžeme uvést například také sociálně-emocionální (interpersonální), sportovní nebo hudební nadání, které není v jednodimenzionální definici na základě IQ vůbec zohledněno.

Kromě toho přisouzení určitého nadání na základě vysoké testované inteligence reprezentovalo pouze určitý, momentální „výřez aktuálních schopností“ (Holling a kol. 1999, s. 39) testované osoby. Kromě toho je tento výřez zásadně ovlivněn chápáním inteligence případně chápáním nadání, ze kterého vycházel tvůrce testu při jeho sestavování.

Kritické mínění, že popis nadání prostřednictvím inteligence vyjadřuje pouze určitý úhel pohledu, vyjadřuje rovněž Käpnick (2013) a píše: „Omezení pojmu nadání na kognitivní schopnosti neodpovídá jeho komplexnosti, kdy se podle dnešního pojetí potenciál (nadání) dítěte vyvíjí vždy v dynamickém procesu vzájemného ovlivňování intrapersonálních a interpersonálních katalyzátorů.“ (Käpnick 2013, s. 12). Zde se navíc objevuje kritika, že redukce nadání na momentální výkon podaný během testu inteligence neodpovídá pohledu na nadání jako na dynamický konstrukt, jako na potenciál se schopností vyvíjet se v čase. Právě v rámci školní docházky by nemělo jít pouze o podporu již rozpoznaného a diagnostikovaného potenciálu. Prostor pro svůj rozvoj by měl být věnován rovněž domnělému a ještě neprokázanému nadání (viz Weigand 2014, s. 44).

Domněnka o pojmu nadání, který ovlivňuje více faktorů, vede k dalšímu bodu diskuze. Vyjádřit stupeň specifikace vícerozměrně chápaného nadání vycházející z komplexního konstruktu závislých faktorů pomocí jediného čísla – jako je IQ – se zdá být nemožné. Weigand (2014) k tomu dále poznamenává, že nadání jako komplexní konstrukt nelze změřit (viz Weigand 2014, s. 38–39).

Dále jsou proto představeny vybrané teorie a modely, které všechny považují nadání za vícerozměrný konstrukt.

3 Mnohočetná inteligence dle Gardnera

Místo toho, aby vycházel ze všeobecné inteligence, rozšířil psycholog Howard Gardner pojem inteligence ve své teorii o „mnohočetnou inteligenci". Vychází přitom z toho, že inteligence je komplexní, vícerozměrný konstrukt a že ji lze rozdělit do různých, mimo jiné i nekognitivních složek (viz Gardner 2013, s. 55 a další.):

- Jazyková inteligence (mj. senzibilita pro psaný a mluvený jazyk)
- Logicky abstraktní inteligence (mj. zpracování problémů s logickými vývody, rozpoznání vzorů a struktur a práce s nimi)
- Prostorová inteligence (mj. vnímání prostoru, myšlenkové operace v prostorových situacích)
- Hudební inteligence (mj. komponování hudby, hra na hudební nástroj)
- Tělesně pohybová inteligence (mj. koordinace tělesných pohybů)
- Interpersonální inteligence (mj. schopnost empatie)
- Intrapersonální inteligence (mj. vnímání vlastních pocitů a jejich přiměřené zpracování)
- Přírodovědná inteligence (mj. rozpoznání fenoménů v přírodě)
- Existenciální inteligence (vyrovnání se se základními otázkami bytí)

V jednom ze svých hlavních děl „Dimenze myšlení" (1991) proto Gardner zjišťuje, jak již bylo naznačeno výše, do jaké míry lze změřit inteligenci pomocí jediného čísla. Píše také, že testy inteligence měří hlavně pouze první tři ze systému jeho inteligencí (viz Gardner 1991, s. 9 a další.).

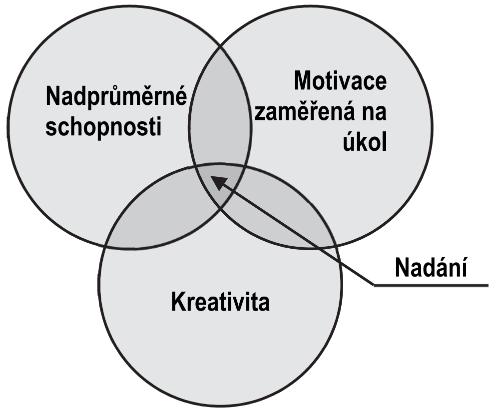
„Teorie mnohočetné inteligence" nepostrádá sporné body. Odůvodněné jsou zejména otázky týkající se dělicí čáry mezi různými inteligencemi a existence dalších oblastí inteligence. Pro školy však model přesto představuje užitečnou platformu pro rozhodování; umožňuje totiž diferencované posouzení schopností a nedostatků žákyň a žáků.

Pokud jde o pojem inteligence, pak je pro školy důležitým poznatkem, že tedy jedna osoba může mít různé typy inteligence, a proto i matematické nadání může pocházet z několika těchto typů inteligence.

Ačkoli se pojmy *inteligence* a *nadání* často používají jako rovnocenné výrazy, existuje z vědeckého pohledu jasné rozlišení. *Inteligence* se obecně chápe jako pojem, který popisuje kognitivní schopnosti. *Nadání* se naproti tomu považuje za teoretický konstrukt, který popisuje individuální potenciál pro dobré či vynikající výkony v jedné nebo několika oblastech. Dále proto popisujeme modely nadání, které se pokouší znázornit základy konstruktu *nadání* a jeho vzájemného působení s dalšími faktory.

4 Modely dle Renzulliho a Mönkse

Joseph S. Renzulli vychází z toho, že pro nadání je potřeba více než pouhý vysoký inteligenční kvocient, a proto vyvinul svůj model tří kruhů (viz obr. 1), v němž se nadání posuzuje z několika úhlů pohledu (viz Renzulli 2005).



Obr. 1: Model tří kruhů podle Renzulliho

V tomto modelu, sestávajícím z několika faktorů, je popsána vzájemná závislost komponent

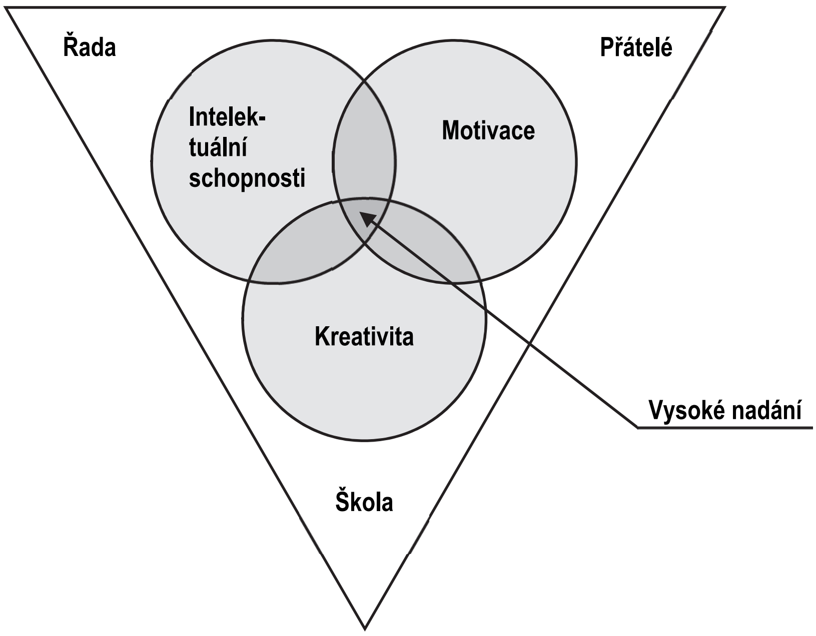
- kreativita,
- motivace zaměřená na úkol a
- nadprůměrné schopnosti

a jejich vztahy. Jako výsledek interakcí těchto nadprůměrně výrazných tří komponent se pak může vyvinout „gifted behavior“, tedy „nadané chování“. Toto chování, které Renzulli popisuje jako vysoce výkonné chování, nelze zaměňovat s vysokým nadáním v běžném smyslu slova jako permanentní, daný stav. Vysoce výkonné chování je situativní chování, které je velmi úzce spojeno s činností orientovanou na výsledek, a je tak spojeno s vysokým výkonem (viz Renzulli 2001, s. 23–24).

Pro Renzulliho je důležité přitom ukázat, že žádný z faktorů samotný nedokáže způsobit tento vysoký výkon, je to možné pouze v souhře všech tří faktorů. Například vynikající motivace tak nedokáže kompenzovat podprůměrně vyhraněnou kreativitu.

Renzulli dále konstatuje, že děti a mladiství vykazující chování, které naznačuje nadání, potřebují mnoho možností vzdělávání, zdrojů a povzbuzení i mimo řádné vyučování. Následně tak vyvinul svůj komplexní model *Schoolwide Enrichment Model* na podporu nadaných žákyň a žáků (viz Renzulli 2005).

Triadický model vzájemné závislosti nizozemského vědce Franze Mönkse, který se zabýval výzkumem nadání (viz Mönks 1992) vychází přímo z modelu tří kruhů a rozšiřuje jej o sociální prostředí, ve kterém nadaní jedinci vyrůstají. Toto prostředí reprezentuje rodina, přátelé a škola (viz obr. 2).



Obr. 2: Triadický model vzájemné závislosti podle Mönkse

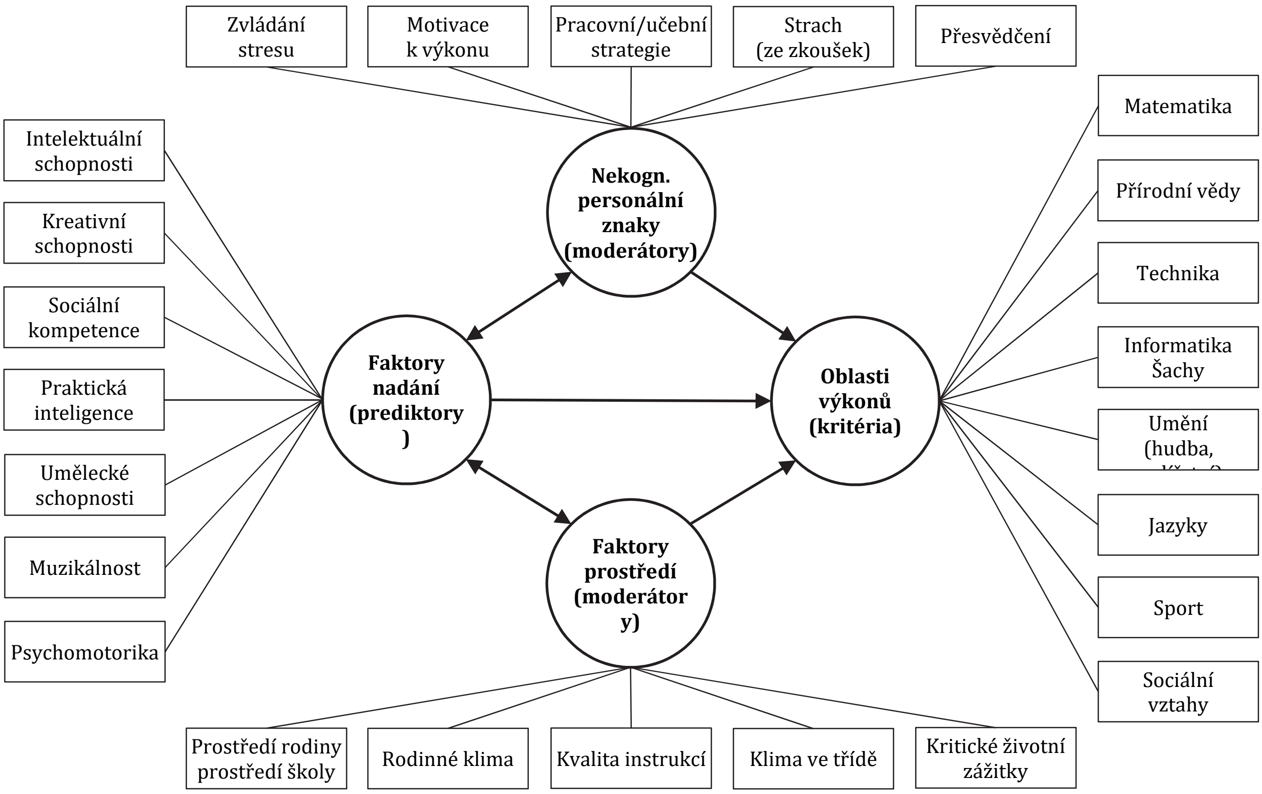
Stejně jako u Renzulliho je zde graficky pomocí stejných tří charakteristik osobnosti znázorněno, za jakých podmínek se může nadání rozvíjet. Kromě stávajících tří kruhů je však podle Mönkse zapotřebí také prostředí, které nadání podporuje. Úspěšným spolupůsobením těchto tří charakteristik osobnosti a prostředí se konečně může podařit rozvíjet nadání. Tato vzájemná závislost tří vnitřních a tří vnějších faktorů, *triád*, se označuje jako *interdependence*, neboli vzájemná závislost.

V modelu však zůstává nejasné, jak přesně vnitřní kruhy vzájemně interagují, a jak jsou vzájemně vymezeny. Navíc zůstává nejasné, v jakém vztahu jsou kruhy k vnějšímu trojúhelníku.

Souhrnně lze konstatovat, že oba modely kladou do středu jednotlivce a jeho vývoj, a že model Mönkse popisuje dynamický proces mezi podmíněnými charakteristikami osobnosti a vnějšími faktory (viz Bardy 2013, s. 19–20).

5 Model podle Hellera

Na myšlenku, že nadání podléhá komplexnímu a dynamickému procesu, navazuje rovněž psycholog Kurt A. Heller. Ten vyvinul model z obr. 3 (viz Heller 2001), ve kterém rozlišuje mezi intrapersonálními faktory nadání (na obrázku vlevo) a oblastmi výkonů (na obrázku vpravo), které jsou ovlivňovány moderačními faktory, prostředím (na obrázku dole) a nekognitivními, osobnostně podmíněnými znaky (na obrázku nahoře).



Obr. 3: Mnichovský model (vysokého) nadání Kurta Hellera

Heller se zaměřuje na charakter procesů při rozvoji nadání. Díky závislosti rozvoje nadání na různých vnějších faktorech, které působí po celý život, je zde patrný neustálý proces vývoje.

Hlavním znakem tohoto modelu je však přitom rozlišování mezi nadáním a výkonem. To, do jaké míry se faktory nadání promítají do měřitelných a viditelných výkonů, závisí jak na individuálních osobnostních charakteristikách, tak také na okolních faktorech. Proto je tento model vhodný pro znázornění toho, k jaké souhře četných faktorů a vlivů musí dojít, aby vysoké nadání přineslo také srovnatelné výkony.

Pokud to tedy shrneme: nadání samo o sobě je specifické pro určitou oblast a podléhá dynamickému vývoji, protože je po celý lidský život nutné zohledňovat specifické odborné a interdisciplinární vlivy.

Pro tvorbu modelů týkajících se nadání lze konstatovat, že na ně nesmíme pohlížet jako na dané statické fenomény. Nadání se může vyskytnout v průběhu lidského života, může se dále rozvíjet a rozrůzňovat, může však také zmizet.

Můžeme tak uzavřít:

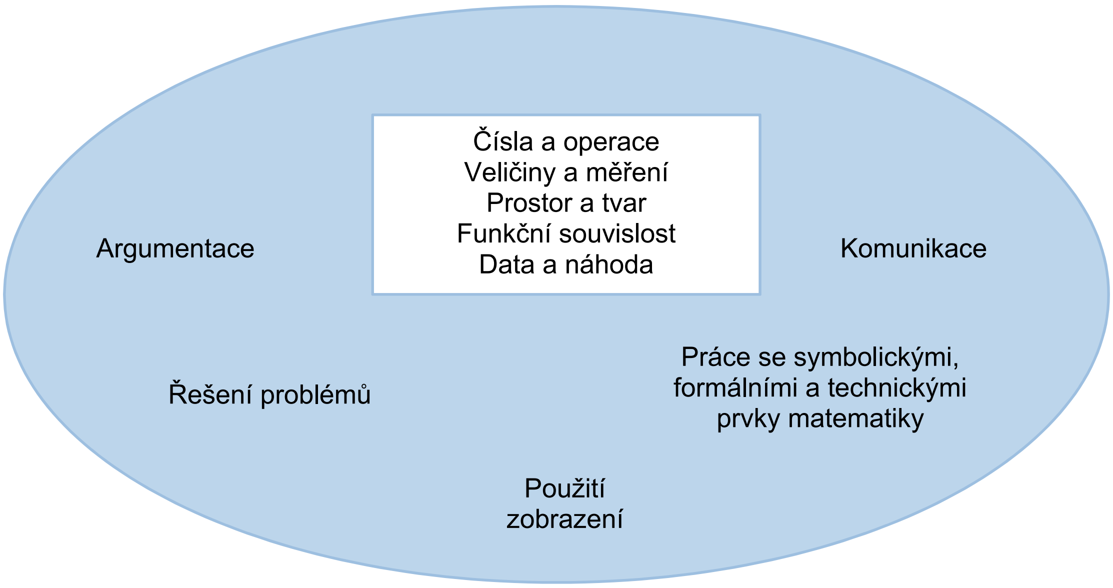
> *Nadání je v nejširším smyslu individuální potenciál pro dobré či vynikající výkony v jedné nebo několika oblastech.*

6 Specifický odborný model matematického nadání

Na základě pochopení pojmu nadání se pak můžeme zaměřit na pojem *matematické nadání*. Je možné přitom zohlednit obsahový popis pojmu *matematické kompetence* podle standardu vzdělávání konference ministrů školství (viz sekretariát Stálé konference ministrů školství) případně podle vzdělávacích plánů spolkových zemí zaměřených na kompetence (viz např. Státní institut pro kvalitu školy a výzkum vzdělávání (ISB)).

Ve strukturovaném modelu kompetencí programu LehrplanPLUS pro Bavorsko lze například vidět, jaké matematické kompetence si žákyně a žáci mají osvojit během školní docházky (viz Obr. 4). Tento model kompetencí rozděluje matematické kompetence do dvou oblastí:

- *Kompetence související s obsahem* se vztahuje na práci s matematickými obsahy v oblastech algoritmus a číslo, měření, prostor a tvar, funkční souvislost a data a náhoda.
- *Kompetence související s procesy* lze popsat prostřednictvím modelování, řešení problémů, argumentací, komunikací, používáním zobrazení a zacházením se symbolickými prvky jako typickými druhy matematických činností.



Obr. 4: Strukturovaný model kompetencí podle programu LehrplanPLUS matematika pro gymnázia

Přesnější popis, jaká matematická témata a do jaké hloubky je třeba si je osvojit, je uveden ve standardech vzdělávání KMK (viz sekretariát Stálé konference ministrů školství).

