

Die Schildkröte verliert!

Berichte und Meldungen aus der Welt
der Zahlen und Graphen

Edgar Höniger

3. März 2016

Geistig beschäftigt sein - mehr durch die Sprache gewährt als von allen Wissenschaften,
die sich ihrer bedienen - ist jene Erschwerung des Lebens, die andere Lasten erleichtert.

Karl Kraus

Inhaltsverzeichnis

	i
Vorwort	iii
1 Verwandlung	1
2 Schopenhauer	4
3 Wundersame Rettung	13
4 Nächtliches Treiben	19
5 Endlich unendlich	35
6 Auf der Verfolgung	39
7 Eine Gerade wird zur Strecke gebracht	45
8 Schilda in neuem Licht	50
9 Divide sed ne imperaveris!	62
10 Winkelsenkrechte oder Mittelhalbierende?	86
11 Schleifen	90
12 Schach in Potenz	107
13 Eine rätselhafte Unachtsamkeit	111
14 Das verweigerte Obdach	113
15 Auf nach Paradoxien!	118
16 Von gestern bis heute	123
17 Epilog	127

Vorwort

Es heißt, dass jede mathematische Formel in einem literarischen Werk die Zahl seiner potentiellen Leser halbiert. Wenn es danach ginge, wäre unser Leserkreis auf das Minimum, nämlich auf den Autor selbst, gesunken.

Drehen wir aber den Spieß um und streichen sukzessive eine Formelgleichung nach der anderen, dann müsste sich nach jedem Schritt die Leserzahl verdoppeln. Unsere Erde wird gegenwärtig von etwa sieben Milliarden Menschen bewohnt. Bereits sechsunddreißig Formeln weniger und der Welt würde ein Kassenschlager beschert, gegen den die Mao-Bibel eine Stubenmusik ist.

Der Inhalt dieses Buches richtet sich an jene, die der Mathematik zunächst in der Schule und dann auf vielen weiteren Wegen begegnet sind. Das Interesse des Lesers für dieses spannende und abwechslungsreiche Terrain soll dadurch animiert werden, dass die dargestellten mathematischen Sachverhalte mit Geschichten und Begebenheiten umrankt und durchwoben sind, so dass auch die Erinnerung an einzelne Kapitel nicht so schnell verblasst.

DANKSAGUNG

Allen Mitarbeitern am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth verdanke ich viele Ideen, Anregungen und Hinweise für dieses Buch. Mein besonderer Dank gilt Herrn A. Wassermann und Herrn C. Miller für ihre intensive Unterstützung.

Edgar Höniger, im März 2016

Edgar Höniger, geboren 1945 in Probstzella (Thüringen), hat in Würzburg Mathematik und Physik studiert. Bis 2010 war er Realschullehrer in Bayreuth. Seit 1998 arbeitet er bei Peter Baptist und bei Volker Ulm am Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth im Rahmen einer Weiterentwicklung der Aufgabenkultur und in der Lehrerfortbildung mit.

Kapitel 1

Verwandlung

HAT MERSENNE FALSCH GELESEN?

Marin MERSENNE (1588-1648) war ein französischer Theologe, Mathematiker und Musiktheoretiker, der eine Formelgleichung zur Erzeugung von Primzahlen M_p aufstellte: $M_p = 2^p - 1$.

Er vermutete, dass M_p für jedes $p \in \{2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31; 67; 127; 257\}$ eine Primzahl ist.

Im Jahre 1876 konnte Édouard LUCAS (1842-1891) zeigen, dass $M_{67} = 2^{67} - 1$ keine Primzahl ist, aber erst 1903 lieferte Franc Nelson COLE (1861-1926) während eines Treffens der „American Mathematical Society“ auf spektakuläre Weise mit Kreide an der Tafel die zugehörige Faktorzerlegung:

Auf der Vorderseite rechnete er vor:

$$2^{67} - 1 = 147\,573\,952\,598\,676\,412\,927.$$

Auf der Rückseite führte er aus:

$$193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287 = 147\,573\,952\,598\,676\,412\,927.$$

Die Standing Ovation, die ihm nach einer atemlosen Stille im Raum dargebracht wurden, belohnten seine Arbeit von „three years of Sundays“. [1]

Der Schriftsteller Thomas MANN (1875-1955) etwa hatte sich von allen Bewohnern während seiner Arbeit stets absolute Ruhe im Haus ausbedungen. „Kinder seid still, der Vater dichtet!“ so etwa könnte die Mutter gemahnt haben.

Für die Kinder von COLE – er war seit 1888 mit Marie Streif aus Göttingen verheiratet; sie hatten eine Tochter und drei Söhne – hieß es wohl analog : „Kinder, seid still, der Vater rechnet!“

Wie müssen wir uns die rechnerische Vorgehensweise von COLE vorstellen?

Zunächst können wir leicht begründen, weshalb M_{67} und damit der Produktwert auf 7 endet (Näheres siehe im Kap. „Schach in Potenz“). Die zugehörigen Endziffern der beiden Faktoren eröffnen lediglich zwei Möglichkeiten.: Nur die Paare (1 | 7) oder (3 | 9) sind als Endziffern geeignet. Aber, was nützt das? Es ist noch ein sehr weiter Weg bis ans Ziel. Der Phantasie wird dabei sehr wenig Spielraum gewährt. Wir wissen nicht, wie diese Zerlegung zustande gekommen ist.

Trotz des Beifalls, den sich COLE redlich verdient hatte, ist leider nicht auszuschließen, dass MERSENNE ein Lesefehler unterlaufen ist: In seiner Korrespondenz mit Bernard

Frénicle de BESSY (1605-1675) und Pierre de FERMAT (1601?-1665) hat er möglicherweise $p = 61$ mit $p = 67$ verwechselt. Ja, und wenn das wahr wäre, dann hätte ihm Iwan Michejowitsch PERWUSCHIN (1827-1900) schon 1883 den Rang abgelaufen, als dieser $M_{61} \in \mathbb{P}$ nachgewiesen hatte. [1]

Aber Lesefehler hin oder her: In jeder Hinsicht ist die Ergebnisingewinnung steinig und sehr trocken.

DRUCKFEHLER: JA ODER NEIN?

Dem ZEIT-Magazin entnehmen wir:

Eine arme Kirchenmaus bin ich nicht. Ich bin eine reife Schönheit: blond, attraktiv, schlank, 1,69 m, reich an Erfahrung, Herzenswärme Fröhlichkeit u. Humor und suche einfach ein Pedant, ± 69 J., das zu mir passt.

Kleinkrämer gibt es wohl zur Genüge. Ob sich einer davon wirklich als ergänzendes Gegenüber erweist, muss bezweifelt werden. Pedanten sind als Pendant eher ungeeignet. Der falsche Artikel gibt dem Ganzen noch eine aparte Würze.

Noch delikater ist das Intervall ± 69 J. Unserer Phantasie werden Flügel verliehen.

Wie ein anderer vermeintlicher Druckfehler einen überbordenden Einfallsreichtum auslösen kann, möge die folgende Szenerie verdeutlichen:

Aufgabe 1: Löse die Gleichung $8 \cdot x \cdot 2 + x \cdot 4 = 899$ (*)

Aufgabe 2: Auf einem Gutshof leben achtmal so viele Hühner wie Katzen. Zusammen haben sie 899 Beine.

Während die Lösung der Gleichung (*) aus blanker Routine besteht, enthält der Text in Nr. 2 eine Provokation, die dem Leser wahrscheinlich aufgefallen ist:

Weil Hühner jeweils mit zwei und Katzen mit vier Beinen auf die Welt kommen, können deren Summen und Produkte wieder nur geradzahlig sein.

Voreilige Leser weisen jetzt vermutlich darauf hin, dass dann „899“ ein Druckfehler sein müsse, und die Aufgabe wäre erledigt. - Und wenn „899“ stehen bliebe?

Die nüchterne Gleichung in der 1. Aufgabe beschreibt den Sachverhalt, der im Text der 2. Aufgabe enthalten ist; daraus ergibt sich $20x = 899$, wobei $x \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Katzen darstellt. Aber $20x = 899$ besitzt in \mathbb{N} keine Lösung. Nahe liegend oder besser nahe stehend wären 900 Beine. Dann würden 45 Katzen und 360 Hühner umherlaufen. Aber diese Lösung hat ein Über-Bein!

Wem sollen wir eines seiner Gehwerkzeuge nehmen? Einem Huhn? Nein, denn auf die Dauer wäre die Haltung seines Schwerpunktes über der Standfläche seines verbliebenen Fußes untragbar. Andererseits können Katzen, die z.B. den Zusammenstoß mit einem fahrenden Auto zwar überlebt, aber dabei ein Bein eingebüßt haben, durchaus noch alt werden.

Es ist also nicht unrealistisch anzunehmen, dass neben den normal beweglichen vierbeinigen (Anzahl y) auch noch dreibeinige Katzen (Anzahl z) umherhinken.

Dabei gilt für die Anzahl x aller Katzen: $x = y + z$.
 Dann wird aus der Gleichung (*):

$$\begin{aligned}
 16(y + z) + 4y + 3z &= 899 \\
 \Leftrightarrow 20y + 19z &= 899 \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{899 - 19z}{20} \in \mathbb{N}
 \end{aligned}
 \tag{**}$$

Wie schon dargelegt, muss es eine dreibeinige Katze geben. Wenn wir uns nun noch vergegenwärtigen, dass dicht am Gutshof eine Schnellstraße vorbeiführt, auf der reger Verkehr herrscht, dann liegt der Verdacht nahe, dass dadurch vielleicht weitere Katzen eines ihrer Beine eingebüßt haben.

$z = 1$ liefert in (**) $y = 44 \in \mathbb{N}$. Wir setzen in (**) $z = 1 + 20\lambda$ mit $\lambda \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow y = \frac{899 - 19 - 380\lambda}{20} \Leftrightarrow y = 44 - 19\lambda.$$

Alle möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	λ	0	1	2
vierbeinige Katzen:	y	44	25	6
dreibeinige Katzen:	z	1	21	41
Gesamtzahl der Katzen:	x	45	46	47
Anzahl der Hühner:	h	360	368	376

Die wachsende Anzahl fehlender Katzenbeine muss durch Hühnerbeine kompensiert werden. $\lambda > 2$ geht nicht, da y sonst negativ wäre.

Während schon der Fall $\lambda = 1$ ob der dramatischen Zunahme verunglückter Katzen aufhorchen lässt, zieht an uns für $\lambda = 2$ das Schreckensszenario einer gequälten Kreatur vorüber: Nur 6 von den 47 Katzen sind unversehrt geblieben.

Die zuständigen Behörden werden hiermit aufgefordert, stehenden Fußes die Untertunnelung der Straße vor dem Gutshof zu veranlassen, damit die gegenüberliegende Wiese für Katzen gefahrlos erreichbar wird. Dort tanzen nämlich die Mäuse und lachen sich eins zusammen mit den Hühnern.

Kapitel 2

Schopenhauer

In einem Buch von Peter Baptist mit dem Titel „Pythagoras und kein Ende?“ [2] sind in historischer Reihenfolge verschiedene Beweisideen zum betreffenden Lehrsatz dargelegt. In diesem Zusammenhang kommt auch Artur SCHOPENHAUER (1788 - 1860) zu Wort, der den Beweis von EUKLID (ca. 300 v.Cr.) aufgrund von scheinbar willkürlich gezogenen Hilfslinien als „stelzbeinig“, ja sogar „hinterlistig“ kritisiert:

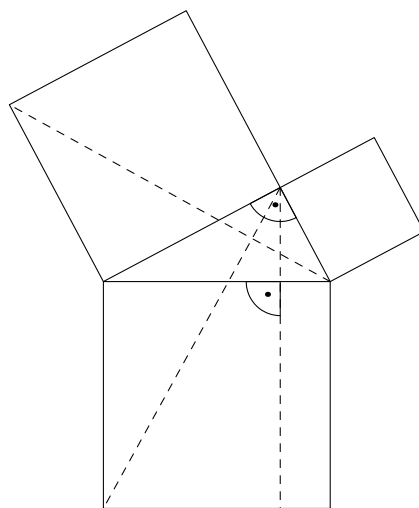


Abbildung 2.1: Die Beweisfigur von EUKLID mit gestrichelten Hilfslinien

Der Philosoph führt gegen solche Beweisverfahren einen Rundumschlag:

„Oft werden, wie im Pythagoräischen Lehrsatz, Linien gezogen, ohne daß man weiß, warum. Hinterher zeigt sich, daß es Schlingen waren, die sich unerwartet zuziehen und den assensus des Lernenden gefangen nehmen, der nun verwundert zugeben muß, was ihm seinem innern Zusammenhange nach völlig unbegreiflich bleibt etc.“ (Siehe [2], S. 51).

Wie die Hinterlist heutzutage immer noch Trumpf sein kann, mögen zwei Beispiele aus jüngerer Zeit verdeutlichen:

Im Heft 7/96 der Mathematikzeitschrift ^{Die}WURZEL war die Figur a) der Abbildung 2.2 mit folgender Aufgabe verknüpft:

„Unter den Voraussetzungen $\overline{AM} = \overline{MB}$ und $\angle CAB = 22,5^\circ$ [eigentlich $\angle BAC$, d. Verf.] ist elementargeometrisch zu untersuchen, ob $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{MP}$ gilt.“

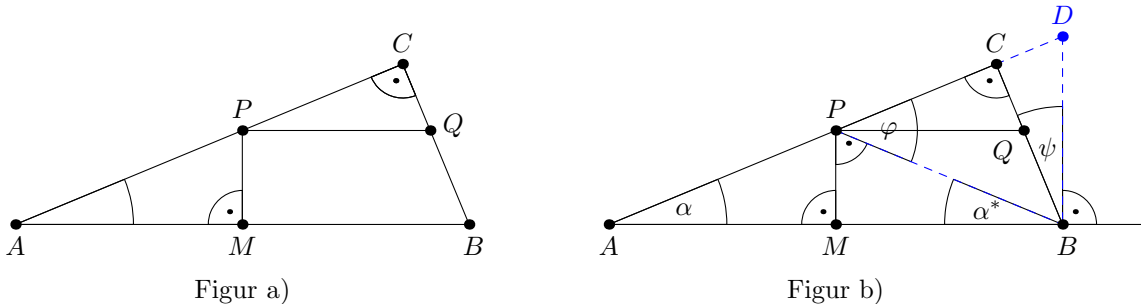


Abbildung 2.2: Die Mausefalle a) und deren Öffnung b)

Die Figur b) ist aus der Figur a) mit drei zusätzlich (gestrichelt gezeichneten) Hilfslinien entstanden, die, wenn es nach SCHOPENHAUER geht, „vom Himmel gefallen“ sein müssen.

In der Figur b) der Abbildung 2.2 erkennen wir:

1. Das Dreieck ABP ist gleichschenkelig. $\Rightarrow \alpha = \alpha^* = 22,5^\circ$.
2. Der Winkel mit dem Maß φ ist Außenwinkel am Dreieck ABP . $\Rightarrow \varphi = 2 \cdot \alpha = 45^\circ$.
3. Das Dreieck PBC ist wegen $\angle CBP = 45^\circ$ gleichschenkelig. Damit gilt: $\overline{PC} = \overline{BC}$.
4. Weiter gilt: $\psi = \alpha$, da die Schenkel der beiden betreffenden (spitzen) Winkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.
5. Damit sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke PQC und BDC kongruent und es gilt: $\overline{PQ} = \overline{BD}$.
6. Weiter gilt: $\triangle AMP \sim \triangle ABD$. Wegen $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AM}$ muss auch $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{MP}$ gelten. Aus 5. folgt dann $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{MP}$.

