Algebraische Approximation von Kählermannigfaltigkeiten

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

Florian Schrack

geboren am 22. Dezember 1982 in Bayreuth

1. Gutachter: Prof. Dr. Thomas Peternell
2. Gutachter: Prof. Dr. Frédéric Campana

Tag der Einreichung: 24. 09. 2010
Tag des Kolloquiums: 17. 12. 2010

Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Forschergruppe 790 *Classification of Algebraic Surfaces and Compact Complex Manifolds* unterstützt.

Ich danke meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Thomas Peternell für die interessante Themenstellung und vor allem für die zahlreichen Gespräche, in denen er sich immer Zeit nahm, alle auftretenden Probleme ausführlich mit mir zu diskutieren.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Gegenstand der komplex-analytischen Geometrie ist das Studium (kompakter) komplexer Mannigfaltigkeiten. Eine wichtige Klasse solcher Mannigfaltigkeiten bilden die sogenannten *projektiven* Mannigfaltigkeiten, d. h. die kompakten Untermannigfaltigkeiten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}_N$. Die Bedeutung der projektiven Mannigfaltigkeiten rührt daher, dass sie einen wichtigen Verknüpfungspunkt zwischen komplex-analytischer und komplex-algebraischer Geometrie liefern: Nach dem Satz von Chow ist jede projektive Mannigfaltigkeit im $\mathbb{P}_N$ eine algebraische Varietät, d. h. das Nullstellengebilde einer endlichen Menge von homogenen Polynomen in $N + 1$ Variablen. Dieses Resultat erlaubt zum einen die Anwendung algebraischer Methoden zur Untersuchung von projektiven Mannigfaltigkeiten, ermöglicht zum anderen aber auch den Einsatz von analytischen Methoden zur Lösung gewisser Probleme in der algebraischen Geometrie.

Eine differentialgeometrische Verallgemeinerung der projektiven Mannigfaltigkeiten sind die sogenannten *Kählermannigfaltigkeiten*. Die kompakten Kählermannigfaltigkeiten bilden eine Oberklasse der projektiven Mannigfaltigkeiten, die sich unter gewissen analytischen Operationen besser verhält als die Klasse der projektiven Mannigfaltigkeiten. So sind etwa kleine Deformationen von Kählermannigfaltigkeiten wieder Kählermannigfaltigkeiten, während die Projektivität bereits bei kleinen Deformationen verloren gehen kann. Dennoch gelten viele Eigenschaften projektiver Mannigfaltigkeiten auch für kompakte Kählermannigfaltigkeiten, wie etwa die Existenz einer Hodgezerlegung für die komplexe Kohomologie.

Eine in weiten Teilen noch ungeklärte Frage ist, „wie weit“ kompakte Kählermannigfaltigkeiten von projektiven Mannigfaltigkeiten „entfernt“ sind. Welche Kählermannigfaltigkeiten können beispielsweise in projektive Mannigfaltigkeiten deformiert werden?

Problemstellung

In diesem Zusammenhang untersucht die vorliegenden Arbeit den Begriff der *algebraischen Approximierbarkeit*. Dabei heißt eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit X algebraisch approximierbar, wenn eine Familie von Deformationen $(\mathcal{X}_t)_{t \in \Delta}$ derart existiert, dass $\mathcal{X}_0 \cong X$ ist und es eine Folge $(t_k) \subset \Delta$ ($\Delta \subset \mathbb{C}^N$ die Einheitskreisscheibe) mit $t_k \to 0$ gibt, so dass alle $\mathcal{X}_{t_k}$ projektiv sind.

Obwohl der Begriff der algebraischen Approximierbarkeit auf den ersten Blick sehr natürlich anmutet, ist es im Allgemeinen sehr schwer, für eine gegebene komplexe Mannigfaltigkeit zu entscheiden, ob diese algebraisch approximierbar ist.

Die ersten Approximierbarkeitsresultate für Flächen (d. h. komplexe Mannigfaltigkeiten von Dimension 2) gehen auf K. Kodaira zurück: In [Kod63b] konnte er zeigen, dass jede kompakte Kählerfläche eine projektive Deformation (die aber eventuell im Deformationsraum weit von der Ausgangsfläche entfernt liegt) besitzt. In der Tat lässt sich mit seinen Methoden aber auch die algebraische Approximierbarkeit jeder kompakten Kählerfläche beweisen (vgl. z. B. [FM94]).

Kodairas Beweis funktioniert unter Zuhilfenahme der Flächenklassifikationstheorie: In jeder auftretenden Klasse von Kählerflächen muss die algebraische Approximierbarkeit mit jeweils speziell an die Situation angepassten Methoden separat gezeigt werden. Erst kürzlich hat N. Buchdahl in [Buc06] und [Buc08] einen neuen Beweis für die Approximierbarkeit von Kählerflächen vorgestellt, der nur sehr grobe Flächenklassifikationsresultate verwendet.

Da die Klassifikationstheorie höherdimensionaler Kählermannigfaltigkeiten noch weit weniger entwickelt ist als die Flächenklassifikationstheorie, und eine Verallgemeinerung von Buchdahls Beweis für höhere Dimensionen nicht ohne Weiteres möglich scheint, gibt es derzeit kaum erfolgversprechende Methoden, die algebraische Approximierbarkeit größerer Klassen höherdimensionaler kompakter Kählermannigfaltigkeiten zu zeigen.

Dennoch wurde lange Zeit vermutet, dass jede kompakte Kählermannigfaltigkeit algebraisch approximierbar ist. Diese Vermutung wurde allerdings von C. Voisin in [Voi04] widerlegt: In jeder Dimension $\geqslant 4$ existieren kompakte Kählermannigfaltigkeiten, die nicht algebraisch approximierbar sind. In Dimension 3 hingegen bleibt die Situation weiterhin offen.

Resultate

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die algebraische Approximierbarkeit gewisser Klassen von Kählerdreifaltigkeiten zu untersuchen.

In Kapitel 1 wird der Begriff der algebraischen Approximierbarkeit zunächst von einem allgemeinen Standpunkt aus betrachtet. So wird etwa die Methode der Variation von Hodgestrukturen eingeführt. Anschließend werden die bekannten Resultate für Flächen und höherdimensionale Mannigfaltigkeiten zitiert, wobei das Resultat für glatte Kählerflächen auf gewisse singuläre Flächen ausgedehnt wird.

In Kapitel 2 werden gewisse Funktorialitätsfragen im Zusammenhang mit algebraischer Approximierbarkeit untersucht. Es geht dabei darum, für eine gegebene holomorphe Abbildung $f\colon X \to Y$ Zusammenhänge zwischen der algebraischen Approximierbarkeit von X und der algebraischen Approximierbarkeit von Y zu finden. Zur Untersuchung dieser Problemstellung werden zunächst einige Projektivitätskriterien für Quell- bzw. Bildräume holomorpher Abbildungen diskutiert. Anschließend werden die wesentlichen Aussagen von Horikawas Deformationstheorie von Abbildungen zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten bzw. Rans Verallgemeinerung für komplexe Räume zitiert. Die allgemeine Theorie wird schließlich verwendet, um das Funktorialitätsproblem am Beispiel einiger spezieller Typen von Abbildungen zu erörtern. So werden Aussagen über Aufblasungen, endliche Abbildungen, Surjektionen, Einbettungen, Morikontraktionen und Flips gewonnen.

Glaubt man an das Moriprogramm für Kählermannigfaltigkeiten, so ist jede kompakte Kählerdreifaltigkeit X bimeromorph zu einem kompakten Kählerraum $\tilde{X}$ derart, dass entweder $K_{\tilde{X}}$ nef ist oder eine Morifaserung $\varphi\colon \tilde{X} \to Y$ existiert, so dass φ entweder ein Konikbündel über einer Fläche oder eine Del-Pezzo-Faserung über einer Kurve ist. Ist X nichtalgebraisch, so kann der letzte Fall nicht auftreten.

In Kapitel 3 wird deshalb die allgemeine Theorie von Konikbündeln entwickelt, vor allem im Hinblick auf deformationstheoretische Aussagen.

Kapitel 4 behandelt den für die vorliegende Arbeit interessanten Fall von Konikbündeln über Flächen. Hier geht es vor allem darum, die Geometrie des Diskriminantenorts von Konikbündeln mit relativer Picardzahl 1 zu verstehen. Dies sind gerade die aus der Moritheorie stammenden Konikbündel. Für solche Konikbündel können Chernklassenungleichungen gezeigt werden, die den Beweis eines der Hauptresultate dieser Arbeit ermöglichen:

Satz (4.14, 4.15)**.** *Sei $f\colon X \to S$ ein Konikbündel über einer nichtalgebraischen kompakten Kählerfläche S mit $\rho(X) = \rho(S) + 1$. Dann ist*

$$H^1(T_X) \neq 0,$$

d. h. es gibt infinitesimale Deformationen von X. Es existiert sogar eine positivdimensionale Familie von Deformationen von X, außer evtl. in den folgenden Fällen:

(i) S ist ein Torus und $E := f_*(K^*_{X/S})$ ist projektiv flach, d. h. $\mathbb{P}(E)$ ist durch eine Darstellung $\pi_1(S) \to \mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ gegeben; des Weiteren ist X nicht von der Form $\mathbb{P}(V)$ für ein Rang-2-Bündel V auf S.

(ii) S *ist minimal eigentlich elliptisch* ($\kappa(S) = 1$) *und alle singulären Fasern der eindeutig bestimmten elliptischen Faserung* $r\colon S \to B$ *sind multiple elliptische Kurven.*

Kapitel 5 zitiert in komprimierter Form die für die vorliegende Arbeit relevanten Resultate aus der Deformationstheorie von elliptischen Faserungen auf Flächen.

In Kapitel 6 wird die Fortsetzbarkeit von Vektorbündeln über K3-Flächen und Tori auf gewisse Familien von Deformationen untersucht. Durch genaues Studium der Periodenabbildung werden verschiedene Fortsetzungssätze bewiesen, die letztlich die algebraische Approximierbarkeit projektivierter Rang-2-Bündel über K3-Flächen und Tori implizieren.

Kapitel 7 verwendet die Resultate der vorangehenden Kapitel, um einige weitere Approximierbarkeitssätze zu formulieren. Zunächst liefert das Studium von Aufblasungen von Flächen folgende Verallgemeinerung der Ergebnisse von Kapitel 6:

Satz (7.2). *Sei* S *eine kompakte Kählerfläche mit* $\kappa(S) = 0$ *und* V *ein Rang-2-Bündel auf* S*. Dann ist* $\mathbb{P}(V)$ *algebraisch approximierbar.*

Schließlich werden unter Verwendung der zuvor entwickelten Theorie noch folgende Sätze über die Approximierbarkeit von Konikbündeln bewiesen:

Satz (7.3). *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Kählerfläche* S *mit* $a(S) = 1$, $E := f_*(K^*_{X/S})$ *und* $r\colon S \to C$ *die elliptische Faserung von* S*. Falls für eine allgemeine Faser* F *von* r

$$E|_F \cong \mathcal{O}_F^{\oplus 3}$$

ist, so ist X *algebraisch approximierbar.*

Satz (7.5). *Sei* S *eine K3-Fläche,* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel und* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Falls Geradenbündel* $L_1, L_2, L_3 \in \operatorname{Pic} S$ *existieren mit*

$$E \cong L_1 \oplus L_2 \oplus L_3,$$

dann ist X *algebraisch approximierbar.*

1 Allgemeines

1.1 Begriffe und Konventionen

In der gesamten Arbeit bewegen wir uns meist innerhalb der Kategorie der komplexen Räume; mit *Abbildung* bzw. *Morphismus* ist deshalb im Folgenden, sofern nicht explizit anders spezifiziert, stets ein Morphismus in dieser Kategorie, d. h. eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, gemeint.

Unter einer *komplexen Varietät* verstehen wir einen irreduziblen und reduzierten komplexen Raum, unter einer *komplexen Mannigfaltigkeit* eine glatte komplexe Varietät. Als *Fläche* bezeichnen wir stets eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 2.

Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $y \in Y$ ein Punkt bzw. $W \subset Y$ ein Unterraum. Wenn keine Verwechslungsgefahr bezüglich der gemeinten Abbildung besteht, verwenden wir oft die abkürzenden Schreibweisen $X_y := f^{-1}(\{y\})$ für die *Faser* von y bzw. $X_W := f^{-1}(W)$ für das *Urbild* von W unter f.

Sei X ein kompakter komplexer Raum. Unter einer *Deformation von* X verstehen wir eine eigentliche und flache Abbildung $\pi\colon \mathcal{X} \to T$ von einem komplexen Raum $\mathcal{X}$ in einen komplexen Raum T mit ausgezeichnetem Punkt $0 \in T$ derart, dass $\mathcal{X}_0 \cong X$ ist. Da wir nur an „kleinen" Deformationen interessiert sind, werden wir T stets als Keim $(T, 0)$ auffassen, d. h. wir werden oft stillschweigend annehmen, dass T bereits durch eine hinreichend kleine Umgebung $U \subset T$ von 0 und π durch die Einschränkung $\pi|_{\mathcal{X}_U}\colon \mathcal{X}_U \to U$ ersetzt wurde.

Die allermeisten der im Folgenden auftretenden Deformationen werden glatte Basen T besitzen; es ist dann $(T, 0) \cong (\Delta, 0)$ als Keim, wobei Δ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}^N$ ist ($N = \dim T$).

Wir formulieren nun die zentrale Definition dieser Arbeit:

Definition 1.1 (Algebraische Approximation)**.** Sei X ein kompakter komplexer Raum. Eine Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ von $X = \mathcal{X}_0$ über der Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ heißt *algebraische Approximation von* X, wenn es eine Folge $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Delta$ derart gibt, dass $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$ ist und $\mathcal{X}_{t_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ projektiv ist. X heißt *algebraisch approximierbar,* wenn eine algebraische Approximation von X

existiert.

1.2 Variation von Hodgestrukturen

Das Studium von Deformationen von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten ist erst dann interessant, wenn man wirklich an der Veränderung der *komplexen* Struktur des deformierten Raumes interessiert ist; die zugrundeliegende C^∞-Struktur ändert sich bei Deformationen nämlich nicht:

Satz 1.2 (Ehresmann). *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine eigentliche Submersion von* C^∞*-Mannigfaltigkeiten. Dann ist* f *lokal trivial, d. h. jeder Punkt* $y \in Y$ *besitzt eine Umgebung* $U \subset Y$ *derart, dass ein* C^∞*-Diffeomorphismus* $\Phi\colon f^{-1}(U) \to f^{-1}(y) \times U$ *existiert mit* $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi = f|_{f^{-1}(U)}$.

Satz 1.2 liefert beispielsweise sofort topologische Einschränkungen für algebraisch approximierbare Mannigfaltigkeiten:

Proposition 1.3. *Sei* X *eine algebraisch approximierbare kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist* X *diffeomorph (also insbesondere auch homöomorph) zu einer projektiven Mannigfaltigkeit.*

Sei nun X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ die Einheitskreisscheibe und $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ eine Deformation von $X = \mathcal{X}_0$. Dann haben wir nach Satz 1.2 einen C^∞-Diffeomorphismus $\Phi\colon \mathcal{X} \to X \times \Delta$ über Δ (wobei Δ wie immer als Keim $(\Delta, 0)$ aufgefasst wird). Dieser induziert für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $t \in \Delta$ einen Isomorphismus

$$\varphi_t^k\colon H^k(\mathcal{X}_t, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^k(X, \mathbb{C}).$$

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit ist. Dann sind die Fasern $\mathcal{X}_t$ für alle benachbarten $t \in \Delta$ ebenfalls Kähler und wir bekommen eine Hodgezerlegung

$$H^k(\mathcal{X}_t, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(\mathcal{X}_t).$$

Ein klassisches Ergebnis aus der Deformationstheorie besagt, dass die Dimensionen $h^{p,q}(\mathcal{X}_t) := \dim H^{p,q}(\mathcal{X}_t)$ unabhängig von t sind ([Voi02, Proposition 9.20]). Wir bekommen damit eine sogenannte *Periodenabbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{p,q}\colon \Delta &\to \mathrm{Grass}\big(h^{p,q}(X), H^{p+q}(X)\big), \\ t &\mapsto \varphi_t^{p+q}\big(H^{p,q}(\mathcal{X}_t)\big). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathcal{P}^{p,q}$ ist holomorph ([Voi02, Théorème 10.9]) und kann verwendet werden, um die gegebene Deformation π genauer zu studieren (siehe z. B. den Beweis von Satz 6.1 für ein Anwendungsbeispiel).

1.3 Kählermannigfaltigkeiten

Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Eine positive reelle $(1,1)$-Form ω auf X heißt *Kählerform*, wenn $d\omega = 0$ ist. Jede Kählerform ω liefert eine Kohomologieklasse

$$[\omega] \in H^{1,1}(X) \cap H^2(X, \mathbb{R}) =: H^{1,1}(X, \mathbb{R}).$$

Die Teilmenge

$$\mathcal{K}_X := \{\, [\omega] \mid \omega \text{ Kählerform auf } X \,\} \subset H^{1,1}(X, \mathbb{R})$$

ist ein offener konvexer Kegel, der *Kählerkegel* von X. Im Fall, dass $\mathcal{K}_X$ eine rationale Klasse enthält, d. h. ein

$$\zeta \in \mathcal{K}_X \cap H^2(X, \mathbb{Q})$$

existiert, gibt es nach dem Satz von Lefschetz ein Geradenbündel $L \in \operatorname{Pic} X$, so dass

$$c_1(L) = m\zeta$$

für eine natürliche Zahl m ist. Da ζ von einer positiven $(1,1)$-Form repräsentiert wird, ist L positiv, also ist X nach dem Kodairaschen Einbettungssatz projektiv.

Ist X eine Kählermannigfaltigkeit, so ist $\mathcal{K}_X \neq \emptyset$. Sei in diesem Fall ω eine Kählerform auf X. Da $H^2(X, \mathbb{Q})$ dicht in $H^2(X, \mathbb{R})$ ist, existiert eine Folge $(\alpha_k) \subset H^2(X, \mathbb{Q})$ mit $\alpha_k \to [\omega]$. Für genügend große k kann α_k von einer positiven reellen 2-Form repräsentiert werden, allerdings kann im allgemeinen nicht $\alpha_k \in H^{1,1}(X)$ erreicht werden (ist z. B. X nicht projektiv, so haben wir oben gesehen, dass $\mathcal{K}_X \cap H^2(X, \mathbb{Q}) = \emptyset$ ist).

Man kann allerdings versuchen, im Geiste von Abschnitt 1.2 durch eine Deformation von X die Lage von $H^{1,1}(X)$ in $H^2(X, \mathbb{C})$ so abzuändern, dass die α_k getroffen werden. Dies ist die Philosophie hinter dem folgenden Kriterium für algebraische Approximierbarkeit von Buchdahl:

Satz 1.4 ([Buc08, Proposition 1]). *Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit und $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ eine Deformation von $X = \mathcal{X}_0$ über der Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}^N$. Sei ω eine Kählerform auf X. Falls die Komposition der Kodaira-Spencer-Abbildung $T_0\Delta \to H^1(T_X)$ mit der Kontraktionsabbildung $\lrcorner\omega\colon H^1(T_X) \to H^2(\mathcal{O}_X)$ surjektiv ist, so ist π eine algebraische Approximation.*

Man kann Buchdahls Kriterium beispielsweise verwenden, um das folgende klassische Resultat über Deformationen von K3-Flächen und zweidimensionalen Tori zu beweisen:

Korollar 1.5. *Sei S eine K3-Fläche oder ein zweidimensionaler Torus und $\pi\colon \mathcal{S} \to \Delta$ eine Deformation von $S = \mathcal{S}_0$ über der Einheitskreisscheibe $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ derart, dass die Kodaira-Spencer-Abbildung $T_0\Delta \to H^1(T_S)$ nicht die Nullabbildung ist. Dann ist π eine algebraische Approximation.*

Beweis. Auf S existiert eine globale nirgends entartete holomorphe 2-Form σ mit $H^0(K_S) = \mathbb{C}\sigma$.

Sei $0 \neq \nu \in \operatorname{im}[T_0\Delta \to H^1(T_S)]$. Die Kontraktion mit ν induziert eine Abbildung

$$\varphi\colon H^1(\Omega^1_S) \to H^2(\mathcal{O}_S).$$

Wir zeigen zunächst, dass φ surjektiv ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die duale Abbildung

$$\varphi^*\colon H^2(\mathcal{O}_S)^* \to H^1(\Omega^1_S)^*$$

injektiv ist. Serredualität liefert Isomorphismen $H^2(\mathcal{O}_S)^* \cong H^0(K_S)$ und $H^1(\Omega^1_S)^* \cong H^1(T_S \otimes K_S) \cong H^1(\Omega^1_S)$, bezüglich derer φ^* gegeben ist durch

$$\varphi^*(\sigma) = \nu \lrcorner \sigma.$$

Da σ nirgends entartet ist, liefert die Kontraktion mit σ einen Vektorbündelisomorphismus $T_S \xrightarrow{\cong} \Omega^1_S$, der insbesondere einen Isomorphismus $H^1(T_S) \xrightarrow{\cong} H^1(\Omega^1_S)$ induziert. Da $\nu \neq 0$ ist, bedeutet dies, dass auch $\nu \lrcorner \sigma \neq 0$ ist und somit φ^* injektiv ist.

Sei nun $[\omega] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S) := H^1(\Omega^1_S) \cap H^2(S, \mathbb{R})$ eine Kählerklasse auf S. Da φ surjektiv ist und $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(S)$ den Raum $H^1(\Omega^1_S)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt, existiert in jeder Umgebung von ω eine reelle $(1,1)$-Form ω' mit $\nu \lrcorner [\omega'] \neq 0$. Liegt ω' nahe genug bei ω, so ist ω' eine Kählerform auf S, bezüglich derer die Voraussetzung von Satz 1.4 erfüllt ist. □

1.4 Dimension 2

Für Flächen ist die Approximierbarkeitsfrage vollständig geklärt:

Satz 1.6 ([Kod63b], [Buc06; Buc08]). *Jede kompakte Kählerfläche ist algebraisch approximierbar.*

Bemerkung 1.7. Eine kompakte Fläche S ist genau dann Kähler, wenn $b_2(S)$ gerade ist. Nach Proposition 1.3 impliziert damit die algebraische Approximierbarkeit von S die Existenz einer Kählermetrik auf S.