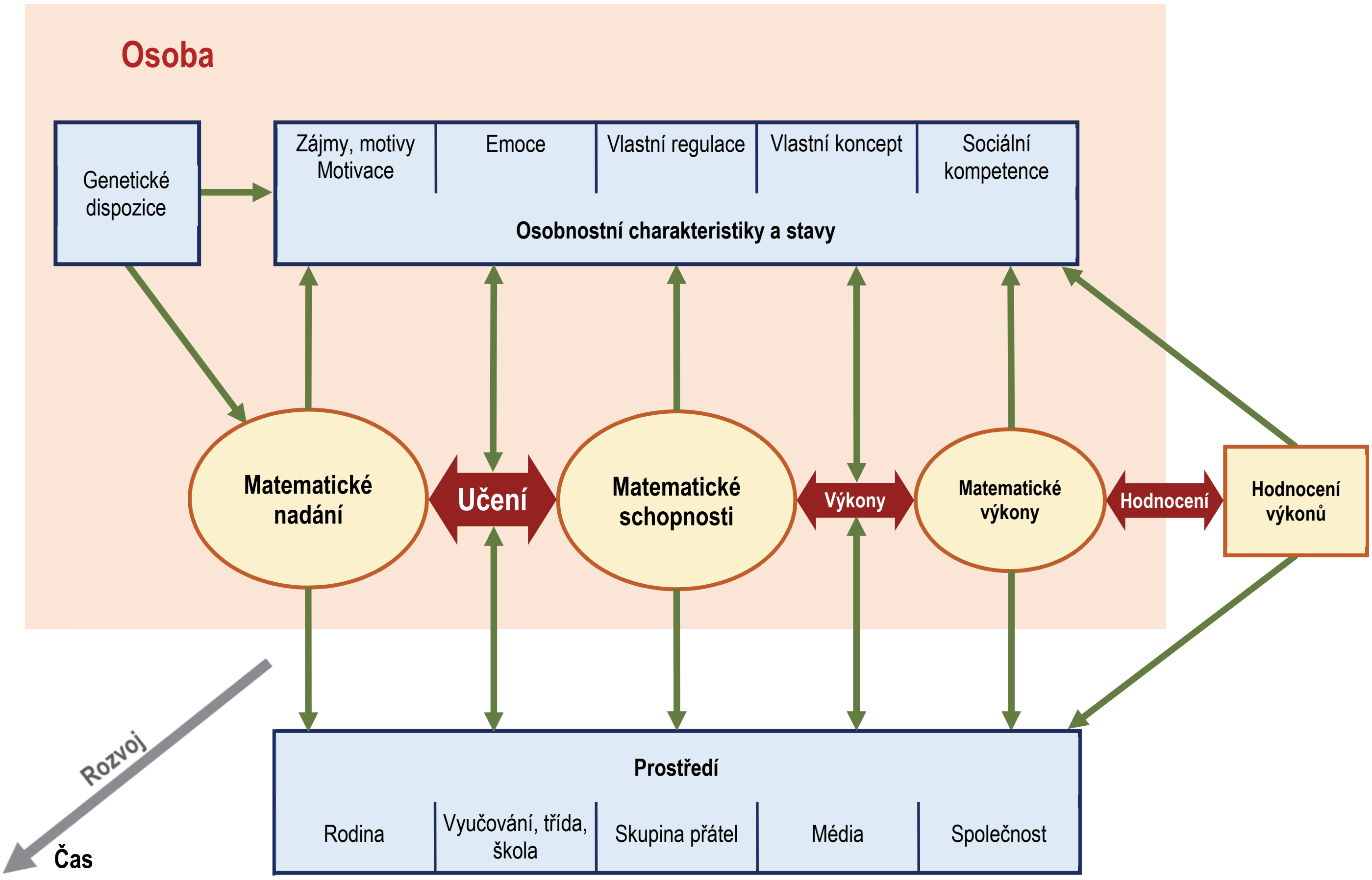
Pomocí tohoto modelu kompetencí vzniká následující návrh definice matematického nadání:

Matematické nadání je individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí.

Význam pojmu *matematické nadání* se ještě zvýrazní, když si blíže prohlédneme jednotlivé aspekty navrhované definice:

- *Nadání jako potenciál:* Matematické nadání představuje potenciál. Samotná existence určitého potenciálu pro rozvoj matematických kompetencí není dostatečným faktorem pro to, že taková rozvinutá kompetence existuje, respektive stávající potenciál nemusí nutně vést k tomu, že se z něj rozvine kompetence. Důvodem může být nedostatek vhodných podnětů ze strany okolního prostředí.
- *Odborný charakter nadání*: Matematické nadání je specifický oborový konstrukt. Prostřednictvím pojmu matematických kompetencí je úzce spjat s matematikou.
- *Komplexnost nadání*: Mnohovrstevnost a hloubka matematiky se odráží v komplexnosti kompetenčního modelu vzdělávacích standardů KMK, a přenáší se tím na pojem nadání. Lze tak například rozlišovat matematické nadání v různých oblastech matematiky (jako geometrie, algebra, stochastika) nebo nadání pro matematické procesy (jako je modelování, řešení problémů, argumentace).
- *Nadání jako individuální osobní vlastnost*: Názor, že nadání se považuje za individuální, vede ke dvěma aspektům: Za prvé, že každá osoba má určitý potenciál pro rozvoj matematických kompetencí, a tím také určité nadání. Za druhé, že matematické nadání se projevuje individuálně, to znamená, že lidé mají odlišný individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí. Mimořádně matematicky nadané osoby se vyznačují tím, že je tento potenciál v mnoha složkách vyjádřen výrazně nadprůměrně.

Z tohoto chápání matematického nadání vychází níže vyobrazený oborový model pro rozvoj nadání, kompetencí a výkonů podle Ulma a Zehndera (2020). V modelu na obr. 5 je komplex všech osobních vlastností (mimo matematického nadání a matematických kompetencí) a všech okolních faktorů symbolizován vždy pomocí obdélníku. Šipky představují vzájemné působení.



Obr. 5: Model rozvoje matematického nadání, kompetencí a výkonů podle Ulma a Zehndera (2020)

Učení se v tomto modelu považuje za centrální proces vývoje matematických kompetencí. Nabytí těchto kompetencí probíhá formou duševního zabývání se matematickými obsahy. Procesy učení, které přitom probíhají v hlavě příslušné osoby, pak mohou vést k (dalšímu) rozvoji matematických kompetencí. Základem tohoto učení je individuální matematické nadání – potenciál pro rozvoj kompetencí.

V tomto modelu probíhá rozvoj matematického nadání, jak již bylo naznačeno výše, současně s přirozeným biologickým, geneticky podmíněným vývojem mozku a osoby samotné. Zásadní roli však navíc hraje také individuální učení. Při rozvoji matematických kompetencí pomocí procesů učení dochází v mozku v důsledku učení ke změnám nervové soustavy, které dokáží ovlivnit a zvýšit individuální potenciál pro rozvoj kompetencí, a tím také matematického nadání. Tento existující potenciál se rovněž může v průběhu života zmenšovat, pokud nenastanou odpovídající procesy učení. Plastický příklad: Dítě respektive mladistvý může mít vysoký potenciál naučit se (cizí) jazyk, hrát na nějaký hudební nástroj nebo mít matematické myšlení. Pokud neproběhne příslušné učení, pak se tento potenciál během života snižuje.

Nadání se, stejně jako u Weiganda a kol. (2014), považuje za konstrukt, který se v průběhu života může měnit. Rozvíjí se dynamicky spolupůsobením různých vlivů.

Matematické nadání a kompetence mohou sice ne bezprostředně, ale nepřímo přes proces učení ovlivňovat všeobecné osobnostní vlastnosti a okolní prostředí. Ty jsou vzájemně spojené do komplexního přediva.

Osobnostní vlastnosti označují jednak časově relativně stabilní charakteristiky určité osoby. Sem patří například motivy, schopnost vlastní regulace, obecné zájmy, vlastní koncept a sociální kompetence. Dále obsahují časově krátkodobé variabilní stavy osoby, například aktuální motivaci pro konkrétní činnost nebo emoce, které vznikají během aktuální situace. Důsledkem četnosti těchto vlastností určité osoby je skutečnost, jakým způsobem a v jakém rozsahu se tato osoba matematikou zabývá, a jak díky tomu rozvíjí matematické kompetence a matematické nadání.

Okolní prostředí, v němž se osoba nachází, má na rozvoj matematického nadání a kompetencí formou učení rozhodující vliv. Součástí životních podmínek dětí a mladistvých jsou především rodina, škola, skupina přátel a média a naše společnost jako celek. Pokud se v tomto prostředí vyskytnou příslušné situace učení a podněty, vládnou v něm podpora a hodnoty, které zvyšují motivaci k učení, a osoba má sociální kontakty, může se to pozitivně projevit na učení matematice. Tyto faktory jsou směrodatné pro to, zda a jak intenzivně se bude dítě či mladistvý zabývat matematikou nejen ve škole, ale také mimo ni.

Nadání obecně a matematické nadání zvlášť kromě toho také v tomto modelu vychází z genetických dispozic.

Matematické výkony pak lze podávat na základě matematických kompetencí, když se tyto kompetence využijí k dosažení určitého výsledku. Výkon tedy vyplývá z využití kompetencí v rámci situace, která je spojená s matematikou, a je viditelný. Příslušné procesy výkonů jsou přitom, stejně jako procesy učení, ovlivňovány zvenčí faktory prostředí a zevnitř osobnostními vlastnostmi.

Také Friedhelm Käpnick vnímá teoretický konstrukt *matematického nadání* především ve vztahu ke školnímu věku, jako „individuálně ovlivněný potenciál pro určitý obor s nadprůměrnou matematickou výkonností, která se s velkou pravděpodobností rozvíjí v mládí a v dospělosti.“ (Käpnick a kol. 2005, s. 22).

Rovněž Käpnick posuzuje matematické nadání jako specifické pro daný obor. Jeho vývoj ovlivňují vnější vlivy a osobnostní vlastnosti. Rozlišuje přitom nadání a výkony: na základě nadání může určitá osoba podávat výkony.

Vysoký důraz na procesy učení v rámci výše uvedeného modelu pro nadání zaměřeného na matematiku, který vytvořili Ulm a Zehnder (2020) nalezneme také u Weinerta (2000): „Učení je rozhodující mechanismus při transformaci (vysokého) nadání do (vynikajících) výkonů.“ (Weinert 2000). Je tak navíc zřejmé, že vysoké nadání nemusí vždy implikovat vysoké výkony.

Další literární podklad najdete ve formě podrobnějšího posouzení tematického komplexu „Matematické nadání, kompetence, výkony“ u Ulma a Zehndera (2020).

7 Souhrn

Na závěr jsou v této publikaci ještě jednou shrnuty pojmy *inteligence, vysokého nadání, nadání* a *matematického nadání*.

Inteligence je to, co se měří pomocí testu inteligence a vyjadřuje formou inteligenčního kvocientu.

Nadání lze podle Hellera (1996) obecně charakterizovat jako „individuální, relativně stabilní a přetrvávající potenciál schopností a jednání sestávající z kognitivních, emocionálních, kreativních a motivačních součástí, které lze za pomoci určitých vlivů dále zvýrazňovat, a dostat osobu do situace, kdy je schopná podávat mimořádné výsledky v některé více či méně úzce popsané oblasti.“ (Heller 1996, S. 12)

O *vysokém nadání* se hovoří v souvislosti s testy inteligence, označení se používá pro osoby s mimořádně vysokou inteligencí (např. IQ vyšší nebo rovno 130). Pokud jste však – stejně jako tento text – zastáncem vícevrstvého pochopení výrazu nadání, není používání pojmu *vysoké nadání* a jeho odlišování od výrazu *nadání* nutné.

Matematické nadání je individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí.

Seznam literatury

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Gardner, Howard (2013): Intelligenzen. Die Vielfalt des menschlichen Geistes. Stuttgart: Klett-Cotta.

Heller, Kurt A. (1996): Begabtenförderung – (k)ein Thema in der Grundschule? *Grundschule* 28 (5), 12–14.

Heller, Kurt A. (Hg.) (2001): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Käpnick, Friedhelm (2013): Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung" im Wandel der Zeit. In: Torsten Fritzlar und Friedhelm Käpnick (Hg.): Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven. Münster: WTM Verlag, 9–40.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Mönks, Franz. J. (1992): Ein interaktionales Modell der Hochbegabung. In: Ernst A. Hany (Hg.): Begabung und Hochbegabung. Theoretische Konzepte – empirische Befunde – praktische Konsequenzen. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, 17–22.

Renzulli, Joseph S. (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Renzulli, Joseph S. (2005): The Three-Ring Conception of Giftedness: A Developmental Model for Promoting Creative Productivity. In: Robert J. Sternberg und Janet E. Davidson (Hg.): Conceptions of giftedness. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 246–279.

Rost, Detlef H. (2009): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. https://www.kmk.org

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB): LehrplanPLUS – Gymnasium – Mathematik – Fachprofile. https://www.lehrplanplus.bayern.de/fachprofil/gymnasium/mathematik.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele (2014): Begabung oder Hochbegabung? In: Gabriele Weigand, Armin Hackl, Victor Müller-Oppliger und Günter Schmid (Hg.): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz, 37–46.

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (Hg.) (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Weinert, Franz Emanuel (2000): Lernen als Brücke zwischen hoher Begabung und exzellenter Leistung. 2. internationale Salzburger Konferenz zu Begabungsfragen und Begabtenförderung. Salzburg, 13.10.2000.

Tom Köcher

F Koncepty diagnostiky matematického nadání

1 Úvod

Tato kapitola se věnuje otázce, jak lze diagnostikovat matematicky nadané žáky. Identifikace žáků s potenciálním matematickým nadáním je velice důležitá, protože jen tak je možné připravit adekvátní opatření pro jejich individuální podporu – ve smyslu diferencované školní výuky. Včasnou identifikací a následným zavedením podpůrných opatření je také možné se vyhnout případným problémům, jako je nedostatečná stimulace žáků, která vede k jejich nevytíženosti během výuky.

Tomu však brání skutečnost, že neexistuje žádný jednotný model takové identifikace, což mimo jiné vyplývá z nejednotného chápání pojmu *nadání* (viz Ziegler a Stöger 2003, s. 8). Na základě pojmu specifikovaného v kapitole E se bude v této kapitole nahlížet na *nadání* jako na teoretický konstrukt popisující individuální potenciál pro rozvoj kompetencí v jedné nebo několika oblastech.

2 Vyšší IQ = matematické nadání?

V posledních letech se téma identifikace nadaných dětí opět vrací do centra pozornosti pedagogicko-psychologické diagnostiky. Stanovení určitého nadání, v našem případě matematického, přitom zásadně vychází z pojetí *nadání*, tedy z toho, co se pod tímto pojmem rozumí. Podle Zieglera a Stögera (2003) závisí proces identifikace na aktuálně použitém pojmu nadání (viz Ziegler a Stöger 2003, s. 8).

Pokud budeme vycházet z pojetí Rosta (2009a), které bylo představeno již v kapitole a které říká, že matematické nadání je součástí vyšší všeobecné inteligence, pak zde existuje možnost identifikace pomocí všeobecného testu inteligence. Tomu však odporuje základní předpoklad z kapitoly E, tedy že všeobecné nadání je mnohostranné, a je tedy možné je rozčlenit podle různých specifických aspektů. Gardner (1991) má proto na základě své teorie inteligence kritický názor na to, že by bylo možné pomocí jediného čísla získaného z testu inteligence reflektovat mnohostranné předivo nadání (viz Gardner 1991, s. 9–11). Na jednorozměrné stupnici nelze podle modelů znázorněných v kapitole E adekvátně vyjádřit mnohostrannost nadání a různé možnosti vzájemného působení. Test inteligence by nedokázal zohlednit kreativitu, výdrž a další vlastnosti široce pojatého pojmu matematické nadání. Testy inteligence dokáží podchytit jen malou část faktorů důležitých pro nadání, a jejich význam pro diagnostiku by se proto neměl přeceňovat. Výsledek všeobecného testu inteligence by se proto měl interpretovat při zohlednění vybraných všeobecných a oborových teorií o nadání, které se používají při procesu identifikace.

Kromě toho je na základě vytvořeného pojmu matematického nadání z kapitoly E možné, že se může matematické nadání vyskytovat i bez (dalších) vynikajících školních výkonů nebo nadání v jiných oborech.

Pokud jde o inteligenční kvocient, zjistili Käpnick a kol. (2005) v rámci svých šetření, že hodně dětí, které se zúčastnily výzkumných projektů zaměřených na matematické nadání, má vysokou matematickou inteligenci, ale že existuje i určitá množina matematicky nadaných žáků, jejichž IQ je průměrné (viz Käpnick a kol. 2005, s. 25).

Jediný test inteligence navíc nedokáže zohlednit přirozený rozvoj dítěte. V projektu identifikace v rámci školy by na základě modelu nadání, který zahrne i časový aspekt (viz kapitola E), nemělo jít jen o zjištění nadání, které již žáci vykazují. Měl by rovněž vzniknout prostor pro prognózy týkající se neodhaleného a tušeného potenciálu žáků (viz Weigand 2014a, s. 44).

Test inteligence tedy nemůže být jediným prostředkem zvoleným pro diagnostiku nadání, protože by v rámci procesu identifikace nebyla podchycena skupina žáků bez nadprůměrného inteligenčního kvocientu. Kromě toho by nebyl dostatečně zohledněn aspekt rozvoje nadání, a děti s příslušným potenciálem rozvoje by tak neobdržely potřebou podporu.

K tomu je třeba zvážit existenci mnoha různých testů inteligence, které se zaměřují na různé oblasti, a zachycují tak různé aspekty inteligence. Výsledky různých testů inteligence se tak mohou lišit, a na základě rozporných výsledků lze pak jen velmi obtížně stanovit spolehlivou diagnózu (viz Käpnick a kol. 2005, a. 23–25).

Pomocí stanoviska, že matematické nadání představuje individuální potenciál pro rozvoj matematických kompetencí (viz kapitola E), lze nadání pro určitý obor rozpoznat na základě výkonů dítěte či dospívajícího v situacích, ve kterých se matematika využívá – během procesu zpracování nebo při analýze výsledků.

Použití testu IQ při současném sledování modelu nadání – např. modelu, který navrhl Heller (2000) – však může představovat cennou složku diagnostiky nadání. Například vysoký inteligenční kvocient prokázaný testem inteligence ve spojení s podprůměrnými školními výkony může ukazovat na *neschopnost se prosadit*. Výzkum příčin takové diskrepance mezi inteligencí a výkonem lze zaměřit na vlivy okolního prostředí a intrapersonální faktory.

Význam použití specifických testů inteligence nelze podceňovat ani v případě identifikace matematického nadání. Pokud se, jak to požadují také Ziegler a Stöger (2003), nepoužije pro diagnostiku matematického nadání všeobecný test inteligence, ale specifický testovací proces zaměřený na matematiku, může výsledek přinést nové informace o matematickém nadání testované osoby a v rámci široce pojatého identifikačního procesu doplnit celkový obraz dítěte.

Kromě toho je třeba na této straně poznamenat, že profesionální testování IQ mohou provádět pouze kvalifikované, psychologicky školené osoby, například školní psychologové, kteří mají potřebné znalosti a dokáží pro jednotlivé případy zvolit vhodné oborové testy určené k účelu identifikace (viz Ziegler a Stöger 2003, a. 17).

Pro provádění testů inteligence hovoří skutečnost, že pomocí různých testů inteligence je možné inteligenci zjistit poměrně spolehlivě. Podle Zieglera a Stögera (2003) se jeví „měření inteligence pomocí IQ testu jako nepostradatelné, protože testovací metody výrazně předčí schopnost odhadu inteligence učiteli, rodiči, a dokonce i školenými diagnostiky.“ (Ziegler a Stöger 2003, s. 17). Tento požadavek však směřuje k okamžiku, který ve vícestupňovém procesu identifikace nastane mnohem později. Je tak třeba předem zvážit, zda stanovení IQ, a s ním spojené „nálepkování“ představuje pro dotčeného a pro školu nějakou nadhodnotu.

Tato kapitola prokazuje, že určité testy inteligence mohou proces identifikace obohatit. Protože to však již není v rukou příslušných vyučujících, věnuje se následující odstavec rozličným možnostem na úrovni školy, které mohou proces identifikace zahájit. Pokud si to škola přeje, může pak na základě těchto výsledků dojít ke spolupráci s psychology a provedení diagnostiky komplexního a vícerozměrového konstruktu matematického nadání.

Pokud škola sleduje přístup Weiganda a kol. (2014)k podpoře nadaných děti, který je zaměřen na jednotlivé osoby, je z pedagogického hlediska vhodné upustit kvůli výskytu možných problémů při provádění testování i při prezentaci jeho výsledků od identifikace osob s velkými intelektovými schopnostmi. Aby nedocházelo k případným problémům v sociálním prostředí osob, které byly testovány jako osoby s velkými intelektovými schopnostmi, konstatuje Weigand (2014b): „»Řešení« spočívá v tom, že se upustí od diagnostiky, nikoli však od podpory osob s velkými intelektovými schopnostmi, to znamená, že je třeba rozpoznat potenciál všech dětí a co nejlépe jej podpořit, bez přisuzování nebo specifického dokládání těchto velkých intelektuálních schopností (či jiných zvláštností).“ (Weigand 2014b, s. 24).

Protože ve škole mohou testy inteligence provádět pouze speciálně vzdělaní vyučující, a protože je třeba dbát na výše uvedené úvahy týkající se testů inteligence, představíme nyní možnosti, jak identifikovat potenciál dětí, jak jej pojmenovává Weigand (2014b), a to jak v rámci školy, tak také v rámci každodenní praxe.