Ein weiteres Beispiel:

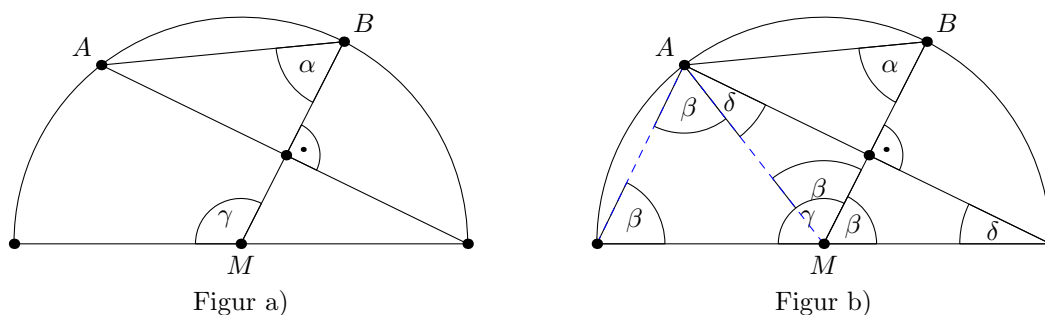


Abbildung 2.3: Figur a): die Originalzeichnung und Figur b): mit Hilfselementen

Die Figur a) der Abb. 2.3 gehört zur Aufgabe 2 des 8. Landeswettbewerbs Mathematik 2005 des Bayerischen Kultusministeriums. Dort heißt es: „Wie kann man α berechnen, wenn γ gegeben ist?“ (Etwas verfänglich ist in den beiden Zeichnungen die Tatsache, dass $\gamma \approx 120^\circ$ gilt. Dadurch wird der Anschein erweckt, dass die Sehne $[AB]$ genauso lang

wie der Kreisradius $[MB]$ ist.) Zusammen mit der Figur b), in der zwei Hilfslinien mit vielen Hilfswinkeln auftauchen, wurde ca. ein Jahr später die Musterlösung veröffentlicht. Nach sechs zum Teil recht aufwendigen Beweisschritten ergibt sich $\alpha = \frac{\gamma}{2}$. Das Gewirr aus Strecken und Winkeln erstickt die „anschauliche Überzeugung“ im Keim. SCHOPENHAUER: „Teufelszeug!“ Der Erfinder dieser offiziellen Musterlösung wollte mit der Figur b) wohl sicherstellen, dass sich (in den Schülerköpfen) alles auf engstem Raum abspielt. Uns eröffnet sich jedoch ein Ausweg, den die amtliche Verlautbarung aufgrund mangelndem ästhetischen Empfindens links liegen lässt:

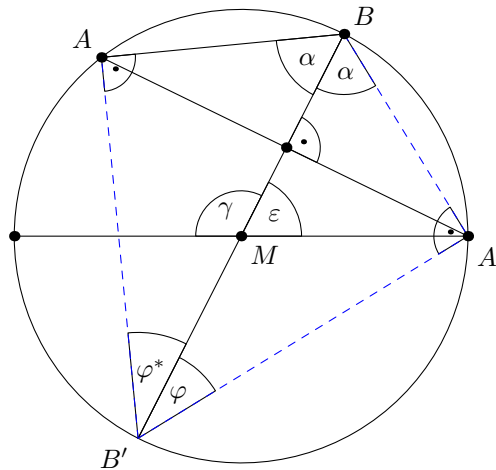


Abbildung 2.4: Drei Hilfslinien erwecken Wohlgefallen

Gemäß der auch pädagogisch bedeutsamen Devise, keine halben Sachen zu machen, können wir auf einem nahe liegenden Weg die Abkürzung nehmen: Der Halbkreis reißt zum Vollkreis. Die Hilfslinien sind nur noch das ausführende Organ des Gedankens, dass wir darin ein Sehnenviereck erzeugen können.

1. Wegen $[B'B] \perp [A'A]$ ist das Viereck $BAB'A'$ eine achsensymmetrischer Drachen, der einen Umkreis (THALES-Kreis) besitzt. $\Rightarrow \varphi = \varphi^*$.
2. Wegen $\angle B'AB = \angle BA'B' = 90^\circ$ folgt $\varphi = 90^\circ - \alpha$.
3. Über der Sehne $[AB]$ ist der Winkel mit dem Maß φ ist ein Randwinkel mit dem Mittelpunktswinkel $\varepsilon = 2 \cdot \varphi$.
4. Der Winkel mit dem Maß γ ist der Nebenwinkel zu ε :

Mit 3. gilt $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot \varphi$ und mit 2. folgt $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 2\alpha$.

Solche Tricks mit Hilfslinien, die jeweils bei der Figur b) in den Abbildungen 2.2 und 2.3 zur Beweisführung erhalten müssen, könnten Gründe dafür sein, dass sich der durchschnittliche Abstand der Lernenden zur Mathematik im Laufe der Zeit nicht wesentlich verringert hat.

Unbemerkt hat sich eine Gruppe von Leuten im Hintergrund dazugesellt, die das Geschehen seit einer geraumen Weile aufmerksam verfolgen. Während der Erstellung der Abb. 2.4 kommt Unruhe auf. Was ist? Was wollen Sie? „Wir sind vom VzBvHL.“ ?? „Unser

Verein hat sich die Bekämpfung der inflationären Verwendung von Hilfslinien aufs Papier geschrieben.“ Gefällt Ihnen die schöne Darstellung 2.4 nicht? „Nein.“ Warum nicht? „Zu aufgeblasene Zeichnung, zu viele Hilfslinien, mehr noch als in der offiziellen Lösung. Jede Person, die während einer geometrischen Beweisführung deren Hilfslinien selbstkritisch auf ein Mindestmaß reduziert, bekommt von uns das Gütesiegel 'Bester Durchblick' verliehen.“

Machen wir uns also nochmals ans Werk. In die Ausgangsfigur a) der Abb. 2.3 links wird die Hilfslinie $[A'B]$ eingezeichnet:

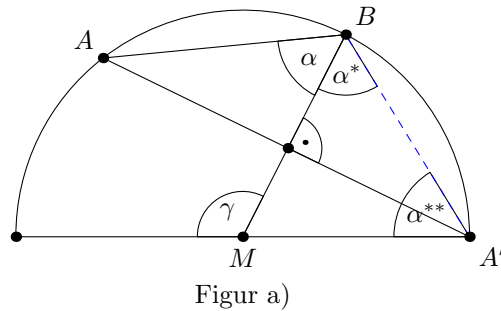


Abbildung 2.5: Mit minimalem Aufwand zum Ziel

a) Wir sehen, dass die Strecke $[BM]$ auf dem Kreisdurchmesser liegt. Also ist die Gerade BM die Symmetrieachse des Dreiecks $AA'B$. Dann gilt $\alpha = \alpha^*$.

b) Das Dreieck $MA'B$ ist gleichschenkelig. $\Rightarrow \alpha^* = \alpha^{**}$.

Mit a) folgt: $\alpha^* = \alpha^{**} = \alpha$.

c) Der Winkel mit dem Maß γ ist ein Außenwinkel am Dreieck $MA'B$.

Also folgt: $\gamma = 2 \cdot \alpha$.

Zufrieden? „Ja.“ (Abordnung ab.)

Und dennoch: Die richtigen unter vielen möglichen Hilfslinien zu finden, bleibt häufig nur jenen vorbehalten, die sich intensiv mit Geometrie auseinandergesetzt haben, andere haben es schwer, sie bleiben zu oft außen vor.

PYTHAGORAS (ca. 580 - 497 v.Chr.) trieb es so weit, dass er selbst seine Gefolgsleute auf Distanz hielt. R. Fraedrich gibt in einem Beitrag mit dem Titel „Pythagoras und die Pythagoreer“ [3] dafür Beispiele:

„Es herrschte das Führerprinzip, dessen erste Person zu seinen Lebzeiten Pythagoras war [...]. Nach L. Creszenzo begann er stets seine Rede mit dem Satz: 'Nein, bei der Luft, die ich atme, nein, bei dem Wasser, das ich trinke, ich gestatte keinen Widerspruch zu dem, was ich sage' [...]. Interessanterweise verbarg er sich bei seinen Vorträgen hinter einem Vorhang. Nur wenige bekamen ihn zu Gesicht [...]. Der große Pythagoras teilte seine Zuhörer gewöhnlich in zwei Kategorien ein: Die 'Mathematiker' waren jene, die das Recht hatten, Wissen, 'mathemata', zu erwerben. Die andere Gruppe, die 'Akusmatiker', durften nur zuhören.“

Mathematiklehrer, die sich vor ihrer Klasse so präsentieren (ein Vorhang würde dem Betrieb noch den Rest geben), machen es besonders den Ängstlichen und Verzagten sehr

schwer, dem Fach die schönen Seiten abzugewinnen und Prüfungen erfolgreich zu bestehen. Unterricht lebt nicht vom Spruch (des Lehrers), sondern vom Widerspruch (der Lernenden).

Seit etwa 1997 sind unter Federführung von P. Baptist nationale und internationale Projekte im Gange, die durch das „Entdeckende Lernen“ Schülerinnen und Schülern den Zugang zur Mathematik erleichtern und das in der Öffentlichkeit thronende Bild des Auserlesenen auf Augenhöhe bringen sollen.

Im DUDEN-Herkunftswörterbuch heißt es auf S. 445: „Das zugrundeliegende Adjektiv *griech.* *mathematikos* 'lernbegierig' ist von *griech.* *mathema* 'das Gelernte, die Kenntnis' abgeleitet [...] . Stammwort ist *griech.* *manthanein*, [...], das urverwandt ist mit *dt.* ↑ *munter*.“

Heftiger Widerspruch regte sich also bei SCHOPENHAUER, der mathematische Beweise, die sich auf geisterhafte Hilfslinien stützen, mit Taschenspielertricks verglich (siehe [2], S.52).

Im gleichen Zug führte er als Exempel für die „anschauliche Überzeugung“ einen Spezialfall des Satzes des PYTHAGORAS an (Gebäude weisen sich in der heutigen Zeit mit einem ähnlichen Zeichen als Kulturdenkmal aus):

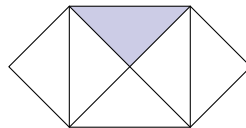


Abbildung 2.6: Zwei kleine Quadrate ergeben ein großes Quadrat

Er kommentierte: „... bestehende, schon bekannte, einfache Figur gibt auf einem Blick weit mehr, als jener Beweis [siehe Abb. 2.1, der Verf.], Einsicht in die Sache und innere feste Überzeugung ...“ (siehe [2], S. 52).

Er forderte: „Auch bei ungleichen Katheten muss es sich zu einer solchen anschaulichen Überzeugung bringen lassen [...]“.“ (siehe [2], S. 51).

Um ihm den Gefallen zu tun, variieren wir die Abbildung 2.6 entsprechend:

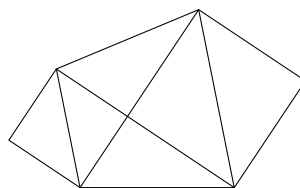


Abbildung 2.7: Zwei verschieden große Quadrate und ein Trapez

Für die Schiefelage in der Abb. 2.7 ist die Ausmerzung von einer der beiden Symmetrieachsen in der Abb. 2.6 verantwortlich. Zudem erhebt sich jetzt die Frage, ob das gleichschenklige Trapez (das aus dem früheren mittleren Quadrat entstanden ist) mit der Vergrößerung des rechten Quadrates Schritt halten kann.

Die Notwendigkeit der Inaugenscheinnahme einer Figur vor einem geometrischen Beweis ist unbestritten. Aber beim Beweis des Satzes von PYTHAGORAS liegen die Dinge komplizierter. P. Baptist beschreibt eine knifflige Situation:

„Rechtwinkliges Dreieck und Quadrat, das sind Stichworte, die auf die berühmte Pythagoras-Konfiguration hinweisen. Diese Konfiguration, bzw. genauer gesagt der zugehörige Lehrsatz, ist ein Beispiel wirklich substantieller Mathematik innerhalb des Schulstoffs. Worin liegt dies begründet? Worin besteht beispielsweise der Unterschied zu der Schnitteigenschaft der drei Mittelsenkrechten im Dreieck? Die Antwort ist offenkundig. Bei den Mittelsenkrechten in einem Dreieck sieht man an einer sauber gezeichneten Figur die Aussage auf den ersten Blick: Sie schneiden sich in einem Punkt. Ganz anders beim Satz des Pythagoras. Wir können die zugehörige Konfiguration betrachten, aber die eigentliche Aussage des Lehrsatzes bleibt zunächst verborgen. Dem Beweis des Lehrsatzes kommt hier eine zweifache Bedeutung zu. Zum einen dient er der Erkenntnisgewinnung, zum anderen ermöglicht er erst Einsicht in die Aussage selbst. In diesem Fall wird nicht nur verifiziert, was man an einer guten Zeichnung sofort ablesen kann. Es besteht also ein echtes Beweisbedürfnis“ (siehe [2], S. 25).

Wir könnten daher in der Abb. 2.7 nur die Hoffnung hegen, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate links und rechts vielleicht doch so groß wie der Flächeninhalt des Trapezes ist. Der Augenschein ist auch in dieser Hinsicht kaum aufschlussreich. Klar, wir wissen es besser, wollen aber der neuen Situation noch ein wenig Rechnung tragen. Um zu verhindern, dass diese doch recht gebrechlich wirkende Figur 2.7 in der Pathologie landet, bringen wir sie erst einmal mit Hilfe des Stützdreiecks EFA in die stabile Seitenlage. (SCHOPENHAUER wird misstrauisch.)

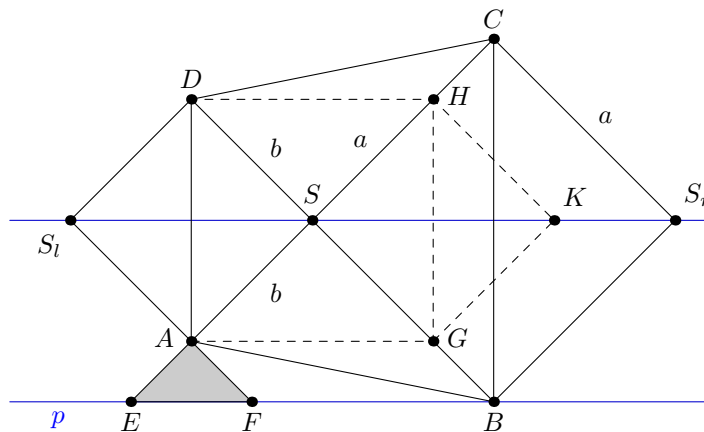


Abbildung 2.8: Die Figur von Abb. 2.7 mit Stütze

Die gestrichelten Linien sind keine Hilfslinien, sondern sie machen nur die frühere Position des mittleren Quadrates in der Abb. 2.6 deutlich. Außerdem ist eine Parallele p zur Symmetrieachse $S_l S_r$ durch den Punkt B eingezeichnet.

Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez, dessen gleich lange Diagonalen $[AC]$ und $[BD]$ aufeinander senkrecht stehen.

Vierecke mit aufeinander senkrecht stehenden Diagonalen sind Drachenvierecke. In unserem Fall gilt daher für den Flächeninhalt: $A_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, wenn o.B.d.A. $a > b$ ist.

Wir können im Moment nur konstatieren, dass die Summe der Flächeninhalte der beiden Quadrate $ASDS_l$ und BS_rCS nicht mit dem Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ identisch ist. Selbst diese Erkenntnis gibt der anschaulichen Überzeugung keinen Wink, wer

das Übergewicht besitzt. Wir berechnen die Flächendifferenz aufs Geratewohl, hoffend, dass der Wert positiv wird:

$$a^2 + b^2 - \frac{1}{2}(a + b)^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{2} = \frac{(a - b)^2}{2}.$$

Das Ergebnis kann sich buchstäblich sehen lassen: Der Differenzwert ist genauso groß wie der Flächeninhalt eines halben Quadrates mit der Seitenlänge $a - b$. Das halbe Quadrat entdecken wir in der Form des „Kopfkeils“ EFA : Es ist ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a - b$. Diese Stütze verleiht der Figur 2.7 nicht nur eine gewisse Ebenmäßigkeit, sondern sie kompensiert gleichzeitig das Manko an Trapezfläche. Der Fall $a = b$ lässt alles beim Alten. (Stirnrunzeln bei SCHOPENHAUER – auch wegen des zweideutigen Sinnes).

Bei ihm bleibt dieser Aufwand in doppelter Hinsicht ohne Wirkung:

- Das Resultat ist ohne jegliche Anschauung allein durch Rechenleistung zustande gekommen.
- Die Vorgehensweise hat uns, wie schon vorhergesagt, dem allgemeinen Beweis des Satzes von PYTHAGORAS kein Stückchen näher gebracht.

Die Variation der Ausgangsfigur 2.7 hat uns also ein Trapez beschert, das zwar den Zusammenhalt gerettet hat, aber in seinem Inneren die Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate nicht bewahren konnte. SCHOPENHAUERS „anschauliche Überzeugung“ fehlt zudem an allen Ecken und Enden.