Unter Verwendung des folgenden Resultats von Artin können wir Satz 1.6 auf gewisse singuläre Flächen ausdehnen:

Satz 1.8 ([Art62, Theorem 2.3]). *Sei S ein normaler kompakter komplexer Raum der Dimension 2 mit rationalen Singularitäten. Dann ist S genau dann projektiv, wenn $a(S) = 2$ ist.*

Wir bekommen damit unter Zuhilfenahme der in Kapitel 2 behandelten Deformationstheorie für Abbildungen:

Korollar 1.9. *Sei S ein normaler kompakter komplexer Raum der Dimension 2 mit rationalen Singularitäten. Ist S bimeromorph zu einer kompakten Kählerfläche, so ist S algebraisch approximierbar.*

Beweis. Sei $p\colon \tilde{S} \to S$ eine Auflösung von S, wobei $\tilde{S}$ eine kompakte Kählermannigfaltigkeit ist. Nach Satz 1.6 existiert eine algebraische Approximation $\pi\colon \tilde{\mathcal{S}} \to \Delta$ von $\tilde{S} = \tilde{\mathcal{S}}_0$. Da nach Voraussetzung $p_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} = \mathcal{O}_S$ und $R^1p_*\mathcal{O}_{\tilde{S}} = 0$ ist, existiert eine Deformation $\psi\colon \mathcal{S} \to \Delta$ von $S = \mathcal{S}_0$ und eine holomorphe Abbildung $P\colon \tilde{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ mit $\pi \circ P = \psi$ und $P|_{\tilde{\mathcal{S}}_0} = p$ (siehe Korollar 2.27). Für $t \in \Delta$ nahe bei 0 hat $\mathcal{S}_t$ rationale Singularitäten (siehe [Elk78, Théorème 4]). Ist $\tilde{\mathcal{S}}_t$ projektiv, so ist $a(\mathcal{S}_t) = 2$. Nach Satz 1.8 ist dann $\mathcal{S}_t$ projektiv. Damit ist gezeigt, dass ψ eine algebraische Approximation ist. □

1.5 Höhere Dimensionen

Satz 1.6 inspirierte zur Vermutung, dass jede kompakte Kählermannigfaltigkeit algebraisch approximierbar sei. Dies wurde jedoch vor wenigen Jahren von Voisin widerlegt:

Satz 1.10 ([Voi04]). *In jeder Dimension $\geqslant 4$ existieren kompakte Kählermannigfaltigkeiten, die nicht den Homotopietyp einer komplex-projektiven Mannigfaltigkeit haben.*

In Voisins Gegenbeispiel wird die algebraische Approximierbarkeit sozusagen „künstlich" durch Aufblasung gewisser Untervarietäten eines Produktes komplexer Tori zerstört (vgl. in diesem Zusammenhang auch Satz 2.15). Man könnte also die Approximierbarkeitsvermutung aufrecht erhalten, wenn man geeignete Minimalitätsvoraussetzungen hinzufügt. Allerdings muss man dann auch singuläre Modelle zulassen, wie das folgende spätere Resultat von Voisin zeigt:

Satz 1.11 ([Voi06]). *In jeder geraden Dimension $\geqslant 10$ existieren kompakte Kählermannigfaltigkeiten X mit der Eigenschaft, dass kein glattes bimeromorphes Modell X' von X den Homotopietyp einer komplex-projektiven Mannigfaltigkeit hat.*

Die Situation in Dimension 3 ist weitgehend unbekannt. Abgesehen von Buchdahls Approximationskriterium (Satz 1.4), das allerdings nur in sehr speziellen Situationen anwendbar ist, gibt es bisher keine Resultate zur algebraischen Approximierbarkeit Kählerscher Dreifaltigkeiten. In den folgenden Kapiteln soll die Frage nach der Approximierbarkeit gewisser Typen von Dreifaltigkeiten näher beleuchtet werden.

2 Funktorialitätsfragen

Sei $\varphi\colon X \to Y$ ein Morphismus zwischen kompakten komplexen Räumen. Man kann für spezielle Typen solcher Morphismen die Frage stellen, welcher Zusammenhang zwischen der algebraischen Approximierbarkeit von X und der algebraischen Approximierbarkeit von Y besteht.

2.1 Projektivitätskriterien

Ein erster Schritt zur Beantwortung dieser Frage besteht darin, ein besseres Verständnis für den Zusammenhang zwischen Projektivität von X und Projektivität von Y zu entwickeln.

Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist das folgende klassische Resultat:

Satz 2.1 (Moishezon). *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit $a(X) = \dim X$. Dann ist X genau dann projektiv, wenn X Kähler ist.*

Damit bekommen wir:

Proposition 2.2. *Sei $f\colon X \to Y$ ein surjektiver Morphismus von einem projektiven komplexen Raum X auf eine kompakte Kählermannigfaltigkeit Y. Dann ist Y projektiv.*

Beweis. Ohne Einschränkung ist X irreduzibel und reduziert. Dann ist nach [Uen75, Theorem 3.8]

$$a(Y) \geqslant a(X) - \dim X + \dim Y = \dim Y.$$

Nach Satz 2.1 ist Y projektiv. □

Die Projektivität des Quellraums folgt nur unter sehr speziellen Bedingungen aus der Projektivität des Zielraums. Einfach ist beispielsweise der Fall endlicher Abbildungen:

Proposition 2.3. *Sei $f\colon X \to Y$ ein endlicher Morphismus zwischen kompakten komplexen Räumen. Ist Y projektiv, so auch X.*

Beweis. Sei A ein amples Geradenbündel auf Y, dann ist f^*A ein positives Geradenbündel auf X. Grauert hat gezeigt, dass X dann projektiv ist. □

Im Falle positiv-dimensionaler Fasern benötigt man zusätzliche Bedingungen:

Satz 2.4. *Sei* X *eine kompakte Kählermannigfaltigkeit,* Y *eine projektive Mannigfaltigkeit und* $f\colon X \to Y$ *eine surjektive holomorphe Abbildung mit zusammenhängenden Fasern. Ist* $H^1(\mathcal{O}_{X_y}) = 0$ *für allgemeines* $y \in Y$*, dann ist* X *projektiv.*

Beweis. [Fuj83b, Proposition 7] □

Bemerkung 2.5. Die Bedingung von Satz 2.4 ist insbesondere erfüllt, wenn die allgemeine Faser von f rational zusammenhängend ist.

2.2 Deformationstheorie von holomorphen Abbildungen

Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten komplexen Räumen. Unter einer *Deformation von* f verstehen wir ein Tripel (π, ψ, F), wobei $\pi\colon \mathcal{X} \to T \ni 0$ eine Deformation von $X = \mathcal{X}_0$, $\psi\colon \mathcal{Y} \to T$ eine Deformation von $Y = \mathcal{Y}_0$ und $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine holomorphe Abbildung mit $\psi \circ F = \pi$ und $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ ist.

Eine interessante Fragestellung ist, ob zu einer gegebenen Abbildung $f\colon X \to Y$ jede Deformation von X bzw. Y von einer Deformation von f induziert wird. Dazu führen wir nach [Ran91] folgende Sprechweisen ein:

Definition 2.6. Eine holomorphe Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen kompakten komplexen Räumen heißt *zielstabil*, wenn zu jeder Deformation $\psi\colon \mathcal{Y} \to T \ni 0$ von $Y = \mathcal{Y}_0$ eine Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to T$ von $X = \mathcal{X}_0$ und eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ derart existieren, dass $\psi \circ F = \pi$ und $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ ist.

Definition 2.7. Eine holomorphe Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen kompakten komplexen Räumen heißt *quellstabil*, wenn zu jeder Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to T \ni 0$ von $X = \mathcal{X}_0$ eine Deformation $\psi\colon \mathcal{Y} \to T$ von $Y = \mathcal{Y}_0$ und eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ derart existieren, dass $\psi \circ F = \pi$ und $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ ist.

Im Folgenden werden zunächst die allgemeinen Kriterien für Ziel- bzw. Quellstabilität von Horikawa und Ran besprochen; im nächsten Abschnitt werden dann einige Anwendungen auf spezielle Typen von Abbildungen $f\colon X \to Y$ diskutiert und Auswirkungen auf die algebraische Approximierbarkeit der beteiligten Räume X und Y untersucht.

2.2.1 Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten

Für den Fall, dass X und Y glatt sind, beweist Horikawa folgende Kriterien für die Stabilität von f:

Satz 2.8 ([Hor74, Theorem 6.1]). *Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Falls die von f induzierte Abbildung*

$$H^i(X, T_X) \xrightarrow{f_*} H^i(X, f^*T_Y)$$

für $i = 1$ surjektiv und für $i = 2$ injektiv ist, so ist f zielstabil.

Satz 2.9 ([Hor76, Theorem 8.1]). *Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Falls die von f induzierte Abbildung*

$$H^i(Y, T_Y) \xrightarrow{f^*} H^i(X, f^*T_Y)$$

für $i = 1$ surjektiv und für $i = 2$ injektiv ist, so ist f quellstabil.

2.2.2 Abbildungen zwischen komplexen Räumen

Obwohl in späteren Kapiteln meist nur der Fall relevant sein wird, dass X und Y glatt sind, sollen hier kurz die Verallgemeinerungen der Sätze von Horikawa für singuläre Räume durch Ziv Ran vorgestellt werden, um das Themengebiet der algebraischen Approximierbarkeit in einen größeren Zusammenhang zu stellen.

Zunächst benötigen wir geeignete Verallgemeinerungen der Kohomologiegruppen des Tangentialbündels einer komplexen Mannigfaltigkeit. Für einen reduzierten kompakten komplexen Raum X definieren wir

$$T_X^i := \operatorname{Ext}^i(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X).$$

Es ist bekannt, dass infinitesimale Deformationen von X durch T_X^1 parametrisiert werden, wobei Obstruktionen in T_X^2 liegen.

Analog werden in [Ran89] für eine holomorphe Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen reduzierten kompakten komplexen Räumen X und Y Vektorräume T_f^i konstruiert, so dass infinitesimale Deformationen von f durch T_f^1 klassifiziert werden und Obstruktionen in T_f^2 liegen.

Die Räume T_f^i sitzen in einer langen exakten Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T_f^0 &\longrightarrow T_X^0 \oplus T_Y^0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_f^0(\Omega_Y^1, \mathcal{O}_X) \\ \longrightarrow T_f^1 &\longrightarrow T_X^1 \oplus T_Y^1 \longrightarrow \operatorname{Ext}_f^1(\Omega_Y^1, \mathcal{O}_X) \\ \longrightarrow T_f^2 &\longrightarrow T_X^2 \oplus T_Y^2 \longrightarrow \operatorname{Ext}_f^2(\Omega_Y^1, \mathcal{O}_X), \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei $\operatorname{Ext}^i_f(\cdot,\cdot)$ die abgeleiteten Funktoren von $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\cdot,\cdot) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\cdot, f_*\cdot)$ sind.

Die beiden Kriterien von Horikawa lassen sich damit wie folgt auf singuläre Räume übertragen:

Satz 2.10 ([Ran91, Criterion 0.2]). *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine holomorphe Abbildung zwischen reduzierten kompakten komplexen Räumen. Falls die von der Sequenz* (2.1) *induzierte Abbildung*

$$T^i_f \to T^i_Y$$

für $i = 1$ *surjektiv und für* $i = 2$ *injektiv ist, so ist* f *zielstabil.*

Satz 2.11 ([Ran91, Criterion 0.1]). *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine holomorphe Abbildung zwischen reduzierten kompakten komplexen Räumen. Falls die von der Sequenz* (2.1) *induzierte Abbildung*

$$T^i_f \to T^i_X$$

für $i = 1$ *surjektiv und für* $i = 2$ *injektiv ist, so ist* f *quellstabil.*

Bemerkung 2.12. Eine einfache Diagrammjagd ergibt, dass die Bedingung aus Satz 2.10 äquivalent ist zur Bedingung, dass die Abbildung

$$T^i_X \to \operatorname{Ext}^i_f(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_X)$$

aus Sequenz (2.1) für $i = 1$ surjektiv und für $i = 2$ injektiv ist. Analog ist die Bedingung aus Satz 2.11 äquivalent zur Bedingung, dass die Abbildung

$$T^i_Y \to \operatorname{Ext}^i_f(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_X)$$

aus Sequenz (2.1) für $i = 1$ surjektiv und für $i = 2$ injektiv ist.

Bemerkung 2.13. Sind X und Y glatt, so ist $T^i_X \cong H^i(X, T_X)$, $T^i_Y \cong H^i(Y, T_Y)$ und $\operatorname{Ext}^i_f(\Omega^1_Y, \mathcal{O}_X) \cong H^i(f^*T_Y)$. In diesem Fall liefern die reformulierten Bedingungen aus Bemerkung 2.12 gerade die Bedingungen von Horikawa aus den Sätzen 2.8 und 2.9.

2.3 Anwendungen

2.3.1 Aufblasungen

Es soll hier ein Kriterium für die algebraische Approximierbarkeit von aufgeblasenen Kählermannigfaltigkeiten bewiesen werden. Dazu wird noch nicht die allgemeine Deformationstheorie aus Abschnitt 2.2 benötigt, da die relevanten Stabilitätsaussagen bereits von Kodaira in [Kod63c] bewiesen wurden.

Definition 2.14. Sei X ein komplexer Raum, $Y \subset X$ ein kompakter komplexer Unterraum. Eine Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to T \ni 0$ von $X = \mathcal{X}_0$ heißt Y-*stabil*, wenn es einen komplexen Unterraum $\mathcal{Y}$ von $\mathcal{X}$ derart gibt, dass $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_0 = Y$ ist und $\pi|_{\mathcal{Y}}$ ein eigentlicher und flacher Morphismus ist.

Damit erhalten wir folgende Aussage für Aufblasungen von Untermannigfaltigkeiten von Kählermannigfaltigkeiten:

Satz 2.15. *Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, $\hat{X} \to X$ die Aufblasung von X in einer kompakten Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ von Kodimension $\geqslant 2$. Dann ist $\hat{X}$ genau dann algebraisch approximierbar, wenn es eine Y-stabile algebraische Approximation von X gibt.*

Beweis. Sei $\tilde{\pi}\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \Delta$ eine algebraische Approximation von $\hat{X} = \tilde{\mathcal{X}}_0$, wobei $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ die Einheitskreisscheibe sei. Es sei $E \subset \tilde{\mathcal{X}}_0$ der exzeptionelle Divisor der Niederblasung $\hat{X} \to X$. Nach [Kod63c, Theorem 5] ist E stabil bzgl. $\tilde{\pi}$, d. h. es existiert eine Untermannigfaltigkeit $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{X}}$ mit $\mathcal{E} \cap \tilde{\mathcal{X}}_0 = E$ derart, dass $\tilde{\pi}|_{\mathcal{E}}$ eine eigentliche Submersion ist. Es ist dann $\mathcal{E}$ exzeptionell relativ zu $\tilde{\pi}$. Sei $p\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ die Niederblasung von $\mathcal{E}$ und $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ die induzierte eigentliche Submersion mit $\pi \circ p = \tilde{\pi}$. Für jedes $t \in \Delta$ ist dann die Einschränkung $p_t := p|_{\tilde{\mathcal{X}}_t}\colon \tilde{\mathcal{X}}_t \to \mathcal{X}_t$ die Niederblasung des exzeptionellen Divisors $\mathcal{E}_t \subset \tilde{\mathcal{X}}_t$ auf die Untermannigfaltigkeit $p(\mathcal{E}_t) \subset \mathcal{X}_t$. Insbesondere ist die Abbildung p_t für alle $t \in \Delta$ bimeromorph. Da X Kähler ist, sind alle benachbarten $\mathcal{X}_t$ ebenfalls Kähler, deshalb ist $\tilde{\mathcal{X}}_t$ genau dann projektiv, wenn $\mathcal{X}_t$ projektiv ist (Proposition 2.2 und Satz 2.4). Somit ist π eine algebraische Approximation von $\mathcal{X}_0$. Das Bild $\mathcal{Y} := p(\mathcal{E})$ ist eigentlich und flach über Δ und es gilt $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X}_0 \cong Y$. Insbesondere ist $\mathcal{X}_0 \cong X$ und π ist Y-stabil.

Sei umgekehrt $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ eine Y-stabile algebraische Approximation von $X = \mathcal{X}_0$ und $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ gemäß Definition 2.14. Sei $p\colon \hat{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ die Aufblasung von $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$. Dann ist die Komposition $\hat{\pi} := \pi \circ p$ eine algebraische Approximation von $\hat{X} = \hat{\mathcal{X}}_0$. □

Da im Allgemeinen nicht jede Deformation bezüglich jeder Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ stabil ist, wird oft der Fall eintreten, dass der aufgeblasene Raum $\hat{X}$ weniger Deformationen besitzt als X. Eine interessante, aber völlig offene Fragestellung ist, wann durch sukzessive Aufblasungen geeigneter Untermannigfaltigkeiten erreicht werden kann, dass der aufgeblasene Raum starr wird. Wäre dies für eine nichtalgebraische Mannigfaltigkeit möglich, so hätte man insbesondere ein Beispiel einer nicht algebraisch approximierbaren Mannigfaltigkeit gefunden.

2.3.2 Endliche Abbildungen

Ohne die allgemeine Theorie aus Abschnitt 2.2 zu verwenden, lässt sich zeigen, dass sich algebraische Approximationen auf étale Überlagerungen hochheben lassen:

Satz 2.16. *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Ist X algebraisch approximierbar, so auch jede endliche étale Überlagerung von X.*

Beweis. Sei $\varphi\colon Y \to X$ eine endliche étale Überlagerung von X und $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ eine algebraische Approximation von $X = \mathcal{X}_0$. Nach Satz 1.2 können wir annehmen, dass

$$\mathcal{X} \cong_{C^\infty} X \times \Delta$$

über Δ ist. Setzen wir nun $\mathcal{Y} := Y \times \Delta$ (als C^∞-Mannigfaltigkeit), so induziert φ eine C^∞-Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi\colon \mathcal{Y} &\to \mathcal{X}, \\ (y,t) &\mapsto \big(\varphi(y), t\big). \end{aligned}$$

Da Φ ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es eine eindeutige komplexe Struktur auf $\mathcal{Y}$ derart, dass Φ holomorph ist. Die Komposition $\psi := \pi \circ \Phi\colon \mathcal{Y} \to \Delta$ ist dann eine Deformation von $Y = \mathcal{Y}_0$ derart, dass für jedes $t \in \Delta$ die Einschränkung $\Phi|_{\mathcal{Y}_t}\colon \mathcal{Y}_t \to \mathcal{X}_t$ eine endliche étale Überlagerung ist. Insbesondere ist $\mathcal{Y}_t$ projektiv, wenn $\mathcal{X}_t$ projektiv ist (Proposition 2.3), also ist ψ eine algebraische Approximation von Y. □

Für verzweigte Überlagerungen wird die Situation komplizierter, da nicht mehr klar ist, dass man Deformationen eines Raumes zu Deformationen von verzweigten Überlagerungen dieses Raumes „hochheben“ kann (schon die Fortsetzung des Verzweigungsdivisors auf beliebige Deformationen ist im Allgemeinen nicht möglich).

Die umgekehrte Fragestellung, d. h. unter welchen Umständen die algebraische Approximierbarkeit eines Raumes die algebraische Approximierbarkeit eines von ihm überlagerten Raumes impliziert, kann im Rahmen der allgemeinen Deformationstheorie holomorpher Abbildungen aus Abschnitt 2.2 behandelt werden:

Sei $f\colon X \to Y$ eine endliche Überlagerung kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. In dieser Situation gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

wobei $\mathcal{E}$ ein Vektorbündel auf Y ist. Tensorieren mit T_Y liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_Y \otimes f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow T_Y \otimes \mathcal{E} \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Da f endlich ist, folgt aus der Leray-Spektralsequenz, dass

$$H^i(T_Y \otimes f_*\mathcal{O}_X) \cong H^i(f^*T_Y) \quad \text{für alle } i \geqslant 0$$

ist. Aus der langen exakten Sequenz zu (2.2) folgt daher mittels Satz 2.9:

Satz 2.17 ([Weh86, Corollary 11.1])**.** *Sei $f\colon X \to Y$ eine endliche Überlagerung von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Sei $\mathcal{E} := \ker[f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y]$ der Kern der Spurabbildung. Ist $H^1(T_Y \otimes \mathcal{E}) = 0$, so ist f quellstabil.*

Mit Proposition 2.2 bekommen wir:

Korollar 2.18. *Sei $f\colon X \to Y$ eine endliche Überlagerung von kompakten Kählermannigfaltigkeiten und $\mathcal{E} := \ker[f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y]$. Ist X algebraisch approximierbar und $H^1(T_Y \otimes \mathcal{E}) = 0$, so ist auch Y algebraisch approximierbar.*

2.3.3 Surjektionen

Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung zwischen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Wir haben dann eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ liefert die exakte Sequenz

$$H^1(T_X) \longrightarrow H^1(f^*T_Y) \longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(T_X) \longrightarrow H^2(f^*T_Y).$$

Daraus ergibt sich mittels Satz 2.8 sofort:

Proposition 2.19. *Sei $f\colon X \to Y$ eine surjektive holomorphe Abbildung zwischen kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Ist $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) = 0$, so ist f zielstabil.*

Bemerkung 2.20. Ist f eine Submersion, so ist $\Omega^1_{X/Y}$ lokalfrei, also insbesondere $\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \cong H^2(T_{X/Y})$.

