Die k-dimensionale Champagnerpyramide

Michael Heinrich Baumann[*,†]

August 2018

Abriss Summenformeln, allen voran die Gauß'sche Summenformel $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$, gehören zum Grundwissen eines jeden Mathematikers. Neben Summenformeln, welche auch endliche Reihen genannt werden, über Potenzen $\sum_{i=1}^{n} i^k$ gibt es sehr viele weitere Formeln für endliche Summen bestimmter Werte. Wir wollen in dieser Arbeit Verallgemeinerungen der Gauß'schen Summenformel der Form $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$, wie sie die Anzahl der Gläser in einer Champagnerpyramide der Höhe n beschreibt, betrachten. Im Hauptteil der Arbeit werden wir die allgemeine Formel $\sum_{n_{k-1}=1}^{n_k}\sum_{n_{k-2}=1}^{n_{k-1}}\cdots\sum_{n_2=1}^{n_3}\sum_{n_1=1}^{n_2} n_1 = \binom{n+k-1}{k}$ für die Anzahl der Gläser in einer k-dimensionalen Pyramide der Höhe $n = n_k$ herleiten und beweisen.[1,2]

1 Die Gauß'sche Summenformel

Jeder Schüler der Mathematik kennt Wolfgang Sartorius von Waltershausens Geschichte vom jungen Carl Friedrich Gauß und dem Lehrer Büttner:

> *„Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: »Ligget se'.« (Da liegt sie.) Während die andern Schüler emsig weiter rechnen multipliciren und addiren, geht Büttner sich seiner Würde bewusst auf und ab, indem er nur von Zeit zu Zeit einen mitleidigen und sarcastischen Blick auf den kleinsten der Schüler wirft, der längst seine Aufgabe beendigt hatte. Dieser sass dagegen ruhig schon eben so sehr von dem festen unerschütterlichen Bewusstsein durchdrungen, welches ihn bis zum Ende seiner Tage bei jeder vollendeten Arbeit erfüllte, dass seine Aufgabe richtig gelöst sei, und dass das Resultat kein anderes sein könne. Am Ende der Stunde wurden darauf die Rechentafeln umgekehrt; die von Gauss mit einer einzigen Zahl lag oben und als Büttner das Exempel prüfte, wurde das seinige zum Staunen aller Anwesenden als richtig befunden (...)“*[3]

Es ist nicht überliefert, bis zu welcher Zahl n die Schüler die Summe $1+2+3+4+\ldots+n$ berechnen sollten; doch stellen wir uns einmal vor, dass $n = 100$ war. Es wird erzählt, dass der junge Gauß statt schnöd $1+2=3$, $3+3=6$, $6+4=10$ etc. zu rechnen, auf die Idee kam, dass $1+100=101$, $2+99=101$, $3+98=101$, $\ldots$, $49+52=101$ und $50+51=101$ stimme müsse, was zur Lösung $50\cdot 101 = 5.050$ führt. So kann man sich leicht die Gauß'sche Summenformel herleiten:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

Diese Formel kann man natürlich leicht mit einer vollständigen Induktion über n beweisen. Wir wollen uns zunächst aber eine grafische Erklärung überlegen, bevor wir in Kapitel 3 auf einen in der Weise zielführenderen Ansatz kommen, als dass er verallgemeinerbar ist. Stellen wir uns ein „Dreieck“ aus Kästchen vor, das in der untersten Zeile n Kästchen hat, in der darüber $n-1$ Kästchen linksbündig und so weiter; sodass ein „gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck“ auf einer Kathete stehend entsteht. Wenn wir dieses Dreieck umdrehen und kopfüber auf der erste stellen, erhalten wir ein Rechteck mit doppelt so vielen Kästchen wie das Dreieck hatte. Das Rechteck hat n Spalten und $n+1$ Zeilen, woraus sich die Gauß'sche Summenformel ergibt (siehe Abb. 1). Die Elemente der Folge $(\frac{n}{2}(n+1))_n$ werden Dreieckszahlen genannt (so wie die Elemente der Folge $(n^2)_n$ Quadratzahlen genannt werden). Die ersten zehn Dreieckszahlen sind also: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 und 55.

* Die Arbeit des Autoren wurde durch ein Stipendium der Hanns-Seidel-Stiftung e.V. (HSS) aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung (BMBF) gefördert.

