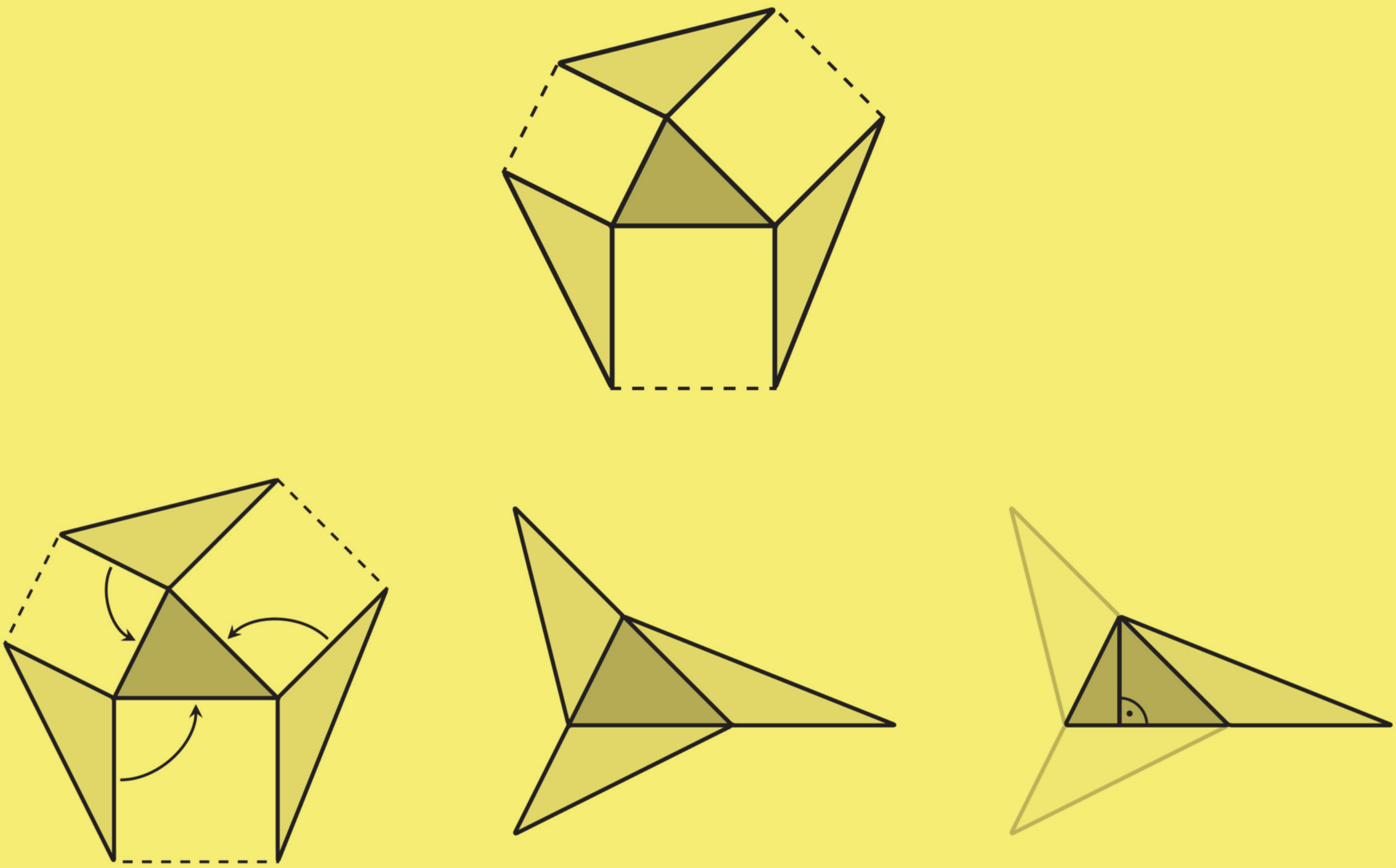
Maximilian Martin

ISSN 2568-0331

Problemlösen mit Schwerpunkt Beweisen im Mathematikunterricht am Beispiel der Geometrie



Mathematikdidaktik im Kontext

Heft 2

Impressum

Mathematikdidaktik im Kontext

ISSN 2568-0331

Heft 2

Problemlösen mit Schwerpunkt Beweisen im Mathematikunterricht am Beispiel der Geometrie

Bayreuth, 2018

Elektronische Fassung unter:
https://epub.uni-bayreuth.de/view/series/Mathematikdidaktik_im_Kontext.html

Autor

Maximilian Martin

Herausgeber

Carsten Miller und Volker Ulm
Universität Bayreuth
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
Universitätsstraße 30
95440 Bayreuth

www.dmi.uni-bayreuth.de

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, Möglichkeiten aufzuzeigen, mit denen die Fähigkeiten der Lernenden zum eigenständigen Problemlösen und Beweisen im Mathematikunterricht gefördert werden können. Zuerst werden die theoretischen Grundlagen der Themenbereiche *Problemlösen* und *Begründen, Argumentieren und Beweisen* dargestellt. Dazu zählt die Beschreibung verschiedener allgemeiner Methoden zum Lösen von Problemen, sogenannte Heurismen (z.B. Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten, Analogieprinzip), und die Beschreibung und der Vergleich verschiedener Problemlöse- und Beweismodelle (u.a. Pólya, Schoenfeld und Boero). Einerseits bieten die Phasen der jeweiligen Modelle einen Leitfaden für ein planvolles Vorgehen, andererseits dienen Heurismen als Hilfsmittel zum Generieren der Lösungsidee. Diese zentralen Aspekte der theoretischen Grundlagen sind für den Erfolg beider Prozesse notwendig und einzelne der benötigten Prozessbestandteile können im Unterricht speziell gefördert werden. Zu diesem Zweck werden die Maßnahmen *heuristische Lösungsbeispiele*, *Vorgeben von Puzzlestücken* und *Beweise ohne Worte* allgemein erläutert und abschließend konkret an Beispielen umgesetzt, welche als Vorlage für die Variation weiterer Aufgaben mit dem Ziel einer Förderung von Problemlöse- und Beweiskompetenz dienen können.

1 Problemlösen und Argumentieren als Kernkompetenzen verschiedener Bildungsstandards

Die PISA-Studie (Programme for International Student Assessment) ist eine internationale Untersuchung der Schulleistungen 15-jähriger Lernender, die im Auftrag der jeweiligen Regierungen von der OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) seit 2000 im dreijährigen Turnus durchgeführt wird. Dabei werden die Bereiche *Lesekompetenz*, *mathematische Kompetenz* und *naturwissenschaftliche Grundbildung* zusammen mit weiteren Faktoren, wie beispielsweise der Einfluss des sozialen Hintergrundes und geschlechtsspezifischer Unterschiede, untersucht. Die Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern in Deutschland liegen dabei generell leicht über dem internationalen Durchschnitt, jedoch ist die Distanz zu den Spitzenreitern groß (vgl. OECD 2016 und Reiss und Hammer 2013, S. 82). Eine weitere internationale Schulleistungsuntersuchung ist die von der IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) durchgeführte TIMS-Studie (Trends in International Mathematics and Science). Dabei werden die Mathematik- und Naturwissenschaftsleistungen von Schülerinnen und Schülern der vierten und achten Jahrgangsstufe in einem vierjährigen Turnus untersucht. Die Ergebnisse deutscher Lernender liegen auch in dieser Studie nur leicht über dem Durchschnitt (vgl. Gerwig 2015, S. 41).
Besonders im Fachbereich Mathematik zeigen beide Studien Defizite der deutschen Schülerinnen und Schüler. Auch in diesem Bereich liegen die Leistungen deutscher Lernender seit 2006 nur knapp über dem internationalen Durchschnitt. In den Ergebnissen der PISA-Studie 2015 zeichnet sich sogar ein leicht rückläufiger Trend des Leistungsstandes in Mathematik ab (vgl. OECD 2016). Um die Qualität schulischer Bildung zu erhalten, wurden bereits im Jahr 2003 als Folge der mäßigen Ergebnisse bei TIMSS 1997 von der Kultusministerkonferenz sogenannte *Bildungsstandards* verabschiedet, welche erwartete Lernergebnisse beschreiben, die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe erworben haben sollen (vgl. Gerwig 2015, S. 42). Diese umfassen „fachliche und fachübergreifende Basisqualifikationen, die für die weitere schulische und berufliche Ausbildung von Bedeutung sind und die anschlussfähiges Lernen ermöglichen“ (KMK 2003, S. 3). Die Defizite im Bereich der mathematischen Fähigkeiten treten vor allem bei Aufgaben auf, welche das Lösen von Problemen und das Argumentieren im mathematischen Kontext umfassen. Die Lernenden sind im Durchschnitt nicht dazu in der Lage, über Routineaufgaben hinausgehende Probleme zu lösen, obwohl die Kultusministerkonferenz diese Kompetenzen in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik des mittleren Bildungsabschlusses explizit benannt hat (vgl. Gerwig 2015, S. 41 f.). Die Teilaspekte der entsprechenden Kernkompetenzen *Probleme mathematisch lösen (K2)* und *Mathematische Argumentieren (K1)* sind in den Tabellen 1 und 2, nach Anforderungsbereichen untergliedert, dargestellt.
Auch in anderen Ländern fordern vergleichbare Bildungsstandards Problemlösefähigkeiten und Kompetenzen im Argumentieren. Beispielsweise werden in den Principles, Standards and Expectations des *National Council for Teachers of Mathematics* in den Vereinigten Staaten und Kanada die Kompetenzen *Problem Solving* sowie *Reasoning and Proof* im Bereich der „Process Standards“ aufgeführt (vgl. NCTM 2000). Die Teilaspekte der jeweiligen Kompetenzen sind folgendermaßen deklariert:

Problem Solving

- build new mathematical knowledge through problem solving
- solve problems that arise in mathematics and in other contexts
- apply and adapt a variety of appropriate strategies to solve problems
- monitor and reflect on the process of mathematical problem solving

Reasoning and Proof

- recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
- make and investigate mathematical conjectures
- develop and evaluate mathematical arguments and proofs
- select and use various types of reasoning and methods of proof

Ebenfalls für die Vereinigten Staaten fordern die *Common Core State Standards for Mathematics* auszugsweise folgende Aspekte (vgl. CCSSI 2010, S. 6 f.):

- make sense of problems and persevere in solving them
- reason abstractly and quantitatively
- construct viable arguments and critique the reasoning of others
- use appropriate tools strategically

Zuletzt seien noch die Bildungsstandards der *Schweizerischen Konferenz der Erziehungsdirektoren (EDK)* aufgeführt. Auch wenn Problemlösefähigkeiten nicht konkret genannt sind, stehen diese im Zusammenhang mit den gelisteten Handlungsaspekten „Erforschen und Explorieren“ sowie „Verwenden von Instrumenten und Werkzeugen“. Bezüglich der Argumentationskompetenz wird explizit „Argumentieren und Begründen“ genannt (vgl. EDK 2011).
Auch wenn die Ausprägung, in der die jeweiligen Kompetenzen gefordert werden, variieren (vgl. Brunner 2014a, S. 30 ff.), führen die vorgestellten Nationen „Problemlösen“ und „Argumentieren“ in den jeweiligen Bildungsstandards auf.
Die Ergebnisse der PISA- und TIMS-Studie zeigen jedoch, dass trotz dieser expliziten Forderung weiterhin Defizite der Lernenden in diesen Ländern vorhanden sind und sich die konkrete Umsetzung einer Förderung dieser Kompetenzen schwierig gestaltet.
Die vorliegende Arbeit befasst sich aus diesem Grund mit der Fragestellung, welche Aspekte für erfolgreiches Problemlösen und Argumentieren benötigt werden und welche Maßnahmen eine konkrete Förderung dieser Fähigkeiten ermöglichen könnten, mit dem Ziel, die Kernkompetenzen „Mathematisch argumentieren“ sowie „Probleme mathematisch lösen“ der Bildungsstandards im Mathematikunterricht auf einem höheren Anforderungsniveau zu behandeln.
Dazu werden im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 2 und 3) die theoretischen Hintergründe der Begrifflichkeiten „Problemlösen“ sowie „Begründen, Argumentieren und Beweisen“ genauer erläutert und zueinander in Beziehung gesetzt.
Im zweiten Teil der Arbeit (Kapitel 4) sollen dann anhand der theoretischen Grundlagen einerseits allgemeine Überlegungen zur unterrichtlichen Umsetzung einer Förderung

von Problemlöse- und Argumentationskompetenz aufgezeigt und diese dann an einigen (elementar-)geometrischen Problemaufgaben beispielhaft erläutert werden. Diese Beispiele können als Vorlage für den Einsatz und die Variation weiterer Aufgaben mit dem Ziel einer Förderung von Problemlöse- oder Argumentationskompetenz dienen. Gleichzeitig soll auf Erweiterungen und Anknüpfungspunkte der jeweiligen Aufgaben eingegangen werden, die deren Verwendung in verschiedenen Jahrgangsstufen oder im Zusammenhang mit anderen Themengebieten ermöglichen.

Tabelle 1: Teilaspekte der Kernkompetenz „Probleme mathematisch lösen“ (vgl. KMK 2003, S. 14).

Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
• Routineaufgaben lösen • einfache Probleme mit bekannten Verfahren lösen	• Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert • Probleme selbst formulieren • die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen	• anspruchsvolle Probleme lösen • das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren

Tabelle 2: Teilaspekte der Kernkompetenz „Mathematisch argumentieren“ (vgl. KMK 2003, S. 14).

Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
• Routineargumentationen wiedergeben (vertraute Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze) • mit Alltagswissen argumentieren	• überschaubare mehrschrittige Argumentationen erläutern oder entwickeln • Lösungswege beschreiben oder begründen • Ergebnisse bezüglich ihres Anwendungskontextes bewerten • Zusammenhänge, Ordnungen und Strukturen erläutern	• komplexe Argumentationen erläutern oder entwickeln • verschiedene Argumentationen bewerten • Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind und Vermutungen begründet äußern

2 (Mathematisches) Problemlösen

Jeder Mensch wird in seinem alltäglichen Leben ununterbrochen mit kleineren und größeren Problemen konfrontiert, welche es zu lösen gilt. Dazu zählt beispielsweise eine möglichst geschickte Optimierung des Arbeitsprozesses, die Organisation von beruflichen und privaten Terminen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 7) oder ganz konkret das Aufteilen einer Pizza auf zwei Personen, sodass auch die jeweiligen Beläge gerecht halbiert werden. Die subjektive Schwierigkeit der Herausforderungen verändert sich häufig im Laufe der Zeit. Durch wiederholtes Lösen ähnlicher Probleme fällt dieses nach und nach immer leichter, da geeignete Herangehensweisen entwickelt wurden. Dagegen bereitet die Suche nach derartigen Strategien besonders bei neuartigen Problemen häufig Schwierigkeiten. Einigen Personen fällt das Lösen ungewohnter Probleme auch im ersten Versuch recht leicht. Diese von Natur aus gegebene Fähigkeit, neuartige Probleme effektiv zu lösen, unterscheidet sogenannte *intuitive Problemlöser* von anderen Menschen. Für Personen ohne eine hoch ausgeprägte intuitive Problemlösefähigkeit lässt sich die Bewältigung solcher Herausforderungen basierend auf Erfahrung erlernen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 30 ff.).

2.1 Der Begriff Problemlösen

Die Begrifflichkeiten zum Thema Problemlösen sind nicht einheitlich definiert. In der Psychologie und der Mathematikdidaktik herrscht jedoch weitgehend Übereinstimmung, dass ein *Problem* als eine subjektiv schwierige Aufgabe verstanden wird, bei deren Lösung ein Ausgangszustand in einen Zielzustand überführt werden soll. Zwischen diesen existiert eine gewisse (personenspezifische) Barriere, welche nicht durch ein Standardverfahren überwunden werden kann (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 279, Bruder und Collet 2011, S. 11 und Rott 2014, S. 252). Das Gegenstück zu einer Problemaufgabe ist dabei eine Routineaufgabe, deren Lösung durch die Nutzung eines (bekannten) Verfahrens gefunden werden kann. Die Problemhaftigkeit einer Aufgabe ist demnach sowohl personen-, als auch zeitabhängig, durch Vorwissen und Erfahrungen gegeben. Ein und dieselbe Aufgabe stellt vor dem Erlernen eines Lösungsalgorithmus ein Problem, danach nur noch eine Routineaufgabe dar. Zudem besitzt jedes Problem einen gewissen Anforderungsgrad, welcher von den zur Verfügung stehenden Ressourcen[1] der Problemlöser abhängt. Je größer die jeweilige zu überwindende Barriere aufgrund wenig zur Verfügung stehender Mittel ist, desto höher ist auch der Anforderungsgrad (vgl. Collet 2009, S. 18). Die für ein Problem charakteristische Barriere lässt sich in verschiedene Typen einteilen. Liegt eine *Interpolationsbarriere* vor, so sind sowohl Ausgangszustand als auch Zielzustand und die für die Lösung des Problems erforderlichen Mittel bekannt. Einzig der Weg zwischen Ausgangs- und Zielzustand ist nicht direkt ersichtlich und besteht darin, geeignete Lösungsschritte richtig zu kombinieren. Eine *synthetische Barriere* liegt dann vor, wenn Ausgangs- und Zielzustand bekannt, jedoch die nötigen Mittel zum Lösen des Problems unbekannt sind. Für eine *dialektische Barriere* sind Ausgangszustand und Mittel zur Lösung bekannt, jedoch nicht die Lösungsschritte und der genaue Zielzustand. Die Abgrenzung dieser Barrierentypen

[1] Genaueres dazu in Abschnitt 2.2.

ist nicht scharf und es existieren Mischformen (vgl. Collet 2009, S. 19). Der Begriff des *Problemlösens* beschreibt nun die Transformation des Ausgangszustandes mittels Operationen über geeignete Zwischenschritte hin zum Zielzustand (vgl. Collet 2009, S. 19 und Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 280). Pólya beschreibt dies wie folgt (nach G. Pólya in Collet 2009, S. 19):

> *„To solve a Problem is to find a way where no way is known off-hand, to find a way out of a difficulty, to find a way around an obstacle, to attain a desired end, what is not immediately attainable, by appropriate means "*

2.2 Einflussfaktoren auf erfolgreiches Problemlösen

Da die entscheidenden Elemente des Problemlösens im Grunde als geistige Tätigkeit aufgefasst werden können, lassen sich Aussagen über die kognitive Einflussfaktoren nach Lompscher (1975, 1985) wie folgt zusammenfassen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 31 ff.):
Problemlösen beginnt mit dem Ziel einer Person und deren Motivation, das gegebene Problem zu lösen. Gründe hierfür sind beispielsweise besonders interessante Probleme, die Überwindung einer Herausforderung, die Schulung der eigenen Problemlösefähigkeit (intrinsische Motive) oder ein extrinsischer Anreiz durch Belohnung oder Bestätigung. Ein weiterer Aspekt, der das Problemlösen beeinflusst, ist die geistige Beweglichkeit der Lernenden. Zu dieser zählen nach Bruder und Collet (2011) die Teilaspekte der *Reduktion*, *Reversibilität*, *Aspektbetrachtung*, *Aspektwechsel* und *Transferierung* (vgl. Tabelle 3).

Tabelle 3: Begriffsklärung zu den Faktoren geistiger Beweglichkeit erfolgreicher Problemlöser (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 33)

Reduktion	Erfolgreiche Problemlöser reduzieren das Problem intuitiv sinnvoll auf das Wesentliche. Sie nutzen für diese Abstraktionsleistung oft Visualisierungs- und Strukturierungshilfen.
Aspektbetrachtung	Erfolgreiche Problemlöser beachten mehrere Aspekte eines Problems gleichzeitig oder erkennen die Abhängigkeiten von Dingen leicht und variieren sie gezielt. Mitunter geht es auch darum, für eine tragfähig erscheinende Idee Barrieren aus dem Weg zu räumen, einfach einen Gedankengang auch gegen Widerstände „durchzuhalten".
Aspektwechsel	Erfolgreiche Problemlöser wechseln gegebenenfalls die Annahmen, Kriterien oder Betrachtungsaspekte, um einer Lösung auf die Spur zu kommen. Es werden intuitiv verschiedene Aspekte des Problems oder das Problem aus verschiedenen Perspektiven betrachtet, was ein „Steckenbleiben" vermeidet und ggf. ganz neue Einsichten und Lösungswege ermöglicht.

Reversibilität	Erfolgreiche Problemlöser können sehr gut Gedankengänge umkehren bzw. diese rückwärts nachvollziehen. Sie tun das in geeigneten Situationen automatisch, wenn man z.B. einen Schlüssel sucht, den man verlegt hat.
Transferierung	Erfolgreiche Problemlöser können leichter als andere ein bekanntes Vorgehen auf einen anderen, manchmal sogar sehr verschiedenen Kontext übertragen. Sie erkennen leichter das „Gerüst“ oder Strickmuster einer Aufgabe.

Fachliches Wissen und konkrete Methoden, welche die Überwindung der problemspezifischen Barriere ermöglichen, ergänzen diese benötigten geistigen Fähigkeiten oder gleichen einen Mangel an geistiger Beweglichkeit aus. Eine detaillierte Schilderung der zu berücksichtigenden Aspekte gibt Alan Schoenfeld (vgl. Schoenfeld 1985, S. 12 ff.). Demnach sind die mathematischen Fähigkeiten zum Problemlösen zusammengesetzt aus vier Kategorien: Grundlegendes (bereichsspezifisches) mathematisches Wissen (*Ressources*), Wissen über heuristische Vorgehensweisen und deren Anwendung (*Heuristics*), Metakompetenzen, die der Kontrolle und Planung des Problemlöseprozesses dienen (*Control*) und Einstellungen zum aktuellen Problem sowie zum Problemlösen und zur Mathematik im Allgemeinen (*Beliefs*). Zu diesem Konzept existieren in der Fachliteratur weitere Abwandlungen, die gewisse Kategorien weiter ausdifferenzieren oder zusammenfassen, jedoch werden generell nur die von Schoenfeld genannten Aspekte abgedeckt.[2] Ein Überblick über Komponenten, welche Problemlösen neben der individuellen geistigen Beweglichkeit beeinflussen, wird zusammenfassend aufgelistet (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 289):

- Kognitionen (fachliches Wissen und Können)
  - Bereichswissen (Definitionen, Sätze, algorithmische Verfahren, etc.)
  - Heurismen (heuristische Verfahren, Strategien und Hilfsmittel)
- Metakognitionen und Selbstregulation[3]
  - Wissen über das eigene (mathematische) Denken
  - Kontroll- und Steuerungsprozesse bei der Problembearbeitung
- Einstellungen und Grundhaltungen (zum aktuellen Problem und zur Mathematik)
- Sonstiges (z.B. Rahmenbedingungen des Problemlösens)

[2] Die Kategorisierungen von Lester et al. (1989), Mayer (1998) und De Corte et al. (2000) finden sich in [Collet 2009, S. 32 ff.].

[3] Flavell (1979) beschreibt *Metakognition* als ein „Denken über das eigene Denken“ und unterscheidet dabei mehrere Komponenten, die einerseits das Wissen über kognitive Prozesse und deren Ergebnisse, andererseits die Fähigkeit zur Überwachung, Kontrolle und Bewertung der kognitiven Prozesse umfassen (vgl. Mevarech und Fridkin 2006, S. 86). Der Begriff der *Selbstregulation* umfasst nach Pintrich (2000) im Kontext des Lernens einen aktiven, konstruktiven Prozess, in dem Lernende das Ziel ihres Lernens setzen und dieses durch Überwachung, Regulation und Kontrolle von Kognitionen, Motivation und Handlungen zu erreichen versuchen (vgl. Collet 2009, S. 25).

Dabei umfassen die dargestellten Kategoriesysteme generell inhalts- und prozessbezogene Komponenten. Ein gegebenes Problem, beispielsweise die Berechnung der Raumdiagonale eines Quaders, erfordert einerseits inhaltliche Vorkenntnisse zum Satz des Pythagoras, andererseits auch prozessbezogene Strategien, die das Problem durch Ausnutzen von Analogie in ein bereits erschlossenes mathematisches Themengebiet übertragen. Fehlen dem Problemlöser einzelne oder mehrere dieser Komponenten, kann die Überwindung der Barriere erschwert werden oder unmöglich sein.

2.3 Verschiedene Problemlösemodelle

Komplexe Prozesse, die sich durch eine Vielzahl von Variablen auszeichnen, können meist gut durch ein Modell dargestellt werden. Dabei werden die vorliegenden Komponenten auf eine idealtypische Darstellung reduziert, bei der gewisse Details vernachlässigt werden, um relevante Faktoren zu fokussieren (vgl. Brunner 2014a, S. 71 f.). Genauso existieren für Problemlöseprozesse spezielle Modelle, die deren Ablauf charakterisieren und je nach betrachtetem Schwerpunkt mehrere Aspekte des Prozesses beschreiben. Einige Modelle thematisieren die *innere Struktur* von Problembearbeitungsprozessen. Dabei werden kognitive Prozesse und der Einfluss gewisser Heurismen und Beliefs auf das Problemlösen betrachtet. Diejenigen Modelle, welche die *äußere Struktur* beschreiben, fokussieren dagegen den zeitlichen Ablauf einzelner Problemlösephasen während der Bearbeitung. Letztere lassen sich nochmals untergliedern in *deskriptive Modelle*, welche sich durch die Beschreibung und Analyse von empirisch gewonnenen Daten auszeichnen, sowie *normative Modelle*, welche gewissermaßen als Leitfaden für Personen beim Problemlösen fungieren und mit idealisierten Hinweisen und strukturellen Vorgaben zum Vorgehen eine Art Gerüst liefern, an welchem man sich während des Problemlösens orientieren kann (vgl. Rott 2014, S. 253 und Philipp 2013, S. 37 f.). Einige der bekanntesten Problemlösemodelle werden im Folgenden beschrieben und verglichen. Dabei spielen für die vorliegende Arbeit vor allem normative Modelle eine Rolle, da diese als „pädagogische Hilfsmittel“ (Rott 2014, S. 253) genutzt werden können. Sowohl Modelle der inneren Struktur, als auch deskriptive Modelle werden nur peripher behandelt und nicht weiter vertieft. Ausführlichere Beschreibungen dazu finden sich in [Rott 2014, S. 254 f.] und in [Heinze 2007, S. 6 ff.].

2.3.1 J. Dewey (1910)

Dewey gilt als einer der Ersten, die den Problembearbeitungsprozess in Stufen unterteilt haben. Die von ihm unterschiedenen Phasen sind nachfolgend dargestellt:

1. Begegnung mit einer Schwierigkeit
2. Lokalisierung und Präzisierung
3. Suche nach Ansätzen einer möglichen Lösung
4. Entwicklung der Konsequenzen des Ansatzes
5. Überprüfung der gefundenen Lösung

Die ersten beiden Phasen dienen dabei der Untersuchung des gegebenen Problems. Dewey legt insbesondere Wert darauf, dass in der problemhaltigen Situation die Schwierigkeit klar spezifiziert und von den gegebenen Voraussetzungen getrennt wird. In Phase 3 werden Möglichkeiten gesucht, mit denen das Problem bewältigt werden kann. Darunter fällt das Sammeln von Eigenschaften der gegebenen Objekte sowie eine Aktivierung des damit in Verbindung stehenden Wissens. Auch die Nutzung von Heurismen zählt zu dieser Stufe. In Phase 4 wird der jeweils ausgewählte Ansatz zur Lösung weiterentwickelt, konkretisiert und gewisse Folgerungen werden getroffen. Die gefundene Lösung wird dann in Phase 5 überprüft, wobei hier ausschließlich die Kontrolle der einzelnen Schritte vorgesehen ist. Eine Einordnung in einen größeren Kontext und die Suche nach einer möglichen eleganteren Lösung wird im Modell nicht berücksichtigt (vgl. Rott 2014, S. 255 und Winter 2016, S. 213).

2.3.2 H.v. Helmholtz, H. Poincaré und G. Wallas (1926)

Die systematische Theorie kreativen Denkens von Graham Wallas (1926), welche auf die Beobachtungen des Physikers Herrmann von Helmholtz und des Mathematikers Henri Poincaré zurückgeht, beschreibt ein Phasenmodell kreativen Denkens, welches vor allem die unbewusste Verarbeitung eines Problems betont. Das Modell gliedert sich in vier Phasen:

1. Vorbereitung / Präparation
2. Inkubation
3. Illumination
4. Verifikation

In der Phase der *Präparation* erfolgt eine bewusste Auseinandersetzung mit einem gegebenen Problem. Die einzelnen Bestandteile sowie deren Beziehungen werden untersucht, mit der Einsicht, dass aktuell keine Überwindung der Barriere möglich scheint. Dies gleicht der Feststellung, dass weder ein bekanntes Routineverfahren, noch ein offensichtlicher Lösungsweg zur Lösung des Problems führt. Die Bearbeitung wird daraufhin unterbrochen und es erfolgt eine Zuwendung zu anderen Beschäftigungen, beispielsweise in Form eines weiteren (ungelösten) Problems oder einer Ruhephase. Dieser Schritt des Problemlöseprozesses wird als *Inkubation* bezeichnet, während derer das Problem im Unterbewussten liegt und dort verarbeitet wird. Nach einer nicht näher spezifizierten Zeitspanne folgt dann die Phase der *Illumination*. Hier hat der Problemlöser aus der Phase der Inkubation heraus einen Geistesblitz, welcher direkt die Lösung des Problems liefert. Welche Prozesse für diese plötzliche Idee verantwortlich sind, wird nicht genauer geklärt. Einzig eine Kombination der Gegebenheiten und eine Bewertung dieser im Unterbewusstsein ist denkbar. Abschließend erfolgen in der Phase der *Verifikation* noch die Kontrolle der potentiellen Lösung auf deren Korrektheit und Umsetzbarkeit sowie die Formulierung nach den jeweiligen geltenden Standards (vgl. Winter 2016, S. 213 ff. und Rott 2014, S. 255).

2.3.3 G. Pólya (1945)

George Pólya gilt gewissermaßen als „Vater des Problemlösens“ (vgl. Heinze 2007, S. 16). In seinem Werk *How to solve it* beschreibt Pólya sein Vorgehen beim Lösen von konkreten Aufgaben und schafft dadurch einen Leitfaden für allgemeine Problemlöseprozesse. Er ergänzt diesen durch Hinweise in Form von allgemein formulierten Hilfsfragen für die einzelnen Phasen des Lösungsprozesses, mit welchen sich Problemlösen konkret lehren und lernen lässt. Die betrachteten Probleme unterscheidet er dabei in „problems to find“ und „problems to solve“. Erstere lassen sich gleichsetzen mit Problemen, bei denen ein näher bestimmtes Objekt gefunden werden soll. Typische Beispiele sind Aufgaben mit dem Ziel, geometrische Objekte mit gegebenen Eigenschaften zu konstruieren (vgl. Problem 3 in Abschnitt 4.2.3). Letztere dagegen sind klar abgegrenzte Aussagen, welche zu beweisen sind. Diese Unterscheidung macht deutlich, dass er die Probleme aus der Perspektive eines Mathematikers sieht (vgl. Link 2011, S. 12).
Die von Pólya unterschiedenen Phasen eines Problemlöseprozesses sind im Folgenden dargestellt (vgl. Pólya 2014, S. 5 ff. (links) oder eine modernere Formulierung in Grieser 2017, S. 8 (rechts)):

1. Verstehen des Problems
2. Erfinden eines Plans
3. Ausführen des Plans
4. Rückschau

1. Verstehen des Problems
2. Untersuchen des Problems
3. Geordnetes Aufschreiben der Lösung
4. Rückschau

Beim Lösen eines Problems werden nach Pólya die geschilderten Phasen (mehr oder weniger linear) durchlaufen. Die erste Phase dient dazu, sich mit den gegebenen Bedingungen, Voraussetzungen, Daten, Größen, etc. und dem Gesuchten vertraut zu machen. Er betont zudem, dass es entscheidend ist, alle Voraussetzungen und Eigenschaften der gegebenen Objekte zu verstehen, bevor das eigentliche Problemlösen beginnen kann. Erfordert eine zu beweisende Aussage beispielsweise ein gleichseitiges Dreieck, ist es nötig, sich über dessen bereits bekannte Eigenschaften (zum Beispiel gleichlange Seiten, gleichgroße Innenwinkel, Schwerpunkt sowie Um- und Inkreismittelpunkt fallen zusammen, etc.) im Klaren zu sein.
Die zweite und gleichzeitig in den meisten Fällen aufwendigste und schwierigste Phase befasst sich mit der Entwicklung eines Plans zur Lösung oder dem Finden der entscheidenden Idee. Diese Phase ist, abhängig von den jeweiligen Problemen, nicht durch einen Algorithmus zu bewältigen, sondern erfordert Kreativität und geistige Beweglichkeit. Pólya versucht durch Hilfsfragen[4] einige Anhaltspunkte beim Entwickeln eines Plans zu geben. Diese ermöglichen dem Problemlöser verschiedene Sichtweisen auf das Problem und geben Denkanstöße, die zur entscheidenden Idee führen können. Die dabei häufig ausgenutzten Heurismen werden in Abschnitt 2.4 genauer erläutert, als Beispiele seien hier die „Einführung eines Hilfselementes bzw. einer Hilfsgröße“ sowie das „Rückführen auf ein bekanntes Problem“ genannt.
Phase 3 beschäftigt sich mit der Ausführung des gefundenen Plans. Da Pólya annimmt,

[4]Eine Auswahl von Hilfsfragen ist in Tabelle 4 aufgelistet.

dass der Plan zur Lösung führt, sind die einzigen zu beachtenden Aspekte dieser Phase, ausreichend Geduld und Konzentration aufzuwenden, um beispielsweise bei Berechnungen keine Fehler zu machen. Zudem soll während der Ausführung bereits eine Überprüfung der einzelnen Schritte stattfinden, um Fehler zu vermeiden. Auch das Einführen passender Notationen und Bezeichnungen gehört zu dieser Phase.
Die vierte Phase von Pólyas Problemlösemodell, welche häufig auch als wichtigste Phase bezeichnet wird, stellt eine Metakognition des Problemlöseprozesses dar. Einerseits sollen die gefundene Lösung inklusive aller noch so kleinen Schritte sowie die Verwendung aller gegebenen Voraussetzungen überprüft werden. Andererseits sollen die gefundene Lösung und die einzelnen Schritte nochmals daraufhin untersucht werden, ob einfachere Lösungen existieren oder es elegantere Wege gibt, mit denen sich die Lösung erreichen lässt. Zuletzt soll das gelöste Problem in einen Zusammenhang mit dem bereits vorhandenen Wissen gesetzt und Querbezüge hergestellt werden. Dazu zählt auch das Übertragen der gefundenen Lösung und der verwendeten Strategien auf andere Probleme, falls möglich (vgl. Pólya 2014).

Tabelle 4: Problemlösemodell nach Pólya mit einigen Hilfsfragen für die einzelnen Phasen (vgl. Pólya 2014, S. 5 ff.).

Understand the problem	Devising a plan	Carrying out the plan	Looking back
What is the unknown? What is the data? What are the conditions? Is the condition/data sufficient to determine the unknown?	Do you know a similar/related problem? Could you introduce some auxiliary element? Can we use a method from a similar problem?	Introduce suitable notation! Can you see clearly that each step is correct?	Can you check the result/argument? Did we use all the data? Can you derive the solution differently? Can you use the result or the method for some other problem?

2.3.4 A. Schoenfeld (1985)

Neben Pólya ist Alan Schoenfeld ein weiterer Vorreiter in Sachen Problemlösen. Das von ihm entwickelte Problemlösemodell repräsentiert „das systematische Verhalten guter Problemlöser“ (Schoenfeld 1985, S. 107). Er gliedert den Problemlöseprozess auf in folgende 5 Phasen (vgl. Schoenfeld 1985, S. 108 ff. (links) bzw. Collet 2009, S. 36 f. (rechts)):

1. Analysis
2. Design
3. Exploration
4. Implementation
5. Verification

1. Analyse
2. Planung
3. Exploration
4. Implementation
5. Verifikation

Die Phase *Analysis* dient dazu, sich mit dem Problem vertraut zu machen. Dabei werden die Voraussetzungen analysiert, die Plausibilität des zu erreichenden Ziels überprüft und es erfolgt eine Einordnung in einen mathematischen Kontext. Dazu zählt auch das Sammeln erster Ideen zu anwendbarem Wissen oder Problemlösetechniken sowie das Finden geeigneter Darstellungsformen. Die Phase *Design* zielt darauf ab, einen übergeordneten (ggf. hierarchischen) Lösungsplan zu erstellen, welcher für die nachfolgenden Schritte im Bearbeitungsprozess als Stütze dient. Dieser Plan ist abhängig vom jeweils aktuellen Stand des Lösungsprozesses und wird bei fortschreitendem Beschäftigen mit dem Problem angepasst und ergänzt. Er dient vor allem dazu, einen Überblick über den Gesamtprozess zu erhalten und nicht in Detailarbeiten zu versinken (Self-monitoring). In der Phase *Exploration* wird das Problem mithilfe heuristischer Techniken untersucht und je nachdem, wie erfolgreich dies ist, gelangt man zu den nächsthöheren Phasen oder gewinnt die Einsicht, gegebenenfalls zu einer der vorhergehenden Phasen zurückzukehren. Die Phase der *Implementation* dient einzig dazu, die vermutete Lösung zu elaborieren, nötige Rechnungen durchzuführen oder fehlende Details herauszuarbeiten. Die Phase der *Verification* dient einerseits dazu, die gefundene Lösung auf lokaler Ebene zu überprüfen und Fehler zu verbessern. Andererseits sollen in dieser Phase durch eine Rückschau auf globaler Ebene mögliche alternative Lösungswege gefunden, Beziehungen zu bereits bestehendem Wissen hergestellt und Aspekte herausgearbeitet werden, welche die eigenen Fähigkeiten erweitern und bei zukünftigen Problemen hilfreich sein können (vgl. Schoenfeld 1985, S. 108 ff. und Collet 2009, S. 37 f.) Die einzelnen Phasen stehen, wie in Abbildung 1 dargestellt, im Zusammenhang. Dabei wird der Problemlöseprozess nicht linear aufgefasst, sondern es sind zyklische Elemente vorhanden, in denen bereits durchlaufene Phasen nach wenig erfolgreichen Versuchen erneut durchlaufen werden können.