3 Identifikace ve škole

Pokud sledujeme pojetí všeobecného, respektive matematického nadání podle Gardnera (2010), Hellera (2000), Käpnicka a kol. (2005) a Ulma a Zehndera (2020), je zřejmé, že rozsáhlou, a tedy spolehlivou diagnostiku lze provést teprve na základě spolupůsobení různých opatření.

Učitelkám a učitelům se přitom v rámci procesu identifikace připisuje důležitá klíčová role. Jednak je pro identifikaci zapotřebí „velmi úzká spolupráce praktiků (učitelů, vychovatelů ve školce, rodičů), kteří ve většině případů odpovídají za, (…) stanovení první diagnózy a předání potenciálních vysoce nadaných dětí do rukou odborníků.“ (Ziegler a Stöger 2003, s. 8)

Sledování a rozpoznání potenciálu ze strany vyučujících je zásadním krokem k individuálnímu posuzování dětí, které připravuje cestu k individuální, diferencované podpoře (viz Weigand 2014c, s. 17).

Explicitní postup v rámci diagnostického procesu je výrazně podmíněn účelem identifikace (viz Ziegler a Stöger 2003, s. 12). První školní diagnóza týkající se matematického nadání by proto měla vzhledem k širokému chápání pojmu nadání a zohlednění časového vývoje matematického nadání vycházet z otevřené první volby podpůrných opatření. Mohou ji provést vyučující a kombinovat přitom vlastní výběr žáků s doporučeními dalších osob. Tak by se mělo zajistit, že podporu obdrží co nejvíce potenciálně nadaných dětí, resp. mladistvých. Podpůrná opatření tak mohou vědomě zahrnovat také žákyně a žáky, které vyučující považuje „pouze" za zainteresované (viz Baudson 2009, s. 6–7).

Cílem této první diagnózy ve škole by proto mělo být generování skupiny těchto zainteresovaných a potenciálně nadaných žáků. Následně je pak možné v rámci různých podpůrných opatření provádět další pozorování, protože matematické nadání se rozpozná spíše na základě „mimořádných výkonů během procesu řešení matematických problémů" (Käpnick a kol. 2005, s. 23) než formou testu inteligence. Mimořádné výsledky mohou být na jedné straně zřejmé i v běžné výuce. Na druhé straně mohou žáci dostávat nad rámec běžného vyučování také komplexnější úkoly s vysokou náročností, aby mohli prokázat své matematické nadání (viz Holling a kol. 2015, s. 44).

Podle toho, jak široce založená má být diagnostika, pak může navíc v průběhu tohoto procesu probíhat spolupráce s psychologem. I bez konzultace s psychology však škola dokáže shromáždit různé náznaky případného matematického nadání.

V další kapitole proto představíme různé metody diagnostiky na školní úrovni, ze kterých pak může vyplynout vypovídající obraz o matematickém nadání určitého žáka.

4 Identifikační kritéria

Stanovení faktorů významných pro mimořádné nadání „v maximální míře závisí na příslušném modelu nadání." (Ziegler a Stöger 2003, s. 15). Dále je nutné „vypátrat veškeré náznaky nadání a opírat informace o jednotlivých žácích o co nejvíce informací." (Hauptmann a kol. 2000, s. 20). Protože vycházíme z multifaktoriálního a širokého chápání pojmu nadání, je třeba při identifikaci žáků zohlednit nejen odborně kognitivní, ale také – podle účelu identifikace – hudební, sportovní, manuální schopnosti i kreativitu a nekognitivní osobnostní vlastnosti, jako je zájem a výdrž.

To také vysvětluje, proč neexistuje typické matematicky nadané dítě, a současně i to, proč ve většině případů nestačí vybrat jen jeden diagnostický nástroj. Vhodný výběr metod, který vychází z daných okolností, umožní získat posouzení profilu nadání z co největšího množství různých perspektiv. Lze přitom využít jak objektivní, tak také subjektivní výběr.

Celou řadu možností identifikace najdeme u Mönkse (1999, s. 68). V další kapitole představíme některé z možností vysvětlené ve speciálním kontextu matematického nadání.

5 Úsudek učitele

Vyučující tráví s žáky velkou část dne a mohou je proto pozorovat po relativně dlouhou dobu. Kromě toho bývají často důležitými kontaktními osobami. Právě kognitivní rozvoj, paměťové výkony, myšlení ve strukturách, řešení problémů a podobně, a dále osobnostní vlastnosti a jejich rozvoj mohou vyučující velmi dobře sledovat. Pozorování ze strany učitelů je proto nejbližším zdrojem informací pro posuzování potenciálu žáků.

Na základě svého pedagogického a oborově didaktického vzdělání dokáží vyučující existující nadání odhadnout poměrně přesně. Hany (1999) v této souvislosti konstatuje:

> Když pomocí testu určíte vysoce inteligentní žáky a pak porovnáte, jak dobře odhadli vyučující tytéž žáky jako mimořádně nadané, a jak dobře je to možné na základě jiných testů, pak si učitelé vlastně nevedou hůře než psychometrické metody. (Hany 1999, s. 15)

Toto konstatování jen zvýrazňuje rozhodující roli a význam vyučujících v diagnostickém procesu. Učitelé rovněž dokáží vnímat symptomy, které se ve standardizovaných testech inteligence mohou zjistit jen velmi obtížně. Další předností diagnostiky prováděné učiteli spočívá v tom, že každodenně pracují s velkým množstvím žáků, a že je tak dokáží lépe srovnávat než například rodiče.

Je proto žádoucí zaměřit se ve všech fázích vzdělávání učitelů také na (další) rozvoj profesionálních kompetencí pedagogů v oblasti diagnostiky a podpory nadaných žáků. Na seminářích pro studenty pedagogických oborů, tematicky zaměřených odborných schůzkách během praxí nebo při dalším vzdělávání pedagogů lze zajistit nejen zvýšení zájmu o toto téma, ale také zlepšení diagnostických schopností vyučujících. Zejména je třeba, aby se učitelé z jedné školy shodli na společném významu pojmu nadání a na konceptech k diagnostice a podpoře nadaných žáků.

Svůj význam má však rovněž svědomité sledování jako vědomý a aktivní proces vnímání. Problém chybně stanovené diagnózy, který se tak případně může vyskytnout, je proto často zmiňován v souvislosti s úsudky učitelů. Každý takový odhad je a zůstává do jisté míry subjektivní, z čehož mohou vyplývat chybné závěry.

U žáků, kteří jsou pilní, zvídaví, zaujatí a v rámci školy proto také vysoce výkonní, lze pochopitelně očekávat rovněž matematické nadání. To, zda skutečně existuje, však na základě těchto charakteristik není jisté. Může se tedy stát, že jsou žáci vyučujícím identifikováni jako potenciálně matematicky nadaní, ale tato domněnka se v dalším průběhu nepotvrdí.

Pokud však prvotní diagnóza slouží k tomu, aby se zainteresovaným žákům umožnila účast v dobrovolném podpůrném programu, jak je například popsáno v kapitole G, pak se tato „diagnostická chyba“ vyřeší. S ohledem na kulturu školy, která zohledňuje individualitu žáků a podporuje jejich zájmy, a která klade důraz na „individuální formy vyučování a jednání podporující nadání“ (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung - Státní ústav pro kvalitu škol a výzkum vzdělávání (ISB) 2011, s. 8), totiž právě popsaná „chyba při prvotní diagnóze“ žádnou chybou není. Při prvotní diagnóze vycházející z úsudku učitele se nejedná o jednoznačnou identifikaci matematicky nadaných dětí, tato diagnóza představuje počátek procesu dalších diagnostických a podpůrných opatření, v rámci nichž pak lze provádět další pozorování.

Stejně tak jako nemůže úsudek učitele „přesně“ určovat, zda je určitá osoba nadaná či nikoli, se i při testech inteligence naskýtá otázka, kde má být stanovena mezní hodnota pro nadání. Rost (2009a) k tomu poznamenává, že určení toho, odkdy se určitá osoba klasifikuje jako nadaná, je věcí dohody, jak v oblasti pedagogiky, tak také psychologie – „stejně tak, jako je pouhou konvencí, zda někoho budeme označovat za ‚velkého‘ nebo ‚malého‘ nebo jako ‚tlustého‘ nebo ‚hubeného‘.“ (Rost 2009a, s. 15–16).

I když se tedy v průběhu dalšího diagnostického procesu ukáže, že dítě pravděpodobně nemá žádné speciální matematické nadání, může se dále vzdělávat na základě svých zájmů, tyto zájmy se mohou prohlubovat, nebo se mohou dokonce objevit nové. Ve vzdělanostní společnosti s rovnými příležitostmi je to stejně žádoucí cíl jako podpora mimořádně nadaných žáků. Na webových stránkách Německého centra pro vzdělávání učitelů matematiky (Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik, DZLM) se tak také dočtete: „Koneckonců je třeba především oceňovat schopnosti dětí a projevit zájem o jejich přístup tak, aby si co nejdéle udržely radost z matematiky.“ (Výkonné děti (Leistungsstarke Kinder) | KIRA 2020)

Diagnostika matematického nadání je zde k tomu, abychom dokázali posoudit, zda se v konkrétním případě jedná o matematické nadání či nikoli. Pro podpůrná opatření jsou mimo jiné vybíráni také žáci bez mimořádného matematického nadání. Na závěr je třeba ještě jednou zdůraznit, že ve školním kontextu by se nemělo negativně hovořit o „chybě“, pokud se úsudek učitele nepotvrdí, nebo pokud se ukáže, že domnělé nadání možná přece jen neexistuje, protože se může stát, že žák bude přesto z podpůrných opatření profitovat.

Jiným problémem při prvotní diagnostice prováděné učitelem je přehlédnutí dětí, které by si potenciálně podporu zasloužily, neprokazují však žádné viditelné vlastnosti či chování jako zájem či mimořádné školní výkony, které by byly pro učitele zjevné. Je však možné, že tito žáci i přesto mají mimořádné matematické nadání, které však v důsledku velkého množství vlivů, jako je klima ve třídě, kritické životní události, strategie učení nebo stres (viz kapitola E), neprokazují. Označují se jako *Underachiever* (outsideři). I když vyjdeme ze všeobecné inteligence, například podle Rosta (2009b), místo vícerozměrového pojmu nadání podle Ulma a Zehndera (2020), je třeba konstatovat, že takové žáky dokáží vyučující jen obtížně rozpoznat: „Vysoké nadání tak zvaných outsiderů (underachiever) bohužel málokdy rozpoznají.“ (Rost 2008, s. 26). Pro takovéto speciální případy naleznou vyučující další informace na toto téma například u Greitena (2013) nebo Zieglera a kol. (2000).

Na základě navržené otevřené prvotní diagnózy vytvořené jako úsudek učitele není ve škole nezbytně nutné stanovovat přesná kritéria toho, kteří žáci mají obdržet podporu pro nadané osoby – v neposlední řadě proto, že existují i formy nadání, které se prokáží teprve v průběhu dalšího biologického rozvoje dítěte. Proto se pro každodenní školní život navrhuje široká a otevřená prvotní diagnostika, která se může uskutečňovat podle principu *podpora na základě domněnky* (viz Müller-Oppliger 2008, s. 12). Na základě časové složky v konstruktu *nadání* a zejména také matematického nadání nemůže být diagnostika takového nadání jednorázový, časově omezený úkon, místo toho se musí realizovat jako spojitý proces.

Souhrnně lze konstatovat, že pokud je cílem diagnostiky prováděné učiteli podnět pro další sledování a podporu, pak jsou tím některé z často uváděných kritických bodů úsudku učitele vyvráceny. Diagnostika na základě úsudku učitele je navíc prospěšná pro další diagnostický proces, a proto je ve školním životě nepostradatelná.

Pro uvedenou diagnostiku matematického nadání mají vyučující kromě základny tvořené kritérii sledování odvozenými od vícedimenzionálního modelu matematického nadání (viz kapitola E) k dispozici mimo jiné katalogy ukazatelů či kontrolní seznamy, rozhovory s vyučujícími, indikátorové úlohy nebo také řešené úkoly žáků. Také zde platí zásada, že je třeba vycházet nejen z jedné metody nebo jednoho zdroje informací, ale využívat při posuzování vyučujícího více z těchto možností podle dostupných zdrojů. Na základě vícedimenzionálního pojmu matematického nadání by se měl využívat multimetodický proces, což mimo jiné zahrnuje také zapojení co největšího počtu posuzovatelů, protože: „Úsudky by měly vždy vycházet z co největšího počtu posouzení a nejrůznějších situací." (Holling a kol. 2015, s. 44).

Níže jsou podrobněji vysvětleny některé postupy, které jsou doloženy konkrétními příklady z výuky matematiky.

6 Katalogy ukazatelů, resp. kontrolní seznamy

V souvislosti s identifikací matematického nadání se často uvádějí tzv. kontrolní seznamy. Tyto katalogy ukazatelů poskytují učitelkám a učitelům vodítko pro rozpoznání potenciálně nadaných dětí a mladistvých. Díky snadné použitelnosti a aplikaci formou pozorování je možné je používat ve škole, a shromažďovat v nich náznaky nadání identifikované u jednotlivých žáků. Pokud se pak u sledovaného dítěte sejde velké množství ukazatelů ze seznamu, přičemž počet příslušných ukazatelů nelze jednoznačně stanovit, lze domněnku o případné existenci nadání rozšířit a ověřit za pomocí dalších identifikačních metod. Proto jsou katalogy ukazatelů vhodné pro vyučující, kteří chtějí u svých žáků odhadnout jejich nadání.

Krutetskii (1976) zjistil na základě rozsáhlé studie ukazatele, kterými matematicky nadaní dospívající disponují v mimořádné míře:

- schopnost formalizovaného vnímání matematického obsahu a pochopení formální struktury určitého problému,
- schopnost myslet v matematických symbolech a strukturách a provádět logické závěry,
- schopnost zobecňování konkrétních matematických situací, objektů nebo postupů,
- schopnost zkrátit proces matematického myšlení,
- flexibilita mentálních procesů u matematických činností,
- úsilí o srozumitelnost a jednoduchost řešení,
- schopnost reverzibility myšlenkových pochodů,
- matematické uvažování, např. u obecných matematických vztahů, přístupů k řešení problémů nebo důkazových schémat,
- kladný vztah k matematice

(viz Krutetskii 1976, s. 350–351, překlad autora).

Pro rozpoznání dětí na základních školách s potenciálním matematickým nadáním vyvinul Käpnick (1998) na základě svých studií specifický systém ukazatelů, který obsahuje jak specifické oborové komponenty, tak také osobnostní vlastnosti vztahující se k matematice:

I. Znaky nadání charakteristické pro matematiku

- matematická senzibilita (cit pro čísla a geometrické tvary, pro matematické operace a jiné strukturální souvislosti i pro estetické aspekty matematiky),
- originalita a fantazie u matematických aktivit,
- schopnost zapamatovat si matematické situace,
- schopnost strukturování (rozpoznání a tvorba vzorů resp. principů uspořádání a členění zadaných matematických situací nebo situací, které je třeba konstruovat),
- schopnost přechodu mezi reprezentačními úrovněmi
- schopnost reverzibility a transferu.

II. Všeobecné osobnostní vlastnosti podporující nadání

- vysoká duševní aktivita,
- intelektuální zvídavost,
- ochota k vyvíjení činnosti, motivace k výkonu
- radost z řešení problémů,
- schopnost koncentrace,
- houževnatost,
- samostatnost,
- schopnost spolupráce

(viz Käpnick 1998, s. 119).

I když byl tento katalog původně koncipován pouze pro děti třetího a čtvrtého stupně vzdělávání, může i tak představovat dobrý výchozí bod pro učitele na druhém stupni při rozpoznávání znaků matematického nadání.

Speciální katalog pro učitele zaměřený na všeobecné ukazatele nadání nabízí například Hauptmann a kol. (2000, s. 21–22) nebo také Bardy (2013, s. 98–99). Speciální podporu je třeba nabídnout tehdy, pokud se určitého žáka týká řada následujících znaků. Při použití následující identifikační metody pak lze získat více informací o předpokladu (matematického) nadání. I přesto, že u určitého dítěte či dospívajícího bude pozorováno méně znaků ze seznamu, měli byste uposlechnout své pedagogické intuice a v případě odůvodněné domněnky byste měli učinit další opatření. Níže jsou vybrány některé body podle Bardyho (2013), které mohou mít bezprostřední souvislost také s matematickým nadáním:

Žák

- se zajímá o školu a má široké všeobecné vědomosti,
- rychle přijímá informace a dokáže je snadno rekapitulovat,
- má vysoké tempo učení a práce a raduje se z intelektuálních aktivit,
- je při práci nezávislý, preferuje individuální práci a má sebedůvěru,
- ve svém všeobecném vývoji vysoce předčí téměř všechny děti stejného věku ve třídě,
- má mnoho koníčků a četné zájmy,
- dokáže myslet abstraktně,
- dokáže rozpoznat problémy, analyticky je popsat a nalézt cesty k řešení,
- myslí tvůrčím způsobem a miluje hledání neobvyklých cest a navrhování nových nápadů,
- na zajímavé úkoly se dokáže koncentrovat neobvyklým způsobem, dokáže zapomenout na vše ostatní kolem sebe,
- je vynikající v matematických úlohách,
- principy určitého problému rychle pochopí a brzy dojde k platnému zevšeobecnění,
- myslí a pracuje systematicky,
- baví ho struktury, řád a konzistence,
- k otázkám přistupuje s vážností,
- ve svém myšlení je flexibilní,
- je kritický a perfekcionistický.

(viz Bardy 2013, s. 98–99).

Použití těchto kontrolních seznamů je celkem užitečné, pokud se využívají jako podnět pro sledování dítěte.

Stejně jako u katalogů ukazatelů i zde platí, že na základě shody chování určitého dítěte s ukazateli z některého seznamu není možné bezpečně rozlišovat mezi mimořádně a průměrně nadanými žáky. Ukazatele, které jsou často formulovány velmi obecně, se mohou týkat i žáků, kteří nejsou mimořádně nadaní. Především nemůže být žádný jednotlivě pozorovaný ukazatel výhradní indicií pro mimořádné nadání podle definice nadání z kapitoly E.

Navíc ani neexistuje žádný minimální počet shod s kontrolním seznamem, od kterého by bylo možné hovořit o mimořádném nadání (viz Rost a kol. 2006, s. 210).

I přes všechny tyto úvahy může být při kritickém přístupu ke kontrolním seznamům jejich použití užitečné pro citlivé pozorování a může představovat obohacující aspekt při identifikaci mimořádně nadaných dětí a mladistvých. Kontrolní seznamy mohou napomoci při systematickém sledování žáků a shromažďování informací.

Výpis z kontrolního seznamu se jako příklad nachází na obrázku 1. Další kontrolní seznamy si můžete prohlédnout například na webových stránkách Státního ústavu pro kvalitu škol a výzkum vzdělávání (Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung (ISB) na http://www.isb.bayern.de/schulartspezifisches/materialien/besondere-begabungen-an-weiterfuehrenden-schulen/ nebo na poradenském pracovišti pro mimořádné nadání (BbB) Zemského úřadu pro vzdělávání učitelů a rozvoj školy (Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung) v Hamburku na https://li.hamburg.de/materialien-lehrkraefte/4507150/material/ .

Výhodou práce s takovým seznamem ukazatelů je skutečnost, že se vyučující intenzivněji zabývají tématem *nadání*, rozvíjí svůj cit pro znaky nadaných žáků a jejich případné neobvyklé chování a takové chování příliš rychle neodsuzují. Kontrolní seznamy tak mohou na počátku identifikačního procesu zvýšit vnímavost vyučujících jak k tématu samotnému, tak také k různým projevům nadání a různým způsobům chování mimořádně nadaných žákyň a žáků. Kontrolní seznamy navíc díky své použitelnosti a malé časové náročnosti při používání umožňují vyučujícím shromažďovat v každodenním školním životě náznaky možného nadání, které se pak mohou stát základem dalšího pozorování, a to časově efektivně a u poměrně velkého množství žáků.

Kontrolní seznam pro rozpoznání vysoce nadaných žáků

Posuďte chování sledovaného dítěte! Čím více bodů označíte, tím vyšší je pravděpodobnost, že se jedná o vysoké nadání.