Es hilft alles nichts: Wenn das mittlere Quadrat erhalten bleiben soll, müssen wir die Figur 2.7 wie einen Thüringer Kloß zum Verzehr aufreißen:

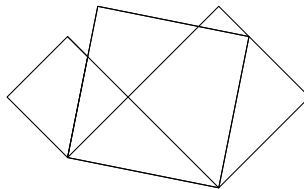


Abbildung 2.9: Die Zerreißprobe

Jetzt erscheint die bekannte PYTHAGORAS-Figur mit dem nach oben geklappten Hypotenusenquadrat. SCHOPENHAUER ist bei deren Anblick in Kontemplation versunken. Am Hypotenusenquadrat rechts spießt ein rechtwinkliges Dreieck heraus, das vielleicht mit dem unteren Teildreieck im größten der drei Quadrate deckungsgleich ist. So weit hergeholt wäre das nicht, denn Entsprechendes galt in der Ausgangsfigur 2.6. Weiter könnte er beobachten, dass zwischen dem Hypotenusenquadrat und den kleinen Quadrat links eine Lücke klafft, die vielleicht mit dem kleinen oben überstehenden Dreieck geschlossen werden könnte und der Rest würde sich finden.

Die aus der Abb. 2.9 stammende Abb. 2.10 liefert ein detaillierteres Bild:

- Es gilt stets: $\varepsilon + \psi = 90^\circ$ (siehe z.B. $\triangle BSA$). (*)
- Das Dreieck BSA wird um den Punkt B um -90° gedreht. Es kommt dadurch mit dem Dreieck BS_rC zur Deckung.

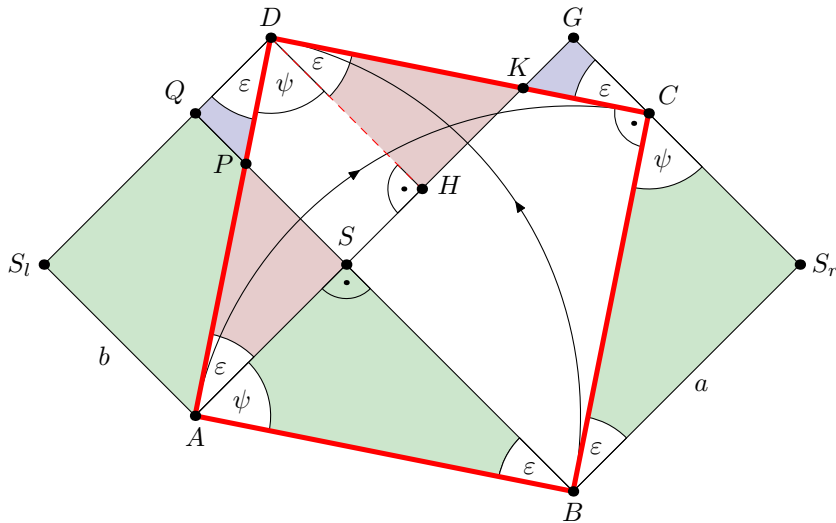


Abbildung 2.10: Die Synthese

- Das Dreieck BSA wird um den Punkt A um 90° gedreht. Es kommt dadurch mit dem Dreieck ADS_l zur Deckung.
- Das Viereck $ABCD$ muss dann ein Quadrat sein, weil drei Seiten gleich lang und zumindest zwei benachbarte Innenwinkel und der mit dem Scheitel C rechte sind. Das ist also das besagte Hypotenusenquadrat.
- In den beiden rechtwinkligen Dreiecken PDQ und KCG gilt: $\overline{CG} = \overline{DQ} = a - b$. Auch haben sie einen Winkel mit dem Maß ε gemeinsam. Also sind diese beiden Dreiecke kongruent.
- Das Trapez $APQS_l$ wird mit dem Dreieck PDQ zum rechtwinkligen Dreieck ADS_l zusammengefügt.
- Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ASP und DHK besitzen wieder wegen (*) jeweils einen Innenwinkel mit dem Maß ε . Außerdem gilt: $\overline{AS} = \overline{DH} = b$. Also sind auch diese beiden Dreiecke kongruent.

Wir schieben nun das Dreieck ASP in die Lücke DHK und belegen am Ende die freigeräumte Fläche AHD mit dem Dreieck DS_lA ; dann sind wir fertig.

SCHOPENHAUER, der uns die ganze Zeit über die Schulter geschaut hatte, piff darauf(hin). Sein Pudel kam gerannt und beide entfernten sich. Die Frage, wie viel zusätzliche Überzeugungsarbeit am Zuschauer beim Weglassen von Bedingungen (was in unserem Fall die Anschaulichkeit zu büßen hat) verrichtet werden muss und wie viel gerade noch erträglich ist, bleibt offen.

Im Jahre 1840 wurde zum ersten Mal der Satz von Steiner-Lehmus in einem Brief erwähnt. In diesem Satz wird behauptet, dass ein Dreieck gleichschenkelig sein muss, wenn es zwei gleichlange Winkelhalbierende sein Eigen nennt. Unser Kritiker wäre in diesem Fall so von der eigenen anschaulichen Überzeugung überwältigt, dass er weit und breit keine Handhabe für einen Beweisansatz vorfinden würde. Wenn SCHOPENHAUER gewusst hätte, wie elementargeometrische Beweise dieses Satzes aussehen (zumindest einem davon

reichen nicht einmal gerade Hilfslinien, nein, es müssen Kreisbögen her, die sich noch besser als Schlingen verwenden lassen), würden sich seine wirr aufragenden Haare am Hinterhaupt genötigt sehen, noch einmal stramm zu stehen.

Kapitel 3

Wundersame Rettung

Der in Fachkreisen wegen seiner Kenntnisse und seines Einfallsreichtums gerühmte Forscher Prof. Dr. Dr. B. Weis hat sich während einer Expedition im Lande Kappataupi in einem unterirdischen Labyrinth verirrt. Seine lange Suche nach einem Ausweg ist schließlich erfolgreich: Ein Lichtschein führt ihn in einen Gang, der an einem Schacht endet. Dort sieht er über sich den Himmel.

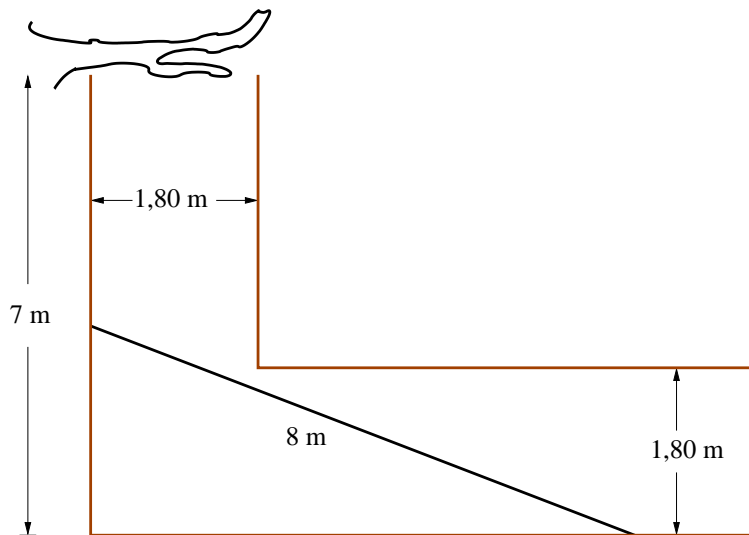


Abbildung 3.1: Querschnitt des Schachtes

Genau am oberen Rand des Schachtes winkt ihm ein dicker Ast und damit die Freiheit. Der 1,70 m große Mann weiß zwar nicht, dass der Schacht 7 m tief ist, jedoch wird ihm sofort klar, dass er ohne weitere Hilfsmittel keine Chance hat. Der durchtrainierte Professor gibt aber nicht auf. Er holt ein Bandmaß hervor und stellt damit fest, dass die Ganghöhe und die Schachtbreite jeweils dieselbe Abmessung von 1,80 m besitzen. Er untersucht das Innere des Ganges genauer und findet eine primitive aber brauchbare 8 m lange Leiter aus Holz. Er trägt sie zum Schacht, um sie dort aufzurichten.

Die folgenden praktischen Erfahrungen, die unser Professor macht, wollen wir rechnerisch begleiten.

Wenn die Leiter in der Abb. 3.2 $[PQ]$ mit der Länge $\overline{PQ} = l$ die Ecke E berührt, wird es kritisch.

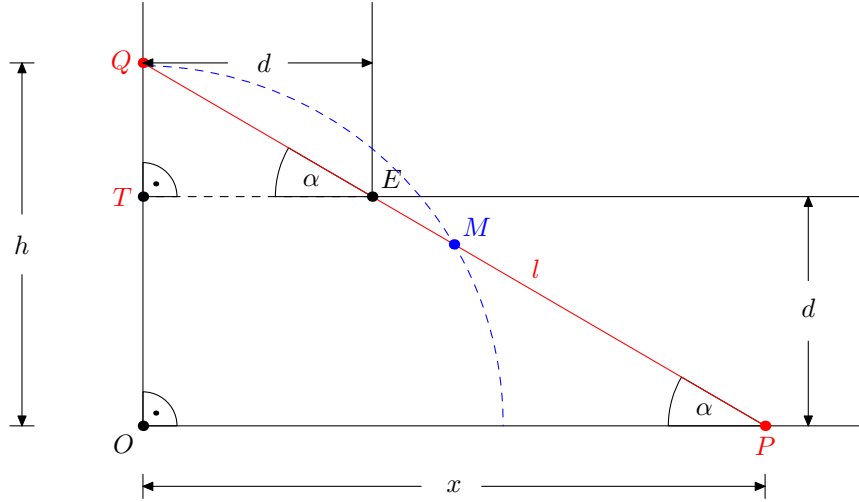


Abbildung 3.2: Zu den Berechnungen

Für $l \leq d$ hat die Aktion keinen Sinn. Also ist $l > d$ vorausgesetzt.

Wegen $\triangle TEQ \sim \triangle OPQ$ folgt: $\frac{h-d}{d} = \frac{h}{x} \Leftrightarrow d(x+h) = hx$ (1)

Weiter gilt im rechtwinkligen Dreieck OPQ : $h^2 + x^2 = l^2$. (2)

Wir quadrieren (1): $d^2(h^2 + 2hx + x^2) = h^2x^2$ und mit (2) folgt: $d^2(l^2 + 2hx) = h^2x^2$.

Die Substitution $hx = k$ erzeugt daraus die Gleichung $k^2 - 2d^2k - d^2l^2 = 0$.

Wegen $l > d \wedge k = hx > 0$ gibt es nur die Lösung $k = hx = d^2 + d\sqrt{d^2 + l^2}$. (3)

Nach (1) gilt: $h + x = \frac{k}{d} \Leftrightarrow h + x = d + \sqrt{d^2 + l^2} \Leftrightarrow x = d + \sqrt{d^2 + l^2} - h$.

Wir setzen $w = \sqrt{d^2 + l^2}$. Dann folgt mit (3):

$$\begin{aligned} h(d+w-h) &= d^2 + dw \\ h(d+w) - h^2 &= d^2 + dw \Leftrightarrow h^2 - h(d+w) + d^2 + dw = 0 \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat formal die Lösungen

$$h_{1,2} = \frac{d + \sqrt{d^2 + l^2}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 2d^2 - 2d\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

Die Abb. 3.3 macht einerseits deutlich, dass Prof. Weis nur dann mit der Leiter $[PQ]$ um die Ecke E herumkommt, wenn der Leiterrittelpunkt M an dieser vorbeigehen kann. Andererseits ist das Dreieck OPQ stets rechtwinklig, egal, wie die Leiter an der Wandung des Schachtes lehnt. Somit stellt die konstante Leiterlänge l den Durchmesser des THALES-Kreises durch den Punkt O dar, und es gilt: $\overline{OM} = \frac{1}{2} \cdot l = \text{konstant}$. Also bewegt sich der Punkt M auf der Viertelkreislinie k .

Der Grenzfall, dass nämlich M die Ecke E berührt, tritt für $\alpha = 45^\circ$ ein. Die zugehörige Leiterlänge darf dann den kritischen Wert $l_{krit} = 2d\sqrt{2}$ nicht überschreiten. In der Abb. 3.2 dagegen liegt der Eckpunkt E im Inneren des Viertelkreises; d.h. die Leiter ließe sich nicht vollständig um die Ecke E führen.

Aus $l \geq 2d\sqrt{2}$ ließe sich herleiten, dass die Diskriminante $l^2 - 2d^2 - 2d\sqrt{d^2 + l^2}$ niemals negativ wird.

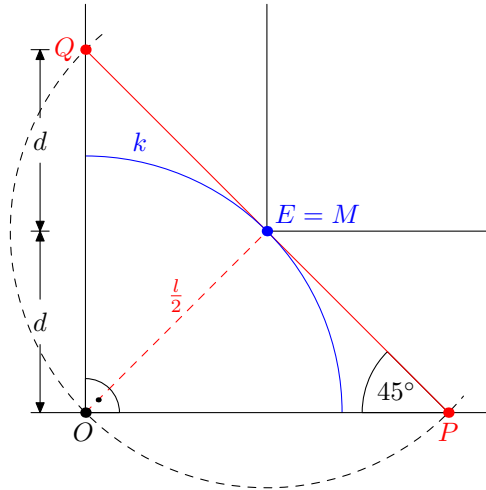


Abbildung 3.3: Die kritische Position der Leiter

Es gibt daher für jede in Frage kommende Leiterlänge $l > l_{krit}$ zwei verschiedene Anstellhöhen h_1 und h_2 . Die größere der beiden wird nur erreicht, wenn es gelänge, die Leiter **von oben** in den Schacht hineinzustellen. Doch unser Forscher muss sich leider mit der kleineren Höhe h begnügen:

$$h = \frac{d + \sqrt{d^2 + l^2}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - 2d^2 - 2d\sqrt{d^2 + l^2}}.$$

Für $l = 8 \text{ m}$ und $d = 1,80 \text{ m}$ ergibt sich: $2,35 \text{ m} < h < 2,36 \text{ m}$. Prof. Weis scheint verloren. (Obwohl er es natürlich schon längst ausprobiert hatte, dass ein Entkommen auf so einfache Weise unmöglich ist, war er noch so geduldig, den rechnerischen Nachweis abzuwarten.)

Für die kritische Länge l_{krit} ergibt sich: $l_{krit} = 2 \cdot 1,8 \text{ m} \cdot \sqrt{2} \approx 5,09 \text{ m}$. Als umsichtiger und erfahrener Abenteurer hat er seine Drahtsäge dabei, und die Leiter wird auf 5 m gekürzt. (Geduld bringt aber auch Rosen: Dadurch, dass ihm jetzt die kritische Leiterlänge bekannt ist, muss der Forscher nicht mühsam die Leiter stückweise kürzen, bis die passende Länge erreicht ist.)

Trotzdem scheint alle Mühe vergebens: $1,70 \text{ m} + 5,0 \text{ m} < 7,0 \text{ m}$. Doch die fehlenden 30 cm kann unser Held dadurch überbrücken, dass er seine Arme nach oben streckt und sich auf der obersten Leitersprosse auf die Zehenspitzen stellt. Selbst wenn er die Leiter etwas schräg an die Schachtwand stellen muss, damit sein Schwerpunkt noch die Balance hält, gewinnt er einen halben Meter hinzu.

Prof. Dr. Dr. B. Weis ist gerettet! Das gibt frohen Anlass, die dramatischen Ereignisse in Verse zu kleiden:

Hier haben wir einen der seltenen Fälle,
dass dort, an einer schwierigen Stelle,
wo man verzweifelt auf Rettung sinnt,
eine Kürzung die entscheidende Höhe gewinnt.

Am guten Ende siegt der Witz,
dass Streckung bis zur Zehenspitze'
dann unseren Professor Weis
das Leben rettet, wenn auch mit Schweiß.