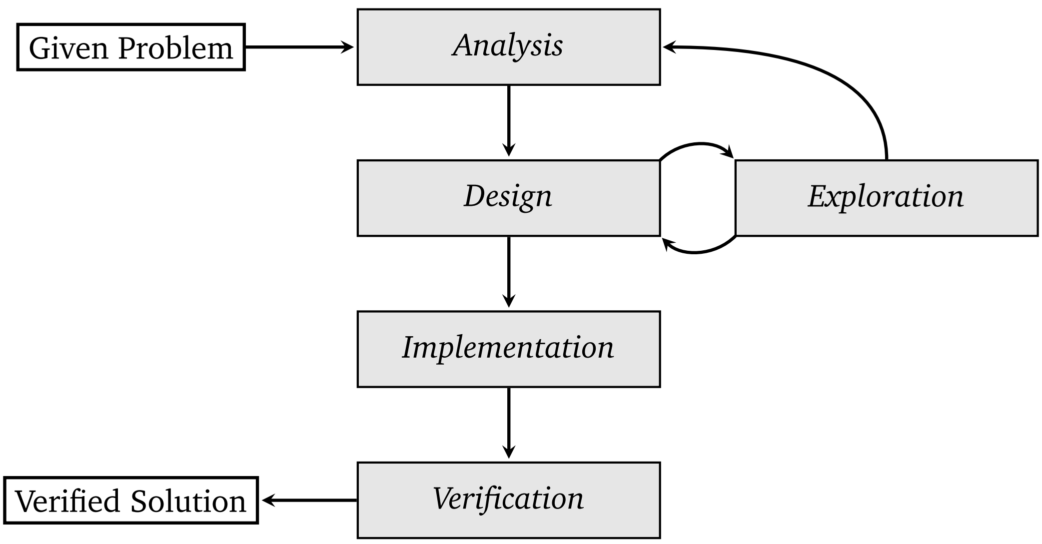


Abbildung 1: Problemlösemodell nach A. Schoenfeld (vgl. Schoenfeld 1985, S. 110).

2.3.5 M. Fernandez, N. Hadaway, J. Wilson (1993)

Das Phasenmodell von Maria Fernandez, Nelda Hadaway und James Wilson (1993, im Folgenden Wilson et al.) besitzt als Erweiterung des Phasenmodells von Pólya die in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Phasen. Dieses wird jedoch um den Aspekt eines nichtlinearen Verlaufs erweitert, sodass die Möglichkeit besteht, jederzeit zwischen allen Phasen zu wechseln, und Rückschritte vorgesehen sind. Der zweite Punkt, welcher hinzugefügt wird, sind Kontrollprozesse während der Problembearbeitung. Diese kommen in jeder einzelnen Phase und beim Übergang zwischen den Phasen zum Tragen und umfassen metakognitive Tätigkeiten, wie beispielsweise Selbstkontrolle, Selbststeuerung und Selbsteinschätzung. Zuletzt greifen Wilson et al. den Zusammenhang zwischen der Lösung eines Problems und dem erneuten Aufwerfen von Problemen auf (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 287 f. und Rott 2014, S. 256).

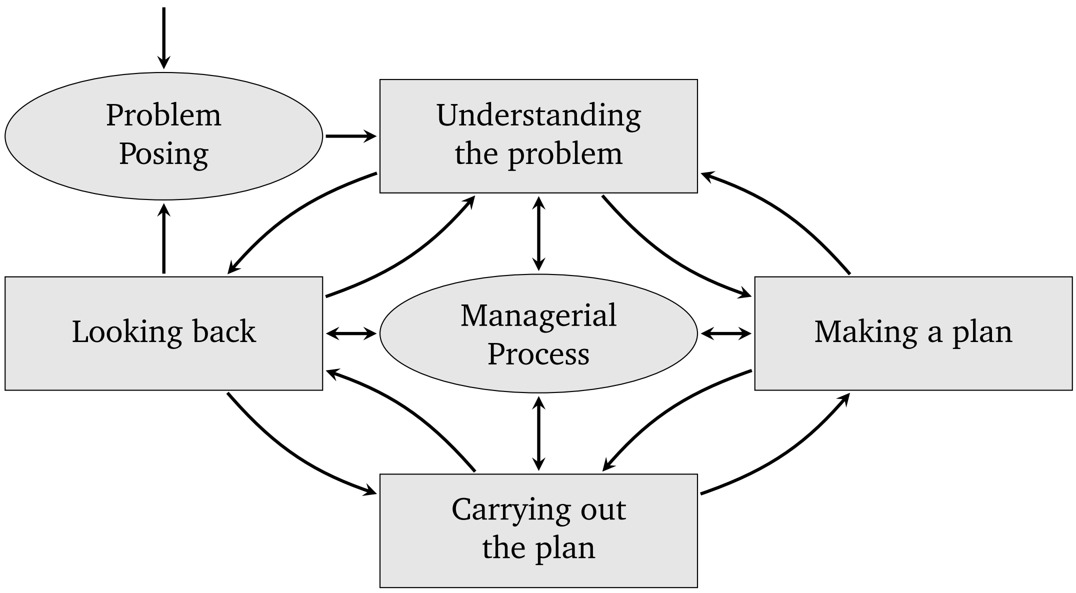


Abbildung 2: Problemlösemodell nach Wilson et al. (1993) (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 287).

2.3.6 C. Collet (2009)

Das Prozessmodell selbstregulierten mathematischen Problemlösens nach Collet (2009), wie es in Abbildung 3 dargestellt ist, wurde auf Basis empirischer Befunde einer Begleitstudie im schulischen Rahmen entwickelt und bezieht einerseits die Teilhandlungen *Analyse und Planung*, *Ausführung* und *Kontrolle* des Problemlösens, andererseits auch selbstregulative Prozesse[5] während der Problembearbeitung mit ein (grau hinterlegt). Zwischen den jeweiligen Teilhandlungen des Problemlösens ist ein Übergang sowohl vorwärts als auch rückwärts möglich. Insgesamt gliedert sich das Modell in eine *präaktionale*, eine *aktionale*, sowie eine *postaktionale* Phase.

[5] Ausführliche Untersuchungen zum Einfluss von Selbstregulation auf Problembearbeitungsprozesse werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht näher erläutert. Interessierte Leser seien dazu auf [Collet 2009] verwiesen.

In der *präaktionalen Phase* wird der Lernende mit einem mathematischen Problem konfrontiert, welches für den Schüler[6] eine kognitive, motivationale und emotionale Anforderungssituation darstellt und als Aufforderung zum Lernhandeln dient. In der *aktionalen Phase* bearbeitet der Lernende das Problem selbstreguliert, indem er seinen Bearbeitungsprozess sowohl eigenständig überwacht (Self-Monitoring), als auch selbst steuert. Der Bearbeitungsprozess an sich ist in Teilhandlungen gegliedert, welche denen von Pólya ähneln. Auch hier ist der Einsatz von bereichsspezifischem Wissen sowie von Heurismen nötig. In der *postaktionalen Phase* reflektiert der Problemlöser neben den mathematischen Inhalten auch das Vorgehen, motivationale und emotionale Zustände sowie die eigene Selbstwirksamkeit während des Problembearbeitungsprozesses. Das Ergebnis der Reflexion ist schließlich ein Kompetenzzuwachs, sowohl an Wissen, als auch an Fähigkeiten (vgl. Collet 2009, S. 240 ff. und Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 287 f.).

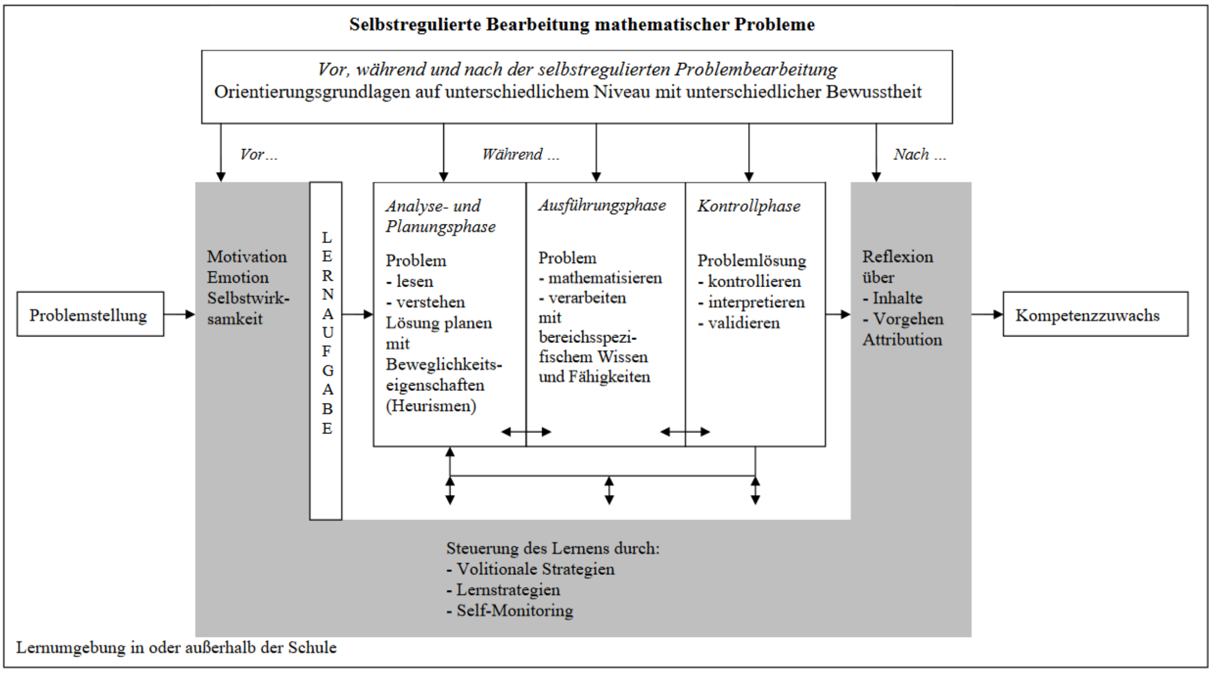


Abbildung 3: Prozessmodell selbstregulierten mathematischen Problemlösens nach Collet (2009) (vgl. Collet 2009, S. 240 ff.).

2.3.7 Vergleich der Problemlösemodelle und Diskussion der Relevanz für die vorliegende Arbeit

Ein Vergleich der Modelle ist in Bezug auf verschiedene Kategorien möglich (vgl. Rott 2014, S. 257 ff. und Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 286 ff.). Bereits in der Einführung zu Abschnitt 2.3 wurde eine Klassifikation nach dem jeweils verfolgten Ziel angesprochen. So kann ein Problemlösemodell entweder die innere oder äußere Struktur des Prozesses beschreiben. Letztere können nochmals unterteilt werden in deskriptive Modelle[7] sowie in normative Modelle (beispielsweise das Modell von Pólya). Häufig

[6]Aus Gründen der Lesbarkeit wird im Folgenden auf die Nennung beider Geschlechter verzichtet.
[7]Ein Beispiel eines deskriptiven Modells findet sich in [Rott 2014, S. 273].

existieren jedoch auch Modelle, welche nicht eindeutig einem dieser Typen zugeordnet werden können oder ein gänzlich anderes Ziel verfolgen, wodurch diese Klassifikation nicht ausreicht.
Eine andere Eigenschaft, in der sich die dargestellten Modelle unterscheiden, liegt in der Linearität. Während einige den Problembearbeitungsprozess als lineare Abfolge von einzelnen Prozessschritten auffassen (beispielsweise in den Modellen von Dewey (Abschnitt 2.3.1), Wallas (Abschnitt 2.3.2) oder Pólya (Abschnitt 2.3.3)), betonen andere explizit eine nicht-lineare, teils auch sprunghafte oder zyklische Abfolge der Stufen (Schoenfeld (Abschnitt 2.3.4), Wilson et al. (Abschnitt 2.3.5), Collet (Abschnitt 2.3.6)). In einer empirischen Studie mit Fünftklässlern kommt Rott (2014) zum Ergebnis, dass etwa zwei Drittel der Problemlöseprozesse eher linear verlaufen, das andere Drittel dagegen eher nicht-linear (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 287). Dies macht deutlich, dass es zwar nötig ist, nicht-lineare Prozesse in seine Überlegungen miteinzubeziehen, jedoch ein lineares Problemlösemodell generell tragfähig ist und durch einfache Erweiterung auch nicht-lineare Elemente beschreiben kann (vgl. dazu den Übergang von Pólyas Modell zum Modell von Wilson et al.).
Ein weiterer Unterschied der dargestellten Modelle besteht in den Phasen der Kontrolle und Metakognition. Bezogen auf die chronologische Entstehung der o.g. Modelle zeigt sich, dass diesen Phasen des Problemlöseprozesses stetig mehr Beachtung geschenkt wurde. Während bei Dewey und Wallas keinerlei Kontroll- und Metakognitionsprozesse stattfinden, legt Pólya als erster Wert auf eine Rückschau, die über die reine Verifikation der gefundenen Lösung hinausgeht und das gelöste Problem nochmals auf eine elegantere Lösung und auf Verbindungen zum bisher vorhandenen Wissen untersucht. Schon in Schoenfelds Modell wird diese Metakognition noch um Kontrollprozesse während der Problembearbeitung erweitert, wodurch der Lösungsprozess durch einen übergeordneten Plan überwacht werden soll (Self-monitoring). Dieser Aspekt wird durch Wilson et al. und Collet um selbstregulatorische Prozesse, die von den eigentlichen, mehr oder weniger linearen Phasen des Problemlösens getrennt sind, ausgebaut. Beispiele derartiger Selbstregulationen sind Prozesse der Selbsteinschätzung oder Selbststeuerung.
Zuletzt sei das Hauptkriterium aufgeführt, in dem sich die Modelle unterscheiden: die Art und Anzahl der Phasen. Auch wenn generell alle Problemlösemodelle grob in die drei Bereiche *Einstieg in die Problembearbeitung*, *Arbeit am Problem* und *Ausklang der Bearbeitung* eingeteilt werden können, setzen einzelne Modelle spezifische Schwerpunkte, indem sie gewisse Phasen entweder weiter ausdifferenzieren oder weiter zusammenfassen (vgl. Rott 2014, S. 257). Der Bereich des *Einstiegs in die Problembearbeitung* umfasst generell immer die Konfrontation mit einem Problem, welches gewisse Eigenschaften und Voraussetzungen mit sich bringt. Diese Gegebenheiten sowie das zu erreichende Ziel sollen in dieser Phase voneinander abgegrenzt, in Beziehung gesetzt und jeweils einzeln auf das bereits zur Verfügung stehende Wissen untersucht werden (Ausdifferenzierung nach Dewey (1910)). Zwischen den ersten beiden Phasen befindet sich die Planung des Vorgehens. Einige Modelle fassen diese noch mit zum Bereich *Einstieg in die Problembearbeitung* (Collet (2009)), andere (Pólya (1945)) bereits zum Bereich *Arbeit am Problem*. Die Ungenauigkeiten der jeweiligen Einordnungen können jedoch vernachlässigt werden, da im Folgenden generell davon ausgegangen wird, dass Rückschritte im Problemlöseprozess möglich und nötig sind. Entscheidend ist das Vorhandensein

einer Planungsphase, die eine unkontrollierte Beschäftigung mit dem Problem („wild goose chase“ (Schoenfeld 1985, S. 13)) oder ein Versinken in Details verhindert. Im Bereich *Arbeit am Problem* erfolgt die Suche nach einer tatsächlichen Lösung. Pólya differenziert dies einerseits in eine Phase, in der das Problem auf mögliche Lösungen untersucht und ein Plan erstellt wird, sowie in eine Phase, in der die gefundenen Ideen ausgeführt werden. Ersteres wird durch Schoenfeld nochmals ausdifferenziert. Er unterscheidet die Phase der strukturierten Planung in einem größeren Zusammenhang von der teils unstrukturierten Erkundung möglicher Ansätze durch Nutzung von Heurismen. Die von Wallas geschilderten Phasen der Inkubation und Illumination, die einen Übergang zwischen der Lösungsfindung und der Ausführung darstellen, erscheinen zwar als berechtigt, um das Modell durch die Beschreibung unterbewusst ablaufender Prozesse zu erweitern, sind jedoch für ein normatives Modell nicht weiter sinnvoll, da kein konkreter Hinweis gegeben wird, wie dadurch eine entscheidende Idee zur Lösung des Problems explizit gefunden werden kann. Abschließend werden im Bereich *Ausklang der Bearbeitung* alle Prozesse subsumiert, die nach dem Finden der eigentlichen Lösung stattfinden. Während diese für Dewey und Wallas nur aus einer Kontrolle der Lösung und der einzelnen Schritte besteht, erweitert Pólya dies durch eine Metakognition der verwendeten Lösungswege und Heurismen, durch eine Eingliederung in einen größeren Zusammenhang und durch ein Verbessern der Lösung durch Vereinfachen von Lösungsschritten oder durch die Wahl eines anderen Lösungsweges.
Abhängig vom jeweils bearbeiteten Problem kann es durchaus vorkommen, dass mehrere Phasen zusammenfallen, parallel ausgeführt oder überhaupt nicht durchlaufen werden. Dennoch erscheint eine Ausdifferenzierung (für ein normatives Modell) sinnvoll, um, gerade für unerfahrene Problemlöser, Anhaltspunkte für den Lösungsprozess zu liefern. Für die vorliegende Arbeit wird aus diesem Grund eine stärkere Ausdifferenzierung der einzelnen Phasen gewählt. Dagegen werden mögliche Prozesse der Selbstregulation weniger stark berücksichtigt, sondern nur die Aspekte der Rückschau und Metakognition im Sinne Pólyas. Besonders die Problemlösemodelle von Pólya und Schoenfeld sind daher im Folgenden relevant.

2.4 Heurismen zum Problemlösen

Der Begriff *Heuristik* stammt vom altgriechischen Wort εὑρίσκω (*heurísko*), übersetzt „ich finde“, bzw. dem Wort εὑρίσκειν (*heurískein*), übersetzt „auffinden“ oder „entdecken“, ab. Es bezeichnet die Kunst, mit begrenztem Wissen oder unvollständigen Informationen praktikable Lösungen zu finden (vgl. Gigerenzer 1999, S. 5). Anders formuliert umfasst die Heuristik gewisse Methoden, welche beim Lösen eines Problems zu Fortschritten führen, ohne jedoch eine unmittelbar anwendbare Routineoperation zu verwenden. Diese Methoden zum Lösen von Problemen bezeichnet man als *Heurismen*. Beispielhafte Einteilungen von Heurismen ergeben sich einerseits nach der Phase des Problemlösungsprozesses, in dem diese jeweils verwendet werden (Problemfindungsstrategie, Verstehensstrategie, Lösungsstrategie, Kontroll- und Reflexionsstrategie), andererseits nach Art der Tätigkeit (z.B. Problemlösestrategien und metakognitive Kontrollstrategien) (vgl. Link 2011, S. 49). Im Folgenden werden diejenigen Heurismen näher erläutert, welche konkret zur Überwindung der problemspezifischen Barriere hilfreich sind. Die folgenden Heurismen bilden zusammen mit den in Abschnitt 2.3 dargestellten Problemlösemodellen eine Gerüststruktur zum Problemlösen. Die Problemlösemodelle stellen die Treppe dar, an deren Fuß sich die Ausgangssituation befindet, und das gelöste Problem als das zu erreichende Ziel liegt am oberen Ende. Die Heurismen bilden das Treppengeländer, an dem sich der Problemlöser von einer Treppenstufe zur nächsten bewegen kann. Diese Heurismen können in sich nochmals in *heuristische Hilfsmittel*, *heuristische Strategien*, *heuristische Prinzipien* und *heuristische Regeln* unterteilt werden, wobei die jeweiligen Trenngrenzen innerhalb dieser Einteilung nicht scharf sind (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 37). Eine Übersicht der genannten Heurismen und der im Folgenden dargestellten Ausdifferenzierung befindet sich in Abbildung 4.

Abbildung 4: Überblick über die vorgestellten Heurismen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 45)

2.4.1 Heuristische Hilfsmittel

Heuristische Hilfsmittel dienen in erster Linie dazu, das Problem besser zu verstehen und zu strukturieren. Im Gegensatz zu den anderen Heurismen besitzen sie keinen direkten Verfahrenscharakter und sind weniger Lösungsstrategien als Verständnishilfen. Durch diese lassen sich gegebene Probleme besser visualisieren, die Bestandteile der Ausgangssituation können strukturiert und analysiert sowie vorhandene Informationen entsprechend übersichtlich dargestellt und dadurch reduziert werden. Eine weitere Einsatzmöglichkeit der heuristischen Hilfsmittel besteht darin, Anderen eine gefundene Lösung verständlich zu machen und die Kommunikation zu erleichtern (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 45).

2.4.1.1 Skizze / Informative Figur

In einer Skizze können die gegebenen Voraussetzungen und deren Beziehungen zueinander grafisch visualisiert und dem Problemlöser dadurch leichter zugänglich gemacht werden. Zusätzlich erleichtert eine Skizze (gerade im Bereich der Geometrie) die Einführung von konkreten Notationen, beispielsweise für Punkte, Strecken und Winkel. Anhand der informativen Figur[8] können, beispielsweise durch Einführen von Hilfselementen, Ideen gewonnen werden, mit denen sich das Problem teilweise oder vollständig lösen lässt (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 46 ff.). Pólya betont, dass die Genauigkeit, mit der eine Skizze gezeichnet wird, von der Erfahrung des jeweiligen Problemlösers abhängen sollte. Während sich unerfahrene Problemlöser auf präziser gezeichnete Skizzen stützen sollten, eignen sich für erfahrenere Problemlöser auch weniger präzise Figuren. Dies ist darin begründet, dass durch eine ungenaue Zeichnung gelegentlich falsche Schlussfolgerungen gezogen werden, beispielsweise wenn die Skizze einen rechten Winkel suggeriert, woraufhin verschiedene Sätze (Thales, Pythagoras) verwendet werden, die in dem gegebenen Zusammenhang nicht (uneingeschränkt) gültig sind. Desweiteren betont Pólya, dass eine bessere Visualisierung durch die Nutzung von Farben und vereinheitlichten Notationen erreicht werden kann (vgl. Pólya 2014, S. 103 ff.).

2.4.1.2 Tabellen

Die Verwendung von Tabellen kann hilfreich sein, um gegebene Größen zu strukturieren, übersichtlich darzustellen und so einfacher zugänglich zu machen. Dazu zählt auch die Veranschaulichung möglicher zur Verfügung stehender Voraussetzungen und Hilfsmittel und deren Organisation, beispielsweise in Form eines Wissensspeichers (vgl. Tabelle 5). Andererseits kann der Überblick über bereits durchgeführte Untersuchungen (vgl. Abschnitt 2.4.2.1) mit einer Tabelle verbessert werden. Insgesamt können die Informationen einer Problemaufgabe durch die Verwendung einer Tabelle reduziert, systematisiert und strukturiert oder spezielle Zusammenhänge und Muster im Problem deutlich werden (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 56 ff.).

2.4.1.3 Wissensspeicher

In einem Wissensspeicher wird bereits vorhandenes „Wissen“ zu einem Themenbereich dargestellt und je nach geforderter Funktion umstrukturiert. Dazu zählen (im Unterricht behandelte) Begriffe, Sätze, Algorithmen und Formeln, genauso wie Heurismen,

[8] Dieser Begriff wird synonym für „Skizze“ verwendet, macht jedoch deutlich, dass aus dieser gewisse Informationen ablesbar sein sollen.

Hilfsfragen oder andere Strategien. Die Auswahl und die Darstellungsweise verschiedener Aspekte in einem Wissensspeicher hängt sowohl vom jeweiligen Problem, als auch von den persönlichen Bedürfnissen des Problemlösers ab. Beispiele möglicher Darstellungsweisen sind Mindmaps (vgl. Abbildung 4) oder Tabellen (vgl. Tabelle 5). Auch sind individuelle Unterschiede in der Ausführlichkeit der Informationen und der damit verbundenen Übersichtlichkeit denkbar. Während die Heurismen in Abbildung 4 ohne nähere Erklärungen und Zusammenhänge zu Beispielaufgaben oder Hilfsfragen veranschaulicht sind, beinhaltet Tabelle 5 detailliertere Bezüge und Quervernetzungen. Die Einträge eines Wissensspeichers sind häufig bereits Ergebnisse aus früheren Problembearbeitungsprozessen und so wird dieser individuell aufgebaut. Beispielsweise werden leere Felder der Tabelle 5 im Laufe der Zeit gefüllt und die Inhalte anderer Felder gegebenenfalls ergänzt. Beim Lösen eines Problems kann durch einen Wissensspeicher ein Überblick über verwendbare mathematische und heuristische Konzepte gegeben und auf diese Weise Beziehungen zwischen bereits vorhandenem Wissen und dem neuen Problem hergestellt werden (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 61 ff.).

Tabelle 5: Beispiel eines Heurismen-Wissensspeichers in Form einer Tabelle (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 61)

Heurismus	Hilfsfrage(n)	Nutzen	Beispielaufgabe	mögliche Fehler
Skizze	Wie lassen sich die Gegebenheiten veranschaulichen?	Besseres Verständnis für das Problem		Aufstellen falscher Annahmen durch Skizzen, die nur einen Spezialfall abdecken.
Invarianzprinzip	Gibt es im vorliegenden Prozess gewisse Eigenschaften, die sich nicht ändern?	Begründung für die Unmöglichkeit gewisser Situationen	Läufer auf dem Schachbrett	
...	...	...	...	...

2.4.1.4 Lösungsgraphen

Ein Lösungsgraph ist ein Hilfsmittel, mit dem verschiedene Stufen eines mehrschrittigen Lösungsprozesses geplant und visualisiert werden können. Bei der Problembearbeitung dient ein Lösungsgraph dazu, einerseits die Voraussetzungen und das zu erreichende Ziel gegenüberzustellen, andererseits können Zwischenziele und die jeweiligen Lösungsschritte zwischen bereits erreichten und vielversprechenden Zwischenzielen übersichtlich dargestellt und geplant werden (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 64 ff.). Besonders wirksam sind Lösungsgraphen in Kombination mit *Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* (vgl. Abschnitt 2.4.2.2 und Abbildung 5).

2.4.1.5 Gleichungen

Eine Gleichung als heuristisches Hilfsmittel dient der Reduktion der Komplexität vorhandener Informationen und der Mathematisierung eines Sachverhalts. Ein gegebenes Problem kann durch geeignete Modellierung und anschließende Mathematisierung häufig in eine Gleichung überführt und dann mit bereits bekannten (algorithmischen) Verfahren gelöst werden. Dabei wird die Menge an Informationen, die mit dem Problem einhergeht, auf ein minimales Maß mathematischer Ausdrücke innerhalb der Gleichung reduziert. Im Vergleich zu Lösungsgraphen und informativen Figuren erfordern Gleichungen jedoch ein deutlich höheres Abstraktionsniveau. Außerdem muss ausreichend Verständnis zur vorliegende Situation vorhanden sein, bevor ein Überführen in eine Gleichung möglich ist. Ansonsten besteht die Gefahr, dass durch voreiliges („wörtliches") Übersetzen der Problemstellung Fehler im eigentlichen Sachzusammenhang auftreten (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 67 f.).

2.4.2 Heuristische Strategien

Unter *Heuristischen Strategien* versteht man Vorgehensweisen, welche bei der Problemlösung helfen können, sobald das Problem in Grundzügen verstanden wurde. Diese sind generell fachunspezifisch und können zum Lösen von Problemen aus verschiedensten Bereichen hilfreich sein.[9] Bei einem konkreten Einsatz werden die dargestellten Strategien dennoch an den jeweiligen problemspezifischen Kontext angepasst und in diesem verwendet. Generell lässt sich mindestens eine der dargestellten Strategien in jedem Problemlöseprozess in Grundzügen identifizieren und so ist eine bewusste Verwendung der Strategien ein hilfreiches Mittel zum Problemlösen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 68 ff.).

2.4.2.1 (Systematisches) Probieren

Bei der ersten Begegnung mit einem Problem und der Suche nach einer geeigneten Lösung ist die natürliche Vorgehensweise das Ausprobieren. Es werden spezielle Annahmen getroffen, Beispiele betrachtet oder gewisse ungerichtete Operationen mit den gegebenen Voraussetzungen unternommen. Dadurch erlangt der Problemlöser erste Einsichten in die Zusammenhänge des jeweiligen Problems und gegebenenfalls auch erste Ideen einer möglichen Lösung. Nach der ersten, ungerichteten Phase des Probierens gehen Problemlöser meist über in eine Phase *systematischen Probierens*. Der Unterschied besteht nun darin, dass sich der Problemlöser über gewisse Kategorien bewusst wird, nach denen er das Problem weiter untersucht. Häufig entsteht aus den Erkenntnissen des systematischen Probierens ein Schema oder sogar ein Algorithmus, der dann zur Lösung des Problems oder zumindest eines Teilproblems führt. Viele kombinatorische Probleme lassen sich durch dieses Verfahren vollständig lösen. Das Probieren in einem klar abgesteckten Raum, welches als Ziel das Finden aller Möglichkeiten hat, nennt man *geschlossenes Probieren*. Dagegen bezeichnet man mit *dynamischem Probieren* die Untersuchung eines Problems durch Treffen von Annahmen, Variation und ggf. eine

[9] In der Literatur werden diese aus diesem Grund häufig als „allgemeine Strategien" bezeichnet. Im Gegensatz dazu stehen die speziellen Strategien, welche in der vorliegenden Arbeit als *heuristische Prinzipien* gelistet sind.

Anpassung dieser, um mit dem Problem vertraut zu werden und verschiedene Zusammenhänge mit offenem Ausgang zu erkunden. Ein weiterer Aspekt des (systematischen) Probierens ist das Prüfen von (gegebenen) Behauptungen. Um sich zu überzeugen, dass diese gelten, werden verschiedene Beispiele ausprobiert. Alternativ kann man im Zuge des systematischen Probierens auch ein Gegenbeispiel finden, wenn Aussagen bearbeitet werden, deren Gültigkeit noch zu klären ist. Selbst wenn sich die Aussage als wahr herausstellt, hat man durch das Probieren bereits die Zusammenhänge erkundet und eine gewisse Strukturierung vorgenommen. Besonders wirksam zeigt sich das systematische Probieren in Kombination mit anderen heuristischen Strategien und Prinzipien. Beispielsweise kann die Anwendbarkeit von Extremal- oder Invarianzprinzip häufig durch gut gewählte Beispiele erkannt werden (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 70 ff.).

2.4.2.2 (Kombiniertes) Vorwärts- / Rückwärtsarbeiten

Unter *Vorwärtsarbeiten* versteht man das Folgern gewisser Aussagen direkt aus den Voraussetzungen. Das Problem wird darauf untersucht, welche Schlüsse sich durch Verwendung der einzelnen und einer Kombination verschiedener gegebener Informationen treffen lassen. Dabei erreicht man häufig Zwischenziele, welche erneut mit Vorwärtsarbeiten untersucht werden können. Einfach ausgedrückt, arbeitet man sich mit den gegebenen Voraussetzungen Stück für Stück zum Ziel vor. Teilweise ist es zusätzlich nötig, aus den Folgerungen, die sich durch eine gewisse Kombination der Voraussetzungen ergeben, diejenigen auszuwählen, welche zum geforderten Ziel führen. Genauso kann es hilfreich sein, alle möglichen Kombinationen und die jeweiligen Folgerungen zu untersuchen, wenn kein Weg direkt in Richtung des Ziels führt.
Die nächste Strategie, welche genau entgegengesetzt verläuft, ist das *Rückwärtsarbeiten*. Hier wird ausgehend vom geforderten Zielzustand rückwärts hin zu gewissen Voraussetzungen gearbeitet. Es wird untersucht, aus welchen Zwischenzielen sich das jeweilige Ziel schließen lassen würde und wie diese Zwischenziele selbst gefolgert werden könnten. So kann die geforderte Zielsituation auf die Voraussetzungen zurückgeführt und der gefundene Weg anschließend vorwärts ausgeführt werden. Für das Rückwärtsarbeiten sind Flexibilität im Denken, insbesondere Reversibilität und das Aufstellen und Untersuchen von Hypothesen, nötige Voraussetzungen an die Fähigkeiten der Problemlöser.
Die Kombination der beiden Strategien ergibt schließlich eine besonders effektive Möglichkeit, eine Verbindung zwischen Ausgangszustand und Zielzustand herzustellen. Einerseits werden aus den Voraussetzungen Zwischenergebnisse abgeleitet, für welche man durch Rückwärtsarbeiten bereits zu dem Schluss gekommen ist, daraus die geforderte Lösung folgern zu können. Auch lassen sich Lücken im Lösungsprozess durch *kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten* besonders gut schließen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 76 ff.). Ein Beispiel eines allgemeinen Lösungsgraphen, bei welchem die problemspezifische Barriere durch kombiniertes Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten verringert wird, ist in Abbildung 5 dargestellt.

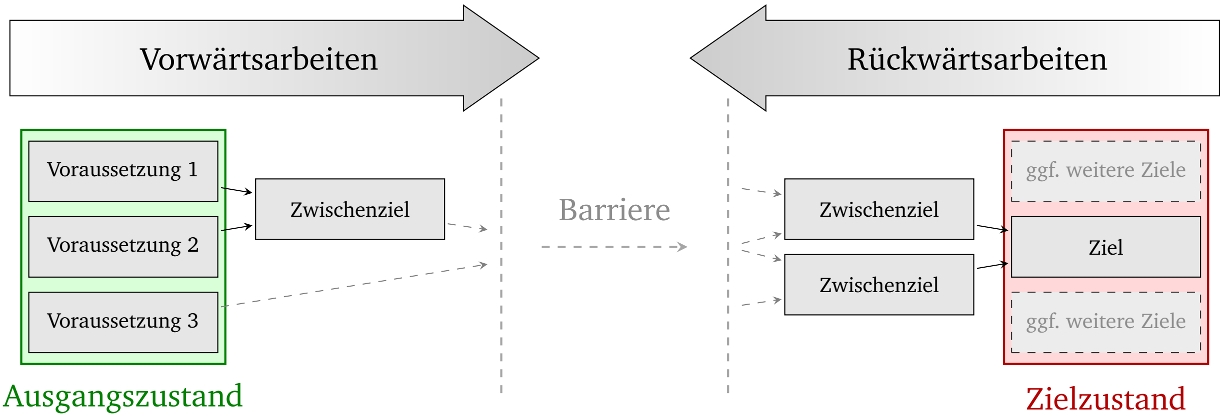


Abbildung 5: Beispiel eines allgemeinen Lösungsgraphen in Verbindung mit kombiniertem Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten

2.4.2.3 Analogieschlüsse

Die Problemlösestrategie des *Analogieschlusses* umfasst das Suchen von Ähnlichkeiten bereits gelöster Probleme zum aktuell zu lösenden Problem. Dazu zählen sowohl inhaltliche und thematische Ähnlichkeiten als auch strukturelle Ähnlichkeiten, beispielsweise in der Formulierung der Aufgabe in Verbindung mit den dazu verwendeten Lösungsstrategien. Auch die Suche nach Gemeinsamkeiten der jeweiligen Lösungswege mehrerer Aufgaben in demselben oder einem ähnlichen Themenfeld hilft dem Problemlöser häufig, Ansätze für das aktuelle Problem zu entdecken. Ist keine Analogie zu anderen Aufgaben zielführend, kommt man häufig zu der Einsicht, das Problem mit einer anderen Sichtweise zu betrachten, als derjenigen, welche durch das Problem oder die Aufgabenstellung impliziert wird. Gerade im mathematischen Kontext ist dann die Anwendbarkeit einer anderen mathematischen Teildisziplin wahrscheinlich (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 83 f.).
Die heuristische Strategie der Analogieschlüsse wird häufig auch *Analogieprinzip* genannt und zu den heuristischen Prinzipien gezählt. In dieser Arbeit wird dieses allerdings aufgrund der allgemeinen Gültigkeit unabhängig vom Situationskontext und von speziellen Voraussetzungen unter den Strategien gelistet. Gleiches gilt auch für das im Folgenden dargestellte *Rückführungsprinzip*. Eine Gruppierung von *Analogieprinzip*, *Rückführungsprinzip* und *Transformationsprinzip* als „allgemeine heuristische Prinzipien“ sowie von *Invarianzprinzip*, *Extremalprinzip*, etc. als „spezielle heuristische Prinzipien“ ist ebenfalls geläufig. Die Heurismen der Kategorie *allgemeine heuristische Prinzipien* sind generell schwer zu unterscheiden und werden auch selten unabhängig voneinander angewendet.
Ein Beispiel für die Anwendung des Analogieprinzips bildet die Herleitung der Flächenformeln für ein (gleichschenkliges) Trapez aus der Lösungsstrategie für die Herleitung der Flächenformel des Parallelogramms. Beide können dabei auf die Flächenformel eines Rechtecks zurückgeführt werden. In Kombination mit dem Heurismus des Zerlegens und Ergänzens (vgl. Abschnitt 2.4.3.2) wird das Parallelogramm entlang seiner Höhe zerlegt und neu zusammengefügt, sodass ein Rechteck entsteht. Diese Lösungsstrategie

kann analog für das gleichschenklige Trapez angewendet werden, indem dieses zerlegt und an entsprechender Stelle wieder zusammengefügt wird. Die Erweiterung zur Herleitung der Flächenformel des allgemeinen Trapezes greift auf die gleiche Vorgehensweise zurück, allerdings werden hier zwei Zerlegungen benötigt.

2.4.2.4 Rückführung auf Bekanntes

Die Strategie der *Rückführung auf Bekanntes* oder gelegentlich auch *Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes* umfasst das „Umstrukturieren, Erweitern oder Aussondern von Informationen der Aufgabe mit dem Ziel, Analogieschlüsse zu ermöglichen“ (Bruder und Collet 2011, S. 84). Ein gegebenes Problem wird somit durch gewisse Rückführungsmethoden mit bereits gelösten Problemen in Verbindung gesetzt. Zu diesen zählt beispielsweise ein Wechsel der Anschauungsebene von einer räumlichen Figur hin zu einer ebenen Figur. Auch das Erweitern eines gegebenen Problems um ein zusätzliches Element oder durch Hinzunahme einer weiteren Dimension ist möglich. Vor allem dann, wenn sich gewisse Aussagen oder Regeln, beispielsweise nach einer Erweiterung der Dimension oder des Zahlbereichs, genauso übertragen lassen, kann das *Rückführungsprinzip* besonders geeignet sein, um die Gültigkeit dieser übertragenen Regel zu verifizieren (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 84 ff.).
Ein geeignetes Beispiel für diesen Heurismus bildet die Herleitung der Formel zur Berechnung der Diagonale eines Quaders. Durch Betrachtung geeigneter Ebenen im Quader kann die Diagonale durch zweifaches Anwenden des Satzes von Pythagoras bestimmt werden. Dieser Wechsel der Anschauungsebene auf die ebenen Rechtecke ermöglicht es, die Diagonale des Quaders analog zur Diagonale eines Rechtecks zu ermitteln.