Jméno sledovaného dítěte: ____________________________

- ☐ prokazuje velkou intelektuální zvídavost, chce přesně vědět, proč a jak dochází k určitým jevům, klade provokativní a zkoumavé dotazy, nespokojí se s jednoduchým vysvětlením.
- ☐ vyniká velmi logickou schopností myšlení, chápe abstraktní koncepty, rychle nalézá zobecnění a jednotlivá fakta.
- ☐ má neobyčejnou výdrž, snaží se pro vlastní uspokojení dovést úkoly až do konce, dokáže se přitom delší dobu soustředit.
- ☐ velice rychle přemýšlí, dokáže rychle odpovědět na nové nápady.
- ☐ učí se rychle a lehce, chápe úkoly ještě před tím, než byl vydán celý pokyn či vysvětlení, potřebuje jen málo nebo žádné procvičování, aby získal určité kompetence.
- ☐ má dobrou paměť, téměř nepotřebuje žádné procvičování či opakování.
- ☐ má velkou slovní zásobu, dobrý cit pro jazyk, trvá na přesném vyjadřování, používá odborné pojmy.
- ☐ je pečlivý pozorovatel, velkou pozornost klade na detaily.
- ☐ prokazuje velkou fantazii, jak v jazykové, tak také v tvůrčí oblasti, jako je kreslení nebo modelování.
- ☐ přemýšlí odlišným způsobem, hledá neobvyklá řešení.
- ☐ ukazuje velkou iniciativu, upřednostňuje nezávislou práci.

Obr. 1: Kontrolní seznam Richtera (2003)

7 Sebenominace a cizí nominace rodiči a přáteli

Pro zařazení do podpůrného programu a dalšího sledování příslušných žáků je většinou rozhodující úsudek učitele. Na základě různých náznaků nebo požadovaných kritérií nominují vyučující určité žáky, a umožní jim tak účast v podpůrných programech, jak například popisuje kapitola G. Nominace učitele by se však měla doplnit doporučeními dalších osob. Představitelná je nominace provedená rodiči nebo blízkými přáteli dotyčného dítěte či mladistvého. Dále pak existuje možnost sebenominace, u které se žáci sami rozhodnou, mimo jiné na základě svých zájmů či schopností, k účasti na podpůrném programu.

Sebenominace

Důležitou předností zapojení sebenominace při výběru účastníků do podpůrného programu je, že je tak případně možné podpořit úsudek učitele, a připojit tak další kamínek do mozaiky domnělého (matematického) nadání. Pokud by vlastní ohodnocení nekorespondovalo s úsudkem učitele, byla by i přesto jistě přestavitelná účast v nabídce podpory formou určité „zkušební doby“. Právě s ohledem na outsidery, kteří často nejsou rozpoznatelní od těch skutečně slabších žáků, může být zapojení sebenominací prospěšné. Protože však může dojít i k přecenění vlastních schopností, měli by se během této „zkušební doby“ žáci a jejich školní rozvoj důkladně sledovat.

Kromě toho může přijetí sebenominace, a tím také zohlednění názoru žáka posílit pocit akceptace vlastní osoby v rámci školního kolektivu a identifikaci s podpůrnými opatřeními. Kladné sebehodnocení a důvěra ve vlastní osobu dále může pozitivně ovlivnit vlastní koncept účastníků, kteří v jeho důsledku odhalí a přijmou své vlastní silné stránky (viz Kwietniewski a kol. 2017, s. 46).

V případě mladších žáků je nutné nahlížet jejich sebehodnocení více kriticky. Potřebné abstraktní schopnosti u nich nejsou ještě plně rozvinuty, takže dokáží jen obtížně zaujmout objektivní pohled sami na sebe, a často jen přejímají názory rodičů a učitelů (viz Hany 2001, s. 167). Naproti tomu u starších žáků se lze domnívat, že dokáží vlastní potenciál odhadnout dobře. Pro příslušné vyučující je přitom důležitá důkladná znalost vlastních žáků, chtějí-li jejich výpovědi uspořádat.

Dále mohou do úsudku učitele a konec konců i do rozhodování školy o diagnostice a podpoře vstupovat také cizí nominace ze strany rodičů nebo přátel žáků.

Nominace ze strany přátel

Nominace ze strany přátel umožní zahrnout do rozhodování dosud nezohledněné zájmy nebo výkony dítěte, protože spolužáci ve stejném věku mají na své kamarády jiný úhel pohledu (viz Holling a kol. 1999, s. 48).

Ve starší studii z roku 1989 se touto nominací ze strany přátel zabýval již Gagné. Mimo jiné se prokázalo, že lze takovou formu nominace provádět velice jednoduše a ekonomicky. Kromě toho generuje toto opatření mnoho posuzovatelů z jedné třídy, což opět vede ke stabilnějšímu hodnocení, než je tomu u hodnocení jednou osobou. Jednotlivé výrazné odchylky od celkového úsudku tak nemají tak velkou váhu (viz Gagné 1989, s. 55).

Stejně jako u sebenominace je však třeba interpretovat úsudek získaný nominací ze strany přátel při zohlednění věku dotazovaných žáků. Mladší děti ovlivňuje při posuzování velmi výrazně například vzhled nebo osobně pociťované sympatie k hodnoceným vrstevníkům (viz Holling a kol. 1999, s. 48–49).

Nominace ze strany rodičů

Nehledě na žáky samotné, dokáží zájmy dítěte v každodenním životě nejlépe odhadnout rodiče, a mohou tak být v procesu identifikace velmi prospěšní. Pozorování duševního rozvoje a přisvojování si určitých schopností jsou důležité poznatky, které mohou rodiče poskytnout (viz Hany 2001, s. 168).

Ale i zde je třeba mít na paměti, že rodiče jsou svému dítěti vždy příznivě nakloněni, a mohou tak být zaujatí a jejich objektivní hodnocení může být ztíženo (viz Holling a kol. 1999, s. 50). Přesto však může hodnocení rodičů obohatit představu o nadání jejich dítěte.

Käpnick a kol. (2005) konstatuje, že mnoho rodičů odhaduje své děti ve vztahu k jejich matematickému nadání velice dobře. Často se však také stává, že rodiče své děti přeceňují, protože ty sice vykazují velké výkony, tyto výkony jsou však často silně ovlivněny např. sociálním prostředím dítěte, protože: „Velmi vysoké výkony mohou odkazovat jak na vysoké nadání, tak také na velmi dobrou podporu dítěte.“ (Käpnick a kol. 2005, s. 26)

Sebenominace i cizí nominace tedy mohou být výrazně užitečné pro obecnou diagnostiku nadání, měly by však současně na základě kritického posouzení sloužit pouze jako obohacení a ani ve speciálních případech by je k diagnostice učitelé neměli jen slepě přejímat, protože: „Je samozřejmé, že je nutné kontrolovat známé zdroje chyb, například sociální reakce v souladu s očekáváním.“ (Heller 2000, s. 251).

8 Indikátorové úlohy

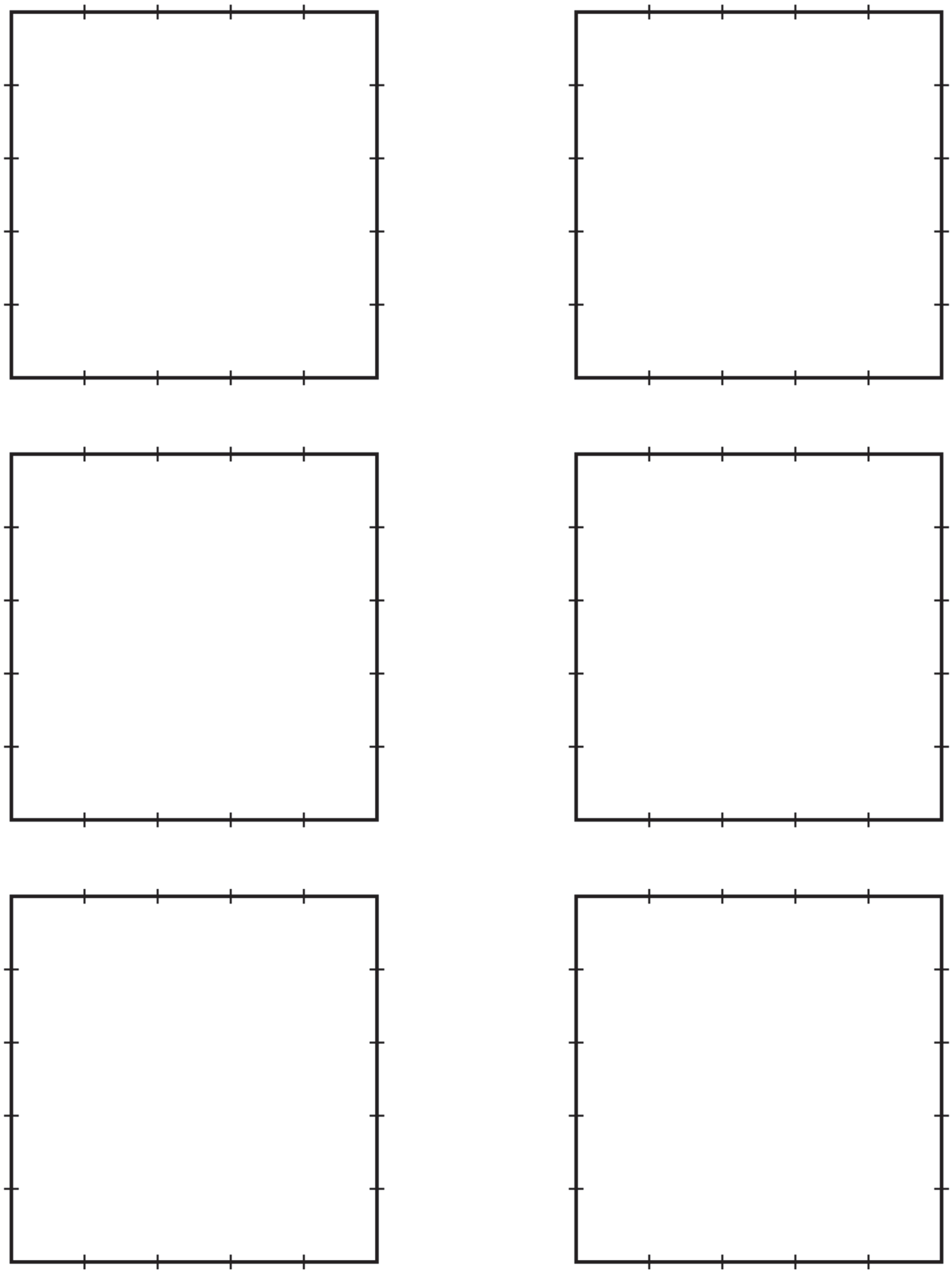
Aby bylo možné rozpoznat znaky specifické pro matematické nadání (viz odstavec 6), vyvinuli a evaluovali vědci úlohy, jejichž vypracování umožňuje učinit závěry o matematickém nadání. Tento typ úloh se vyznačuje poměrně otevřeným a komplexním zadáním, které se pokouší iniciovat matematicky produktivní výukovou činnost, vytvořit prostor pro kreativní řešení a svobodu při vypracování (viz Fuchs 2015, s. 196–198). Úlohy tohoto typu se označují jako *indikátorové úlohy*. Indikátorové úlohy tak společně s již představenými metodami představují další možnost, jak shromažďovat náznaky matematického nadání, na jejichž základě dokáže škola společně s dalšími informacemi vytvořit obstojný úsudek o matematickém nadání určitého žáka.

Pokud jde o úkoly pro oblast školek a prvního stupně základní školy (děti od 4 do 11 let), odkazujeme na tomto místě na Fuchse (2015), Bardyho (2013) a Käpnicka (2001). Pro oblast středních škol, přesněji pro 9. a 10. ročník školní docházky (žáci ve věku přibližně 15 až 16 let), navrhl Zehnder (v přípravě) úlohy, které prověřují různé matematické schopnosti.

Jako příklad uvádíme dvě úlohy pro ověření matematické kreativity a pro rozpoznání vzorů a struktur. Oba tyto aspekty využívá jak Krutetskii (1976) (schopnost myslet v matematických symbolech a strukturách; flexibilita mentálních procesů), tak také Käpnick (1998) (originalita a fantazie; schopnost strukturování). Dále jsou vyobrazeny příklady originálních řešení. U obou úkolů byl čas na vypracování stanoven na deset minut.

Matematické kreativní myšlení

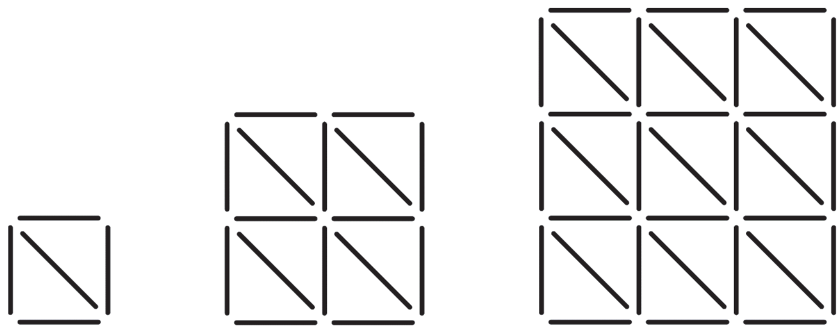
Rozdělte čtverce, jejichž strany jsou rozděleny vždy na 5 stejných úseků, do pěti dílů se stejnou plochou. Najděte co nejvíce různých řešení!



Obr. 2: Indikátorové úlohy zaměřené na matematickou kreativitu

Myšlení pomocí matematických vzorců

Následující vzor je poskládán ze zápalek.



a) Kolik zápalek budete potřebovat na čtvrtý obrazec?

b) Kolik zápalek budete potřebovat na desátý obrazec?

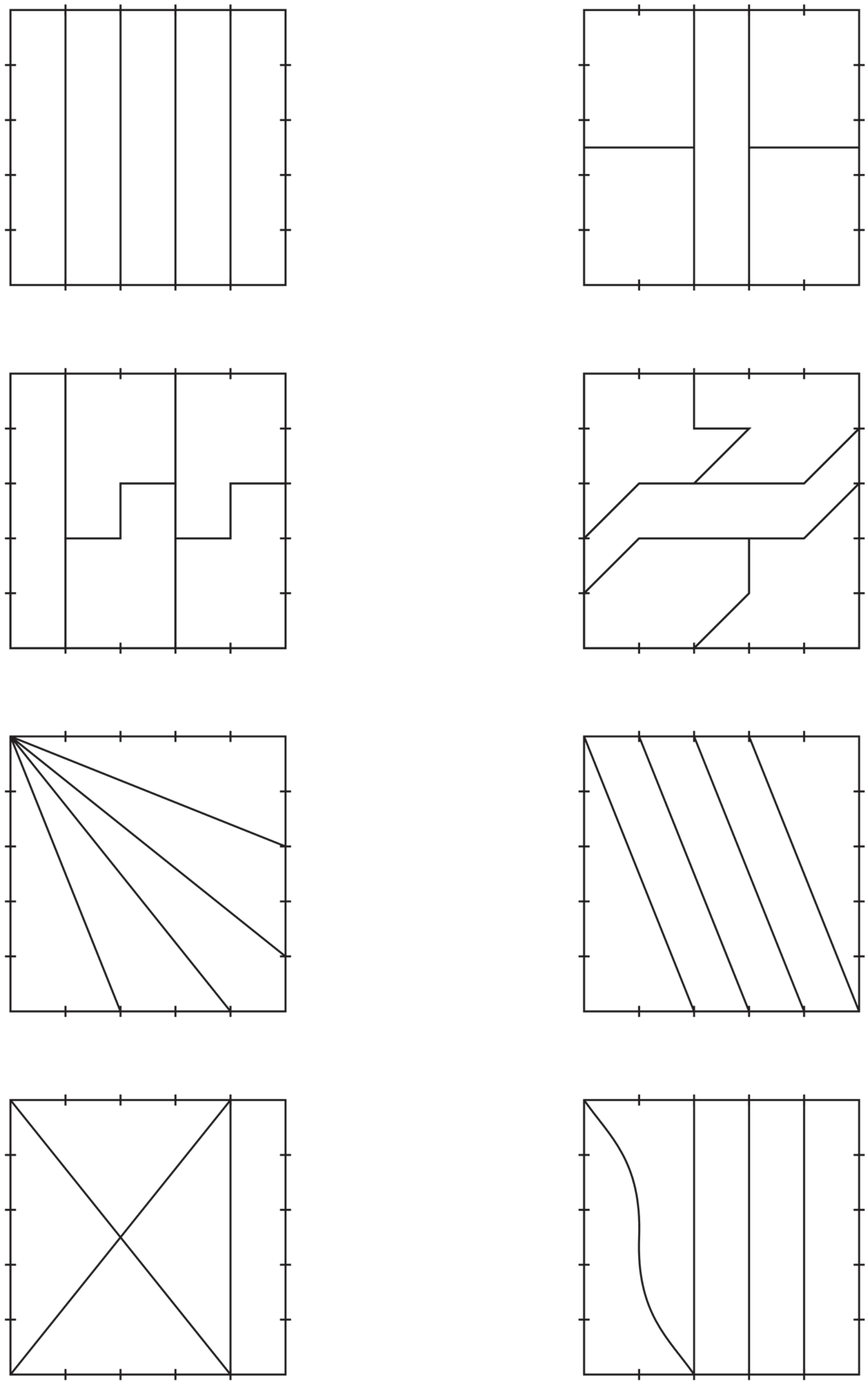
c) Vytvořte všeobecný vzorec pro výpočet počtu zápalek pro libovolný obrazec tohoto sledu obrazců.

Své odpovědi odůvodněte!

Obr. 3: Indikátorové úlohy zaměřené na rozpoznání vzoru a struktur

Matematické kreativní myšlení

Rozdělte čtverce, jejichž strany jsou rozděleny vždy na 5 stejných úseků, do pěti dílů se stejnou plochou. Najděte co nejvíce různých řešení!



Obr. 4: Žákovská řešení úkolů zaměřených na matematickou kreativitu

Relevantní výsledky hodnocení této skupiny úloh pro identifikaci matematického nadání na středoškolském stupni pro školy a vyučující jsou následující:

Matematicky nadaní žáci (v šetření účastníků matematických soutěží na úrovni spolkových zemí) řeší úlohy v průměru vždy lépe než žáci běžných gymnaziálních tříd. Velkému množství matematicky nadaných (92 procent) se přitom podaří rozpoznat strukturu, která je základem „myšlení pomocí matematických vzorců“ a uvést ji ve formě termínu. To se podaří výrazně menšímu množství žáků referenční skupiny (11 procent). Úlohy – a zejména výsledky z dílčí úlohy c – jsou proto vhodné pro rozpoznání matematicky nadaných žáků.

I když rozdíly mezi skupinami lze zjistit i v úloze pro stanovení matematické kreativity, výsledky obou skupin se výrazněji překrývají. Nasvědčuje to tomu, že tato úloha je méně vhodná pro rozpoznání matematického nadání. Heterogenní výkonnost šetřených, matematicky nadaných žáků devátého a desátého ročníku, svědčí o tom, že matematická kreativita není nutně přítomna u všech matematicky nadaných osob, místo toho spíše poukazuje na rozdílnost typů nadání. V souladu s touto skutečností má zde představená úloha přesto svůj význam s ohledem na rozsáhlou a komplexní diagnostiku.