Bemerkung 2.21. Ist $\dim X = n$, so ist nach Serredualität

$$\mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \cong H^{n-2}(\Omega^1_{X/Y} \otimes K_X).$$

Wir erhalten ein Approximierbarkeitskriterium für Faserungen, das später noch im Kontext der Konikbündel eine Rolle spielen wird:

Satz 2.22. *Sei X eine kompakte Kählermannigfaltigkeit, Y eine algebraisch approximierbare kompakte Mannigfaltigkeit und $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Surjektion mit zusammenhängenden Fasern derart, dass $H^1(\mathcal{O}_{X_y}) = 0$ ist für allgemeines $y \in Y$. Ist $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) = 0$, so ist auch X algebraisch approximierbar.*

Beweis. Sei $\psi\colon \mathcal{Y} \to \Delta$ eine algebraische Approximation von $Y = \mathcal{Y}_0$. Nach Proposition 2.19 existiert eine Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ von $X = \mathcal{X}_0$ und eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $\psi \circ F = \pi$ und $F|_{\mathcal{X}_0} = f$. Aus Halbstetigkeitsgründen ist $H^1(\mathcal{O}_{F^{-1}(y)}) = 0$ für allgemeines $y \in \mathcal{Y}$. Da kleine Deformationen von Kählermannigfaltigkeiten wieder Kähler sind, ist π nach Satz 2.4 eine algebraische Approximation von X. $\square$

Als Beispiel für die Anwendung dieses Kriteriums sei hier folgende Situation untersucht: Y sei eine algebraisch approximierbare kompakte Kählermannigfaltigkeit, V ein Vektorbündel vom Rang r auf Y. Wir wollen ein hinreichendes Kriterium für die algebraische Approximierbarkeit von $X := \mathbb{P}(V)$ finden. Sei $\pi\colon \mathbb{P}(V) \to Y$ die natürliche Projektion. Wir haben dann die relative Eulersequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes \pi^* V^* \longrightarrow T_{\mathbb{P}(V)/Y} \longrightarrow 0$$

auf $\mathbb{P}(V)$, deren Pushforward mittels π die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow V \otimes V^* \longrightarrow \pi_* T_{\mathbb{P}(V)/Y} \longrightarrow 0 \tag{2.3}$$

auf Y sowie $R^q \pi_* T_{\mathbb{P}(V)/Y} = 0$ für $q \geqslant 1$ liefert. Die Sequenz (2.3) spaltet via

$$V \otimes V^* \cong \mathcal{E}nd(V) \ni \phi \mapsto \tfrac{1}{r}\operatorname{tr}(\phi) \in \mathcal{O}_Y.$$

Damit spalten auch die zugehörigen Kohomologiegruppen und wir erhalten mittels Satz 2.22 sofort:

Satz 2.23. *Sei Y eine algebraisch approximierbare kompakte Mannigfaltigkeit und V ein Vektorbündel auf Y mit $H^2(V \otimes V^*) \cong H^2(\mathcal{O}_Y)$. Dann ist $\mathbb{P}(V)$ algebraisch approximierbar.*

Daraus ergibt sich mittels Serredualität die Approximierbarkeit gewisser projektivierter Vektorbündel über K3-Flächen und zweidimensionalen Tori (siehe Satz 7.2 für ein allgemeineres Ergebnis für Rang-2-Bündel):

Korollar 2.24. *Sei S eine K3-Fläche oder ein zweidimensionaler Torus, V ein einfaches Vektorbündel auf S (z. B. V stabil bzgl. einer Kählermetrik auf S). Dann ist $\mathbb{P}(V)$ algebraisch approximierbar.*

Beweis. Wegen $K_S \cong \mathcal{O}_S$ folgt nach Serredualität $H^2(V \otimes V^*) \cong H^0(V \otimes V^*) \cong \mathbb{C}$ und $H^2(\mathcal{O}_S) \cong H^0(\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}$. $\square$

2.3.4 Einbettungen

Als nächstes sei $X \subset Y$ eine Inklusion von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Wir bekommen dann die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_X \longrightarrow T_Y|_X \longrightarrow N_{X|Y} \longrightarrow 0,$$

aus deren langer exakter Kohomologiesequenz wir die exakte Sequenz

$$H^1(T_X) \longrightarrow H^1(T_Y|_X) \longrightarrow H^1(N_{X|Y}) \longrightarrow H^2(T_X) \longrightarrow H^2(T_Y|_X)$$

erhalten. Satz 2.8 liefert daraus folgendes Ergebnis, das unabhängig von Horikawas Theorie schon von Kodaira in [Kod63c] bewiesen wurde:

Korollar 2.25. *Sei $X \subset Y$ eine Inklusion von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Ist $H^1(N_{X|Y}) = 0$, so ist die Inklusionsabbildung $X \hookrightarrow Y$ zielstabil.*

Da kompakte Untermannigfaltigkeiten einer projektiven Mannigfaltigkeit wieder projektiv sind, bekommen wir folgendes Ergebnis zur algebraischen Approximierbarkeit:

Proposition 2.26. *Sei $X \subset Y$ eine Inklusion von kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Ist Y algebraisch approximierbar und $H^1(N_{X|Y}) = 0$, so ist auch X algebraisch approximierbar.*

2.3.5 Morikontraktionen

Als Anwendungsbeispiel für Rans Deformationstheorie von Abbildungen zwischen singulären Räumen sollen hier Morikontraktionen studiert werden.

Wir beweisen zunächst ein hilfreiches Kriterium für Quellstabilität: Sei $f\colon X \to Y$ eine holomorphe Abbildung zwischen reduzierten kompakten komplexen Räumen. Dann existiert für alle kohärenten Garben $\mathcal{F}$ auf Y und $\mathcal{G}$ auf X die Grothendieck-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p(\mathcal{F}, R^q f_*\mathcal{G}) \Rightarrow \operatorname{Ext}_f^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

aus der wir die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_f^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, R^1 f_*\mathcal{G}) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^2(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) \longrightarrow \operatorname{Ext}_f^2(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

erhalten. Wir nehmen nun an, dass $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ ist und setzen $\mathcal{F} := \Omega_Y^1$, $\mathcal{G} := \mathcal{O}_X$. Dann ist $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}) = T_Y^i$ und die exakte Sequenz (2.4) liefert folgende Folgerung aus Satz 2.11 und Bemerkung 2.12:

Korollar 2.27. *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine holomorphe Abbildung zwischen reduzierten kompakten komplexen Räumen mit* $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ *und* $R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$. *Dann ist* f *quellstabil.*

Dieses Ergebnis ist eine Verallgemeinerung eines Resultats über die Stabilität von Faserstrukturen aus [Kod63c]. Wir möchten das Kriterium auf Morikontraktionen anwenden. Dazu benötigen wir eine relative Version des Kodairaschen Verschwindungssatzes. Für Mannigfaltigkeiten gilt folgendes Verschwindungsresultat für höhere direkte Bildgarben:

Satz 2.28 ([Nak87, Corollary 3.5])**.** *Sei* $f\colon X \to Y$ *eine projektive holomorphe Abbildung von einer komplexen Mannigfaltigkeit* X *auf eine komplexe Varietät* Y *und sei* H *ein* f*-ampler* $\mathbb{Q}$*-Divisor auf* X, *so dass* $\operatorname{supp}\langle H\rangle$ *normale Kreuzungen hat* ($\langle H\rangle := H - \lfloor H \rfloor$). *Dann ist*

$$R^i f_* \mathcal{O}_X(K_X + \lceil H \rceil) = 0 \quad \textit{für } i \geqslant 1.$$

Bemerkung 2.29. Für eine normale komplexe Varietät X der Dimension n können wir die *dualisierende Garbe* ω_X als

$$\omega_X := \Big(\bigwedge^n \Omega^1_X\Big)^{**}$$

definieren. ω_X ist reflexiv, aber für nichtalgebraische X gibt es im Allgemeinen *keinen* Weildivisor K_X mit $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$. Haben wir allerdings eine projektive Abbildung $f\colon X \to Y$ auf einen Steinschen Raum Y, so sei $L \in \operatorname{Pic} X$ ein f-amples Geradenbündel. Für jeden Punkt $y \in Y$ können wir dann ein $k \in \mathbb{N}$ finden, so dass $H^0(L^{\otimes k}|_{X_y}) \neq 0 \neq H^0(\omega_X \otimes L^{\otimes k}|_{X_y})$ ist. Da Y Stein ist, folgt $H^0(L^{\otimes k}) = H^0\big(f_*(L^{\otimes k})\big) \neq 0$ und $H^0(\omega_X \otimes L^{\otimes k}) = H^0\big(f_*(\omega_X \otimes L^{\otimes k})\big) \neq 0$, also existieren Weildivisoren D_1 und D_2 auf X mit $L^{\otimes k} \cong \mathcal{O}_X(D_1)$ und $\omega_X \otimes L^{\otimes k} \cong \mathcal{O}_X(D_2)$ und wir bekommen $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(D_2 - D_1)$.

Als Folgerung aus Satz 2.28 ergibt sich folgender Rationalitätssatz für Morikontraktionen:

Korollar 2.30. *Es seien* X *und* Y *normale komplexe Räume und* D *ein effektiver Weildivisor auf* X *derart, dass das Paar* (X, D) *klt ist (siehe den Beweis unten für die Definition). Sei* $f\colon X \to Y$ *eine projektive holomorphe Abbildung derart, dass* $-(K_X + D)$ f*-ample ist. Dann ist*

$$R^i f_* \mathcal{O}_X = 0 \quad \textit{für } i \geqslant 1.$$

Beweis. Da die Aussage lokal bezüglich Y ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass Y Stein ist. Nach Bemerkung 2.29 ist dann $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$

für einen Weildivisor K_X und wir können die aus der algebraischen Situation bekannten divisoriellen Schreibweisen verwenden.

Sei also $p\colon \hat{X} \to X$ eine Log-Auflösung von (X, D). Nach Definition von klt ist $K_X + D$ $\mathbb{Q}$-Cartier und es existieren $a_i \in \mathbb{Q}$, $a_i > -1$ mit

$$K_{\hat{X}} + p_*^{-1}D \equiv p^*(K_X + D) + \sum_i a_i E_i,$$

wobei die E_i die irreduziblen exzeptionellen Divisoren von p sind.

Wähle $\delta_i > 0$ derart, dass $a_i - \delta_i > -1$ und definiere

$$H := -K_{\hat{X}} + \sum_i (a_i - \delta_i)E_i - p_*^{-1}D \equiv -p^*(K_X + D) - \sum_i \delta_i E_i.$$

Da

$$K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil = \sum_i \lceil a_i - \delta_i \rceil E_i - \lfloor p_*^{-1}D \rfloor = \sum_i \lceil a_i - \delta_i \rceil E_i$$

wegen der klt-Bedingung ein effektiver exzeptioneller Divisor ist, ist

$$p_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil) = \mathcal{O}_X.$$

Offensichtlich ist H p-ample, also ist nach Satz 2.28

$$R^i p_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil) = 0 \quad \text{für } i \geqslant 1;$$

somit ergibt sich aus der Grothendieck-Spektralsequenz

$$R^i f_*\mathcal{O}_X = R^i f_*\big(p_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil)\big) = R^i (f \circ p)_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil).$$

Da $-(K_X + D)$ f-ample ist, ist H aber auch $(f \circ p)$-ample, also liefert Satz 2.28

$$R^i (f \circ p)_*\mathcal{O}_{\hat{X}}(K_{\hat{X}} + \lceil H \rceil) = 0 \quad \text{für } i \geqslant 1. \qquad \square$$

Damit bekommen wir:

Proposition 2.31. *Sei X eine normale komplexe Varietät mit log-terminalen Singularitäten und $f\colon X \to Y$ eine Morikontraktion. Dann ist f quellstabil.*

Beweis. Wegen Korollar 2.30 können wir Korollar 2.27 anwenden. $\square$

2.3.6 Flips

Die Quellstabilität von Flips wurde explizit von Kollár und Mori nachgewiesen:

Satz 2.32 ([KM92, Theorem 11.7]). *Sei X eine dreidimensionale normale komplexe Varietät mit terminalen Singularitäten, $f\colon X \to Y$ eine kleine Morikontraktion. Dann existiert zu jeder Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to T \ni 0$ von $X = \mathcal{X}_0$ eine Deformation $\psi\colon \mathcal{Y} \to T$ und eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $\psi \circ F = \pi$ und $F|_{\mathcal{X}_0} = f$. Des Weiteren existiert der Flip von F, d. h. eine Deformation $\pi^+\colon \mathcal{X}^+ \to T$ von $\mathcal{X}_0^+ =: X^+$ und eine eigentliche birationale Abbildung $F^+\colon \mathcal{X}^+ \to \mathcal{Y}$ mit exzeptionellem Ort von Kodimension $\geqslant 2$ derart, dass $K_{\mathcal{X}^+}$ F^+-ample ist.*

Als Gesamtresultat bekommen wir:

Satz 2.33. *Sei X eine dreidimensionale normale komplexe Varietät mit terminalen Singularitäten, $f\colon X \dashrightarrow X'$ eine Komposition von Morikontraktionen und Flips. Ist dann X algebraisch approximierbar, so auch X'.*

Beweis. Morikontraktionen sind nach Proposition 2.31 und Flips nach Satz 2.32 quellstabil. Ist X projektiv, so auch der Zielraum jeder Morikontraktion und jedes Flips von X. Damit liefert jede algebraische Approximation von X eine algebraische Approximation von X'. □

Insbesondere haben wir:

Korollar 2.34. *Falls das Moriprogramm für eine algebraisch approximierbare normale komplexe Varietät X mit terminalen Singularitäten ein minimales Modell $\tilde{X}$ liefert, so ist auch $\tilde{X}$ algebraisch approximierbar.*

3 Konikbündel

In diesem Kapitel werden Konikbündel allgemeiner Dimension untersucht. Nach einigen allgemeinen Aussagen über die Geometrie von Konikbündeln und ihrer Diskriminantenorte stehen dabei vor allem deformationstheoretische Aussagen im Mittelpunkt. Am Ende des Kapitels wird noch kurz auf Konikbündel mit relativer Picardzahl 1 eingegangen, die in der Moritheorie eine wichtige Rolle spielen.

3.1 Allgemeine Beschreibung

Definition 3.1 (Konikbündel)**.** Eine eigentliche Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten X, Y heißt *Konikbündel,* wenn jede Faser von f isomorph zu einer Kurve vom Grad 2 (einer *Konik*) in $\mathbb{P}_2$ ist. Wir nennen ein Konikbündel $f\colon X \to Y$ *kompakt,* wenn X (oder äquivalent dazu Y) kompakt ist.

Für das Studium von Konikbündeln ist folgende Beschreibung hilfreich:

Proposition 3.2 (vgl. [Bea77, Proposition 1.2])**.** *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein Konikbündel. Dann ist* f *flach und für jede Faser* $Q \subset X$ *von* f *ist* $N_{Q|X}$ *trivial. Des Weiteren ist* $E := f_*(K^*_{X/Y})$ *lokalfrei vom Rang* 3 *und es existiert ein Schnitt* $\sigma \in H^0(S^2E \otimes \det E^*)$ *derart, dass* X *das Nullstellengebilde von* σ *in* $\mathbb{P}(E)$ *ist.*

Beweis. Da X und Y glatt sind, folgt die Flachheit von f direkt aus der Äquidimensionalität. Sei $q \in Y$ und $Q := f^{-1}(q)$ die zugehörige Faser von f. Wir wählen eine Karte $U \subset Y$ um q mit Koordinaten $y_i\colon U \to \mathbb{C}$. Sind $D_i := (y_i = 0)$ die Koordinatendivisoren auf U, so ist $Q \subset f^{-1}(U)$ vollständiger Durchschnitt der Divisoren f^*D_i. Dies impliziert die Trivialität des Normalenbündels von Q in X.

Nach Definition eines Konikbündels können wir Q als Hyperfläche vom Grad 2 in den $\mathbb{P}_2$ einbetten. Es gilt dann nach Adjunktionsformel:

$$K^*_{X/Y}|_Q = K^*_Q \cong K^*_{\mathbb{P}_2}|_Q \otimes N^*_{Q|\mathbb{P}_2} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|_Q.$$

Aus

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)|_Q \longrightarrow 0$$

erhalten wir somit

$$h^0(K^*_{X/Y}|_Q) = 3.$$

Damit ist $E = f_*(K^*_{X/Y})$ lokalfrei vom Rang 3. Da die Einschränkung $K^*_{X/Y}|_Q$ sehr ample auf Q ist, ist die kanonische Abbildung $f^*E \to K^*_{X/Y}$ surjektiv und liefert eine Einbettung $X \hookrightarrow \mathbb{P}(E)$ mit $K^*_{X/Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)|_X$. Da X ein Divisor in $\mathbb{P}(E)$ ist, existiert ein Geradenbündel $L \in \operatorname{Pic}\mathbb{P}(E)$, so dass X isomorph zum Nullstellengebilde eines Schnittes $\tilde{\sigma} \in H^0(L)$ ist. Sei $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to Y$ die kanonische Abbildung. Nach Konstruktion der Einbettung von X in $\mathbb{P}(E)$ muss für jede Faser $F \cong \mathbb{P}_2$ von π die Einschränkung $L|_F$ isomorph zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(2)$ sein. Aus der Beschreibung der Picardgruppe von $\mathbb{P}(E)$ ergibt sich, dass ein Geradenbündel $L' \in \operatorname{Pic}(Y)$ existieren muss, so dass

$$L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^* L'$$

ist. Zur Bestimmung von L' bemerken wir zunächst, dass das relative kanonische Bündel auf $\mathbb{P}(E)$ gegeben ist durch

$$K_{\mathbb{P}(E)/Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-3) \otimes \pi^* \det E.$$

Die Adjunktionsformel liefert

$$K_{X/Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_X \otimes f^* \det E \otimes f^* L'.$$

Damit erhalten wir mit $K_{X/Y} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_X$

$$L' = \det E^*.$$

Der Isomorphismus

$$H^0\big(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^* \det E^*\big) \cong H^0(Y, S^2E \otimes \det E^*)$$

liefert den gewünschten Schnitt $\sigma \in H^0(Y, S^2E \otimes \det E^*)$. □

Eine einfache, aber für unsere Zwecke wichtige Folgerung:

Korollar 3.3. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Konikbündel über einer projektiven Mannigfaltigkeit Y. Dann ist auch X projektiv.*

Projektivierte Rang-2-Bündel liefern einen speziellen Typ von Konikbündeln, für den das Bündel E aus Proposition 3.2 explizit berechnet werden kann:

Proposition 3.4. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Konikbündel derart, dass ein Rang-2-Bündel V auf Y existiert, so dass $f\colon X \to Y$ isomorph zu $\mathbb{P}(V) \to Y$ ist. Dann ist*

$$f_*(K^*_{X/Y}) \cong S^2V \otimes \det V^*.$$

Beweis. Aus der relativen Eulersequenz erhalten wir

$$K_{\mathbb{P}(V)/Y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-2) \otimes \det V,$$

was nach Dualisieren und Pushforward die Behauptung liefert. □

Für allgemeine Konikbündel definiert der in Proposition 3.2 konstruierte Schnitt $\sigma \in H^0(S^2 E \otimes \det E^*)$ vermöge der kanonischen Einbettung

$$S^2 E \otimes \det E^* \subset E \otimes E \otimes \det E^* \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(E^*, E \otimes \det E^*)$$

einen Schnitt

$$\det \sigma \in H^0\Big(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}\big(\det E^*, (\det E^*)^{\otimes 2}\big)\Big) \cong H^0(\det E^*).$$

Proposition 3.5. *In der Situation von Proposition 3.2 ist die Faser X_y genau dann glatt, wenn $\det \sigma(y) \neq 0$ ist.*

Beweis. Offenbar ist X_y genau dann glatt, wenn $\sigma(y)$ eine quadratische Form vollen Ranges auf $E(y)$ darstellt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det \sigma(y) \neq 0$ ist. □

Da die allgemeine Faser eines Konikbündels glatt ist, liefert $\det \sigma$ einen wohldefinierten Divisor auf Y:

Definition 3.6. Sei $f\colon X \to Y$ ein Konikbündel, $E := f_*(K^*_{X/Y})$. Dann heißt der durch den eben konstruierten Schnitt $\det \sigma \in H^0(\det E^*)$ definierte Divisor

$$\Delta_f := (\det \sigma = 0) \in |\det E^*|$$

der *Diskriminantenort* von f.

Für den Diskriminantenort eines Konikbündels gelten folgende Eigenschaften:

Proposition 3.7 ([Sar82, Proposition 1.8])**.** *Sei $f\colon X \to Y$ ein Konikbündel, $m := \dim Y$, $E := f_*(K^*_{X/Y})$, und $\Delta_f \in |\det E^*|$ der Diskriminantenort von f. Dann gilt für die definierende quadratische Form $\sigma \in H^0(S^2 E \otimes \det E^*)$ von X (vgl. Proposition 3.2) für jeden Punkt $y \in Y$:*

(i) $\operatorname{rk} \sigma(y) = 3 \Rightarrow y \in Y \setminus \operatorname{supp} \Delta_f$,

(ii) $\operatorname{rk} \sigma(y) = 2 \Rightarrow y \in \operatorname{supp} \Delta_f \setminus \operatorname{sing} \Delta_f$,

(iii) $\operatorname{rk}\sigma(y) = 1 \Rightarrow y \in \operatorname{sing}\Delta_f$ *und es existieren lokale Koordinaten* $(z_1, \ldots, z_m)$ *um den Punkt* y *derart, dass entweder*

$$\det\sigma(z_1, \ldots, z_m) \equiv z_1^2 + z_2^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3} \tag{3.1}$$

oder

$$\det\sigma(z_1, \ldots, z_m) \equiv z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3} \tag{3.2}$$

in einer Umgebung von y.

Insbesondere ist Δ_f *reduziert.*

Beweis. (i) Klar nach Definition von Δ_f.

(ii) Wir wählen eine offene Umgebung $U \subset Y$ von y derart, dass $\mathbb{P}(E|_U) \cong \mathbb{P}_2 \times U$ über U. Nach evtl. Verkleinerung von U und einer geeigneten Koordinatentransformation in $\mathbb{P}_2$ können wir erreichen, dass holomorphe Funktionen A, $B \in \mathcal{O}^*(U)$, $C \in \mathfrak{m}_y(U)$ derart existieren, dass $X_U \subset \mathbb{P}(E|_U) \cong \mathbb{P}_2 \times U$ gegeben ist durch

$$X_U = \left\{ \big((x_0 : x_1 : x_2), z\big) \in \mathbb{P}_2 \times U \;\middle|\; A(z)\, x_0^2 + B(z)\, x_1^2 + C(z)\, x_2^2 = 0 \right\}.$$

Offenbar ist dann

$$\Delta_f|_U = (C = 0).$$

Setzen wir für $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2$, $z \in U$

$$F\big((x_0 : x_1 : x_2), z\big) := A(z)\, x_0^2 + B(z)\, x_1^2 + C(z)\, x_2^2,$$

so ist

$$dF = 2Ax_0\, dx_0 + 2Bx_1\, dx_1 + 2Cx_2\, dx_2 + x_0^2\, dA + x_1^2\, dB + x_2^2\, dC. \tag{3.3}$$

Wegen $C(y) = 0$ ist $p := \big((0 : 0 : 1), y\big) \in X_U$. Da X glatt ist, muss $dF_p \neq 0$ sein. Nach (3.3) ist aber $dF_p = dC_y$, also ist Δ_f im Punkt y glatt.

(iii) Wir wählen eine offene Umgebung $U \subset Y$ von y und einen geeigneten Isomorphismus $\mathbb{P}(E|_U) \cong \mathbb{P}_2 \times U$ derart, dass holomorphe Funktionen $A \in \mathcal{O}^*(U)$, B, C, $D \in \mathfrak{m}_y(U)$ existieren mit

$$X_U = \Big\{ \big((x_0 : x_1 : x_2), z\big) \in \mathbb{P}_2 \times U \;\Big|\; A(z)\, x_0^2 + B(z)\, x_1^2 + 2C(z)\, x_1 x_2 + D(z)\, x_2^2 = 0 \Big\}.$$

Wir bekommen

$$\Delta_f|_U = (BD - C^2 = 0),$$

also ist wegen $B, C, D \in \mathfrak{m}_y(U)$ insbesondere $y \in \operatorname{sing} \Delta_f$. Des Weiteren ist für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ der Punkt $\big((0 : x_1 : x_2), y\big)$ in X_U enthalten und mit

$$F\big((x_0 : x_1 : x_2), z\big) := A(z)\, x_0^2 + B(z)\, x_1^2 + 2C(z)\, x_1 x_2 + D(z)\, x_2^2$$

erhalten wir

$$dF_{\big((0:x_1:x_2),y\big)} = x_1^2\, dB_y + 2x_1x_2\, dC_y + x_2^2\, dD_y. \tag{3.4}$$

Da X glatt ist, muss $dF_{\big((0:x_1:x_2),y\big)} \neq 0$ sein für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Dies ist nur möglich, wenn der Untervektorraum

$$V := \langle dB_y, dC_y, dD_y \rangle \subset T_y^*Y$$

mindestens Dimension 2 hat.