2.4.3 Heuristische Prinzipien

Im Vergleich zu den heuristischen Strategien sind die im Folgenden dargestellten *heuristischen Prinzipien* stärker an die jeweiligen Fachinhalte und die gegebenen Voraussetzungen gebunden. Besonders die Bereiche Aspektwechsel (beispielsweise beim Zerlegen und Ergänzen) sowie die Aspektbetrachtung (Fallunterscheidung, etc.) spielen für die Vorgehensweisen in diesem Abschnitt eine Rolle. Ein Großteil der dargestellten Prinzipien hat im traditionellen Unterricht jedoch keine größere Bedeutung (Schubfach- / Invarianzprinzip), da diese nur für die Lösung spezieller Probleme hilfreich sein können (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 87 f.).

2.4.3.1 Transformationsprinzip

Das *Transformationsprinzip* beschreibt eine Erweiterung des Problems in einem innermathematischen Modellierungsprozess. Die durch das Problem gegebene Thematik wird bewusst in eine andere innermathematische Teildisziplin überführt, um dort bereits zur Verfügung stehende Verfahrensweisen auszunutzen, um eine Lösung zu finden. Ein geeignetes Beispiel hierzu ist die Berechnung des Betrags eines Vektors im $\mathbb{R}^n$ unter mehrfacher Rückführung auf rechtwinklige Dreiecke in der Ebene, Transformieren der Vektoren in Längenbeziehungen in den Dreiecken und mehrfaches Anwenden des Satzes von Pythagoras. Weitere Maßnahmen sind Variationen der Bedingungen und die Betrachtung des Gegebenen und Gesuchten in verschiedenen Zusammenhängen. Auch eine Verbindung mit Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip (vgl. Abschnitt 2.4.3.2) kann eine geeignete Transformationsidee liefern. Da für eine Transformation häufig ein größerer Fundus an mathematischem Wissen nötig ist, ist dieses Prinzip eher für höhere Jahrgangsstufen geeignet (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 103 f.).

2.4.3.2 Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip

Das Prinzip des *Zerlegens* umfasst eine Vielzahl mehr oder weniger ähnlicher Tätigkeiten. Einerseits kann ein Problem mit mehreren differenzierbaren Zielen durch Zerlegen in verschiedene Sinneinheiten gegliedert werden, welche dann einzeln erreicht werden können. Andererseits kann eine Vielzahl von Voraussetzungen in einzelne zusammengehörige Teile zerlegt werden. Innerhalb dieser werden dann durch Vorwärtsarbeiten Schlussfolgerungen gezogen. Die Kombination der vorher zergliederten Voraussetzungen erfolgt erst danach. Somit dient das Zerlegen der Reduktion und dem Herstellen von Übersichtlichkeit. Gerade im Kontext der Geometrie fällt unter diesen Aspekt auch die Zerlegung gewisser Figuren in Teilfiguren, beispielsweise eine Zerlegung einer geradlinig begrenzten Figur in Dreiecke zur Berechnung der Fläche oder das Zerlegen eines allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke, um den Satz des Pythagoras anzuwenden.
Das Prinzip *Ergänzen* geht häufig mit dem Zerlegen einher. Für die oben beschriebene Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in zwei rechtwinklige Dreiecke wird eine Höhe des ursprünglichen Dreiecks ergänzt und an dieser dann zerlegt. Die Höhe fungiert in diesem Beispiel als sogenanntes *Hilfselement*. Das Ergänzen derartiger Hilfselemente ermöglicht es, gewisse Ansatzpunkte in Problemstellungen einzubringen, ohne zusätzliche Voraussetzungen zu fordern. Weitere Beispiele für solche Hilfselemente sind Hilfslinien, Hilfsfiguren (zur Flächenberechnung), die algebraische Ergänzung einer Null (quadratische Ergänzung) oder einer Eins, uvm. (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 88 ff.). Im speziellen Kontext geometrischen Ergänzens umfasst diese Vorgehensweise auch das Anfügen von Figuren an bestehende. Diese können vorher durch Zerlegen gewonnen oder genauso wie Hilfselemente geeignet ergänzt werden.

2.4.3.3 Prinzip der Fallunterscheidung

Das *Prinzip der Fallunterscheidung*, welches selbst ein Spezialfall des Zerlegungsprinzips ist, gliedert ein Problem in verschiedene Einzelfälle, welche in ihrer Gesamtheit alle möglichen Situationen im eigentlichen Problem abdecken. Wenn eine Lösung für jeden Einzelfall gefunden ist, gilt auch das Ausgangsproblem als vollständig charakterisiert. Eine weitere Möglichkeit bietet sich durch das gesonderte Behandeln von sogenannten Grenzfällen. Werden bei der Problemlösung gewisse Annahmen getroffen, müssen die dadurch ausgeschlossenen Grenzfälle gesondert betrachtet werden. Beispielsweise stellt der Satz des Pythagoras als Spezialfall des Cosinussatzes für ein rechtwinkliges Dreieck, einen solchen Grenzfall dar. Im Beweis des Cosinussatzes kann an dieser Stelle auf dem meist vorher bewiesenen Satz des Pythagoras verwiesen werden und davon ausgegangen werden, dass das behandelte Dreieck nicht rechtwinklig ist. Weitere Fallunterscheidungen in der Geometrie sind beispielsweise die Unterscheidung der Lagebeziehung zwischen Kreis und Gerade (Passante, Tangente und Sekante) oder die oben genannte Unterscheidung von Dreiecken in rechtwinklig und nicht-rechtwinklig (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 95 f.).

2.4.3.4 Invarianzprinzip

Das *Invarianzprinzip* beschreibt einen Heurismus, bei dem in einer Vielzahl von unterschiedlichen Einzelzuständen Gemeinsamkeiten zwischen diesen gefunden werden. Häufig sind Probleme, in denen das Invarianzprinzip anwendbar ist, durch einen konkreten Prozess charakterisiert, in dem nacheinander verschiedene Zustände durchlaufen werden. Liegt kein derartiger Prozess vor, ist es für die Anwendung dieses Prinzips hilfreich, einen solchen zu konstruieren. Um Aussagen über die Zustände eines Prozesses treffen zu können, konstruiert man eine sogenannte Invariante. Diese schreibt jedem Zustand eine Größe (Zahl, Symbol, Farbe, etc.) zu, deren Wert sich in keinem Schritt ändert.[10] Um schließlich Aussagen über die Lösbarkeit des Problems treffen zu können, vergleicht man den Ausgangszustand mit dem geforderten Zielzustand bezüglich der gewählten Invariante. Weichen dabei die (durch die Invariante) zugeordneten Größen voneinander ab, kann der Zielzustand nicht erreicht werden. Die Invariante hilft dem Problemlöser damit zwar nicht direkt Aussagen zu treffen, welches Ergebnis genau nach einer Vielzahl von Schritten auftritt, jedoch eine Eigenschaft vorherzusagen, die dieses Ergebnis aufweisen muss und welche Ergebnisse nicht erreichbar sind. Ein Beispiel einer derartigen Invarianten ist die Feldfarbe eines Läufers im Schach. Diese ändert sich bei keinem gültigen Zug, wodurch einfach begründet werden kann, dass ein Läufer auf einem weißen Feld keine Möglichkeit hat, Spielfiguren auf schwarzen Feldern zu schlagen. Für die Anwendung des Invarianzprinzips kommt es vor allem darauf an, eine geeignete Invariante im Prozess zu erkennen oder zu konstruieren. Dies kann durch geschicktes systematisches Probieren unterstützt werden (vgl. Grieser 2017, S. 247 ff. und Bruder und Collet 2011, S. 96 ff.).

2.4.3.5 Extremalprinzip

Das *Extremalprinzip* nutzt als heuristisches Prinzip Aussagen über größte, kleinste oder andere am Rand liegende Elemente einer (endlichen) Menge. In diesen Kontext fallen vor allem Optimierungsaufgaben, bei denen sich häufig besondere Strukturen ergeben (beispielsweise das Quadrat als Rechteck mit maximaler Fläche bei gegebenem Umfang). Zusätzlich bietet das Extremalprinzip Möglichkeiten, eine Situation zu untersuchen, indem diejenigen Objekte mit minimalen und maximalen Eigenschaften bestimmt werden. In anderen Problemsituationen kann es auch erforderlich sein, auszuschließen, dass ein Problem Lösungen in den natürlichen Zahlen besitzt. Hierfür lässt sich mithilfe der Methode des *unendlichen Abstiegs* ein Verfahren angeben, was unter der Annahme, dass eine solche Lösung existiert, einen Widerspruch durch eine unendlich absteigende Folge weiterer Lösungen erzeugt, welche in den natürlichen Zahlen nicht auftreten kann. Die letzte Variation des Extremalprinzips besteht darin, ein extremales Element einer Menge in einem indirekten Beweis vorauszusetzen und den Widerspruch durch die Konstruktion eines entsprechend kleineren bzw. größeren Elements zu generieren (vgl. Grieser 2017, S. 213 ff. und Bruder und Collet 2011, S. 98 ff.).

[10] Zusätzlich gibt es den Begriff der Halbinvarianten. Diese ändert sich zwischen zwei Zuständen eines Prozesses vorhersehbar, beispielsweise wechselt sie zwischen gerade und ungerade (Summe ungerader Zahlen), schwarz und weiß (Feldfarbe der Züge eines Springers auf einem Schachbrett) oder 1 und -1 (Signum einer Permutation durch Vertauschen zweier Zahlen in der Zykelschreibweise), oder sie zählt in jedem Zug um eine gegebene Zahl hoch (vgl. Grieser 2017, S. 247 ff.).

2.4.3.6 Schubfachprinzip

Das *Schubfachprinzip* beschreibt einen Heurismus, der die Existenz von einer Mindestanzahl an Elementen mit gewissen Eigenschaften sicherstellen kann. In der allgemeinen Aussage besagt es, dass bei der Aufteilung von $an+1$ Elementen auf n Schubfächer mindestens ein Fach mehr als a Elemente enthält ($a, n \in \mathbb{N}$). Dabei charakterisieren die Schubfächer, in die die Elemente verteilt werden, jeweils die geforderten Eigenschaften (vgl. Grieser 2017, S. 189 ff.).

2.4.3.7 Symmetrieprinzip

Das *Symmetrieprinzip* „meint das Suchen nach Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge“ (Bruder und Collet 2011, S. 100). Zusätzlich ist auch das Herstellen von Symmetrie/Harmonie in einer nicht-symmetrischen Situation und die daraus resultierenden Lösungsideen unter diesen Heurismus zu fassen. Gerade im Kontext geometrischer Aufgaben gewinnt das Symmetrieprinzip an Bedeutung. In Verbindung mit dem Prinzip Zerlegen und Ergänzen lassen sich in diesem mathematischen Teilgebiet viele Probleme anschaulich lösen oder es lässt sich zumindest eine Lösungsidee entwickeln (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 100 ff.).

2.4.4 Heuristische Regeln

Allgemeine heuristische Regeln geben nach Pólya „Empfehlungen für ein planvolles, rationelles Vorgehen zum Problemlösen, die im Allgemeinen für jede Problemaufgabe Gültigkeit besitzen“ (Bruder und Collet 2011, S. 104). Eine allgemeine Regel stellen beispielsweise die *Vorrangregeln* dar. Diese fordern den Problemlöser auf, zu den Definitionen der Begrifflichkeiten einer Aufgabe zurück zu gehen und diese definierten Begriffe durch die definierenden Begriffe zu ersetzen. Neben diesen allgemeinen Regeln gibt es *spezielle heuristische Regeln*, welche für einen gewissen Themenbereich derartige Empfehlungen geben. Für gewisse Aufgabenklassen oder Themenbereiche entwickelt ein Problemlöser allmählich eigene Regeln, wie er diese Art von Problemen geeignet lösen kann. Ein Beispiel einer solchen Regel stellt die Rückführung auf und Suche nach rechtwinkligen Dreiecken in der (ebenen) Geometrie dar. Dies kann für die Berechnung von Flächen, die aus Dreiecksflächen zusammengesetzt sind, oder für die Anwendung geeigneter Sätze (Pythagoras, Thales, etc.) hilfreich sein. Auch die Erzeugung einer Strahlensatzfigur kann zum „individuellen Werkzeugkasten“ hinzugefügt werden, wenn mehrere Probleme mit dieser Lösungsidee bewältigt wurden. Dadurch erweitert sich der individuelle Heurismenkatalog zum Problemlösen automatisch durch das Lösen von Problemen (vgl. Bruder und Collet 2011, S. 104 ff.).

2.5 Problemlösen im Unterricht

2.5.1 Berechtigung einer unterrichtlichen Umsetzung

Der in Abschnitt 2.1 definierte Begriff des *Problemlösens* kann für eine unterrichtliche Umsetzung weiterhin verwendet werden. Zusätzlich sei jedoch angemerkt, dass die meisten Probleme, welche Schüler im Unterricht bearbeiten, bereits (vielfach) gelöst worden sind und somit die einzige Berechtigung eines erneuten Lösens darin besteht, dass die Probleme für die Lernenden individuell eine Herausforderung darstellen und neue Erkenntnisse ermöglichen. Das Problemlösen kann im Mathematikunterricht mit zwei verschiedenen Intentionen eingesetzt werden: Einerseits lässt sich generell die Fähigkeit erlernen und verbessern, Probleme selbstständig zu lösen (*Zielaspekt*), andererseits kann Problemlösen auch als Lernmethode eingesetzt werden, um Lernziele zu erreichen (*Methodenaspekt*). Gerade der Zielaspekt ist ein durch die Bildungsstandards als Folge der TIMS-Studie festgelegtes Bildungsziel von Mathematik (vgl. Gerwig 2015, S. 42) und wird auch in dieser Arbeit fokussiert.
Neben dem parallelen Erlernen von allgemeinen Problemlösetechniken (Heurismen) für inner- und außermathematische Herausforderungen fördert das Problemlösen Kreativität und flexibles, logisches Denken (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 284 f.). Zudem lassen sich durch Problemlösen verschiedene Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilgebieten der Mathematik und genauso einzelner Strukturen innerhalb dieser Teilgebiete erkennen. Gerade durch Problemlösen wird erworbenes Wissen (Definitionen, Sätze, Verfahrensweisen, etc.) miteinander in Verbindung gesetzt und es entsteht ein Beziehungsgefüge. Dieses wird im Laufe der Schulzeit, begünstigt durch das Spiralcurriculum, stetig erweitert, neue Verknüpfungen werden erzeugt und eine Strukturierung findet statt. Im Kontext des Problemlösens wird nicht nur bereits gelerntes Wissen angewendet, sondern es bietet sich die Möglichkeit, abhängig von den jeweiligen Problemaufgaben, neue Begriffe zu erlernen, Sätze zu beweisen und ein gelöstes Problem für spätere Aufgaben in einen Algorithmus zu übersetzen (Methodenaspekt). Auch metamathematische Fähigkeiten als Voraussetzungen dieser Prozesse, wie beispielsweise Definieren, Beweisen und Algorithmisieren, sind damit implizit durch Problemlösen erlernbar (vgl. Vollrath und Roth 2012, S. 60 ff.).
Insgesamt spricht Problemlösen also die kognitive Komponente durch Aufbau und Vertiefung von sowohl fachspezifischem, als auch fachunspezifischem Wissen und Fähigkeiten der Lernenden an, schult metakognitive und selbstregulatorische Fähigkeiten (durch Rückschau und Kontrollprozesse während des Problemlösens) und erzeugt auf affektiver Ebene eine positive Einstellung und Motivation durch das Erfolgserlebnis, ein Problem gelöst zu haben (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 286).

2.5.2 Unterrichtliche Konzeptionen zur Ausbildung von Problemlösekompetenz

Für eine konkrete Konzeption von Unterricht, die eine langfristige Ausbildung von Problemlösekompetenz als Ziel besitzt, gibt Bruder (2003) ein Modell als Handlungsorientierung für Lehrkräfte (vgl. Collet 2009, S. 63 ff.). Dieses gliedert sich in die vier Phasen *Gewöhnen an heuristische Vorgehensweisen*, *Bewusstmachen heuristischer Vorgehensweisen*, *Bewusste Übungsphase* und *Kontexterweiterung der Strategieanwendung und unterbewusste Nutzung*.

Die erste Phase gewöhnt die Lernenden intuitiv an heuristische Vorgehensweisen und Hilfsfragen, vor allem beim Diskutieren über Aufgaben und Lösungen. Dabei wird die verwendete Strategie nicht explizit angesprochen, sondern ausschließlich das Vorgehen reflektiert. Phase 2 schließt daran an, indem es an ausgewählten Musterbeispielen spezielle heuristische Vorgehensweisen bewusstmacht und mit typischen Fragen verknüpft. Die verwendeten Musteraufgaben dienen im weiteren Verlauf dazu, die erlernten Heurismen erneut ins Gedächtnis zu rufen. In der dritten Phase werden die erlernten Heurismen anhand kurzer Übungsphasen verschiedener Schwierigkeit eingeübt und durch Hausaufgaben, sowie Wahl- und Zusatzaufgaben ergänzt. Besonderer Wert wird dabei auf die Reflexionen gelegt. Die letzte Phase stellt eine von den vorhergehenden losgelöste Stufe dar, indem die gelernten Methoden unterbewusst und flexibel in verschiedenen Situationen angewendet werden. Insbesondere ist die Anwendung in unbekannten Kontexten herauszustellen. Auch eine Einschätzung des Lernfortschritts ist hier inbegriffen (vgl. Heinze 2007, S. 17 f.).
Neben diesem Modell liefert das IMPROVE-Programm von Mevarech und Kramarski (1997) eine Unterrichtsmethode, die ebenfalls zur Förderung von Problemlösekompetenz genutzt werden soll. Dieses vereint *die Förderung von Strategieerwerb und metakognitiven Prozessen* mit *kooperativem Lernen in leistungsheterogenen Gruppen* sowie einem *produktiven Feedback*. Das Akronym IMPROVE steht dabei für Teilaspekte der Unterrichtsmethode: *Introducing new concepts, Metacognitive questioning, Practicing, Reviewing and reducing difficulties, Obtaining mastery, Verification und Enrichment* (vgl. Mevarech und Fridkin 2006, S. 87 f. und Heinze 2007, S. 18 f.).
Im ersten Schritt stellt der Lehrende die neuen Konzepte (z.B. Definitionen, Sätze, etc. und ggf. die nachfolgenden Fragen) für die gesamte Klasse vor. Daran schließt eine Phase an, in der die Lernenden in kleineren, leistungsheterogenen Gruppen verschiedene meta-kognitive Fragen aufwerfen und verfolgen. Diese können unterteilt werden in Fragen zu den zentralen Inhalten des Problems (*comprehension question*, z.B. „What is the problem all about?“), Fragen zu möglichen Verbindungen zu bereits gelösten Problemen (*connection questions*, z.B. „What are the similarities and differences between the given problem and problems you have solved in the past, and why?“), Fragen zu möglichen Strategien, die zur Lösung des Problems beitragen (*strategic questions*, z.B. „What strategies are are appropriate for solving the problem, and why?“) sowie Fragen zur Metakognition während des Problemlösens und nach dem Finden einer Lösung (*reflection questions*, z.B. „Why am I stuck?“ oder „Does the solution make sense? Can I solve it differently?“).
Mithilfe der damit vorgegebenen Ressourcen können die Lernenden das (eigenständige oder kooperative) Problemlösen in Phase 3 üben. Daran schließt sich eine Phase an, in welcher der Lehrende die zentralen Ideen wiederholt und den Einsatz der Hilfsfragen reflektiert. Dadurch werden die Lernenden befähigt, weitere Probleme auf ähnliche Weise zu lösen und ihre Fähigkeiten diesbezüglich zu erweitern (Phase 5). In regelmäßigen Abständen kontrolliert der Lehrende den Lernfortschritt der Schüler, gibt Feedback und stellt diesen gegebenenfalls weiterführendes oder vertiefendes Material zur Verfügung (Phasen 6 und 7).

2.5.3 Maßnahmen zur Förderung von Problemlösekompetenz

Neben den in Abschnitt 2.5.2 dargestellten Modellen zur Ausbildung von Problemlösekompetenz existieren weitere Ansätze zur Förderung derselben. Eine Einteilung dieser Fördermaßnahmen trifft Kilpatrick (1985), welcher *Osmosis* (implizites Lernen durch individuelles Lösen von Problemen), *Memorization* (Kennenlernen von Teilprozessen des Problemlöseprozesses), *Imitation* (Lernen durch Nachahmen von Expertenbeispielen), *Cooperation* (Lernen durch kooperatives Arbeiten in Gruppen) und *Reflection* (Lernen durch Reflektion der eigenen Problemlösetätigkeiten) unterscheidet (vgl. Heinze 2007, S. 14 ff.). Ein anderer Ansatz teilt Fördermaßnahmen in diejenigen auf, welche einen der Teilbereiche Wissensbasis, Problemlösestrategien, Metakognition und Dispositionen fördert. Dabei dient dies der Förderung der in Abschnitt 2.2 grundlegenden Fähigkeiten, die für erfolgreiches Problemlösen nötig sind, auch wenn häufig ein Schwerpunkt auf das Erlernen der Heurismen gelegt wird (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 289 f.). Auch das Werk von Pólya gibt als normatives Problemlösemodell konkrete Handlungsanweisungen zum Lernen und Lehren von Problemlösen. Eine Zusammenfassung über die in der (fachdidaktischen) Literatur diskutierten Fördermaßnahmen von Problemlösekompetenz ist im Folgenden aufgelistet (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 291 f.):

- (Implizites Lernen durch) individuelles Lösen zahlreicher und verschiedenartiger Probleme
- Systematisches Wiederholen und Üben von elementaren Grundlagen
- Kennenlernen, Ausbilden und Üben von Teilhandlungen des Problemlöseprozesses
- Heuristische Vorgehensweisen (explizit) lehren und vielseitig anwenden lassen
- Reflexion der eigenen Problemlösetätigkeit
- Metakognitive Strategien lehren und anwenden lassen
- Automatisierte Gedankenabläufe stören, ein konstruktives Verhältnis zu Denkfehlern schaffen
- Lernen durch Nachahmen von Experten
- Lernen durch kooperatives Arbeiten in Gruppen
- Eine positive Lernatmosphäre schaffen
- Geeignete (problemorientierte) Lernumgebungen bereit stellen.

Eine konkrete Möglichkeit zur Förderung liefert das Konzept der heuristischen Lösungsbeispiele von Reiss und Renkl (2002). Dieses wird in Abschnitt 4 zusammen mit weiteren (teils oben genannten) Möglichkeiten der Förderung von Problemlösekompetenz an Beispielen näher erläutert.

2.5.4 Kriterien der Auswahl von Problemaufgaben

Gerade die konkrete Umsetzung von Problemlösen im Unterricht scheint problematisch zu sein. Für erfolgreiches Problemlösen müssen sowohl die gestellten Probleme als auch die Fähigkeiten der Schüler gewisse Voraussetzungen erfüllen und aufeinander abgestimmt sein.

Die in Abschnitt 2.2 genannten benötigten Fähigkeiten zum Problemlösen können mithilfe der allgemeinen Strategien in Abschnitt 2.5.3 erlernt und gefördert werden. Entscheidend ist dabei jedoch, dass bei der Auswahl der Problemaufgaben auf den jeweils vorliegenden Wissens- und Fähigkeitsstand der Lernenden eingegangen und bestmöglich individuell differenziert werden muss. Vollrath und Roth (2012) beschreiben dazu eine Reihe von Bedingungen, die für das mathematische Problemlösen und die gestellten Aufgaben wichtig sind (vgl. Vollrath und Roth 2012, S. 61 ff.):

Bei der Formulierung von Problemen werden Begriffe und Zeichen verwendet, welche die Lernenden verstehen müssen, einerseits durch Kenntnis der entsprechenden Begrifflichkeiten und Symbole, andererseits durch das vorhandene Fachwissen hinter den gegebenen Begriffen und Objekten. So lässt sich die *Verstehbarkeit des Problems* dadurch beeinflussen, dass das formulierte Problem in seinen Begrifflichkeiten dem Wissens- und Fähigkeitsstand der Schüler entsprechen sollte. Genauso ist die *Verfügbarkeit von Wissen für das Finden einer Lösung* an diese Aspekte geknüpft. Zusätzlich zum bloßen Verstehen der Begrifflichkeiten und des Problems ist entscheidend, dass auch für die Lösung des Problems alle nötigen Begriffe, Algorithmen oder Ähnliches bereits vorhanden sind und von den Lernenden nur noch aktiviert werden müssen. Das nächste Kriterium an eine Problemlöseaufgabe ist der *Erkenntniswert*. Dieser geht nicht zwangsläufig mit der Schwierigkeit einher, sondern ist abhängig von der resultierenden Aussage und deren Anwendbarkeit sowie von den Erkenntnissen während des Lösungsprozesses. Der Aspekt des *Zusammenhangs* zwischen den einzelnen Problemaufgaben stellt sicher, dass die Lernenden einen Nutzen in ihren Problemlösetätigkeiten sehen. Enge Probleme mit eingeschränkten Möglichkeiten der Lösung sind weniger dafür geeignet, ein Beziehungsgefüge zwischen den bearbeiteten Problemen und dem erworbenen Wissen aufzubauen. Dagegen können offenere Fragestellungen einen langfristigeren Lernerfolg bedeuten und durch das erneute Aufwerfen von Problemen direkt ein Beziehungsgefüge herstellen. Zuletzt hat die *Selbstständigkeit* der Schüler bei der Bearbeitung von Problemen den Vorteil, dass diese aus erster Hand Erfahrungen sammeln. Lösungshinweise lassen sich nur dann sinnvoll einsetzen, wenn die Lernenden die Möglichkeit haben, sich vorher ausreichend selbst mit dem Problem zu befassen, jedoch ohne eine Hilfestellung kein Fortschreiten der Lösung erfolgt und sich so Frustration einstellen würde. Die gestellten Problemaufgaben müssen damit einerseits genug Raum für Entdeckungen bieten, andererseits auch die Möglichkeit beinhalten, gewisse Denkanstöße zu geben, ohne bereits die vollständige Lösung zu offenbaren.

3 Begründen, Argumentieren und Beweisen

3.1 Was ist ein Beweis

Während die Begriffe *Begründen* und *Argumentieren* im Alltag durchaus geläufig sind, wenn es darum geht, andere von Tatsachen oder Aussagen zu überzeugen oder Streitfragen zu klären, ist der Begriff *Beweis* für die meisten Menschen allenfalls vor Gericht ein Thema. In diesem Zusammenhang hat das Beweisen als strenges Argumentieren die Funktion, einen Sachverhalt durch Bewerten der Beweismittel (beispielsweise Zeugenaussagen) mit absoluter Gewissheit zu klären und auf Basis dessen weitere Schlüsse zu ziehen und Entscheidungen zu treffen. Diese Sichtweise auf den Beweisbegriff ändert sich dagegen für Naturwissenschaftler. Diese verstehen im Allgemeinen unter einem Beweis die experimentelle Bestätigung einer (meist empirisch) aufgestellten These. Diese wird dann als naturwissenschaftliches Gesetz akzeptiert und kann zu einer naturwissenschaftlichen Theorie erweitert werden. Aufbauend auf dieser, entstehen dann weitere Hypothesen, Gesetze und Theorien.

3.1.1 Definition der Begriffe Begründen, Argumentieren und Beweisen

Im Vergleich zu den oben genannten Begriffsverständnissen versteht die fachwissenschaftliche Mathematik unter einem *Beweis* die Begründung einer Aussage durch eine logische, lückenlose und schlüssige Argumentationskette (deduktiv) aus bereits bewiesenen Aussagen. Eine bewiesene Aussage kann dann ebenfalls benutzt werden, um weitere Aussagen zu beweisen. Für die Argumentationskette gelten in der Fachwissenschaft strenge, klar definierte Regeln der Logik und eine gewissermaßen vereinheitlichte Darstellungsform für den fertigen Beweis. Grundlegende Aussagen, die keinen Beweis erfordern, nennt man Axiome (vgl. Bruder, Hefendehl-Hebeker u. a. 2015, S. 331 f. und Reiss und Hammer 2013, S. 47). Dieser lückenlose axiomatisch-deduktive Aufbau unterscheidet die Mathematik auch von anderen Naturwissenschaften, da eine bewiesene Aussage für alle Zeit gelten wird, wohingegen empirisch belegte Hypothesen häufig nach einiger Zeit falsifiziert und durch eine andere Theorie korrigiert oder abgelöst werden (vgl. Grieser 2017, S. 2 f.). Die Begriffe der *Argumentation* und des *Begründens* sind dagegen weniger klar festgelegt und auch deren Beziehungen zueinander werden kontrovers diskutiert (vgl. Nagel und Reiss 2016, S. 302 f. und Brunner 2014b, S. 301 f.). Für die vorliegende Arbeit wird der Begriff des *Begründens* als ein Überbegriff für Beweisen und Argumentieren aufgefasst, welcher vor allem das Überzeugen Anderer von der Gültigkeit einer Aussage und die damit verbundenen kommunikativen Aspekte betont. Der Begriff des *Argumentierens* wird, ähnlich zu Reiss und Hammer (2013, S. 53), als eine weniger strenge, abgeschwächte Form des Beweisens aufgefasst. Dabei weisen Argumentieren und Beweisen gewisse Schnittmengen und Gemeinsamkeiten auf, eine wesentliche Differenzierung erfolgt jedoch in der Strenge der Argumentationskette und in den dafür geltenden Regeln und Formalia sowie den verwendeten Begrifflichkeiten. Während bei einem Beweis also der Fokus auf der lückenlosen Begründung einer Aussage liegt, fallen unter den Begriff der Argumentation auch Aspekte wie beispielsweise eine anschauliche Begründung einer Aussage oder deren Zusammenhang zu anderen Teilen der Mathematik. Insgesamt lässt sich festhalten, dass die Begrifflichkeiten Begründen, Argumentieren und Beweisen verschiedene Gesichtspunkte einer ähnlichen

Tätigkeit beschreiben, jedoch der jeweilige Schwerpunkt auf verschiedenen Teilaspekten liegt. Durch Begründen wird das Überzeugen Anderer und die damit verbundene Kommunikationsfunktion betont, wohingegen Argumentieren die Bestätigung einer Aussage sowohl auf anschaulicher als auch abstrakter Ebene beschreibt. Der (formale) Beweisbegriff legt den Fokus explizit auf das lückenlose, strenge Sicherstellen einer Aussage durch eine logische Argumentationskette. Die unspezifische Verwendung des Begriffes „Beweis" soll im Folgenden alle Teilaspekte abdecken und somit gleichermaßen für alle drei Begriffe stehen. Die jeweiligen speziellen Funktionen werden immer dann angesprochen, wenn einer der Begriffe explizit verwendet wird. Auf die Spezifizierung des *formalen* Beweises wird beispielsweise immer dann zurückgegriffen, wenn der Aspekt der logischen Strenge besonders hervorgehoben werden soll.

3.1.2 Notwendigkeit und Funktionen von Beweisen

Zu Beginn eines jeden Beweisprozesses steht grundsätzlich eine Ausgangslage, welche durch fehlende Gewissheit bezüglich der Gültigkeit einer Behauptung charakterisiert werden kann. Diese Ungewissheit bedingt überhaupt erst die Notwendigkeit eines Beweises und stellt für denjenigen, der die Ungewissheit zu beheben versucht, einen kognitiven Konflikt dar. Dabei können nach Reusser (1984) sechs verschiedene Arten eines solchen Konfliktes als Ausgangspunkt für ein Beweisbedürfnis auftreten (vgl. Brunner 2014a, S. 56 f.):

1. Zweifel
2. Perplexität
3. logischer Widerspruch
4. gedankliche Inkongruenz
5. Verwirrung
6. Irrelevanz

Diese kognitiven Konflikte lassen sich bezogen auf das Beweisen wie nachfolgend dargestellt formulieren (vgl. Brunner 2014a, S. 57):
1) Ein strittiger Sachverhalt wird bezweifelt. 2) Ein Verhalten oder eine Struktur erstaunt. 3) Ein neuer Sachverhalt steht zunächst (scheinbar) im Widerspruch zum bereits erworbenen Wissen. 4) Eine gedankliche Inkongruenz irritiert oder führt zum Widerspruch im sozialen Kontext. 5) Ein bisher nicht bekannter Zusammenhang erzeugt Verwirrung. 6) Ein Problem irritiert durch Irrelevanzen.
Jeder dieser kognitiven Konflikte beinhaltet eine Ungewissheit und erzeugt dadurch ein Beweisbedürfnis. Gleichzeitig muss der gefundene Beweis diese fehlende Gewissheit beseitigen. Diese Notwendigkeit spiegelt sich in den Funktionen des Beweises wieder. Während Hersh (1993) lediglich eine überzeugende und eine erklärende Funktion unterscheidet, differenziert De Villiers (1990) die Funktionen weiter aus und wird schließlich von Hanna (2000, 2005) ergänzt (vgl. Brunner 2014a, S. 13 ff., Kuntze 2005, S. 50 ff. und Meyer und Prediger 2009, S. 5):

1. Verifikationsfunktion
2. Erklärende Funktion
3. Kommunikationsfunktion
4. Entdeckende Funktion
5. Systematisierungsfunktion
6. Aufbaufunktion
7. Explorationsfunktion
8. Eingliederungsfunktion

Die *Verifikation* umfasst die Überzeugung von der Richtigkeit eines Satzes oder einer Aussage. Dabei lässt sich nach Tall (1989) nochmals differenzieren in „convincing oneself“, „convincing of a friend“ sowie „convincing of an enemy“. Diese Stufen des Überzeugens machen deutlich, dass es verschiedener Voraussetzungen und Genauigkeiten bedarf, je nachdem, wie kritisch eine Aussage bezweifelt wird. Dabei ist die eigene Überzeugung häufig bereits vor einem eigentlichen Beweis vorhanden, indem mehrere Beispiele die Aussage scheinbar bestätigen, und führt manchmal dazu, falsche Aussagen als wahr anzusehen.

Die *Erklärungsfunktion* eines Beweises legt den Fokus auf die Frage nach dem „Warum?“. Das Ziel besteht darin, zu verstehen, wieso diese Aussage gilt und wie die vorhandenen Voraussetzungen zusammenspielen.

Die Funktion zur *Kommunikation* ergibt sich aus den ersten beiden Funktionen, da sowohl Verifikation als auch Erklärung zu einem großen Teil in einen sozialen Kontext eingebunden sind. Diese soziale Dimension des Beweisens beinhaltet neben mathematischer Kommunikation und dem Austausch von Gedanken und geteiltem Wissen auch eine nötige Akzeptanz des Beweises durch die jeweilige „Community“.[11]

Die *entdeckende Funktion* beschreibt gewisse Erkenntnisse, welche durch den Beweisprozess aufgetreten sind. Somit ist die zugrundeliegende Funktion das Finden neuer Zusammenhänge. Derartige Erkenntnisse können selbst wieder Ansatzpunkte für weitere Beweisaktivitäten darstellen.

Die Funktion der *Systematisierung* beschreibt das Ordnen und Herstellen von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten. Dadurch werden bereits erworbenes Wissen und neue Erkenntnisse in einen größeren Zusammenhang gesetzt.

Die *Aufbaufunktion* steht in direktem Zusammenhang mit der Systematisierung. Durch das Beweisen neuer Aussagen und das Vernetzen mit bereits vorhandenem Wissen können darauf aufbauend weitere Theorien entwickelt werden. Zudem sind durch den Beweis einer Aussage meist neue Werkzeuge verfügbar, durch welche die Mathematik weiterentwickelt werden kann.

Die *Explorationsfunktion* beschreibt das Erkunden von postulierten Zusammenhängen und Definitionen im Hinblick auf mögliche Konsequenzen. Dabei werden gegebenenfalls auch mögliche Folgerungen getroffen und deren Bedeutung untersucht.

Die *Eingliederungsfunktion* beschreibt schließlich die Integration bekannter Tatsachen in neue Rahmenzusammenhänge. Durch diese Einbettung erfolgt oftmals ein Perspektivwechsel, der den Gesamtzusammenhang erweitert (vgl. Brunner 2014a, S. 13 ff., Kuntze 2005, S. 50 ff. und Meyer und Prediger 2009, S. 5 f.).

Insgesamt zeigt sich, dass die einzelnen Funktionen in den seltensten Fällen vollständig unabhängig und klar voneinander abgegrenzt auftreten. Auch sind detailliertere oder weniger starke Untergliederung der Funktionen eines Beweises möglich.[12]

[11] Mit dem Begriff „Community“ wird die soziale Gruppe bezeichnet, für welche der Beweis ausgelegt ist und die überzeugt werden soll. Im fachmathematischen Kontext sind damit andere Mathematiker angesprochen, im schulischen Zusammenhang meist die eigene Klasse.

[12] Einige sind in [Kuntze 2005, S. 50 ff.] aufgeführt. Diese ergänzt er durch eine eigens ausgearbeitete Ausdifferenzierung auf Basis der vorgestellten.

3.1.3 Teilaspekte eines Beweises

Der Beweis und der Beweisprozess sind neben den damit verbundenen Funktionen auch durch verschiedene Teilaspekte charakterisiert. Diese sind nach Brunner (2014a, S. 8 ff.) der *Prozess- und Produktcharakter*, die *formale Strenge*, *Wahrheit und Gültigkeit*, die *Art des Arguments* sowie *Semantik und Syntaktik*.

3.1.3.1 Prozess- und Produktcharakter

Ein Beweis ist im Allgemeinen eine ausgearbeitete Form einer Begründung, die aus den gegebenen Voraussetzungen mittels logischer Schlüsse eine Aussage folgert. Die gegebene Argumentationskette ist meist sehr elegant und auf die wesentlichen Schritte reduziert. Dagegen ist der Beweisprozess häufig geprägt durch verschiedene weitere Tätigkeiten, wie beispielsweise das Explorieren der Aussage und das Verfolgen gewisser Ideen, von denen die meisten wieder verworfen werden, bis schließlich ein „fertiger" Beweis entsteht (vgl. dazu Abschnitt 3.3). Gerade dieser *Prozessaspekt*, den die meisten Beweise mit sich bringen und welcher für die eigentliche Theoriebildung und Beweisfindung in der Mathematik unumgänglich ist, geht durch die Präsentation von fertigen Beweisen (*Produktaspekt*) verloren. Vor allem in der Schulmathematik besteht die Gefahr, dass die gelehrten Beweise ausschließlich als fertiges Produkt dargeboten werden. Dies verhindert einen Einblick in die eigentliche Tätigkeit des Beweisens und der Beweisfindung sowie in den Charakter der Mathematik als Wissenschaftsbereich, welcher neue Erkenntnisse durch Exploration hervorbringt, die erst dann bewiesen werden.