9 Souhrn

Vzhledem k velké řadě možností identifikace nadaných žáků je při diagnostice nadaných dětí smysluplné postupovat krok za krokem – i proto, aby bylo možné kombinovat více těchto možností. Učitelé přitom poskytují nepostradatelnou oporu. Ziegler a Stöger (2003) popisují takový vícestupňový postup ve svém *modelu ENTER*, u kterého jsou jednotlivé fáze relativně nezávislé na použitém chápání pojmu nadání, takže jednotlivé kroky mohou probíhat na pozadí některého z různých komplexních modelů nadání. Rovněž Heller (2000) vyvinul svou *strategii postupné identifikace na podporu mimořádně nadaných žáků gymnázií* a píše k tomu:

> Na počátku probíhá hrubý výběr (screening) na základě nominace učitele u žáků nebo nominace rodičů u předškolních dětí, u starších mladistvých příležitostně – jako doplněk – rovněž formou sebenominace. Velmi rozšířené, především v angloamerickém prostředí, jsou kontrolní seznamy učitelů a rodičů na základě ratingových stupnic, které se vztahují na operativní znaky chování specifické pro vysoké nadání a na sociální podmínky prostředí v rámci rozvoje nadání. Úsilí přitom směřuje k co nejširšímu pojetí kognitivních a motivačních způsobů chování, které mohou zprostředkovat závěry týkající se domnělého vysokého nadání mladistvé osoby a její situace. Protože jsou ratingy a další „měkká“ data zpravidla méně měřitelné než testovací data, je úkolem screeningu především „neztratit“ žádné vysoce nadané kandidáty např. pro určitý podpůrný program nebo vědecké namátkové šetření. Vzniká přitom riziko prvního typu (alfa chyba), tzn. že se případně toleruje poněkud vyšší kvóta chybně umístěných jedinců. Teprve ve druhém nebo dokonce třetím stupni výběru pak pomocí přesněji

> změřitelných, avšak obsahově omezenějších diagnostických nástrojů postupně probíhá konečný výběr, což umožňuje postupné snižování beta chyby. (Heller 2000, s. 251 f.)

V souhrnu lze v souladu s Bardym (2013) konstatovat, že diagnostika matematického nadání by měla probíhat co nejrůznoroději, s vyčerpáním všech zdrojů (viz Bardy 2013, s. 95). Pouze ze skutečnosti, že má dítě velmi dobré matematické výsledky ve škole, nelze vyvozovat, že má mimořádné matematické nadání. Pokud chybí zjevné indície možného matematického nadání, nelze zase na druhou stranu zcela vyloučit možnost, že matematické nadání přeci jen existuje. Matematické nadání je komplexní konstrukt podléhající celé řadě vlivů, jejichž rozpoznání proto není vždy jednoduché.

Velmi autentický způsob, jak rozpoznat matematicky nadané děti a mladiství je pozorovat je při provádění matematických činností. Při zapojení interpretací dětí a analýzy jejich vypracovaných produktů tak lze shromáždit prokazatelné náznaky nadání (viz Ulm a Zehnder 2020). Rovněž Käpnick a kol. (2005) konstatují na základě svých šetření: „Mimořádné nadání určitého dítěte můžeme pozorovat pouze tehdy, pokud vyučování obsahuje nabídku, která takové pozorování umožňuje. Proto potřebujeme vyučování, které děti podnítí k myšlení, k řešení problémů […]“ (Käpnick a kol. 2005, s. 27). Proto by měl vícestupňový diagnostický proces po prvním hrubém výběru obsahovat prvky podpory, ve kterých budou moci účastníci pracovat na náročných matematických úlohách. Přitom vzniknou četné možnosti pro jejich pozorování ve smyslu odborné diagnostiky nadání a pro analýzu jejich matematické práce. Kromě toho mohou díky takové podpoře rozvíjet své matematické schopnosti a zapojit svou zvědavost a radost z objevování také žáci, kteří mají zájem, nejsou však nadprůměrně nadaní (viz Weigand 2014c, s. 11).

V rámci diagnostiky připadá škole, a tím především učitelům velký úkol. Na základě svých pedagogicko-didaktických a odborných matematických kompetencí mohou žáky pozorovat, pouštět se s nimi do hovoru, analyzovat jejich řešení a sledovat myšlenkové postupy s cílem rozpoznat a odhadnout jejich matematické nadání.

Cílem každé školy by mělo být vytvoření školního klimatu zaměřeného na jednotlivce tak, aby u žáků dokázala podpořit jejich potenciální nadání a zájmy. Konec konců podle článku 128 bavorské ústavy má každý obyvatel Bavorska nárok na to, „aby obdržel vzdělání odpovídající jeho rozpoznatelným schopnostem a jeho vnitřnímu poslání.“ (Bavorská státní kancelář 2020) Hnacím motivem diagnostiky a podpory nadaných dětí a mládeže může proto být skutečnost, že každý žák má právo na osobní rozvoj a individuální podporu.

Seznam literatury

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Baudson, Tanja Gabriele (2009): Nominationen Hochbegabter für Förderprogramme. Das schulische Vorschlagswesen und seine Schwierigkeiten. *MinD-Magazin* (68), 6–8.

Bayerische Staatskanzlei (2020): Art. 128 – Bürgerservice. https://www.gesetze-bayern.de/Content/Document/BayVerf-128.

Fuchs, Mandy (2015): Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen. Seelze: Klett Kallmeyer.

Gagné, Françoys (1989): Peer Nominations as a Psychometric Instrument: Many Questions Asked But Few Answered. *Gifted Child Quarterly* 33 (2), 53–58. DOI: 10.1177/001698628903300201.

Gardner, Howard (1991): Abschied vom IQ. Die Rahmentheorie der vielfachen Intelligenzen. Stuttgart: Klett-Cotta.

Gardner, Howard (2010): The Theory of Multiple Intelligences. http://www.pz.harvard.edu/sites/default/files/Theory%20of%20MI.pdf.

Greiten, Silvia (2013): Hochbegabte Underachiever. Perspektiven und Fallstudien im schulischen Kontext. Berlin: Lit-Verlag.

Hany, Ernst A. (1999): Wie gut können Lehrer Hochbegabung erkennen? Vom diagnostischen Alltag der Lehrkräfte und ihren Problemen. *LVH aktuell* (1a), S. 14–17. https://besondersbegabte.alp.dillingen.de/images/Dokumente_red/Basiswissen/Wie_gut_k%C3%B6nnen_Lehrer_Hochbegabung_erkennen_Hany_1999.pdf.

Hany, Ernst A. (2001): Identifikation von Hochbegabten im Schulalter. In: Kurt A. Heller (Hg.): Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter. Göttingen: Hogrefe, 42–168.

Hauptmann, Hannes; Hoerburger, Christian; Müller, Sigrun; Ostmeyer, Evelin; Spahn, Christine; Staudacher, Maria; Zevegyi, Monika (2000): HomoSuperSapiens. Hochbegabte Kinder in der Grundschule erkennen und fördern. Ein Projekt des Staatsinstituts für Schulpädagogik und Bildungsforschung München und der BMG Group. München: BMW AG.

Heller, Kurt A. (2000): Hochbegabungsdiagnose (Identifikation). In: Kurt A. Heller (Hg.): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Huber, S. 241–255.

Holling, Heinz; Kanning, Uwe Peter; Wittmann, Anna Julia; Preckel, Franzis (1999): Hochbegabung. Forschungsergebnisse und Fördermöglichkeiten. Göttingen: Hogrefe.

Holling, Heinz; Preckel, Franzis; Vock, Miriam; Roßbach, Hans-Günther; Baudson, Tanja Gabriele; Gronostaj, Anna et al. (2015): Begabte Kinder finden und fördern. Hg. v. Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF). https://www.bmbf.de/pub/Begabte_Kinder_finden_und_foerdern.pdf.

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main u. a.: Lang (Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, Bd. 5).

Käpnick, Friedhelm (2001): Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler. Berlin: Volk und Wissen.

Käpnick, Friedhelm; Nolte, Marianne; Walther, Gerd (2005): Talente entdecken und unterstützen. Beschreibung des Mathematikmoduls G5. Kiel: IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Krutetskii, Vadim Andreevič (1976): The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Chicago: Univ. of Chicago Press (Survey of recent East European mathematical literature). http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy0608/74033520-d.html.

Kwietniewski, Jan; Cronjäger, Hanna; Momma, Andrea; Tonke, Franziska; Ziesenitz, Anne (2017): Begabtenförderung. Grundlagen der schulischen Begabtenförderung. Hg. v. Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung Hamburg. https://li.hamburg.de/contentblob/3892734/940beee6a77573f12aab2a7826c05a20/data/pdf-broschuere-begabtenfoerderung-bbb-2017.pdf.

Leistungsstarke Kinder | KIRA (2020). https://kira.dzlm.de/lernen-wie-kinder-denken/leistungsstarke-kinder.

Mönks, F. J. (1999): Begabte Schüler erkennen und fördern. In: Christoph Perleth und Albert Ziegler (Hg.): Pädagogische Psychologie. Grundlagen und Anwendungsfelder. Bern, Göttingen, Toronto, Seattle: Verlag Hans Huber, 63–72.

Müller-Oppliger, Victor (2008): Ist Lisa Einstein «hochbegabt»? – Erkennen besonderer Begabungen in Unterricht und Schule. Die Stärken der Kinder fördern. *Die Neue Schulpraxis* 78. (10), 9–12. http://www.begabungsfoerderung-schweiz.ch/sites/default/files/publications/erkennen_besonderer_begabungen_in_unterricht_und_schule_nsp_2_10-08.pdf.

Richter, Andrea (2003): Hochbegabung. Information für Lehrer, Edition LAK.

Rost, Detlef H. (2008): Identifkation von Hochbegabten. In: Hessisches Kultusministerium (HKM) (Hg.): Hochbegabung und Schule. 18–27.

Rost, Detlef H. (2009a): Grundlagen, Fragestellungen, Methode. In: Detlef H. Rost (Hg.): Hochbegabte und hochleistende Jugendliche. Befunde aus dem Marburger Hochbegabtenprojekt. Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 72), 1–91.

Tom Köcher

G Koncepty k podpoře matematického nadání

1 Úvod

V této kapitole představíme možnosti podpory matematicky nadaných žákyň a žáků na sekundárním stupni vzdělávání. Vyjdeme přitom ze široce pojatého pojmu nadání a chápání matematického nadání podle kapitoly E a z konceptů identifikace matematicky nadaných dětí a mladistvých z kapitoly F se školní diagnostikou jako východiskem. Blíže se přitom seznámíme s *modelem otáčivých dveří* jako konceptem podpory a zprávou o praktických zkušenostech doložíme realizaci speciální formy modelu otáčivých dveří na dvou bavorských gymnáziích.

Abychom obsahově pochopili, na co se zaměřuje podpora nadaných žáků ve výuce matematiky, byl v kapitole E vyjasněn pojem matematického nadání. Tato definice s úzkou vazbou pojmu matematické nadání na kompetenční pojem standardů vzdělávání a osnov zdůrazňuje úzký vztah mezi podporou nadaných žáků a výukou matematiky. Podpora nadaných žáků znamená, že se v běžných úlohách v hodinách matematiky bude věnovat pozornost rozvoji matematických kompetencí, a řadí se tak do běžných úkolů vyučování matematiky.

2 Možnosti podpory

Výuka matematiky je stejná pro všechny žáky. I v rámci strukturovaného školního systému se však ve třídách nacházejí žáci s velmi rozdílným výkonnostním potenciálem a nadáním. To platí mimo jiné i pro obor matematiky. Výuka matematiky by měla směřovat k tomu, aby všichni žáci co možná nejlépe rozvinuli svůj potenciál ve vztahu k matematice. Zde se tedy naskýtá otázka, jak dosáhnout takových cílů ve vyučovací praxi s ohledem na diverzitu žákyň a žáků. Jednou z takových cest jsou diverzifikační opatření. Už filozof Johann Friedrich Herbart (1776–1841) na toto téma poznamenal:

„Největší překážkou veškerého školního vzdělávání je rozdílnost hlav. Hlavní chybou všech školských zákonů je, že na to nedbají.“

Stejně jako všichni ostatní žáci navštěvují i nadaní žáci přibližně čtyři vyučovací hodiny matematiky týdně (Bavorsko). Tento čas je třeba optimálně využít. Podpora nad rámec výuky probíhá v ideálním případě jednou týdně a trvá například hodinu a půl, což speciálně v případě matematiky odpovídá polovině času, který žáci stráví ve vyučování. Nabídka podpory matematického nadání mimo běžnou dobu vyučování je žádoucí a nezbytná, avšak s ohledem na cílovou skupinu tj. žáky a vynaložený čas jsou tato opatření přeci jen pouhým doplňkem vedle běžné výuky matematiky, která má pro podporu matematického nadání žáků mnohem větší význam. V tomto smyslu by měl následující text poskytnout přehled o různých možnostech, jak pohlížet na běžnou výuku matematiky jako na zásadní místo, kde poskytnout nadaným žákům podporu, a jak ji odpovídajícím způsobem uspořádat.

Vnitřní diferenciace

Zásadním prvkem školní podpory nadaných jedinců je vnitřní diferenciace v rámci jednotlivých vyučovacích hodin. K ní jsou zapotřebí běžně realizovatelné strategie, které částečnou a pravidelnou diferencovanou práci ve výuce umožní. Otevřené, vnitřně diferencované formy vyučování umožní všem žákům zabývat se matematikou na své úrovni schopností, což může dále vést k vyučování na míru pro všechny.
Na základě individuálního pracovního tempa a tempa učení se tak mohou úlohy zadávat diferencovaně, žáci mohou dostávat určitá vodítka dle potřeby, aby se při vypracování úlohy mohli svobodně rozhodovat, nebo je možné používat otevřené otázky umožňující různou hloubku zpracování. Množství takových metodických konceptů pro otevřenou výuku vypracovali například Barzel a kol. (2018) či Leuders a Prediger (2016).

Úlohy, které umožňují výuku základních matematických pojmů méně zdatných žáků a současně nabízejí výzvy pro nadané jedince, musí být otevřené. Znamená to, že by měly vytvářet matematicky řešitelné situace, které umožňují různé možnosti zpracování a aktivity na různých úrovních. Kromě toho musí být takové úlohy atraktivní a snadno dostupné pro všechny žáky, aby i ti méně výkonní nalezli svůj přístup a zažili pocit úspěchu. Počáteční obtížnost by tedy neměla být příliš vysoká. Současně se musí ti výkonnější zabývat matematikou na základě svých schopností. Otevřené úlohy by měly lákat k prozkoumání všechny žáky a měly by jim poskytnout impulzy pro matematické myšlení (viz Ulm 2009, 100/6).

Ulm a Zehnder (2020) dodávají k otevřeným úlohám na podporu nadaných žáků, že by měly vykazovat jistou rozmanitost a hloubku. Matematická rozmanitost je zaručena, pokud matematický obsah, kterým se úloha zabývá, vykazuje určitý stupeň komplexnosti, který žákyním a žákům umožní zabývat se nějakou dobu daným tématem. Výraz hloubka úlohy znamená, že úloha přináší dostatečné výzvy i nadaným žákům a umožňuje jim dále rozvíjet své matematické kompetence.

Nad rámec běžného vyučování existuje široká doplňková nabídka na podporu nadaných žákyň a žáků. Často se dělí do dvou kategorií opatření: *akcelerace* a enrichment.

Enrichment (obohacení)

Kategorie *obohacení* je charakterizována nebo se vyznačuje zavedením podpůrných aktivit, při nichž se žáci zabývají kurikulem (vzdělávacím obsahem), které je nad rámec doporučeného kurikula v jejich aktuálním studijním ročníku. Mohou přitom zpracovávat doplňková témata (*horizontální obohacení*) nebo prohlubovat témata osnov (*vertikální obohacení*). Nabídka obohacení se může organizovat zcela odděleně od běžné výuky, například formou

- soutěží,
- nepovinné výuky,
- kroužků,
- doplňkových kurzů,
- prázdninových táborů,
- školních akademií,
- předčasného zahájení vysokoškolského studia.

Nabídka *obohacení* však může rovněž vycházet z běžné výuky. Na základě doplňkových materiálů například mohou nadaní žáci pojmy, které se ve vyučování prezentují názorně a které jsou didakticky redukovány, odhalovat s větší matematickou přesností. Tematicky by se nabízely například pojmy funkce, limity nebo vektoru. Kromě toho existují ve vyučování situace, u nichž se z pedagogicko-didaktických důvodů přesnost dokazování nebo jeho rozsahu snižuje (např. algebraická pravidla pro výpočty derivací, odvozování sinusové funkce, odvozování vzorce plochy a vzorců pro objem). Zde mohou nadaní žáci obdržet nové impulsy a důkazy či odvozování ve výuce zpřesňovat nebo doplňovat.

Při procvičování nebo volné práci či při suplování nebo volných hodinách se mohou zájemci a nadaní žáci zabývat impulsy zaměřenými na *obohacení* a také mohou své znalosti aktivně prohlubovat i doma.. Obsahové podněty pro možná témata lze nalézt v odborné literatuře, ve starších učebnicích nebo na stránkách matematických soutěží.

Další prohlubující podněty pro obohacování ve výuce matematiky či ve spojení s ní poskytují například Ulm a Zehnder (2020).

Akcelerace

Mezi další doplňkovou nabídku na podporu nadaných žáků patří *Akcelerace*. Akcelerace (lat. acceleratio = zrychlení) představuje opatření, která s sebou nesou zkrácení doby, kdy se žák zabývá určitým tématem, nebo doby pobytu ve škole, tedy zrychlení procesu výuky. Příkladem takových opatření je dřívější nástup žáků do školy, přeskočení některých ročníků nebo učení se určitému předmětu ve vyšším ročníku.

Grouping (seskupování)

Zvláštní pozici mezi podpůrnými opatřeními má *seskupování*, určitá forma segregace. Příkladem této formy podpory je zřizování speciálních tříd nebo škol pro mimořádně nadané děti a mládež.

3 Model otáčivých dveří v Německu

Název *model otáčivých dveří* je odvozen z anglického termínu *Revolving Door Model*, který vytvořil americky vědec zabývající se problematikou nadání Joseph R. Renzulli. Označuje možnost žáka opustit běžné vyučování, zabývat se paralelně s výukou dalšími tématy a pak se opět vrátit zpět. Jedná se tedy o organizační formu pro diferenciaci během běžné doby výuky.

Model otáčivých dveří se může využívat jak pro *akceleraci*, tak také pro *obohacení* a existuje zde velmi mnoho možností jeho realizace. Pokud je model otáčivých dveří nabídnut například pro situaci předčasného zahájení vysokoškolského studia, k bilingvní výuce nebo k částečné účasti ve vyučování ve vyšších ročnících, pak hranice mezi *akcelerací* a *obohacením* splývají. Jednak se tak obohacuje běžná nabídka výuky určená studijním plánem, jednak se zkracuje čas, po který se žákyně a žáci zabývají běžným výukovým obsahem. V příkladu, popsaném na konci této kapitoly, například připadala na žáky jedna pravidelná hodina matematiky na týden (*akcelerace*). Během této doby se mohli zabývat doplňkovým obsahem (*obohacení*).

Model otáčivých dveří, jak se realizuje v Německu, vychází, jak již bylo řečeno výše, z modelu *Triad Enrichment Model*, později také metaforicky nazývaného *Revolving Door Model*, který vytvořil Joseph R. Renzulli (viz Renzulli a kol. 2001). Jeho základním principem je, že nadané žákyně a žáci opouštějí běžnou výuku a na jiném místě se zabývají jinými tématy (viz Greiten 2016b, s. 32). Při zavádění tohoto konceptu v Německu vznikl v rámci profesního rozvoje škol, v souladu se stanovenými cíli příslušné školy, individuální, rozdílně specifikovaný model otáčivých dveří. O širokém pojetí stávajících realizací modelu otáčivých dveří na nejrůznějších typech škol v Německu podává přehled Greiten (2016a). Tato publikace poskytuje souhrn modelů otáčivých dveří realizovaných na jednotlivých školách, navrhuje vytvoření typu na základě dotazníků, zabývá se procesy rozvoje škol a ke slovu se formou zpráv o zkušenostech dostávají také zúčastnění žáci a vyučující.

4 Možnosti modelu otáčivých dveří v Německu

Škola musí na základě principu podpory nadaných dětí, zaměřené na jednotlivce podle Weiganda a kol. (2014), umožnit svých žákyním a žákům vzdělávání, které odpovídá jejich individuálnímu potenciálu. V tomto smyslu se na internetových stránkách Bavorského státního ministerstva školství (Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus) vyjádřil rovněž bývalý ministr školství Dr. Ludwig Spaenle:

> Podpora každého jednotlivého žáka je odpovědí na stoupající heterogenitu oblasti školství vzhledem k výchozím znalostem, původu a účasti na vzdělávání. Ve středu zájmu jsou přitom mladí lidé s celou svojí individualitou – a nikoli princip jednotné školy pro všechny. […] Pro každého totéž není řešením pro budoucnost žáků 21. století. (Bavorské státní ministerstvo školství, bez uvedení data)

Prosazení takto podporovaného, diferencovaného vyučování ve třídě není vždy snadné a může vést mimo jiné k přetěžování učitelů. Model otáčivých dveří zde může být velice užitečný. Využitím nových prostor, a tím vzniklých změn a rozšíření místa pro vzdělávání by se mohli učitelům uvolnit ruce.