† Universität Bayreuth, Germany; michael.baumann@uni-bayreuth.de

[1] *Stichwörter* Summenformel, Induktionsbeweis, vollständige Induktion, Gauß'sche Summenformel, endliche Reihe

[2] *MSC* 00A99

[3] Sartorius von Waltershausen: Gauss zum Gedächtnis. 1856, S. 12f

2 Andere Summenformeln

Als Summenformel, oder auch endliche Reihe, wird nicht nur die Gauß'sche Summenformel bezeichnet, sondern auch andere Formeln, bei denen eine endliche Summe (von $i = 1$) bis zu einem unbekannten aber natürlichen, also endlichen, n als (mehr oder minder) geschlossene Formel angegeben werden kann. Bekannte Beispiele sind die Summe über die ersten ungeraden Zahlen, die Summe über die ersten Quadratzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

und die endliche geometrische Reihe, für welche ein eleganter Beweis bei Herbert Meschkowski[4] zu finden ist.[5]

3 Die Champagnerpyramide und der Binomialkoeffizient

Wir wollen nun die Gauß'sche Summenformel verallgemeinern. Dazu verbildlichen wir noch einmal diese Formel, siehe Abb. 2. Es ist klar, dass wir $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Kästchen sehen. Vorstellen können wir uns diese gut als zu einem „gleichseitigen Dreieck“ zusammengeschobene (Champagner-)Gläser. Auf manchen Partys, wie man sie vielleicht aus Filmen kennt, gibt es Champagnerpyramiden; dabei wird auf ein solches Dreieck aus Gläsern ein weiteres Dreieck aus Gläsern, mit einer Kantenlänge, die um eins kleiner als das Originaldreieck ist, gestellt, sodass jedes Glas der zweiten Schicht, auf dreien der ersten steht, siehe Abb. 3. Dies wird solange wiederholt, bis oben ein einzelnes Glas steht, siehe dazu Abb. 4.

Wir wollen uns nun fragen, wieviele Gläser man für eine Champagnerpyramide mit n Ebenen braucht. Die Anzahl der Gläser entspricht

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j,$$

also im Falle von fünf Ebenen:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{i} j = (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) = 35$$

Wir können diese „Tetraederzahlen“ mit Hilfe der Gauß'schen Summenformel umschreiben:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2}(i+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n}{4}(n+1)$$

Jetzt stellt sich die Frage nach der Summe über die Quadratzahlen. Man kann durch vollständige Induktion beweisen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

für alle natürlichen n gilt. Auf die Vermutung kommt man zum Beispiel, indem man den Ansatz $\sum_{i=1}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$, welcher sinnvoll erscheinen kann, da eine Summe aus Quadraten etwas im Raum darstellt, also kubisch ist, wählt und die Ergebnisse für die ersten vier Folgeglieder ausrechnet und einsetzt. Löst man das lineare Gleichungssystem nach a, b, c und d, erhält man gegebene Formel (die dann, wie gesagt, durch Induktion für alle n gezeigt werden kann).[6,7] Setzt man diese Formel nun ein, erhält man die Tetraederzahlen:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{n}{12}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{4}(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$$

Die ersten zehn Tetraederzahlen sind 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165 und 220.

---

[4] Herbert Meschkowski: Unendliche Reihen. Bibliographisches Institut, Berlin, 1982

[5] Weitere Summenformeln sind sind die Euler-Maclaurin'sche $\sim$, die Potenzsumme, die Faulhaber'sche $\sim$, die Bernoulli-Zahlen, der binomische Lehrsatz, Verallgemeinerungen der endlichen geometrischen Reihe und des binomischen Lehrsatzes, die Gauß-Summe (nicht zu verwechseln mit der Gauß'schen $\sim$) und deren Verallgemeinerung, die Leibniz-Regel, der Wert der Beta-Funktion und die geraden Werte der Zeta-Funktion, der iterierte Differenzenoperator, die Euler'sche Identität, die Summen über $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ sowie Summen über spezielle Werte spezieller Potenzen des Kotangens und weitere $\sim$ mit trigonometrischen Funktionen, die Landsberg-Schaar Relation, die partielle Summation und schließlich die Summe über abgerundete Quadratwurzeln.

[6] Dass der kubische Ansatz richtig ist, lässt sich sogar allgemein für $\sum_{i=1}^{n} i^k$ zeigen. So gilt für alle natürlichen n und k, dass sich diese Summe durch ein Polynom vom Grad $k+1$ in n darstellen lässt.

[7] https://www.arndt-bruenner.de/mathe/Allgemein/summenformel4.htm
Abgerufen am 1. August 2018.