Aus dem Hintergrund meldet sich diesem Moment aber die gnadenlose Realität, um unserem Jubel den Garaus zu machen. Die Leiter haben wir als eine Strecke dargestellt und behandelt, die für jeden Menschen unangreifbar ist. Es muss schon etwas Handfesteres zum Hinaufklettern her, etwa ein Balken. Dann haben wir die folgende Situation vor uns:

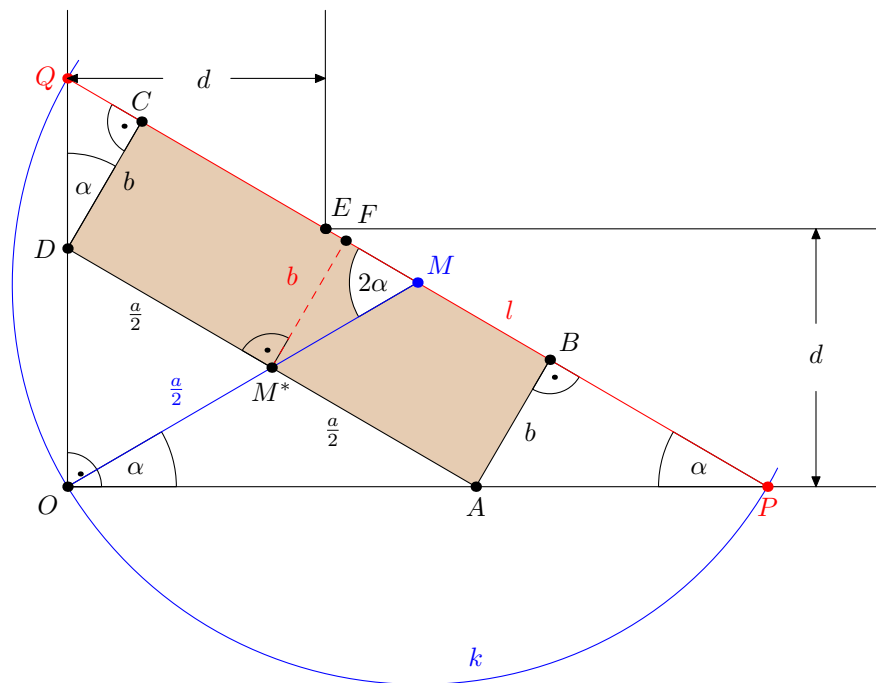


Abbildung 3.4: Der Balken im Schacht

Der Balken (der hier aus Gründen der Übersichtlichkeit übertrieben dick dargestellt ist) hat den rechteckigen Querschnitt $ABCD$ mit $\overline{BC} = \overline{AD} = a$ und $\overline{AB} = \overline{DC} = b$. Die Kante $[BC]$, die am Eckpunkt E vorbei muss, hängt in der Luft. Auf ihr liegt aber die gedachte Strecke $[PQ]$ mit dem Mittelpunkt M und der Länge l , die zum Boden des Ganges und zur linken Wand des Schachtes ständig den Kontakt hält. Dadurch ist das Dreieck OPQ unabhängig vom Neigungswinkel α stets rechtwinklig.

Analog zur Abb. 3.2 kann daher dem Dreieck OPQ dauernd der THALES-Kreis k mit dem Durchmesser $[PQ]$ umbeschrieben werden.

Mit $\overline{PQ} = l$ folgt sofort

$$\overline{OM} = \overline{PM} = \frac{1}{2} \cdot l. \quad (4)$$

Weiter ist $[OM] \cap [AD] = \{M^*\}$.

Das Dreieck OPQ lässt sich durch zentrische Streckung am Punkt O auf das Dreieck OAD abbilden. Weil jede zentrische Streckung mittelpunktstreu ist, muss M^* der Mittelpunkt der Seite $[AD]$ sein.

$$\Rightarrow \overline{OM^*} = \overline{AM^*} = \frac{a}{2}. \quad (5)$$

Das Lot vom Punkt M^* mit dem Fußpunkt F auf der Seite $[PQ]$ fungiert als Hilfslinie, die den direkten Weg zur Berechnung von l eröffnet.

Das ist natürlich Wasser auf die Mühlen von Herrn SCHOPENHAUER, der solche Stützen als „vom Himmel gefallen“ energisch zurückweist (näheres siehe Kapitel „SCHOPENHAUER“). Wir werden noch darauf zurückkommen.

Nun ist
$$\overline{OM} = \overline{OM^*} + \overline{MM^*}. \quad (6)$$

Nach dem Satz vom Außenwinkel am gleichschenkligen Dreieck OPM folgt:

$$\angle FMM^* = 2\alpha.$$

Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck M^*MF :
$$\overline{MM^*} = \frac{b}{\sin 2\alpha}.$$

Mit (4) und (5) wird dann aus (6):

$$\frac{l}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{\sin 2\alpha} \quad (7)$$

$$\Rightarrow l = a + \frac{2b}{\sin 2\alpha}. \quad (8)$$

An dieser Stelle wenden wir uns erneut Herrn SCHOPENHAUER mit der Mitteilung zu, dass uns erst ganz andere Überlegungen zu den Gleichungen (7) und (8) geführt hatten: Zunächst überdachten wir die Zerlegung $\overline{PQ} = \overline{QC} + \overline{CB}(=a) + \overline{BP}$.

Die Streckenlängen \overline{QC} und \overline{BP} lassen sich in den Dreiecken DCQ bzw. ABP mit Hilfe von Winkelfunktionen in Abhängigkeit von b berechnen. Danach führten Umformungen zur Gleichung (8).

Aus dieser ist ersichtlich, dass die „virtuelle Leiterlänge“ $l = \overline{PQ}$ diesmal nicht konstant ist, sondern von α abhängt. Das hat zur Folge, dass der Punkt M während der Bewegung von $[PQ]$ im Schacht seinen Abstand r vom Punkt O ständig ändert. Somit können wir die Bahn des Mittelpunktes M durch Polarkoordinaten beschreiben:

$$\overline{OM} = \frac{l}{2} = r(\alpha) = \frac{a}{2} + \frac{b}{\sin 2\alpha}. \quad (9)$$

Neben der oben dargestellten Zerstückelung der Strecke $[PQ]$ in drei Teilstrecken machten wir uns nun in der Abb. 3.4 auf die Suche nach einer einfacheren Herkunft des Quotienten $\frac{b}{\sin 2\alpha}$: Das Hilfsdreieck M^*MF wurde dann erst entdeckt. (SCHOPENHAUER ab.)

Wir untersuchen die Gleichung (9) mit Hilfe einer ε -Umgebung des 45° -Winkels genauer:

- Für $0 < \varepsilon < 45^\circ$ gilt:

$$\begin{aligned} r(45^\circ + \varepsilon) &= \frac{a}{2} + \frac{b}{\sin(90^\circ + 2\varepsilon)} = \frac{a}{2} + \frac{b}{\cos 2\varepsilon} \\ r(45^\circ - \varepsilon) &= \frac{a}{2} + \frac{b}{\sin(90^\circ - 2\varepsilon)} = \frac{a}{2} + \frac{b}{\cos(-2\varepsilon)} \end{aligned}$$

Wegen $\cos(2\varepsilon) = \cos(-2\varepsilon)$ folgt $r(45^\circ + \varepsilon) = r(45^\circ - \varepsilon)$; d.h. der Graph zur Gleichung (9) verläuft im I. Quadranten symmetrisch zu dessen Winkelhalbierender.

Betrachten wir dort den graphischen Verlauf z.B. auf einem Bildschirm so gleicht er frappant dem Ast einer gleichseitigen Hyperbel mit der Gleichung $x \cdot y = d^2$.

Wenn wir jedoch ohne Rücksicht auf die Praxis negative Werte z.B. für a zulassen, zeigt uns der Graph noch im II. und IV. Quadranten einen Verlauf, der an eine Strophoide erinnert. Das lässt nichts Gutes ahnen, denn Hyperbeln machen keine solchen Umschweife.

Die Bestätigung erfahren wir beim Versuch, mit Hilfe von $x(\alpha) = r(\alpha) \cdot \cos \alpha$ und $y(\alpha) = r(\alpha) \cdot \sin \alpha$ die Gleichung (9) in kartesische Koordinaten umzuschreiben. Die Komplikationen während der abschließenden Auflösung nach y sind zwar heftig, aber auch lehrreich: Weit und breit deutet nichts auf eine Hyperbelgleichung hin.

- Der Bruchterm $\frac{b}{\sin 2\alpha}$ und damit auch $r(\alpha)$ werden für $\alpha = 45^\circ$ minimal. Gleichzeitig erreicht der Mittelpunkt M die Ecke E . Dort wird also auch die virtuelle Leiterlänge am kürzesten. Als äußerstes Zugeständnis dafür dass der Balken ums Eck herumkommt, müssen wir $r(45^\circ) \leq r(\alpha) \leq \overline{OE}$ fordern. Das bedeutet:

$$\frac{a}{2} + b \leq d\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq 2d\sqrt{2} - 2b.$$

Bei einem quadratischen Querschnitt des Balkens mit der Seitenlänge $b = 10$ cm war Prof. Dr. Dr. B. Weis also gezwungen, seine Drahtsäge um $2 \cdot b = 20$ cm weiter unten anzusetzen. Die Tatsache, dass er dennoch entkommen konnte, hat er seinem Ledergürtel zu verdanken, der, als Kletterhilfe um den Ast geschlungen, die ersehnte Rettung ermöglicht hat.

Kapitel 4

Nächtliches Treiben

Seit Jahren werden Menschen - alte wie junge - in das Korsett eines bizarren Schönheitsideals gezwängt, das die Natur allein nicht mehr hergibt.

Stirnrunzeln zum Beispiel, die Lichtenberg als „Schützengräben der Haut“ bezeichnet hat, werden mit Hilfe von Botox eingeebnet. Dem Körper wird durch chirurgische Kunstgriffe eine Silhouette verpasst, deren Ausgeburt der Zeitgeschmack diktiert. (Es ist ein Segen, dass die Venus von Milo in Stein gehauen ist.)

Durch die Wandlung des risikoreichen Kunstgriffes zum Kunstfehler wird allerdings die Form zur Deformation: Gesichtszüge, werden auf eine Art und Weise gestrafft, die eine vormals ehrliche Haut in eine stereotype starre Maske verwandelt.

Dass es selbst im Lande der Geometrie Gestalten gegeben hat, die ihr Aussehen künstlich nach eigenem Gutdünken verbessern wollten, wird in einem Bericht aus früherer Zeit geschildert:

Die heraufziehende Front eines Gewitters verwandelte die einbrechende Dämmerung rasch in Finsternis und es regnete heftig. Im Haus der Vierecke standen die Quadrate – sie bewohnten das oberste Stockwerk – am Fenster. Die kleinsten unter ihnen, die sich vorne eingereiht hatten, beobachteten eine Szenerie, die sich im Schein schnell aufeinander folgender Blitze stroboskopartig abspielte: Einige Regentropfen rannen an der Scheibe nicht stracks nach unten, sondern sie näherten sich auf ihrer Bahn so weit, dass eine Berührung stattfand. Sie verschmolzen dadurch zu imposanten großen Wassertropfen die nun schwer und bedeutungsvoll herabflossen.

So wurde in den kleinen Quadraten der Wunsch wach, sich auf eine ähnliche Weise, wie sie es beobachtet hatten, zusammenzutun, um ihre Kleinwüchsigkeit abzustreifen. Doch schon die Adhäsionskräfte untereinander waren viel zu schwach, um eine dauerhafte Verbindung einzugehen. Da bot der Klebstreifen seine Hilfe an. Schnell war aber klar, dass ein bloßes Aneinanderfügen aus zwei kleineren noch kein größeres Quadrat machte, weil die Kohäsionskräfte noch im Wege waren. Da meldete sich die listige Schere zu Wort, dass sie Abhilfe schaffen könne: Während einer Bildungsreise nach Italien war sie auch vor einem Mosaik von DOMINICHINO (1581-1641) gestanden, das in zwei Quadrate aufgeteilt war, die sich zu einem großen zusammenfügen ließen. Das zugehörige Schnittmuster habe sie noch im Gedächtnis.

Das hieß jedoch, dass die Quadrate einen hohen Preis zahlen mussten: Jede Zerstückelung bedeutete den Verlust Ihrer Individualität! Einige von ihnen verließ der Mut, und sie traten in die hinteren Reihen. Andere jedoch wollten den Eingriff riskieren, um von ihren Zwergenwuchs befreit zu werden.

Als Schere und Klebstreifen gerade ihr Werk beginnen wollten, gebot eines von den großen Quadraten – es hatte den alten PYTHAGORAS noch gekannt – Einhalt: „Nehmt zunächst immer zwei deckungsgleiche Quadrate und macht daraus ein größeres, das geht recht einfach.“ Er zeigte der Schere die Richtung und der Klebstreifen tat das Übrige. Das Ergebnis konnte sich sehen lassen:

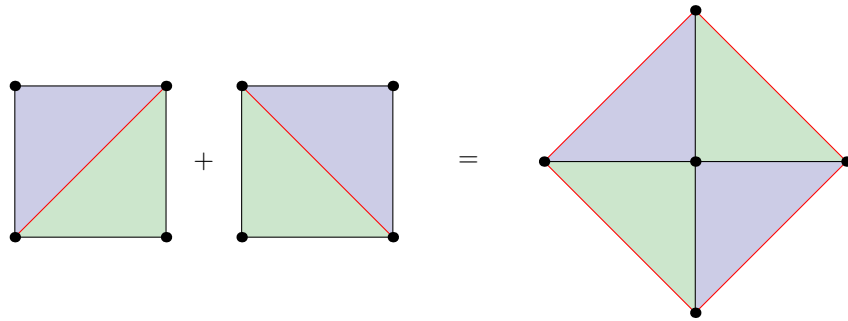


Abbildung 4.1: Zwei gleiche Quadrate ergeben ein großes

Das große Quadrat erinnerte sich in diesem Zusammenhang an einen heftigen Streit, der unter den Pythagoreern wegen des Verhältnisses zwischen den Seiten- und Diagonallängen eines regelmäßigen Fünfecks entbrannt war. Besonders HIPPOSOS von Metapont (ca. 450 v.Chr.) hatte damals ständig Öl ins Feuer gegossen. Erst R. DEDEKIND (1831-1916) machte 1872 mit diesbezüglichen Rechenoperationen im luftleeren Raum endgültig Schluss, indem er die irrationalen Zahlen auf ein unerschütterliches Fundament stellte.

Die Schere wurde nun gedrängt, das geeignete Puzzle für verschieden große Quadrate zurechtzuschneiden. Doch sie hatte den Mund zu voll genommen, denn ihr Erinnerungsvermögen ließ sie im Stich. Sie wollte an den zunächst Stehenden erst etwas ausprobieren, aber finstere Verwünschungen ließen sie erschrocken zurückweichen.

Wieder wandten sich die Blicke hin zum großen Quadrat, das sich auf eine Figur besann, mit der man den Satz des PYTHAGORAS bewiesen hatte. Durch gemeinsame Überlegungen und dem Einsatz von Zirkel und Lineal konnte das Problem der Fusion verschieden großer Quadrate zu einem einzigen Quadrat gelöst werden.

Ein großes ($ABCD$) und ein kleines Quadrat ($BEFK$) mit den Seitenlängen a bzw. b mussten sich bündig aneinanderstellen. Dann wurden Sie in die Pythagoras-Figur eingepasst, wie es die Abb. 4.2 darstellt:

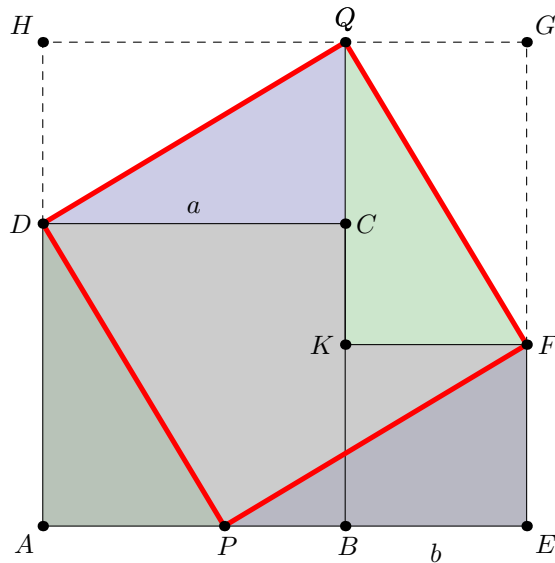


Abbildung 4.2: Zwei verschieden große Quadrate ergeben ein größeres

Die Punkte P und Q sind so eingerichtet, dass $\overline{AP} = \overline{QG} = b$ gilt. Dem Sechseck $AEFKCD$ wurden nun die beiden kongruenten Dreiecke APD und PEF weggeschnitten, und diese wanderten dann nach rechts oben bzw. links oben. Dort wurden sie an die beiden Quadrate angefügt: Das Werk war vollbracht.

Angesichts dieser klaren und effizienten Linienführung fassten immer mehr Paare verschieden großer Quadrate Vertrauen in diese Aktion, so dass Schere und Klebstreifen unter großem Hallo die ganze Nacht zu tun hatten.