3.1.3.2 Formale Strenge

Ein weiterer Aspekt des Beweisens ist die *formale Strenge*. Dabei stellt sich die Frage, ob jede Aussage durch einen formal-deduktiven Beweis gesichert sein muss, oder ob auch andere, weniger strenge Argumentationen zulässig sind. In der Fachwissenschaft herrscht diesbezüglich Einigkeit, dass eine Aussage generell immer einen formal-deduktiven Beweis erfordert oder ein solcher zumindest theoretisch gegeben werden könnte. Dies stellt sicher, dass eine bewiesene Aussage zum weiteren Aufbau des Theoriegebäudes verwendbar ist. Im schulischen Kontext ist es dagegen häufig sinnvoll, eine weniger strenge Auffassung zu vertreten. Je nach Voraussetzungen und Erfahrungen der Beteiligten kann durch ein entsprechend angepasstes Maß an formaler Strenge der Fokus stärker auf das Verstehen von Zusammenhängen gelegt werden, wobei die Korrektheit der Argumentation durch logische Schlussfolgerungen weiterhin gegeben sein muss.

3.1.3.3 Wahrheit und Gültigkeit

Während die zu beweisende Aussage auf einer inhaltlichen Ebene wahr sein muss, lässt sich die jeweilige Argumentationskette auf die Gültigkeit der einzelnen Schritte hin untersuchen. Für Letzteres müssen die getroffenen Konklusionen nach den Regeln der Logik aus den jeweiligen Prämissen folgen, um als gültig angesehen zu werden. Dagegen hängt die Wahrheit der entsprechenden Aussage bei einer gültigen Argumentation einzig von der Wahrheit der verwendeten Prämissen ab.

3.1.3.4 Art des Arguments

Es lässt sich im Allgemeinen eine Unterscheidung zwischen induktiven und deduktiven Argumenten treffen. Erstere schließen einen allgemeinen Fall aus der Gültigkeit verschiedener Spezialfälle, wogegen zweitere eine allgemeine Aussage benutzen, um verschiedene Einzelfälle zu begründen. Diese beiden Richtungen des Denkens und Schlussfolgerns können genauso auch als Arten des Arguments bei einem Beweis dienen. Während eine deduktive Argumentation unproblematisch ist, besteht für eine induktive Argumentation die Gefahr, aus Spezialfällen Schlussfolgerungen zu treffen, die im Allgemeinen nicht korrekt sind, da beispielsweise nicht alle möglichen Fälle abgedeckt werden.
Auch eine Unterscheidung in offene und geschlossene Argumente ist möglich. Während offene Argumente empirisch auf Erfahrung und Beobachtung basieren, führen geschlossene, theoretische Argumente die Bedingungen, unter denen sie gelten, klar auf. In diesem Aspekt unterscheiden sich alltägliche Argumentationen (offen) von mathematischen Argumentationen (geschlossen). Gerade in der Schulmathematik muss dieser Aspekt berücksichtigt werden, indem Lernende das alltägliche Argumentieren hin zu einem theoretischen Argumentieren überwinden.

3.1.3.5 Semantik und Syntaktik

Der letzte Teilaspekt befasst sich mit der *Semantik und Syntaktik* eines Beweises. Während sich die semantische Ebene auf das inhaltliche Verständnis bezieht, beschreibt die syntaktische Ebene die formale Struktur und die Vorgehensweise. Gerade im schulmathematischen Kontext kann das inhaltliche Verständnis mittels einfacher, alltagsnaher Sprache erzielt werden, während die syntaktische Ebene formale Sprache und Strenge der Schlussfolgerungen erfordert. Da für einen Beweis beide Teilaspekte entscheidend verbunden sind, kann in einem verstehensorientierten Mathematikunterricht zwar ein stärkerer Fokus auf die semantische Ebene gelegt werden, ohne dabei jedoch komplett auf die syntaktische Sichtweise zu verzichten.

3.2 Verschiedene Arten der Begründung

In Abschnitt 3.1.1 wurde bereits erwähnt, dass der Begriff *Beweis* nicht einheitlich verwendet wird und besonders zwischen fachwissenschaftlicher Mathematik und Schulmathematik verschieden strenge Argumentationen möglich sind.

3.2.1 Beweisverfahren in der Fachwissenschaft

In der Fachwissenschaft werden Beweise generell als strikte, formal-deduktive Ketten von Argumenten aufgefasst. Die zugehörigen Regeln bilden die Aussagen der Logik. Daraus ergeben sich grundsätzlich vier unterschiedliche Beweisverfahren in einem (fachwissenschaftlichen) Beweis, welche das jeweilige Vorgehen einer Vielzahl von Beweisen repräsentieren (vgl. Gerwig 2015, S. 30):
Bei einem *direkten Beweis* wird eine Behauptung auf direktem Weg aus den Voraussetzungen bewiesen. Diese werden dabei auf geeignete Weise miteinander verknüpft, um verschiedene Zwischenbehauptungen zu folgern, aus welchen sich schließlich durch erneutes Kombinieren miteinander oder mit den Ausgangsvoraussetzungen weitere Zwischenaussagen ergeben oder die Behauptung folgt. Dieses Verfahren weist gewisse Ge-

meinsamkeiten mit dem Heurismus des *Vorwärtsarbeitens* bei Problemlöseprozessen auf (Abschnitt 2.4.2.2).

Ein *indirekter Beweis* zeigt die Gültigkeit der Aussage dadurch, dass die Annahme des Gegenteils einen Widerspruch (beispielsweise zu den Voraussetzungen) hervorruft. Da die Aussage entweder wahr oder falsch sein kann, beweist der entstehende Widerspruch unter der getroffenen Annahme, dass die Behauptung nicht nicht gelten kann.

Im *Beweis durch Kontraposition* wird gezeigt, dass das Gegenteil der Behauptung das Gegenteil der Voraussetzungen impliziert. Dies entspricht der Folgerung der Behauptung aus den Voraussetzungen.[13] Das Beweisen der Kontraposition erfolgt dabei im Allgemeinen direkt.

Durch das Verfahren der *vollständigen Induktion* lässt sich eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen. Allgemein wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass eine Aussage für ein allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt, auch die Aussage für $n+1$ gelten muss. Zusätzlich wird die Gültigkeit der Aussage für einen konkreten Startwert, beispielsweise $n = 0$ oder $n = 1$ nachgewiesen. Die Gültigkeit für alle anderen Werte folgt dann aus der allgemein bewiesenen Aussage.

3.2.2 Verschiedene Beweisarten in der Schule

Neben dem fachwissenschaftlichen Beweis sind Argumentationen und Beweise im schulmathematischen Kontext weniger strikt definiert. In der Literatur werden deshalb verschiedene Klassifikationen diskutiert, welche eine Abstufung in der Abstraktion oder eine Unterscheidung zwischen den im Beweis verwendeten Anschauungsebenen zugrunde legen. Verschiedene Untergliederungen sind im Folgenden erläutert (vgl. Brunner 2014a, S. 16 ff.).

Eine mögliche Ausdifferenzierung nach Balacheff unterscheidet *pragmatische* und *intellektuelle* Beweise. Erstere erfolgen auf Basis der Verifikation der Aussage durch Experimentieren anhand von Beispielen. Zweitere arbeiten dagegen mit Spezialfällen oder mentalen Operationen. Eine ähnliche Ausdifferenzierung in *Handlungsbeweise* und *Beziehungsbeweise* treffen Fischer und Malle. Dabei verwenden die ersteren konkrete Handlungen und Operationen, um eine Aussage zu verifizieren. Die Beziehungsbeweise untersuchen dagegen die Struktur, vorwiegend mit symbolischen und formalen Mitteln, um die Behauptung zu beweisen.

Eine stärker ausdifferenzierte Klassifikation treffen Wittmann und Müller (vgl. Brunner 2014a, S. 17 ff. und Brunner 2014b, S. 233 f.). Sie unterscheiden zwischen *experimentellen Beweisen*, *operativen* (bzw. *inhaltlich-anschaulichen*) *Beweisen* und *formal-deduktiven Beweisen*. Ein experimenteller Beweis ähnelt dabei den pragmatischen Beweisen nach Balacheff, da hier eine Veranschaulichung, Plausibilitätsbetrachtung, empirische Verifikation und eine Suche nach Regelmäßigkeiten an konkreten Beispielen erfolgt. Ein solcher Beweis ist kein Beweis im eigentlichen Sinne, da keine absolute Gewissheit über die Allgemeingültigkeit gefolgert werden kann. Durch diese Struktur der experimentellen Beweise ist dieser (im Schulkontext) besonders für jüngere und weniger leistungsfähige Lernende geeignet, da keine logischen Schlüsse getroffen und formale Zusammenhänge hergestellt werden müssen und dennoch ein Zugang zu einer Auseinandersetzung mit der Aufgabe geschaffen wird.

[13] Dabei wird die Äquivalenz der Implikationen $(A \Rightarrow B)$ und $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ ausgenutzt.

Ein operativer (bzw. inhaltlich-anschaulicher) Beweis stützt sich auf Operationen, die nicht nur für einzelne Beispiele sondern für eine ganze Klasse von Beispielen gültig sind. Diese allgemeinere Gültigkeit ist dabei intuitiv erkennbar und wird nicht formal begründet, sondern es wird häufig durch anschauliche Handlungen (vgl. Handlungsbeweise nach Fischer und Malle) an „quasi-realen“ mathematischen Objekten argumentiert (vgl. Wittmann 2014, S. 226 f.). Diese Operationen folgen meist korrekten, formalen Argumenten und bieten dadurch die Möglichkeit, zu einem formalen Beweis erweitert zu werden. Daher ist häufig die Rede von *präformalen Beweisen* (vgl. Wittmann 2014, S. 227). Um den Beweis für Andere verständlich zu machen, gilt es, die Operation entweder zu versprachlichen, mit entsprechend bekannten anschaulichen Mitteln darzustellen oder diese durch Andere konkret durchführen zu lassen. Dennoch eignen sie sich durch ihre Anschaulichkeit besonders gut im schulischen Kontext und zur Kommunikation der entscheidenden Ideen.
Ein formal-deduktiver Beweis in der Schule entspricht dem fachwissenschaftlichen Verständnis von Beweisen. Eine Aussage wird in einem Prozess durch strenge, logische Schlüsse mittels formaler, algebraischer Sprache aus anderen Aussagen abgeleitet. Dieser Beweistyp ist aufgrund der benötigten Fähigkeit zur Abstraktion sowie der Kenntnisse und Erfahrungen im Treffen logischer Schlüsse eher für erfahrene Lernende geeignet. Die Kommunikation eines solchen Beweises ist nur dann möglich, wenn das Gegenüber ebenfalls über ausreichend Erfahrung mit den formalen Aspekten und logischen Argumentationen verfügt, da bei derartigen Beweisen häufig die Anschaulichkeit der Argumentation verloren geht und die Bedeutung der formalen Argumente erst zurückübersetzt werden muss.
Die Klassifikation nach Wittmann und Müller bietet besonders die Vorteile, sowohl die Prozess- als auch die Produktebene eines Beweises zu erfassen und gleichzeitig verschiedene Repräsentationen des Denkens aufzunehmen. Vom experimentellen, über den operativen, hin zum formal-deduktiven Beweis steigen sowohl der Abstraktionsgrad, als auch der Formalisierungsgrad an. Dies ermöglicht im schulischen Kontext einen Zugang vom konkreteren Begründen zum abstrakten Beweisen, indem Beweise auf einer zunehmend höheren Repräsentations- und Sprachebene, je nach Kenntnisstand der Lernenden, betrachtet werden. Außerdem wird der Denkprozess eines Mathematikers, welcher häufig ebenfalls ausgehend von einer Exploration an Beispielen zu einer allgemeinen Aussage gelangt, gut abgebildet (vgl. Brunner 2014a, S. 19).

3.3 Beweismodelle

Ein Beweis ist im weitesten Sinne gleichzeitig ein Problemlöseprozess, welcher als Ziel die Verifikation der Behauptung und als zu überwindendes Hindernis die Suche und Kombination geeigneter Argumente besitzt. Damit lassen sich die in Abschnitt 2.3 diskutierten Modelle zum Problemlösen generell auch für einen Beweisprozess anwenden. Um jedoch die Besonderheiten und charakteristischen Prozesse eines Beweises stärker herauszuheben, die ihn von allgemeinen Problemlöseprozessen unterscheiden, existieren in der mathematikdidaktischen Literatur spezielle Beweismodelle. Im Folgenden werden deshalb die Modelle von Boero (1999, S. 7), Reiss und Ufer (2009, S. 162) sowie von Brunner (2014, S. 72) vorgestellt.

3.3.1 P. Boero (1999)

Boero beschreibt die Aktivitäten, welche bei der Konstruktion eines Beweises ablaufen, in den nachfolgend aufgelisteten Phasen (vgl. Boero 1999, S. 7 f., Nagel und Reiss 2016, S. 303 und Reiss, Hellmich und Thomas 2002, S. 53).

1. Entwicklung einer Behauptung und Identifikation möglicher Argumente
2. Formulierung einer Behauptung, die den formalen Konventionen entspricht
3. Exploration der Hypothese und möglicher Argumentverknüpfungen
4. Auswahl von Argumenten und ihre Verknüpfung in einer Kette von Deduktionsschlüssen
5. Organisation der Argumente in einem Beweis
6. Annäherung an einen formalen Beweis

Dabei betont er, dass diese Phasen nicht linear ablaufen müssen. Beispielsweise können Fehler in höheren Phasen auffallen und dazu führen, in eine der früheren Phasen zurückkehren zu müssen. Zudem teilt er die Phasen in eher öffentliche (entsprechend dem Produktcharakter eines Beweises) und eher private Phasen (Prozesscharakter) ein (vgl. Boero 1999, S. 8). Im Folgenden wird eine genauere Beschreibung der Inhalte einzelner Phasen gegeben (vgl. Boero 1999, S. 7 f. und Kuntze 2005, S. 57 f.).
Die erste Phase beschreibt einen Explorationsprozess in einem mathematischen Problembereich, welcher eher zur privaten Seite der Arbeit eines Mathematikers zählt. Hierbei werden vor allem empirische, induktive Denkschritte genutzt, um eine Behauptung aufzustellen und sich von der Korrektheit dieser zu überzeugen (erste Stufe der Verifikationsfunktion, vgl. Abschnitt 3.1.2). Zudem können bereits erste Muster erkannt und mögliche Argumente für eine spätere Begründung identifiziert werden. Auch bei der Untersuchung einer bereits gegebenen Behauptung beginnt der Problemlöse- und Beweisprozess im Allgemeinen mit einer solchen Untersuchung.
Die zweite Phase dient der Formulierung der aus Phase 1 resultierenden Behauptung. Diese soll den formalen Konventionen der zugrundeliegenden Community entsprechen und später als „publizierbarer Text" (Boero 1999, S. 7) verwendbar sein. Diese strenge Formulierung dient dabei gerade für die anschließenden Beweisphasen als Anhaltspunkt, welcher eine Strukturierung des Beweisproblems ermöglicht. Ausgehend von dieser Behauptung können dann Anknüpfungspunkte zum vorhandenen Wissen untersucht werden.
Die dritte Phase, welche ebenfalls zu den privaten Schritten im Beweisprozess zählt, beschreibt eine von der aufgestellten These und dem zur Verfügung stehenden Wissen ausgehende Exploration. Dabei werden die Grenzen der Gültigkeit der Behauptung gerade für Spezialfälle geprüft, passende Argumente für die Begründung durch Verwendung von Heurismen herausgearbeitet und Verknüpfungen zwischen den möglichen Argumenten hergestellt. Gerade in dieser Phase ist ein Wechsel zwischen induktiven und deduktiven Denkschritten charakteristisch.
Die vierte Phase des Beweisprozesses dient der Vorbereitung der Beweisformulierung. Mögliche Argumente werden nach Relevanz geordnet und in einer Argumentationskette

arrangiert. Damit ist diese Phase zielgerichteter auf die Ordnung und Strukturierung hin zu einem tragfähigen Beweis ausgerichtet. Gerade im Rahmen fachwissenschaftlicher mathematischer Arbeit werden die Ergebnisse dieser Phase für den (öffentlichen, eher informellen) Austausch mit Kollegen, beispielsweise in Form von Seminaren, genutzt (zweite Stufe der Verifikationsfunktion, vgl. Abschnitt 3.1.2).
Die fünfte Phase beschreibt die Organisation der gefundenen Argumente in einem Beweis, dessen formale Gestaltung den aktuellen Standards entspricht. Dieses Produkt wird dann in der jeweiligen Community veröffentlicht und soll dadurch auch andere Mathematiker überzeugen. Dies entspricht der höchsten Stufe der Verifikationsfunktion (Abschnitt 3.1.2). Für diesen Zweck wird ausschließlich die deduktive Argumentationskette inklusive der verwendeten Voraussetzungen expliziert. Auch die anderen Funktionen des Beweisens in Abschnitt 3.1.2 sind durch das Produkt dieser Phase gegeben.
Die sechste Phase, welche häufig nicht erreicht wird, beschreibt eine Annäherung an einen formalen Beweis, welcher sich durch eine elementarlogische Darstellung der deduktiven Argumentationskette auszeichnet. Diese detaillierte Ausführung aller Schritte ist generell nicht nötig, um die Funktionen in Abschnitt 3.1.2 zu erfüllen, insbesondere werden diese nicht benötigt, um die Gültigkeit der Aussage nachzuweisen. Dies gilt vor allem für immer komplexer werdende Aussagen der heutigen Fachwissenschaft. Durch eine Ausführung der Details würden die relevanten Schritte des Beweises untergehen.

3.3.2 K. Reiss und S. Ufer (2009)

Das in Abschnitt 3.3.1 dargestellte Beweismodell wird durch Reiss und Ufer (2009, S. 162) um eine weitere, siebte Stufe erweitert. Es resultieren die nachfolgend dargestellten Phasen:

1. Finden einer Vermutung aus dem mathematischen Problemfeld heraus
2. Formulieren der Vermutung nach den üblichen Standards
3. Exploration der Vermutung inklusive der Grenzen ihrer Gültigkeit, Herstellen von Bezügen zur mathematischen Rahmentheorie, Identifizieren geeigneter Argumente zur Stützung der Vermutung
4. Auswahl von Argumenten, sowie Organisation dieser in einer deduktiven Kette zu einem Beweis
5. Fixierung der Argumentationskette nach aktuellen mathematischen Standards
6. Annäherung an einen formalen Beweis
7. Akzeptanz durch die mathematische Community

Die dargestellten Phasen $1-6$ entsprechen inhaltlich denen Boeros (1999) und beschreiben den individuellen Denk- und Arbeitsprozess eines idealtypischen Vorgehens von Experten beim Finden und Beweisen einer Aussage. Reiss und Ufer (2009) ergänzen durch die siebte Phase dabei explizit den sozialen Bezugsrahmen eines Beweises, welcher im ersten Modell nur implizit auftritt, und betonen dadurch die Validierungsaspekt, welchen ein Beweis durchläuft (vgl. Brunner 2014a, S. 61).

3.3.3 E. Brunner (2013)

Brunner (2014, S. 72) beschreibt den Prozess (schulischen) Beweisens im *kognitionspsychologischen Prozessmodell des mathematischen Beweisens* (vgl. Abbildung 6). Dieses ist weniger klar in einzelne deskriptive Phasen aufgeteilt, setzt dafür gewisse Prozesse während des Beweisens in Beziehung und ordnet diese in einen psychologischen Kontext ein.

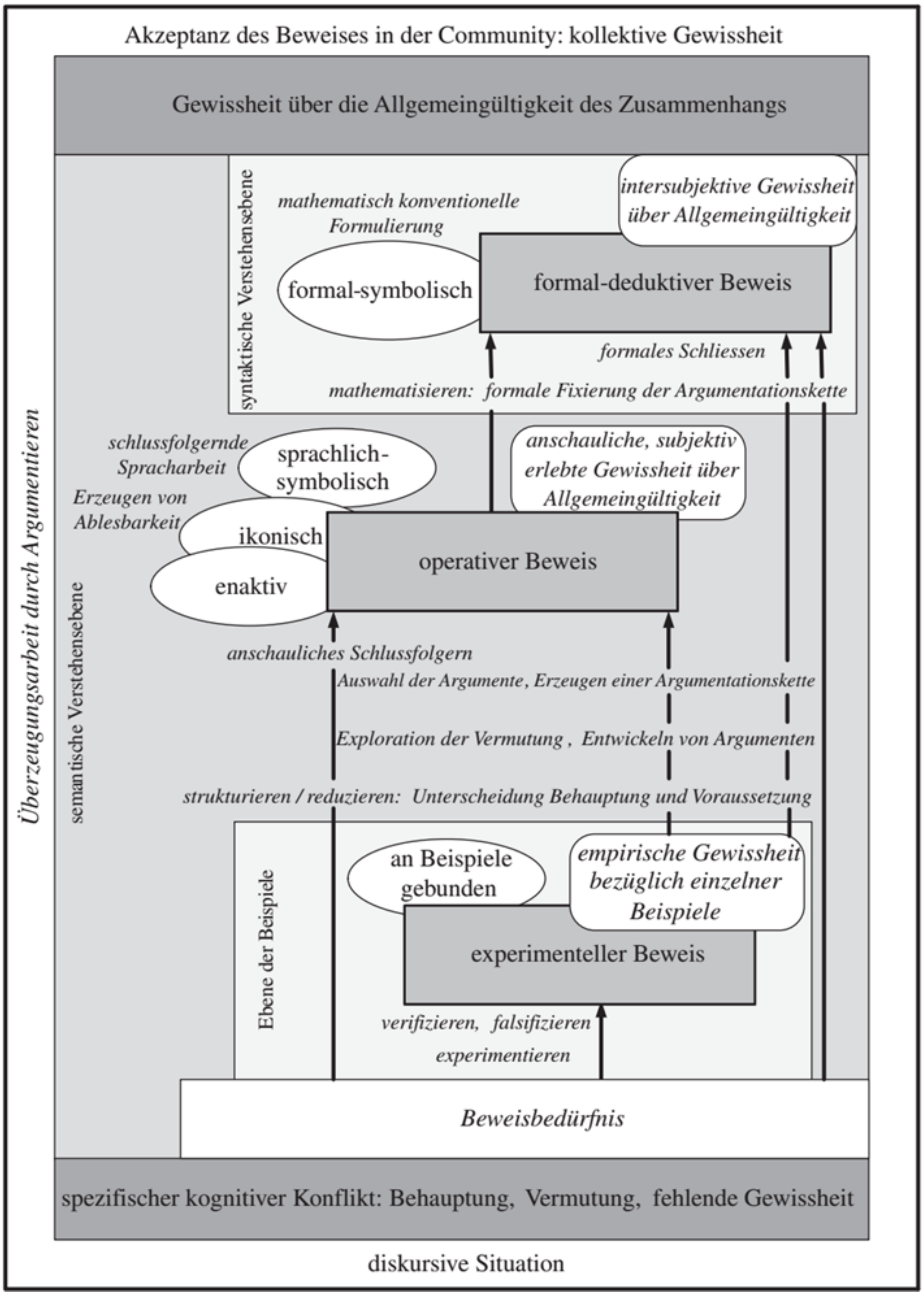


Abbildung 6: Prozessmodell des mathematischen Beweisens nach Brunner (2013) (vgl. Brunner 2014a, S. 72).

Insgesamt umfasst das Modell den sozialen Rahmen, in dem das Beweisen stattfindet, beleuchtet jedoch gleichzeitig die Denkprozesse und Handlungen, welche auf der individuellen Ebene durchlaufen werden. Als Ziel des Beweisens wird die Begründung einer Behauptung oder Vermutung oder das Klären strittiger Standpunkte genannt. Da sich dieses stets in einem sozialen Kontext abspielt, bildet dieser den Rahmen des Beweisprozesses. Um das gegebene Ziel zu erreichen, muss die Community in einem sozialen Aushandlungsprozess mittels (einfacher oder logischer, formal-deduktiver) Argumente überzeugt werden, indem entweder ein Konsens gefunden oder eine plausible Begründung gegeben wird. Auf der Individualebene wird das Beweisbedürfnis durch einen spezifischen kognitiven Konflikt der subjektiven Ungewissheit ausgelöst. Ausgehend von diesem folgt ein Prozess des Suchens, Überprüfens und Begründens. Dieser endet schließlich durch gewisse Schlussfolgerungen, die aus der empirischen Untersuchung von Beispielen oder Gegenbeispielen gezogen werden, in einer (individuellen, subjektiven) Gewissheit, welche stets an die untersuchten Beispiele gebunden ist. Die Überprüfung der Behauptung über diese *Ebene der Beispiele* hinaus erfordert eine Strukturierung und Reduzierung der Bedingungen und eine Abgrenzung von der Behauptung. Daran schließt sich die Exploration der Vermutung an. Hierbei werden Argumente entwickelt und in einer Argumentationskette verbunden, um plausible Schlussfolgerungen zu ziehen und die Allgemeingültigkeit der Aussage zu begründen. Die verwendeten Argumente basieren auf realen oder anschaulichen Objekten und es resultiert ein *operativer Beweis*. Die Kommunikation über gefundene Argumente erfolgt auf einer sprachlich-symbolischen Ebene. Diese Argumentationskette kann daran anschließend durch Mathematisierung in einen formal-deduktiven Beweis überführt werden, indem die Argumente von der anschaulicheren Ebene in eine formal-symbolische Ebene transformiert werden. Dieser Beweis erlangt dadurch für alle intersubjektive Gewissheit, welche die verwendete formal-symbolische Ausdrucksweise beherrschen. Am Ende des Beweisprozesses steht damit die Gewissheit über die Allgemeingültigkeit der Aussage, auch wenn diese nicht zwangsläufig durch einen formal-deduktiven Beweis gegeben sein muss, sondern ein operativer Beweis häufig ausreicht, um die Community von der Gültigkeit zu überzeugen. Damit ist auch die jeweilige Formulierung und Darstellung des Beweises auf sprachlicher und symbolischer Ebene variabel und abhängig vom sozialen Kontext. Generell ist der Beweisprozess dabei nicht linear aufzufassen. Rückschritte im Modell sind möglich und fehlerhafte Argumentationsketten können wieder verworfen werden. Genauso ist das Überspringen einzelner Phasen oder Teilschritte möglich. Dagegen sind die Gewissheit über die Allgemeingültigkeit und die Akzeptanz der Gültigkeit durch die Community zwingend notwendig, um den Beweisprozess abzuschließen. Auf der Individualebene ist der fundamentale Erkenntnissprung immer dann gegeben, wenn ein Übergang von der experimentellen, an Beispiele gebundenen Ebene durch Umstrukturierung des Wissens und Erkundung der Zusammenhänge auf die allgemeingültige Ebene erfolgt (vgl. Brunner 2014a, S. 72 ff.).

3.3.4 Diskussion der dargestellten Beweismodelle

Die dargestellten Beweismodelle weisen in ihren Grundzügen sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede auf. Vor allem die Modelle von Boero (1999) und Reiss und Ufer (2009) unterscheiden sich wenig, da letzteres nur eine Erweiterung des erstgenannten darstellt. Aus diesem Grund wird nur auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Modelle von Reiss und Ufer (2009) und Brunner (2013) eingegangen.
Der grundsätzliche Unterschied der beiden Modelle liegt in der angesprochenen Personengruppe und der Art des Beweises. Das Modell von Reiss und Ufer (2009) beschreibt den Prozess, der bei der Findung eines formal-deduktiven Beweises stattfindet, und spricht damit vor allem fachwissenschaftliche Mathematiker an. Obwohl in der dritten Phase auch induktives Suchen und die Exploration der Aussage und der Voraussetzungen mithilfe von Heurismen möglich ist, wird schon in der zweiten Phase eine Vermutung formuliert, die formalen Standards entspricht und schließlich ab Phase 4 deduktiv argumentiert und diese Argumentationskette formal-symbolisch dargestellt (vgl. Brunner 2014a, S. 61 f.). Dagegen fokussiert das Modell von Brunner (2013) in den zentralen Phasen des individuellen Beweisprozesses explizit die verschiedenen Ebenen, auf denen die Behauptung untersucht wird. Es wird differenziert zwischen der Ebene der Beispiele, einem operativen Beweis und schließlich einem formal-deduktiven Beweis. Dies erscheint besonders in Bezug auf die angesprochene Personengruppe (Schülerinnen und Schüler) und den schulischen Rahmen des Beweisens und Argumentierens sinnvoll, da diese Phasen bei Personen mit wenig Erfahrung und Expertise im Beweisen generell durchlaufen werden und daher als Anhaltspunkt verwendet werden können.
Ein weiterer Unterschied der beiden Modelle liegt in den Phasen vor der eigentlichen Beschäftigung mit der zu beweisenden Aussage. Reiss und Ufer (2009) beschreiben hierbei vor dem eigentlichen Beweisprozess eine Phase, welche einer Problemfindung entspricht und als Ziel das Aufstellen einer zu beweisenden Aussage hat. Diesen Prozess der Hypothesenbildung beschreibt Brunner (2013) dagegen nicht näher, sondern setzt das Vorliegen eines kognitiven Konfliktes voraus. Dies erscheint im Rahmen der oben bereits erwähnten Unterschied der jeweils angesprochenen Personengruppen sinnvoll. Während für einen fachwissenschaftlichen Mathematiker die Problemfindung ein Bestandteil des Beweisprozesses ist, werden im schulischen Rahmen häufig zu begründende Aussagen in Form von Aufgabenstellungen oder Arbeitsanweisungen vorgegeben. Im Sinne eines an der fachwissenschaftlichen Arbeitsweise orientierten Mathematikunterrichts ist diese fehlende Phase in Brunners Modell kritisch zu betrachten und eine Aufnahme in das Modell als optional zu durchlaufende Phase, bevor eine diskursive Situation vorliegt oder um eine solche zu erzeugen, erscheint sinnvoll.
Der Teilaspekt, dass ein Beweis im Allgemeinen stets in einem sozialen Kontext steht und dazu dient, eine Community zu überzeugen, führt zu einem weiteren Unterschied der beiden Modelle. Reiss und Ufer (2009) fassen diesen Prozess der Akzeptanz durch die Community als eigenständige Phase, die sich an den individuellen Beweisprozess anschließt. Dies suggeriert die Unabhängigkeit des individuellen Beweisprozesses von der sozialen Komponente. Brunner (2013) hingegen fasst die soziale Komponente als eine Rahmenbedingung auf, in welcher der Beweisprozess stattfindet. Diese Sichtweise greift die Tatsache auf, dass gerade im Unterricht die jeweilige Ausprägung der formalen Strenge eines Beweises vom jeweiligen Ziel abhängt. So muss nicht immer ein formal-

deduktiver Beweis als Endprodukt entstehen, wenn die Community bereits durch einen operativen Beweis überzeugt werden kann und die Allgemeingültigkeit der Aussage sichergestellt ist. Auch diese Unterscheidung der beiden Modelle erscheint kontextbezogen sinnvoll, da in der fachwissenschaftlichen Mathematik eine Aussage als absolut gesichert gelten muss, um darauf weitere theoretische Überlegungen aufzubauen, und im Allgemeinen ein einheitlicher Maßstab für Formalia und Strenge des Beweises durch die Community gegeben ist. Im schulmathematischen Kontext gilt es vor allem, das Verständnis über die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Bestandteilen des Beweises und den Grund für die Gültigkeit herauszuarbeiten, weniger ein formal-symbolisches Endprodukt zu generieren, ohne dadurch einen Mehrwert an Verständnis zu gewinnen. Dies steht auch mit der bereits erwähnten Tatsache in Verbindung, dass schulische Beweise selten vollständig neuartige Aussagen begründen, welche der Ausbildung neuer Theorie dienen, sondern die Aussagen bereits vielfach formal bewiesen sind.
Neben diesen Unterschieden überschneiden sich die beiden dargestellten Modelle bezüglich verschiedener Tätigkeiten im Beweisprozess nahezu vollständig, wenn auch teilweise mit unterschiedlichen Schwerpunkten. Beide Modelle sind grundsätzlich geeignet, um Beweisprozesse zu beschreiben und geben Anhaltspunkte für einen Prozessablauf, auch wenn sie jeweils in verschiedenen Kontexten Vor- und Nachteile besitzen.

3.4 Grundlegende Schwierigkeiten beim Beweisen

Studien mit Schülern zeigen Defizite im Verstehen, Konstruieren und Verifizieren der Richtigkeit von Beweisen. Dabei verlassen sie sich eher auf empirische Überprüfung als korrekte Beweise zu konstruieren (vgl. Reiss und Renkl 2002, S. 29).
Die Gründe für die bestehenden Schwierigkeiten ergeben sich durch die spezielle und häufig auch ungewohnte Struktur eines Beweises und die zahlreichen Teilaspekte, die es zu berücksichtigen gilt. Grundsätzliche Probleme beim Beweisen entstehen durch *mangelndes inhaltliches und methodisches Vorwissen*. Um eine Behauptung zu beweisen, ist es nötig, das dafür erforderliche mathematische Fachwissen zu beherrschen sowie die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Teilaspekten zu verstehen (vgl. Brunner 2014a, S. 85 f.). Zusätzlich benötigen Lernende Wissen über Methoden des mathematischen Argumentierens und zur Beweisfindung. Im traditionellen Unterricht werden diese Kenntnisse über den Prozess, in dem ein Beweis entwickelt wird, jedoch nur selten vermittelt, da nur das formal richtige Endprodukt des Beweises dargestellt, die Erkundung des Problemfelds, der Denkprozess beim Finden und Kombinieren der Argumentationskette sowie verwendete Heurismen und Beweisarten nicht aufgeführt werden (vgl. Reiss, Hellmich und Thomas 2002, S. 53).
Ein weiteres Problem, welches vor dem eigentlichen Beweisprozess steht, ist häufig eine *motivationale und emotionale Barriere*. Hierzu zählt einerseits ein mangelndes Beweisbedürfnis, welches immer dann entsteht, wenn eine Aussage keinen ausreichenden kognitiven Konflikt erzeugt. Behauptungen, welche „offensichtlich richtig“ sind, werden ohne eine Überprüfung oder Untersuchung von Spezialfällen als wahr angenommen und nicht hinterfragt (vgl. Brunner 2014a, S. 85 und Meyer und Prediger 2009, S. 10). Auch können vorherige negative Erfahrungen mit und eine ablehnende Einstellung zu (Problemlöse- und) Beweisprozessen ein Hindernis darstellen. Während Freude am Lö-

sen von Knobelaufgaben und herausfordernden Problemen eine positive Wirkung auf die Motivation besitzt, wirken sich Misserfolge und die damit verbundene Angst vor erneutem Scheitern eher negativ aus. Da Beweisen ein Prozess ist, in dem Fehler gemacht werden, um schließlich eine Erkenntnis zu erlangen, ist eine tolerante Fehlerkultur unabdingbar (vgl. Brunner 2014a, S. 85).
Die für einen Beweis charakteristischen *Formalia* bilden ein weiteres Problemfeld. Um eine informelle Idee der Begründung in einen formal-deduktiven Beweis zu übersetzen, benötigt es einerseits Kenntnis von mathematischen Konventionen und Begrifflichkeiten, welche eine eigene, beweisspezifische sprachliche Struktur ergeben. Diese muss von den Beteiligten beherrscht werden, um Beweise selbst zu formulieren oder Beweise Anderer zu verstehen (vgl. Brunner 2014a, S. 85). Zusätzlich muss der Lernende einen sicheren Wechsel zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene beherrschen, da der Inhalt gegebener Behauptungen in formaler Sprache verstanden werden muss. Andererseits müssen inhaltlich erarbeitete Argumente oder operative Beweise in formale Sprache übersetzt werden (vgl. Brunner 2014a, S. 85). Gerade das Verstehen und Benutzen von Quantoren, formalen Definitionen und speziellen Notationen bereitet dabei häufig Probleme (vgl. Ottinger, Ufer und Kollar 2016, S. 1 ff.). Zuletzt beeinflussen die formalen Besonderheiten die Überprüfung eigener und fremder Beweise. Ein formales Argument hat eine hohe Überzeugungskraft, sobald dieses auf syntaktischer Ebene korrekt formuliert ist, da häufig die semantische Ebene und damit die eigentliche inhaltliche Korrektheit des Arguments nicht überprüft wird. Auch hier ist der Wechsel von sprachlicher zu inhaltlicher Ebene das eigentliche Hindernis (vgl. Brunner 2014a, S. 85).
Das letzte Problemfeld ergibt sich aus den eigentlichen Tätigkeiten im Beweisprozess, der *Beweisfindung und Logik* (vgl. Meyer und Prediger 2009, S. 11). Während kleinere Schwierigkeiten beim Unterscheiden von Behauptung und Voraussetzung, beim Vermeiden von Zirkelschlüssen, beim Stützen auf nicht verifizierte Prämissen aus der Anschauung und dem Alltag (vgl. Brunner 2014a, S. 85) oder beim Erkennen von strukturellen Ähnlichkeiten zu bereits bearbeiteten Aufgaben (vgl. Collet 2009, S. 20) auftreten, stellt das Finden einer logischen Schlusskette, das Zusammensetzen mehrschrittiger Begründungen sowie hypothetisches Denken ein schwerwiegenderes Problem dar (vgl. Ottinger, Ufer und Kollar 2016, S. 1 ff.). Eine weitere Schwierigkeit liegt in einem inadäquaten metawissenschaftlichen Verständnis zum Beweisen. Dies zeigt sich häufig dadurch, dass induktiv gewonnene Erkenntnisse überinterpretiert werden (vgl. Reiss, Hellmich und Thomas 2002, S. 53). Als Folge werden Hypothesen übereilt aufgestellt und an diesen festgehalten, teilweise selbst dann, wenn die empirische Evidenz durch ein Gegenbeispiel falsifiziert wurde (vgl. Heinze 2007, S. 9, Meyer und Prediger 2009, S. 9 und Brunner 2014a, S. 85). Dagegen stellt das Widerlegen von Aussagen vergleichsweise geringe Herausforderungen für Lernende dar (vgl. Ottinger, Ufer und Kollar 2016, S. 1 ff.), wenngleich das Identifizieren falscher Aussagen problematisch ist (vgl. Reiss, Hellmich und Thomas 2002, S. 58). Auch die Beurteilung von Beweisen in Bezug auf deren Korrektheit und Eleganz ist im Vergleich zum eigenständigen Entwickeln von Beweisen vergleichsweise einfach (vgl. Reiss, Hellmich und Thomas 2002, S. 58).