Změny, které jsou u tohoto modelu nutné například ve formě prodloužení pracovní doby učitelů, kteří musí provádět dozor nad žáky, vést je a poskytovat jim pomoc, se musí zohlednit v rámci organizace školy. Zejména zpočátku vyžaduje takové opatření doprovod a instruktáž dětí, které s touto metodou ještě nemají zkušenosti. Je třeba se naučit strategii práce s otevřenými formáty úloh, větší volností při zpracování, komplexnějšími a obtížnějšími úlohami a vyhledáváním informací. Od školy se zde požaduje, aby v oblasti podpory nadání využila v souladu se svými cíli dostupné personální zdroje.

Kromě toho si lze představit, že se s nadanými žákyněmi a žáky dojedná průběh, místo a zadání úloh pro model otáčivých dveří, a ti si pak s velkou mírou samostatnosti a vlastní odpovědnosti, i bez neustálé přítomnosti vyučujícího budou rozšiřovat a prohlubovat své odborné kompetence a zájmy.

5 Zpráva o zkušenostech s podpůrným projektem zaměřeným na matematiku a modelem otáčivých dveří

Univerzita Bayreuth připravila v průběhu prvního pololetí školního ročníku 2018/19 ve spolupráci se dvěma gymnázii podpůrný program pro matematicky nadané a zainteresované žákyně a žáky. V rámci tohoto projektu mohli žáci a žákyně opustit jednu hodinu výuky matematiky za týden, aby se ve smyslu *obohacení* během této doby zabývali rozšiřujícími matematickými tématy.

Na tuto dobu jim školy poskytly volnou počítačovou učebnu, třídu resp. školní knihovnu. O žáky resp. mladistvé se během této doby staral pracovník univerzity, jehož úkolem bylo poskytovat pomoc a radu a poskytovat jim připravená matematická témata tak, aby se žákyně a žáci mohli zabývat zadanými tématy i tématy, která si sami vybrali.

Výběr dětí resp. mladistvých přitom vycházel – jak bylo uvedeno v kapitole F – z velmi otevřeného procesu, který v podstatě umožnil účast v projektu všem žákyním a žákům tak, aby případně nedošlo k vyloučení žákyň a žáků, jejichž nadání ještě nebylo rozpoznáno. Na začátku projektu proběhly na toto téma rozhovory s vedením školy a zúčastněnými učiteli. Probraly se zde mj. typické znaky mimořádně nadaných žákyň a žáků, jako jsou například výkony, kreativita, originální příspěvky k výuce, neotřelá řešení, zájem a fenomén rozvoje procesu nadání (viz kapitola E).

Na základě širokého chápání nadání probíhala nominace podobně jako u Käpnicka (1998). Učitelé navrhli vhodné adepty pro projekt. Už tyto úvahy vyučujících představují první hrubou diagnostiku, a jsou tak prvním stupněm při plánování vyučování podporujícího nadané žáky. Následně zúčastnění učitelé představili projekt ve třídách. Poté bylo možné na základě *strategie postupné identifikace na podporu mimořádně nadaných žákyň/žáků, resp. studentek/studentů gymnázií* vytvořené Hellerem (2000) nominovat žáky nebo navrhovat vhodné spolužáky (viz Heller 2000, s. 251–253). Je třeba zmínit, že nominace žáků byly téměř identické s nominacemi učitelů. Účastníci měli právo projekt kdykoli opět opustit. Zábrany ze strany žáků proto nebyly příliš velké.

Rodiče příslušných žákyň a žáků nakonec obdrželi dopis (viz obr. 1), ve kterém byli informováni o projektu a záměru jejich dítěte se zúčastnit. Ve zde popisovaném případě všichni rodiče s účastní svého dítěte souhlasili.

Projektu se nakonec v červnu roku 2018 zúčastnilo celkem 18 žáků ze sedmi tříd 6., 8., 9. a 10. ročníku, z toho sedm dívek a jedenáct chlapců. Dvě žákyně se zúčastnily teprve po osobní výzvě učitele, u ostatních účastníků se sebenominace shodovala s nominací učitele. Na konci projektu jeho podporu aktivně využívalo ještě 14 žákyň a žáků. Dvě žákyně se po dvouměsíční testovací fázi projektu (v červnu a v červenci 2018) v následujícím ročníku 2018/19 kvůli svému rozvrhu hodin nemohly dále účastnit, dvě další žákyně ukončily účast v projektu předčasně z osobního rozhodnutí.

Účastníci uzavřeli smlouvu mezi učiteli a žáky (viz obr. 2), která stanovuje práva a povinnosti všech smluvních partnerů. Patřilo sem například, že se svolením vyučujícího mohli jedno pololetí opouštět pevně vybranou vyučovací hodinu, možnost okamžitého ukončení účasti v projektu, vypracovávání domácích úkolů či dopracování nové látky z vyučovacích hodin, kterých se neúčastnili kvůli práci v projektu.

Nabídka na podporu zainteresovaných a nadaných žáků v oboru matematika

Vážení rodiče a zákonní zástupci,

vyučování by se mělo uskutečňovat v souladu s individuálními potřebami žáků a odpovídajícím způsobem podpořit jejich potenciál. Aby bylo možné toho dosáhnout, je mimo jiné nutné přiměřeným způsobem podpořit potenciální výkonné, nadané a zainteresované žáky.
Katedra matematiky a didaktiky na univerzitě v Bayreuthu se proto zabývá podporou matematicky mimořádně nadaných žáků.
V rámci tohoto tématu můžeme Vašemu dítěti nabídnout na první pololetí školního roku 2018/2019 tak zvaný *model otáčivých dveří*, jehož fungování stručně vysvětlíme na dalších řádcích.

Záměr

Vaše dítě má nabídku neúčastnit se některých hodin matematiky vyhrazených učiteli matematiky, aby se společně s dalšími žáky z různých tříd a ročníků, kteří tuto možnost rovněž přijali, nebo i samo věnovalo rozšiřujícím matematickým tématům.
Může se to týkat jedné vyučovací hodiny matematiky týdně a podle vybraného tématu trvat několik týdnů. Žáci obdrží návrhy témat, která vycházejí z běžných osnov a v žádném případě nepředjímají obsah budoucích osnov. Žáci však mohou přijít s vlastními návrhy na větší projektové téma.
Kromě toho je možné dohodnout s konkrétním učitelem matematiky příslušné třídy individuální posouzení práce Vašeho dítěte. Nabízejí se zde různé možnosti, například prezentace před třídou s verbálním ohodnocením nebo bez něj nebo odpadnutí nutnosti prokazovat znalosti z běžného vyučování nebo bez něj. Možná by byla také prezentace v rámci dne otevřených dveří či příspěvek v roční zprávě nebo školním časopisu.
Jako kontaktní osoby jsou k dispozici pan Köcher z univerzity Bayreuth a učitel matematiky Vašeho dítěte. Projektové hodiny povede pan Köcher.
Vaše dítě se tím však zaváže, že bude i nadále vypracovávat domácí úlohy z běžné výuky matematiky a případně si do sešitu dodělá zápisy k nové tematické oblasti.

Cíle

Projekt je velmi zajímavý jak pro výuku na gymnáziích, tak také pro výzkum v oblasti didaktiky matematiky. Mělo by se při něm zjišťovat, do jaké míry je možné podporovat matematicky nadané a zaujaté žáky formou modelu otáčivých dveří. Velice pozitivní zkušenosti již přicházejí z jiných spolkových zemí.
Součástí jsou rozhovory se zúčastněnými žáky a učiteli a případně i se zainteresovanými rodiči. Vašemu dítěti by se při něm kladly otázky týkající se dané nabídky, a mohlo by vyjádřit své vlastní zkušenosti z tohoto projektu. Až přijde čas, obdržíte další pokyny se žádostí o zaslání prohlášení o souhlasu.

Přísné důvěrné zacházení s osobními údaji

Dotazování probíhá v pseudonymní formě. Shromažďované údaje se považují za přísně důvěrné a používají se pouze k zodpovězení výše uvedených vědeckých otázek v rámci šetření.
Po vyhodnocení plánujeme zveřejnění výsledků, aniž by přitom bylo možné identifikovat zúčastněné osoby. Poté budou sebraná data, tzn. přepisy rozhovorů, zničeny.
Pokud se bude ve vědecké publikaci odkazovat na výsledky Vašeho dítěte, stane se tak formou, která neumožní identifikaci Vašeho dítěte.

Účast

Účast na této nabídce podpory pro nadané je dobrovolná. Ze strany žáků, učitelů a rodičů je možné ji kdykoli ukončit, a to i bez uvedení důvodů.

Pokud s účastní svého dítěte v projektu souhlasíte, mělo by Vaše dítě odevzdat podepsané přiložené prohlášení o souhlasu svému učiteli matematiky.

Chtěli bychom Vám na tomto místě výslovně poděkovat za podporu projektu a za Vaši důvěru. Výrazně nám tak pomůžete při zlepšování školního prostředí a při individuální podpoře Vašeho dítěte zcela v souladu s jeho zájmy a nadáním.

S díky a srdečnými pozdravy

Prohlášení o souhlasu

Informační dopis univerzity Bayreuth k provádění projektu na podporu matematicky zainteresovaných a nadaných žáků („model otáčivých dveří“) jsem / jsme vzali na vědomí.

Prohlašuji / prohlašujeme, že souhlasím / souhlasíme s účastí svého dítěte v tomto projektu.

Příjmení, jméno (dítě):

Třída:

Příjmení, jméno (zákonný zástupce):

Datum:

Podpis (zákonný zástupce):

Upozornění

Účast na šetření v rámci projektu (především rozhovory se žáky) je dobrovolná. V případě neúčasti nebude docházet k žádnému znevýhodnění. Již udělený souhlas lze kdykoli odvolat, a to bez udání důvodů. Lze to provést neformálně, písemně poštou, faxem nebo e-mailem. Kontaktní informace:

Tom Köcher
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universität Bayreuth
Universitätsstraße 30
95447 Bayreuth
Fax: (0921) 55 21 61
E-mail: tom.koecher@uni-bayreuth.de

Obr. 1: Dopis s informacemi pro rodiče

Dohoda o modelu otáčivých dveří v předmětu matematika

ve školním roce xxx

1. Žákyně/žák xxx obdrží po dohodě s příslušným vyučujícím povolení opustit hodinu matematiky dne xxx v x. hodině týdně. Učitel může jednotlivé termíny odmítnout.
2. během této hodiny se smí žákyně/ žák zabývat podle svých zájmů rozšiřujícím matematickým projektem nad rámec osnov, který schvaluje kompetentní vyučující.
3. Žák se zavazuje, že samostatně dožene obsah zameškané výuky, případně si doplní záznamy do sešitu (opisování cvičných úloh není nutné), a dále že vypracuje domácí úkoly.
4. Žákyně/žák se bude se svou učitelkou/učitelem matematiky setkávat vždy po x týdnech, aby diskutovali o pokroku v rámci projektu.
5. Žákyně/žák si povede sešit sdělení/přehledný list/, ve kterém budou uvedeny projektové hodiny a pokroky, a který bude pravidelně předkládán učiteli na základě individuální dohody.
6. Na konci pololetí (*nebo jiného období*) bude žákyně/žák třídě (*nebo jinému publiku*) prezentovat v přibližně x minutové stručné přednášce, jaké projekty/obsahy zpracovává a jaká řešení nalezl/a.
7. Odstoupení od této dohody může vedení školy, učitel, zákonný zástupce a/nebo žákyně/žák provést kdykoli, bez důsledků a bez uvedení důvodu.

XXX, dne ____________________

______________________________	______________________________
Žákyně/žák	Vyučující
______________________________	______________________________
Zákonný zástupce	Vedení školy

Obr. 2: Smlouva mezi učitelem a žákem

Jednotlivé body smlouvy mezi učitelem a žákem z obr. 2 nyní vysvětlíme podrobněji, abychom ukázali, jak může být taková organizace úspěšná, a jaké další varianty pro přizpůsobení podobného projektu na specifika určité školy existují.

Pro bod jedna na obr. 2 byla v konkrétním případě zvolena jedna vyučovací hodina týdně, během které mělo co nejvíce tříd paralelně hodinu matematiky. Projektu se tak mohlo účastnit co nejvíce zájemců.

V tomto bodě by však byla představitelná i zcela individuální dohoda mezi vyučujícím a žákyněmi resp. žáky tak, aby každý vyučující mohl dětem a mládeži poměrně spontánně – např. v hodinách věnovaných procvičování – nabídnout, aby opustili třídu a věnovali se rozšiřujícímu projektu v rámci modelu otáčivých dveří. Podle zralosti žákyň a žáků je samozřejmě třeba rozhodnout, zda jsou schopní se jasným zadáním zabývat na jiném místě Než se běžně učí. V době provozu školní knihovny by případně mohl zdejší dozor dohlížet také na žáky v režimu modelu otáčivých dveří. Další alternativou by bylo, že by vyučující matematiky získali na takový projekt určitý rozpočet hodin tak, aby mohli v určitou dobu v týdnu dohlížet na žáky a v případě potřeby jim mohli poskytnout také odbornou podporu.

Ke druhému body smlouvy mezi učitelem a žákem jsou na konci této kapitoly G představeny tři příklady tematických listů, které lze použít pro horizontální nebo vertikální *obohacení*. Kromě toho však v daném případě navrhovali témata pro tematické nebo pracovní listy samotní žáci.

Mnoho témat zpracovávaných v rámci projektu umožnilo zpracování na různých úrovních, a tím také i v různých ročnících. Žákyně a žáci si tak mohli sami zvolit, čím se chtějí zabývat. Podle typu tématu vznikaly krátké projekty na jednu až dvě hodiny – jako například algebrogramy, matematické triky s kartami, hrací teorie – nebo i větší časové intervaly, ve kterých se žáci zabývali tématy jako komplexní čísla, posloupnosti a řady, teorie čísel, matematika a umění nebo číselné soustavy. Pro projekt samotný byly připraveny vlastní úlohy, nezapomnělo se však ani na spoustu již existujících podpůrných materiálů.

Tři ukázkové úlohy představené na konci této kapitoly G přinesly následující zkušenosti: Právě algebrogramy bavily žákyně i žáky ze všech ročníků. Matematiku a umění si často vybíraly dívky. Téma MathCityMap si v tomto pololetním projektu nevybrali žádní žáci, přesto však nabízí velký potenciál pro trvalou a širokou práci s matematikou.

Žákyně a žáci samotní například navrhli a zpracovali témata jako komplexní čísla, Taylorova řada, kryptografie nebo zkoumání strategií vedoucích k vítězství u různých stolních a strategických her.

Další možná témata vycházející z osnov, která však nepředjímají žádné kurikulum a podněcují ke zkoumání a odhalování by byla například:

- proniknutí do čtvrté dimenze – hyperkostka
- Mandelbrotova množina
- ozubená kolečka ve výuce matematiky
- Diofantické rovnice s kmenovými zlomky
- ztráta jednoho rozměru – centrální perspektiva
- ...

K podpoře matematicky nadaných a zainteresovaných žákyň a žáků existuje řada sbírek úloh nad rámec osnov, které jsou však využitelné při výuce matematiky, knih vydaných právě za tímto účelem, tematických stránek v učebnicích a na internetu. Příkladem může být kniha *Quod erat knobelandum*, kterou na univerzitě v Řezně vytvořil Löh a kol. (2016), sbírka úloh univerzity Siegen vydaná v rámci „kurzu pro nadané žáky a žáky zajímající se o matematiku" na https://www.uni-siegen.de/fb6/fb6/schueler/begabte.html a internetové stránky Lehrer-Online s materiály na *Begabte fördern (Podpora nadaných): matematika* na https://www.lehrer-online.de/fokusthemen/dossier/do/begabte-foerdern-mathematik/.

V bodě tři smlouvy mezi učitelem a žákem se stanoví, jaké povinnosti musí dále splnit účastníci. V konkrétním případě bylo sjednáno, je nutné vždy vypracovat domácí úlohy, i když žák nebyl v příslušné vyučovací hodině kvůli modelu otáčivých dveří přítomen. Rovněž je třeba doplnit si záznamy v sešitu z běžné výuky. Pokud se však nevysvětlovalo žádné nové téma, pak není třeba opisovat úlohy k procvičení.

Vyučující uvádějí, že u žákyň a žáků nekonstatovaly žádné problémy při dalším sledování dění v běžné výuce. Navíc, vzhledem k dlouhodobému plánování školních aktivit s předstihem, nebylo ze strany učitelů zaznamenáno výraznější narušení, při plánovaní jejich další výuky..

Bod čtyři popisoval zabezpečení trvalé péče díky trvalé péči vědeckého pracovníka univerzity Bayreuth. V případě interní školní realizace projektu je zde třeba odsouhlasit, podle toho, zda bude o žákyně a žáky pečovat vyučující, do jaké míry bude nutné dokumentovat a prokazovat pokrok.

V bodech pět a šest na seznamu by se měla žákyním a žákům poskytnout možnost výběru. To, v jaké formě se budou jejich výsledky dokumentovat a prezentovat, a jakým způsobem proběhne jejich posouzení, lze individuálně projednat s účastníky projektu. Je možné si představit například stručný referát ve třídě, plakát na školní budovu či do třídy nebo vyhotovení „portfolia". U všech těchto verzí existuje také možnost provádět vyhodnocení po dohodě se všemi zúčastněnými. Toto známkování pak může například nahradit jiné ověření vědomostí nebo ho..

Prospěšným se ukázal poslední bod ve smlouvě mezi učitelem a žákem , protože ten dokázal snížit zábrany žákyň a žáků zúčastnit se tohoto nového projektu. Podle výpovědí žáků, během závěrečných rozhovorů, se někteří z nich zúčastnili ze zvědavosti a ze zájmu, protože v nejhorším případě by mohli kdykoli přestat, kdyby se jim projekt nelíbil, nebo by chtěli svou účast ukončit z jiných důvodů. Jak již bylo zmíněno výše, využily tuto možnost pouze dvě dívky a po třech týdnech svou účast v projektu ukončily, protože se podle vlastního tvrzení necítily dobře, když zameškávaly běžnou výuku.

Během podpůrných hodin byla účastníkům vyhrazena volba sociální formy práce v projektu, díky čemuž vznikaly skupinové i individuální práce. Díky kooperativní výukové formě práce propojující jednotlivé třídy i ročníky shromáždili žáci a žákyně zkušenosti, které požaduje Bardy (2013): „Konstruktivní zkušenosti u žáků spočívají v podnětném, objektivním zkoumání světa, které je brání proti strádání, ale také v uvědomění, že nejsou sami a že ostatní myslí, mluví a cítí se podobně." (Bardy 2013, s. 112).

K dosavadním výsledkům z vyhodnocení projektu lze konstatovat následující: Na základě předcházející pilotní fáze v délce dvou měsíců, která proběhla ve druhém pololetí školního roku 2017/2018 došlo k zaměření pozornosti na tři kategorie: organizaci, emoce a motivaci. S pomocí řízených rozhovorů a pozorování účastníků bylo zamýšleno zjistit, jak může takový projekt na bavorských gymnáziích fungovat za různých podmínek, dokonce i ve školách, bez spolupráce s univerzitou.

Žákyně a žáci se po ukončení pilotní fáze vyjádřili, že v průběhu projektu a při výuce matematicky pociťovali velkou radost. Uváděli však také, že se v běžných hodinách matematiky před zahájením pilotní fáze projektu často nudili. Z těchto důvodů bude vědecká studie zkoumat působení na emoce radosti a nudy při účasti delší než půl roku. Dále byli účastníci dotazování na jejich motivaci a motivační faktory na základě *teorie autodeterminace* podle Deciho a Ryana (zkušenosti s kompetencí, autonomií a sociální integrací).

První všeobecné výsledky mají již výzkumníci k dispozici. Jednak si žáci nezhoršili klasifikaci, ani nepovažovali projekt a s ním spojenou nutnost samostatného dodělávání úkolů z vyučování za velkou dodatečnou zátěž. Tento dojem posiluje pozitivní zpětná vazba během projektu i radost, se kterou se účastníci zabývali jednotlivými tématy.