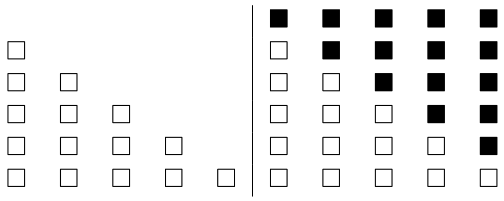

Abbildung 1: Graphische Darstellung der Gauß'schen Summenformel

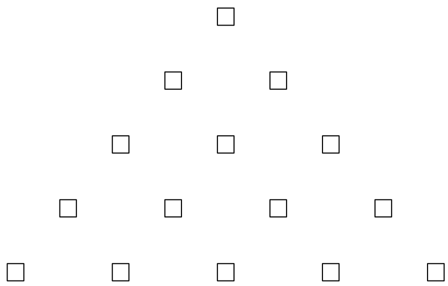

Abbildung 2: Die 2-dimensionale Champagnerpyramide

Vielleicht fällt dem mathematisch geübten Leser auf, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} = \binom{n+1}{2} \text{ und } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{(n+2)(n+1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{n+2}{3}$$

gilt. Das wollen wir auch (heuristisch) erklären. Stellen Sie sich vor, dass auf einer Party mit $n+1$ Gästen jeder mit jedem anstoßen möchte. Dann stößt der $n+1$-ste mit n Gästen an, der n-te Gast mit $n-1$ vielen und so weiter, bis der 2. Gast mit dem 1. anstößt. Dann hat genau jeder mit jedem angestoßen. Also hat man auf dieser Party $n+(n-1)+\ldots+2+1$ viele Bings gehört, was genau der Summe von 1 bis n entspricht. Andererseits können wir uns mit Hilfe der Kombinatorik leicht überlegen, dass es genau $\binom{n+1}{2}$ viele Möglichkeiten gibt, zwei aus $n+1$ zu ziehen;[8] also sollten wir $\binom{n+1}{2}$ Bings hören.

Stellen Sie sich nun eine Party mit $n+2$ vielen Gästen vor, auf der – warum auch immer – immer jeweils drei Gäste miteinander anstoßen wollen. Und zwar sollen die Gäste so oft anstoßen, bis alle Dreierkombinationen miteinander angestoßen haben. Natürlich gibt es $\binom{n+2}{3}$ viele Möglichkeiten drei aus $n+2$ zu ziehen. Andererseits können wir uns wieder überlegen, dass der $n+2$-te und der $n+1$-ste Gast zusammen mit n Gästen anstoßen. Danach stoßen der $n+2$-te und der n-te mit $n-1$ Gästen an; solange bis der $n+2$-te und der 2. mit dem ersten anstoßen. Bis jetzt haben wir $n+\ldots+2+1$ viele Bings gehört. Danach stoßen der $n+1$-ste und der n-te Gast mit $n-1$ Gästen an und dann der $n+1$-ste und der $n-1$-ste mit $n-2$ Gästen und so weiter und so fort, bis schließlich der 3., der 2. und der 1. Gast miteinander anstoßen. Bings haben wir $n+\ldots+2+1+(n-1)+\ldots+2+1+(n-2)+\ldots+\ldots+2+1+1$ gehört. Mit diesen Überlegungen können wir uns erklären, warum es durchaus sinnvoll ist, dass als Ergebnisse bis jetzt immer Binomialkoeffizienten herauskommen. Diese Gedanken werden wir in Kapitel 4 weiter verallgemeinern.

[8] Wir haben $n+1$ Möglichkeiten den Ersten zum Anstoßen zu bestimmen und dann, wenn einer schon als Erster festgelegt ist, noch n Möglichkeiten für den Zweiten. Allerdings müssen wir durch zwei teilen, da wir sonst alle Paare doppelt zählen würden – nur einmal ist dieser der Erste und einmal jener.