3.5 Zusammenhang zwischen Problemlösen und Beweisen

Ein Zusammenhang zwischen dem in Kapitel 2 erläuterten Problemlösen und dem Beweisen lässt sich herstellen, indem die zu beweisende Aussage als Ziel des Problems und bereits bekannte Definitionen, Algorithmen und bewiesene Sätze als Voraussetzungen des Problems aufgefasst werden. Der Bereich zwischen diesen Anfangs- und Endzuständen, welcher durch den zu findenden Beweis geschlossen wird, stellt das zu lösende Problem dar. Die Barriere, welche dabei überwunden werden muss, besteht darin, eine zielführende Kombination der Voraussetzungen zu finden und Verknüpfungen zum vorhandenen Wissen herzustellen. Häufig geht ein Beweisprozess auch mit einer entscheidenden Idee einher, ähnlich derer beim Problemlösen.
Damit sind auch die in Abschnitt 2.3 und 3.3 dargestellten Modelle zum Problemlösen und Beweisen konkret verbunden. Vor allem die tatsächlichen Problemlöse- und Beweisprozesse, so beispielsweise die Phasen *Ausdenken eines Plans* und *Ausführen des Plans* von Pólyas Modell (oder gleichermaßen Exploration und Implementation bei Schoenfeld), entsprechen den Phasen 3 und 4 bei Boero (1999) oder bei Reiss und Ufer (2009). Andererseits existieren in den jeweiligen Modellen auch gewisse Phasen, die sich weniger stark überlappen und bestenfalls gegenseitig ergänzen können. Ein geeignetes Beispiel ist das Aufstellen eines übergeordneten Lösungsplanes (vgl. Schoenfeld, Abschnitt 2.3.4) oder eine Rückschau (vgl. Pólya, Abschnitt 2.3.3). Auch wenn ein Beweis nach den Modellen von Reiss und Ufer (2009) bzw. von Brunner (2013) eine Verifikation während des Beweisprozesses und eine weitere Überprüfung und Akzeptanz durch die jeweilige Community durchlaufen muss, findet keine eigentliche Metakognition des Beweisprozesses statt.
Insgesamt können damit Problemlöse- und Beweisprozesse gut miteinander in Verbindung gesetzt werden. Einzelne Phasen und die Verwendung von Heurismen zum Finden einer geeigneten Lösung überschneiden sich. Andere Aspekte, beispielsweise Kontrollstrategien und metakognitive Aktivitäten, können vom Problemlöseprozess übernommen werden und den Beweisprozess bereichern. Andererseits schult ein Beweis durch die Beachtung einer gewissen formalen Strenge die Fähigkeiten zum Treffen logischer (deduktiver) Schlussfolgerungen, was bei Problemen mit weniger strikt vorgegebenen Voraussetzungen helfen kann, geeignete Strategien zu wählen und diese konsequent zu verfolgen und zu hinterfragen.

4 Umsetzung einer Problemlöse- und Beweiskultur im Unterricht

Die theoretischen Grundlagen der vorhergehenden Kapitel zum Problemlösen und Beweisen werden im Folgenden aufgegriffen, um eine unterrichtliche Umsetzung von Problemlöse- und Beweisprozessen zu diskutieren. Dabei wird in der vorliegenden Arbeit aufgezeigt, wie Problem- und Beweisaufgaben angepasst und genutzt werden können, um einzelne Aspekte der Themenbereiche zu fördern. Durch die strukturelle Ähnlichkeit von Problemlöse- und Beweisprozessen lassen sich Maßnahmen zur Umsetzung häufig in beiden Bereichen anwenden. Dennoch sollen auch die einzigartigen Charakteristika des Beweisens nachfolgend berücksichtigt werden.

4.1 Möglichkeiten der Umsetzung

Problemlösen und Beweisen besitzen als mehrstufige Prozesse im Allgemeinen bereits einen höheren Schwierigkeitsgrad im Vergleich zu (einschrittigen) Routineaufgaben. Dies ist dadurch begründet, dass die Lernenden gleichzeitig mehrere Aspekte der Problemstellung beachten müssen. Dazu zählen der aktuelle Ausgangszustand, der geforderte Zielzustand, die Beziehung dieser beiden Punkte zueinander sowie relevante Einflussfaktoren und mögliche Zwischenziele. Hinzu kommen die ungewohnte Struktur des Problems sowie die nötige geistige Beweglichkeit und Kreativität der Lernenden, welche für das Finden einer Lösung oder Lösungsidee benötigt werden. Gemäß der Cognitive Load Theory ist die geistige Kapazität der meisten Lernenden durch diese Faktoren bereits ausgereizt oder sogar überstrapaziert, obwohl die Aspekte des Verstehens der Problemsituation und die Einführung und Nutzung abstrakter, verallgemeinerbarer Problemlöse- oder Beweisschemata bislang keine Berücksichtigung finden. Daher sollten bei einer unterrichtlichen Umsetzung, gerade für unerfahrene Lernende, Möglichkeiten zur Verfügung gestellt werden, mit denen der Fokus auf Teilaspekte des komplizierten Prozesses gelegt werden kann und erst daran anschließend mehrere Prozessschritte gleichzeitig bearbeitet werden (vgl. Salle 2015, S. 26 und Reiss und Renkl 2002, S. 31).

4.1.1 Anknüpfungspunkte der theoretischen Grundlagen

Die Tatsache, dass Problemlösen und Beweisen strukturell ähnlich sind, impliziert Aspekte, welche für beide Prozesse benötigt werden, um schließlich das gewünschte Ziel zu erreichen. Hierunter fallen in erster Linie die in Kapitel 2.4 dargestellten Heurismen, welche grundsätzlich in beiden Prozessen einen zentralen Bestandteil ausmachen. Durch gezieltes Vermitteln und Üben dieser werden die Problemlöse- und Beweisfähigkeiten der Lernenden um Hilfsmittel bereichert, welche einen Ansatz für die Suche nach einem Lösungsweg für das jeweilige Problem liefern. Daneben schult das Erlernen verschiedener Heurismen die in Kapitel 2.2 bereits erwähnte geistige Beweglichkeit der Schüler im Umgang mit Problemaufgaben im Allgemeinen. Dieser Prozess kann durch das Erstellen eines Wissensspeichers (vgl. Abschnitt 2.4.1.3) zu den bekannten Heurismen und zugehörigen Beispielaufgaben begleitet werden.
Eine weitere Gemeinsamkeit der Prozesse sind vergleichbare Phasen der jeweiligen Mo-

delle. Dadurch ist das gezielte Üben einzelner Schritte des Problemlöse- bzw. Beweisprozesses ein weiterer Ansatzpunkt, welcher verfolgt werden kann. Phasen, die dem Verstehen der Aufgabe, der Exploration möglicher Lösungswege oder der Ausführung der Lösung entsprechen, können voneinander getrennt geübt werden, wodurch sich der komplizierte Prozess des Problemlösens in seiner Gesamtheit erlernen lässt.
Neben den Phasen, die sich mit dem eigentlichen Problem befassen, bieten auch Rückschau, Metakognition und die erforderlichen Kontrollprozesse, welche diese Phasen überwachen und reflektieren, Ansatzpunkte für eine Förderung der Problemlösekompetenz. Einerseits wird dadurch die Struktur des zugrundeliegenden Prozesses für Lernende greifbar, was das spätere Problemlösen erleichtert (Problemlöse- und Beweismodelle als Gerüst, vgl. Abschnitt 2.3; Zielaspekt, vgl. Abschnitt 2.5.1). Andererseits kann das Fördern einer gewinnbringenden Metakognition die Lerneffekte durch das Problemlösen verstärken. So können Lernende durch eine gute Rückschau aus ihren gelösten Problemen Vorgehensweisen herausarbeiten, welche für spätere Problemlöseprozesse hilfreich sind (Methodenaspekt, vgl. 2.5.1).
Neben Ansatzpunkten, die sowohl in einem Problemlöse- als auch in einem Beweisprozess benötigt werden, lassen sich auch die charakteristischen Aspekte des Beweisprozesses üben. Dazu gehört die Etablierung einer Beweiskultur im Unterricht und das Aufzeigen der Notwendigkeit eines Beweises. Ein Fördern dieser Aspekte (in Kombination mit alltagsnahen und herausfordernden Aufgaben) verringert eine mögliche motivationale und emotionale Barriere der Lernenden (vgl. Abschnitt 3.4) und ermöglicht eine erfolgreiche Umsetzung des unterrichtlichen Beweisens.
Die in Abschnitt 3.1.2 diskutierten Teilaspekte von Beweisen können ebenfalls fokussiert werden. Speziell die Bereiche der formalen Strenge und des Prozess- und Produktcharakters zeichnen einen (fachwissenschaftlichen) Beweis aus. Eine Beachtung dieser kann die Lernenden schrittweise von einem narrativen[14] oder präformalen Beweis hin zu einem formalen Beweis führen. Dadurch kann auch im Unterricht ein Einblick in fachmathematisches Beweisen erfolgen. Genauso könnten die verschiedenen Arten von sowohl fachwissenschaftlichen, als auch schulischen Beweisen (vgl. Kapitel 3.2) im Unterricht differenziert und einzeln gefördert werden.
Schließlich erfordert Beweisen häufig Kenntnisse der Logik. Auch diese lassen sich speziell schulen, allerdings ist das nötige Maß in dieser Disziplin für die Schule im Allgemeinen ohne gesonderte Vertiefung intuitiv vorhanden und ausreichend, oder fehlendes Wissen durch eine Anpassung der Aufgaben sowie gezielte Hilfestellungen ausgleichbar.

4.1.2 Maßnahmen zur Umsetzung

Für die Umsetzung einer derartigen Fokussierung auf spezielle Aspekte sind verschiedene Maßnahmen denkbar. Zu diesen zählen beispielsweise die Nutzung von *ausgearbeiteten Lösungsbeispielen*, die Möglichkeit, gewisse Hilfestellungen in Form von *Puzzleteilen* vorzugeben und speziell im Kontext des Argumentierens die Möglichkeit der *Beweise ohne Worte*.

[14] Grundey (2015, S. 23) unterscheidet die Prototypen eines Beweises in verschiedene Arten der Argumentation (beispielsweise induktiv, deduktiv, empirisch, etc.) und Arten der Darstellung (beispielsweise formal, narrativ). Dabei werden die jeweiligen Argumente und Begründungsschritte eines *narrativen Beweises* in Form eines Prosatextes geschildert.

4.1.2.1 Ausgearbeitete Lösungsbeispiele

Ein ausgearbeitetes Lösungsbeispiel besteht im Allgemeinen aus der Aufgabenstellung, den Lösungsschritten und der Lösung. Die Lösungsschritte werden dabei in unterschiedlicher Ausführlichkeit kommentiert, sodass die Übergänge zwischen diesen verdeutlicht oder begründet werden (vgl. Salle 2015, S. 24). Die Nutzung von Lösungsbeispielen in einem (selbstgesteuerten) Lernprozess verfolgt häufig eine oder mehrere der folgenden Funktionen (vgl. Salle 2015, S. 31 f.). Diese sind nicht strikt voneinander abgegrenzt, sondern können sich überlagern.
Der Einsatz von Lösungsbeispielen zum Generieren von Wissen und Fähigkeiten, beispielsweise durch die Entnahme von Informationen aus einer Beispiellösung, durch die Analyse von Analogien verschiedener Beispiellösungen im Hinblick auf ein Finden von (heuristischen) Vorgehensweisen (*copy and map*) oder durch die Abstraktion und Genese von Problemlöseschemata (*Schemainduktion*), wird mit dem Begriff *Lernfunktion* bezeichnet. Dagegen steht im Zuge der *Interpretationsfunktion* mithilfe des Lösungsbeispiels die Anwendung allgemeiner Prinzipien in konkreten Beispielen im Fokus. Diese konkrete Umsetzung von bereits erworbenem Wissen in Anwendungsbeispielen trägt zu einer Illustration allgemeiner Zusammenhänge bei. Wird durch ein Lösungsbeispiel primär das Ziel verfolgt, bereits erlerntes Wissen oder Schemata ins Gedächtnis zu rufen und diese im Kontext einer Beispielaufgabe zu illustrieren, spricht man von der *Erinnerungsfunktion*. Zuletzt kann im Rahmen der *Kontrollfunktion* die eigene Lösung mit einer vorgegebenen Lösung in Bezug auf die Korrektheit und die Abfolge der Lösungsschritte verglichen werden (*compare and check*). Bei einer besonders starken Ausprägung dieser Vergleiche spricht man von *analogem Aufgabenlösen*.
Obwohl Lernende generell das Lernen an Beispielen bevorzugen (vgl. Reiss und Renkl 2002, S. 31 und Salle 2015, S. 32 ff.), ist durch Studien belegt, dass beispielhaftes Lernen gerade für mathematisch-algorithmische Teilbereiche gut geeignet ist (vgl. Reiss und Renkl 2002, S. 30), ansonsten jedoch im Durchschnitt kein signifikant besserer Lerneffekt auftritt. Dies ist vor allem durch individuelle Unterschiede in der Verarbeitung der Lösungsbeispiele begründet (vgl. Salle 2015, S. 26 f.). Salle (2015, S. 34 f.) nennt zudem Hindernisse, welche den Lerneffekt durch Lösungsbeispiele mindern können. Dazu zählt eine *oberflächliche Verarbeitung* des Problems, eine *mangelnde Fokussierung* auf zentrale Aspekte, der Einsatz *isolierter Beispiele* sowie der *expertise reversal effect*:
Ein hoher Anteil der Lernenden verarbeitet die Lösungsbeispiele nicht aktiv. Die vorliegende Lösung suggeriert den Schülern, dass sie die Lösung eigenständig replizieren und anwenden können, jedoch sind sie häufig nicht in der Lage, Aufgaben zu lösen, welche sich von den gegebenen Beispielen in nur wenigen Merkmalen unterscheiden. Dennoch beurteilen diese Lernenden ihre Fähigkeiten in Bezug auf das gelöste Problem als fortgeschritten (Illusion des Verstehens). Stehen dem Lernenden stetig externe Lösungsbeispiele zur Verfügung, könnten zentrale inhaltliche Konzepte unter Umständen nicht langfristig erlernt werden. Aufgrund dessen sollte das Lernen an ausgearbeiteten Lösungsbeispielen Schritt für Schritt durch selbstständiges Problemlösen abgelöst werden.
Gerade für unerfahrene Lernende kann es schwierig sein, die zentralen Aspekte des ausgearbeiteten Lösungsbeispiels zu identifizieren. Als Konsequenz ergeben sich dadurch Probleme bei der Verallgemeinerung der Inhalte, da die Schüler nicht entscheiden kön-

nen, welche Elemente notwendig sind und welche ohne Einfluss auf den Lösungsweg geändert werden könnten. Eine Überwindung dieses Hindernisses ist durch Hervorheben dieser zentralen Aspekte im jeweiligen Beispiel oder durch begleitende Fragen oder Arbeitsaufträge, welche auf die inhaltlichen Kernbegriffe abzielen, möglich. Eine Thematisierung dieser zentralen Elemente in einer anschließenden Phase der Metakognition ist ebenfalls denkbar.
Die Verwendung mehrerer Lösungsbeispiele zum gleichen inhaltlichen Kernaspekt steigert den Lernerfolg im Vergleich zur Verwendung von nur einem einzigen, sogenannten „isolierten Beispiel". Dies ist darin begründet, dass durch einen Vergleich mehrerer Lösungen die inhaltlichen Kernaspekte einfacher herausgearbeitet und Fehlinterpretationen vermieden werden können.
Der *expertise reversal effect* beschreibt die Tatsache, dass die Leistungen von Lernenden mit mehr Vorwissen zur jeweiligen Thematik bei der Nutzung von ausgearbeiteten Lösungsbeispielen stagnieren oder zurückgehen, während ausgearbeitete Lösungsbeispiele gerade für Lernende mit geringem Vorwissen sehr effektiv sind. Ein Grund für dieses Phänomen ist ein möglicher Konflikt des Vorwissens der Lernenden mit den im Lösungsbeispiel dargestellten Abläufen, welcher den Lernerfolg mindert. Dieses Hindernis spricht ebenfalls dafür, ausgearbeitete Lösungsbeispiele vorrangig zu Beginn der Beschäftigung mit einer Thematik einzusetzen und sie Schritt für Schritt durch eigenständiges Problemlösen abzulösen.
Insgesamt ergibt sich durch das Lernen an ausgearbeiteten Lösungsbeispielen eine Möglichkeit, gerade für unerfahrene Schüler gute Lernerfolge in einem bestimmten Bereich zu erzielen. Durch das Nachvollziehen einer Lösung können zugrundeliegende Schemata erkannt und erlernt werden, welche bei direktem Problemlösen im Vergleich zur eigentlichen Lösung häufig in den Hintergrund rücken. Gleichzeitig ist eine Anleitung durch den Lehrenden im Umgang mit den Lösungsbeispielen nötig, um bestmögliche Ergebnisse zu erzielen und die genannten Hindernisse zu überwinden. Mit zunehmendem Fähigkeitsstand der Lernenden sollte ein stetiger Übergang zu problemlösenden Aufgaben angestrebt werden, da der Lernerfolg durch ausgearbeitete Beispiele abnimmt (vgl. Salle 2015, S. 25 f. und Reiss und Renkl 2002, S. 31). Dies lässt sich durch eine Variation der Lösungsbeispiele erreichen, den sogenannten *unvollständigen Beispielen*. Hierbei wird keine vollständige Lösung präsentiert, sondern es werden gewisse Lücken im Lösungsweg bewusst offen gehalten, welche die Schüler eigenständig vervollständigen sollen. Diese können anhand von Leitfragen oder Arbeitsaufträgen, beispielsweise in Form eines fiktiven Dialogs, oder komplett frei gestaltet sein. Durch das Ausblenden von Teilen des Lösungsweges (*Fading Example*) wird der eigene Problemlöseprozess der Lernenden gefördert und kann durch die erwähnten Leitfragen mehr oder weniger unterstützt werden. Mit zunehmendem Fading steigt der eigenständige Problemlöseanteil im Vergleich zur vorgegebenen Lösung, wodurch sich der Übergang zwischen Lösungsbeispielen und Problemlösen fließend gestalten lässt.
Während traditionelle Lösungsbeispiele vor allem mathematische Inhalte und einen korrekten Lösungsweg fokussieren, kann durch *heuristische Lösungsbeispiele* das Hauptaugenmerk auf die Prozesse zur Findung und Begründung eines Lösungsweges gelegt werden. Dazu werden vor allem die Gedankenprozesse beim Finden einer Lösung, mögliche explorative Wege und Irrwege sowie die verwendeten Heurismen explizit

aufgeführt (vgl. Salle 2015, S. 39 ff.). Durch diese Maßnahme wird verhindert, dass beispielsweise ein traditionelles ausgearbeitetes Lösungsbeispiel des Beweisprozesses zwar den korrekten Lösungsweg wiedergibt und die einzelnen Übergänge zwischen den Beweisschritten erläutert, jedoch keine Rücksicht auf den eigentlichen Prozess des Beweisens nimmt. Dadurch wird ein Beweis für den Lernenden als rein deduktive Aktivität dargestellt und das eigenständige Beweisen durch diese Ansicht erschwert. Dagegen kann die Vorgabe von Leitfragen (vgl. dazu auch die von Pólya vorgestellten Hilfsfragen in Tabelle 4) eine eigenständige Beweisfindung ermöglichen, bei welcher der explorative Charakter des Prozesses deutlich wird (vgl. Reiss und Renkl 2002, S. 32).

Mithilfe dieser Variationen von ausgearbeiteten, heuristischen Lösungsbeispielen ist es möglich, verschiedene der genannten Ansatzpunkte aus Abschnitt 4.1.1 gezielt zu fördern. Dies kann durch bewusstes Ausblenden gewisser Schritte im Problemlöse- oder Beweisprozess oder durch geeignete Leitfragen erreicht werden. Einige Beispiele derartiger Leitfragen und der zugehörige didaktische Hintergrund werden im Folgenden kurz erläutert:
Unter der Leitfrage „Welche Strategien wurden zur Lösung des Problems verwendet?“ lassen sich bei geeigneten Lösungsbeispielen verschiedene Heurismen herausarbeiten oder wiederholen. Durch die Leitfrage „Welche(r) Schritt(e) war(en) entscheidend für die Lösung des Problems? Teile die Lösung in größere Abschnitte ein!“ kann eine Rückschau auf den Problemlöseprozess und die zentralen Ideen gefördert und eine Charakterisierung des für die Kontrollprozesse beim Problemlösen benötigten übergeordneten Lösungsplans gefordert werden. Mit der Leitfrage „Lassen sich die entscheidenden Schritte verallgemeinern?“ kann das dadurch erlangte Metawissen für einen späteren Einsatz bewertet und gegebenenfalls in einen Wissenspeicher überführt werden. Genauso können die Phasen des Problemlöseprozesses mithilfe der Leitfrage „Welche Phasen wurden im vorliegenden Problemlöseprozess durchlaufen?“ (gegebenenfalls zusammen mit der Leitfrage zur Metakognition) erarbeitet oder nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Die Gegenüberstellung von einem ausgearbeiteten, formal-deduktiven Beweis und den eigentlichen Schritten der Beweisfindung liefert eine Möglichkeit, welche sowohl die Beweisphasen als auch den Prozess-Produkt-Charakter eines Beweises verdeutlichen kann.
Eine weitere Möglichkeit, die ähnlich zum heuristischen Lösungsbeispiel eine ausgearbeitete Lösung inklusive der gedanklichen Grundlagen des Lösungsprozesses beinhaltet, besteht im Vorgeben einer fiktiven Schülerlösung mit einigen Fehlern. Je nachdem, an welcher Stelle Fehler vorliegen, kann der Lernende durch Bewerten und Prüfen der fehlerhaften Lösung inhaltliche oder prozessspezifische Aspekte gesondert reflektieren. Denkbare (prozessspezifische) Aspekte, für welche die Lernenden im Zuge dessen sensibilisiert werden können, sind beispielsweise Zirkelschlüsse, Lücken in der Argumentationskette, übereiltes Aufstellen von Hypothesen und rein experimentelle Verifikation dieser sowie der fehlerhafte Einsatz von Heurismen (zum Beispiel Vergessen von Spezialfällen, Einführen von nicht zulässigen Hilfselementen, etc.). Genauso lassen sich im Zuge dieser fiktiven Schülerlösungen verschiedene Problemlöseprozesse

oder speziell Beweise miteinander vergleichen. Dadurch können beispielsweise die verwendeten Heurismen (gute und schlechte Skizzen, etc.) miteinander in Beziehung gesetzt und die Lernenden damit für mögliche Fehler sensibilisiert werden.

4.1.2.2 Vorgeben von Puzzleteilen

Eine andere Möglichkeit, Lernende bei Problemlöse- und Beweisprozessen zu unterstützen, liefert das *Vorgeben von Puzzleteilen*. Dabei werden verschiedene Teilaspekte des jeweiligen Prozesses, wie beispielsweise Vorwissen, mögliche Lösungsschritte, Heurismen, Hilfsfragen oder sogar Skizzen, auf Puzzlestücken vorgegeben. Sie bieten den Lernenden Anhaltspunkte, welche an der geeigneten Stelle verwendet werden können. Insgesamt erleichtert die Vorgabe derartiger Hilfestellungen den Prozess des Problemlösen bzw. Beweisens, da die zur Verfügung stehenden Ressourcen teilweise eingegrenzt werden und auch der Lösungsprozess häufig ähnlich dem Lösen eines Puzzles einzig das Kombinieren der Puzzlestücke in der richtigen Abfolge erfordert. Damit sind die Phasen im jeweiligen Prozess, die geeignete Strategien auswählen und diese dann zu einer zielführenden Lösung kombinieren, nicht vollständig vorgegeben, sondern lediglich erleichtert.
Dies kann Lernenden helfen, die Struktur eines Problemlöseprozesses zu durchdringen, ohne dabei direkt alle Schwierigkeiten gleichzeitig überwinden zu müssen. Je nach beabsichtigtem Lehrziel und Fähigkeitsstand der Lernenden können Variationen in der Anzahl und der Ausführlichkeit der Hilfestellungen sinnvoll sein. Durch Vorgeben überzähliger, nicht zielführender Puzzleteile kann die jeweilige Eingangsphase im Problemlöse- bzw. Beweisprozess gezielt fokussiert werden, in der die Auswahl geeigneter Strategien und Inhalte des Vorwissens besonders wichtig ist. Da in den seltensten Fällen direkt klar ist, welche Puzzleteile zielführend sind, wird zusätzlich die Exploration verschiedener Lösungswege implizit gefördert.
Genauso kann durch Vorgabe von zu wenigen Puzzlestücken ein ähnlicher Prozess geübt werden, in dem die Lernenden die zur Verfügung gestellten Hilfestellungen eigenständig durch Vorwissen ergänzen müssen, um eine Lösung zu erreichen. Dies erweitert die erstgenannte Variation mit überzähligen Puzzlestücken, da in diesem Fall nicht mehr aus einer gegebenen, überschaubaren Menge an Voraussetzungen gewählt werden muss, sondern aus der Gesamtheit der ihnen zur Verfügung stehenden Ressourcen. Diese müssen erst ins Gedächtnis gerufen werden. Dabei kann eine geeignete Vorauswahl (beispielsweise sind Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig in geometrischen Kontexten nicht anwendbar) hilfreich sein und die Suche gegebenenfalls durch thematisch differenzierte Wissensspeicher erleichtert werden.
Eine weitere mögliche Variante der Puzzlestücke kann nur die Strategien vorgeben, welche zur Lösung notwendig sind. Die Aufgabe der Lernenden besteht dann im Finden geeigneter Aspekte des Vorwissens, welche mit der jeweiligen Strategie verknüpft werden können. Die Vorgabe von allen nötigen inhaltlichen Voraussetzungen kann dagegen die Suche nach hilfreichen Strategien und Heurismen fördern.
Eine letzte Möglichkeit, den Fokus der Aufgabe durch die gegebenen Puzzlestücke zu verschieben, besteht in der Vorgabe von möglichen Zwischenzielen. Dabei ist es die Aufgabe der Lernenden, gegebenenfalls eine Auswahl zu treffen und diese zu einem Grobplan des Lösungsweges anzuordnen. Dies gleicht der Phase *Design* im Modell von

Schoenfeld und entspricht einem Kontrollprozess während des Problemlösens. Durch diese Maßnahme werden die Schüler unterstützt, einen übergeordneten Plan zu erstellen und erst anschließend die Lücken zwischen den einzelnen Zwischenzielen zu füllen. Dies verhindert, dass sich die Lernenden in Details verlieren und das übergeordnete Ziel nicht erreichen.
Insgesamt fokussiert die Maßnahme der Vorgabe von Puzzlestücken die Phasen von Problemlöse- und Beweisprozessen, in denen eine Auswahl von zielführenden Strategien und geeigneter Anknüpfungspunkte zum Vorwissen getroffen wird, sowie das Aufstellen einer zielführenden Abfolge dieser ausgewählten Aspekte. Je nach Aufgabenstellung können diese Prozesse durch weitere Arbeitsaufträge unterstützt oder zusätzliche Aspekte eines Problemlöseprozesses, beispielsweise die Metakognition oder im Beweiskontext das Übersetzen in einen formalen Beweis, geübt werden. Die vorgestellten Variationen ermöglichen es dem Lehrenden, gezielt einzelne Aspekte zu betonen und durch Variation der Schwierigkeit an den Fähigkeitsstand der Lernenden anzupassen.

4.1.2.3 Beweise ohne Worte

Die letzte Maßnahme, welche im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden soll und sich speziell dem Aspekt des Beweisens widmet, sind *Beweise ohne Worte* (kurz: BoW)[15]. Nelsen (2016, S. 1) beschreibt Beweise ohne Worte als „Bilder oder Diagramme, welche beim Lesen helfen zu verstehen, warum eine gewisse mathematische Aussage wahr sein mag und wie man versuchen könnte, diese zu beweisen“. Hierbei wird ein Beweis oder eine Beweisidee anschaulich durch eine entsprechende Abbildung dargestellt und gegebenenfalls durch erklärende Gleichungen ergänzt. Im eigentlichen Sinn handelt es sich bei BoWs nicht zwangsläufig um mathematisch anerkannte Beweise, sondern vielmehr um veranschaulichte, teils operative Beweisideen. Auch wenn der entscheidende Teil der Lösung damit vorgegeben ist, bedarf es häufig noch einiger Anstrengung den vorgegebenen „Beweis“ zu verstehen. Im Rahmen dieser Arbeit werden vorrangig geometrische BoWs aufgegriffen und diskutiert, jedoch soll erwähnt sein, dass Nelsen auch zahlentheoretische und analytische BoWs auflistet.
Es ist denkbar, dass der konkrete Einsatz der BoWs im schulischen Kontext genutzt werden kann, um Lernende in der Fähigkeit zu fördern, Beweise anderer nachzuvollziehen, zu prüfen und zu hinterfragen. Genauso kann durch Übersetzen eines (operativen) BoWs in einen formalen Beweis die entsprechende Phase im Beweismodell gefördert werden. Hierbei ist es zwingend notwendig, die zugrundeliegende Idee inklusive kleinerer Details vollständig zu verstehen, da sich sonst beim Formulieren der Beweiskette Lücken ergeben. In der konkreten unterrichtlichen Umsetzung lassen sich BoWs zudem mit Elementen der ausgearbeiteten Lösungsbeispiele (Abschnitt 4.1.2.1) sowie dem Vorgeben von Puzzleteilen (Abschnitt 4.1.2.2) kombinieren. Mehrschrittige BoWs können in Puzzlestücke zerlegt werden, um dann von den Lernenden in die richtige Reihenfolge gebracht zu werden und so als Grobplan für den (formalen) Beweis zu dienen. Genauso kann ein vorgegebener operativer BoW genutzt werden, um das Konzept

[15] Die Bezeichnung geht auf den Titel des Buches „Beweise ohne Worte“ von Nelsen (2016) zurück. Auch die Abkürzung BoW ist seinen Ausführungen entnommen.

eines operativen Beweises deutlich zu machen oder durch einen Vergleich eines BoWs mit der zugehörigen formalen Ausarbeitung die Vor- und Nachteile beider Varianten zu diskutieren.
Insgesamt kann durch die BoWs ein Beweis entwickelt werden, ohne selbst eine möglicherweise schwer zugängliche Beweisidee haben zu müssen. Andererseits kann der BoW genutzt werden, um das Charakteristikum der formalen Strenge eines Beweises zu fokussieren. Dieses kann entweder durch das Übersetzen der Beweisidee in einen formalen Beweis oder durch Bewerten einer konkreten Umsetzung (des Lehrenden oder anderer Lernender) im Hinblick auf Korrektheit oder Lückenlosigkeit erfolgen. Zuletzt bietet die Tatsache, dass viele der BoWs häufig bereits in Hochkulturen des Altertums (China, Arabien, antikes Griechenland und Römisches Reich) entwickelt wurden, die Möglichkeit, die Ursprünge und die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und die damit verbundenen Errungenschaften der Menschheit zu thematisieren und so den Nutzen der Mathematik sichtbar zu machen.

4.1.2.4 Verschiedene Schwierigkeitsgrade

Die konkrete unterrichtliche Umsetzung muss an die jeweiligen Lernenden und deren Fähigkeitsstand angepasst werden, um möglichst hohe Lernerfolge zu erzielen. In diesem Zusammenhang ist es unerlässlich, den Schwierigkeitsgrad der gestellten Aufgaben und zu lösenden Probleme, welche gerade für das Fach Mathematik charakteristisch sind, anzupassen (vgl. Abschnitt 2.5.4). Um die mathematischen Kernkompetenzen Argumentieren und Problemlösen zu vermitteln, bieten die Maßnahmen der vorhergehenden Kapitel Möglichkeiten, verschiedene Hilfestellungen zu geben, einzelne Teilaspekte eines komplizierten Prozesses herauszustellen und gesondert zu fördern sowie Metawissen zu den Prozessabläufen und den dabei verwendeten Strategien aufzubauen.
Speziell im Kontext des Argumentierens und Beweisens lassen sich weitere Abstufungen der Schwierigkeit treffen, welche vom Nachvollziehen eines ausgearbeiteten Beweises oder eines BoW bis hin zum eigenständigen Entwickeln eines Beweises reichen. Zwischen diesen beiden Extremen liegen weitere Möglichkeiten, das Anforderungsniveau zu variieren, indem beispielsweise Beweise (fiktive Schülerbeweise oder Beweise anderer Lernender) auf Korrektheit untersucht und bewertet, Beweise anhand einer vorgegebenen Skizze oder Konstruktion erarbeitet und formalisiert, Beweise mithilfe vorgegebener Puzzlestücke entwickelt oder gegebene Beweise durch alternative Lösungswege oder reduzierte Lösungen eleganter gestaltet werden. Jede dieser Möglichkeiten bietet in sich weiteres Potenzial für Differenzierungen oder kann durch zusätzliche Hilfestellungen unterstützt werden. Auch können die Aufgaben offener gestaltet oder Lernende durch die Formulierung von Teilaufgaben bei der Bearbeitung mehr oder weniger stark angeleitet werden. Geeignete Hilfestellungen bieten gleichermaßen für das Problemlösen, als auch für das Argumentieren weitere Möglichkeiten, Lernende bei den jeweiligen Prozessen zu unterstützen und verschiedene Aspekte hervorzuheben. Eine Reihe solcher Leitfragen und Hilfestellungen fasst Link (2011, S. 82 ff.) zusammen. Darunter befinden sich unter anderem auch die Hilfsfragen nach Pólya (vgl. Tabelle 4).

4.2 Veranschaulichung an Beispielen

Der Umfang der in Kapitel 4.1.1 aufgeführten theoretischen Anknüpfungspunkte sowie die Vielzahl an Variationen, welche für die in Kapitel 4.1.2 erläuterten Umsetzungsmöglichkeiten denkbar sind, können im Rahmen dieser Arbeit nicht vollständig durch Beispiele abgedeckt werden. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein Teil der genannten Vorschläge einer konkreten Umsetzung anhand einiger Aufgaben beispielhaft erläutert. Auch wird auf die Einordnung dieser Aufgaben in Jahrgangsstufen oder zu Themenbereichen im Allgemeinen verzichtet, da der konkrete Einsatz durch die didaktischen Intentionen der Lehrperson variieren kann. Vielmehr wird das Ziel verfolgt, aufzuzeigen, wie eine gegebene Aufgabe für eine Förderung von Problemlöse- und/oder Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht angepasst werden kann.

4.2.1 Tangenter Kreis

Problem 1:

Gegeben sind zwei nicht-parallele Geraden und ein Punkt P auf einer dieser Geraden (vgl. Abbildung 7). Konstruiere einen Kreis, welcher beide Geraden berührt und P einer dieser Berührpunkte ist. Begründe deine Konstruktion.[16]

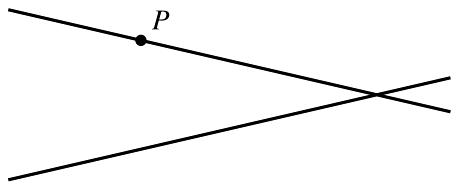


Abbildung 7: Skizze zu Problem 1

Lösung 1:

Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des durch die Geraden g und h aufgespannten Winkels am Scheitelpunkt S mit der Senkrechten auf g im Punkt P.
Begründen lässt sich diese Konstruktion mithilfe der Eigenschaften von Winkelhalbierenden und Kreistangenten. Die Winkelhalbierende ist die Menge aller Punkte, welche von den beiden Schenkeln den gleichen Abstand haben. Anders ausgedrückt ist dies die Menge der Mittelpunkte aller Kreise, die beide Schenkel gleichzeitig berühren.
Eine Kreistangente hat die Eigenschaft, orthogonal zum Berührradius zu verlaufen. Daraus ergibt sich, dass jeder Mittelpunkt eines Kreises durch P, welcher von g tangiert wird, auf der Senkrechten zu g durch P liegt.
Der gesuchte Kreismittelpunkt ist derjenige Punkt, welcher beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt.

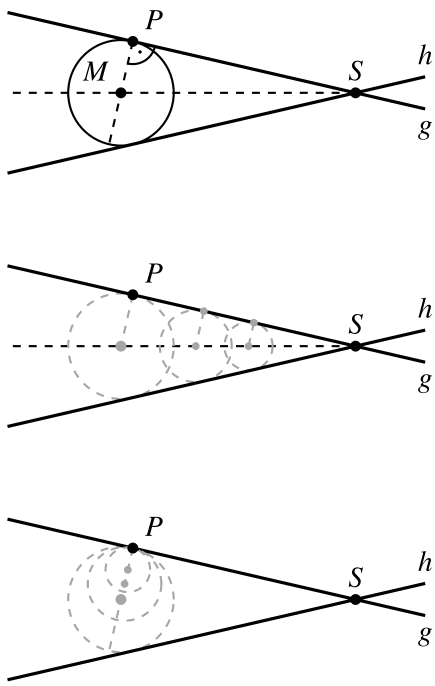


Abbildung 8: Skizzen zu Lösung 1

[16]vgl. Schoenfeld (1985, S. 15)

Zuletzt sei angemerkt, dass zwei verschiedene Kreise mit den geforderten Eigenschaften existieren und die Konstruktion damit nicht eindeutig ist.

Didaktische Reflexion

Problem 1 kann im Mathematikunterricht beispielsweise mit der in Kapitel 4.1.2.2 dargestellten Maßnahme der Vorgabe von Puzzlestücken umgesetzt werden, um den Heurismus des *Rückwärtsarbeitens* einzuführen. Dazu wird eine gewisse Anzahl an Puzzleteilen vorgegeben (vgl. Abbildung 9, abzüglich des Puzzleteils „Rückwärtsarbeiten“), welche das Generieren einer entscheidenden Idee und die damit verbundene Lösung des Problems vereinfachen.