Kromě toho pravidelná účast na rozšiřující výuce naznačuje, že nominace žáků na účast na projektu byly učiteli promyšlené. Z toho lze usuzovat, že v našem konkrétním případu, učitelky a učitelé dokázali své třídy dobře odhadnout a umí rozpoznat zainteresované a nadané žákyně a žáky.

Žákyně i žáci se kromě toho kladně vyjadřovali ke skutečnosti, že nabídku podpory bylo možné čerpat během vyučovací doby a nezasahovala do jejich volného času.

Přesné závěry k jednotlivým tématům přinese analýza rozhovorů formou kvalitativní analýzy obsahu a zohlednění poznatků z pozorování.

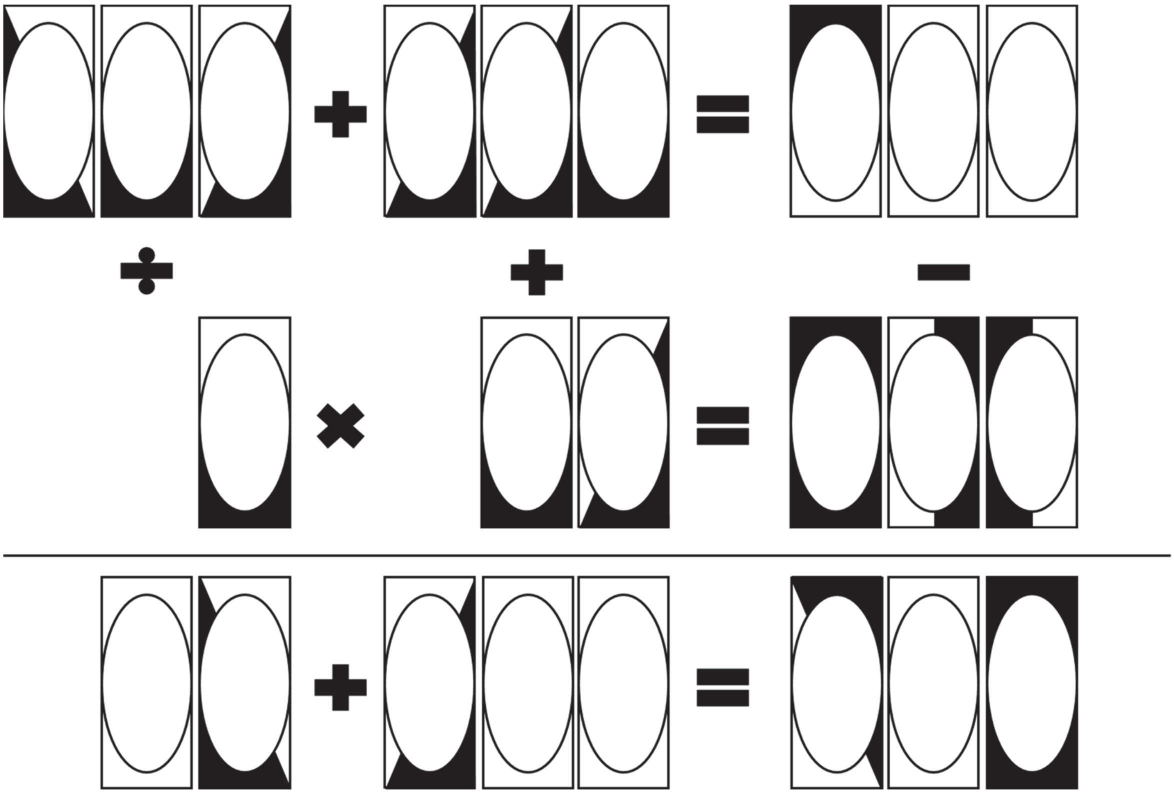
Na závěr lze ze zkušeností a vyjádřené pozitivní zpětné vazby vyvozovat, že nabídka ze strany univerzity Bayreuth byla žáky i školami přijata velice dobře. S ohledem na svobodu ve vzdělávání a na příležitost sledovat vlastní zájmy a objevovat nové věci byl ohlas vcelku kladný. Současně se u žáků nevyskytly žádné negativní doprovodné vedlejší účinky jako zhoršující se známky či přetížení a stres. Znamená to, že přenos odpovědnosti a s ním spojené, do jisté míry samoorganizované učení, může představovat smysluplnou cestu k podpoře četných odborných i mezioborových kompetencí. Můžeme se domnívat, že pomocí modelu je možné se přiblížit cíli školy, který spočívá v maximální možné podpoře individuálního rozvoje každého žáka, se proto lze, pomocí modelu otáčivých dveří, o něco přiblížit.

Algebrogramy

Za každým symbolem se skrývá číslice.

Najděte správná čísla tak, aby vznikly matematicky přesné výpočty?

Odůvodněte, že má tato hádanka pouze jediné řešení.



Vše je číslo

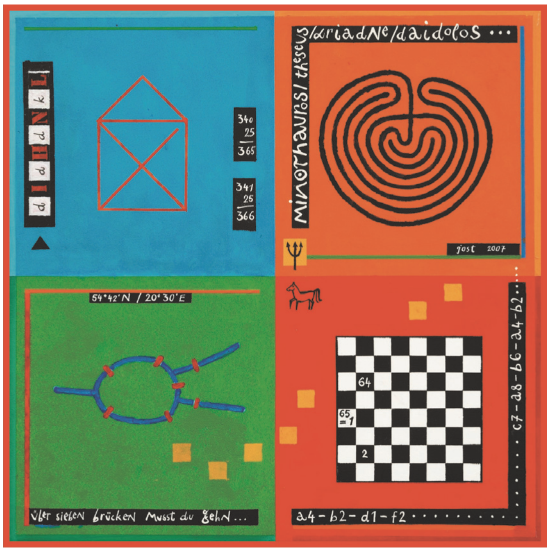
Švýcarský umělec Eugen Jost „schoval“ ve svých dílech spoustu matematiky.

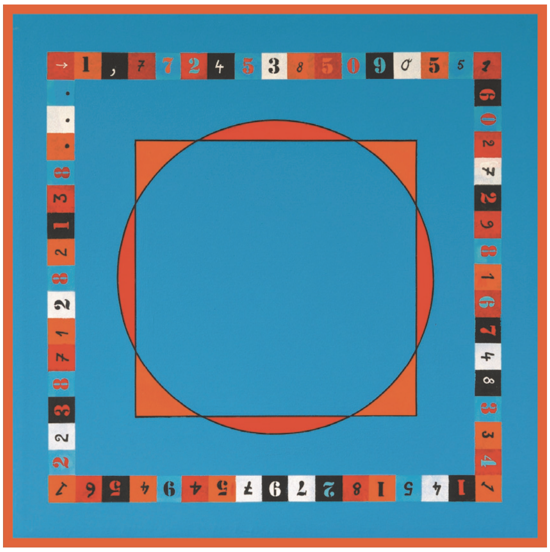
Vyberte si jeden z jeho obrazů, který vás zvlášť osloví, a vydejte na matematickou objevnou cestu!

Kde na obraze najdete matematiku?

Existuje na vašem obraze souvislost mezi různými odkazy na matematicku?

Zapište si, co byste vyprávěli, kdybyste někomu chtěli obraz popsat.





Matematická prohlídka školy formou aplikace

Pomocí aplikace MathCityMap vytvořte matematickou prohlídku školy!

Aplikace nabízí pro některá města něco jako „matematickou prohlídku“. Projděte si na internetových stránkách některé z těchto prohlídek, které již lidé se zájmem o matematiku vytvořili.

Mohli byste nyní vymyslet, jak vytvořit takovou prohlídku také pro areál své školy tak, aby třeba později mohly školní třídy se svým učitelem, a případně pod vaším vedením, tuto prohlídku absolvovat. Prohlídka by měla být pro všechny žákyně a žáky osvěžením již naučeného učiva z matematiky.

Utvořte si k tomu nejprve přehled o této platformě a úkolech, které je třeba splnit.
Než se pustíte do prozkoumávání areálu školy a rozvíjení úkolů, nezapomeňte na následující zásady:

- Úkoly musí být řešitelné přímo na místě a nikoli z prostředí třídy.
- Tipy k určitému úkolu musí být dobře promyšlené, aby sice řešitelům pomohly, ale nepředjímaly.

Důležité: Zohledněte vzdělávací programy a výchozí znalosti žákyň a žáků, pro které je prohlídka určena!

Seznam literatury

Bardy, Peter (2013): Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primar- und Sekundarstufe I + II).

Barzel, Bärbel; Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2018): Mathematik Methodik. Handbuch für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (Hg.) (o. J.): Leitprinzip: Individuelle Förderung statt Einheitsschule. https://www.km.bayern.de/eltern/meldung/176/leitprinzip-individuelle-foerderung-statt-einheitsschule.html.

Greiten, Silvia (Hg.) (2016a): Das Drehtürmodell in der schulischen Begabtenförderung. Studienergebnisse und Praxiseinblicke aus Nordrhein-Westfalen. *Karg Hefte: Beiträge zur Begabtenförderung und Begabungsforschung* (09). Frankfurt: Karg-Stiftung.

Greiten, Silvia (2016b): School Developments through the "Revolving Door Model" in Germany. A qualitative Empirical Study analyzing Selection Criteria and School Support Programs for Gifted Young Students in Germany. *JEHD* 5 (4), 24–35. DOI: 10.15640/jehd.v5n4a3.

Heller, Kurt A. (2000): Hochbegabungsdiagnose (Identifikation). In: Kurt A. Heller und Markus Dresel (Hg.): Begabungsdiagnostik in der Schul- und Erziehungsberatung. Bern: Huber, 241–258.

Käpnick, Friedhelm (1998): Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt am Main: Lang (Greifswalder Studien zur Erziehungswissenschaft, 5).

Leuders, Timo; Prediger, Susanne (2016): Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen (Sekundarstufe I + II).

Löh, Clara; Krauss, Stefan; Kilbertus, Niki (Hg.) (2016): Quod erat knobelandum. Themen, Aufgaben und Lösungen des Schülerzirkels Mathematik der Universität Regensburg. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Renzulli, Joseph S.; Reis, Sally M.; Stedtnitz, Ulrike (2001): Das schulische Enrichment Modell SEM. Aarau: Sauerländer.

Ulm, Volker (2009): Auch Begabte brauchen Förderung – Ansätze für das Fach Mathematik. Schriftenreihe zum Kolloquium Mathematik-Didaktik. Universität Eichstätt, 100/1–100/11.

Ulm, Volker; Zehnder, Moritz (2020): Mathematische Begabung in der Sekundarstufe. Modellierung, Diagnostik, Förderung. Heidelberg: Springer Spektrum (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II).

Weigand, Gabriele; Hackl, Armin; Müller-Oppliger, Victor; Schmid, Günter (2014): Personorientierte Begabungsförderung. Eine Einführung in Theorie und Praxis. Weinheim: Beltz. http://content-select.com/index.php?id=bib_view&ean=9783407293718.

Michala Plassová

H Model matematického nadání

1 Úvod

Rozpoznávání potenciálů jedince je stěžejní při stanovení vhodné metody rozvíjení jejich nadání. Na úvod si musíme alespoň krátce zmínit jistý terminologický problém, který představuje vlastní vymezení termínu nadání a dále pak potažmo pojmů *talent*, *potenciál* či *vloha*. Ve 30. letech minulého století byla podle Pfeiffera (2008) odborná veřejnost silně ovlivněna prací Lewise Termana (1925), který jakožto autor Stanford-Binetova inteligenčního testu, používal právě tento test jako nástroj pro identifikaci nadaných, přičemž nadaný byl v tomto pojetí ten, kdo dosáhl více než 130 inteligenčních bodů. Avšak je vhodné zdůraznit, že Stanford-Binetův test v té době odrážel především Spearmanův (1927) tzv. „g“ faktor inteligence. Taková inteligence se vnímá jako obecná, vrozená a z jisté míry dědičná. Je zde tedy patrné ochuzení o inteligenci specifickou, potažmo Cattellovu (1971) krystalickou, nemluvě o komplexních teoriích inteligence, jako je kupříkladu Gardnerova teorie mnohočetné inteligence (2018). Gardnerova teorie sice zahrnuje složky, které odpovídají faktoru „g“, nicméně jsou významně rozvíjeny právě zkušeností a tréninkem. Příkladem může být inteligence interpersonální nebo existenciální.

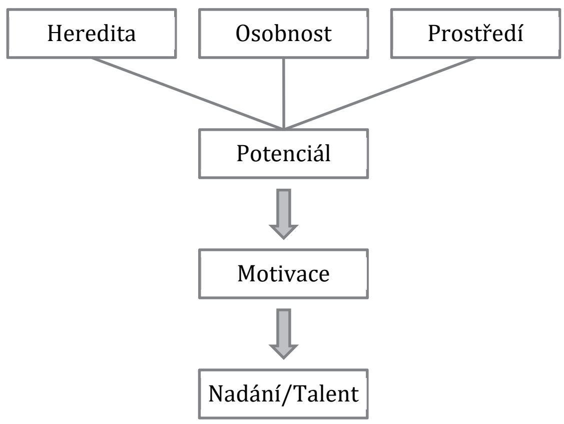
Komplexní definici nabídl Paul Witty (1958), tu si uvedeme po krátkém představení jeho práce. Ta zhruba do 80. let minulého století dominovala odborné literatuře v oblasti nadaných jedinců. Práce Paula Wittyho a Martina D. Jenkinse (Pfeiffer, 2008) se věnovaly roli kulturního prostředí, etnicity a rasy dětí mladšího školního věku ve vztahu k jejich naměřené inteligenci. Byl to přímo Witty, od koho pochází známá definice nadaného dítěte, ve které píše, že: „*nadané nebo talentované je to dítě, které soustavně vykazuje významné výkony v jakékoli hodnotné oblasti snažení*“ (1965; in Laznibatová, 2007, str. 63). Na tomto českém překladu Wittyho definice (viz předchozí) si můžeme názorně ukázat, že většina autorů vnímá pojmy „nadání“ a „talent“ jako synonyma. Laznibatová (2007) uvádí, že pokud je mezi těmito pojmy v literatuře rozlišováno, pak je *talent* považován za realizační úroveň *nadání*. Abychom byli důsledníi, pak si vezměme originál Wittyho deficine z roku 1958 (str. 62), kde se píše, že:

“*There are children whose outstanding* ***potentialities*** *in art, in writing, or in social* *leadership can be recognized largely by their performance. Hence, we have recommended that the definition of* ***giftedness*** *be expanded and that we consider any child gifted whose performance in a potentially* ***valuable*** *line of human activity is consistently remarkable*[1].“

V této práci se chceme věnovat i pojmu *potenciál*, který přináší do problematiky nadaných dětí jeden z elementárních mechanismů tohoto jevu. Tím je pak nadání jako výsledek dynamického procesu, ve kterém se geneticky a dědičně podmíněné vlohy utváří a formují v prostředí, ve kterém se nadaný nachází. Prostředím pak rozumíme nejen fyzické, ale i sociální, ekonomické, psychologické a duchovní. Zajímavé je, že Witty (viz výše) dokonce významově používá slova potenciál a nadání jako synonyma. S tím z naší pozice nesouhlasíme, jelikož v českém jazykovém kontextu vnímáme nadané jedince dle Laznibatové (tamtéž) jako osoby s již zjevně manifestujícími se schopnostmi ve vybrané oblasti realizace. Nadání také nevnímáme jako dokonavý (konečný) děj, ale celoživotní proces utváření a naplňování potenciálů jedince. Jinými slovy – i člověk s potenciálem kupříkladu pro matematiku nemusí být vždy nutně v této disciplíně úspěšný. Roli hraje celá řada vnitřních i vnějších faktorů, které si představíme později. V češtině existuje krásná pověst, která říká, že nouze naučila Dalibora housti. Dalibor byl český rytíř a šlechtic, který byl zajat a dle pověsti uvězněn na Pražském hradě. Z nouze se naučil ve věži hrát na housle, aby si vyžebral jídlo od prostého lidu, který jeho hudbě naslouchal (Jirásek, 2007). V následujícím textu rozhodně nemáme v úmyslu používat podobné motivační strategie k výuce matematiky, nicméně chceme poukázat, že svou roli v rozpoznávání potenciálu jedince hraje i situace, ve které se osoba nachází. Neúspěch v matematice v rámci vzdělávání vždy nepoukazuje na absenci potenciálu. V textu si tak klademe za cíle představit i takové indikátory, které nesouvisí s formálním hodnocením výkonu v matematice, ale spíše s osobnostními rysy, způsoby myšlení nebo druhy motivace.

2 Obecný model nadání

Zvážíme-li již nastíněné základní proměnné, které do procesu formování nadání vstupují, pak můžeme navrhnout jednoduchý obecný model (viz obrázek č. 1).



Obr. 1: Obecný model nadání

Při stanovování těchto proměnných jsme se řídili především současnou literaturou (např. Pfeiffer, 2008; Gardner, 2018). Nicméně bychom naši rešerši mohli začít již v období starověkého Řecka, jelikož koncept individuálních rozdílů můžeme najít kupříkladu v práci Plata (Anatasi, 1958) a pak u další řady autorů, jež se podíleli na široké škále předvědeckého uchopení nadání a lidského potenciálu (např. Locke, 1692; Galton, 1869; Galton, 1886; Galton 1892). Z vědeckých prací nás ovlivňují i klasické

[1] Do češtiny můžeme volně přeložit, jako *Jsou děti, jejichž výjimečný potenciál v umění, literatuře nebo ve schopnosti vést ostatní je natolik výrazný, že tento potenciál můžeme stabilně pozorovat v jejich výkonech. Z tohoto důvodu doporučujeme rozšířit definici nadání a za nadané dítě můžeme považovat každé dítě, které v lidském kontaktu vykazuje stabilně výjimečný potenciál.*

studie z minulého století (např. Horst, 1941; Bennett, Seashore, & Wesman, 1952; Cronbach, 1957; Becker, 1970; Dočkal, 1987). Ze současných prací poté pracujeme především s těmi, které se věnují nadání v oblasti matematiky (např. Dehaene, Molko, Cohen, et al., 2004; Geary, 2004; Vinkhuyzen, et al., 2009; Baron-Cohen, et al., 2014; Davis, et al., 2015).

Kupříkladu Singerová (et al., 2016) ve své studii poukazuje na význam **kreativity** nebo dokonce **smyslu pro humor**. Jednotlivých indikátorů nadání je celá řada. Námi navržený model je schématický a značně zjednodušený a má sloužit spíše pro základní orientaci. Rozšířený a komplexnější model poskytujeme v následující kapitole. Než se k němu dostaneme, upřesněme si vztahy mezi výše uvedenými proměnnými. **Heredita**, **osobnost** i **prostředí** se vzájemně prolínají a nelze je chápat jako oddělené jevy. Kupříkladu obecná inteligence je významně *hereditárně* (dědičně) ovlivněný *osobnostní* rys. Nicméně se tento rys nemusí v rámci ontogeneze projevit, nejsou-li mu zajištěné vhodné podmínky (*prostředí*). S takovým jevem se setkáváme u dětí se syndromem deprivace nebo dnes již tedy spíše pseudodeprivace.

Zásadní proměnnou je pak motivace k tomu potenciál formovat v nadání. Zaměříme-li se na motivaci ve škole, musíme zmínit studii HonKa a Aqui (2013), kteří zkoumali skladbu motivace u středoškolských studentů, kteří byli nadaní v matematice. Ta se dle autorů sestává především z konceptu self efficacy a výkonu. Self efficacy lze definovat jako důvěru ve vlastní schopnosti. Jde o termín z teorie Alberta Bandury (1997) a na jeho vývoji se podílí celá řada faktorů od podporující výchovy rodičů přes pozitivní školní i třídní klima. Například Bates, Lathamová a Kim (2011) poukazují na vliv sebedůvěry učitelů ve vlastní schopnost vyučovat matematiku a následného efektu na studenty. Autoři uvádí, že výkon studenta je výrazně ovlivněn pedagogickými kompetencemi učitele. Ve studii uvádí, že samotná self efficacy učitele má vliv na self efficacy studenta.

Projděme si nyní jednotlivé položky obecného modelu a přidejme specifika pro oblast matematiky.