Das Rumoren weckte einen Stock tiefer die schlafenden Rechtecke, die keine Quadrate waren. Voller Neugier fragten sie ein paar Quadrate, die sich im Treppenhaus aufhielten, was da los sei. Doch diese verschwanden schnell wieder ins Innere ihres Domizils, bis auf eines, dessen die Rechtecke habhaft wurden. Durch die Drohung, es in zwei Rechtecke zu zerreißen, zwangen sie das gefangene Viereck, alles zu erzählen. Sein Bericht rief im Untergeschoss Begehrlichkeiten hervor, auch in Quadrate verwandelt zu werden. Sie schickten das Quadrat mit einer entsprechenden Anfrage nach oben. Doch ihr Gesuch wurde mit der Begründung abschlägig verbeschieden, dass es für derartige Mieter zu viel Aufwand an Überlegungen erfordere, und dazu hätten die Quadrate keine Lust. Die Rechtecke unter ihnen, die doppelt so breit wie hoch waren, hielten dieses Argument für absolut lächerlich. Aber zunächst half alles nichts – bis die Rechtecke nach oben signalisierten, dass sehr viele von ihnen im Banknotengeschäft tätig seien, und da könnte man ja einige Scheinchen ... Das half.

Der Weg führte scheinbar mühelos über den Höhen- oder Kathetensatz des EUKLID. Aber das war zunächst eine Sackgasse, da es in den entsprechenden konservativen Darstellungen nichts zum Zerschneiden gab. Daher wurde ein Arbeitskreis ins Leben gerufen, der Zirkel und Lineal ganz schön quälen musste, bis die Lösungen unter Dach und Fach waren. Es gab nämlich unter den Rechtecken mit den Seiten a und b viele verschiedene Ausformungen, die individuell zugeschnitten werden wollten. Schließlich stellte sich heraus, dass drei Fälle zu betrachten waren:

1. Fall: $b = \frac{a}{2}$ klar, wurde schon aktenkundig
2. Fall: $b > \frac{a}{2}$

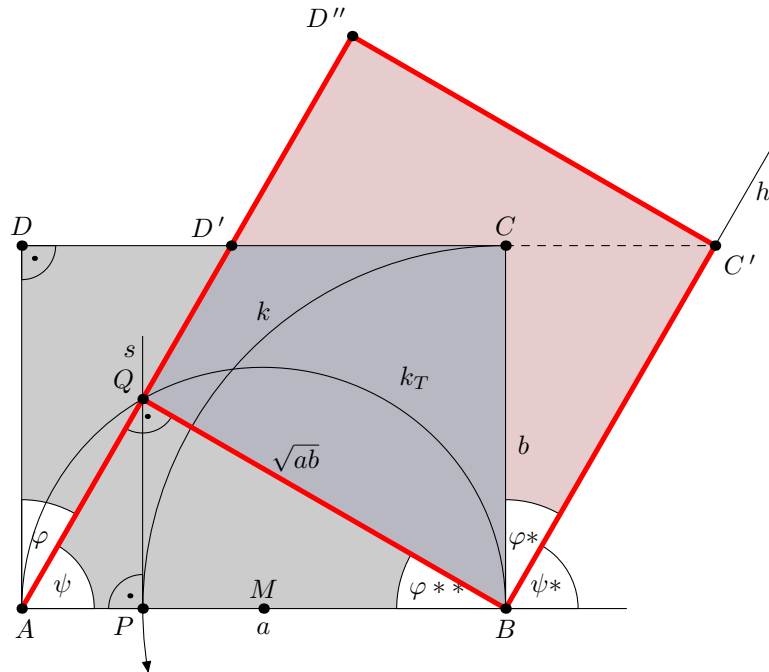


Abbildung 4.3: Das hohe Rechteck $ABCD$ wird zum Quadrat

- $k(B, r = \overline{BC} = b) \cap [AB] = \{P\}$.
- Errichte im Punkt P die Senkrechte s zu $[AB]$.
- Zeichne den THALES-Halbkreis k_T über dem Durchmesser $[AB]$ mit dem Mittelpunkt M .
- $s \cap k_T = \{Q\}$.
- $[AQ \cap [CD] = \{D'\}$.
- Zeichne im Punkt P die Halbgerade h , die auf $[BC]$ senkrecht steht.
- $h \cap [DC] = \{C'\}$. Konstruiere den Punkt D'' so, dass das Viereck $QBC'D''$ ein Rechteck wird.

Aus $\psi = \psi^*$ folgt: $\varphi = \varphi^*$ und $\Delta AD'D \cong \Delta BC'C$.

Wegen $\psi = 90^\circ - \varphi$ folgt im Dreieck ABQ : $\varphi = \varphi^{**}$ und $\Delta ABQ \cong \Delta AD'D \cong \Delta BC'C$.
Damit gilt im Rechteck $BC'D''Q$: $\overline{BQ} = \overline{BC}'$.

Daher ist dieses Rechteck sogar ein Quadrat, das über der Kathete $[BQ]$ des Dreiecks ABC errichtet worden ist. Der Kathetensatz liefert wegen $\overline{PB} = b$ sofort $\overline{BQ}^2 = a \cdot b$; d.h. das konstruierte Quadrat $QBC'D''$ und das Rechteck $ABCD$ sind flächengleich.

Aus nahe liegenden Gründen sind die beiden Dreiecke ABQ und $D'C'D''$ ebenfalls kongruent.

Somit kommen wir für das Schnittmuster ohne Rechnung aus:

- Schneide das Dreieck $AD'D$ vom Rechteck $ABCD$ ab und schiebe es nach rechts, bis die Seite $[AD]$ mit der Seite $[BC]$ zur Deckung kommt.

- Schneide das Dreieck ABQ vom verbliebenen Rest ab und verschiebe es parallel nach oben, bis der Punkt A mit dem Punkt D' zur Deckung kommt.

Dadurch ist das Quadrat $QBC'D''$ entstanden, das offenbar den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck $ABCD$ besitzt.

3. Fall: $b < \frac{a}{2}$ (siehe Abb. 4.4)

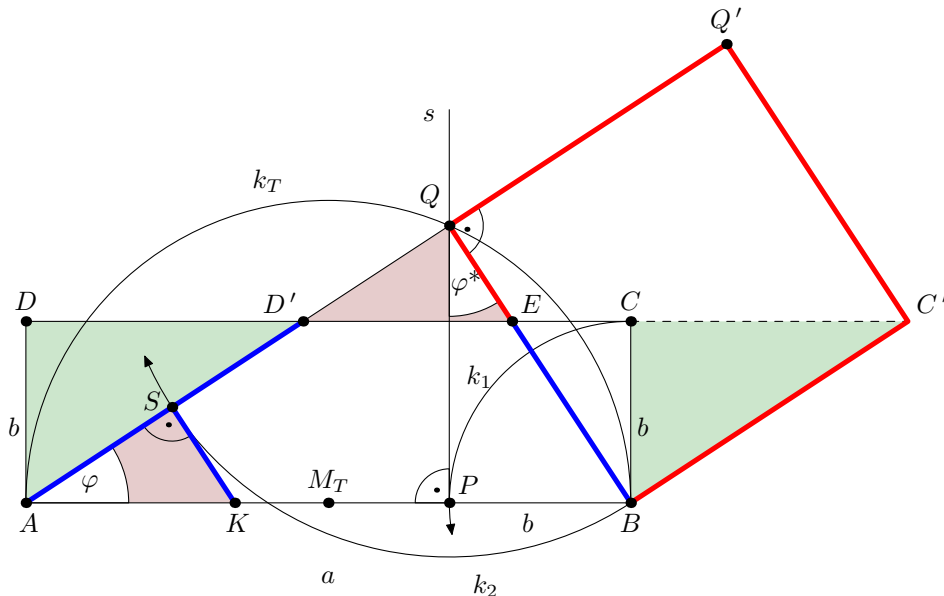


Abbildung 4.4: Das niedrige Rechteck $ABCD$ wird zum Quadrat

Die Konstruktion erfolgt völlig analog zu der von Abbildung 4.3.

$$\left. \begin{aligned} \overline{QS} &= \overline{QB} = \overline{SD'} + \overline{D'Q} \\ \overline{AD'} &= \overline{QB} = \overline{SD'} + \overline{AS} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{D'Q} = \overline{AS}$$

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke AKS und $D'EQ$ sind damit kongruent. Also ist das Rechteck $BC'Q'Q$ auch im 3. Fall ein Quadrat. Der Kathetensatz liefert wieder $\overline{BC}^2 = a \cdot b$.

Zerschnitten wird an den blauen Strecken $[AD']$, $[SK]$ und an $[EB]$.

Wir schieben zunächst gedanklich das Dreieck ABQ auf das kongruente Dreieck $D'C'Q'$. Dann enthält das Quadrat $BC'Q'Q$ bündig am Eckpunkt Q das verschobene Dreieck $D'EQ$, das aber vorher nicht zum Rechteck $ABCD$ gehört hatte. Wir nehmen dieses überzählige Dreieck an der Quadratecke Q' heraus und füllen dann die entstandene Lücke mit dem Dreieck AKS .

Das Dreieck $AD'D$ wird parallel so weit nach rechts verschoben, bis die Seiten $[AD]$ und $[BC]$ zur Deckung kommen. Das Dreieck BCE füllt dann die letzte Lücke im Quadrat $BC'Q'Q$ genau aus.

Damit ist die Metamorphose perfekt.

Doch kaum war scheinbar alles geklärt, liefen schon die ersten Beschwerden aus der Gruppe der niedrigen, aber dafür langen Rechtecke ein: Bei ihnen lag die Schlüsselstelle S außerhalb, so dass daran die bisherigen Zerlegungsrezepte scheitern mussten. Als sich dies

herungesprochen hatte, war es für eines dieser Problemrechtecke schon zu spät. Die Schere, ermüdet durch stundenlange Akkordarbeit, hatte bei ihm schon das Dreieck $AD'D$ abgeschnitten, bevor andere beherzte Rechtecke eingreifen konnten. Jetzt war guter Rat teuer. Das verletzte Rechteck beschloss seine Reparatur mit Hilfe des Klebstreifens, denn die Alternativen waren noch unfreundlicher:

- Die Verwandlung zum Parallelogramm, das aber dann (laut Hausordnung) in eines der unteren Stockwerke einquartiert worden wäre.
- Die Umwandlung des Dreiecks ADD' in ein Rechteck, das jedoch wieder ganz klein anfangen müsste, mit gleichzeitiger Verbannung des unansehnlichen Trapezes $ABCD'$ ins unterste Kellergeschoss, wo schon andere kaum vorzeigbare Gestalten (wie z.B. schiefe Drachenvierecke) ein kümmerliches Dasein fristeten.

Nun erhob sich zwangsläufig die Frage, welche Rechtecke für die Umwandlung in Quadrate nach den bisherigen Plänen geeignet waren und welche nicht.

Wieder trat der Arbeitskreis zusammen, und nach einiger Zeit wurde das folgende Bulletin herausgegeben:

„Nur solche Rechtecke mit den Seitenlängen a und b , für die $0, 2a \leq b < a$ gilt, können sich einer Umwandlung in Quadrate unterziehen.“

Daraufhin erhob sich aus dem Heer der knapp gescheiterten Grenzfälle ein gewaltiger Proteststurm. Für sie war die Grenze von $0, 2a$ reine Willkür und nicht nachvollziehbar. Daher sahen sich die Experten gezwungen, eine Begründung nachzureichen:

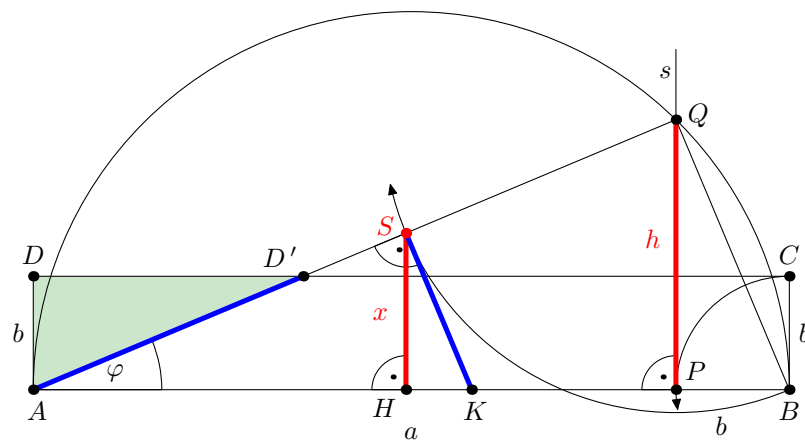


Abbildung 4.5: Der neuralgische Punkt S liegt außerhalb

Für die Höhe x im Dreieck AKS muss gelten: $x \leq b$, sonst ist keine Zerlegung auf die schon bekannte Art möglich.

In der Abbildung 4.5 mit $h = \overline{PQ}$ erkennen wir: $\triangle AHS \sim \triangle APQ$:

$$\frac{\overline{AS}}{x} = \frac{\overline{AQ}}{h}. \quad (*) \quad \text{Es genügt, } x = b \text{ zu untersuchen.}$$

Nun gilt $h = \sqrt{b(a-b)}$ (Höhensatz im $\triangle ABQ$).

Weiter ist $\overline{AQ} = \sqrt{a(a-b)}$ (Kathetensatz im $\triangle ABQ$).

und $\overline{BQ} = \sqrt{ab}$ (Kathetensatz im $\triangle ABQ$).

$$\overline{AS} = \overline{AQ} - \overline{SQ} = \overline{AQ} - \overline{BQ} = \sqrt{a(a-b)} - \sqrt{ab}.$$

$$\begin{aligned} \text{Mit } x = b \text{ in } (*): \quad & \frac{\sqrt{a(a-b)} - \sqrt{ab}}{b} = \frac{\sqrt{a(a-b)} - \sqrt{ab}}{\sqrt{b(a-b)}} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{a}\sqrt{a-b} - \sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Bigg| \cdot \frac{\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{a-b} - \sqrt{b} = \sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a-b} = 2\sqrt{b} \Bigg| ^2 \\ \Leftrightarrow & a - b = 4b \quad \Leftrightarrow \quad b = 0, 2a \end{aligned}$$

Alle Seitenlängen b , die unter die kritischen Marke von $0, 2a$ fallen, sind ungeeignet. Unter den gescheiterten gab es eine Menge kongruenter Rechtecke, die daraufhin eine Zweckgemeinschaft gründeten. Es taten sich immer so viele zusammen, dass die kritische Stapelhöhe von $0, 2a$ erreicht oder übertroffen wurde.

Aber auch Eigenbrötler kamen zum Zuge: Sie ließen sich jeweils von der Schere allein zu einem rechteckigen Stapel mit geeigneten Abmessungen verarbeiten. Die anschließende Umwandlung zum Quadrat erfolgte dann in bewährter Manier. Der Nachteil, einem Gemetzel ausgesetzt worden zu sein, wurde für solche Individualisten dadurch wettgemacht, dass sie in der Gewissheit fortlebten, keine Fremdkörper in sich zu tragen.

In einem riesigen Gebäudekomplex auf der gegenüber liegenden Straßenseite waren die Dreiecke zu Hause. Ihnen blieb nicht verborgen, dass immer mehr Quadrate statt Rechtecke unterwegs waren. Es schien schick und trendy zu sein, sich eine quadratische Gestalt zu geben. Nach und nach sprach es sich herum, was hinter der geheimnisvollen Vermehrung steckte. Auf Befragen, wie dies in ihrem Fall zu bewerkstelligen sei, wiesen die Quadrate darauf hin, dass die Dreiecke zunächst zu Rechtecken werden müssten. Erst nach diesem Zwischenstadium sei die Umwandlung in ein Quadrat möglich.