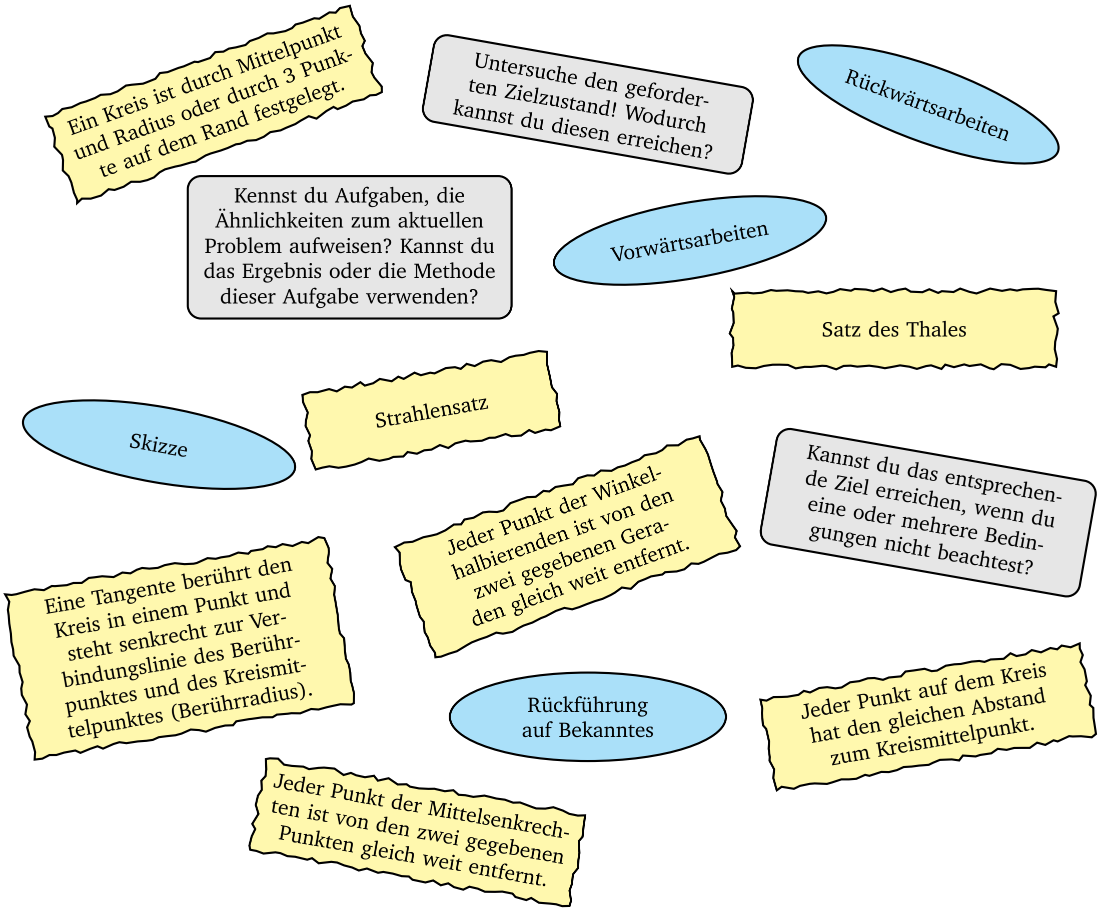


Abbildung 9: Auswahl einiger Puzzlestücke (Heurismen (blau), fachliche Inhalte (gelb), Hilfsfragen (grau)) zu Problem 1

Dabei soll speziell durch die Hilfsfragen, welche sich auf das zu erreichende Ziel beziehen, die Herangehensweise gefördert werden, vom Ziel ausgehend zu untersuchen, wie dieses erreicht werden kann. Eine denkbare Kombination der gegebenen Puzzleteile, die so auch durch einen Lernenden entwickelt werden könnte, ist in Abbildung 10 dargestellt. Dabei wird nur der Teil der Lösung aufgeführt, welcher durch Rückwärtsarbeiten die entscheidende Idee liefert, während die Gedankenprozesse, die zwischen den Puzzlestücken und den Lösungsskizzen aus Lösung 1 stehen, hier nicht thematisiert werden.

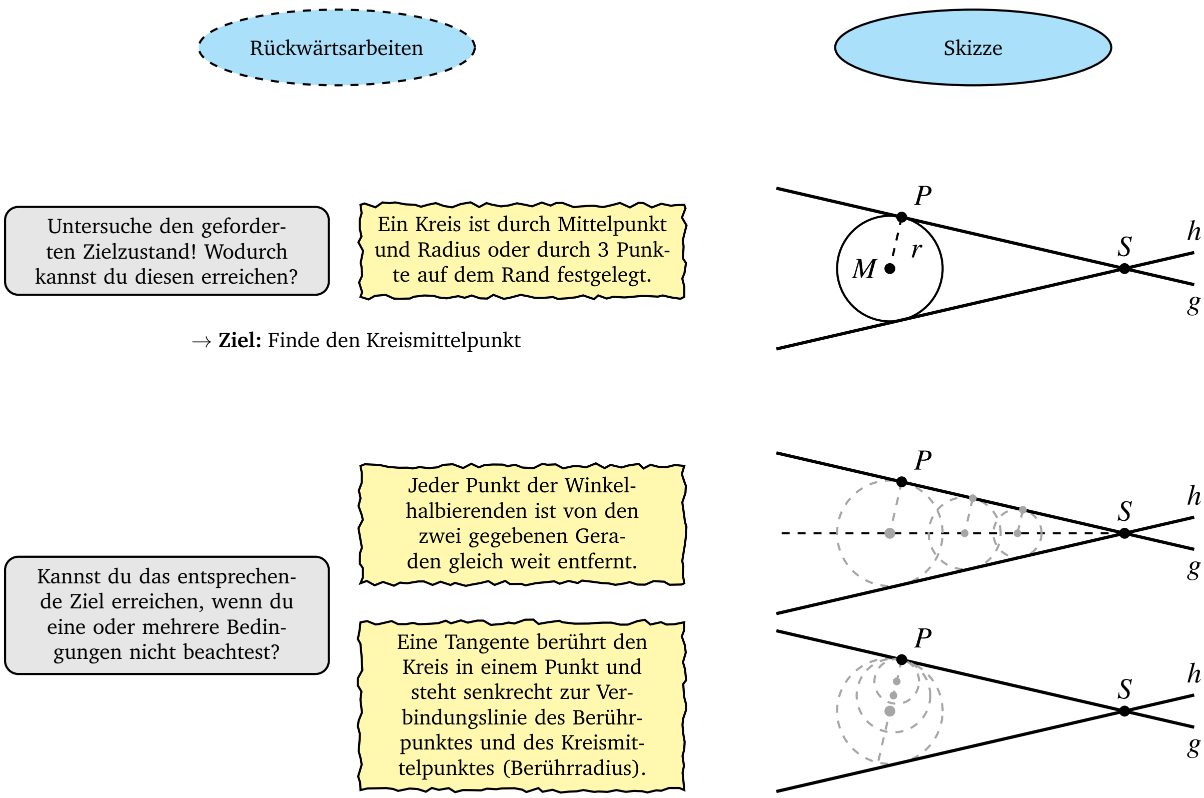


Abbildung 10: Denkbare Kombination ausgewählter Puzzleteile (links) und Gegenüberstellung zugehöriger Skizzen der Lösungsschritte (rechts)

Die hier dargestellte Kombination der Hilfsfragen, inhaltlichen Puzzlestücke und der Heurismen ist selbstverständlich nur eine mögliche Anordnung. Nur weil einige der Puzzleteile aus Abbildung 9 hier nicht genutzt wurden, bedeutet dies nicht, dass diese für das Finden einer Lösung nicht benutzt werden können. Ist den Lernenden die Konstruktion einer Kreistangente durch einen vorgegebenen Punkt S außerhalb des Kreises mithilfe des Satzes von Thales bekannt, so könnten Ergebnisse dieser Konstruktion umgekehrt und auf das vorliegende Problem übertragen werden. Bei diesem Lösungsweg wäre dann die Verwendung der Puzzleteile „Satz des Thales“ und „Rückführung auf Bekanntes“ in einer jeweiligen Anordnung denkbar. Durch eine geeignete Vorgabe der Puzzleteile können somit auch verschiedene Zugänge zur Problemlösung möglich sein. Dies ist vor allem dann sinnvoll, wenn eine Problemaufgabe zur Erweiterung oder Sicherung von Inhalten voriger Unterrichtseinheiten genutzt werden soll. Um neue Inhalte zu lehren, muss sichergegangen werden, dass diese in jedem möglichen Lösungsweg abgedeckt sind oder dass elementare Inhalte nachträglich für alle Lernenden zusammengetragen werden.

Zusammengefasst bietet Problem 1 Möglichkeiten, entweder den Heurismus *Rückwärtsarbeiten* einzuführen und anschließend um die Konstruktion von Kreistangenten durch einen beliebigen Punkt der Ebene, welcher nicht auf dem Kreis liegt, unter Analogiebildung zu erweitern, oder es kann umgekehrt nach dem Erarbeiten der Konstruktion von Kreistangenten als Sicherung verwendet werden.

4.2.2 Bierdeckel

Problem 2:

Gegeben sind zwei zueinander kongruente Quadrate (Bierdeckel). Der Eckpunkt des einen Quadrates ist am Mittelpunkt des anderen Quadrates befestigt. Untersuche die Größe der Fläche, welche von beiden Quadraten überdeckt wird. [17]

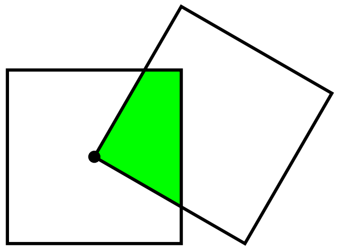


Abbildung 11: Skizze zu Problem 2

Lösung 2:

Die Größe der gesuchten Fläche beträgt exakt ein Viertel der Gesamtfläche des ursprünglichen Quadrates, unabhängig davon, wie das zweite Quadrat um den Mittelpunkt gedreht ist. Um diese Aussage zu begründen, kann die Drehsymmetrie der überlappenden Fläche ausgenutzt werden. Eine Drehung dieser um jeweils 90 Grad um den Mittelpunkt M liefert drei weitere, zur ursprünglichen Teilfläche kongruente Flächenstücke, welche das Quadrat vollständig überdecken.

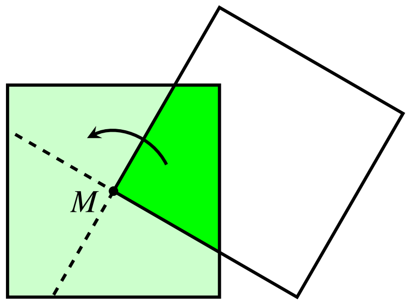


Abbildung 12: Skizze zu Lösung 2

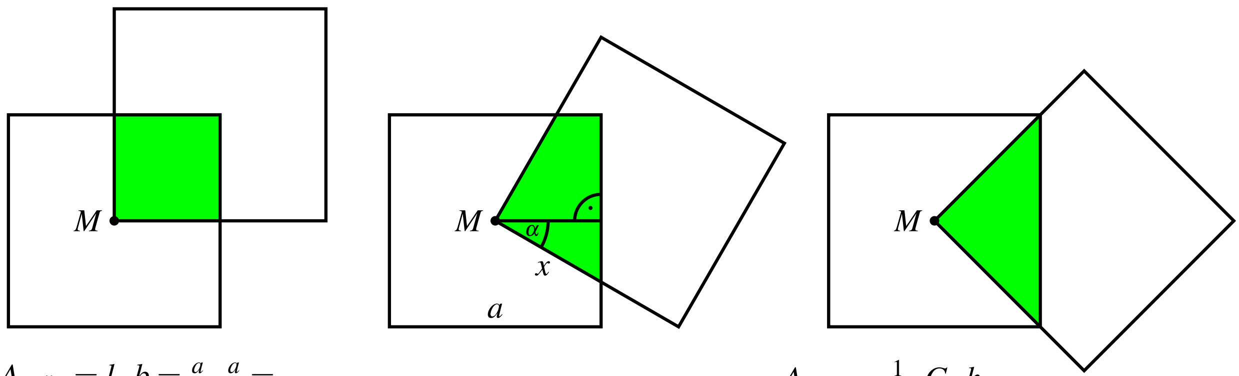
Didaktische Reflexion

Dieses Problem kann in einer konkreten Umsetzung im Unterricht auf verschiedene Arten genutzt werden. Einerseits können inhaltliche Aspekte wie beispielsweise die Fläche geradlinig begrenzter Körper[18] sowie Kongruenz und die zugehörigen Kongruenzabbildungen abgedeckt werden. Andererseits beinhaltet diese Aufgabe vielfältige Anknüpfungspunkte zu Problemlöseprozessen und den dafür notwendigen Heurismen. Dazu zählen das *Symmetrieprinzip*, das Rückführen auf *Spezialfälle* und das *Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip* inklusive dem Einführen von Hilfslinien. Durch entsprechende Aufgabenstellungen kann der fokussierte Aspekt ebenfalls beeinflusst werden. Während „Untersuche die Größe der Fläche [...].“ als sehr offene Aufgabenstellung eine Exploration der Problemsituation und das Aufstellen von Hypothesen fördern kann, wird durch die Aufgabenstellungen „Zeige, dass die grün markierte Fläche genau ein Viertel der Fläche des Quadrats ist.“ bzw. „Begründe, dass die grün markierte Fläche bei einer Drehung des zweiten Quadrates stets gleich bleibt.“ ein Prozess der (operativen) Beweisfindung zu einer gegebenen Hypothese verstärkt betont. Alle Zugänge zu diesem Problem

[17] vgl. Schoenfeld (1985, S. 77) bzw. Rott (2014, S. 264).

[18] Einen ersten Ansatz zur Lösung des Problems könnte der Versuch einer Berechnung dieser Fläche gegebenenfalls durch Zerlegung in Teilflächen darstellen.

können mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware unterstützt werden. Diese ermöglicht es einerseits (in niedrigen Jahrgangsstufen), die Fläche des grün markierten Bereichs berechnen zu lassen, um experimentell eine geeignete Hypothese aufzustellen, andererseits kann das zweite Quadrat einfacher gedreht werden, wodurch sich die jeweilige Form der grünen Fläche verfolgen lässt. Durch letzteren Aspekt kann die Erkenntnis vereinfacht werden, dass es ausreicht, einen Teil der Drehung des zweiten Quadrats zu betrachten. Dies vereinfacht wiederum die Lösungsidee, welche selbst die Drehsymmetrie der Figur ausnutzt. Die Grenzfälle, zwischen denen eine Drehung des zweiten Quadrats ausreicht, sind zudem Spezialfälle, in welchen die Berechnung der grün markierten Fläche mit einfachen Mitteln (Formel für Dreiecks- und Rechtecksfläche) möglich ist (vgl. Abbildung 13).[19]



$$A_{grün} = l \cdot b = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}A_{Quadrat}$$

$$A_{grün} = \frac{1}{2} \cdot G \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}A_{Quadrat}$$

Abbildung 13: Grenzfälle zu Problem 2 (Bierdeckel), inklusive der Berechnung der Fläche in diesen Spezialfällen (links und rechts); geeignete Hilfslinie und Notationen zur Berechnung von x (Mitte)

Genauso kann die Aufgabe in höheren Jahrgangsstufen verwendet werden, in denen die Fläche algebraisch mithilfe von Sinus und Cosinus berechnet werden kann, beispielsweise zum Einüben von Berechnungen an rechtwinkligen Dreiecken. Auch hier sind die vorigen Überlegungen zur Drehsymmetrie der Figur und der damit verbundenen Eingrenzung des zu betrachtenden Drehbereichs, inklusive der Berechnung der Grenzfälle, hilfreich. Zuletzt können an das gegebene Problem weitere Aufgaben angeschlossen werden. Ein Beispiel hierfür ist die Fragestellung „Wie verhält sich die Größe der grün markierten Fläche bei einer Variation der Größe des zweiten Quadrates?“. Während die Antwort für ein größeres zweites Quadrat sehr einfach ausfällt (analoge Ergbnisse zur bisherigen Aufgabenstellung), ergeben sich für einen kleineren Bierdeckel teilweise nicht-triviale Berechnungen. Daran lässt sich die Frage anschließen, welche Kantenlänge das zweite Quadrat mindestens benötigt, um unabhängig von der Drehung um den Mittelpunkt M die maximal mögliche Fläche (d.h. ein Viertel der Fläche des ersten Quadrates) zu bedecken. Diese Fragestellung lässt sich einerseits experimentell (mithilfe

[19] Werden geeignete Hilfslinien und Notationen mit einer geeigneten Kongruenzbetrachtung kombiniert, kann die Fläche des grün markierten Bereichs auch ohne trigonometrische Funktionen algebraisch berechnet werden (vgl. Abbildung 14, Mitte)

einer DGS) lösen, wobei die minimal nötige Kantenlänge als maximal auftretende Verbindungslinie von M zum Rand des Quadrats im rechten Grenzfall in Abbildung 13 mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden kann. Alternativ kann die gesuchte Größe mithilfe des Winkels α (vgl. Abbildung 13, Mitte) berechnet werden:

Für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ist $\cos(\alpha)$ streng monoton fallend und nimmt sein Minimum für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ an. Damit gilt auf dem gegebenen Intervall:

$$\cos(\alpha) = \frac{0,5\,a}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{0,5\,a}{\cos(\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad x_{max} = \frac{0,5\,a}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Insgesamt bietet das Problem damit die Möglichkeiten, verschiedene Heurismen anzusprechen, den Prozess der Beweisfindung von einer experimentellen Exploration und dem daraus resultierenden Aufstellen einer Hypothese hin zur Findung eines operativen Beweises und gegebenenfalls bis zu einer Überführung in einen formalen Beweis abzubilden sowie in verschiedenen Jahrgangsstufen unter unterschiedlichen Gesichtspunkten (Kongruenz, Trigonometrie, Extremwertaufgaben) Verwendung zu finden. Zudem sind variable Lösungswege durch Zerlegen und Ergänzen der Figur, Rückführung auf die Spezialfälle oder algebraische Berechnungen möglich, die alle zum entsprechenden Ziel führen, jedoch geeignet begründet werden müssen (vgl. Abbildung 14). Dies ermöglicht den Lernenden eigene Ideen und Lösungswege zu verfolgen, diese zu reflektieren und gegebenenfalls mit anderen Lösungswegen zu vergleichen.

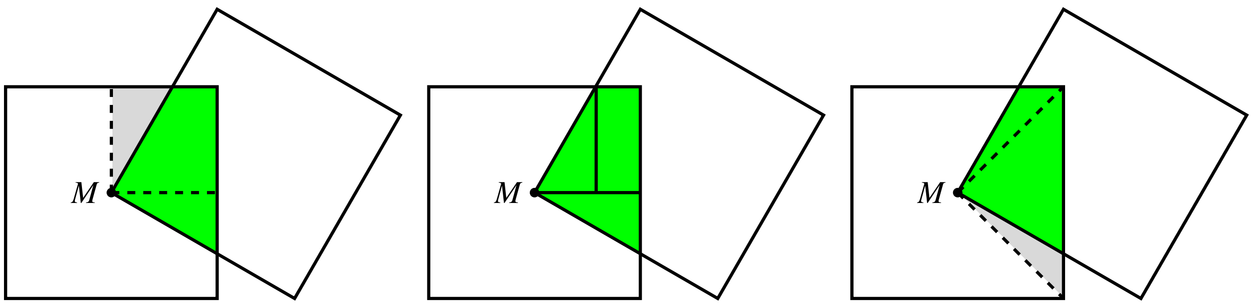


Abbildung 14: Alternative Lösungen zu Problem 2: Rückführung auf die Grenzfälle durch Zerlegen und Ergänzen (links, rechts), Zerlegung in zwei kongruente Dreiecke und ein Rechteck zur algebraischen Berechnung der Fläche (Mitte)

4.2.3 Minimale Abstandssumme zu einer Geraden

Problem 3:

Gegeben ist eine Gerade g und zwei verschiedene Punkte A und B auf einer Seite der Geraden. Finde denjenigen Punkt X auf der Geraden g, sodass die Summe der Abstände von A zu X und von B zu X minimal ist.[20]

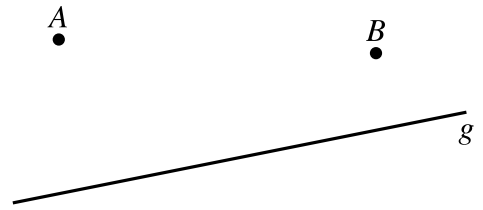


Abbildung 15: Skizze zu Problem 3

Lösung 3:

Der gesuchte Punkt X entsteht durch den Schnitt der Geraden g mit der Strecke $[AB']$, wobei B' den Spiegelpunkt von B bezüglich der Geraden g bezeichnet.
Dies kann dadurch begründet werden, dass die Abstände eines jeden Punktes der Geraden g zu den Punkten B und B' gleich sind (Eigenschaft Achsenspiegelung). Somit ist derjenige Punkt X gesucht, sodass die Summe der Abstände von A zu X und von B' zu X minimal ist. Die kürzeste Verbindung der beiden Punkte A und B' ist per Definition die Strecke, und da sich A und B' auf verschiedenen Seiten der Geraden g befinden, ist die minimal mögliche Summe genau diejenige für den oben definierten Punkt X. Die Summe der Abstände für jeden anderen Punkt X' der Geraden g ist als Resultat der Dreiecksungleichung größer als dieser Abstand. Eine Achsenspiegelung des Punktes A an g liefert den gleichen Punkt X.

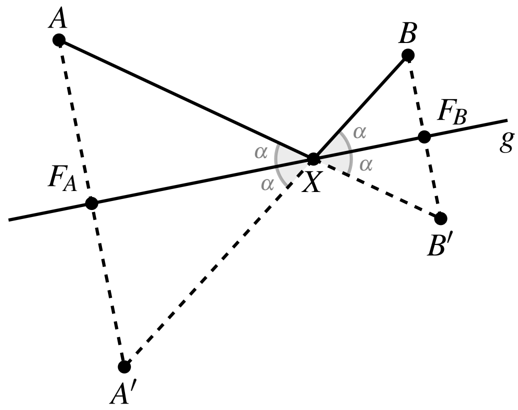


Abbildung 16: Skizze zu Lösung 3

Didaktische Reflexion

Eine unterrichtliche Umsetzung dieses Problems kann ähnlich zu Problem 1 (vgl. Abschnitt 4.2.1) durch Vorgeben von Puzzlestücken erfolgen. Das Finden der Lösungsidee kann dabei vor allem durch die Hilfsfrage „Kannst du die Voraussetzungen so anpassen, dass du das Ziel erreichen kannst?“ und Vorgabe von Puzzlestücken zu Spiegelungen erleichtert werden. Diese Umsetzung fokussiert vor allem das selbstständige Finden einer Lösung und die Organisation verschiedener Argumente zu einer Lösungskette.
Ein anderer Zugang, mit dem gleichzeitig das eigenständige Lösen sowie der eigentliche Prozess des Problemlösens thematisiert werden kann, ist die Verwendung der in

[20] vgl. Winter (2016, S. 226) oder Grieser (2017, S. 217).

Abschnitt 4.1.2.1 erläuterten heuristischen Lösungsbeispiele. Der Lernende hat dabei die Möglichkeit, angeleitet durch einen konstruktiven Dialog oder durch verschiedene mögliche Fragestellungen, durch den Problemlöseprozess geführt zu werden. Nach dem Finden einer Lösung mithilfe des (gegebenenfalls) lückenhaften Lösungsbeispiels können einzelne Schritte des Prozesses in einer Metakognition untersucht und deren Funktion für spätere Problemlöseprozesse übernommen werden.

In der beispielhaften Umsetzung, die in Abbildung 17 dargestellt ist, wird der Lernende konkret angeleitet, für das Problem hilfreiche inhaltliche Aspekte des Vorwissens zum Thema *Abstände* zu sammeln, eine *Skizze* anzufertigen sowie eine Lösungsidee durch eine *Variation der Voraussetzungen* zu entwickeln. Mithilfe dieser Maßnahmen wird im vierten Schritt eine Lösung generiert, deren Idee teilweise angesprochen wird („Punkt B auf die andere Seite der Geraden bringen“), jedoch final durch den Lernenden gefunden werden muss (Achsenspiegelung). Während des Dialogs wird der Schüler nicht ausschließlich durch die von ihm zu beantwortenden Fragen angeleitet, sondern auch ein gewisser Einblick in die Gedankenprozesse der fiktiven Mitschülerin gegeben. Diese verfolgen einige Phasen der in Abschnitt 2.3 erläuterten Problemlösemodelle, wie beispielsweise die von Schoenfeld genannten Phasen „Analysis“, „Design“ und „Implementation“. Durch das Thematisieren und Verwerfen gewisser Ideen im zweiten Schritt der Bearbeitung können bei geeigneter Reflexion auch gewisse Fehler und Irrwege im Gedankenprozess deutlich gemacht und Erkenntnisse bezüglich des Ablaufs genereller Problemlöseprozesse angesprochen werden. Dazu gehört auch das Sammeln von thematisch angrenzenden Definitionen, Sätzen und Konzepten des Vorwissens (Schritt 1), eine erste Analyse des Problems, inklusive dem Verstehen der Aufgabenstellung und der Anfertigung einer Skizze (Schritt 2), sowie möglicher Vorgehensweisen und Heurismen, welche Ideen für eine mögliche Lösung liefern (Schritt 3) und das Verfolgen derartiger Ideen, bis eine Lösung gefunden ist (Schritt 4). Der dargestellte Ausschnitt des Lösungsbeispiels überlässt die übrigen Phasen des Problemlöseprozesses dem Lernenden. Je nach Konzeption der Unterrichtseinheit kann dies für selbstgesteuerte Lernprozesse um die fehlenden Phasen („Implementation“ und „Verification“, gegebenenfalls „Rückschau und Metakognition“) erweitert oder diese im Klassenverband gemeinsam mit allen Lernenden thematisiert werden.

Susi versucht vergeblich, das gegebene Problem zu lösen. Kurz bevor sie aufgeben will, bittet sie dich um Hilfe!

S: „Ich komme mit der Lösung des Problems einfach nicht weiter! Gesucht ist eine minimale Abstandssumme. Ich glaube, wir sollten zuerst überlegen, welche Begriffe wir im Zusammenhang mit *(kürzesten) Abständen* bereits kennen. Leider war ich in dieser Stunde krank. Erinnerst du dich noch an Aspekte, die mit Abständen zu tun haben?“

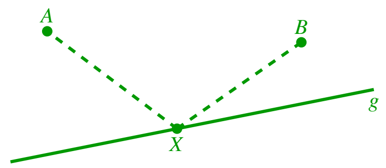
Strecke:
Kürzeste Verbindung zweier Punkte

Lotstrecke:
Kürzeste Verbindung zwischen Punkt und Gerade

Abstände bleiben durch Kongruenzabbildungen (Drehen, Spiegeln, Verschieben) erhalten

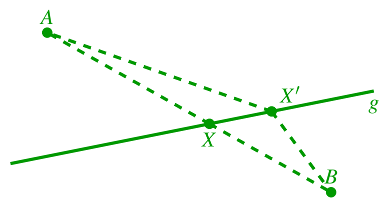
S: „Super, das sollte uns beim Lösen des Problems weiterhelfen! Aber dann ist die kürzeste Verbindung von A und B doch einfach die Strecke...Wieso sind dann noch andere Sachen vorgegeben? Achso, wir suchen die kürzeste Verbindung zu einem Punkt auf der Geraden. Aber das ist doch dann der Punkt auf g, von dem die Lotstrecke ausgeht (Lotfußpunkt)! Oh Moment, das sind ja zwei verschiedene Punkte auf g... Ich denke, eine Skizze könnte uns helfen, die Aufgabenstellung besser zu verstehen und vielleicht auch weitere Ansätze für die Lösung liefern. Könntest du eine Skizze anfertigen, die das Problem geeignet veranschaulicht?“

Eine entsprechende Skizze zur Problemstellung sieht wie folgt aus:



S: „Schade, dass die beiden Punkte A und B auf der gleichen Seite der Geraden liegen. Würde man diese Bedingung weglassen, wäre die Lösung des Problems einfach. Ich hoffe du konntest meinem Gedankengang folgen. Kannst du begründen, wieso die Lösung für zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Gerade einfach ist, und wie der Punkt X dann gewählt werden muss?“

Liegen die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten der Geraden, so ist die kürzeste Verbindung dieser Punkte die Strecke von A nach B. Die Strecken $[AX']$ und $[BX']$ ergeben für einen beliebigen Punkt X', welcher auf g liegt, eine weitere Verbindung der Punkte A und B, allerdings ist die Summe dieser Streckenlängen nur dann minimal, wenn X' bereits auf der Strecke $[AB]$ liegt.



S: „Womöglich können wir diese Erkenntnis nutzen, um auch das eigentliche Problem zu lösen. Dafür müssten wir nur den Punkt B auf die andere Seite der Geraden bringen, ohne dass sich dessen Abstand zu den Punkten der Geraden ändert. Wenn wir das schaffen, können wir X genauso bestimmen wie gerade. Fällt dir eine Möglichkeit ein, mit der wir dies erreichen können, und kannst du das Problem damit lösen?“

Der zu B zugehörige Punkt B' auf der anderen Seite der Geraden g, welcher bezüglich aller Punkte der Geraden den gleichen Abstand hat, ist genau der Bildpunkt von B unter Achsenspiegelung an g. Wie im vorigen Schritt kann X nun konstruiert werden als Schnittpunkt der Gerade g mit der Strecke $[AB']$. Die Minimalität der Summe der Abstände folgt mit der Erhaltung der Streckenlängen bei Achsenspiegelung und der Erkenntnisse aus dem vorigen Schritt.

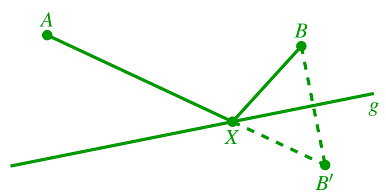


Abbildung 17: Ausschnitt eines heuristischen Lösungsbeispiels zu Problem 3: Erarbeitung einer Lösung in Form eines fiktiven Dialoges, vorgegebene Bestandteile (schwarz), Lösungsvorschläge für auszufüllende Bestandteile (grün)

Neben verschiedenen Möglichkeiten der Umsetzung bietet das gestellte Problem auch die Chance, einen Begründungsprozess anzuschließen. Dabei ist zu zeigen, dass die Winkel $\measuredangle AXF_A$ und $\measuredangle F_BXB$ für einen optimalen Punkt X übereinstimmen, wobei F_A und F_B die zu A und B gehörigen Lotfußpunkte auf g sind. Dies entspricht für den in Abbildung 16 dargestellten Lösungsweg eher einer Routineaufgabe unter Anwendung der Sätze zu Scheitel- und Nebenwinkel am Punkt X und der Erhaltung von Winkeln bei Achsenspiegelung. Eine interessante Anwendung des Problems ergibt sich als Konsequenz dieser Aussage. Für den minimalen Weg von A über X nach B gilt damit das *Reflexionsgesetz* („Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel"). So kann ein Billardspieler eine Kugel B über Bande anspielen, indem er von Kugel A in Richtung des Spiegelbildes B' von B an der jeweiligen Tischbande g zielt (vgl. Grieser 2017, S. 219).

Zusammengefasst hat dieses Problem durch verschiedene Möglichkeiten der Umsetzung das Potential, sowohl Lösungsstrategien, Heurismen und Hilfsfragen, als auch die allgemeinen Schritte von Problemlöseprozessen zu thematisieren. Die relativ geringen inhaltlichen Vorkenntnisse, welche für eine Problemlösung nötig sind, ermöglichen einen Einsatz des Problems in einer vergleichsweise niedrigen Jahrgangsstufe, um Heurismen und Prozessschritte zu fördern.

Ein Übertragen der Fragestellung von der ebenen Geometrie in die Raumgeometrie ist denkbar, wodurch sich Anknüpfungspunkte des Problems in Sekundarstufe II ergeben. Ersetzt man die Gerade g in der Fragestellung von Problem 3 durch eine Ebene E, ergibt sich ein neues Problem, für dessen Lösung die gleiche Idee tragfähig ist wie im ebenen Fall. Die Spiegelung eines Punktes (beispielsweise B) an der gegebenen Ebene löst das Problem. Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden des Spiegelpunktes B' und dem anderen gegebenen Punkt A mit der Ebene. Ein interessanteres Problem, gerade für Lernziele aus den Kompetenzbereichen Problemlösen und Argumentieren, ergibt sich, wenn die Fragestellung nahezu unverändert bleibt:

> „Gegeben ist eine Gerade g im Raum und zwei Punkte A und B, welche nicht auf der Geraden liegen. Finde denjenigen Punkt X auf der Geraden, sodass die Summe der Abstände von A zu X und von B zu X minimal ist."

Im konkreten Fall bei gegebenen Koordinaten der Punkte A und B und einer Geradengleichung für g reduziert sich die Problemstellung zu einer Extremwertaufgabe. Der euklidische Abstand der Punkte A und B zu einem allgemeinen Punkt X der Geraden g liefert eine Funktion in einer Variablen, welche mit Methoden der Analysis auf Minima untersucht werden kann. Die Lösung dieses Extremwertproblems liefert dann den gesuchten Punkt und gleichzeitig die minimale Abstandssumme als Funktionswert.[21]

Für eine allgemeine Lösung ist es erforderlich, die gedanklichen Schritte der Lösung zu Problem 3 in geeigneter Weise an das neue Problem anzupassen, anstatt nur die fertige Idee zu modifizieren. Zuerst kann durch eine Fallunterscheidung ein Teil des Problems bereits ohne weitere Anstrengungen gelöst werden.[22] Liegen die Gerade g und die Punkte A und B in einer Ebene, kann der Punkt X genauso wie in Problem 3 konstruiert werden (je nachdem, wie A und B zur Geraden liegen, benötigt man zur Lösung eine Spiegelung oder kann A und B direkt verbinden). Im anderen Fall können jeweils durch A und B zwei Ebenen E_A und E_B konstruiert werden, die g enthalten (da die Punkte nach Voraussetzung nicht auf der Geraden liegen, sind diese eindeutig). Diese Ebenen sind verschieden und besitzen die Gerade g als Schnittgerade. Im Folgenden

[21] Ein konkretes Beispiel ist $A = (1,-1,0)$, $B = (0,2,1)$ und $g = (1,0,1) + \lambda(2,1,-1)$. Der Punkt mit minimalem Abstand ist $(1,0,1)$ (für $\lambda = 0$) mit minimaler Abstandssumme $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

[22] Die allgemeine Konstruktion deckt den Spezialfall mit ab, viele der Schritte sind dann jedoch überflüssig.

besteht das Ziel darin, einen der Punkte (ohne Einschränkung den Punkt B) derart in die Ebene E_A zu übertragen, dass sich die Abstände eines beliebigen Punktes der Geraden g zum neuen Punkt B' im Vergleich zu den Abständen zum Punkt B nicht ändern.[23] Dies kann erreicht werden, indem der Punkt D auf g mit minimalem Abstand zu B ermittelt wird (Senkrechte zu g durch B). Von diesem kann eine Senkrechte zur Geraden konstruiert werden, welche in der Ebene E_A liegt (Rechnerisch: Der Richtungsvektor der gesuchten Geraden ist das Kreuzprodukt des Normalenvektors der Ebene E_A und des Richtungsvektors der Geraden g, den Aufpunkt bildet D). Ein Schnittpunkt dieser Senkrechten mit einer Kugel um D durch B liefert einen Punkt B' in der Ebene E_A, welcher sich bezüglich der Abstände zu Punkten auf g genauso verhält wie der Punkt B.[24] Nachdem die Gerade g sowie die Punkte A und B' in einer Ebene E_A liegen, kann der gesuchte Punkt X mit den Ergebnissen aus Problem 3 konstruiert werden (vgl. Abbildung 18).

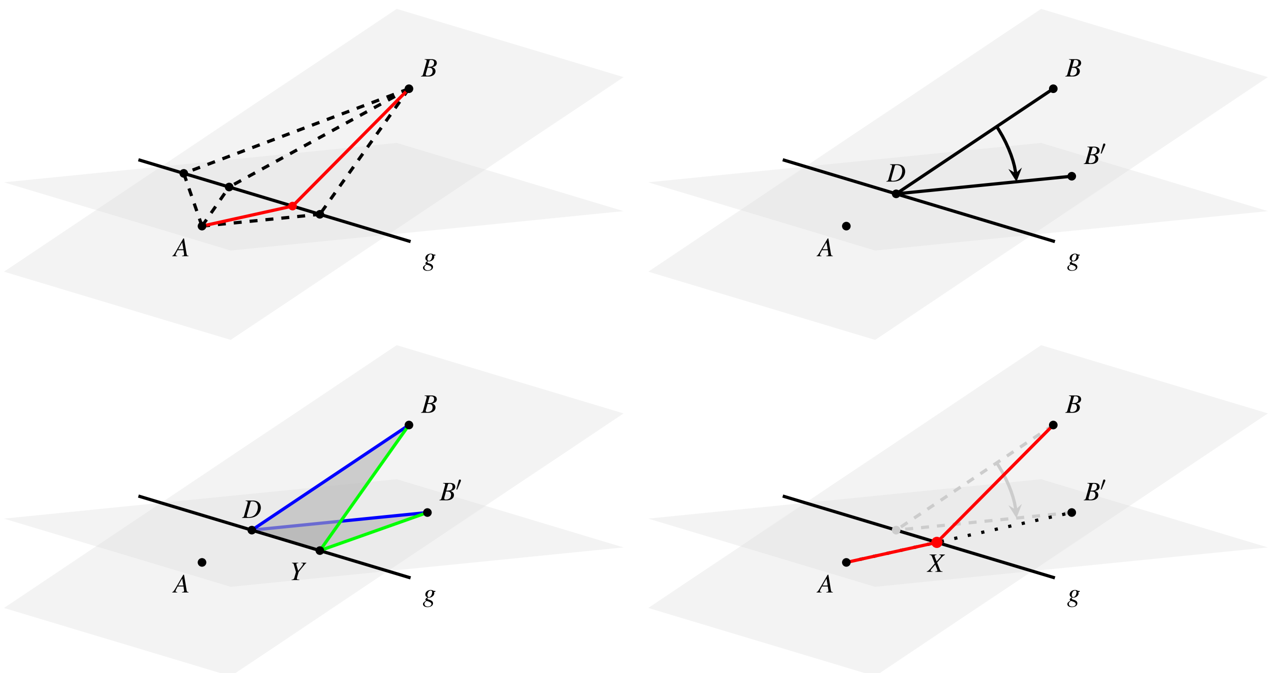


Abbildung 18: Lösungsskizze zur Erweiterung des ebenen Problems auf Raumgeometrie (v.l.n.r; v.o.n.u): Skizze der Problemstellung (gesuchte minimale Lösung: rot, Schritt 1), Übertragen von Punkt B in die Ebene E_A unter Erhalten des Abstandes (Schritt 2), Begründung für gleiche Abstände von Punkten Y auf g zu B und B' (grau markierte Dreiecke sind kongruent, Schritt 3), Konstruktion des gesuchten Punktes X mit den Ergebnissen des ebenen Problems (Schritt 4).

[23] Diese Idee wird in ähnlicher Form bereits im ebenen Problem verfolgt. Die entsprechende Lösung ist hier das Spiegeln an der Geraden g. Eine Spiegelung an der Geraden reicht allerdings im Raum nicht aus, da der gespiegelte Punkt nicht automatisch auf der Ebene E_A liegt.

[24] Dieser Punkt B' ist nicht eindeutig, da die Kugel zwei Schnittpunkte mit der Senkrechten besitzt. Beide können im Folgenden für die Lösung verwendet werden, auch wenn für einen Punkt wie im ebenen Problem eine weitere Spiegelung an g erfolgen müsste (diese ergibt dann genau den anderen Schnittpunkt).