3 Matematický model nadání

V roce 1980 vydal Národní koncil učitelů matematiky (NCTM) ve Spojených státech prohlášení, ve kterém uvedl, že potenciál pro matematické nadání je jeden z nejvýznamnějších společenských zdrojů, který je nezbytně nutný pro udržení technologického pokroku. Nicméně se aktuálně po celém světě potýkáme se signifikantním úpadkem v matematickém výkonu (OECD, 2016). Hodí se i zmínit, že aktuálně neexistuje žádná jednotná definice matematického nadání. Co vůbec matematické nadání je, se definuje různými způsoby. Singerová (et al., 2016) poskytuje stručný průřez základními přístupy, kdy uvádí, že Renzulli (1986) kupříkladu hovoří o třech základních složkách matematického nadání: nadprůměrný výkon, kreativita a trpělivost. Gagné (2003) se zaměřuje na osobnostní složky včetně temperamentu a motivace. Harrison (2003) zdůrazňuje u nadaných dětí především rozdíly v kognitivní, sociální a emocionální oblasti. Konkrétně pak nadprůměrnou rychlost učení se novým věcem, výbornou paměť, silnou koncentraci, schopnost porozumět komplexním konceptům, dobrou schopnost behaviorálního pozorování. Velmi zajímavý faktor matematického nadání podle autora představuje i smysl pro humor.

Nicméně je nutné uvést práci Walshové (et al., 2012), která provedla metaanalýzu studií v tomto tématu a vyvodila, že valná většina konceptuálních modelů je založena spíše na dobré víře, nežli na empiricky zkoumatelných datech. Takzvaný evidence-based, neboli na evidenci založený, přístup dle autorky představuje velmi náročnou výzvu. Vystává tak otázka, zdali konceptuální modely vůbec formulovat nebo se spíše zaměřovat na dobře formulovatelné a měřitelné faktory. V současné odborné literatuře se prediktivní hodnotě různých faktorů či proměnných v oblasti matematického nadání věnuje kupříkladu Peng a Lin (2019); Chow, Ekholm (2019); Gladstone (et al, 2018); Morosanova (et al., 2016); Mercaderová (2018), Gimbert (et al., 2019). Z našeho pohledu představuje významnou práci v této oblasti právě Peng a Lin (2019), kteří pomocí metaanalýzy 110 studií zkoumali korelaci mezi výkonem v matematice a pracovní pamětí a našli středně významnou korelaci o velikosti r=35,95% a o intervalu spolehlivosti [0,32; 0,37]. Z další analýzy bylo poukázáno na srovnatelnou asociaci mezi verbální pracovní pamětí, numerickou pracovní pamětí a vizuálně prostorovou (vizuo – spaciální) pracovní pamětí. Vrátíme-li se k našemu obecnému modelu, pak zastáváme názor, že konceptuální modely je třeba stavět na kvantifikovatelných a měřitelných faktorech, na druhou stranu je důležitý i kontext jednotlivých faktorů ve vztahu k psychologii a pedagogice. Bez komplexního pochopení zdrojů utváření, dynamiky a mechanismu funkce nepřináší strohé empiricky testovatelné faktory jasně srozumitelné využití do běžné pedagogické praxe.

Vysvětleme si nyní jednotlivé širší pojmy a to, co zahrnují v kontextu nadaných dětí v matematice.

Heredita

Hereditou rozumíme dědičnost nebo lépe řečeno vliv dědičnosti na matematické nadání. Heredita podle Warriera a Baron – Cohena (2016) koreluje s matematickým nadáním (MN) v rozmezí 0.2 až 0.9, což je samozřejmě příliš vágní údaj, avšak konkrétní číslo se liší studii od studie. Kupříkladu Cerda (et al., 2015) na vzorku (n = 634) čilských dětí na základní škole provedl Brzký numerační test (Early Numeracy Test) a následně vzorek sledoval po dobu čtyř let. Zjistil, že prediktivní hodnota zmíněného testu dosahuje zhruba 64%. Tento test je založený, jak už název napovídá, na numerozitě. Numerozita je evolučně vyvinutý mechanismus, se kterým se setkáváme již u kojenců (např. Starkey & Cooper, 1980; Feigenson et al., 2004; Izard et al., 2009) a umožňuje nám rudimentální aritmetické početní operace (Plassová, 2017). Nicméně i v testu Brzkých numeračních schopností narážíme na starý problém **nature vs. nurture**[2]. Zejména když vezmeme v potaz všechny proměnné, které v tomto testu mají vliv na konečný výsledek. Přímo touto problematikou se zabývá Mercaderová (et al., 2018; viz níže) a navazuje na již v textu uvedený problém rozvoje potenciálu ve vhodném prostředí.

Jednou ze složek heredity, kterou je potřeba zmínit, je pohlaví. Tomu byla věnována pozornost v mnoha studiích (např. Haworth et al., 2007; Markowitz et al., 2005; Vinkhuyzen et al., 2009 Lindberg et al., 2010; Stoet and Geary, 2013; Cerda et al., 2014). Warrier a Baron – Cohen (2016) uvádí, že ačkoli historicky bylo spojováno nadání v matematice s mužským pohlavím, moderní molekulární genetické studie nepřikládají vlivu pohlaví velký význam. Spíše vyzdvihují sociologické faktory.

[2] V překladu *příroda vs. výchova*

Exekutivní funkce

Exekutivní funkce v našem modelu řadíme mezi složku, kterou tvoří průnik heredity, osobnosti, prostředí a motivace. Mercaderová (et al., 2018) zdůrazňuje nutnost multifaktorového přístupu a zahrnutí zejména tří proměnných - *brzkých numeračních schopností, exekutivních funkcí* a *motivace*. Numerační schopnosti jsme již krátce shrnuli, podívejme se tak na *exekutivní funkce*. Jimi rozumíme funkce řídící, které regulují kognitivní (rozumové) funkce během řešení úloh. Těchto funkcí je samozřejmě celá řada, nicméně existují dvě, které jsou považovány za nejvýznamnější (Diamond, 2013) z hlediska jejich vlivu na matematické nadání. Jsou to *pracovní paměť* a *inhibice*.

Mercaderová (tamtéž) uvádí, že inhibice ukázala signifikantní vliv na matematické nadání během brzkých stádií vývoje dětí, ale výsledky nejsou vždy stabilní a existují i studie (např. Censabella and Noël, 2008), jež tento vztah nepotvrzují. Dle našeho názoru existují významné rozdíly v tom, jaký konstrukt inhibice studie používají (např. Censabella & Noël, 2004; Friedman & Miyake, 2004; Blair and Razza, 2007; Bull et al., 2008; Lan et al., 2011). Je potřeba brát v potaz, že zmíněné studie nepracují s inhibicí na poli neurální sítě a testy jsou prováděny pouze behaviorálně. Pengova (et al., 2015) metaanalýza pak ukázala korelaci mezi MN a pracovní pamětí, což jsme již uvedli v předchozím textu. Na tomto místě se však hodí rozšířit, že testovány nebyly pouze různé matematické domény (vizuálně prostorová pracovní paměť, numerická pracovní paměť a podobně), ale testovány byly i různé matematické schopnosti. Kupříkladu znalost čísel, počítání s celými čísly, počítání s jednocifernými nebo dvoucifernými čísly, zlomky, slovní úlohy, geometrie nebo algebra. Nejvíce korelovaly s pracovní pamětí slovní úlohy a sčítání jednociferných čísel (rs= 0,37 a 0,35). Méně pak korelovala geometrie. Lze tak vyvodit, že úlohy, ve kterých by děti v mladším školním věku měly projevovat matematické nadání, by měly mít tuto podobu. Zároveň není k odhalení potenciálu jedince důležitá pouze správnost odpovědí, ale také rychlost zpracování těchto úloh. Zajímavou studii uvedli Merain a Shahar (2018), kteří tvrdí, že reakční čas a pracovní paměť spolu významně korelují. Co nás zaujalo je pak zjištění autorů, že výrazně pomalé reakční časy korelují s nízkou inteligencí ještě lépe než rychlé reakční časy s vysokou inteligencí. Na druhou stranu rychlost reakčních časů může být ovlivněna nejen dynamikou pracovní paměti, ale emocionálními a sociálními faktory, které blíže rozvádíme v následující části.

Emocionální a sociální faktory

Dle Singerové (et al., 2016) patří mezi velmi problematické faktory asynchronní vývoj, problémy v socializaci a problémy s učením sebe sama. Asynchronním vývojem se má na mysli rozdílná rychlost vývoje v intelektové, emoční, sociální, ale i fyzické rovině. Nerovnoměrný vývoj zároveň navazuje na problémy v socializaci, kterým může nadané dítě čelit. Vysoce nadaní jedinci se mohou cítit odlišní od svých vrstevníků, což jim znesnadňuje zařazení do sociálních skupin. Nadto i okolí dítěte vnímá výjimečně nadané jedince jako odlišné, což se může transformovat v negativní reakce, vyčlenění, ale dokonce i v šikanu. Schneider (1987) našel negativní korelaci mezi inteligencí a interpersonálními vztahy s vrstevníky. Dalším problematickým faktorem je učení se ve školním prostředí. Singerová (tamtéž) poukazuje na tendenci nadaných dětí preferovat samostudium a dělání věcí vlastním způsobem. Grossová (1993) ve své studii zjistila, že kupříkladu práce ve skupině je pro nadaného jedince nezábavná, pokud dítě tvoří skupinu s vrstevníky. Naopak však nadané děti vnímají práci ve skupině jako obohacující a zábavnou, jsou-li skupiny tvořeny s rovnocennými partnery. Autorka doporučuje ve vzdělávání nadaných dětí umožňovat přeskakovat ročníky, aby se nadané děti neřadily do vzdělávacích skupin podle věku, ale podle svých schopností.

Motivace

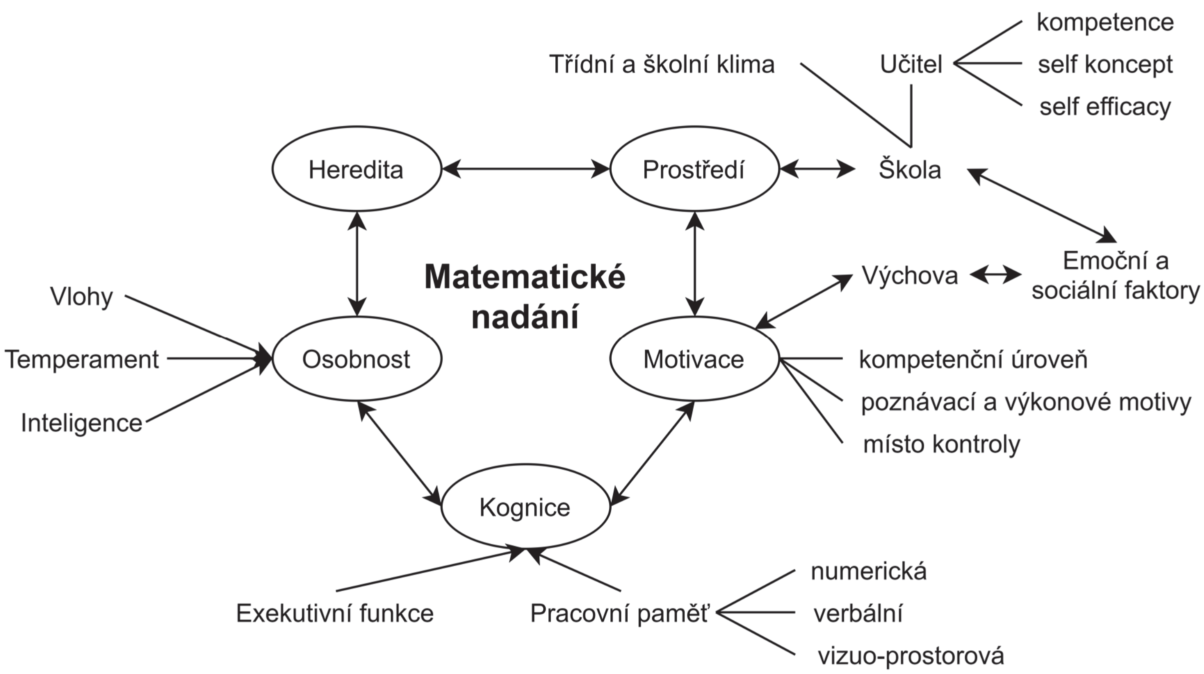
Dle Mercaderové (et al., 2018) je stěžejním motivačním faktorem kompetenční úroveň, kterou o sobě jedinec má, a to v tom smyslu, že lidé, jež věří ve svůj úspěch, vynakládají větší píli a úsilí a jsou vytrvalejší, než lidé, kteří své kompetence vnímají jako podprůměrné. To ve své podstatě popisoval již Julian B. Rotter ve své teorii *místa kontroly* (locus of control, LOC) (1966), když rozdělil tzv. atribuční styly na internalismus a externalismus. Kdy internalisté pro vysvětlení událostí hledají vnitřní příčiny a domnívají se, že jejich úspěch je metaforicky v jejich rukou. Externalisté potom příčiny úspěchu a neúspěchu připisují vnějším příčinám a obecně jim chybí pocit kontroly nad vlastním životem. V již klasické studii Rodina a Langera (1977) byl internalismus označen jako výhodnější atribuční postoj, jelikož internalisté bývají zdravější, spokojenější a úspěšnější.

Leikinová (et al., 2017) uvádí, že jedním z nejtypičtějších rysů matematicky nadaných jedinců je intrinsická (vnitřní) motivace. Podle Ryana a Deciho (2000) a jejich sebedeterminační teorie potřebují jedinci s potenciálem pro rozvinutí nadání především intenci, perzistenci, vedení a výdrž. Zároveň je potřeba poskytnou stabilitu, psychosociální podporu a uspokojit jedincovy poznávací potřeby optimálně náročnými úlohami.

Závěr

Shrneme-li tyto poznatky graficky, poté dostaneme základní model matematického nadání (viz obrázek č. 2).

Jeho položky je potřeba vnímat v jejich komplexnosti a nastíněné vztahy jsou spíše ilustrativní a nereflektují skutečnou váhu jednotlivých položek. Kupříkladu i dítě s mírně neglektivní výchovou může v přítomnosti schopného učitele manifestovat matematické nadání. Zvýrazněné části představují základní koncepty, se kterými se musíme v této oblasti seznámit. Nejvýznamnějším vztahem stále zůstává heredita a prostředí. Nicméně mezi identifikátory potenciálu pro matematické nadání může patřit již zmíněný smysl pro humor, zvědavost, případná sociální neobratnost v mladším školním věku nebo kreativita myšlení. Mezi spolehlivé faktory, jak potenciál objevit, řadíme úlohy využívající různé složky kognitivních funkcí, avšak nejslibnějším indikátorem se jeví pracovní paměť. V rámci uvedených výzkumů se ukazují jako relativně spolehlivou metodou rozlišování potenciálu pro matematiku slovní úlohy a jiné úlohy vyžadující kreativní nebo neobvyklé řešení.



Obr. 2 Model matematického nadání

Literatura

Anastasi, A. (1958). Differential psychology: Individual and group differences in behavior. New York: Macmillan, 3.

Bandura, A. (1997). Self-efficacy: The exercise of control. New York: Freeman.

Baron-Cohen S., Murphy L, Chakrabarti B, et al. (2014). A genome wide association study of mathematical ability reveals an association at chromosome 3q29, a locus associated with autism and learning difficulties: a preliminary study. PloS One 9 (5).

Bates, A., Lathampvá, N., Kim, A. (2011). Linking Preservice Teachers' Mathematics Self-Efficacy and Mathematics Teaching Efficacy to Their Mathematical Performance. School Science & Mathematics, 111, 7, 325-333.

Becker, J. P. (1970). Research in mathematics education: The role of theory and of aptitude-treatment-interaction. Journal for Research in Mathematics Education, 1, 19-28.

Bennett, G. K., Seashore, H. G., Wesman, A. G. (1952). A manual for the Differential Aptitude Tests. New York: The Psychological Corp.

Cattell, R. (1971). Abilities: their structure, growth, and action. (xxii, 583 p.) Boston: Houghton Mifflin.

Censabella, S., Noël, M. P. (2008): The inhibition capacities of children with mathematical disabilities. Child Neuropsychol. 14, 1–20.

Cerda, G., Pérez, C., Navarro, J. I., Aguilar, M., Casas, J. A., Aragón, E. (2015). Explanatory model of emotional-cognitive variables in school mathematics performance: a longitudinal study in primary school. Front. Psychol. 6.

Dočkal, V., Musil, M., Palkovič, V., Miklová, M. (1987). Psychológia nadania. Bratislava, SPN.

Galton, F. (1869). Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 1st ed. London: Macmillan.

Galton, F. (1886). Regression towards mediocrity in hereditary stature. Journal of the Anthropological Institute 15: 246–63.

Galton, F. (1892). Hereditary genius: An inquiry into its laws and consequences. 2nd ed. London: Macmillan.

Gardner, H. (2018). Dimenze myšlení. Praha: Portál.

Gardner, H. (1983). Frames of mind: The theory of multiple intelligences. New York: Basic Books.

Grossová, M. U. M. (1993). Exceptionally gifted children. London: Routledge.

Honk, E., Aqui, Y. (2004). Cognitive and Motivational Characteristics of Adolescents Gifted in Mathematics: Comparisons Among Students With Different Types of Giftedness. Gifted Child Quarterly 48(3):191-201.

Laznibatová, J. (2007). Nadané dieťa: jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie. 3. Ausgabe. Bratislava: Iris. 394 Seiten.

Leikinová R., Leikin M., Paz-Baruch N., Waisman I., Lev M. (2017). On the four types of characteristics of super mathematically gifted students. High Ability Stud. 28 107–125.

Locke, J. (1693). Some thoughts concerning education. London: Printed for A. and J. Churchill.

Meiran, N., Shahar, N. (2018). Working memory involvement in reaction time and its contribution to fluid intelligence: An examination of individual differences in reaction-time distribution. Intelligence, 69, Pages 176-185.

Mercader, J., Miranda, A., Presentación, M. J., Siegenthaler, R., Rosel, J., F. (2018). Contributions of Motivation, Early Numeracy Skills, and Executive Functioning to Mathematical Performance. A Longitudinal Study. Front Psychol.; 8: 2375.

Peng, P., Namkung, J., Barnes, M., Sun, C. (2015). A meta-analysis of mathematics and working memory: moderating effects of working memory domain, type of mathematics skill, and sample characteristics. J. Educ. Psychol. 108, 455–473.

Pfeiffer, S. I. (Ed.) (2008). Handbook of giftedness in children: Psychoeducational theory, research, and best practices. New York, NY, US: Springer Science + Business Media.

Renzulli, J. S. (1986). The three-ring conception of giftedness: A developmental model for creative productivity. In R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), Conceptions of giftedness, 53–92. Cambridge, UK: Cambridge UP.

Rodin, J., Langer, E. (1977). Long-Term Effects of a Control-Relevant Intervention With the Institutionalized Aged. Journal of Personality and Social Psychology [online], 35, 12.

Rotter, J. B. (1966). Generalized expectancies for internal versus external control of reinforcement. Psychological Monographs: General and Applied. 80: 1–28.

Ryan R. M., Deci E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. Am. Psychol. 55 68–78.

Terman, L. M. (1925). Mental and Physical Traits of a Thousand Gifted Children. Genetic Studies of Genius. Volume 1, Stanford University Press, Stanford.

Schneider, B. (1987). Child Study Centre, School of Psychology University of Ottawa. Ottawa, Canada.

Spearman, C. (1927). The abilities of man: their nature and measurement. New York: Macmillan.

Impressum

Jak rozpoznat a podpořit matematicky nadané žáky a žákyně
Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler erkennen und fördern

Bayreuth, 2020

Elektronische Fassung unter:
http://epub.uni-bayreuth.de

Herausgeber

Tom Köcher, Volker Ulm
Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universitätsstraße 30
95440 Bayreuth

www.dmi.uni-bayreuth.de

www.mathematische-begabung.de

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für regionale Entwicklung
Evropský fond pro regionální rozvoj

ZIEL ETZ
CÍL EÚS

Ziel ETZ | Cíl EÚS
Freistaat Bayern – Tschechische Republik
Česká republika – Svobodný stát Bavorsko
2014 – 2020 (INTERREG V)

Europäische Union
Evropská unie
Europäischer Fonds für
regionale Entwicklung
Evropský fond pro
regionální rozvoj

Ziel ETZ | Cíl EÚS
Freistaat Bayern –
Tschechische Republik
Česká republika –
Svobodný stát Bavorsko
2014 – 2020 (INTERREG V)