Ist $\dim V = 2$, so nehmen wir zunächst an, dass dB_y und dC_y linear unabhängig sind. Es existieren dann $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit

$$dD_y = \beta\, dB_y + \gamma\, dC_y. \tag{3.5}$$

Aus (3.4) erhalten wir in diesem Fall

$$dF_{\big((0:x_1:x_2),y\big)} = (x_1^2 + \beta x_2^2)\, dB_y + (2x_1x_2 + \gamma x_2^2)\, dC_y. \tag{3.6}$$

Wir haben nun

$$\beta \neq -\tfrac{1}{4}\gamma^2, \tag{3.7}$$

denn wäre $\beta = -\frac{1}{4}\gamma^2$, so wäre für jedes $x_2 \in \mathbb{C}$

$$(-\tfrac{1}{2}\gamma x_2)^2 + \beta x_2^2 = 0$$

und

$$2(-\tfrac{1}{2}\gamma x_2)x_2 + \gamma x_2^2 = 0,$$

was wegen (3.6) im Widerspruch zur Glattheit von X steht. Wegen (3.5) ist

$$D \equiv \beta B + \gamma C \pmod{\mathfrak{m}_y^2},$$

also

$$\det \sigma \equiv B(\beta B + \gamma C) - C^2 = (\beta + \tfrac{1}{4}\gamma^2)B^2 - (C - \tfrac{1}{2}\gamma B)^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3}.$$

Da dB_y und dC_y linear unabhängig sind, sind B und $C - \frac{1}{2}\gamma B$ lokale Koordinaten von U um y, also bekommen wir wegen (3.7) eine Darstellung der Form (3.1).

Sind im Falle $\dim V = 2$ die Differentiale dB_y und dD_y linear unabhängig, so existieren $\beta, \delta \in \mathbb{C}$ mit

$$dC_y = \beta\, dB_y + \delta\, dD_y. \tag{3.8}$$

Aus (3.4) ergibt sich dann

$$dF_{\left((0:x_1:x_2),y\right)} = (x_1^2 + 2\beta x_1 x_2)\, dB_y + (x_2^2 + 2\delta x_1 x_2)\, dD_y. \tag{3.9}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \det\sigma &\equiv BD - (\beta B + \delta D)^2 \\ &= -\beta^2 B^2 + (1 - 2\beta\delta) BD - \delta^2 D^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

also eine quadratische Form in den lokalen Koordinaten B und D. Hat diese vollen Rang, so bekommen wir eine Darstellung der Form (3.1). Wir nehmen also an, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix der quadratischen Form aus (3.10) verschwindet, d. h.

$$0 = \beta^2\delta^2 - (\tfrac{1}{2} - \beta\delta)^2 = \beta\delta - \tfrac{1}{4} \tag{3.11}$$

ist. Dann ist für jedes $x_2 \in C$

$$(-2\beta x_2)^2 + 2\beta(-2\beta x_2)x_2 = 0$$

und

$$x_2^2 + 2\delta(-2\beta x_2)x_2 = 0,$$

was wegen (3.9) der Glattheit von X widerspricht.

Ist $\dim V = 3$, so ist

$$\det\sigma \equiv BD - C^2 = \tfrac{1}{4}(B + D)^2 - \tfrac{1}{4}(B - D)^2 - C^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3};$$

dies ist eine Darstellung der Form (3.2), da $B + D$, $B - D$ und C wegen der linearen Unabhängigkeit von dB_y, dC_y und dD_y lokale Koordinaten von U um y sind.

Wäre Δ_f in der Umgebung eines Punktes $y \in Y$ nicht reduziert, so gäbe es Funktionen $g \in \mathfrak{m}_y(U)$, $h \in \mathcal{O}(U)$ auf einer Umgebung $U \subset Y$ von y derart, dass $\det\sigma|_U = g^2 h$ ist. Ist $h \in \mathfrak{m}_y(U)$, so ist $\det\sigma|_U \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}_y^3}$; ist ohne Einschränkung $h(y) = 1$, so ist $\det\sigma|_U \equiv g^2 \pmod{\mathfrak{m}_y^3}$. Keiner der beiden Fälle ist kompatibel mit (3.1) bzw. (3.2). □

Speziell für deformationstheoretische Anwendungen ist es wichtig, über eine genauere Beschreibung des Tangentialbündels eines Konikbündels zu verfügen. Wir haben zunächst folgende Aussage für das relative Tangentialbündel $T_{X/Y} := \mathcal{H}om(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$:

Proposition 3.8. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein Konikbündel. Dann ist*

$$T_{X/Y} = K^*_{X/Y}.$$

Beweis. Dualisieren der relativen Kotangentialsequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

liefert die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_{X/Y} \longrightarrow T_X \longrightarrow f^*T_Y \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0. \tag{3.12}$$

Definiere

$$S := \operatorname{supp} \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X).$$

Nach (3.12) ist

$$S = \{\, x \in X \mid x \in \operatorname{sing} X_{f(x)} \,\},$$

also insbesondere $f(S) \subset \Delta_f$. Sei S_0 eine irreduzible Komponente von S. Ist $f(S_0) \subseteq \operatorname{sing} \Delta_f$, so ist

$$\operatorname{codim}_X S_0 \geqslant \operatorname{codim}_Y \operatorname{sing} \Delta_f \geqslant 2,$$

da Δ_f nach Proposition 3.7 reduziert ist; ist $f(S_0) \nsubseteq \operatorname{sing} \Delta_f$, so gilt $f(s) \in \operatorname{supp} \Delta_f \setminus \operatorname{sing} \Delta_f$ für allgemeines $s \in S_0$, also hat nach Proposition 3.7 die definierende quadratische Form von f im Punkt $f(s)$ Rang 2; damit ist insbesondere s der einzige singuläre Punkt der Faser $X_{f(s)}$. Die Abbildung $f|_{S_0}\colon S_0 \to f(S_0)$ ist also ein generischer Isomorphismus, deshalb ist insbesondere

$$\dim S_0 = \dim f(S_0) \leqslant \dim \Delta_f \leqslant \dim X - 2.$$

Insgesamt bekommen wir

$$\operatorname{codim}_X S \geqslant 2$$

und somit

$$\det \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X.$$

Da $T_{X/Y}$ eine reflexive Garbe von Rang 1 ist, folgt damit aus (3.12)

$$T_{X/Y} = \det T_{X/Y} = \det T_X \otimes (\det f^*T_Y)^* = K^*_X \otimes f^*K_Y = K^*_{X/Y}. \qquad \square$$

Damit bekommen wir:

Proposition 3.9. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein Konikbündel. Dann gibt es einen komplexen Unterraum* $R \subset X$ *von Kodimension* $\geqslant 2$ *mit* $f(R) \subset \Delta_f$ *und eine kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow K_{X/Y} \longrightarrow K_{X/Y}|_R \longrightarrow 0. \tag{3.13}$$

Insbesondere ist $\Omega^1_{X/Y}$ *torsionsfrei.*

Beweis. Nach Proposition 3.8 ist $(\Omega^1_{X/Y})^{**} \cong K_{X/Y}$. Damit genügt es zu zeigen, dass $\Omega^1_{X/Y}$ torsionsfrei ist; die Sequenz (3.13) ergibt sich dann automatisch.

Um die Torsionsfreiheit von $\Omega^1_{X/Y}$ zu zeigen, verwenden wir die Einbettung $X \subset \mathbb{P}(E)$ mit $E := f_*(K^*_{X/Y})$ gemäß Proposition 3.2. Wir bekommen eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow N^*_{X|\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Herausdividieren der Torsion von $\Omega^1_{X/Y}$ liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dr, hook] & & & \\
0 \arrow[r] & N^*_{X|\mathbb{P}(E)} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\alpha"'] & \Omega^1_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \arrow[r] \arrow[dr, "\beta"'] & \Omega^1_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & 0, \\
& & & \Omega^1_{X/Y}/\mathrm{tor} &
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

wobei $K := \ker\beta$ ist. Da $\Omega^1_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X$ ein Vektorbündel, also insbesondere reflexiv, und $\Omega^1_{X/Y}/\mathrm{tor}$ torsionsfrei ist, ist K reflexiv. Da K außerdem Rang 1 hat, ist K also ein Geradenbündel. Da $\Omega^1_{X/Y}$ lokalfrei außerhalb einer analytischen Menge $S \subset X$ von Kodimension 2 ist (vgl. Beweis zu Proposition 3.8), ist α außerhalb von S eine Inklusion von Vektorbündeln. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms (3.14) muss damit γ außerhalb von S ein Isomorphismus sein. Da $N^*_{X|\mathbb{P}(E)}$ und K Geradenbündel sind, ist γ damit auf ganz X ein Isomorphismus. Daraus ergibt sich $\Omega^1_{X/Y} \cong \Omega^1_{X/Y}/\mathrm{tor}$. □

Es folgt:

Korollar 3.10. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein Konikbündel,* $E := f_*(K^*_{X/Y})$*. Dann ist* $f_*(\Omega^1_{X/Y} \otimes K_X) = 0$.

Beweis. Für allgemeines $y \in Y$ ist $X_y \cong \mathbb{P}_1$ und $(\Omega^1_{X/Y} \otimes K_X)|_{X_y} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-4)$, also $\big(f_*(\Omega^1_{X/Y} \otimes K_X)\big)_y = 0$. Nach Proposition 3.9 ist aber $\Omega^1_{X/Y}$ und damit auch $f_*(\Omega^1_{X/Y} \otimes K_X)$ torsionsfrei, also folgt die Behauptung. □

Als Anwendung erhalten wir die Verschwindung der höchsten Kohomologiegruppe des Tangentialbündels eines Konikbündels:

Proposition 3.11. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel und* $n := \dim X$. *Dann ist*

$$H^n(T_X) = 0.$$

Beweis. Nach Serredualität ist

$$H^n(T_X) \cong H^0(\Omega^1_X \otimes K_X).$$

Tensorieren der relativen Kotangentialsequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_Y \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

mit K_X und anschließendes Anwenden des Funktors f_* liefert mittels Korollar 3.10:

$$f_*(\Omega^1_X \otimes K_X) \cong \Omega^1_Y \otimes f_*K_X = 0.$$

Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. □

3.2 Deformationstheorie

In Kodairas Deformationstheorie für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten X spielen die Vektorräume $H^1(T_X)$ bzw. $H^2(T_X)$ eine wichtige Rolle als Räume der infinitesimalen Deformationen bzw. der Obstruktionen von X. Einen erster Schritt zum Verständnis dieser Räume liefert die Berechnung der Eulercharakteristik von T_X:

Proposition 3.12. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel und* $E := f_*(K^*_{X/Y})$. *Dann gilt:*

$$\chi(T_X) = \chi(T_Y) + \chi(E \otimes E^*) - \chi(S^2E \otimes \det E^*).$$

Beweis. Sei $\pi\colon \mathbb{P}(E) \to Y$ die natürliche Projektion. Dann folgt die Behauptung aus den kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow T_X \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)}|_X \longrightarrow N_{X|\mathbb{P}(E)} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)}|_X \longrightarrow f^*(T_Y) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^* \det E^* \longrightarrow N_{X|\mathbb{P}(E)} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-2) \otimes \pi^* \det E \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \pi^*E^* \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \longrightarrow 0$$

unter Verwendung von

$$R^q\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(k) = \begin{cases} S^kE, & \text{falls } q = 0, \\ 0, & \text{falls } q > 0, \end{cases} \qquad \text{für alle } k \geqslant 0$$

sowie

$$H^q\big(T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-2) \otimes \pi^* \det E\big) = 0 \qquad \text{für alle } q \geqslant 0. \qquad \square$$

Die infinitesimalen relativen Deformationen eines Konikbündels $f\colon X \to Y$ über festgehaltenem Y werden durch den Vektorraum $\mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$ beschrieben. Für die Dimension dieses Raumes gilt folgende Abschätzung:

Proposition 3.13. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel,* $E := f_*(K^*_{X/Y})$. *Dann ist*

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \leqslant h^0(S^2E \otimes \det E^*) + h^1(E \otimes E^*) + h^1(\mathcal{O}_Y) - 2.$$

Beweis. Die Behauptung folgt aus den langen exakten Sequenzen zu

$$0 \longrightarrow N^*_{X|\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(2) \otimes \pi^* \det E^* \longrightarrow N_{X|\mathbb{P}(E)} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-2) \otimes \pi^* \det E \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y}|_X \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \pi^*E^* \longrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/Y} \longrightarrow 0,$$

wenn man berücksichtigt, dass der Pushforward der letzten Sequenz auf Y spaltet (vgl. Sequenz 2.3). $\square$

Die folgende Verallgemeinerung eines Resultats aus [DEP05] ist ein Spezialfall von Korollar 2.27, der ohne Anwendung der allgemeinen Theorie aus Abschnitt 2.2 bewiesen werden kann:

Satz 3.14. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel,* $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ *die Einheitskreisscheibe und* $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ *eine Deformation von* $X = \mathcal{X}_0$. *Dann existiert eine offene Umgebung* $U \subset \Delta$ *von* 0, *eine Deformation* $\psi\colon \mathcal{Y} \to U$ *von* $Y = \mathcal{Y}_0$ *und eine holomorphe Abbildung* $F\colon \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}$ *über* U *derart, dass* $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ *und* $F\colon \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}$ *ein Konikbündel ist (in der Sprechweise von Abschnitt 2.2 heißt dies, dass* f *quellstabil ist).*

Beweis. Sei $\mathcal{D}$ die irreduzible Komponente des Douadyraums von $\mathcal{X}$, die die Fasern von f enthält, $\mathcal{C} \subset \mathcal{X} \times \mathcal{D}$ die zugehörige universelle Familie und $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $q\colon \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ die natürlichen Projektionen. Nach Konstruktion des Douadyraums ist p eigentlich und flach. Für jeden Punkt $d \in \mathcal{D}$ ist somit

$p^{-1}(d)$ kompakt und daher $\pi\Big(q\big(p^{-1}(d)\big)\Big)$ ein Punkt. Damit bekommen wir eine holomorphe Abbildung $\psi\colon \mathcal{D} \to \Delta$ derart, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "\psi"'] & \Delta \end{tikzcd} \tag{3.15}$$

kommutiert. Insbesondere ist auch $\mathcal{C}$ ein komplexer Raum über Δ, und p sowie q sind Morphismen über Δ. Für $t \in \Delta$ bezeichnen wir mit $\mathcal{D}_t$, $\mathcal{C}_t$, p_t bzw. q_t die jeweiligen Einschränkungen im Sinne eines Faserprodukts über Δ.

Aus der universellen Eigenschaft des Douadyraums erhalten wir eine holomorphe Abbildung $\alpha\colon Y \to \mathcal{D}_0$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{C}_0 \arrow[r, "q_0"] \arrow[d, "p_0"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{D}_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.16}$$

derart, dass f der Rückzug von p_0 entlang α ist und $q_0 \circ \beta = \mathrm{id}_X$ ist. Nach Konstruktion ist $\mathcal{D}_0$ gerade die irreduzible Komponente des Douadyraums von $X = \mathcal{X}_0$, die die Fasern von f enthält. Da das Normalenbündel jeder Faser von f in X trivial ist (vgl. Proposition 3.2), ist $\mathcal{D}_0$ in allen Punkten im Bild von α glatt. Dies impliziert, dass α ein Isomorphismus ist. Damit sind auch β und q_0 Isomorphismen.

Wir haben für jede Faser Q von f eine Sequenz

$$0 \longrightarrow N_{Q|X} \longrightarrow N_{Q|\mathcal{X}} \longrightarrow N_{X|\mathcal{X}}|_Q \longrightarrow 0.$$

Da sowohl $N_{X|\mathcal{X}}$ als auch $N_{Q|X}$ trivial sind, und $H^1(\mathcal{O}_Q) = 0$ ist, folgt, dass auch $N_{Q|\mathcal{X}}$ trivial ist. Daraus ergibt sich, dass (nach eventueller Verkleinerung von Δ) der Raum $\mathcal{D}$ glatt von Dimension $N + \dim Y$ ist. Aus Äquidimensionalitätsgründen ist dann ψ flach. Da q_0 ein Isomorphismus ist, folgt, dass für t nahe bei 0 auch q_t ein Isomorphismus ist.

Es bleibt zu zeigen, dass nach genügender Verkleinerung von Δ die Abbildung $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Konikbündel ist. Sei dazu $\mathcal{E} := p_*(K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}})$. Da die allgemeine Faser von p_0 isomorph zu $\mathbb{P}_1$ ist, ist auch die allgemeine Faser F_g von p isomorph zu $\mathbb{P}_1$, denn $\mathbb{P}_1$ ist starr. Da p_0 generisch submersiv ist, gilt dies auch für p. Dies bedeutet, dass die allgemeine Faser F_g von p triviales Normalenbündel hat. Somit folgt aus der Adjunktionsformel:

$$K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}|_{F_g} = K^*_{F_g} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(2),$$

also folgt $h^0(K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}|_{F_g}) = 3$. Andererseits ist aber für *jede* Faser Q von p_0 die Dimension $h^0(K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}|_Q) = 3$ (siehe Beweis zu Proposition 3.2). Aus dem Halbstetigkeitssatz folgt, dass (nach Verkleinern von Δ) für *jede* Faser F von p die Dimension $h^0(K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}|_F) = 3$ ist. Die kanonische Abbildung

$$p^*\mathcal{E} \longrightarrow K^*_{\mathcal{C}/\mathcal{D}}$$

liefert eine meromorphe Abbildung

$$\iota\colon \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}).$$

Nach Proposition 3.2 ist $\iota_0\colon X \cong \mathcal{C}_0 \to \mathbb{P}(\mathcal{E}|_{\mathcal{D}_0})$ eine holomorphe Einbettung, also ist nach Verkleinerung von Δ auch ι eine holomorphe Einbettung, die die Fasern von p als Koniken in die Fasern des $\mathbb{P}_2$-Bündels $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ einbettet. □

In der Situation projektivierter Rang-2-Bündel lässt sich noch mehr sagen:

Proposition 3.15. *Es seien $\Delta \subset \mathbb{C}^N$ die Einheitskreisscheibe und $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ bzw. $\psi\colon \mathcal{Y} \to \Delta$ Deformationen der kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten $\mathcal{X}_0$ bzw. $\mathcal{Y}_0$. Es sei weiter $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein $\mathbb{P}_1$-Bündel über Δ derart, dass ein Rang-2-Bündel V auf $\mathcal{Y}_0$ existiert, so dass $F|_{\mathcal{X}_0}\colon \mathcal{X}_0 \to \mathcal{Y}_0$ isomorph zu $\mathbb{P}(V) \to \mathcal{Y}_0$ ist. Dann existiert für jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}\mathcal{Y}$ mit $\mathcal{L}|_{\mathcal{Y}_0} \cong \det V$ ein Rang-2-Bündel $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{Y}$ mit $\mathcal{V}|_{\mathcal{X}_0} \cong V$ und $\det\mathcal{V} \cong \mathcal{L}$ derart, dass $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ isomorph zu $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \to \mathcal{Y}$ ist.*

Beweis. (vgl. [DEP05, Proposition 2]) Wir setzen

$$\mathcal{G} := K^*_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} \otimes F^*\mathcal{L}$$

und

$$\mathcal{G}_t := \mathcal{G}|_{\mathcal{X}_t}$$

für $t \in \Delta$. Nach der Formel für das kanonische Bündel eines projektivierten Vektorbündels ist dann

$$\mathcal{G}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(2),$$

also existiert insbesondere eine „Quadratwurzel" von $\mathcal{G}_0$ (d. h. ein $Q \in \operatorname{Pic}\mathcal{X}_0$ mit $Q^{\otimes 2} \cong \mathcal{G}_0$). Die Obstruktion für die Existenz einer Quadratwurzel eines Geradenbündels auf $\mathcal{X}_t$ liegt in $H^2(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) =: G_t$. Die G_t bilden ein lokales System diskreter abelscher Gruppen über Δ; das Verschwinden der Obstruktion für $\mathcal{G}_0$ impliziert damit das Verschwinden der Obstruktion für $\mathcal{G}_t$ für alle $t \in \Delta$. Damit ergibt sich die Existenz eines Geradenbündels $\mathcal{Q} \in \operatorname{Pic}\mathcal{X}$ mit $\mathcal{Q}^{\otimes 2} \cong \mathcal{G}$ und $\mathcal{Q}|_{\mathcal{X}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$. Da die Einschränkung von $\mathcal{Q}$ auf jede Faser von F Grad 1 hat, ist

$$\mathcal{V} := F_*\mathcal{Q}$$

ein Rang-2-Bündel auf $\mathcal{Y}$ mit den gewünschten Eigenschaften. □

Unter gewissen Umständen lassen sich Deformationen des Basisraums eines Konikbündels zu Deformationen des Konikbündels „hochheben“:

Proposition 3.16. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel mit der Eigenschaft, dass* $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) = 0$ *ist. Dann existiert für jede Deformation* $\psi\colon \mathcal{Y} \to \Delta$ *(*$\Delta \subset \mathbb{C}^N$ *die Einheitskreisscheibe) von* $Y = \mathcal{Y}_0$ *eine offene Umgebung* $U \subset \Delta$ *von* 0*, eine Deformation* $\pi\colon \mathcal{X} \to U$ *von* $X = \mathcal{X}_0$ *und eine holomorphe Abbildung* $F\colon \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}$ *derart, dass* $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ *und* $F\colon \mathcal{X}_U \to \mathcal{Y}$ *ein Konikbündel ist.*

Beweis. Die Existenz von $\mathcal{X}$ und der Fortsetzung F von f ist eine direkte Folgerung aus Proposition 2.19. Die Tatsache, dass F ein Konikbündel ist, erhält man wie im Beweis zu Satz 3.14. □

Als Anwendungsbeispiel folgt eine spezielle Variante von Satz 2.22:

Satz 3.17. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel. Ist* Y *algebraisch approximierbar und* $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) = 0$*, so ist auch* X *algebraisch approximierbar.*

Beweis. Direkte Konsequenz aus Proposition 3.16 und Korollar 3.3. □

Leider ist dieses Kriterium in sehr vielen der für uns interessanten Situationen nicht anwendbar:

Proposition 3.18. *Sei* S *eine K3-Fläche oder ein zweidimensionaler Torus,* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel mit* $\operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) = 0$*. Dann ist* f *ein* $\mathbb{P}_1$*-Bündel.*

Beweis. Sei $\psi\colon \mathcal{S} \to \Delta$ eine verselle Deformation von $S = \mathcal{S}_0$ ($\Delta \subset \mathbb{C}^N$ die Einheitskreisscheibe). Nach evtl. Verkleinerung von Δ existiert nach Proposition 3.16 eine Deformation $\pi\colon \mathcal{X} \to \Delta$ von $X = \mathcal{X}_0$ und eine holomorphe Abbildung $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ derart, dass $F|_{\mathcal{X}_0} = f$ und F ein Konikbündel ist. Definiere $\mathcal{E} := F_*(K^*_{\mathcal{X}/\mathcal{S}})$.