Auch wenn die (allgemeine) Lösung dieses Problems eine Herausforderung darstellt, können die darin verwendeten Heurismen (Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten, Analogieschlüsse/Rückführung auf Bekanntes, Transformationsprinzip, Prinzip der Fallunterscheidung, etc.), gegebenenfalls unter Zuhilfenahme der in Abschnitt 4.1.2 dargestellten allgemeinen Möglichkeiten einer Umsetzung, durch diese Problemstellung auch in der Sekundarstufe II thematisiert werden. Zudem offenbart sich gerade in höheren Jahrgangsstufen die eigentliche Dynamik mathematischer Prozesse, bei denen die Lösung eines Problems häufig neue (weiterführende) Fragestellungen aufwirft, für die Lösung dieser neuen Probleme genutzt werden kann und gleichzeitig verschiedene Thematiken miteinander vernetzt (vgl. dazu auch die Funktionen eines Beweises in Abschnitt 3.1.2). Daneben können wichtige Konzepte der Analysis, analytischen Geometrie sowie räumliches Vorstellungsvermögen, unterstützt durch geeignete dreidimensionale Geometriesoftware, geschult werden. Gleichzeitig sind Abstufungen in der Bearbeitung der Aufgabe mit verschiedenen Schwierigkeiten (Extremwertaufgabe vergleichsweise eher als Routineprozedur, allgemeine Lösung als Problemlöseprozess) denkbar.
Eine weitere Variation der unterrichtlichen Umsetzung besteht darin, die Fragestellungen, wie sich die ebene Lösung im Raum erweitern lässt, durch leistungsstärkere Lernende selbst entwickeln und im Anschluss untersuchen zu lassen. Dabei werden diese in die Rolle eines Fachwissenschaftlers versetzt, welcher ausgehend von gelösten Problemen im Kontext seiner aktuellen Forschung neue Hypothesen generiert und diese dann auf Plausibilität und Lösbarkeit untersucht. Gleichzeitig stoßen einige Lernende an Grenzen ihres mathematischen Wissens und können sich mit einer selbst entwickelten Fragestellung beschäftigen, welche nicht in jedem Fall lösbar sein muss und im Falle der Lösbarkeit häufig ein hohes Maß an geistiger Beweglichkeit erfordert. Eine geeignete, individuelle Unterstützung dieser Prozesse durch den Lehrenden und eine Kommunikation der Ergebnisse im Klassenverband könnte dabei den Lerneffekt erhöhen.

4.2.4 Teilung von Liniensegmenten

Problem 4:

Abbildung 19 zeigt zwei verschiedene Konstruktionen, mit denen eine gegebene Strecke $[AB]$ in drei gleich große Abschnitte geteilt werden kann. Begründe, wieso die gezeigten Drittelungsverfahren richtig sind.
In der linken Konstruktion sind die Punkte A und B jeweils die Kreismittelpunkte. In der rechten Konstruktion ist H ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Geraden durch A und B liegt. Die Punkte M_i (für $i \in \{1, \ldots, 3\}$) entstehen jeweils durch Halbieren der zugehörigen Strecken.

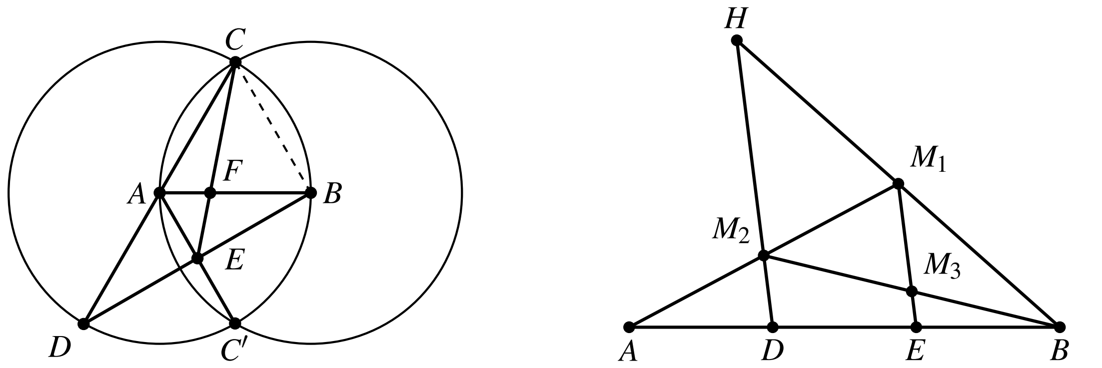


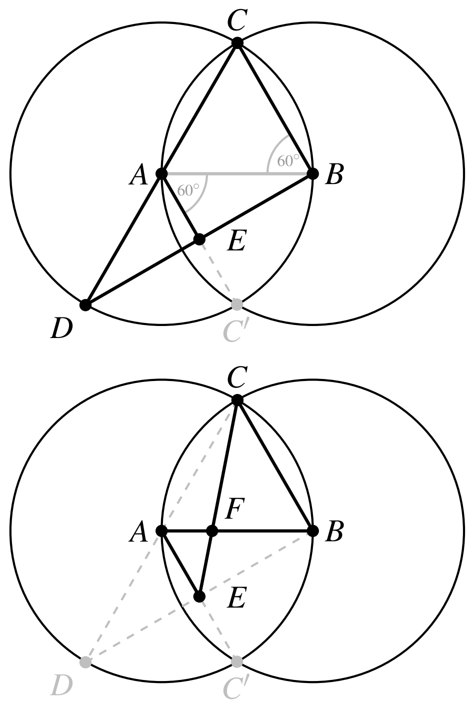
Abbildung 19: Skizze zu Problem 4: Drittelung einer Strecke nach *Scott Coble* (links, Variante 1) und nach *Hans Walser* (rechts, Variante 2) [25]

Lösung 4:

Beide Varianten der Drittelung können mithilfe geeigneter Strahlensatzfiguren begründet werden.

<u>*Variante 1:*</u>

Da A der Kreismittelpunkt ist, sind die Strecken $[AC]$ und $[AD]$ gleich lang. Aus dieser Längengleichheit ergibt sich das Verhältnis von $1:2$ von $\overline{AD}$ zu $\overline{CD}$. Da beide Kreise den gleichen Radius besitzen, sind die Dreiecke ABC sowie $AC'B$ gleichseitig und jeder Innenwinkel misst $60°$. Mit der Umkehrung des Wechselwinkelsatzes an parallelen Geraden ergibt sich aus der Gleichheit der eingezeichneten Winkel insbesondere die Parallelität der Strecken $[AC']$ und $[BC]$. Damit erfüllt die eingezeichnete Figur (Abb. 20 (a)) die Voraussetzungen des Strahlensatzes. Insgesamt folgt damit für die Streckenlängen $\overline{AE}$ zu $\overline{BC}$ ebenfalls ein Verhältnis von $1:2$.



[25] vgl. Nelsen (2016, S. 30) (Konstruktion links in Abbildung 19) und Walser (2007, S. 2) (Konstruktion rechts in Abbildung 19).

Das Einzeichnen einer weiteren Strahlensatzfigur (Abb. 20 (b)) liefert für die Streckenlängen $\overline{AF}$ zu $\overline{FB}$ genauso ein Verhältnis 1 : 2. Damit ist $\overline{AF}$ genau $\frac{1}{3}\overline{AB}$ und die Konstruktion ist begründet.

Variante 2:

Die Strecken $[HM_1]$ und $[BM_1]$, sowie $[M_2M_3]$ und $[BM_3]$, sind jeweils gleich lang, da die Punkte M_1 und M_3 nach Voraussetzung die Strecken $[HB]$ und $[BM_2]$ halbieren. Damit ergibt sich sowohl für $\overline{BM_1}$ zu $\overline{BH}$ als auch für $\overline{BM_3}$ zu $\overline{BM_2}$ ein Verhältnis von 1 : 2. Mit der Umkehrung des Strahlensatzes sind die Geraden HM_2 und M_1M_3 parallel (Abb. 20 (c)). Nachdem auch für die Längen $\overline{AM_2}$ zu $\overline{AM_1}$ das Verhältnis 1 : 2 beträgt, ergibt sich dieses Verhältnis durch Betrachtung zweier weiterer Strahlensatzfiguren (Abb. 20 (d)) ebenfalls für $\overline{AD}$ zu $\overline{AE}$ sowie $\overline{BE}$ zu $\overline{BD}$. Insgesamt sind also die Strecken $[AD]$, $[DE]$ und $[BE]$ gleich lang.

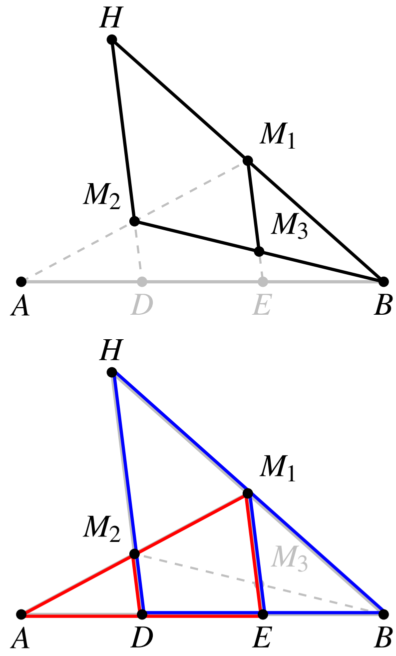


Abbildung 20: Skizzen zu Lösung 4

Didaktische Reflexion

Problem 4 bietet in obiger Form in erster Linie die Möglichkeit, eine vorgegebene Behauptung von den Lernenden begründen zu lassen. Durch die konkrete Vorgabe der vollständigen Konstruktion ist dabei bereits eine Menge an Informationen vorhanden, welche von den Schülern auf Zusammenhänge untersucht werden kann. Gleichzeitig liefert die vorgegebene Skizze weitere Ideen, die aus der Anschauung hervorgehen (Beispiele: Parallelität von Strecken, gleiche Länge von Strecken, etc.). Dies erleichtert einerseits die explorativen Tätigkeiten im Beweisprozess, verleitet Lernende jedoch ebenfalls zum Aufstellen und Verwenden von unbewiesenen Hypothesen. Diese werden dann im Beweis als gegeben akzeptiert und nicht hinterfragt, da sie aus der Anschauung offensichtlich gelten. Bestenfalls ist die aufgestellte Hypothese richtig, wodurch der darauf aufbauende Beweis lediglich eine Lücke aufweist. Andernfalls verliert der elaborierte Beweis die Gültigkeit. Bei einer individuellen Förderung der Beweisaktivitäten oder einer gewinnbringenden Diskussion im Klassenverband kann dieser Nachteil genutzt werden, um auf derartige Fehler, auch im Hinblick auf zukünftige Beweise, hinzuweisen und damit die Notwendigkeit, die Funktionen und gleichzeitig die Teilaspekte eines Beweises (insbesondere Wahrheit und Gültigkeit) zu thematisieren.
Eine Variation der Aufgabenschwierigkeit im Sinne einer Differenzierung nach Leistungsstand ist durch die Maßnahmen aus Abschnitt 4.1.2 auch für dieses Problem möglich. Die Vorgabe von mehr oder weniger vielen Hilfsfragen („Kannst du die einzelnen Schritte der Konstruktion nachverfolgen? Untersuche jeden Schritt auf mögliche Zusammenhänge!“), Heurismen (Zerlegen und Ergänzen) und inhaltlichen Anknüpfungspunkten (Strahlensatz) erweitert die bereits vorhandenen Ansatzpunkte durch die gegebene

Skizze und erleichtern das Finden einer Beweisidee. Ebenfalls denkbar ist eine Umsetzung als heuristisches Lösungsbeispiel oder als Beweis ohne Worte, indem der Fokus auf den Konstruktionsprozess gelegt wird. Dadurch werden die einzelnen Schritte im Vergleich zur unübersichtlicheren Gesamtkonstruktion hervorgehoben und der Raum, in dem Lernende nach Anknüpfungspunkten und Zusammenhängen suchen, eingegrenzt. Eine Unterrichtssequenz, welche sowohl eigenständige Beweisaktivitäten mit anpassbarer Schwierigkeitsstufe, einen daran anknüpfenden Problemlöseprozess sowie die Metakognition dieser Prozesse und eine Bewertung der Inhalte bietet, ist durch folgende Erweiterung des oben genannten Problems möglich:

1. Begründe, dass die Konstruktionen zur Drittelung einer Strecke nach Coble / Walser richtig sind.
2. Reduziere die jeweilige Konstruktion auf die entscheidende Idee. Entwickle (gegebenenfalls ausgehend von dieser Idee) ein eigenes, möglichst einfaches, konstruktives Verfahren zur Drittelung einer Strecke oder sogar zur Teilung einer Strecke in beliebige rationale Verhältnisse.
3. Vergleiche dein eigenes und die vorgegebenen Verfahren und bewerte deren Anwendbarkeit. Achte dabei auch auf die benötigen Voraussetzungen für die jeweilige Konstruktion.

In Teilaufgabe 1 liegt der Fokus auf dem Beweisprozess, speziell den Phasen 3 - 7 im Modell von Reiss und Ufer (Abschnitt 3.3.2). Eine Exploration ist im Rahmen einer konkreten Konstruktion möglich, beispielsweise durch das Messen von Strecken und das Erkennen von Regelmäßigkeiten. Auch eine abstrakte Exploration anhand der Skizzen ist denkbar. Ausgehend davon entstehen mögliche Beweisideen, welche verfolgt werden können. Nachdem eine Begründung für das Konstruktionsverfahren gefunden wurde, kann diese nach den formalen Standards in einen formal-deduktiven Beweis überführt werden. Maßnahmen zur Unterstützung dieses Prozesses wurden oben bereits genannt. Teilaufgabe 2 dient zuerst der Metakognition des Beweisprozesses, indem dieser auf die Kernaspekte begrenzt werden muss. Dafür ist es nötig, den Beweisprozess und die Notwendigkeit einzelner Schritte durchdrungen zu haben, um zu entscheiden, welcher Schritt zentral ist. Für beide Probleme ist das Ausnutzen von Strahlensätzen die entscheidende Idee. Diese kann im zweiten Teil für die Entwicklung einer eigenen Beweisidee genutzt werden. Dabei werden implizit Funktionen eines Beweises (speziell die entdeckende und die Aufbaufunktion, vgl. Abschnitt 3.1.2) angesprochen, welche in einer geeigneten Umsetzung auch thematisiert werden können. Gleichzeitig kann das eigenständige Problemlösen durch diese Erweiterung gefördert werden. Während auch hier die Prozessschritte geübt werden, sind als Ergebnisse dieses Problemlöseprozesses je nach Kreativität der Lernenden verschiedene eigene Konstruktionsverfahren denkbar, welche mehr oder weniger nah an den vorgegebenen Konstruktionen sind. Der Beweisprozess kann durch die vorgegebene Skizze und mögliche Hilfestellungen bezüglich des Schwierigkeitsgrades vergleichsweise leicht gestaltet werden. Dagegen ist der anschließende Problemlöseprozess eine größere Herausforderung und erfordert gewisse Vorerfahrungen der Lernenden zum Problemlösen. Beispiele möglicher eigener Konstruktionsverfahren sind nachfolgend dargestellt:

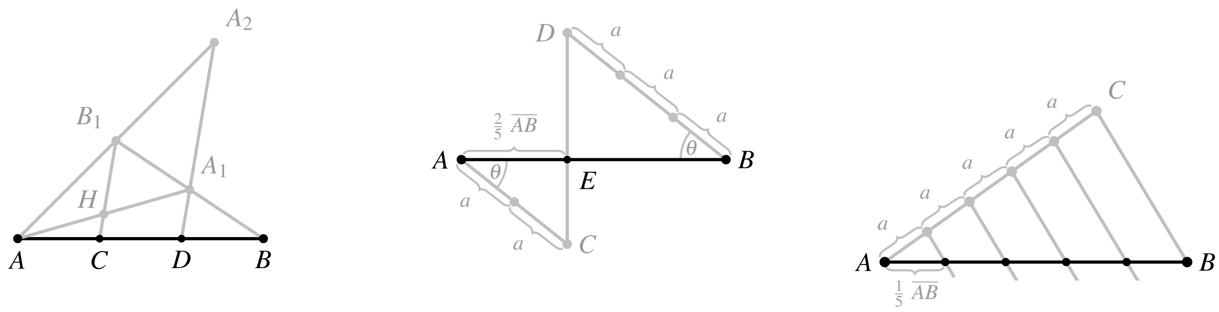


Abbildung 21: Beispiele möglicher Schülerlösungen zur Teilung einer Strecke in einem (beliebigen) rationalen Verhältnis

Die erste mögliche Schülerlösung (vgl. Abbildung 21, Skizze links) basiert auf der Konstruktion von Walser. Ein beliebiger Hilfspunkt H, der nicht auf der Geraden durch A und B liegt, wird genutzt, um Strecken mit einem bestimmten Verhältnis zu erzeugen. Durch Punktspieglung von A an H entsteht der Punkt A_1 und die zugehörigen Strecken $[AH]$ und $[A_1H]$ sind gleich lang. Genauso ergeben sich die Punkte B_1 durch Spiegeln von B an A_1 und A_2 durch Spiegeln von A an B_1. Die Spiegelzentren halbieren dabei jeweils die zugehörigen Strecken zwischen Punkt und Spiegelpunkt. Die Drittelung entsteht nun durch Schneiden der Geraden AB mit den zueinander parallelen Geraden B_1H und A_2A_1. Die entstehende Figur gleicht derer der ursprünglichen Konstruktion nach Walser, genauso wie die Begründung der dadurch entstehenden Drittelung mithilfe des Strahlensatzes. Der einzige Unterschied besteht im Erzeugen der gewünschten Verhältnisse durch Verdoppeln (Punktspiegelung) anstatt durch Halbieren der Strecken.
Die zweite mögliche Schülerlösung (vgl. Abbildung 21, mittlere Skizze) verwendet das zentrale Begründungselement der Konstruktion nach Coble. An den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke werden zwei zueinander parallele (Halb-)Geraden konstruiert. Durch Abtragen von Vielfachen eines beliebig festgelegten Abstandes a auf diesen Geraden ausgehend von den Endpunkten der Strecke entstehen die Punkte C und D. Der Schnittpunkt der Strecke $[AB]$ mit der Strecke $[CD]$ teilt die gegebene Strecke im Verhältnis $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{AC} : \overline{BD}$. Dieses Verfahren benötigt im Vergleich zur gegebenen Konstruktion von Coble die Konstruktion einer parallelen Gerade zu einer gegebenen Geraden durch einen Punkt oder die Konstruktion eines beliebig festgelegten Winkels θ. Sie bietet den Vorteil, dass die Strecke in einem beliebigen, vorgegebenen, rationalen Verhältnis geteilt werden kann.
Die dritte mögliche Konstruktion (vgl. Abbildung 21, Skizze rechts) verwendet ebenfalls den Strahlensatz als zentrale Idee. Von einem Endpunkt der Strecke (ohne Einschränkung der Endpunkt A) wird eine beliebige zur Strecke nicht parallele (Halb-)Gerade gezeichnet. Anschließend wird ein Vielfaches eines beliebig festgelegten Abstandes a auf dieser Halbgeraden abgetragen. Der entstandene Endpunkt C wird mit dem Endpunkt B der Strecke verbunden. Durch die Punkte der äquidistanten Teilung der Strecke $[AC]$ werden parallele Geraden zur Strecke $[BC]$ konstruiert. Die Schnittpunkte der parallelen Geraden mit der gegebenen Strecke $[AB]$ teilen letztere in äquidistante Teile auf. Die Anzahl dieser Teilstücke entspricht dem Vielfachen der Länge a, welches auf

der Halbgeraden abgetragen wurde. Auch diese Konstruktion benötigt die Konstruktion einer parallelen Gerade zu einer gegebenen Gerade durch einen Punkt und ermöglicht die Teilung in ein beliebiges rationales Verhältnis.

Im dritten Schritt sollen dann die gefundenen Verfahren verglichen und bewertet werden. Während für das Verfahren der Drittelung nach Coble keinerlei weiteren Konstruktionen benötigt werden, um eine Strecke zu dritteln, muss für das Verfahren nach Walser die Konstruktion des Mittelpunkts einer Strecke bekannt sein. Dagegen ist letzteres Verfahren übersichtlicher und erfordert (vor allem bei einer Umsetzung mit dynamischer Geometriesoftware, welche bereits eine Funktion zur Halbierung einer Strecke besitzt) weniger Konstruktionsschritte.
Je nachdem, welche eigenen Ideen durch die Lernenden entwickelt wurden, erweitern sich die zu diskutierenden Aspekte. Genauso können Querbezüge zu anderen Unterrichtseinheiten hergestellt werden, die thematisch mit der Teilung von Strecken verknüpft sind. In jedem Fall dient diese Phase als Rückschau auf die komplette Unterrichtseinheit, wodurch eine Sicherung und Verknüpfung der fachlichen Inhalte stattfindet und auch Gelegenheiten entstehen, in denen methodische Aspekte des Problemlösens und Beweisens thematisiert werden können.
Insgesamt bietet die Erweiterung des Problems Ansatzpunkte, um sowohl eine gegebene Konstruktion zu beweisen, als auch eine eigene zu entwickeln. Inhaltlich ermöglichen diese Problemstellungen eine Vertiefung des Strahlensatzes und dessen Anwendbarkeit sowie eine Wiederholung verschiedener Konstruktionsvorschriften. Gleichzeitig bietet sich die Möglichkeit, die jeweiligen Prozesse zu reflektieren und einerseits Heurismen und Hilfsfragen, andererseits auch die zugrundeliegenden Prozessstrukturen zu thematisieren. Die abschließende Bewertung der Verfahren kann eine Kommunikation über mathematische Inhalte sowie über mathematische Arbeitsweisen (neue Theorie anhand bewiesener Aussagen entwickeln und Lösungswege mit den zur Verfügung stehenden Mitteln optimieren oder vereinfachen) fördern. Sowohl für den Beweis- als auch für den Problemlöseprozess sind verschiedene Schwierigkeitsstufen realisierbar, indem die Lernenden durch geeignete Hilfestellungen unterstützt oder die Anforderungen durch die Suche nach mehr oder weniger kreativen Lösungen individuell differenziert werden.

4.2.5 Vier Dreiecke gleicher Fläche

Problem 5:

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck, über dessen Seiten je ein Quadrat errichtet ist. Diese legen drei weitere Dreiecke, wie in Abbildung 22 gezeigt ist, fest. Zeige, dass die vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt besitzen.[26]

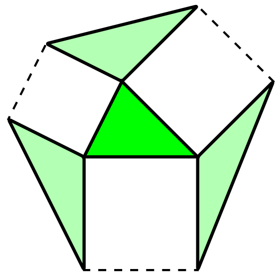


Abbildung 22: Skizze zu Problem 5

Lösung 5:

Durch Drehung eines der drei äußeren Dreiecke am jeweiligen Eckpunkt des ursprünglichen Dreiecks um 90° entsteht ein neues Dreieck (vgl. Abbildung 23, Dreieck ADC in der unteren Figur), da sich die gegenüberliegenden Winkel an einer Ecke des ursprünglichen Dreiecks α und β zu 180° ergänzen und die Längen der Dreiecksseiten, welche nach der Drehung aneinander liegen, als Seiten des Quadrats gleich sind. Dieses Dreieck ADC setzt sich aus dem ursprünglichen Dreieck ABC und einem der äußeren Dreiecke zusammen.
Für die Längen $\overline{AB}$ und $\overline{BD}$ der Grundseiten beider Dreiecke, aus denen sich das entstandene Dreieck zusammensetzt, gilt Gleichheit, da diese vor dem Drehen zwei Seiten desselben Quadrats bildeten. Außerdem besitzen die Dreiecke ABC und BDC die gleiche Höhe h. Mit der Flächenformel für Dreiecke folgt damit, dass beide Dreiecke die gleiche Fläche besitzen.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot h = A_{BDC}$$

Diese Argumentation ist für jedes der äußeren Dreiecke genauso möglich und damit haben alle vier Dreiecke den gleichen Flächeninhalt.

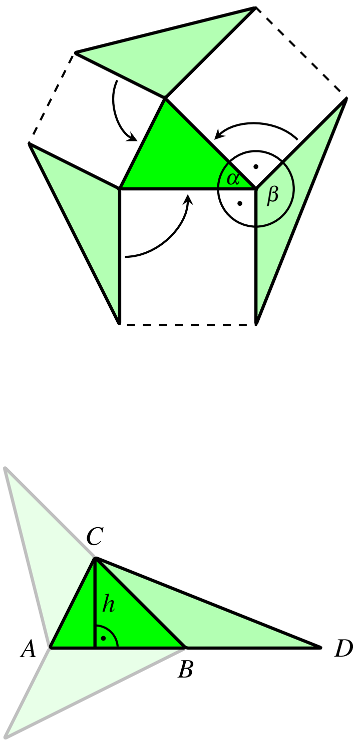


Abbildung 23: Skizze zu Lösung 5

Didaktische Reflexion

Das gegebene Problem kann in einer konkreten unterrichtlichen Umsetzung zum Erreichen verschiedener Lernziele genutzt werden. Inhaltlich sind Anknüpfungspunkte zur

[26] vgl. Nelsen (2016, S. 22).

Anwendung der Flächenformel für Dreiecke, zur Bestimmung von Winkeln oder deren Verhältnis zueinander sowie zu Kongruenzabbildungen vorhanden. Diese können entweder konkret in Form von Teilaufgaben fokussiert oder durch eine Öffnung der Aufgabenstellung („Untersuche die gegebene Figur auf Zusammenhänge zwischen verschiedenen Größen (Längen, Winkel, Flächen). Stelle Hypothesen auf und begründe diese!“) in Verbindung mit den Schritten 1 und 2 im Beweismodell von Reiss und Ufer (2009, vgl. Abschnitt 3.3.2) gefördert werden.
Zur Förderung der Problemlöse- und Argumentationskompetenz sind ebenfalls verschiedene Herangehensweisen denkbar. Für eine Lösung des Problems sind auf der Ebene der Heurismen in erster Linie das Anfertigen einer *Skizze* sowie das *Zerlegen und Ergänzen* hilfreich. Zur Förderung des erstgenannten Heurismus wäre eine Vorgabe des Problems in Textform und das selbstständige Anfertigen einer Skizze durch die Lernenden, gegebenenfalls durch explizite Nennung in der Aufgabenstellung, hilfreich. Dabei sollte beachtet werden, dass durch schlechte Skizzen, welche anstatt eines beliebigen Ausgangsdreiecks beispielsweise ein gleichschenkliges Dreieck vorgeben, Argumentationen auftreten können, welche nur einen Spezialfall des Problems abdecken und damit nicht die allgemeine Gültigkeit der Aussage bewiesen wird. Dieses Problem kann gleichermaßen genutzt werden, um herauszuarbeiten, welche Eigenschaften eine gute Skizze benötigt. Dies kann in einem individuellen Diskurs mit den Lernenden in Bezug auf deren eigene Skizzen oder durch Vorgeben verschiedener „ausgearbeiteter, schlechter Skizzen“ erfolgen. Genauso können die eingesetzten Heurismen in einer Phase der Metakognition thematisiert und je nach didaktischer Intention näher beleuchtet werden.
Neben Möglichkeiten, die die Heursimen zur Lösung fokussieren, ist ein Nachvollziehen der Beweisphasen (empirisch, operativ und formal) nach Brunner (2013) denkbar. Eine experimentelle Verifikation der Behauptung und das Untersuchen der gegebenen Figur auf verschiedene Zusammenhänge kann durch Messen verschiedener Strecken und/oder Winkel mithilfe eines Geodreiecks und die Berechnung der jeweiligen Flächen mithilfe der bekannten Formel für Dreiecke erfolgen. An diese Phase, welche Messfehler aufweisen kann, schließt eine Umsetzung mithilfe einer dynamischen Geometriesoftware an, welche diese Messfehler minimiert. In der oben geschilderten Situation, in welcher die eigentliche Hypothese erst durch die Lernenden entwickelt wird, können diese Schritte genauso durchlaufen werden. Dabei sind die Phasen der Suche nach einer Hypothese und des Experimentierens anhand von Beispielen nicht abzugrenzen. Aus dieser Phase ergeben sich verschiedene Zusammenhänge, welche für den späteren Beweis nützlich sind. Der Schritt hin zum operativen Beweis verlangt eine entscheidende Idee. Hierbei ist es nötig, die Fläche des ursprünglichen Dreiecks mit der Fläche der äußeren Dreiecke in Beziehung zu setzen. Eine erste Idee, welche den Lernenden als heuristische Regel beispielsweise aus der Herleitung der Flächenformel für Parallelogramme bekannt ist, ist die Zerlegung einer Figur in Dreiecke (oder andere Figuren, deren Fläche leicht berechenbar ist) und das Zusammensetzen zu einer bekannten Figur. Da das Problem bereits Dreiecke vorgegeben hat, könnte das Zusammensetzen dieser zu einer neuen Figur eine Möglichkeit sein, die Flächen in Beziehung zu setzen. Dieser Prozess kann durch Ausschneiden der Dreiecke und Zusammenlegen dieser konkret durchgeführt (enaktiv) und das Finden der entscheidenden Idee gegebenenfalls noch durch Vorgeben weiterer Zwischenziele und Hilfsfragen unterstützt werden. Die

gewonnenen Erkenntnisse können dann auf ikonischer Ebene in einer Skizze festgehalten und durch geeignete Notationen und Gleichungen zu den gefundenen Beziehungen in die symbolische Ebene übertragen werden.
Daran schließt sich die Phase an, den gefundenen operativen Beweis in einen formal-deduktiven Beweis zu überführen. Dabei werden die Notationen und gefundenen Zusammenhänge verwendet und in einer deduktiven Argumentationskette angeordnet. Abhängig vom Wissens- und Fähigkeitsstand der Lernenden kann diese Argumentation mehr oder weniger genau sein. Beispielsweise kann die Begründung dafür, dass die Drehung um 90° tatsächlich ein Dreieck ergibt, weil sich die Winkel zu 180° ergänzen, in Jahrgangsstufe 6 vernachlässigt werden. Dieser Teil des Beweises ist aus der Anschauung klar, sollte aber in höheren Jahrgangsstufen ebenfalls begründet werden.
Um den Fokus stärker auf die einzelnen Beweisphasen und weniger auf die Methoden zum Finden einer entscheidenden Idee zu legen, kann obige Suche durch einen Beweis ohne Worte (vgl. Abbildung 24) abgekürzt werden und stattdessen eine längere Phase der Metakognition anschließen. Hierbei ist die entscheidende Idee für den operativen Beweis durch nahezu unkommentierte Skizzen vorgegeben. Die Lernenden müssen dadurch lediglich verstehen, wieso die Aussage mit der gegebenen Operation begründet ist. Dieser Prozess ist keineswegs trivial, sondern erfordert die Kombination der gefundenen Zusammenhänge des Explorierens mit einer nicht selbst entwickelten Idee, deren Intention nicht bekannt ist. Gleichzeitig verbessert ein Beweis ohne Worte zukünftige Interaktionen der Lernenden, in denen sie die Argumentation des jeweils anderen verstehen müssen.

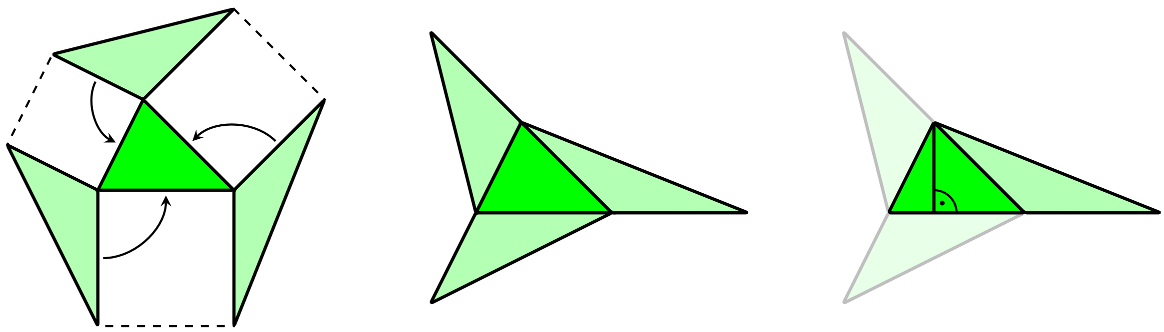


Abbildung 24: Beweis ohne Worte zu Problem 5: Schritte eines operativen Beweises (v.l.n.r.)

Eine Erweiterung des gegebenen Problems, welche speziell zum Anwenden und Üben des oben bereits angesprochenen Heurismus des *Zerlegens und Ergänzens* dienen kann, bietet die Siebtelung des Dreiecks in Abschnitt 4.2.6.

4.2.6 Siebtelung eines Dreiecks

Problem 6:

Gegeben ist ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten wie in Abbildung 25 gedrittelt und die entstandenen Punkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten des Dreiecks verbunden werden. Zeige, dass die Fläche des markierten Dreiecks genau einem Siebtel der Fläche des ursprünglichen Dreiecks entspricht.[27]

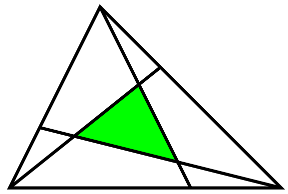


Abbildung 25: Skizze zu Problem 6

Lösung 6:

Im ersten Schritt der Lösung wird begründet, dass die Strecken $[AD]$ und $[DF]$ die gleiche Länge besitzen:
Durch Anwenden des Satzes von Menelaos auf die Dreiecke $AA'C$ und $BA'A$ und Ausnutzen der Längenverhältnisse der Grundseiten des Dreiecks ABC ergeben sich folgende Verhältnisse:

$$1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D}} \cdot \frac{\overline{A'B}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{AB'}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D}} \tag{1}$$

$$1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{A'C}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{A'F}} \tag{2}$$

Diese können genutzt werden, um die Länge der Ecktransversale $[AA']$ auf zwei Arten zu berechnen und daraus die oben behauptete Gleichheit der Streckenlängen zu folgern:

$$\overline{AA'} = \overline{AD} + \overline{A'D} \stackrel{(1)}{=} \overline{AD} + \tfrac{4}{3}\overline{AD} = \tfrac{7}{6}\overline{AD} + \tfrac{7}{6}\overline{AD}$$

$$\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{A'F} \stackrel{(2)}{=} \overline{AF} + \tfrac{1}{6}\overline{AF} = \tfrac{7}{6}\overline{AD} + \tfrac{7}{6}\overline{DF}$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{7}{6}\overline{AD} = \tfrac{7}{6}\overline{DF} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = \overline{DF}$$

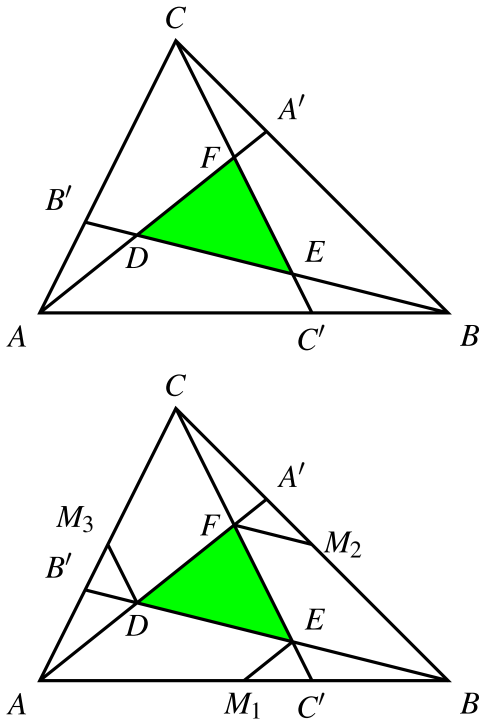


Abbildung 26: Skizzen zu Lösung 6: Einführen geeigneter Notationen

Diese Längengleichheit gilt genauso für die Strecken $[CF]$ und $[EF]$, sowie $[BE]$ und $[DE]$. Im nächsten Schritt werden die Mittelpunkte der Dreiecksseiten M_i für $i \in \{1,2,3\}$ konstruiert und die Strecken $[DM_3]$, $[EM_1]$ und $[FM_2]$ eingezeichnet. Diese sind zu den jeweiligen Ecktransversalen, beispielsweise $[DM_3]$ zu $[CC']$, als Folge der Umkehrung

[27] Spezialfall des Satzes von Routh (vgl. Baptist (1992, S. 62 f.))

des Strahlensatzes parallel, da beispielsweise sowohl $[AD]$ und $[DF]$, als auch $[AM_3]$ und $[CM_3]$ die gleiche Länge besitzen. Diese Erkenntnisse sind notwendig, um die in Abbildung 27 dargestellten Schritte eines operativen Beweises zu begründen. So lässt sich durch Anwenden der Sätze zu Scheitel- und Wechselwinkeln zeigen, dass nach der Drehung der Teildreiecke um die Mittelpunkte M_i Parallelogramme über den Dreiecksseiten entstehen, die jeweils in zwei zum grün markierten Dreieck DEF kongruente Dreiecke zerlegt werden können. Da die durchgeführte Operation flächenerhaltend ist, entspricht die ursprüngliche Fläche des Dreiecks ABC derer der letzten Figur, welche aus 7 kongruenten Dreiecken besteht. Insgesamt besitzt das grün markierte Dreieck also $\frac{1}{7}$ der Gesamtfläche des Dreiecks ABC.

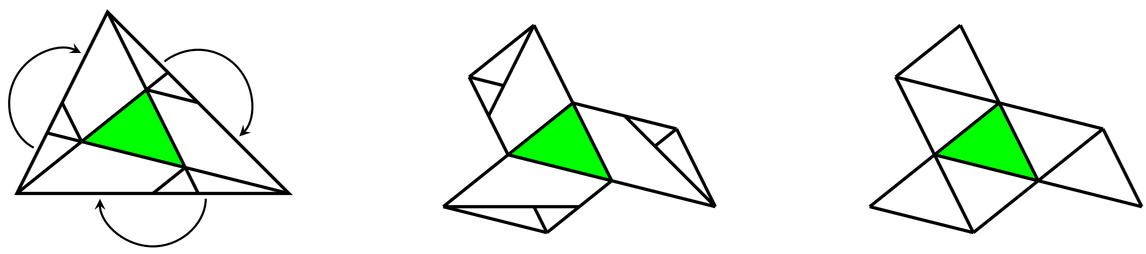


Abbildung 27: Beweis ohne Worte zu Problem 6: Operativer Beweis durch Zerlegen und Ergänzen[28]

Didaktische Reflexion

Problem 6 bietet verschiedene inhaltliche Anknüpfungspunkte, vor allem werden Themen wie beispielsweise Kongruenz und Strahlensatz aufgegriffen. Für einen lückenlosen Beweis ist in diesem Zusammenhang auch der Satz von Menelaos nötig, welcher selbst eine Folgerung des Strahlensatzes ist. Diese Ansatzpunkte können genutzt werden, um das Problem thematisch in den Unterricht zu integrieren.