In ihrer Formelsammlung fanden die Dreiecke $A_{\Delta} = \frac{1}{2}g \cdot h$ (g : Grundlinie und h : Dreieckshöhe auf die Grundlinie). Sie machten daraus $A_{\square} = g \cdot \frac{1}{2}h$. Schere und Klebstreifen hatten also vorerst wenig Mühe:

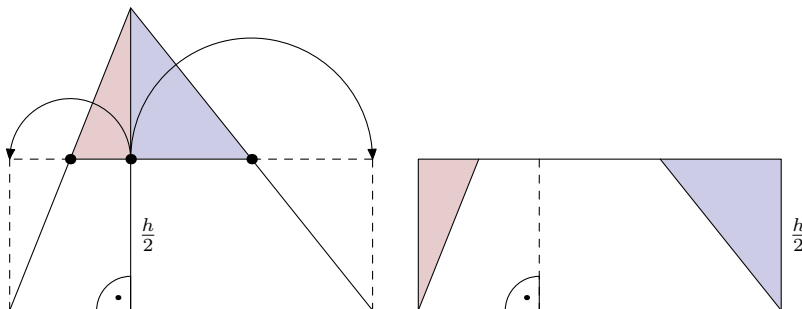


Abbildung 4.6: Aus einem Dreieck wird ein Rechteck

Durch zwei Drehbewegungen der bunten Teildreiecke um jeweils 180° bzw. -180° fügt sich das Dreieck zum Rechteck. Nun metzelte die Schere am Rechteck so heftig weiter, dass der Klebstreifen nur noch mit großer Mühe das angestrebte Quadrat am Ende zusammenhalten konnte. Zart besaitete Dreiecke wandten sich indigniert ab.

Im Haus der Dreiecke hatte man die gleichseitigen im obersten Stockwerk untergebracht. Viele von ihnen waren in der Verpackungsindustrie tätig, und fast noch mehr sorgten im Straßenverkehr für Ordnung.

Im Laufe der Jahre hatte sich unter den „Vorfahrt gewähren“-Zeichen mehr und mehr Unzufriedenheit breit gemacht, weil sie sich gegenüber den quadratisch geformten Schildern, die eine Hauptstraße anzeigten (ihr Flächeninhalt war in unzähligen Fällen mit dem der Dreiecke fast gleich), zurückgesetzt fühlten. Zudem gab es unter den vielen Dreiecksschildern auch solche, die man schon für ungültig erklärt hatte und andere, deren Schicksal als Auslaufmodell schon besiegelt war (siehe Abb. 4.7):

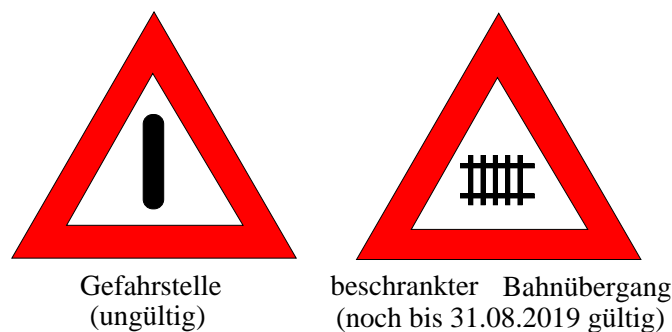


Abbildung 4.7: Gefahrzeichen

Man hatte also durchaus dafür Verständnis, dass dermaßen benachteiligte Dreiecke nicht nur aus Gründen der Wiederverwertung den dringenden Wunsch hegten, in Form von Quadraten ihre Daseinsberechtigung zu untermauern und zu stärken.

Die Horrorvorstellung allerdings, die die Schere schon bei der Umwandlung gewöhnlicher Dreiecke in Quadrate gab, erzeugten in den edel und gleichmäßig geformten Dreiecken eine unüberwindliche Abneigung, sich solchen Prozeduren zu unterziehen. Man hielt daher nach einer anderen Möglichkeit Ausschau. Schließlich hatte die Suche im Archiv Erfolg: In einer schon älteren mathematischen Zeitschrift fand man einen Beitrag von einem gewissen H.E. Dudeney (1857-1930), der ein Meister des Puzzles gewesen war. Die gleichseitigen Dreiecke stießen in diesem Zusammenhang auf eine Darstellung, die eine wesentlich einfachere Zerlegung zu ermöglichen schien:

In der Abb. 4.8 ist Folgendes dargestellt:

- Von den Seitenmittelpunkten M_a und M_b wird jeweils das Lot auf die Strecke $[AB]$ gefällt.
Dann gilt: $\overline{T_1T_2} = 2 \cdot \overline{AT_1} = 2 \cdot \overline{BT_2}$.
- Von den Punkten M_b und T_2 aus wird jeweils das Lot auf die Strecke $[T_1M_a]$ gefällt.
- Die Schere arbeitet auf den blauen Schnittlinien.

Nun müssen einerseits die drei Innenwinkel des Dreiecks ABC mit dem Maß $\alpha = 60^\circ$ zu einem gestreckten Winkel im Inneren des künftigen Quadrates zusammengefügt werden. Andererseits wandern die vier rechten Winkel mit den Scheiteln F_1 und F_2 so nach außen, dass diese zu Eckpunkten des künftigen Quadrates werden.

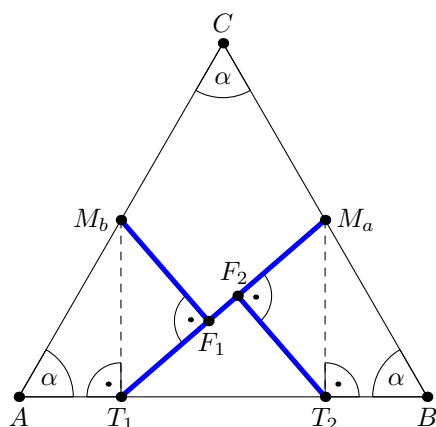


Abbildung 4.8: Ein einfaches Schnittmuster

Eine Drehbewegung der beiden Vierecke $AT_1F_1M_b$ und $T_2BM_aF_2$ um die betreffenden Seitenmittelpunkte um -180° bzw. 180° schlägt beide Fliegen mit einer Klappe (vgl. Abb. 4.9):

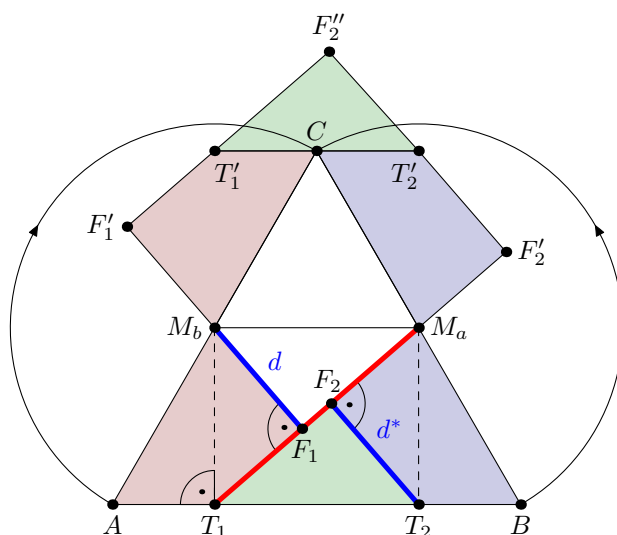


Abbildung 4.9: Das Dreieck fügt sich scheinbar zum Quadrat

Schon wollte die Schere ihr Werk an einem gleichseitigen Dreieck beginnen, doch durch den vorangehenden Fall des zu niedrigen Problemrechtecks misstrauisch geworden, sollte die Schere erst garantieren, dass ihre Vorgehensweise ein lückenloses und einwandfreies Ergebnis liefern würde. Aber dazu sah sie sich außerstande. Nach langem Hin und Her ließ sich ein schon sehr betagtes gleichseitiges Dreieck erweichen, das Versuchskaninchen zu spielen.

Nach der planmäßig erfolgten Zerlegung verband der Klebstreifen die vier Teile zum „Quadrat“. Doch irgendwie saß die neue Montur nicht richtig, obwohl das überaus kritische Publikum unisono die Umwandlung als „sehr gelungen“ empfand. Nun, es half alles nichts: Das Quadrat fühlte sich in seiner Haut überhaupt nicht wohl, und es erfolgte der Rückbau in das ursprüngliche gleichseitige Dreieck, das fortan als Grundfläche eines passenden

Tetraeders ein verborgenes Dasein führte.

Wohl oder übel mussten die Dreiecke im Haus der Vierecke bei den Rechenmeistern, die mit den Alten Griechen noch zur Schule gegangen waren, vorstellig werden. Dort fand man Folgendes heraus:

- Das zum gleichseitigen Dreieck ABC (mit der Seitenlänge a) flächengleiche Viereck $F_1F_2F_2''F_1'$ ist ein Rechteck.
- $\overline{F_1F_1'} = 2 \cdot d$ und $\overline{F_2T_2'} + \overline{T_2'F_2''} = 2 \cdot d^*$. $\Rightarrow d = d^*$.
- Dann sind die Dreiecke $T_1T_2F_2$ und $M_bF_1M_a$ kongruent und es gilt:
 $\overline{M_aM_b} = \frac{a}{2} = \overline{T_1T_2}$.
- Es sei $x = \overline{T_1M_a}$ die Seitenlänge des gesuchten Quadrates.

Dann gilt: $x^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{3}$.

Diese Streckenlänge x lässt sich mit den Satz des PYTHAGORAS und dem Höhensatz konstruieren:

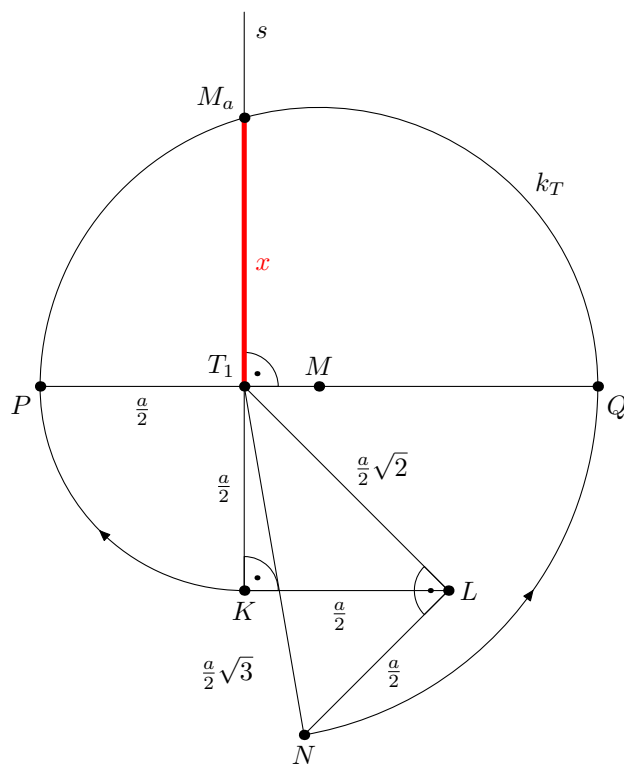


Abbildung 4.10: Die Konstruktion der Quadratseitenlänge x

- Zeichne $[T_1K]$ mit $\overline{T_1K} = \frac{a}{2}$. Der Punkt P entsteht durch Drehung von $[T_1K]$ um T_1 um -90° .
- Zeichne das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck T_1KL . $\Rightarrow \overline{T_1L} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.

- Zeichne das rechtwinklige Dreieck T_1NL mit den Kathetenlängen $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $\frac{a}{2}$

$$\Rightarrow \overline{T_1N} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

- Der Punkt Q entsteht durch Drehung der Strecke $[T_1N]$ um T_1 auf die Halbgerade $[PT_1]$.
- Zeichne den THALES-Halbkreis k_T mit dem Durchmesser $[PQ]$.
- Errichte im Punkt T_1 die Senkrechte s zu $[PQ]$.

- $s \cap k_T = \{M_a\}$. Höhensatz: $\overline{M_aT_1} = \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{3} = x.$

e) Wegen c) folgt nun:

$$\overline{F_1M_a} + \overline{M_aF'_2} = \overline{T_1F_2} + \overline{F_2M_a} = x \quad \Rightarrow \quad \overline{F_1F'_2} = x = \overline{T_1M_a}.$$

f) Das Viereck $T_1T_2M_aM_b$ ist ein Parallelogramm. Für seinen Flächeninhalt A gilt einerseits:

$$A = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3}.$$

$$\text{Andererseits ist } A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot x = d \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

$$\Rightarrow d \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4} (\sqrt[4]{3})^2.$$

$\Rightarrow d = \frac{a}{4}\sqrt[4]{3} = \frac{x}{2}$ und $2d = \overline{F_1F'_1} = x$. Also ist das Rechteck $F_1F'_2F''_2F'_1$ das gesuchte Quadrat.

g) Kosinussatz im Dreieck T_1BM_a mit $\overline{T_1B} = y$:

$$x^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} - 2y \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos 60^\circ \quad \Leftrightarrow \quad (\text{mit } x^2 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}) \quad y^2 - \frac{a}{2}\sqrt{3}y + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0.$$

Wegen $y > 0$ gibt es nur die Lösung

$$y = \overline{T_1B} = \frac{a}{4} \left(1 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3} \right).$$

$$\Rightarrow \overline{T_2B} = \overline{T_1B} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4} \cdot \left(\sqrt{4\sqrt{3} - 3} - 1 \right) \neq \frac{a}{4}.$$

Das Parallelogramm $T_1T_2M_aM_b$ **ist kein Rechteck**.

$$\frac{\overline{T_2B}}{\frac{a}{4}} = \sqrt{4\sqrt{3} - 3} - 1 = 0,981969 \dots. \text{ Die Abweichung beträgt also knapp 2\%.}$$

h) Das exakte Schnittmuster (siehe Abb. 4.11) kommt nun folgendermaßen zustande:

- $k(M_a, r = x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[4]{3}) \cap [AB] = \{T_1\}$.
- Fülle vom Punkt M_b das Lot auf die Strecke $[T_1M_a]$. Das ergibt den Fußpunkt F_1 .
- Zeichne die Parallele p zu $[T_1M_a]$ im Abstand $d = \overline{F_1M_b}$ zwischen $[T_1M_a]$ und B .
- $p \cap [AB] = \{T_2\}$.
- Fülle vom Punkt T_2 das Lot auf die Strecke $[T_1M_a]$. Das ergibt den Fußpunkt F_2 .

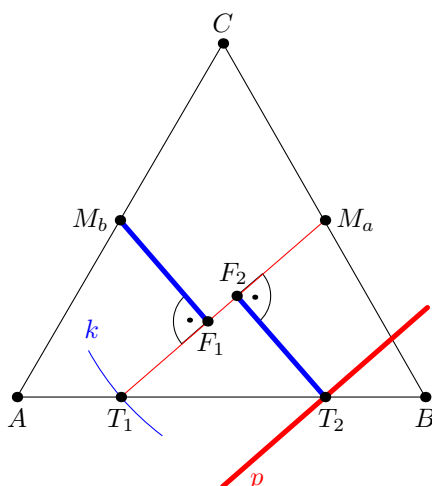


Abbildung 4.11: Das exakte Schnittmuster

Jetzt gab es genügend willige gleichseitige Dreiecke, die sich auf diese Weise einer Umwandlung ins Quadrat unterzogen.

So kehrte endlich Ruhe ein, und der Routinebetrieb wurde wieder aufgenommen. Wochenlang ging das so, bis es eines Nachts bei den Quadraten Sturm läutete. Draußen stand ein Besucher, der noch nie in der Gegend aufgetaucht war: ein Kreis. Sein sensationeller Wunsch nach der Verwandlung in ein Quadrat sprach sich wie ein Lauffeuer herum und im Nu herrschte im ganzen Stockwerk höchste Aufregung. Die Besonnenen wiegten ihre Ecken verneinend hin und her: „Unsere elementargeometrische Welt würde dann noch mehr von Ecken und Kanten dominiert. Das können wir nicht gutheißen.“ Andere wandten ein: „Wir haben nur Zirkel und Lineal zur Verfügung. Ferdinand LINDEMANN hat aber 1882 bewiesen, dass eine Strecke der Länge π bzw. $\sqrt{\pi}$ allein damit nicht konstruierbar ist.“

Das wollte der Kreis nicht gelten lassen: „Ich habe gute Bekannte, die im Münzwesen tätig sind. Einer von ihnen hat mir ein Heft mitgegeben, in dem die Quadratur eines Kreises dargestellt ist (siehe Abb. 4.12). Dieses Begleitheft gehört zu einer seriösen Ausstellung, die unter dem Titel 'Der Kreis gibt sein Geheimnis preis' im April 1979 in der Sparkasse Kulmbach stattfand.“

Daraufhin teilte sich die Menge der Quadrate in zwei oppositionelle Lager: Die einen hielten an der Unerschütterlichkeit eines Beweises fest, die anderen verlangten unbeirrt eine genaue Prüfung des vorliegenden Falles. Schließlich gewannen die Querulanten die Oberhand, und die im Heft dargestellte Figur (ein gewisser Fritz Burkhardt hatte sie erstellt) landete auf dem Seziertisch. Wir wollen den Streithähnen über die Schulter schauen:

Die Konstruktionsschritte in der Abb. 4.12 lassen sich anhand der alphabetischen Reihenfolge der großen Buchstaben leicht nachvollziehen. Die Punkte A , B , C und J sind die Mittelpunkte der Kreisbögen.