Aus dem lokalen Satz von Torelli folgt die Existenz einer Folge $(t_k) \subset \Delta$ mit $t_K \to 0$ für $k \to \infty$ derart, dass für alle k

$$\rho(\mathcal{S}_{t_k}) = 0$$

ist. Dies impliziert, dass auf $\mathcal{S}_{t_k}$ keine Kurven existieren. Insbesondere ist für das Konikbündel $F_{t_k} := F|_{\mathcal{X}_{t_k}} \colon \mathcal{X}_{t_k} \to \mathcal{S}_{t_k}$ der Diskriminantendivisor $\Delta_{F_{t_k}} = 0$. Da $\Delta_{F_{t_k}}$ durch einen nichttrivialen Schnitt in $H^0(\det \mathcal{E}^*|_{\mathcal{X}_{t_k}})$ gegeben wird, bekommen wir

$$\det \mathcal{E}^*|_{\mathcal{X}_{t_k}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{t_k}}.$$

Aus Stetigkeitsgründen folgt, dass $\det \mathcal{E}^*|_{\mathcal{X}_0}$ numerisch trivial ist. Der Diskriminantendivisor von f liefert aber einen nichttrivialen Schnitt in $H^0(\det \mathcal{E}^*|_{\mathcal{X}_0})$. Damit muss

$$\det \mathcal{E}^*|_{\mathcal{X}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$$

und somit $\Delta_f = 0$ sein. □

Zur Anwendung von Satz 3.17 für $\mathbb{P}_1$-Bündel erweist sich folgender Hilfssatz als nützlich:

Lemma 3.19. *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes* $\mathbb{P}_1$*-Bündel und* $E := f_*(K^*_{X/Y})$*. Dann ist*

$$\mathrm{Ext}^q(\Omega^1_{X/Y}, \mathcal{O}_X) \cong H^q(T_{X/Y}) \cong H^q(E) \qquad \text{für alle } q \geqslant 0.$$

3.3 Konikbündel mit relativer Picardzahl 1

Kompakte Konikbündel $f\colon X \to Y$ mit $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ spielen eine wichtige Rolle, da sie im Moriprogramm als Kontraktionen extremaler Strahlen auftreten. Für spätere Zwecke ist folgende Eigenschaft solcher Konikbündel wichtig:

Proposition 3.20 (vgl. [Miy83, Lemma 4.5])**.** *Sei* $f\colon X \to Y$ *ein kompaktes Konikbündel mit* $\rho(X) = \rho(Y) + 1$*. Dann ist für jeden irreduziblen Divisor* $D \subset Y$ *auch* $f^{-1}(D) \subset X$ *irreduzibel.*

Beweis. Sei $D \subset Y$ ein irreduzibler reduzierter Divisor. Wegen Proposition 3.7 ist für allgemeines $y \in \operatorname{supp} D$ die Faser X_y reduziert, also ist $F := f^*(D)$ ein reduzierter Divisor auf X. Es sei

$$F = \sum_{i=1}^{r} F_i$$

die Zerlegung von F in irreduzible Komponenten. Da alle Fasern von f eindimensional sind, ist $f(F_i) = D$ für alle i. Dies bedeutet, dass für allgemeines $y \in D$ für jedes $i = 1, \ldots, r$ der Durchschnitt $C_i := F_i \cap X_y$ eine nichtleere reduzierte Kurve ist, so dass für $i \neq j$ die beiden Kurven C_i und C_j keine gemeinsamen Komponenten haben. Da X_y eine Konik im $\mathbb{P}_2$ ist, folgt daraus insbesondere, dass $r \leqslant 2$ ist. Wir nehmen an, dass $r = 2$ ist. Da $y \in D$ allgemein gewählt wurde, ist X_y nach Proposition 3.7 ein Paar sich transversal schneidender Geraden. Dies bedeutet insbesondere, dass $F_1 \cdot C_2 = 1$ ist. Da weiterhin offenbar $F_1 \cdot X_y = 0$ ist, existiert wegen $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ ein Geradenbündel $L_1 \in \operatorname{Pic} Y$ derart, dass $F_1 \equiv f^*L_1$ ist. Damit ist aber $F_1 \cdot C_2 = L_1 \cdot f_*C_2 = 0$ im Widerspruch zur obigen Rechnung. □

4 Konikbündel über Flächen

Wir möchten einige Spezialisierungen und Konsequenzen von Aussagen aus dem vorigen Kapitel für Konikbündel über Flächen angeben. Anschließend soll der Diskriminantenort von Konikbündeln mit relativer Picardzahl 1 genauer studiert werden. Dies ermöglicht den Beweis der Existenz infinitesimaler Deformationen solcher Konikbündel über nichtalgebraischen Kählerflächen.

4.1 Allgemeines

Im weiteren Verlauf erweist sich das folgende Verschwindungsresultat als hilfreich:

Proposition 4.1. *Sei* S *eine Fläche,* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel. Dann ist*

$$\operatorname{Ext}^3(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) = 0$$

und es gibt eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(T_{X/S}) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0\big(\mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)\big) \\ \longrightarrow H^2(T_{X/S}) &\longrightarrow \operatorname{Ext}^2(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1\big(\mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)\big) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Beweis. Aus Proposition 3.8 und der Leray-Spektralsequenz bekommen wir

$$H^3(T_{X/S}) = 0.$$

Des Weiteren folgt aus der relativen Kotangentialsequenz

$$\mathcal{E}xt^q(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad \text{für } q \geqslant 2$$

und

$$\dim \operatorname{supp} \mathcal{E}xt^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \leqslant 1.$$

Damit folgt die Behauptung aus der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p\big(\mathcal{E}xt^q(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X)\big) \Rightarrow \operatorname{Ext}^{p+q}(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X). \qquad \square$$

Proposition 4.2. *Sei* S *eine kompakte Fläche,* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel und* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Dann ist*

$$\chi(T_X) = -c_2(E) + c_1(E)\,c_1(S) + 2\,c_1^2(S) - 7\,\chi(\mathcal{O}_S).$$

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.12 unter Verwendung der Berechnungen aus Anhang A. □

Aus Proposition 4.2 erhalten wir

Korollar 4.3. *Sei* S *eine kompakte Fläche,* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel und* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Sei* $\mathcal{K}$ *der Kuranishiraum von* X*. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{K} &\geqslant h^1(T_X) - h^2(T_X) = h^0(T_X) - \chi(T_X)\\ &\geqslant c_2(E) - c_1(E)\,c_1(S) - 2\,c_1^2(S) + 7\,\chi(\mathcal{O}_S).\end{aligned}$$

Beweis. Propositionen 4.2 und 3.11. □

Im Fall eines projektivierten Rang-2-Bündels wird die Formel aus Proposition 4.2 zu

Proposition 4.4. *Sei* S *eine kompakte Fläche,* V *ein Rang-2-Vektorbündel auf* S*. Dann gilt*

$$\chi(T_{\mathbb{P}(V)}) = -4\,c_2(V) + c_1^2(V) + 2\,c_1^2(S) - 7\,\chi(\mathcal{O}_S).$$

Beweis. Folgt direkt aus Proposition 4.2 unter Verwendung von Proposition 3.4 und den Berechnungen aus Anhang A. □

4.2 Konikbündel über K3-Flächen

Als Anwendungsbeispiel für die allgemeinen Formeln sollen in diesem Abschnitt Abschätzungen für die Dimensionen von Deformationsräumen von Konikbündeln über K3-Flächen hergeleitet werden.

Aus Proposition 4.2 erhalten wir

Proposition 4.5. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer K3-Fläche* S *und* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Dann ist*

$$\chi(T_X) = -c_2(E) - 14,$$

also gilt für den Kuranishiraum $\mathcal{K}$ *von* X*:*

$$\dim \mathcal{K} \geqslant c_2(E) + 14.$$

Beweis. Proposition 4.2 und Korollar 4.3. □

Für die relativen Deformationen bekommen wir

Proposition 4.6. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer K3-Fläche* S *und* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Dann ist*

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \leqslant{}& h^0(S^2E \otimes \det E^*) + 2h^0(E \otimes E^*)\\ &+ 6\,c_2(E) - 2\,c_1^2(E) - 20.\end{aligned}$$

Beweis. Proposition 3.13 und Anhang A. □

4.3 Geometrie des Diskriminantenorts

Im Falle, dass der Basisraum eines Konikbündels eine Fläche ist, lässt sich der Diskriminantenort recht genau charakterisieren:

Proposition 4.7. *Sei* S *eine Fläche und* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel. Dann ist* Δ_f *eine reduzierte Kurve mit höchstens gewöhnlichen Doppelpunkten als Singularitäten.*

Beweis. Nach Proposition 3.7 werden die einzig möglichen Singularitäten von Δ_f durch (3.1) beschrieben. □

Für den Fall der relativen Picardzahl 1 gilt:

Proposition 4.8 ([Miy83, Remark 4.2])**.** *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Fläche* S *derart, dass für jede irreduzible Kurve* $C \subset S$ *auch* $f^{-1}(C) \subset X$ *irreduzibel ist. Dann schneidet jede glatte rationale Komponente von* Δ_f *andere Komponenten von* Δ_f *in mindestens zwei Punkten.*

Beweis. Wir definieren wie immer $E := f_*(K^*_{X/S})$. Sei C eine glatte rationale Komponente von Δ_f. Dann ist für alle $c \in C$ die Faser $f^{-1}(c)$ ein Paar von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Geraden in $\mathbb{P}(E_c)$. Fassen wir diese Geraden als Punkte in $\mathbb{P}(E^*_c)$ auf, so bekommen wir eine $2:1$-Überlagerung $\nu\colon \tilde{C} \to C$. Da nach Voraussetzung $f^{-1}(C)$ irreduzibel ist, muss ν eine nichttriviale Überlagerung sein. Wegen $C \cong \mathbb{P}_1$ muss ν damit in mindestens zwei Punkten verzweigt sein. Sei $c_0 \in C$ ein Verzweigungspunkt von ν, dann ist $f^{-1}(c_0)$ eine Doppelgerade, also $c_0 \in \operatorname{sing} \Delta_f$ nach Proposition 3.7. Da C aber glatt ist, bedeutet das, dass C in c_0 eine andere Komponente von Δ_f schneiden muss. □

Um im weiteren Verlauf auch nicht minimale Flächen in den Griff zu bekommen, benötigen wir folgende Aussage:

Lemma 4.9. *Sei S eine nichtalgebraische Fläche und $\Delta \subset S$ ein reduzierter Divisor derart, dass für jede glatte rationale Komponente C von Δ die Schnittzahl*

$$C \cdot (\Delta - C) \geqslant 2 \tag{4.1}$$

ist. Sei $p\colon S \to \tilde{S}$ die Niederblasung einer (-1)-Kurve $C_0 \subset S$. Dann ist $\tilde{\Delta} := p_*\Delta$ ein reduzierter Divisor auf $\tilde{S}$ derart, dass auch für jede glatte rationale Komponente $\tilde{C}$ von $\tilde{\Delta}$ die Schnittzahl

$$\tilde{C} \cdot (\tilde{\Delta} - \tilde{C}) \geqslant 2$$

ist.

Beweis. Es existieren paarweise verschiedene irreduzible Kurven $C_1, \dots, C_k$ auf S mit $C_i \neq C_0$ für $i = 1, \dots, k$ derart, dass

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} C_i \qquad \text{oder} \qquad \Delta = C_0 + \sum_{i=1}^{k} C_i \tag{4.2}$$

ist und Gleichung (4.1) für die glatten rationalen Komponenten von Δ gilt. Wenn wir $\tilde{C}_1 := p_*C_1, \dots, \tilde{C}_k := p_*C_k$ definieren, so sind in jedem Fall $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_k$ paarweise verschiedene irreduzible Kurven auf $\tilde{S}$ und es gilt:

$$\tilde{\Delta} = p_*\Delta = \sum_{i=1}^{k} \tilde{C}_i.$$

Ist nun für ein festes $i \in \{1, \dots, k\}$ die Kurve $\tilde{C}_i$ glatt rational, so ist auch C_i eine glatte rationale Kurve, also gilt nach Voraussetzung

$$C_i \cdot (\Delta - C_i) \geqslant 2. \tag{4.3}$$

Offenbar gilt

$$p^*(\tilde{C}_i) = C_i + (C_i \cdot C_0)C_0,$$

wobei $C_i \cdot C_0 \in \{0, 1\}$ ist, da $\tilde{C}_i$ glatt ist. Des Weiteren ist im zweiten Fall von (4.2) auch C_0 eine glatte rationale Komponente von Δ, so dass wir nach Voraussetzung die Abschätzung

$$C_0 \cdot (\Delta - C_i) = C_0 \cdot (\Delta - C_0) + C_0^2 - C_0 \cdot C_i \geqslant 0 \tag{4.4}$$

erhalten. Die Aussage (4.4) gilt offensichtlich auch im ersten Fall von (4.2), da in diesem Fall der effektive Divisor $\Delta - C_i$ die Kurve C_0 nicht als Komponente enthält.

Insgesamt ergibt sich mittels $p^*(\tilde{C}_i) \cdot C_0 = 0$, (4.4) und (4.3):

$$\begin{aligned}\tilde{C}_i \cdot (\tilde{\Delta} - \tilde{C}_i) &= p^*(\tilde{C}_i) \cdot p^*(p_*\Delta - \tilde{C}_i) \\ &= p^*(\tilde{C}_i) \cdot (\Delta - C_i) \\ &= C_i \cdot (\Delta - C_i) + (C_i \cdot C_0) C_0 \cdot (\Delta - C_i) \\ &\geqslant C_i \cdot (\Delta - C_i) \geqslant 2.\end{aligned}$$

□

4.4 Konikbündel über Flächen mit algebraischer Dimension 0

Proposition 4.10. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Kählerfläche* S *mit* $a(S) = 0$ *und* $\rho(X) = \rho(S) + 1$. *Dann ist* $\Delta_f = 0$, *d. h.* f *ist ein* $\mathbb{P}_1$*-Bündel.*

Beweis. Wir wissen aus der Flächenklassifikation, dass S entweder bimeromorph zu einem Torus oder bimeromorph zu einer K3-Fläche ist. In jedem Fall ist jede irreduzible Kurve auf S eine glatte rationale Kurve.

Wir schreiben also

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{k} C_i,$$

wobei $C_1, \ldots, C_k$ paarweise verschiedene glatte rationale Kurven auf S sind. Nach Proposition 3.20 ist Proposition 4.8 anwendbar und wir bekommen für alle $i = 1, \ldots, k$:

$$C_i \cdot (\Delta_f - C_i) \geqslant 2. \tag{4.5}$$

Ist nun S minimal, so ist S ohne Einschränkung eine K3-Fläche (auf Tori der algebraischen Dimension 0 gibt es keine Kurven). Damit ist jedes C_i eine (-2)-Kurve, also folgt aus (4.5):

$$\Delta_f^2 = \sum_{i=1}^{k} \big(C_i^2 + C_i \cdot (\Delta_f - C_i)\big) \geqslant 0.$$

Wegen $a(S) = 0$ ist das Schnittprodukt auf $H^2(S, \mathbb{Z})$ negativ definit, also folgt, dass $\Delta_f \equiv 0$ ist. Da S eine K3-Fläche ist, impliziert dies $\Delta_f = 0$.

Ist S nicht minimal, dann sei $p\colon S \to \tilde{S}$ die Niederblasung einer (-1)-Kurve C_0 auf S. Lemma 4.9 liefert, dass auch $p_*\Delta_f$ die Bedingung (4.5) erfüllt. Induktiv können wir folgern, dass $p_*\Delta_f = 0$ ist. Es ist dann $\Delta_f = 0$ oder $\Delta_f = C_0$, wobei der zweite Fall im Widerspruch zu Ungleichung (4.5) steht. □

4.5 Konikbündel über Flächen mit algebraischer Dimension 1

Für Konikbündel über *minimalen* kompakten Flächen mit algebraischer Dimension 1 hat die Diskriminantenkurve eine besonders einfache Struktur:

Proposition 4.11. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer minimalen kompakten Fläche* S *mit* $a(S) = 1$ *und* $\rho(X) = \rho(S) + 1$*. Sei* $r\colon S \to B$ *die eindeutig bestimmte elliptische Faserung von* S*. Dann ist ein Vielfaches von* Δ_f *eine Summe von Fasern von* r*, also insbesondere numerisch trivial (d. h.* $\Delta_f \cdot L = 0$ *für alle Geradenbündel* $L \in \operatorname{Pic} S$*).*

Beweis. Wegen $a(S) = 1$ liegen alle irreduziblen Kurven auf S in Fasern von r. Dies impliziert in Verbindung mit der Klassifikation singulärer Fasern elliptischer Faserungen, dass

$$\Delta_f = \sum_i C_i + \sum_j F_j$$

ist, wobei die C_i (-2)-Kurven und die F_j numerisch triviale irreduzible Divisoren sind. Wie im Beweis zu Proposition 4.10 folgt daraus

$$\Delta_f^2 = 0,$$

was die Behauptung impliziert. □

Für nicht minimale Flächen bekommen wir folgende Chernklassenungleichungen:

Proposition 4.12. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Fläche* S *mit* $a(S) = 1$ *und* $\rho(X) = \rho(S) + 1$*. Sei* $E := f_*(K^*_{X/S})$*. Dann ist*

$$c_1^2(E) \geqslant 3\,c_1(E)\,c_1(S) + 4\,c_1^2(S) \tag{4.6}$$

und

$$c_2(E) \geqslant c_1(E)\,c_1(S) + \tfrac{4}{3}\,c_1^2(S). \tag{4.7}$$

Beweis. Wegen $\Delta_f \in |\det E^*|$ ist Ungleichung (4.6) äquivalent zur Aussage

$$\Delta_f \cdot (\Delta_f - 3K_S) - 4K_S^2 \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Ist S minimal, so folgt (4.8) direkt aus Proposition 4.11, wobei wir uns erinnern, dass zum Beweis dieser Proposition lediglich die sich aus Proposition 4.8 ergebende Eigenschaft

$$C \cdot (\Delta_f - C) \geqslant 2 \tag{4.9}$$

für jede glatte rationale Komponente C des Diskriminantenorts Δ_f verwendet wurde.

Ist S nicht minimal, so sei $p\colon S \to \tilde{S}$ die Niederblasung der (-1)-Kurve $C_0 \subset S$. Nach Lemma 4.9 überträgt sich die Eigenschaft (4.9) auf den Divisor $\tilde{\Delta} := p_*\Delta_f$. Induktiv dürfen wir also annehmen, dass

$$\tilde{\Delta} \cdot (\tilde{\Delta} - 3K_{\tilde{S}}) - 4K_{\tilde{S}}^2 \geqslant 0 \tag{4.10}$$

ist. Nun ist aber

$$K_S = p^*K_{\tilde{S}} + C_0$$

und

$$\Delta_f = p^*\tilde{\Delta} + (\varepsilon - \mu)C_0,$$

wobei μ die Vielfachheit der Kurve $\tilde{\Delta}$ im Punkt $p(C_0)$ ist und $\Delta_f = p_*^{-1}\tilde{\Delta} + \varepsilon C_0$ ist (also insbesondere $\varepsilon \in \{0, 1\}$, da Δ_f reduziert ist). Es ergibt sich

$$\Delta_f \cdot (\Delta_f - 3K_S) - 4K_S^2 = \tilde{\Delta} \cdot (\tilde{\Delta} - 3K_{\tilde{S}}) - 4K_{\tilde{S}}^2 + 4 + (\mu - \varepsilon)(\varepsilon - \mu - 3),$$

also genügt es nach (4.10) zu zeigen, dass

$$(\mu - \varepsilon)(\mu - \varepsilon + 3) \leqslant 4 \tag{4.11}$$

ist. Um dies zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass

$$C_0 \cdot (\Delta_f - C_0) = \mu - \varepsilon + 1$$

ist. Aus Eigenschaft (4.9) ergibt sich damit die Implikation

$$\varepsilon = 1 \Rightarrow \mu \geqslant 2. \tag{4.12}$$

Wegen $a(\tilde{S}) = a(S) = 1$ ist $\tilde{S}$ eine elliptische Fläche und alle irreduziblen Kurven auf $\tilde{S}$ sind in Fasern der eindeutig bestimmten elliptischen Faserung enthalten. Aus Kodairas Klassifikationstheorie der singulären Fasern einer elliptischen Faserung (siehe z. B. [BHPV04, S. 200 ff.]) folgt, dass alle reduzierten Kurven auf $\tilde{S}$ in jedem ihrer Punkte höchstens Multiplizität 3 haben. Es ist also insbesondere $\mu \leqslant 3$. Damit gilt (4.11), außer evtl. in den folgenden Fällen:

(i) $\mu = 3$,

(ii) $\mu = 2$ und $\varepsilon = 0$.

Wir zeigen, dass diese beiden Fälle nicht auftreten können. Wir können dazu ohne Einschränkung annehmen, dass $\tilde{\Delta}$ zusammenhängend ist, also insbesondere alle irreduziblen Komponenten von $\tilde{\Delta}$ in derselben Faser der elliptischen Faserung von $\tilde{S}$ liegen. Damit führen die beiden Fälle wie folgt zum Widerspruch:

(i) Ist $\mu = 3$, so folgt aus der Klassifikation der singulären elliptischen Fasern unter Berücksichtigung möglicher weiterer Niederblasungen von (-1)-Kurven auf $\tilde{S}$, dass $\tilde{\Delta}$ drei glatte rationale Komponenten C_1, C_2 und C_3 enthält, die sich im Punkt $p(C_0)$ mit drei verschiedenen Tangentialrichtungen schneiden. Beachten wir zusätzlich die Implikation (4.12) für alle weiteren Niederblasungen von $\tilde{S}$, so bekommen wir

$$\tilde{\Delta} = C_1 + C_2 + C_3.$$

Dann ist aber für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ die Kurve $p_*^{-1} C_i$ eine glatte rationale Komponente von Δ_f mit

$$p_*^{-1} C_i \cdot (\Delta_f - p_*^{-1} C_i) = \varepsilon,$$

was im Widerspruch zu (4.9) steht.