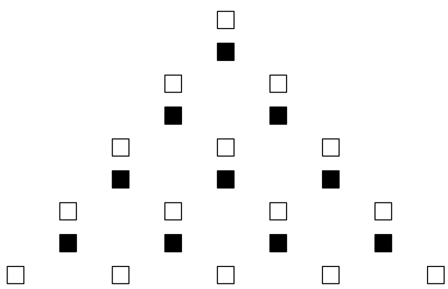

Abbildung 3: Die zwei untersten Schichten der 3-dimensionalen Champagnerpyramide. Gläser in der untersten Schicht: □; in der zweituntersten Schicht: ■

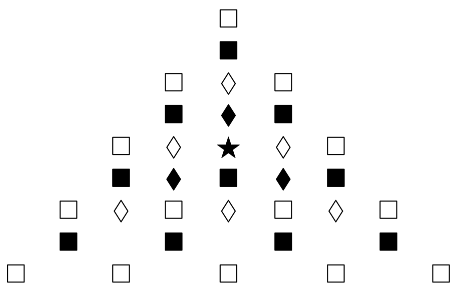

Abbildung 4: Die 3-dimensionale Champagnerpyramide. Gläser auf erster Ebene (von unten): □ und ★; auf zweiter Ebene: ■; auf dritter Ebene: ◊; auf vierter Ebene: ⧫; auf fünfter Ebene: ★

4 Beweis der k-dimensionalen Champagnerpyramide

Wir wollen dieses Kapitel damit beginnen, dass wir uns überlegen, was eine k-dimensionale Champagnerpyramide sein soll, wobei k eine natürliche Zahl oder die Null ist. Für $k = 2$ erhalten wir ein Dreieck und für $k = 3$ einen Tetraeder. Auch der Fall $k = 1$ ist einfach zu behandeln, denn eine 1-dimensionale Champagnerpyramide der Höhe n soll einfach ein Stapel aus n Gläsern sein. Eine nulldimensionale Champagnerpyramide egal welcher Höhe soll einfach nur ein einzelnes Glas sein. Für die Höhe von k-dimensionalen Champagnerpyramiden wollen wir natürliche n zulassen.

Wie sollen wir uns nun aber eine vierdimensionale Pyramide der Höhe n vorstellen. Dazu stellen wir uns einen langen Tisch vor, auf dem zuerst eine 3D-Pyramide der Höhe n steht, dahinter eine 3D-Pyramide der Höhe $n-1$ und so weiter, bis am Ende ein einzelnes Glas steht. Eine fünfdimensionale Pyramide können wir uns vorstellen indem wir eine vierdimensionale Pyramide der Höhe n nehmen und daneben einen langen Tisch mit einer vierdimensionalen Pyramide der Höhe $n-1$ stellen und so weiter. Am Ende steht ein langer Tisch mit einem einzelnen Glas. Für eine sechsdimensionale Pyramide müssten wir uns nun mehrere solcher Räume übereinander vorstellen. Man könnte sich auch Pyramiden aus Pyramiden vorstellen ... nun wollen wir aber das anschauliche Pyramidenbauen nicht weiter ausdehnen.

Zum Verständnis betrachten wir eine sechsdimensionale Pyramide der Höhe zwei. Das heißt, auf dem ersten Tisch steht eine 3D-Pyramide der Höhe zwei und eine der Höhe eins, auf dem zweiten Tisch eine der Höhe eins und in der zweiten Etage auf dem einzigen Tisch eine der Höhe eins. Zusammen ergibt das $(1 + 1 + 2) + 1 + 1 + 1 = 7$ Gläser.

Definition 1. *Wir definieren als die Anzahl der Gläser, die man für eine k-dimensionale Champagnerpyramide der Höhe n (mit $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$)*

$$\mathbb{S}_k^n := \sum_{n_{k-1}=1}^{n_k} \sum_{n_{k-2}=1}^{n_{k-1}} \dots \sum_{n_2=1}^{n_3} \sum_{n_1=1}^{n_2} n_1$$

mit $n = n_k$.

Mit einer ganz ähnlichen Überlegung wie in Kapitel 3 können wir eine geschlossene Formel für diese Summe herleiten – wenn auch, zugegebenermaßen, deutlich mehr Vorstellungskraft benötigt wird. Auf einer Party mit $n + k - 1$ vielen Gästen sollen immer k Gäste zusammen anstoßen. Es ist klar, dass es $\binom{n+k-1}{k}$ viele solcher Anstoßgruppen gibt. Andererseits stoßen die Gäste $n + k - 1$ bis $n + 1$ mit n Gästen an, die Gäste $n + k - 1$ bis $n + 2$ und der Gast n stoßen mit $n - 1$ vielen an und so weiter. Dann stoßen irgendwann die Gäste $n + k - 1$ bis $n + 3$ und die Gäste $n + 1$ und n mit $n - 1$ vielen an – und wieder so weiter. Bis dann irgendwann die Gäste $n + k - 2$ bis n mit $n - 1$ vielen anstoßen. Und dann – viel später – stoßen schließlich noch die Gäste k bis 1 miteinander an. Also genau $\mathbb{S}_k^n$ viele Bings.