Es wird behauptet, dass die Länge des Viertelkreisbogens von B nach D und die Streckenlänge \overline{CM} gleich sind.

Seit 1882 steht andererseits fest, dass die Kreiszahl π niemals Lösung einer algebraischen Gleichung (also einer solchen mit rationalen Koeffizienten) sein kann. Man fing daher zu rechnen an:

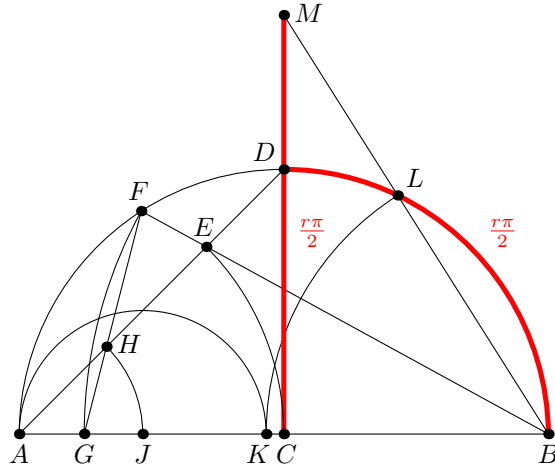


Abbildung 4.12: Die Quadratur des Kreises nach Fritz Burkhardt (1965)

Mit $\overline{CB} = r$ und dem Kosinussatz im Dreieck ABE ergibt sich:

$$\overline{BE}^2 = (2r)^2 + r^2 - 4r^2 \cos 45^\circ \Leftrightarrow \overline{BE} = r\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \quad (*).$$

Mit $\beta = \angle EBA$ und $\overline{AE} = r$ wenden wir im Dreieck ABE den Sinussatz an:

$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\overline{BE}}{\sin 45^\circ}. \quad \text{Mit (*) folgt } \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}}. \quad (1)$$

$$\text{Und elementar ergibt sich: } \cos \beta = \sqrt{\frac{9 - 4\sqrt{2}}{10 - 4\sqrt{2}}}, \quad (2)$$

$$\text{sowie } \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}. \quad (3)$$

$$\text{Im rechtwinkligen Dreieck } ABF \text{ gilt: } \overline{BF} = 2r \cos \beta = \overline{BG} \Rightarrow \overline{AG} = 2r - \overline{BG}. \quad (4)$$

Und damit ist $\overline{AG} = 2r(1 - \cos \beta)$.

Im Dreieck AGH wenden wir den Sinussatz an und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AH}}{\sin(90^\circ + \frac{\beta}{2})} &= \frac{\overline{AG}}{\sin[180^\circ - (45^\circ + 90^\circ + \frac{\beta}{2})]} \\ \Leftrightarrow \frac{\overline{AH}}{\cos \frac{\beta}{2}} &= \frac{\overline{AG}}{\sin(45^\circ - \frac{\beta}{2})} \\ \Leftrightarrow \overline{AH} &= \frac{\overline{AG}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \tan \frac{\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Mit (4) und $\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= 2\sqrt{2}r \frac{1 - \cos \beta}{1 - \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos \beta}}{\sqrt{1 + \cos \beta}} \\ &= 2\sqrt{2}r \frac{\sin \beta \sqrt{1 - \cos \beta}}{\sqrt{1 + \cos \beta} - \sqrt{1 - \cos \beta}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \cos \beta} + \sqrt{1 - \cos \beta}}{\sqrt{1 + \cos \beta} + \sqrt{1 - \cos \beta}} \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ \overline{AH} &= r\sqrt{2} \cdot \tan \beta (\sin \beta + 1 - \cos \beta) = \overline{AJ} \end{aligned}$$

Nun geht der Blick in der Abb. 4.12 endlich nach rechts in den sensiblen Bereich:

$$\overline{KB} = 2r - 2 \cdot \overline{AJ} = 2r[1 - \sqrt{2} \tan \beta (\sin \beta + 1 - \cos \beta)] = \overline{LB}.$$

Mit $\varphi = \angle LBA$ folgt im rechtwinkligen Dreieck ABL :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{LB}}{2r} = 1 - \sqrt{2} \tan \beta (\sin \beta + 1 - \cos \beta). \quad (5)$$

Im Dreieck CBM gilt $\tan \varphi = \frac{\overline{MC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{MC}}{r}$; d.h. es müsste gelten:

$$2 \cdot \tan \varphi = \frac{\overline{MC}}{\frac{r}{2}} = \pi.$$

Für $0 < \varphi < 90^\circ$ gilt: $\tan \varphi = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos \varphi}$.

$\cos \varphi$ (und damit $\tan \varphi$) lässt sich aber nach (5) durch $\sin \beta$, $\cos \beta$, und $\tan \beta$, ausdrücken. Für $\sin \beta$, $\cos \beta$, und $\tan \beta$ stehen die Werte aus (1), (2) und (3) bereit.

Im Gegensatz zum Jahre 1965, in dem nur langwierige und artistische Rechenleistungen ein Urteil über die Qualität der Konstruktion in 4.12 ermöglicht hätten, gelingt es den streitenden Parteien, durch eine entsprechende Mathematiksoftware des finalen Terms habhaft zu werden:

$$2 \cdot \tan \varphi = \frac{\overline{MC}}{\frac{r}{2}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{124}{833} - \frac{32 \cdot \sqrt{2}}{833} - \frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{3}{7}} \right)^2}}{\sqrt{\frac{124}{833} - \frac{32 \cdot \sqrt{2}}{833} - \frac{\sqrt{2}}{7} + \frac{3}{7}}}.$$

Zwar wirren sich die Wurzeln zum Wahnsinn, aber auch hier steckt eine algebraische Gleichung dahinter, deren Lösung niemals der Wert $\frac{\pi}{2}$ sein kann. Wir müssten nur ständig isolieren, quadrieren, isolieren, quadrieren. . . .

Konkret ergibt sich für $2 \cdot \tan \varphi$ der Wert 3.166 596

Da haben wir für $\pi = 3,141\,592\,65 \dots$ (neben Kochansky und Mitstreitern) schon Besseres gesehen:

- ARCHIMEDES (ca. 287-212) hat π mit $\frac{22}{7} = 3,142\,8 \dots$ approximiert.
- Wer's lieber mit PYTHAGORAS hält:

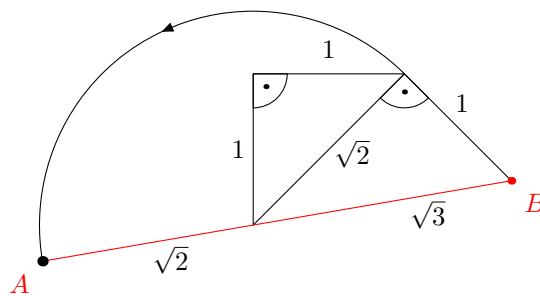


Abbildung 4.13: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,146\,264 \dots$

Es sei $\overline{AB} = x$.

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad |^2 \\
 x^2 &= 5 + 2\sqrt{6} \\
 x^2 - 5 &= 2\sqrt{6} \quad |^2 \\
 x^4 - 10x^2 + 25 &= 24 \\
 x^4 - 10x^2 + 1 &= 0 \quad \text{Dies ist eine algebraische Gleichung.}
 \end{aligned}$$

Durch mehrfaches Quadrieren hat sich in diesem Fall die Lösungsmenge sogar erweitert, aber π kann nicht Lösung dieser algebraischen Gleichung sein.

Karl Kraus schrieb im Jahre 1926 in der „Fackel“ unter dem Titel „Korybantisches“ [5]: „Hätte ich weniger zu tun, und wäre ich genußsüchtiger, so würde ich in den Theatern wahrscheinlich das Amt jenes Berliner Zweiflers übernehmen, der, sobald nur der Vorhang aufging, den Ruf 'Schon faul!' ertönen ließ und den Beginn des Spiels immerhin durch seine gewaltsame Entfernung verzögerte.“

Bei der Aufführung seiner oben dargestellten Rektifikation eines Viertelkreisbogens hätte man Herrn Burkhardt sofort mit dem gleichen Ruf zu dem Zeitpunkt in den Arm fallen sollen, als er den Zirkel oder das Lineal auch nur angefasst hatte.

Im Vorwort seines Begleitheftes finden wir einen in diesem Zusammenhang geradezu prophetischen Satz: „Die Zeichnung als Experiment ergibt nun zwar primär noch keinen Beweis für die Richtigkeit einer Lösung, sie gibt aber mit Sicherheit wertvolle Hinweise auf mögliche Wege und sie zeigt wenigstens - meist schon beim ersten Verstoß - wie es n i c h t geht.“

In weiten Kreisen der Kreise galt fortan der Abtrünnige unter ihnen als *persona non grata*, so dass er sich nicht mehr heim traute. Doch bei den Quadraten kam der Asylant noch in Mode: Mit ihm ließen sie sich - je nach Geschmack - als In- oder Umkreis in der Öffentlichkeit blicken, bestaunt und beneidet von vielen anderen Bewohnern in beiden Häusern.

Schon wurden die Rechtecke und dann auch die Dreiecke wieder vorstellig

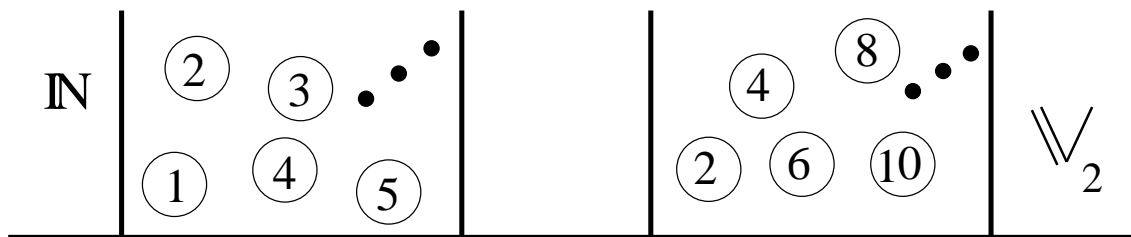
Das ist zwar nicht das Ende des Berichtes, aber damit wollen wir es gut sein lassen.

Kapitel 5

Endlich unendlich

Seit jeher ist das Unendliche für die Menschen etwas Nicht-Fassbares, Nicht-Erreichbares, Unermessliches, ja Aussichtsloses. Und dennoch haben es Mathematiker z.B. in der Analysis und der Geometrie verstanden, in der Welt der Zahlen und Punktmengen die Grenzen zur Unendlichkeit widerspruchsfrei auszuloten.

ZWEI VORRATSKISTEN



Wenn wir die Kiste (Menge), die alle natürlichen Zahlen \mathbb{N} enthält, mit derjenigen vergleichen, in der sich alle geraden Zahlen (Menge der Zweier Vielfachen \mathbb{V}_2) befinden, so stellen wir fest, dass in der rechten Kiste alle ungeraden Zahlen fehlen. Oder anders gesagt: Entfernen wir aus der linken Kiste alle ungeraden Zahlen, so ist der restliche Inhalt mit dem der rechten Kiste identisch.

Aus Erfahrung wissen wir, dass in einem Weiher, in dem sich Karpfen und Schleien befinden, weniger Fische verbleiben, nachdem alle Karpfen abgefischt worden sind. Das würde für unsere beiden Zahlenmengen bedeuten, dass sich in der rechten weniger Zahlen befinden als in der linken. Doch die Fragen „Wie viele Zahlen befinden sich in den beiden Kisten?“ und „Wie viele Zahlen gibt es in der rechten Kiste weniger als in der linken?“ bringen uns in Schwierigkeiten: Wir können keine konkrete Anzahl nennen, weil wir bis dorthin nicht zählen können, weil die jeweilige Zahlenmenge „kein Ende“ hat, weil es im Gegensatz zu Karpfen und Schleien „unendlich viele“ sind.

Versuchen wir es anders: Wir entnehmen der linken Kiste die „1“ und gleichzeitig der rechten die „2“, dann links die „2“ und rechts ihr Doppeltes, nämlich die „4“ usw., so dass sich die folgende Paarmenge ergibt: $\{(1 | 2); (2 | 4); (3 | 6); (4 | 8); \dots; (79 | 158); \dots\}$.

Offensichtlich ist auch in dieser Menge kein Ende abzusehen, weil sich zu jeder natürlichen Zahl n immer wieder ein ganzzahliger Partner $2n$ finden lässt.

Obwohl also die rechte Menge „unendlich weniger“ Zahlen enthält als die linke, enthalten beide Kisten „gleich viele“ Zahlen.

Der englische Mathematiker John WALLIS (1618-1703) wählte wohl als Erster das Symbol „ ∞ “ für den Begriff „unendlich“. Rein formal erhielten wir für die Inhalte der beiden Kisten zwei Gleichungen:

$$2 \cdot \infty = \infty$$

und $\infty - \infty = \infty$

Wenn wir ∞ als Zahl auffassen würden, könnten wir uns eklatanter Widersprüche nicht erwehren: Die erste Gleichung wäre identisch mit $2 = 1$ die zweite mit $0 = \infty$.

Die Konfrontation mit der Unendlichkeit hat die Menschheit schon allein durch den Blick ins Weltall intensiv beschäftigt; in einem Volkslied z.B. wird die Frage erhoben: „Weißt du wieviel Sternlein stehen an dem blauen Himmelszelt?“.

Fünftklässlern wurde die folgende Aufgabe gestellt:

„Max behauptet: 'Es gibt genau so viele Sandkörner wie natürliche Zahlen.' Moritz bestreitet dies. Wer hat Recht? Begründe deine Antwort.“

Neben der richtigen Antwort haben Einzelne auch die Auffassung vertreten, dass Max Recht hat, weil sich so viele Sandkörner gar nicht abzählen ließen.

Im Märchen der Gebrüder Grimm „Das Hirtenbüblein“ war einem König zu Ohren gekommen, dass ein Hirtenknabe wegen seiner klugen Antworten, die er auf alle Fragen gab, im Lande bekannt und berühmt war. Der Herrscher ließ ihn zu sich kommen, um ihn zu testen. Es entspann sich der folgende Dialog:

„Wieviel Tropfen sind im Weltmeer?“ „Herr König, lasst alle Flüsse auf der Erde verstopfen, damit kein Tröpfchen daraus ins Meer läuft, das ich nicht erst gezählt habe, so will ich Euch sagen, wie viele Tropfen im Meere sind.“

„Wie viele Sterne stehen am Himmel?“ „Gebt mit einen großen Bogen Papier.“ Dann machte der Knabe mit der Feder so viele feine Punkte darauf, dass sie kaum zu sehen und fast gar nicht zu zählen waren und einem die Augen vergingen, wenn man darauf blickte. Darauf sprach das Hirtenbüblein: „So viele Sterne stehen am Himmel wie hier Punkte auf dem Papier; zähle sie nur!“

„Wieviel Sekunden hat die Ewigkeit?“ „In Hinterpommern liegt der Demantberg, der hat eine Stunde in die Höhe, eine Stunde in die Breite und eine Stunde in die Tiefe; dahin kommt alle hundert Jahre ein Vögelein und wetzt sein Schäbelein daran, und wenn der ganze Berg abgewetzt ist, dann ist die erste Sekunde der Ewigkeit vorbei.“

Es verstand sich von selbst, dass der Knabe daraufhin im Schloss wohnen durfte und wie ein eigenes Kind des Königs angenommen wurde.

DIE KLÜGSTE FRAGE

„Ist 0,9 Periode kleiner als 1?“ wollte im Jahre 2002 die damals zwölfjährige Schülerin Lina Elbers wissen. Weil die Antworten ihrer Mathematiklehrerin und ihrer Mutter (eine Physiklehrerin) unbefriedigend ausfielen, wandte sich die Sechstklässlerin an den Berliner Mathematikprofessor Eberhard Behrends. Sechs Jahre später wurde Lina für die klügste Frage, die Schüler in den letzten Jahren an Mathematikprofessoren gerichtet hatten, mit einem Preis geehrt. [4]

2002 bat Prof. Behrends Kollegen um Vorschläge, „wie man jungen Schülern das Grenzwertproblem möglichst verständlich machen könne.“

In [4] heißt es weiter: „Die Sechstklässlerin hatte sich artig für die Mühen bedankt.“ Dies lässt erkennen, dass Lina damals den Argumentationen allenfalls lückenhaft folgen konnte.