(ii) Es sei $\mu = 2$. Wir zeigen, dass dann $\varepsilon = 1$ sein muss, d. h. C_0 eine Komponente von Δ_f sein muss: Aus der Klassifikation der singulären elliptischen Fasern ergeben sich unter Berücksichtigung von Implikation (4.12) und Eigenschaft (4.9) folgende Möglichkeiten:

- $\tilde{\Delta}$ ist eine irreduzible Kurve mit genau einem singulären Punkt (nämlich $p(C_0)$), in dem sie entweder sich selbst transversal schneidet oder eine Kuspe besitzt. In diesem Fall ist die strikte Transformierte $p_*^{-1}\tilde{\Delta}$ eine glatte rationale Kurve, also muss wegen (4.9) der Divisor Δ_f eine weitere Komponente (nämlich C_0) haben.
- $\tilde{\Delta}$ besteht aus zwei glatten rationalen Komponenten, die sich in genau einem Punkt (nämlich $p(C_0)$) mit Vielfachheit 2 schneiden. Dann besteht die strikte Transformierte $p_*^{-1}\tilde{\Delta}$ ebenfalls aus zwei glatten rationalen Komponenten. Diese schneiden sich in genau einem Punkt transversal, also muss wiederum Δ_f die zusätzliche Komponente C_0 besitzen.
- $\tilde{\Delta}$ ist ein Zyklus glatter rationaler Kurven. Dann ist die strikte Transformierte $p_*^{-1}\tilde{\Delta}$ eine Kette glatter rationaler Kurven. Eigenschaft (4.9) für die Endkurven dieser Kette impliziert, dass auch hier C_0 eine Komponente von Δ_f sein muss.

Dies zeigt (4.11) und damit auch (4.6).

Da nach [BLP87, Théorème 3.1] für jede torsionsfreie kohärente Garbe $\mathcal{F}$ vom Rang r auf einer nichtalgebraischen Fläche

$$\Delta(\mathcal{F}) := \frac{1}{r}\left(c_2(\mathcal{F}) - \frac{r-1}{2r}\, c_1^2(\mathcal{F})\right) \geqslant 0,$$

also insbesondere $c_2(E) \geqslant \frac{1}{3} c_1^2(E)$ ist, folgt auch (4.7). □

Bemerkung 4.13. Die Aussage von Proposition 4.12 gilt auch, wenn S eine Kählerfläche mit $a(S) = 0$ ist: Nach Proposition 4.10 ist dann $\Delta_f = 0$, also ist (4.6) trivialerweise erfüllt; (4.7) folgt daraus wie im Beweis zu Proposition 4.12.

4.6 Konikbündel über nichtalgebraischen Flächen

Unter Zuhilfenahme der vorigen Ergebnisse erhalten wir folgendes Resultat über die Existenz von Deformationen für Konikbündel über nichtalgebraischen Kählerflächen:

Satz 4.14. *Sei $f\colon X \to S$ ein Konikbündel über einer nichtalgebraischen kompakten Kählerfläche S mit $\rho(X) = \rho(S) + 1$. Dann ist*

$$h^1(T_X) > 0. \tag{4.13}$$

Es gilt sogar

$$h^1(T_X) \geqslant h^2(T_X), \tag{4.14}$$

wobei Gleichheit in (4.14) *nur möglich ist, wenn*

$$h^0(T_X) = 0 \tag{4.15}$$

und

$$c_1^2(S) = c_2(S) = c_1^2(E) = c_2(E) = 0 \tag{4.16}$$

gilt ($E := f_*(K^*_{X/S})$*).*

Beweis. Aus den Propositionen 3.11 und 4.2 folgt

$$\begin{aligned} h^1(T_X) - h^2(T_X) = h^0(T_X) + \big(c_2(E) - c_1(E)\,c_1(S) - \tfrac{4}{3}\,c_1^2(S)\big) \\ - \tfrac{2}{3}\,c_1^2(S) + 7\,\chi(\mathcal{O}_S). \end{aligned}$$

Mit Proposition 4.12 und Bemerkung 4.13 ergibt sich, dass alle Summanden auf der rechten Seite nichtnegativ sind (da S Kähler und nichtalgebraisch ist, gilt insbesondere $c_1^2(S) \leqslant 0$ und $\chi(\mathcal{O}_S) \geqslant 0$). Daraus folgen direkt die Aussagen (4.14), (4.15) und (4.16).

Die Anwendung des Funktors $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{O}_X)$ auf die Sequenz

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0$$

liefert unter Berücksichtigung der Propositionen 3.11 und 4.1 die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}^0(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(T_X) \longrightarrow H^0(f^*T_S) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(T_X) \longrightarrow H^1(f^*T_S) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{X/S}, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(T_X) \longrightarrow H^2(f^*T_S) \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Wäre $H^1(T_X) = 0$, so wäre nach (4.14) auch $H^2(T_X) = 0$ und wir erhielten aus (4.17)

$$H^2(T_S) = 0. \tag{4.18}$$

Aus (4.16) und (4.18) folgt dann mittels Flächenklassifikation, dass S eine eigentlich elliptische Fläche ist. Ist $r\colon S \to C$ die elliptische Faserung von S über der glatten Kurve C, so folgt aus der Formel für das kanonische Bündel einer elliptischen Faserung (siehe [BHPV04, Theorem V.12.1]), dass

$$r_*K_S \cong K_C \otimes (R^1 r_*\mathcal{O}_S)^*$$

ist, wobei

$$\deg(R^1 r_*\mathcal{O}_S)^* = 0$$

ist. Da S Kähler und nichtalgebraisch ist, muss $H^0(K_S) \neq 0$ sein, also muss $g(C) \geqslant 1$ und im Fall $g(C) = 1$ zusätzlich $(R^1 r_*\mathcal{O}_S)^* \cong \mathcal{O}_C$ sein.

Analog zu (4.17) bekommen wir die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathrm{Ext}^0(\Omega^1_{S/C}, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^0(T_S) \longrightarrow H^0(r^*T_C) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\Omega^1_{S/C}, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(T_S) \longrightarrow H^1(r^*T_C) \\ &\longrightarrow \mathrm{Ext}^2(\Omega^1_{S/C}, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^2(T_S) \longrightarrow H^2(r^*T_C) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

also impliziert (4.18), dass

$$H^2(r^*T_C) = 0 \tag{4.20}$$

ist. Nun ist aber

$$H^2(r^*T_C) \cong H^0(K_S \otimes r^*K_C) \cong H^0\big(K_C^{\otimes 2} \otimes (R^1 r_*\mathcal{O}_S)^*\big).$$

Wegen (4.20) impliziert dies $g(C) \leqslant 1$ und $(R^1 r_*\mathcal{O}_S)^* \not\cong \mathcal{O}_C$ für $g(C) = 1$, was im Widerspruch zu den oben bereits gefolgerten Bedingungen steht. □

Wir wollen versuchen, die Fälle, in denen Gleichheit in (4.14) auftritt, noch etwas näher zu untersuchen:

Satz 4.15. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer nichtalgebraischen kompakten Kählerfläche* S *mit* $\rho(X) = \rho(S) + 1$*. Ist* $h^1(T_X) = h^2(T_X)$*, so liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:*

(i) S *ist ein Torus und* $E := f_*(K^*_{X/S})$ *ist projektiv flach, d. h.* $\mathbb{P}(E)$ *ist durch eine Darstellung* $\pi_1(S) \to PGL(3, \mathbb{C})$ *gegeben; des Weiteren ist* X *nicht von der Form* $\mathbb{P}(V)$ *für ein Rang-2-Bündel* V *auf* S*.*

(ii) S *ist minimal eigentlich elliptisch (*$\kappa(S) = 1$*) und alle singulären Fasern der eindeutig bestimmten elliptischen Faserung* $r\colon S \to B$ *sind multiple elliptische Kurven.*

Beweis. Wir verwenden die im vorigen Satz hergeleiteten Beziehungen (4.14): Da S nichtalgebraisch ist, impliziert $c_1^2(S) = 0$, dass S minimal ist. Ist $\kappa(S) = 0$, so folgt wegen $c_2(S) = 0$, dass S ein Torus ist. In diesem Fall impliziert die Beziehung $c_1^2(E) = 3c_2(E)$ nach [Yan89, Theorem 5.12], dass E projektiv flach ist. Wäre $X = \mathbb{P}(V)$ für ein Rang-2-Bündel V auf S, so wäre nach Proposition 3.4 für alle i

$$H^i(T_{X/S}) \cong H^i(S^2V \otimes \det V^*).$$

Wegen (4.15) folgt $H^0(S^2V \otimes \det V^*) = 0$. Damit wäre aber auch $H^2(T_{X/S}) \cong H^2(S^2V \otimes \det V^*) = 0$. Die relative Tangentialsequenz liefert dann $h^1(T_X) \geqslant h^1(S)$ und $h^2(T_X) \leqslant h^2(T_S)$, also wäre insgesamt $h^1(T_X) - h^2(T_X) \geqslant h^1(T_S) - h^2(T_S) = 2$.

Ist $\kappa(S) = 1$, so folgt wegen $c_2(S) = 0$, dass alle singulären Fasern von r multiple elliptische Kurven sein müssen (vgl. [Kod63b, Theorem 12.2]). □

4.7 Fujiki-Klassifikation

Für spätere Zwecke möchten wir an dieser Stelle die Klassifikationsergebnisse aus [Fuj83a] im Spezialfall von Konikbündeln über Flächen mit algebraischer Dimension 1 darstellen:

Proposition 4.16. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Fläche* S *mit* $a(S) = 1$*. Sei* $r\colon S \to B$ *die eindeutig bestimmte elliptische Faserung auf* S*. Dann gilt für* $E := f_*(K^*_{X/S})$*:*

(i) Ist $a(X) = 1$*, so gilt für die allgemeine Faser* C *von* r *entweder*

$$E|_C \cong F_3$$

oder

$$E|_C \cong \mathcal{O}_C \oplus L \oplus L^* \qquad \textit{mit } L \in \operatorname{Pic}^0 C \textit{ und } L^{\otimes k} \not\cong \mathcal{O}_C \textit{ für alle } k \geqslant 1.$$

(ii) Ist $\mathfrak{a}(X) = 2$*, so gilt für die allgemeine Faser* C *von* r

$$E|_C \cong \mathcal{O}_C \oplus L \oplus L^* \qquad \textit{mit } L \in \operatorname{Pic}^0 C \textit{ und } L^{\otimes k} \cong \mathcal{O}_C \textit{ für ein } k \geqslant 1.$$

5 Deformationstheorie elliptischer Flächen

Mit den von Kodaira in [Kod63a] und [Kod63b] entwickelten Methoden zum Studium elliptischer Faserungen lassen sich genauere Untersuchungen zur algebraischen Approximierbarkeit elliptischer Flächen durchführen. Für elliptische Kählerflächen bekommt man folgendes Ergebnis, das detailliert in [FM94] entwickelt wird:

Satz 5.1 (siehe [FM94, Theorem 6.12]). *Sei* S *eine kompakte Kählerfläche und* $\varphi\colon S \to C$ *eine elliptische Faserung über einer glatten Kurve* C*. Dann existiert eine komplexe Mannigfaltigkeit* $B \ni 0$ *und eine Deformation* $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ *von* $S = \mathcal{S}_0$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gibt eine elliptische Faserung* $\Phi\colon \mathcal{S} \to C \times B$*, so dass* $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi = \pi$ *und* $\Phi|_{\mathcal{S}_0} = \varphi$ *ist.*

(ii) *Für jeden Punkt* $c \in C$ *existiert eine offene Umgebung* $U \subset C$ *von* c*, so dass* $\Phi^{-1}(U \times B) \cong \varphi^{-1}(U) \times B$ *über* $C \times B$ *ist.*

(iii) *Die Menge der Punkte* $b \in B$*, für die* $\mathcal{S}_b$ *projektiv ist, liegt dicht in* B*.*

Für nichtalgebraische Flächen hat die Deformation aus Satz 5.1 zusätzliche Eigenschaften:

Proposition 5.2. *Sei* S *eine nichtalgebraische kompakte Kählerfläche und* $\varphi\colon S \to C$ *eine elliptische Faserung über der glatten Kurve* C*. Sei* $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ *die Deformation von* $S = \mathcal{S}_0$ *aus Satz 5.1. Dann existiert für jeden Divisor* D *auf* S *eine offene Umgebung* $U \subset B$ *von* 0 *und ein Geradenbündel* $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}_U$ *mit* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong \mathcal{O}_S(D)$*.*

Beweis. Da S nichtalgebraisch ist, liegt jeder irreduzible Divisor auf S in einer Faser von φ. Damit folgt die Behauptung aus der lokalen Trivialitätsaussage in Satz 5.1. □

6 Deformationstheorie von K3-Flächen und Tori

In diesem Kapitel verstehen wir unter einem Torus stets einen komplexen Torus der Dimension 2, also einen Quotienten $\mathbb{C}^2/\Gamma$, wobei Γ ein Gitter in $\mathbb{C}^2$ ist.

Ziel des Kapitels ist es, die algebraische Approximierbarkeit projektivierter Rang-2-Bündel über K3-Flächen und Tori zu beweisen.

6.1 Geradenbündel

Satz 6.1. *Sei* S *eine K3-Fläche oder ein Torus,* $\mathcal{K} \ni 0$ *der Kuranishiraum von* S *und* $\pi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{K}$ *die zugehörige verselle Deformation von* $S = \mathcal{S}_0$*. Dann existiert eine* $\big(h^{1,1}(S) - \rho(S)\big)$*-dimensionale glatte analytische Teilmenge* $B \subset \mathcal{K}$ *mit* $0 \in B$ *derart, dass für jedes Geradenbündel* $L \in \operatorname{Pic} S$ *ein Geradenbündel* $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}_B$ *existiert, dessen Einschränkung* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ *isomorph zu* L *ist.*

Beweis. Sei $h := h^{1,1}(S)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $\mathcal{K}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}^h$ ist. Mit Hilfe des Satzes von Ehresmann (Satz 1.2) bekommen wir wie in Abschnitt 1.2 eine Periodenabbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\colon \mathcal{K} &\to \mathbb{P}\big(H^2(S,\mathbb{C})\big), \\ b &\mapsto H^{2,0}(\mathcal{S}_b) \end{aligned}$$

(wegen $K_{\mathcal{S}_b} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}_b}$ ist $h^{2,0}(\mathcal{S}_b) = 1$). Bekanntlich ist $\mathcal{P}$ holomorph.

Das Schnittprodukt auf $H^2(S,\mathbb{Z})$ liefert durch $\mathbb{C}$-bilineare Fortsetzung eine $\mathbb{C}$-Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $H^2(S,\mathbb{C})$. Setzen wir

$$\Omega := \big\{\, [\omega] \in \mathbb{P}\big(H^2(S,\mathbb{C})\big) \;\big|\; \langle\omega,\omega\rangle = 0, \langle\omega,\overline{\omega}\rangle > 0 \,\big\}, \tag{6.1}$$

so ist $(\operatorname{im}\mathcal{P}) \subset \Omega$ und $\mathcal{P}\colon \mathcal{K} \to \Omega$ ist nach dem lokalen Satz von Torelli ein lokaler Isomorphismus.

Aus dem Lefschetz-Satz für $(1,1)$-Klassen und der Verträglichkeit der Hodgezerlegung mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgt für beliebige Klassen $\alpha \in H^2(S,\mathbb{Z})$ und Punkte

$b \in \mathcal{K}$:

$$\begin{aligned}\exists L_b \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_b \text{ mit } c_1(L_b) = \alpha &\Leftrightarrow \alpha \in H^{1,1}(\mathcal{S}_b)\\ &\Leftrightarrow \alpha \in H^{2,0}(\mathcal{S}_b)^\perp = \mathcal{P}(b)^\perp \\ &\Leftrightarrow \mathcal{P}(b) \in \alpha^\perp \subset \mathbb{P}\big(H^2(S,\mathbb{C})\big)\end{aligned} \tag{6.2}$$

(Orthogonalraum bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Wir definieren nun

$$M := \mathrm{NS}(S)^\perp \subset \mathbb{P}\big(H^2(S,\mathbb{C})\big)$$

und setzen

$$B := \mathcal{P}^{-1}(M \cap \Omega).$$

Da $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht entartet ist, ist $\dim M = h + 1 - \rho(S)$. Da M über $\mathbb{R}$ definiert ist, folgt aus der Ungleichung in (6.1), dass $M \cap \Omega$ in allen Punkten glatt ist. Es ist also B glatt von Dimension $h - \rho(S)$.

Es bleibt zu zeigen, dass B die gewünschte Eigenschaft besitzt: Wir setzen $\pi_B := \pi|_{\mathcal{S}_B} \colon \mathcal{S}_B \to B$. Dann liefert der Pushdown der Exponentialsequenz auf $\mathcal{S}_B$ mittels π_B die folgende exakte Sequenz auf B:

$$R^1\pi_{B*}\mathcal{O} \xrightarrow{\psi} R^1\pi_{B*}\mathcal{O}^* \xrightarrow{c_1} R^2\pi_{B*}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} R^2\pi_{B*}\mathcal{O}.$$

Wenn wir B durch eine genügend kleine offene Umgebung von 0 ersetzen, bekommen wir damit eine exakte Sequenz

$$H^0(R^1\pi_{B*}\mathcal{O}) \xrightarrow{\psi} H^0(R^1\pi_{B*}\mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^0(R^2\pi_{B*}\mathbb{Z}) \xrightarrow{\varphi} H^0(R^2\pi_{B*}\mathcal{O}). \tag{6.3}$$

Sei $L \in \operatorname{Pic} S$ ein Geradenbündel. Da π_B topologisch trivial ist, definiert $c_1(L)$ einen Schnitt $\zeta \in H^0(R^2\pi_{B*}\mathbb{Z})$. Nach Konstruktion von B gibt es gemäß (6.2) für jedes $b \in B$ ein Geradenbündel $L_b \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_b$ mit $c_1(L_b) = c_1(L)$, also ist $\varphi(\zeta) = 0$. Die Sequenz (6.3) liefert einen Schnitt $\xi \in H^0(R^1\pi_{B*}\mathcal{O}^*)$ mit $c_1(\xi) = \zeta$. Wenn wir B klein genug wählen, erhalten wir aus der Leray-Spektralsequenz einen Isomorphismus $\operatorname{Pic}\mathcal{S}_B \cong H^0(R^1\pi_{B*}\mathcal{O}^*)$, also existiert ein Geradenbündel $\tilde{\mathcal{L}} \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_B$ mit $c_1(\tilde{\mathcal{L}}|_{\mathcal{S}_b}) = c_1(L)$ für alle $b \in B$. Damit ist insbesondere $N := L \otimes \tilde{\mathcal{L}}^*|_{\mathcal{S}_0}$ ein numerisch triviales Geradenbündel auf $\mathcal{S}_0$. Das Bündel N kann durch eine Klasse $\nu \in H^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_0})$ beschrieben werden. Da $h^1(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_b})$ unabhängig von $b \in B$ ist, ist $R^1\pi_{B*}\mathcal{O}$ lokalfrei und der Basiswechselisomorphismus liefert einen Schnitt $\tilde{\nu} \in H^0(R^1\pi_{B*}\mathcal{O})$ mit $\tilde{\nu}|\mathcal{S}_0 = \nu$. Durch $\psi(\tilde{\nu})$ wird dann ein Geradenbündel $\mathcal{N}$ auf $\mathcal{S}_0$ mit $\mathcal{N}|_{\mathcal{S}_0} \cong N$ definiert. Setzen wir $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}} \otimes \mathcal{N}$, so ist $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_B$ mit $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong L$ wie gewünscht. $\square$

Bemerkung 6.2. Ist S eine K3-Fläche, so ist in obigem Beweis $R^1\pi_{B*}\mathcal{O} = 0$. Da außerdem $R^2\pi_{B*}\mathbb{Z}$ ein lokales System von diskreten abelschen Gruppen über B ist, bestimmt $c_1(L)$ den Schnitt $\zeta \in H^0(R^2\pi_{B*}\mathbb{Z})$ eindeutig. Diese beiden Tatsachen implizieren mittels (6.3), dass für K3-Flächen das fortgesetzte Bündel $\mathcal{L}$ eindeutig durch L bestimmt ist.

Für die gemäß Satz 6.1 fortgesetzten Geradenbündel ergibt sich für nichtalgebraische K3-Flächen automatisch die Konstanz der Kohomologiedimensionen:

Satz 6.3. *Sei S eine nichtalgebraische K3-Fläche, $B \ni 0$ eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ eine Deformation von $S = \mathcal{S}_0$ derart, dass für jeden Divisor D auf S ein Geradenbündel $\mathcal{L}_D \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}$ mit $\mathcal{L}_D|_{\mathcal{S}_0} \cong \mathcal{O}_S(D)$ existiert (dies ist insbesondere für π gemäß Satz 5.1 bzw. Satz 6.1 erfüllt). Dann existiert für jedes Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}$ eine offene Umgebung $U \subset B$ von 0 derart, dass für jedes $q \geqslant 0$ die Abbildung $U \ni b \mapsto h^q(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b})$ konstant ist.*

Beweis. Wir setzen $\mathcal{L}_b := \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b}$. Im Falle, dass $h^0(\mathcal{L}_0) \neq 0 \neq h^2(\mathcal{L}_0) = h^0(\mathcal{L}_0^*)$ ist, folgt $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}$ und damit auch $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung (siehe Bemerkung 6.2). In diesem Fall ist die Behauptung offensichtlich.