Satz 1. Es gilt:

$$\mathbb{S}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

Die Anschauliche Überlegung mit den Partygästen ist zwar schön und gut, jedoch kein formaler Beweis. Bevor wir diesen jedoch führen wollen, formulieren und beweisen wir erst ein Lemma.

Lemma 1. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} = \frac{(n+k)!}{(k+1)(n-1)!}$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion über n (für alle k).

(IA) $n = 1$: $(l.S.) = k!$ und $(r.S.) = \frac{(k+1)!}{k+1} = k!$. Also ist $(l.S.) = (r.S.)$ für alle k.

(IV) Für alle $m \leq n$ gilt: $\sum_{i=1}^{m} \frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} = \frac{(m+k)!}{(k+1)(m-1)!}$ für alle k.

(IS) $n \to n+1$: $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1+k)!}{(k+1)n!}$ für alle k. Es gilt

$$\begin{aligned}(l.S.) &= \frac{(n+k)!}{n!} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+k-1)!}{(i-1)!} \\ &\stackrel{IV}{=} \frac{(n+k)!}{n!} + \frac{(n+k)!}{(k+1)(n-1)!} \\ &= \frac{(k+1)(n+k)!}{(k+1)n!} + \frac{n(n+k)!}{(k+1)n(n-1)!} \\ &= \frac{(k+1)(n+k)! + n(n+k)!}{(k+1)n!} = (r.S.)\end{aligned}$$

für alle k.

q.e.d.

Beweis von Satz 1. Wir werden nun Satz 1 mit einer vollständigen Induktion über k für alle n beweisen.

(IA) $k = 0$: $(l.S.) = 1 = (r.S.)$ für alle n, da $\binom{m}{0} = 1$ für alle natürlichen m.

(IV) Für alle $\ell \leq k$ gilt: $\mathbb{S}_{\ell}^{n_\ell} = \binom{n_\ell + \ell - 1}{\ell}$ für alle n_ℓ.

(IS) $k \to k+1$: $\mathbb{S}_{k+1}^{n_{k+1}} \stackrel{?}{=} \binom{n_{k+1}+k}{k+1}$ für alle n_{k+1}. Es gilt

$$\begin{aligned}(l.S.) &= \sum_{n_k=1}^{n_{k+1}} \sum_{n_{k-1}=1}^{n_k} \sum_{n_{k-2}=1}^{n_{k-1}} \cdots \sum_{n_2=1}^{n_3} \sum_{n_1=1}^{n_2} n_1 \\ &= \sum_{n_k=1}^{n_{k+1}} \mathbb{S}_k^{n_k} \\ &\stackrel{IV}{=} \sum_{n_k=1}^{n_{k+1}} \binom{n_k + k - 1}{k} \\ &= \sum_{n_k=1}^{n_{k+1}} \frac{(n_k + k - 1)!}{(n_k - 1)!} \cdot \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \sum_{n_k=1}^{n_{k+1}} \frac{(n_k + k - 1)!}{(n_k - 1)!} \\ &\stackrel{\bigstar}{=} \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n_{k+1} + k)!}{(k+1)(n_{k+1} - 1)!} = (r.S.)\end{aligned}$$

für alle n_{k+1}. Der $\bigstar$ kennzeichnet die Verwendung von Lemma 1 mit $n = n_{k+1}$ und $i = n_k$.

q.e.d.

5 Schluss

Auch wenn wohl niemand eine k-dimensionale Champagnerpyramide mit $k > 3$ bauen wird und auch keiner auf einer Party mit $n + k - 1$ vielen Gästen, diese bitten wird, dass alle möglichen Gruppen der Größe k miteinander anstoßen, finde ich es doch erstaunlich und eine Idee der Schönheit der Mathematik vermittelnd, dass es möglich ist, eine Summe, bestehend aus $k - 1$ vielen Summenzeichen, als kleine und geschlossene Formel zu schreiben. Auch finde ich es faszinierend, wie die verschiedenen Disziplinen der Mathematik bei diesem Problem ineinander greifen: die geometrische Vorstellung der (Champagner-)Pyramiden, die Arithmetik mit den vielen Additionen und dem Umordnungstrick sowie schließlich die Kombinatorik – sowohl mit der Idee des Binomialkoeffizienten, also auch mit den Überlegungen wieviele Bings auf den Partys zu hören sind.