Für eine Umsetzung zur Förderung von Problemlösefähigkeiten eignet sich das Problem, wie in Abschnitt 4.2.5 bereits erwähnt, besonders, um den Heurismus *Zerlegen und Ergänzen* zu thematisieren. Dabei kann das Problem als Erweiterung von Problem 5 genutzt werden, um den Heurismus zu vertiefen, oder unabhängig davon, um diesen neu einzuführen. Eine Verbindung der Probleme 5 und 6 ermöglicht außerdem, durch einen Vergleich der verwendeten Strategien in einer Rückschau, den Begriff der Analogie und das damit verbundene *Analogieprinzip* zu thematisieren. Dies kann vereinfacht werden, indem geeignete Hilfestellungen für die Lösung zur Siebtelung des Dreiecks explizit darauf hinweisen, entsprechende Aspekte der Lösungsidee aus Problem 5 (Zerlegen und Ergänzen) zu übertragen.

Eine entsprechende Umsetzung unabhängig von Problem 5 ist ebenfalls mit den Maßnahmen aus Abschnitt 4.1.2 denkbar. Geeignete Puzzlestücke thematisieren in diesem Fall die Einführung von Hilfslinien für eine Zerlegung und geeignete Kongruenzoperationen. Auch ist die Vorgabe des BoWs wie in Abbildung 27 denkbar, um den Fokus verstärkt auf die metakognitiven Prozesse zu legen und den verwendeten Heurismus

[28]vgl. Nelsen (2016, S. 23) (Siebtelung eines Dreiecks nach William Johnson und Joe Kennedy)

zu fokussieren. Eine weitere Möglichkeit, den dargestellten BoW zu nutzen, liegt darin, die Vor- und Nachteile der Beweise ohne Worte zu thematisieren. Dabei kann mehr oder weniger angeleitet untersucht werden, wie tragfähig der vorgegebene Beweis in Abbildung 27 ist. Einerseits wird die zentrale Beweisidee ideal veranschaulicht, andererseits besteht die Gefahr, Teilaspekte der Begründung aus der Anschauung als gegeben vorauszusetzen. Besonders der Aspekt der Parallelität der neu eingezeichneten Hilfslinien zu den gegebenen Ecktransversalen ist entscheidend, um einen formal-deduktiven Beweis zu entwickeln. Für diesen Aspekt ist der Satz von Menelaos ein geeignetes Hilfsmittel, welcher die Aussage in Kombination mit dem Strahlensatz begründet. Gleichzeitig sind dabei im Prozess der Beweisfindung die Heurismen des *Rückwärtsarbeitens* und erneut des *Zerlegens und Ergänzens* nötig, um den vorgegebenen Zielzustand des BoW zu begründen und ausgehend davon zu überlegen, wie dies erreicht werden kann. Ist dieser Satz bekannt, bietet Problem 6 Möglichkeiten, dessen Anwendungen zu thematisieren. Ist ausschließlich der Strahlensatz bekannt, kann der Satz des Menelaos als (zu beweisendes) Zwischenziel vorgegeben werden oder im Rahmen der Suche nach einer Beweisidee ein Zwischenziel entwickelt werden, welches dann den Beweis einer Hilfsaussage bedarf (beispielsweise „Um zu Begründen, dass in Schritt 2 des BoWs Parallelogramme entstehen, müsste ich zeigen, dass die Strecken $[AD]$ und $[DF]$ die gleiche Länge besitzen.“).
Derartige Hürden im Beweisprozess können genutzt werden, um zu illustrieren, wie der deduktive Aufbau der fachwissenschaftlichen Mathematik zustande kommt. Ein gegebenes Beweisbedürfnis ist nicht vollständig mit den zur Verfügung stehenden Mitteln lösbar, weshalb es nötig ist, vorher gewisse Hilfsaussagen zu beweisen.
Insgesamt bietet dieses Problem Möglichkeiten, sowohl inhaltlich an Themen des Lehrplans anzuknüpfen, als auch die Kompetenzen Problemlösen und Argumentieren in Form der Heurismen *Zerlegen und Ergänzen* und *Analogieprinzip* sowie in Form von Teilaspekten, welche beim Beweisen beachtet werden müssen (*formale Strenge* und *Lückenlosigkeit*), zu fördern. Als Spezialfall des Satzes von Routh bietet das Problem ebenfalls Möglichkeiten, gegebenenfalls für eine Förderung leistungsstärkerer Schüler nochmals erweitert zu werden. Auch können weitere Hypothesen bereits während der Exploration aufgestellt oder nach dem Beweisen der eigentlichen Aussage als Zusatz vorgegeben werden, die ebenfalls eine Vertiefung der Inhalte oder eine Förderung leistungsstarker Lernender ermöglichen. Ein Beispiel hierfür ist folgende Aussage, welche die Notationen aus Abbildung 26 benutzt:

> „Die Fläche des grün markierten Dreiecks DEF entspricht der Summe der Dreiecksflächen ADB', $C'BE$ und $FA'C$. Die Flächen der Dreiecke ADB', $C'BE$ und $FA'C$ sind dabei jeweils gleich groß.“

Ein Beweis der ersten Teilaussage ist dabei ohne die Berechnungen aus Lösung 6 möglich, indem die Flächen der Teildreiecke ABB', $C'BC$ und $AA'C$ und deren Schnittmengen geeignet zur Fläche von ABC in Beziehung gesetzt werden. Die zweite Teilaussage kann beispielsweise durch die berechneten Verhältnisse in Lösung 6 und ein Übertragen dieser auf gewisse Höhen in den jeweiligen Teildreiecken (z.B. ABB' und $C'BE$) mithilfe des Strahlensatzes begründet werden.[29]

[29] Auf einen ausführlichen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.

4.2.7 Pizza-Theorem

Problem 7:

Legt man durch einen beliebigen inneren Punkt eines Kreises 4 Geraden, sodass sich zwei benachbarte Geraden jeweils in einem 45°-Winkel schneiden, so erhält man eine Zerlegung des Kreises in 8 Flächen. Zeige, dass die Summe der grün markierten Kreisflächen in Abbildung 28 gleich der Summe der weiß markierten Kreisflächen ist.[30]

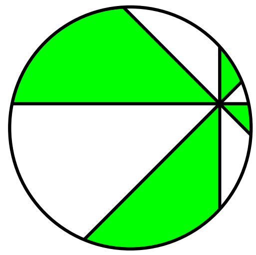


Abbildung 28: Skizze zu Problem 7

Lösung 7:

Der Beweis zu Problem 7 erfolgt elementargeometrisch durch Zerlegen der einzelnen Kreisflächen, sodass kongruente Flächen jeweils in unterschiedlich markierten Stücken des Kreises liegen. Diese Zerlegung entsteht durch Spiegeln geeigneter Schnittpunkte und Einzeichnen paralleler Hilfslinien zu den bereits vorhandenen Schnittgeraden. Kongruente Flächen besitzen dabei in Abbildung 29 die gleiche Nummer.
Die Zerlegung in Abbildung 29 (links) entsteht schrittweise durch Spiegeln der jeweiligen Teilstücke gemäß der Nummerierung. Im ersten Schritt soll Flächenstück (1) gespiegelt werden. Da dieses durch den Rand des Kreises begrenzt wird, sind geeignete Spiegelachsen diejenigen durch den Kreismittelpunkt. Für die möglichen Spiegelachsen durch den Kreismittelpunkt, die parallel zu den Schnittgeraden verlaufen, liegt die gespiegelte Fläche nur in einem Fall in einem grün markierten Bereich. Durch analoge Überlegungen ergeben sich die Spiegelungen der Flächen $(2) - (4)$ an der vertikalen bzw. horizontalen Spiegelachse durch den Kreismittelpunkt. Das Ziel der nächsten Schritte besteht darin, die übrigen Flächen abzubilden, welche teilweise durch den Rand des Kreises begrenzt sind. Auch hier werden Spiegelachsen verwendet, welche durch den Kreismittelpunkt und parallel zu den Schnittgeraden verlaufen. Dabei entstehen die Flächen $(5) - (7)$ jeweils durch die bereits gespiegelten Flächenstücke mithilfe geeigneter Hilfslinien. Zuletzt werden die übrigen, geradlinig begrenzten Flächen $(8) - (10)$ in geeigneter Weise gespiegelt. Dabei können auch Spiegelachsen verwendet werden, die nicht durch den Kreismittelpunkt verlaufen.
Um die Gültigkeit der Konstruktion zu begründen, ist es an einigen Stellen nötig, die Winkel der Schnittgeraden und Hilfslinien zueinander sowie die Längen gewisser Strecken der Zerlegung zu betrachten. Abweichende Ausgangssituationen können durch Drehungen und Spiegelungen entweder in die dargestellte Situation überführt, oder eine Zerlegung kann analog mithilfe der dargestellten Vorgehensweise entwickelt werden. Damit bildet der Beweis, welcher in der vorliegenden Arbeit dargestellt ist, nur einen Spezialfall des allgemeinen Beweises ab. Für einen vollständigen Beweis ist es nötig, ausgehend von einem beliebigen Punkt P im Inneren des Kreises zu argumentieren und die erwähnten Spiegelungen und Drehungen geeignet zu klassifizieren.

[30] vgl. Carter und Wagon (1994, S. 267). Weitere Ausführungen zum Pizza-Theorem finden sich in Gallin (2011) und Kroll und Jäger (2010)

Diese Ausführungen benötigen jedoch ein höheres Maß an formalen Fallunterscheidungen und werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, da diese für unterrichtliche Zwecke allenfalls einen Zusatz darstellen und alle Fallunterscheidungen auf die beschriebene Kernidee abzielen.

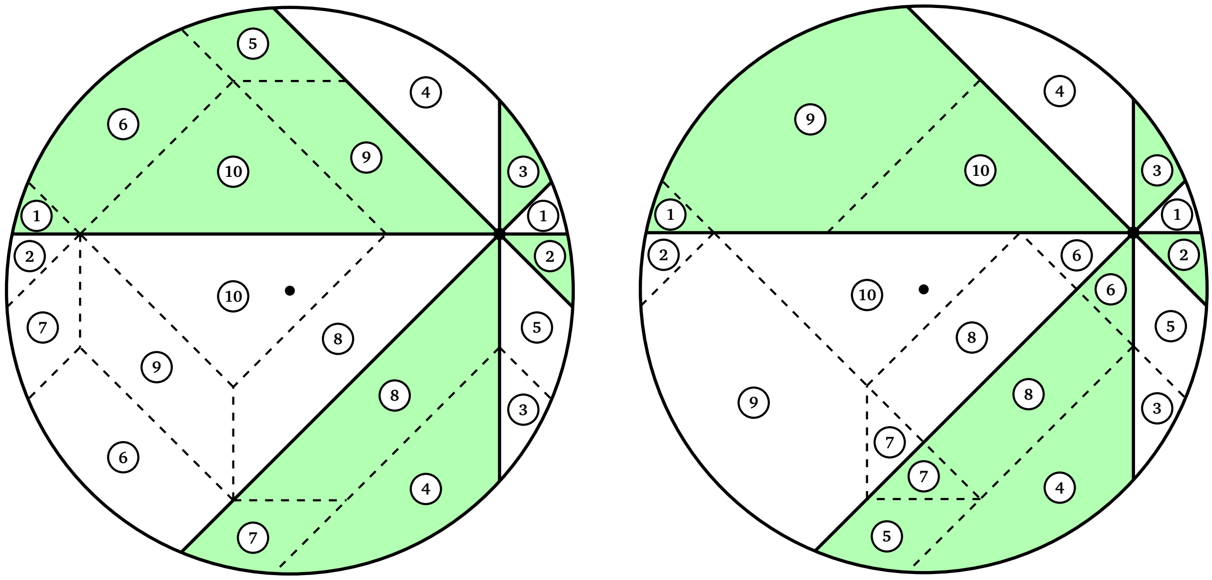


Abbildung 29: Skizzen zu Lösung 7: Beweis des Pizza-Theorems (für 4 Geraden) durch Zerlegen des Kreises in einander entsprechende Teilflächen (links: eigene Zerlegung (basierend auf Carter und Wagon); rechts: Zerlegung nach Carter und Wagon (1994))[31]

Didaktische Reflexion

Die Aussage von Problem 7, welches häufig auch als Pizza-Theorem bezeichnet wird, kann genutzt werden, um eine Pizza gleichmäßig auf 2 Personen aufzuteilen, ohne dass sich eine der Parteien benachteiligt fühlt. Die übliche Art eine Pizza durch den Mittelpunkt derselben zu teilen, ist ein Spezialfall des Pizza-Theorems und hat den Nachteil, dass der Belag selten gerecht aufgeteilt wird. Eine Möglichkeit der gerechten Teilung einer Pizza könnte als Ziel verfolgt werden, bei dem der Beweis des Pizza-Theorems ein erstes Zwischenziel darstellt. Damit liefert das Problem einen Anknüpfungspunkt an den Alltag der Lernenden und kann helfen, eine mögliche emotional-motivationale Barriere zum Problemlösen und Beweisen zu überwinden und die Beweisnotwendigkeit aufzeigen. Gleichermaßen bietet das Problem die Möglichkeit, verschiedene Heurismen (beispielsweise *Zerlegen und Ergänzen*, *Rückwärtsarbeiten*, *Symmetrieprinzip*, *Rückführung auf Bekanntes* sowie *Betrachten von Spezialfällen*) zu thematisieren oder anzuwenden. Eine Umsetzung dessen kann genauso unter Verwendung der Maßnahmen aus Abschnitt 4.1.2 erfolgen, wie in den bereits vorher diskutierten Problemen. Mögliche Herangehensweisen und Hilfestellungen, welche es den Lernenden ermöglichen, die Beweisphasen nach Brunner (2013, vgl. Abschnitt 3.3.3) in einer ähnlichen Form zu durchlaufen, sind nachfolgend diskutiert:

[31] vgl. Carter und Wagon (1994, S. 267)

Ein experimenteller Zugang zum Problem ist, selbst durch Verwenden von dynamischer Geometriesoftware, nur schwer möglich, da ein Messen oder Berechnen der einzelnen Flächen, in die der Kreis zerlegt wurde, nicht ohne Weiteres möglich ist.[32] Damit ergibt sich bereits für eine experimentelle Überprüfung der Aussage des Satzes ein Problem, welches gelöst werden muss. Obwohl dies den ersten Zugang zum Beweis blockiert, bietet das Problem damit den Vorteil, dass die Notwendigkeit des Beweises ersichtlich wird und Lernende nicht bei der Phase einer empirischen Bestätigung der Aussage stehen bleiben (vgl. Abschnitt 3.4). Eine Idee, welche eine empirische Überprüfung ermöglicht, besteht darin, einen „Kreis“ mit gleichmäßiger Dicke (beispielsweise aus Pappe oder Holz) in die Teilflächen zu zerlegen und diese durch Wiegen zu vergleichen. Auch wenn dabei die Annahme getroffen wird, dass Höhe und Dichte der Figur gleichmäßig sind, liefert dieser Ansatz generell gute Ergebnisse und erweitert den Begriff *Messen*.
Erste Ansätze, welche zu einer Beweisidee führen, liefern die Betrachtung von Spezialfällen und eine Variation des Problems. Im Spezialfall, dass der Punkt P genau im Mittelpunkt des Kreises liegt, ist direkt ersichtlich, dass die Aussage wahr ist. Von diesem ausgehend kann die Annahme getroffen werden, dass eine der Schnittgeraden ein Kreisdurchmesser ist und der Punkt P dabei an einer beliebigen Stelle dieses Durchmessers liegt. Auch hier ist ein Beweis ersichtlich, da die Schnittgerade durch den Kreismittelpunkt gleichzeitig eine Spiegelachse für die einzelnen Flächen darstellt. Dieser Spezialfall generiert gleichermaßen die Idee, Flächen der Zerlegung durch eine geeignete Spiegelung an anderen Stellen des Kreises zu generieren und dadurch gleichgroße Flächen in verschieden markierten Gebieten zu erzeugen. Eine Variation des Problems kann die Suche nach einer Lösung ebenfalls voranbringen. Beispielsweise kann das gegebene Problem an einem Quadrat, statt an einem Kreis, untersucht werden. Auch wenn die gegebene Aussage hier im Allgemeinen falsch ist, liefert der Fall, dass eine der Schnittgeraden parallel zu einer der Seiten des Quadrats ist, ein analoges Problem (vgl. Abbildung 30). Dieses kann bewiesen werden, indem die jeweiligen Flächen geeignet zerlegt und gleiche Flächen in verschieden markierten Gebieten erzeugt werden. Die jeweiligen zerlegten Flächen können mithilfe bekannter Flächenformeln (beispielsweise Dreieck, Rechteck, Trapez) konkret berechnet oder formal in Beziehung gesetzt werden. Insgesamt liefert diese Variation Erkenntnisse zur Übertragbarkeit und, speziell im Hinblick auf die eigentliche Lösung des Problems, die Idee, die Fläche in kleinere Flächen zu zerlegen und diese durch eine Spiegelung an anderer Stelle wiederzufinden.

Abbildung 30: Variation von Problem 7: Teilung eines Quadrats (mit Hilfslinien eines Beweises) analog zum Pizza-Theorem für zwei verschiedene Schnittzentren

[32]Gängige dynamische Geometriesoftware, wie beispielsweise Sketchometry oder GeoGebra, bietet einzig die Berechnung von Flächen geradlinig begrenzter Figuren (Polygone) oder von Kreissektoren.

Die Kombination beider Ideen liefert bereits die Grundlage für den eigentlichen Beweis, indem die einzelnen Stücke des Kreises weiter zerlegt und durch geeignete Spiegelungen gleiche Flächen in verschieden markierten Gebieten erzeugt werden. Die letzte Hürde, welche es zu überwinden gilt, ist die geeignete Auswahl der Spiegelachsen. Der entwickelte konstruktive Beweis könnte abschließend formal begründet werden, allerdings erscheint dies aufgrund der Vielzahl der benötigten Operationen, welchen die gleiche Idee zugrunde liegt, nicht sinnvoll, da dasselbe Argument für viele Schritte wiederholt werden muss. Dagegen bietet die Untersuchung, inwiefern die gefundene Konstruktion des Spezialfalls auch die Allgemeinheit der Aussage begründet, einen Mehrwert (Symmetrieprinzip).
Neben dieser konstruktiven Umsetzung des Problems ist eine deduktive ebenfalls möglich, bei der eine Zerlegung (beispielsweise die Zerlegung nach Carter und Wagon, vgl. Abbildung 29) vorgegeben ist, welche begründet werden muss. Auch ist es denkbar, keine vollständige Zerlegung, sondern die ersten Schritte einer solchen vorzugeben, sodass der übrige Anteil der Zerlegung von den Lernenden durchgeführt werden muss. Beide Varianten setzen den Fokus nicht auf das Finden der Lösungsidee, sondern thematisieren die Phasen der Kontrolle und Metakognition der Lösung (vollständige Vorgabe der Zerlegung) oder zusätzlich die Phase der Durchführung der Lösung (unvollständige Vorgabe der Zerlegung).
Eine konkrete Anwendung des Pizza-Theorems findet sich in der oben bereits angesprochenen gerechten Teilung einer Pizza inklusive Belag. Dabei können zunehmend Aussagen begründet werden, wie der Punkt P abhängig von der Lage einzelner Beläge für eine derartige Teilung gewählt werden muss. Die Aussagen können entweder durch den Lehrenden vorgegeben oder als Hypothesen durch die Lernenden aufgestellt werden. Beispiele möglicher Aussagen sind im Folgenden dargestellt:

> Aussage 1:
>
> „Ist ein Kreis vollständig im anderen enthalten, so entsteht eine gerechte Teilung beider Kreise für jeden Punkt P im Inneren des kleineren Kreises. Insbesondere wird damit auch der Rand der Pizza, d.h. die Fläche zwischen den Kreisen gerecht aufgeteilt (*Thick Crust Theorem*).
> Gleiches gilt für beliebig viele, immer kleiner werdende Kreise, die jeweils vollständig ineinander enthalten sind. Diese werden durch einen beliebigen Punkt im Inneren des kleinsten Kreises gerecht aufgeteilt.“

Diese Aussage ist eine direkte Folgerung aus dem Pizza-Theorem. Dieses kann auf alle Kreise einzeln angewendet werden und durch Betrachten der Differenzen der jeweiligen Flächen ergibt sich auch die Aussage für den Rand.

> Aussage 2:
>
> „Liegt der Mittelpunkt eines Kreises auf einer der Schnittgeraden, so wird dieser Kreis gerecht geteilt.“

Liegt das Zentrum P der Schnittgeraden innerhalb des Kreises, so folgt die Aussage direkt mit dem Pizza-Theorem. In allen anderen Fällen ist die Schnittgerade durch den Kreismittelpunkt eine Spiegelachse des Kreises, wodurch einander entsprechende Flächen in unterschiedlich markierten Gebieten liegen.

Aussage 3:

„Zwei disjunkte Kreise, die das Zentrum P der Schnittgeraden jeweils nicht enthalten, können durch die Schnitte gerecht geteilt werden, wenn der Punkt P kollinear zu den Mittelpunkten der Kreise ist oder auf einem Fasskreisbogen über den Mittelpunkten der Kreise mit einem Umfangswinkel $\alpha = \frac{\pi}{4} \cdot k$ mit $k \in \{1,2,3\}$ liegt. “

Diese Aussage ist eine Folge der vorherigen Aussage. Verläuft eine der Schnittgeraden durch den Mittelpunkt des Kreises, so wird dieser gerecht geteilt. Damit können die beiden Mittelpunkte der Kreise entweder auf derselben Schnittgeraden liegen (Mittelpunkte und P kollinear) oder auf verschiedenen Schnittgeraden. Im zweiten Fall schließen die beiden Geraden, welche die Kreise teilen, einen der Winkel 45°, 90° oder 135° ein. Damit liegt der Punkt P auf dem Fasskreisbogen über den beiden Mittelpunkten zum jeweiligen Umfangswinkel. Eine der Schnittgeraden ist dann als Gerade durch P und einen der Kreismittelpunkte gegeben und die anderen Schnittgeraden sind durch diese festgelegt, da die jeweiligen Winkel zu den benachbarten Geraden stets 45° betragen müssen.

Durch diese Aussagen kann beispielsweise der Schnittpunkt einer gerechten Teilung für eine Pizza, wie in Abbildung 31 dargestellt ist, konstruiert werden:

Die äußeren Kreise k_1 und k_2 können gemäß Aussage 1 vernachlässigt werden, indem der gesuchte Schnittpunkt P innerhalb eines der Kreise k_3, k_4, k_5 oder k_6 konstruiert wird. Ziel soll sein, den Punkt P in k_3 zu konstruieren. Aus diesem Grund werden die Fasskreisbögen mit Umfangswinkel 45° durch die Mittelpunkte der Kreise k_4 und k_5, sowie k_5 und k_6 konstruiert (Aussage 3). Liegt der Schnittpunkt in k_3, so ist ein entsprechender Punkt zur Teilung gefunden. Falls nicht, müssten weitere Kombinationen der Umfangswinkel und Kreismittelpunkte untersucht werden.

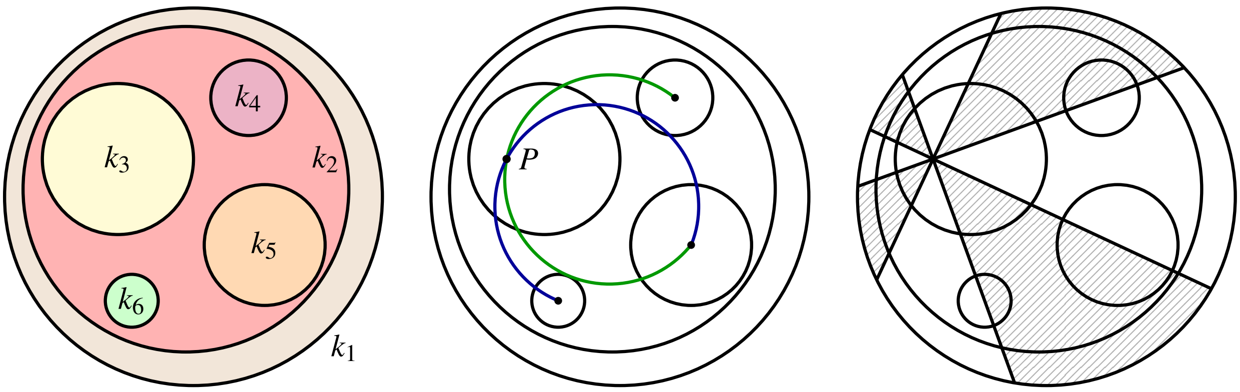


Abbildung 31: Anwendung des Pizza-Theorems zur gerechten Teilung einer Pizza inklusive der vorhandenen Beläge: Skizze der Ausgangslage mit geeigneten Notationen (Schritt 1), Bestimmen des Zentrums der Schnittgeraden durch Konstruktion der Fasskreisbögen mit Umfangswinkel 45° (Schritt 2, Fasskreisbögen blau/grün), gerechte Teilung der Pizza (Schritt 3)

Die Konstruktion eines Punktes, mit dem die Pizza gleichmäßig geteilt werden kann, ist bei zunehmender Anzahl an Belägen im Allgemeinen unmöglich und ansonsten zumindest sehr aufwendig, da die jeweiligen Mittelpunkte der Kreise auf mehreren der Schnittgeraden liegen könnten. Die daraus resultierenden Konstruktionen werden schnell unübersichtlich und es muss begründet werden, dass die Schnittgeraden für ein potentielles Schnittzentrum P alle Kreismittelpunkte enthalten. Dagegen können durch Einschränkungen der Konstruktion, beispielsweise durch Vorgeben der Lage von P, einer der Schnittgeraden oder eines Belages, in dem sich das Schnittzentrum befinden soll, verschiedene Aufgaben bearbeitet werden, in welchen entweder eine Konstruktion entwickelt oder die Unmöglichkeit einer Teilung begründet werden soll. Diese können die Anwendbarkeit des bewiesenen Satzes aufzeigen und weitere Aspekte eines Beweises thematisieren.
Gerade für leistungsstärkere Lernende und interessierte Schüler bietet Problem 7 weitere Anwendungen. Einerseits lässt sich das vorgestellte Pizza-Theorem verallgemeinern (vgl. Marby und Deiermann 2009, S. 423):

Pizza-Theorem (allgemein):

Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Teile eine Pizza in $2n$ Stücke, indem durch ein beliebigen inneren Punkt P n gerade Schnitte gezogen werden, wobei benachbarte Geraden jeweils den Winkel $\frac{\pi}{n}$ einschließen. Sei O der Mittelpunkt der Pizza und seien die Flächen der Zerlegung abwechselnd grün und weiß gefärbt. Dann gilt:

(i) Wenn $n \geq 4$ und gerade ist, so ist die Summe der grünen Flächen gleich der Summe der weißen Flächen. Für jedes andere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt Gleichheit genau dann, wenn O auf einer Schnittgeraden liegt.

(ii) Wenn O nicht auf einer Schnittgeraden liegt und $n = 1$, $n = 2$ oder $n \equiv 3 \ mod\ 4$ gilt, übersteigt die Summe der grünen Flächen die der weißen genau dann, wenn O in einem grünen Stück liegt.

(iii) Wenn O nicht auf einer Schnittgeraden liegt und $n \geq 5$ ungerade mit $n \equiv 1 \ mod\ 4$ ist, so übersteigt die Summe der weißen Flächen die der grünen genau dann, wenn O in einem grünen Stück liegt.

Ein Beweis dieses allgemeinen Theorems erfordert mehr Aufwand (beispielsweise durch Methoden der Analysis) und kann in Marby und Deiermann (2009, S. 423 ff.) nachgelesen werden. Genauso wie in Problem 7 ergibt sich aus dem allgemeinen Theorem das Thin Crust Theorem (Summe der Umfangsabschnitte der grünen und weißen Stücke ist gleich) sowie das Thick Crust Theorem (Für zwei Kreise, von denen einer vollständig im anderen enthalten ist, ist die Summe der grünen Stücke, die ausschließlich vom äußeren Kreis überdeckt werden, gleich der Summe weißen Stücke, die ausschließlich vom äußeren Kreis überdeckt werden). Andererseits ist eine Teilung der Pizza für mehr als zwei Personen möglich, indem die Pizza mit $2N$ Schnittgeraden durch einen Punkt P im Inneren in $4N$ Teilflächen zerlegt wird ($N \in \mathbb{Z}_{>0}$). Indem die Stücke nacheinander mit aufsteigenden Zahlen modulo N nummeriert werden, können jeder Person vier Stücke mit der gleichen Nummer zugeteilt werden. Insgesamt erhält jede Person durch diese Zuteilung den gleichen Anteil der Gesamtfläche der Pizza. Ein Anwenden dieses Satzes

auf mehrere disjunkte Beläge ist allerdings problematisch, da die obigen Aussagen 2 und 3 nicht übertragen werden können (vgl. Chevanne 2005).
Insgesamt besitzt das Pizza-Theorem vielfältige Anknüpfungspunkte, sowohl an inhaltliche Themengebiete, als auch für eine Förderung von Problemlöse- und Beweisaspekten. Dabei ist die zu findende Lösung trotz geringer fachlicher Voraussetzungen nicht einfach zu erreichen und kann für viele Lernende eine Herausforderung darstellen. Dagegen kann die Alltagsnähe des Problems besonders dazu beitragen, eine mögliche motivational-emotionale Barriere zu überwinden und die Bewältigung der Herausforderung ein Erfolgserlebnis mit positiven Auswirkungen auf zukünftige Problemlöseprozesse sein. Verschiedene Erweiterungen bieten ausreichend Möglichkeiten, individuell zu differenzieren und verschiedene Aspekte (inhaltlich oder prozessbezogen) gezielt zu vertiefen.

5 Fazit und Ausblick

Die eingangs genannte Diskrepanz der Fähigkeiten deutscher Lernender in den Bereichen Problemlösen und Argumentieren, welche trotz expliziter Forderung der jeweiligen Kompetenzen in den Bildungsstandards deutliche Defizite aufweisen, lässt sich auf die Vielschichtigkeit der zugrundeliegenden Prozesse zurückführen. Zusätzlich erfordert das Lösen von Problemen neben einem gewissen Maß an geistiger Beweglichkeit und Kreativität beim Finden der entscheidenden Idee eine Vielzahl an Kognitionen und Metakognitionen. Um diese Fähigkeiten zu lehren, ist es nötig, die komplizierten Prozesse zu vereinfachen, einzelne Bestandteile gesondert zu üben und Kompetenzen durch das eigenständige Problemlösen Schritt für Schritt aufzubauen. Gleichzeitig muss die Problemsituation auf die jeweiligen Lernenden abgestimmt sein und die eigentlichen Leistungen, die zur Lösung des Problems führen, von den Schülern ausgehen. Auch wenn dies für Lehrende eine Herausforderung darstellen kann, liefert die Fachliteratur Ansatzpunkte, die für eine unterrichtliche Umsetzung genutzt werden können. Erste normative Modelle zur Ausbildung von Problemlösefähigkeiten existieren bereits seit 1945 und wurden seitdem mehrfach erweitert. Die Kompetenzen der Lernenden können beispielsweise durch das Kennenlernen einzelner Teilhandlungen des Problemlöseprozesses oder durch das Lehren von heuristischen Vorgehensweisen gefördert werden. Als Maßnahmen zur Umsetzung sind die heuristischen Lösungsbeispiele von Reiss und Renkl (2002) bereits näher erforscht und stellen gerade für unerfahrene Problemlöser eine effektive Möglichkeit dar, einen Kompetenzzuwachs zu erreichen. In dieser Arbeit wurden auf Basis der theoretischen Grundlagen weitere mögliche Maßnahmen (Vorgeben von Puzzlestücken, Beweise ohne Worte) erläutert und jeweils in einem konkreten Aufgabenbeispiel veranschaulicht und reflektiert. Diese können als Vorlage dienen, weitere Aufgaben für die Förderung der Problemlöse- und Beweiskompetenzen anzupassen. Diese können stärker an die jeweiligen Inhalte des Lehrplans angepasst sein (beispielsweise ein Vergleich verschiedener Beweise des Satzes des Pythagoras) oder speziell für eine Förderung der Kernkompetenzen ausgewählt werden. Der tatsächliche Lerneffekt, welcher durch derartige Umsetzungen erzielt wird, bedarf jedoch noch einer Evaluation im Unterricht. Daneben sind als weiterführende Ansätze, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit bereits angesprochen wurden, beispielsweise Studien zum Einsatz verschiedener Medien im Zusammenhang mit den Kernkompetenzen „Probleme mathematisch lösen“ und „Mathematisch argumentieren“ oder eine Förderung dieser Kompetenzen im Kontext anderer mathematischer Teilgebiete (Stochastik, Analysis) denkbar. Genauso sind Untersuchungen möglich, die den Fokus auf die Verbindung von Problemlösen mit der Förderung von (mathematischer) Hochbegabung (z.B. durch herausfordernde Aufgaben) oder mit der Förderung mathematischer Denk- und Arbeitsweisen im Unterricht legen.

Literaturverzeichnis

[1] P. Baptist. *Die Entwicklung der neueren Dreiecksgeometrie*. Mannheim/Leipzig/Wien/Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1992.

[2] P. Boero. *Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education*. In: *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*. 1999, S. 7–8.

[3] R. Bruder und C. Collet. *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag, 2011.

[4] R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker u. a. *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Berlin Heidelberg: Springer, 2015.

[5] E. Brunner. *Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen. Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum, 2014.

[6] E. Brunner. *Verschiedene Beweistypen und ihre Umsetzung im Unterrichtsgespräch*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 35*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, S. 229–249.

[7] L. Carter und S. Wagon. *Proof without Words: Fair Allocation of a Pizza*. In: *Mathematics Magazine, 67 (4)*. 1994, S. 267.

[8] CCSSI. *Common Core State Standards Initiative: Common Core State Standards for Mathematics*. 2010. URL: `http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf` (besucht am 30. 01. 2018).

[9] P. Chevanne. *The Pizza*. 2005. URL: `http://mathafou.free.fr/pbg_en/pb116.html` (besucht am 02. 04. 2018).

[10] C. Collet. *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann Verlag, 2009.

[11] EDK. *Schweizerische Konferenz der Erziehungsdirektoren: Grundkompetenzen für die Mathematik (Nationale Bildungsstandards)*. 2011. URL: `https://edudoc.ch/record/96784/files/grundkomp_math_d.pdf`. 21.02.2018.

[12] P. Gallin. *Exzentrische Kuchenhalbierung*. In: *Bulletin des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte, Nr. 116*. Zürich, 2011, S. 11–19. URL: `https://www.gallin.ch/KuchenhalbierungBulletin.pdf`.

[13] M. Gerwig. *Beweisen verstehen im Mathematikunterricht. Axiomatik, Pythagoras und Primzahlen als Exempel der Lehrkunstdidaktik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2015.

[14] G. Gigerenzer. *Simple heuristics that make us smart*. New York: Oxford University Press, 1999.

[15] D. Grieser. *Mathematisches Problemlösen und Beweisen. Eine Entdeckungsreise in die Mathematik*. 2. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2017.

[16] S. Grundey. *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2015.

[17] A. Heinze. *Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. Modelle und Unterrichtskonzepte aus kognitionstheoretischer Perspektive*. In: *Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 28*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007, S. 3–30.

[18] KMK. *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz*. 2003. URL: `https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf` (besucht am 29. 01. 2018).

[19] W. Kroll und J. Jäger. *Das Pizzatheorem - Ein Thema mit Variationen*. In: *mathematica didactica 33*. 2010, S. 79–112. URL: `http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2010/md_2010_Kroll_Jaeger_Pizzatheorem.pdf`.

[20] S. Kuntze. *„Wozu muss man denn das beweisen?“ Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe*. In: *mathematica didactica, Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, Vol. 28, Heft 2*. Hildesheim Berlin: Verlag Franzbecker, 2005, S. 48–70.

[21] F. Link. *Problemlöseprozesse selbstständigkeitsorientiert begleiten. Kontexte und Bedeutungen strategischer Lehrerinterventionen in der Sekundarstufe I*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

[22] R. Marby und P. Deiermann. *Of Cheese and Crust: A Proof of the Pizza Conjecture and Other Tasty Results*. In: *The American Mathematical Monthly, 116 (5)*. 2009, S. 423–438.

[23] Z. Mevarech und S. Fridkin. *The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition*. In: *Metacognition and Learning, Vol. 1*. US: Springer Science + Business Media, Inc., 2006, S. 85–97.

[24] M. Meyer und S. Prediger. *Warum? Argumentieren, Begründen, Beweisen*. 2009. URL: `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/veroeff/09-Meyer_Prediger_PM-H30-Argumentieren-Webversion.pdf` (besucht am 29. 09. 2017).

[25] K. Nagel und K. Reiss. *Zwischen Schule und Universität: Argumentation in der Mathematik*. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2016, S. 299–327.

[26] NCTM. *Principles, Standards and Expectations*. 2000. URL: `http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/` (besucht am 12. 01. 2018).

[27] R. Nelsen. *Beweise ohne Worte*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2016.

[28] OECD. *Deutschlands PISA-Ergebnisse stabil über dem OECD-Durchschnitt*. 2016. URL: `http://www.oecd.org/berlin/presse/deutschlands-pisa-ergebnisse-stabil-ueber-dem-oecd-durchschnitt-06122016.htm#`. 2018-05-05.

[29] S. Ottinger, S. Ufer und I. Kollar. *Mathematisches Argumentieren und Beweisen in der Studieneingangsphase - Analyse inhaltlicher und formaler Qualitätsindikatoren*. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM-Verlag, 2016.

[30] K. Philipp. *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[31] G. Pólya. *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton und Oxford: Princeton University Press, 2014.

[32] K. Reiss und C. Hammer. *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Basel: Springer Basel AG, 2013.

[33] K. Reiss, F. Hellmich und J. Thomas. *Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht*. In: *Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag, 2002, S. 51–64.

[34] K. Reiss und A. Renkl. *Learning to proof: The idea of heuristic examples*. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol. 34*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002, S. 29–35.

[35] K. Reiss und S. Ufer. *Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Argumentieren, Begründen und Beweisen*. In: *Jahresbericht DMV, Vol. 111 (4)*. 2009, S. 155–177.

[36] B. Rott. *Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern - Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells*. In: *Journal für Mathematik, Vol. 35*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2014, S. 251–282.

[37] A. Salle. *Selbstgesteuertes Lernen mit neuen Medien. Arbeitsverhalten und Argumentationsprozesse beim Lernen mit interaktiven und animierten Lösungsbeispielen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2015.

[38] A. Schoenfeld. *Mathematical Problem Solving*. San Diego: Academic Press, 1985.

[39] H.-J. Vollrath und J. Roth. *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

[40] H. Walser. *Dritteln durch Halbieren*. 2007. URL: `http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Dritteln_Halbieren/Dritteln_Halbieren.pdf` (besucht am 02. 04. 2018).

[41] H. Winter. *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. 3. Auflage. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2016.

[42] E. Wittmann. *Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik*. In: *mathematica didactica, Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, Vol. 37, Heft 2*. Hildesheim Berlin: Verlag Franzbecker, 2014, S. 213–232.