Wir können also annehmen, dass entweder $h^0(\mathcal{L}_0) = 0$ oder $h^2(\mathcal{L}_0) = 0$ ist. Wegen $h^q(\mathcal{L}_b) = h^{2-q}(\mathcal{L}_b^*)$ genügt es, den Fall $h^2(\mathcal{L}_0) = 0$ zu betrachten. Nach Halbstetigkeit ist dann $h^2(\mathcal{L}_b) = 0$ für alle b in einer Umgebung $U \subset B$ von 0 und wegen der Konstanz der Eulercharakteristik reicht es aus, die Konstanz von $h^0(\mathcal{L}_b)$ zu zeigen. Dazu müssen wir zu jedem Schnitt $s \in H^0(\mathcal{L}_0)$ eine Fortsetzung $\tilde{s} \in H^0(\mathcal{L}_U)$ mit $\tilde{s}|_{\mathcal{S}_0} = s$ konstruieren. Sei also $s \in H^0(\mathcal{L}_0)$, dann definiert s einen effektiven Divisor $D := (s = 0)$ auf $\mathcal{S}_0$. Die Zerlegung

$$D = \sum_i D_i$$

von D in seine irreduziblen Komponenten (nicht notwendigerweise alle D_i verschieden) liefert einen Isomorphismus

$$\mathcal{L}_0 \cong \bigotimes_i \mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i)$$

und Schnitte $s_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i)$ mit

$$s = \prod_i s_i.$$

Nach Voraussetzung lassen sich die Geradenbündel $\mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i) \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_0$ fortsetzen zu Geradenbündeln $\mathcal{L}_i \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}_U$ mit $\mathcal{L}_i|_{\mathcal{S}_0} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i)$. Wegen der

Eindeutigkeit der Fortsetzung ist dann

$$\mathcal{L}_U \cong \bigotimes_i \mathcal{L}_i.$$

Da $\mathcal{S}_0 = S$ nichtalgebraisch ist, ist jeder irreduzible Divisor auf $\mathcal{S}_0$ entweder eine (-2)-Kurve oder eine Faser einer elliptischen Faserung von $\mathcal{S}_0$. Damit ist für alle i

$$h^1\big(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i)\big) = h^2\big(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_0}(D_i)\big) = 0,$$

also ist nach Halbstetigkeit und Konstanz der Eulercharakteristik $h^0(\mathcal{L}_i|_{\mathcal{S}_b})$ konstant. Dies bedeutet, dass die Schnitte s_i fortgesetzt werden können zu Schnitten $\tilde{s}_i \in H^0(\mathcal{L}_i)$ mit $\tilde{s}_i|_{\mathcal{S}_0} = s_i$. Es ist dann durch

$$\tilde{s} := \prod_i \tilde{s}_i$$

die gewünschte Fortsetzung von s gegeben. □

Im Falle nichtalgebraischer Tori lässt sich die Konstanz der Kohomologiedimensionen durch geeignete Wahl der Fortsetzung erreichen:

Satz 6.4. *Sei* S *ein nichtalgebraischer Torus und* $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ *die Deformation von* $S = \mathcal{S}_0$ *gemäß Satz 6.1. Dann existiert für jedes Geradenbündel* $L \in \operatorname{Pic} S$ *ein Geradenbündel* $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ *und eine offene Umgebung* $U \subset B$ *von* 0 *derart, dass* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong L$ *gilt und für jedes* $q \geqslant 0$ *die Abbildung* $U \ni b \mapsto h^q(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b})$ *konstant ist.*

Beweis. Ist $h^0(L) \neq 0 \neq h^2(L) = h^0(L^*)$, so ist $L \cong \mathcal{O}_S$, also können wir $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ wählen.

Ist $h^0(L) = 0 = h^2(L)$, so können wir ein beliebiges Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ mit $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} = L$ wählen (ein solches existiert gemäß Satz 6.1); die Konstanz der Kohomologiedimensionen folgt dann aus der Konstanz der Eulercharakteristik und der Halbstetigkeit.

Nach Serredualität können wir also ohne Einschränkung annehmen, dass $h^0(L) \neq 0$ und $h^2(L) = 0$ ist. Es ist dann $L \cong \mathcal{O}_S(D)$ für einen Divisor $D > 0$ auf S. Da es auf Tori der algebraischen Dimension 0 keine Kurven gibt, ist insbesondere $a(S) = 1$ und wir haben eine elliptische Faserung (algebraische Reduktion) $r\colon S \to C$ über einer elliptischen Kurve C. Alle irreduziblen Kurven auf S sind Fasern von r, also existiert ein Divisor $\delta > 0$ auf C mit $D = r^*\delta$.

Da eine Fortsetzung von L auf $\mathcal{S}$ existiert, ist $a(\mathcal{S}_b) \geqslant 1$ für alle $b \in B$. Wir bekommen damit eine relative algebraische Reduktion $\tilde{r}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ über B (siehe [Fuj83b, Proposition 4]), wobei $\mathcal{C} \to B$ eine Deformation von $C = \mathcal{C}_0$ ist und

$\tilde{r}|_{\mathcal{S}_0} = r$ ist. Offenbar existiert ein Divisor $\tilde{\delta} > 0$ auf $\mathcal{C}$, der flach über B ist, derart, dass $\tilde{\delta}|_{\mathcal{S}_0} = \delta$ ist. Setzen wir $\mathcal{L} := \tilde{r}^*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\tilde{\delta})$, so ist

$$h^0(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b}) = \deg(\tilde{\delta}|_{\mathcal{S}_b}) = \deg(\delta)$$

für alle $b \in B$, also folgt die Konstanz der Dimensionen $h^q(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b})$ für alle $q \geqslant 0$ aus Halbstetigkeit und der Konstanz der Eulercharakteristik. □

Für uns ist noch folgende Feststellung wichtig:

Proposition 6.5. *In der Situation von Satz 6.1 parametrisiert B eine algebraische Approximation von S.*

Beweis. Ist S nichtalgebraisch, so ist $\rho(S) < h^{1,1}(S)$, also $\dim B \geqslant 1$. Nach Korollar 1.5 ist aber jede nichttriviale Deformation einer K3-Fläche oder eines Torus eine algebraische Approximation. □

6.2 Extensionen

Wir möchten die Fortsetzbarkeit von Extensionen von Geradenbündeln studieren. Das wesentliche Hilfsmittel dazu ist folgendes Ergebnis:

Satz 6.6. *Sei S eine nichtalgebraische K3-Fläche oder ein nichtalgebraischer Torus, $L \in \operatorname{Pic} S$ ein Geradenbündel und $Y \subset S$ ein komplexer Unterraum von Kodimension $\geqslant 2$. Dann existiert eine algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ von $S = \mathcal{S}_0$, ein Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ mit $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong L$ und ein komplexer Unterraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ mit $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}_0 = Y$, der flach über B ist, derart, dass für jedes q die Abbildung $B \ni b \mapsto h^q\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big)$ konstant ist.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass wir eine algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ von $S = \mathcal{S}_0$, ein Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ mit $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong L$ und einen komplexen Unterraum $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ mit $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}_0 = Y$, der flach über B ist, bereits konstruiert haben und schreiben $\mathcal{L}_b := \mathcal{L}|_{\mathcal{S}_b}$ sowie $\mathcal{Y}_b := \mathcal{Y} \cap \mathcal{S}_b$ für $b \in B$. Wir bemerken, dass die Flachheit von $\mathcal{Y}$ über B impliziert, dass

$$\mathcal{I}_{\mathcal{Y}}|_{\mathcal{S}_b} = \mathcal{I}_{\mathcal{Y}_b}$$

ist. Wir bekommen damit für jedes $b \in B$ eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow (\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b} \longrightarrow \mathcal{L}_b \longrightarrow \mathcal{L}|_{\mathcal{Y}_b} \longrightarrow 0,$$

die in Kohomologie den Isomorphismus

$$H^2\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big) \cong H^2(\mathcal{L}_b) \tag{6.4}$$

und die lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0\big((\mathcal{L}\otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}_b) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}|_{\mathcal{Y}_b}) \\ &\longrightarrow H^1\big((\mathcal{L}\otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big) \longrightarrow H^1(\mathcal{L}_b) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

liefert. Ist nun zusätzlich $\mathcal{L}$ so gewählt, dass die $h^q(\mathcal{L}_b)$ nicht von b abhängen, so genügt es gemäß (6.4) und (6.5), die Konstanz von $h^0\big((\mathcal{L}\otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big)$ nachzuweisen.

Wir nehmen zunächst $H^0(L\otimes \mathcal{I}_Y) = 0$ an. Dann wählen wir die algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S}\to B$ von $S = \mathcal{S}_0$ gemäß Satz 6.1 (siehe auch Proposition 6.5) und eine Fortsetzung $\mathcal{L}\in \operatorname{Pic}\mathcal{S}$ von $L\cong \mathcal{L}_0$ mit konstanten Kohomologiedimensionen $h^q(\mathcal{L}_b)$ (siehe Satz 6.3 für K3-Flächen und Satz 6.4 für Tori). Für jeden komplexen Unterraum $\mathcal{Y}\subset\mathcal{S}$ mit $\mathcal{Y}\cap\mathcal{S}_0 = Y$, der flach über B ist, folgt dann aus Halbstetigkeit $H^0\big((\mathcal{L}\otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\big) = 0$ für alle $b\in B$. Da Y aber nur aus (evtl. nichtreduzierten) isolierten Punkten besteht, existiert natürlich eine solche Fortsetzung $\mathcal{Y}$.

Im Fall $H^0(L\otimes\mathcal{I}_Y)\neq 0$ ist auch $H^0(L)\neq 0$ und es ist $L\cong \mathcal{O}_S(D)$ für einen Divisor $D>0$ auf S. Wir betrachten zunächst den Fall $a(S) = 0$. Es muss dann insbesondere S eine K3-Fläche sein, da es auf Tori der algebraischen Dimension 0 keine Kurven gibt. Wir wählen auch hier die algebraische Approximation $\pi\colon\mathcal{S}\to B$ von $S=\mathcal{S}_0$ und eine Fortsetzung $\mathcal{L}\in\operatorname{Pic}\mathcal{S}$ von $L\cong\mathcal{L}_0$ gemäß Satz 6.1 (nach Satz 6.3 sind dann automatisch die $h^q(\mathcal{L}_b)$ konstant). Es sei

$$D = \sum_i n_i D_i$$

die Zerlegung von D in irreduzible Komponenten. Die D_i sind dann paarweise verschiedene (-2)-Kurven auf S, die sich (wenn überhaupt) transversal schneiden. Nach Satz 6.3 bekommen wir effektive Divisoren $\mathcal{D}_i$ auf $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{D}_i|_{\mathcal{S}_0} = D_i$. Wir betrachten den Divisor

$$\mathcal{D} := \sum_i n_i\mathcal{D}_i$$

auf $\mathcal{S}$. Auch die Komponenten $\mathcal{D}_i$ von $\mathcal{D}$ schneiden sich transversal. Daraus bekommen wir zu jedem Punkt $y\in\operatorname{supp} D$ eine offene Umgebung $\mathcal{U}\subset\mathcal{S}$ von y derart, dass mit $U := \mathcal{U}\cap\mathcal{S}_0$ gilt:

$$(\mathcal{U},\mathcal{D})\cong (U\times B, D\times B) \tag{6.6}$$

über B (als Isomorphismus von Paaren komplexer Räume). Wegen $a(S) = 0$ ist $h^0(L) = 1$, also gilt $Y\subset D$ als Inklusion komplexer Räume. Aufgrund von (6.6) können wir eine flache Fortsetzung $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ von Y finden, so dass $\mathcal{Y} \subset \mathcal{D}$ ist. Dies bedeutet aber insbesondere, dass $h^0\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_\mathcal{Y})|_{\mathcal{S}_b}\big) = 1$ für alle $b \in B$ ist.

Im Falle $a(S) = 1$ betrachten wir zuerst den Fall, dass S eine K3-Fläche ist. Wir wählen dann die algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ von $S = \mathcal{S}_0$ gemäß Satz 5.1. Nach Proposition 5.2 existiert ein Geradenbündel $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}$ mit $\mathcal{L}_0 \cong \mathcal{O}_S(D) \cong L$ und nach dem oben Gesagten genügt es, Y so zu einem flachen $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ fortzusetzen, dass $h^0\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_\mathcal{Y})|_{\mathcal{S}_b}\big)$ konstant ist. Wir müssen also die Fortsetzbarkeit von Schnitten in $H^0(L)$, die auf Y verschwinden, zu Schnitten in $H^0(\mathcal{L})$, die auf $\mathcal{Y}$ verschwinden, gewährleisten. Sei dazu $(D_i)_{i\in I}$ eine Indizierung aller irreduziblen Divisoren auf S. Wir wählen gemäß der lokalen Trivialität aus Satz 5.1 eine Familie $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ von Divisoren auf $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{S}_0 = D_i$ (vgl. auch Proposition 5.2 und Satz 6.3). Aufgrund der lokalen Trivialität der Gesamtsituation können wir dann $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ so wählen, dass $\mathcal{Y}$ bezüglich der Familie $(\mathcal{D}_i)_{i\in I}$ dieselben (schematheoretischen) Inzidenzbeziehungen erfüllt wie Y bezüglich der Familie $(D_i)_{i\in I}$. Ist nun $I_0 \subset I$ eine endliche Teilmenge mit

$$D_{I_0} := \sum_{i\in I_0} n_i D_i \in |L|,$$

so ist aufgrund der Eindeutigkeit der Fortsetzung von L (siehe Bemerkung 6.2)

$$\mathcal{D}_{I_0} := \sum_{i\in I_0} n_i \mathcal{D}_i \in |\mathcal{L}|.$$

Ist zusätzlich $Y \subset D_{I_0}$ (als Inklusion komplexer Räume), so folgt nach Wahl von $\mathcal{Y}$ auch die Inklusion $\mathcal{Y} \subset \mathcal{D}_{I_0}$.

Ist S ein Torus mit $a(S) = 1$, so sei $r\colon S \to C$ die elliptische Faserung von S über einer elliptischen Kurve C. Da alle irreduziblen Kurven auf S Fasern von r sind, lässt sich das von $H^0(L \otimes \mathcal{I}_Y) \subset H^0(L)$ definierte Linearsystem zerlegen als

$$|H^0(L \otimes \mathcal{I}_Y)| = D_0 + |L \otimes \mathcal{O}_S(-D_0)|,$$

wobei D_0 ein effektiver Divisor ist, der den komplexen Unterraum $Y \subset S$ enthält (d. h. D_0 ist gegeben durch einen Schnitt $s_0 \in H^0\big(\mathcal{O}_S(D_0) \otimes \mathcal{I}_Y\big) \subset H^0\big(\mathcal{O}_S(D_0)\big)$). Wir wählen die algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ von $S = \mathcal{S}_0$ gemäß Satz 6.1 und Fortsetzungen $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \operatorname{Pic}\mathcal{S}$ von $\mathcal{O}_S(D_0) \cong \mathcal{M}|_{\mathcal{S}_0}$ und $L \otimes \mathcal{O}_S(-D_0) \cong \mathcal{N}|_{\mathcal{S}_0}$ gemäß Satz 6.4. Wir wählen einen Schnitt $\tilde{s}_0 \in H^0(\mathcal{M})$ mit $\tilde{s}_0|_{\mathcal{S}_0} = s_0$ derart, dass multiple Komponenten von D_0 nicht auseinandergezogen werden. Es ist klar, dass man dann $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ von Kodimension mindestens 2 so wählen kann, dass $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}_0 = Y$ ist, $\mathcal{Y}$ flach über B ist und $\tilde{s}_0 \in H^0(\mathcal{M} \otimes \mathcal{I}_\mathcal{Y})$ ist. Wählen wir $\mathcal{L} := \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, so ergibt sich die gewünschte Konstanz von $h^0\big((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_\mathcal{Y})|_{\mathcal{S}_b}\big)$. □

Als Anwendung erhalten wir die Fortsetzbarkeit gewisser Extensionen:

Korollar 6.7. *Sei* S *eine nichtalgebraische K3-Fläche oder ein nichtalgebraischer Torus,* $L \in \operatorname{Pic} S$ *und* $Y \subset S$ *ein lokal vollständiger Durchschnitt von Kodimension* $\geqslant 2$. *Dann existiert eine algebraische Approximation* $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ *von* $S = \mathcal{S}_0$, *ein Geradenbündel* $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ *mit* $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0} \cong L$ *und ein lokal vollständiger Durchschnitt* $\mathcal{Y} \subset \mathcal{S}$ *mit* $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}_0 = Y$, *der flach über* B *ist, derart, dass für jede kohärente Garbe* $\mathcal{F}$ *auf* S, *für die eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow L \otimes \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0 \tag{6.7}$$

existiert, eine kohärente Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ *auf* $\mathcal{S}$ *und eine Extension*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}} \longrightarrow 0, \tag{6.8}$$

deren Einschränkung auf $\mathcal{S}_0$ *die gegebene Extension* (6.7) *liefert, existieren.*

Beweis. Wir wählen π, $\mathcal{L}$ und $\mathcal{Y}$ gemäß Satz 6.6. Nach [BPS80, Satz 3] folgt die Behauptung aus der Konstanz der Abbildung

$$B \ni b \mapsto \dim \operatorname{Ext}^1\left((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}_b}\right).$$

Nun ist aber nach Serre-Dualität

$$\operatorname{Ext}^1\left((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}_b}\right) \cong H^1\left((\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{\mathcal{Y}})|_{\mathcal{S}_b}\right)^*,$$

weshalb sich die gewünschte Konstanz aus Satz 6.6 ergibt. □

6.3 Rang-2-Bündel

Aufgrund der nötigen Fallunterscheidungen bei der Wahl der Deformation im Beweis von Satz 6.6 kann nicht garantiert werden, dass sich jedes Rang-2-Bündel auf eine algebraische Approximation einer K3-Fläche fortsetzen lässt; allerdings kann die Fortsetzbarkeit nach Tensorieren mit einem geeigneten Geradenbündel erreicht werden:

Satz 6.8. *Sei* S *eine nichtalgebraische K3-Fläche oder ein nichtalgebraischer Torus und* V *ein Rang-2-Bündel auf* S. *Dann existiert eine algebraische Approximation* $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ *von* $S = \mathcal{S}_0$, *ein Rang-2-Bündel* $\mathcal{V}$ *auf* $\mathcal{S}$ *und ein Geradenbündel* $L \in \operatorname{Pic} S$ *mit* $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}_0} \cong V \otimes L$. *Ist* S *ein Torus, so kann* $L = \mathcal{O}_S$ *erreicht werden.*

Beweis. Ist V ein einfaches Bündel, so ist

$$\begin{aligned} h^2(S^2V \otimes \det V^*) &= h^2(V \otimes V \otimes \det V^*) - h^2(\det V \otimes \det V^*) \\ &= h^2(V \otimes V^*) - h^2(\mathcal{O}_S) \\ &= h^0(V \otimes V^*) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Wir wählen $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ gemäß Satz 6.1. Nach Lemma 3.19 und Proposition 3.4 ist Proposition 3.16 auf das Konikbündel $f\colon \mathbb{P}(V) \to S$ und die Deformation π anwendbar. Da nach Satz 6.1 eine Fortsetzung von $\det V$ auf $\mathcal{S}$ existiert, liefert Proposition 3.15 die Existenz eines Rang-2-Bündels $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}_0} \cong V$.

Ist V nicht einfach, so existieren $L_1, L_2 \in \operatorname{Pic} S$ und ein lokal vollständiger Durchschnitt $Y \subset S$ von Kodimension $\geqslant 2$ derart, dass sich $V \otimes L_1$ als Extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow V \otimes L_1 \longrightarrow L_2 \otimes \mathcal{I}_Y \longrightarrow 0$$

schreiben lässt. Wir wählen eine algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ von $\mathcal{S}_0 = S$ gemäß Korollar 6.7. Dann existiert eine kohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}_0} \cong V \otimes L_1$. Da V lokalfrei ist, ist nach genügender Verkleinerung von B die Garbe $\mathcal{F}$ ein Rang-2-Verktorbündel auf $\mathcal{S}$.

Im Falle, dass S ein Torus ist, konnte im Beweis zu Satz 6.6 die algebraische Approximation gemäß Satz 6.1 gewählt werden, also existiert eine Fortsetzung $\mathcal{L}_1 \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ von $L_1 = \mathcal{L}_1|_{\mathcal{S}_0}$. Es ist dann $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}_1^*)|_{\mathcal{S}_0} \cong V$. □

Mit Korollar 3.3 folgt sofort:

Korollar 6.9. *Sei S eine K3-Fläche oder ein Torus und V ein Rang-2-Bündel auf S. Dann ist $\mathbb{P}(V)$ algebraisch approximierbar.*

7 Weitere Resultate

7.1 Projektivierte Rang-2-Bündel

Wir möchten die Resultate aus Kapitel 6 auf projektivierte Rang-2-Bündel über aufgeblasenen K3-Flächen und Tori ausdehnen. Dazu benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Satz 7.1. *Sei* S *eine kompakte Fläche,* $p\colon \hat{S} \to S$ *die Aufblasung in einem Punkt* $s_0 \in S$ *und* $\hat{V}$ *ein Vektorbündel auf* $\hat{S}$*. Falls eine algebraische Approximation* $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ *von* $S = \mathcal{S}_0$ *und ein Vektorbündel* $\mathcal{V}$ *auf* $\mathcal{S}$ *mit*

$$\mathcal{V}|_{\mathcal{S}_0} \cong V := (p_* \hat{V})^{**}$$

existieren, so existieren (nach evtl. Verkleinerung von B*) auch eine algebraische Approximation* $\hat{\pi}\colon \hat{\mathcal{S}} \to B$ *von* $\hat{S} = \hat{\mathcal{S}}_0$*, eine Modifikation* $P\colon \hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ *über* B *mit* $P|_{\hat{\mathcal{S}}_0} = p$ *und ein Vektorbündel* $\hat{\mathcal{V}}$ *auf* $\hat{\mathcal{S}}$ *mit*

$$\hat{\mathcal{V}}|_{\hat{\mathcal{S}}_0} \cong \hat{V}.$$

Beweis. Wir wählen eine Untermannigfaltigkeit $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$, die von π isomorph auf B abgebildet wird, so dass $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}_0 = \{s_0\}$ ist und definieren $P\colon \hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ als die Aufblasung von $\mathcal{S}$ entlang $\mathcal{C}$. Dann ist $\hat{\pi} := \pi \circ P\colon \hat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ eine Deformation von $\hat{S} = \hat{\mathcal{S}}_0$. Für jedes $b \in B$ ist $P|_{\hat{\mathcal{S}}_b}$ die Aufblasung von $\mathcal{S}_b$ im Punkt $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}_b$. Also ist insbesondere $P|_{\hat{\mathcal{S}}_0} = p$ und $\hat{\mathcal{S}}_b$ ist projektiv, falls $\mathcal{S}_b$ projektiv ist. Insbesondere ist $\hat{\pi}$ eine algebraische Approximation (vgl. auch Satz 2.15).

Es sei $\mathcal{E} \subset \hat{\mathcal{S}}$ der exzeptionelle Divisor von P, dann ist $E := \mathcal{E} \cap \hat{\mathcal{S}}_0 \subset \hat{\mathcal{S}}_0$ der exzeptionelle Divisor von p. Die zur natürlichen Abbildung $p^* p_* \hat{V} \to \hat{V}$ biduale Abbildung

$$\iota\colon p^* V \to \hat{V}^{**} = \hat{V}$$

ist auf $\hat{\mathcal{S}}_0 \setminus E$ ein Isomorphismus und induziert somit auf $\hat{\mathcal{S}}_0$ die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow p^* V \xrightarrow{\iota} \hat{V} \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \tag{7.1}$$

wobei Q eine kohärente Garbe auf $\hat{\mathcal{S}}_0$ ist, deren Träger (mengentheoretisch) in E enthalten ist. Wir möchten (7.1) zu einer Extension auf $\hat{\mathcal{S}}$ fortsetzen.

Nach Voraussetzung existiert eine Fortsetzung $\mathcal{V}$ von V. Zur Fortsetzung von Q wählen wir eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{S}}$ von $\mathcal{E}$ derart, dass eine offene Umgebung $U \subset \hat{S}_0$ von E existiert mit $\mathcal{U} \cong U \times B$ über B. Wir können dann $\mathrm{pr}_1^*(Q|_U)$ außerhalb von $\mathcal{U}$ durch 0 fortsetzen und erhalten eine kohärente Garbe $\mathcal{Q}$ auf $\hat{\mathcal{S}}$. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{U}$ so klein gewählt, dass $(P^*\mathcal{V})|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ ist. Für jedes $b \in B$ ist dann

$$\mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{Q}|_{\hat{\mathcal{S}}_b}, (P^*\mathcal{V})|_{\hat{\mathcal{S}}_b}\right) \cong \mathrm{Ext}^1(Q|_U, \mathcal{O}_U),$$

also existiert nach [BPS80, Satz 3] eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P^*\mathcal{V} \longrightarrow \hat{\mathcal{V}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

deren Einschränkung auf $\hat{S}_0$ gerade die Sequenz (7.1) liefert. Da $\hat{V}$ lokalfrei ist, ist auch $\hat{\mathcal{V}}$ (in einer Umgebung von $\hat{S}_0$) lokalfrei. □

Für projektivierte Rang-2-Bündel über Kählerflächen mit Kodairadimension 0 haben wir damit ein vollständiges Resultat:

Satz 7.2. *Sei S eine kompakte Kählerfläche mit $\kappa(S) = 0$ und V ein Rang-2-Bündel auf S. Dann ist $\mathbb{P}(V)$ algebraisch approximierbar.*

Beweis. Aus der Flächenklassifikation folgt, dass das minimale Modell von S eine K3-Fläche oder ein Torus ist.

Ist also S minimal, so existiert nach Satz 6.8 eine algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ von $S = \mathcal{S}_0$, ein Rang-2-Bündel $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{S}$ und ein Geradenbündel $L \in \operatorname{Pic} S$ mit $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}_0} \cong V \otimes L$.

Für nicht minimale S liefert die induktive Anwendung von Satz 7.1 ebenfalls eine algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B$ von $S = \mathcal{S}_0$, ein Rang-2-Bündel $\mathcal{V}$ auf $\mathcal{S}$ und ein Geradenbündel $L \in \operatorname{Pic} S$ mit $\mathcal{V}|_{\mathcal{S}_0} \cong V \otimes L$.

In jedem Fall ist nach Korollar 3.3 durch $\mathbb{P}(\mathcal{V}) \to B$ eine algebraische Approximation von $\mathbb{P}(V \otimes L) \cong \mathbb{P}(V)$ gegeben. □

7.2 Konikbündel über Flächen mit algebraischer Dimension 1

Unter Verwendung der in Kapitel 5 beschriebenen Deformationstheorie elliptischer Flächen bekommen wir folgende Aussage über die algebraische Approximierbarkeit gewisser Konikbündel über elliptischen Flächen:

Satz 7.3. *Sei* $f\colon X \to S$ *ein Konikbündel über einer kompakten Kählerfläche* S *mit* $a(S) = 1$, $E := f_*(K^*_{X/S})$ *und* $r\colon S \to C$ *die elliptische Faserung von* S. *Falls für eine allgemeine Faser* F *von* r

$$E|_F \cong \mathcal{O}_F^{\oplus 3}$$

ist, so ist X *algebraisch approximierbar.*

Beweis. Die Voraussetzung impliziert, dass r_*E ein Rang-3-Bündel auf C ist. Wir bekommen eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow r^*r_*E \xrightarrow{\alpha} E \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \tag{7.2}$$

wobei Q eine Torsionsgarbe auf S ist. Da alle irreduziblen Kurven auf S in Fasern von r enthalten sind, liegt insbesondere der Träger von Q in endlich vielen Fasern von r. Dies bedeutet, dass es eine endliche Menge $Z \subset C$ gibt, so dass $\alpha|_{r^{-1}(C\setminus Z)}$ ein Isomorphismus ist.

Wir wählen die algebraische Approximation $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ von $S = \mathcal{S}_0$ und die Fortsetzung $R\colon \mathcal{S} \to C \times B$ von r gemäß Satz 5.1. Aufgrund der lokalen Trivialität von R über B existiert eine kohärente Garbe $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{S}$, die flach über B ist, derart, dass $\mathcal{Q}|_{\mathcal{S}_0} \cong Q$, $\operatorname{supp}\mathcal{Q} \subset R^{-1}(Z \times B)$ und

$$\operatorname{Ext}^1(\mathcal{Q}|_{\mathcal{S}_b}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}_b}) \cong \operatorname{Ext}^1(Q, \mathcal{O}_S)$$

für alle $b \in B$ ist. Dies impliziert, dass ein Rang-3-Bündel $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{S}$ und eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R^*\mathrm{pr}_1^*r_*E \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0, \tag{7.3}$$

deren Einschränkung auf $\mathcal{S}_0$ gerade die Sequenz (7.2) ergibt, existieren. Insbesondere ist $\tilde{\alpha}|_{R^{-1}\left((C\setminus Z)\times B\right)}$ ein Isomorphismus. Der definierende Schnitt

$$\sigma \in H^0(S^2E \otimes \det E^*)$$

(vgl. Proposition 3.2) liefert damit einen Schnitt

$$\tilde{\sigma} \in H^0\Big((S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^*)|_{R^{-1}\left((C\setminus Z)\times B\right)}\Big)$$

mit $\tilde{\sigma}|_{R^{-1}\left((C\setminus Z)\times\{0\}\right)} = \sigma|_{r^{-1}(C\setminus Z)}$.

Aufgrund der lokalen Trivialität der Gesamtsituation gibt es aber für jeden Punkt $p \in Z$ eine offene Umgebung $U \subset C$ von p derart, dass ein Schnitt

$$\tilde{\tilde{\sigma}} \in H^0\big((S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^*)|_{R^{-1}(U\times B)}\big)$$

mit $\tilde{\tilde{\sigma}}|_{R^{-1}(U\times\{0\})} = \sigma|_{r^{-1}(U)}$ und $\tilde{\tilde{\sigma}}|_{R^{-1}\left((U\setminus\{p\})\times B\right)} = \tilde{\sigma}|_{R^{-1}\left((U\setminus\{p\})\times B\right)}$ existiert.

Die Schnitte $\tilde{\sigma}$ und $\tilde{\tilde{\sigma}}$ verkleben zu einem Schnitt

$$s \in H^0(S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^*)$$

mit $s|_{\mathcal{S}_0} = \sigma$. Der Schnitt s definiert ein Konikbündel über $\mathcal{S}$, das eine algebraische Approximation von X liefert (siehe Korollar 3.3). $\square$

Bemerkung 7.4. Ist $f\colon X \to S$ ein Konikbündel, das die Voraussetzungen von Satz 7.3 erfüllt, so ist nach Proposition 4.16 insbesondere $a(X) = 2$.

7.3 Konikbündel über K3-Flächen

Wir können die Resultate aus Kapitel 6 verwenden, um eine weitere Approximierbarkeitsaussage für Konikbündel über K3-Flächen zu gewinnen:

Satz 7.5. *Sei S eine K3-Fläche, $f\colon X \to S$ ein Konikbündel und $E := f_*(K^*_{X/S})$. Falls Geradenbündel $L_1, L_2, L_3 \in \operatorname{Pic} S$ existieren mit*

$$E \cong L_1 \oplus L_2 \oplus L_3,$$

dann ist X algebraisch approximierbar.

Beweis. Wir wählen die Deformation $\pi\colon \mathcal{S} \to B \ni 0$ von $S = \mathcal{S}_0$ gemäß Satz 6.1. Nach Proposition 6.5 ist π eine algebraische Approximation von S. Es seien $\mathcal{L}_i \in \operatorname{Pic} \mathcal{S}$ für $i = 1, 2, 3$ Geradenbündel mit $\mathcal{L}_i|_{\mathcal{S}_0} \cong L_i$. Setzen wir

$$\mathcal{E} := \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3,$$

so ist $\mathcal{E}|_{\mathcal{S}_0} \cong E$ und es gilt

$$\begin{aligned} S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^* &= \mathcal{L}_1^* \oplus \mathcal{L}_2^* \oplus \mathcal{L}_3^* \\ &\quad \oplus (\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2^* \otimes \mathcal{L}_3^*) \oplus (\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3^*) \oplus (\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2^* \otimes \mathcal{L}_3). \end{aligned}$$

Satz 6.3 liefert, dass die Abbildung $B \ni b \mapsto h^0\big((S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^*)|_{\mathcal{S}_b}\big)$ in einer Umgebung von 0 konstant ist, also lässt sich (nach evtl. Verkleinerung von B) der nach Proposition 3.2 gegebene definierende Schnitt $\sigma \in H^0(S^2E \otimes \det E^*)$ von X fortsetzen zu einem Schnitt $\tilde{\sigma} \in H^0(S^2\mathcal{E} \otimes \det \mathcal{E}^*)$ mit $\tilde{\sigma}|_{\mathcal{S}_0} = \sigma$. Der Schnitt $\tilde{\sigma}$ definiert ein Konikbündel $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ über $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{X}_0 \cong X$. Nach Korollar 3.3 ist $\mathcal{X} \to B$ eine algebraische Approximation von X. $\square$

A Chernklassen

In diesem Anhang sind einige oft benötigte Formeln für Chernklassen und Eulercharakteristiken gewisser Vektorbündel aufgelistet. Für die allgemeine Theorie sei auf [Ful98] verwiesen.

A.1 Gewisse Chernklassen

Proposition A.1. *Seien* E, F *Vektorbündel. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
c_1(E \otimes F) &= \mathrm{rk}(F)\, c_1(E) + \mathrm{rk}(E)\, c_1(F), && \text{(A.1)}\\
c_2(E \otimes F) &= \mathrm{rk}(F)\, c_2(E) + \mathrm{rk}(E)\, c_2(F)\\
&\quad + \big(\mathrm{rk}(E)\,\mathrm{rk}(F) - 1\big)\, c_1(E)\, c_1(F) && \text{(A.2)}\\
&\quad + \tbinom{\mathrm{rk}(F)}{2}\, c_1^2(E) + \tbinom{\mathrm{rk}(E)}{2}\, c_1^2(F),\\
c_1\Big(\bigwedge^2 E\Big) &= \big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\, c_1(E), && \text{(A.3)}\\
c_2\Big(\bigwedge^2 E\Big) &= \big(\mathrm{rk}(E) - 2\big)\, c_2(E) + \tbinom{\mathrm{rk}(E)-1}{2}\, c_1^2(E). && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

Korollar A.2. *Sei* E *ein Vektorbündel. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
c_1(E \otimes E^*) &= 0, && \text{(A.5)}\\
c_2(E \otimes E^*) &= 2\,\mathrm{rk}(E)\, c_2(E) - \big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\, c_1^2(E) && \text{(A.6)}\\
c_1(E \otimes E) &= 2\,\mathrm{rk}(E)\, c_1(E), && \text{(A.7)}\\
c_2(E \otimes E) &= 2\,\mathrm{rk}(E)\, c_2(E) + \big(2\,\mathrm{rk}(E) + 1\big)\big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\, c_1^2(E), && \text{(A.8)}\\
c_1(S^2E) &= \big(\mathrm{rk}(E) + 1\big)\, c_1(E), && \text{(A.9)}\\
c_2(S^2E) &= \big(\mathrm{rk}(E) + 2\big)\, c_2(E) + \tfrac{1}{2}\big(\mathrm{rk}(E) + 2\big)\big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\, c_1^2(E), && \text{(A.10)}\\
c_1(S^2E \otimes \det E^*) &= -\tfrac{1}{2}\big(\mathrm{rk}(E) + 1\big)\big(\mathrm{rk}(E) - 2\big)\, c_1(E), && \text{(A.11)}\\
c_2(S^2E \otimes \det E^*) &= \big(\mathrm{rk}(E) + 2\big)\, c_2(E)\\
&\quad + \tfrac{1}{8}\big(\mathrm{rk}(E) + 2\big)\big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\big(\mathrm{rk}(E) - 3\big)\,\mathrm{rk}(E)\, c_1^2(E). && \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Speziell für Rang-3-Bündel:

Korollar A.3. *Sei* E *ein Rang-3-Vektorbündel. Dann gilt:*

$$c_1(E \otimes E^*) = 0, \tag{A.13}$$
$$c_2(E \otimes E^*) = 6\,c_2(E) - 2\,c_1^2(E), \tag{A.14}$$
$$c_1(E \otimes E) = 6\,c_1(E), \tag{A.15}$$
$$c_2(E \otimes E) = 6\,c_2(E) + 14\,c_1^2(E), \tag{A.16}$$
$$c_1(S^2E) = 4\,c_1(E), \tag{A.17}$$
$$c_2(S^2E) = 5\,c_2(E) + 5\,c_1^2(E), \tag{A.18}$$
$$c_1(S^2E \otimes \det E^*) = -2\,c_1(E), \tag{A.19}$$
$$c_2(S^2E \otimes \det E^*) = 5\,c_2(E). \tag{A.20}$$

A.2 Folgerungen für Eulercharakteristiken über Flächen

Aus dem Satz von Riemann-Roch sowie den Berechnungen des vorigen Abschnitts erhalten wir:

Proposition A.4. *Sei* E *ein Vektorbündel über einer kompakten Fläche* S*. Dann gilt:*

$$\chi(E) = \tfrac{1}{2}\big(c_1^2(E) - 2\,c_2(E) + c_1(S)\,c_1(E)\big) + \mathrm{rk}(E)\,\chi(\mathcal{O}_S), \tag{A.21}$$
$$\chi(E \otimes E^*) = -2\,\mathrm{rk}(E)\,c_2(E) + \big(\mathrm{rk}(E) - 1\big)\,c_1^2(E) + \mathrm{rk}(E)^2\,\chi(\mathcal{O}_S), \tag{A.22}$$
$$\begin{aligned}\chi(S^2E \otimes \det E^*) = {}&-\big(\mathrm{rk}(E)+2\big)\,c_2(E) + \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{rk}(E)^2 - \mathrm{rk}(E) + 2\big)\,c_1^2(E)\\ &- \tfrac{1}{4}\big(\mathrm{rk}(E)+1\big)\big(\mathrm{rk}(E)-2\big)\,c_1(S)\,c_1(E) + \tbinom{\mathrm{rk}(E)+1}{2}\,\chi(\mathcal{O}_S).\end{aligned} \tag{A.23}$$

Wieder speziell für Rang-3-Bündel:

Korollar A.5. *Sei* E *ein Rang-3-Bündel über einer kompakten Fläche* S*. Dann gilt:*

$$\chi(E) = \tfrac{1}{2}\big(c_1^2(E) - 2\,c_2(E) + c_1(S)\,c_1(E)\big) + 3\chi(\mathcal{O}_S), \tag{A.24}$$
$$\chi(E \otimes E^*) = -6\,c_2(E) + 2\,c_1^2(E) + 9\chi(\mathcal{O}_S), \tag{A.25}$$
$$\chi(S^2E \otimes \det E^*) = -5\,c_2(E) + 2\,c_1^2(E) - c_1(S)\,c_1(E) + 6\chi(\mathcal{O}_S). \tag{A.26}$$

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \tfrac{1}{12}\big(c_1^2(S) + c_2(S)\big).$$

B Nichtalgebraische Mannigfaltigkeiten

Proposition B.1. *Sei* X *eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit mit algebraischer Dimension* $a(X) = 0$ *und* $\mathcal{F}$ *eine torsionsfreie kohärente Garbe auf* X*. Dann ist*

$$h^0(\mathcal{F}) \leqslant \operatorname{rk}(\mathcal{F}).$$

Beweis. Sei zunächst $\operatorname{rk}(\mathcal{F}) = 1$. Dann ist $\mathcal{F}^{**}$ ein Geradenbündel. Zwei linear unabhängige Schnitte eines Geradenbündels lieferen eine nichttriviale meromorphe Funktion auf X, also impliziert $a(X) = 0$, dass $h^0(\mathcal{F}^{**}) \leqslant 1$ ist. Da $\mathcal{F}$ Untergarbe von $\mathcal{F}^{**}$ ist, ist auch $h^0(\mathcal{F}) \leqslant 1 = \operatorname{rk}(\mathcal{F})$.

Ist $\operatorname{rk}(\mathcal{F}) > 1$, so unterscheiden wir zwei Fälle: Falls $H^0(\mathcal{F}) = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen, andernfalls bekommen wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \longrightarrow 0, \tag{B.1}$$

wobei $\mathcal{G}$ eine kohärente Garbe auf X ist. Bezeichnen wir mit $\mathcal{G}_{\mathrm{tor}}$ die Torsionsuntergarbe von $\mathcal{G}$, so erhalten wir aus (B.1) die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \varphi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{tor}}) \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathrm{tor}} \longrightarrow 0.$$

Da $\mathcal{F}$ torsionsfrei ist, ist $\varphi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{tor}})$ eine torsionsfreie Garbe vom Rang 1; nach Konstruktion ist $\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathrm{tor}}$ torsionsfrei von Rang $\operatorname{rk}(\mathcal{F}) - 1$. Nach Induktion erhalten wir damit

$$h^0(\mathcal{F}) \leqslant h^0\big(\varphi^{-1}(\mathcal{G}_{\mathrm{tor}})\big) + h^0(\mathcal{G}/\mathcal{G}_{\mathrm{tor}}) \leqslant 1 + \big(\operatorname{rk}(\mathcal{F}) - 1\big) = \operatorname{rk}(\mathcal{F}). \qquad \square$$

Literatur

[Art62] M. Artin: „Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces". In: *Amer. J. Math.* **84** (1962), S. 485–496.

[Bea77] A. Beauville: „Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires". In: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **10**.3 (1977), S. 309–391.

[BHPV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters und A. Van de Ven: *Compact complex surfaces*. 2. Aufl. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 4. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[BLP87] C. Bănică und J. Le Potier: „Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non-algébriques". In: *J. Reine Angew. Math.* **378** (1987), S. 1–31.

[BPS80] C. Bănică, M. Putinar und G. Schumacher: „Variation der globalen Ext in Deformationen kompakter komplexer Räume". In: *Math. Ann.* **250**.2 (1980), S. 135–155.

[Buc06] N. Buchdahl: „Algebraic deformations of compact Kähler surfaces". In: *Math. Z.* **253**.3 (2006), S. 453–459.

[Buc08] N. Buchdahl: „Algebraic deformations of compact Kähler surfaces. II". In: *Math. Z.* **258**.3 (2008), S. 493–498.

[DEP05] J.-P. Demailly, T. Eckl und T. Peternell: „Line bundles on complex tori and a conjecture of Kodaira". In: *Comment. Math. Helv.* **80**.2 (2005), S. 229–242.

[Elk78] R. Elkik: „Singularités rationnelles et déformations". In: *Invent. Math.* **47**.2 (1978), S. 139–147.

[FM94] R. Friedman und J. W. Morgan: *Smooth four-manifolds and complex surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. 27. Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[Fuj83a] A. Fujiki: „On the structure of compact complex manifolds in $\mathcal{C}$". In: *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*. Adv. Stud. Pure Math. 1. Amsterdam: North-Holland, 1983, S. 231–302.

[Fuj83b] A. Fujiki: „Relative algebraic reduction and relative Albanese map for a fiber space in $\mathcal{C}$". In: *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **19**.1 (1983), S. 207–236.

[Ful98] W. Fulton: *Intersection theory*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1998.

[Hor74] E. Horikawa: „On deformations of holomorphic maps. II". In: *J. Math. Soc. Japan* **26** (1974), S. 647–667.

[Hor76] E. Horikawa: „On deformations of holomorphic maps. III". In: *Math. Ann.* **222**.3. (1976), S. 275–282.

[KM92] J. Kollár und S. Mori: „Classification of three-dimensional flips". In: *J. Amer. Math. Soc.* **5**.3 (1992), S. 533–703.

[Kod63a] K. Kodaira: „On compact analytic surfaces. II". In: *Ann. of Math. (2)* **77** (1963), S. 563–626.

[Kod63b] K. Kodaira: „On compact analytic surfaces. III". In: *Ann. of Math. (2)* **78** (1963), S. 1–40.

[Kod63c] K. Kodaira: „On stability of compact submanifolds of complex manifolds". In: *Amer. J. Math.* **85** (1963), S. 79–94.

[Miy83] M. Miyanishi: „Algebraic methods in the theory of algebraic threefolds—surrounding the works of Iskovskikh, Mori and Sarkisov". In: *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*. Adv. Stud. Pure Math. 1. Amsterdam: North-Holland, 1983, S. 69–99.

[Nak87] N. Nakayama: „The lower semicontinuity of the plurigenera of complex varieties". In: *Algebraic geometry, Sendai, 1985*. Adv. Stud. Pure Math. 10. Amsterdam: North-Holland, 1987, S. 551–590.

[Ran89] Z. Ran: „Deformations of maps". In: *Algebraic curves and projective geometry (Trento, 1988)*. Lect. Notes Math. 1389. Berlin: Springer, 1989, S. 246–253.

[Ran91] Z. Ran: „Stability of certain holomorphic maps". In: *J. Differential Geom.* **34**.1 (1991), S. 37–47.

[Sar82] V. G. Sarkisov: „On conic bundle structures". In: *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46**.2 (1982), S. 371–408, 432.

[Uen75] K. Ueno: *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Lect. Notes Math. 439. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

[Voi02] C. Voisin: *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*. Cours Spécialisés 10. Paris: Société Mathématique de France, 2002.

[Voi04] C. Voisin: „On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds“. In: *Invent. Math.* **157**.2 (2004), S. 329–343.

[Voi06] C. Voisin: „On the homotopy types of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem“. In: *J. Differential Geom.* **72**.1 (2006), S. 43–71.

[Weh86] J. Wehler: „Cyclic coverings: deformation and Torelli theorem“. In: *Math. Ann.* **274**.3 (1986), S. 443–472.

[Yan89] J.-H. Yang: „Holomorphic vector bundles over complex tori“. In: *J. Korean Math. Soc.* **26**.1 (1989), S. 117–142.