Das Problem besteht wohl darin, dass sie Auskünfte von solchen Personen erhalten hatte, die mit dem wohldefinierten Begriff „Grenzwert“ schon seit vielen Jahren vertraut und vor einem speziell ausgebildeten und ausgesuchten Publikum damit umgegangen sind. Es steht jedoch auf einem ganz anderen Blatt, den Grenzwertbegriff in seinem Umfeld aus „Zahlenfolge“, „Grenzübergang“ und „Konvergenz“ in einer kindgerechten und damit stark vereinfachenden Sprache zu erläutern.

Schüler in der 6. Klasse beschäftigen sich hauptsächlich mit den Grundrechenarten in der Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen. Die Abkürzung \mathbb{Q} leitet sich von „Quotient“, also von einer Divisionsaufgabe ab.

Und im Rahmen der Division hat Lina schon Kontakt mit periodischen Dezimalzahlen aufgenommen, z.B.:

$$1 : 3 = 0,333 \dots$$

Die drei Punkte besagen zweierlei: Nach dem Komma stehen nur Dreier, und diese Dreier setzen sich bis ins Unendliche fort.

Die Division ist die einzige Grundrechenart, die mit zwei verschiedenen Rechenzeichen operiert, nämlich mit dem Doppelpunkt und dem Bruchstrich, der in Bruchtermen Klammern ersetzen kann. Wir schreiben:

$$1 : 3 = 0,\overline{3} \text{ oder } \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Links und rechts vom Gleichheitszeichen stehen verschiedene Schreibweisen für den gleichen Zahlenwert. Schülergerecht: „ $\frac{1}{3}$ und $0,\overline{3}$ sind das Gleiche.“

Wahrscheinlich wissen die Schüler, dass die Gleichheit nach Umformungen die jeweils auf beiden Seiten einer Gleichung identisch vorgenommen werden, erhalten bleibt, z.B.:

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} = 2 \mid \cdot 2 & \Leftrightarrow \frac{8}{2} = 4 \\ \text{oder } \frac{1}{3} = 0,\overline{3} \mid \cdot 2 & \Leftrightarrow \frac{2}{3} = 0,\overline{6} \\ \text{oder } \frac{1}{3} = 0,\overline{3} \mid \cdot 3 & \Leftrightarrow \frac{3}{3} = 0,\overline{9} \end{aligned}$$

Damit ist es heraus:

$$\frac{3}{3} = 1 = 0,\overline{9}$$

Also ist doch Linas Frage „wasserdicht“ und zudem mit einem Beweis auf Lehrplanniveau beantwortet! - Oder?

Aber Linas Problem scheint uns noch nicht restlos ausgeräumt: Es wurde zwar nach dem recht einleuchtenden Permanenzprinzip bewiesen, dass $0,\overline{9} = 1$ gilt, dennoch werden unsere Schüler einwenden: „Wir sehen es nicht, doch wir müssen es glauben!“ Der Grund für ihren Zweifel liegt darin, dass es bei einem Dezimalbruch, der unendlich viele Neuner nach dem Komma aufweist, unvorstellbar ist, dass sein Wert ein Ganzes ergeben kann. Freilich, der Unterschied scheint minimal, aber doch vorhanden zu sein:

Sechstklässler haben gelernt, Unterschiede (also Differenzen) zu berechnen:

$$1 - 0,9 = 0,1 \quad \rightarrow \quad 1 - 0,99 = 0,01 \quad \rightarrow \quad 1 - 0,999 = 0,001 \quad \text{usw.}$$

Dann muss $1 - 0,\overline{9} = 0,\overline{01}$ ergeben.

Das würde Folgendes bedeuten: Der Differenzwert weist nach dem Komma unendlich viele Nullen auf **und dann erst** kommt die Eins. „Unendlich“ heißt aber „ohne Ende“, also Nullen ohne Ende. Dann kann nichts mehr kommen, sonst wäre die Anzahl der Nullen zwar unvorstellbar groß, aber endlich.

Die finale Eins „am Ende“ des Differenzwertes wird somit unwiederbringlich ins Nichts abgedrängt. Und genau das ist der Punkt: Die Eins kann sich doch nicht in Luft auflösen! Also ist dieses Nichts gar nicht leer! (Ein Kniff, mit dem zuweilen Finanzminister jonglieren.)

Wer sind Sie? „Wir kommen vom VfinG.“ ?? „Das ist der 'Verein für infinitesimale Größen'.“ Was haben Sie da? „In dieser Zeitschrift steht:

'... Die Nichtstandard-Analysis ist eine strenge mathematische Methode, die unzulässige Gleichungen rechtfertigt: Sie erlaubt den korrekten Umgang mit unendlich kleinen [positiven, d. Verf.] und unendlich großen Zahlen, die es angeblich nicht gibt. Georg CANTOR hat uns gelehrt, unendliche Kardinalzahlen, mit denen man die 'Größe' unendlicher Mengen beschreibt, als legitime Objekte der Mathematik anzuerkennen. In demselben Geiste definiert die Nichtstandard-Analysis unendlich große oder kleine reelle Zahlen.' ... “ [6] Lina Elbers: „Also doch!“

Kapitel 6

Auf der Verfolgung

DIE SCHILDKRÖTE VERLIERT!

Im Jahre 1957 verkündete der Erste Sekretär des Zentralkomitees in der DDR, Walter Ulbricht, auf dem V. Parteitag der SED das Ziel, den westdeutschen Lebensstandard innerhalb der nächsten vier Jahre zu erreichen oder gar zu übertreffen. Die Devise lautete: „Überholen ohne Einzuholen!“

Dieser paradoxe Auftrag verwirrte die Bürger wohl genau so, wie es damals ZENON von Elea (ca. 490-430 v.Chr.) getan hatte, der seine Zeitgenossen mit einer widersinnigen Geschichte ärgerte: Er behauptete, dass selbst der schnellfüßige Achilles nie eine Schildkröte einholen könne, wenn diese nur einen Vorsprung habe.

Wir wollen das Problem mit reduzierter Geschwindigkeit, quasi in Zeitlupe, mit Hilfe der Abb. 6.1 darstellen:

Der Wanderer Adalbert, der sich momentan am Punkt A_0 befindet, sieht zehn Meter vor sich eine Schildkröte, die im gleichen Augenblick am Punkt S_0 steht. Beide starten gleichzeitig geradeaus in die gleiche Richtung. Der Wanderer bewegt sich zehnmal schneller als die Schildkröte.

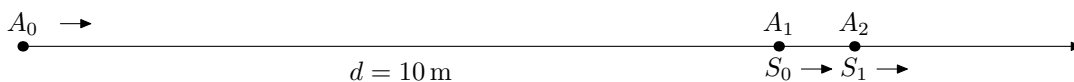


Abbildung 6.1: Achilles verfolgt die Schildkroete

Wenn Adalbert die 10 m zurückgelegt hat (am Punkt A_1), ist die Schildkröte um $0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$ vom Punkt S_0 zum Punkt S_1 weitergewandert. Nachdem der Wanderer den Punkt $A_2 = S_1$ erreicht hat, ist die Schildkröte zum Punkt S_2 gelangt. Jetzt beträgt ihr Vorsprung immer noch $0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$. Nachdem sich der Verfolger diesen Zentimeter weiterbewegt hat, liegt die Schildkröte immer noch $0,001 \text{ m} = 1 \text{ mm}$ vorne. Wenn wir an die anschließenden Bewegungsabläufe denken, müssten wir zu dem Schluss kommen: Adalbert holt die Schildkröte **nie** ein.

Aber das gibt's doch gar nicht! Angenommen, Adalbert legt in der ersten Sekunde einen Meter zurück. Dann legt die Schildkröte im gleichen Zeitraum $0,1 \text{ m}$ zurück. Nach einer halben Minute haben der Wanderer $s_A = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 30 \text{ s} = 30 \text{ m}$ und die Schildkröte 3 m zurückgelegt. Ziehen wir die Vorgabe von 10 m ab, dann hat Adalbert schon einen Vorsprung von 17 m herausgeholt. Na also!

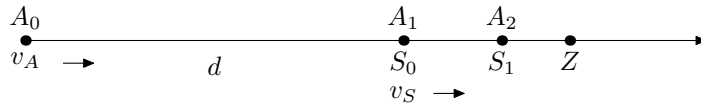


Abbildung 6.2: Die Suche nach Z

Es muss auf dem Weg einen Punkt Z geben, an dem beide gleichauf sind. Wo liegt Z ?
Wir betrachten nun die Ereignisse allgemeiner (siehe Abb. 6.2):

v_A : Geschwindigkeit von Adalbert und v_S : Geschwindigkeit der Schildkröte.

Es sei $q = \frac{v_S}{v_A}$ mit $0 < q < 1$.

Weil der Start zum gleichen Zeitpunkt erfolgt ist, sind die beiden bis zum Punkt Z die gleiche Zeit t unterwegs.

$$\text{Für Adalbert gilt: } t = \frac{\overline{A_0 Z}}{v_A} \quad (1).$$

$$\text{Für die Schildkröte gilt: } t = \frac{\overline{S_0 Z}}{v_S} \quad (2).$$

Es sei s der von der Schildkröte zurückgelegte Weg $\overline{S_0 Z}$. Dann gilt: $\overline{A_0 Z} = d + s$.

$$\text{Mit (1) = (2) folgt: } \frac{d + s}{v_A} = \frac{s}{v_S} \Leftrightarrow \frac{v_S}{v_A} = q = \frac{s}{d + s} \Leftrightarrow s = d \cdot \frac{q}{1 - q} \quad (3).$$

Im konkreten Fall gilt: $q = 0,1$ und $d = 10 \text{ m} \Rightarrow s = 1,1 \text{ m} = 1\frac{1}{9} \text{ m}$;

d.h. die Schildkröte hat nicht einmal 112 cm zurückgelegt, bis sie der Wanderer einholt.
Was ist? „Lina Elbers ist draußen.“ Jetzt nicht.

Der benötigte Zeitraum t ergibt sich dann mit (3) z.B. aus:

$$t = \frac{s}{v_S} = \frac{d}{v_S} \cdot \frac{q}{1 - q}.$$

$$\text{Mit } q = \frac{v_S}{v_A} \text{ ergibt sich: } t = \frac{d}{v_A - v_S} \quad (*)$$

Nebenbei erkennen wir jetzt: Je näher die zwei Geschwindigkeiten beieinander liegen ($v_A \rightarrow v_S$), desto länger dauert es, bis der Wanderer die Schildkröte eingeholt hat. Im Fall $v_A = v_S$ und $d > 0$ holt der Wanderer die Schildkröte nie ein. Gilt zusätzlich $d = 0 \text{ m}$, dann laufen die beiden ständig nebeneinander her, und die Berechnung von t wird sinnlos.

Für den vorliegenden Fall setzen wir in (*) die betreffenden Größen ein:

$$t = \frac{10 \text{ m}}{1 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 11\frac{1}{9} \text{ s}$$

Also nach exakt $11\frac{1}{9} \text{ s}$ sind die beiden auf gleicher Höhe. Das ist leichter gesagt als getan!
Weil Schildkröte und Wanderer in Wirklichkeit nicht als Punktwesen daherkommen, ist die „Stelle“ des Einholens nicht „genau“ zu fixieren.

Zerlegen wir die einzelnen Stationen während des Bewegungsvorganges in ihre zugehörigen Zeitabschnitte und summieren diese dann auf, so ergibt sich:

$$t = 10\text{ s} + 1\text{ s} + 0,1\text{ s} + 0,01\text{ s} + 0,001\text{ s} + \dots = (11 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots)\text{ s} = 11,1\bar{1}\text{ s}.$$

Dabei werden unendlich viele (wenn auch immer kleiner werdende) Zeitintervalle zusammengezählt. ZENO wollte uns weismachen, dass dann der betreffende Summenwert auf die Ewigkeit hinausläuft. „Entschuldigung, aber Lina Elbers lässt sich nicht abweisen.“ Sie möchte bitte hereinkommen.

Der Vorgang dauert doch nur $11\frac{1}{9}\text{ s}$! Es wird aber niemals eine Stoppuhr geben, die nach $11\frac{1}{9}\text{ s}$ anhält. Die Heisenbergsche Unschärferelation besagt nämlich, dass innerhalb sehr kleiner Räume und Zeiträume entweder nur die Geschwindigkeit oder nur der Aufenthaltsort eines Teilchens messbar ist. Ein Umstand, der die physischen Unzulänglichkeiten während der Beobachtung dieser Bewegungen unterstreicht. (Lina Elbers ab.)

Die Forderung des Staatsratsvorsitzenden Walter Ulbricht bedarf somit einer Klarstellung: Überholen - das wäre theoretisch zu machen gewesen. Aber Einholen? Es müsste während des Überholvorgangs eintreten sein, aber keiner hätte es gemerkt. Spätestens seit 1989 hat sich das 1957 gesteckte Ziel in Luft aufgelöst.

DIE JAGD IM KREIS

Die Alten Griechen konnten froh sein, dass damals die Uhr mit zwei Zeigern noch nicht erfunden war. Sonst hätte ZENO ihnen klar gemacht, dass es eine Ewigkeit dauern müsste, bis der Minutenzeiger den Stundenzeiger auf dem Zifferblatt einholen würde.

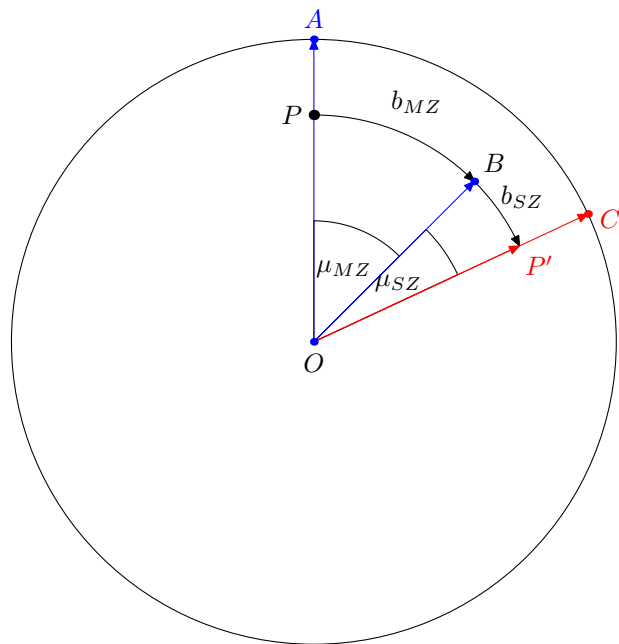


Abbildung 6.3: Der Minutenzeiger macht sich auf die Verfolgung

Im Verfolgungsproblem vom Wanderer und der Schildkröte bewegten sich die beiden zwar geradlinig vorwärts, aber für die begleitenden Rechnungen war dieser Sachverhalt nur von untergeordneter Bedeutung.

Achilles soll jetzt auf einer Uhr die Rolle des Minutenzeigers („MZ“) und die Schildkröte die des Stundenzeigers („SZ“) spielen (siehe Abb. 6.3). Die Frage lautet nun: Zu welchen Zeitpunkten decken sich Minuten- und Stundenzeiger?

Der MZ startet am Punkt A zur n -ten vollen Stunde, der SZ zeigt im gleichen Augenblick am Punkt B diese Stunde n an. Am Punkt C' hat der Minutenzeiger den Stundenzeiger eingeholt. Für die einzelnen Bogenlängen bis dorthin gilt nun:

$$b_{MZ}(n) = \overline{OP} \cdot \frac{\mu_{MZ}(n)}{360^\circ} \quad (4) \quad \text{und} \quad b_{SZ}(n) = \overline{OP} \cdot \frac{\mu_{SZ}(n)}{360^\circ} \quad (5)$$

Für die Zeigergeschwindigkeiten v_{MZ} und v_{SZ} gilt der Zusammenhang:

$$v_{MZ} = 12 \cdot v_{SZ} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_{SZ}}{v_{MZ}} = \frac{1}{12} = q \quad .$$

Wir übertragen die Formel (3) von der Schildkröte auf alle Größen, die hier im Spiel sind:

$$b_{SZ}(n) = b_{MZ}(n) \cdot \frac{q}{1-q}; \text{ mit (4) und (5) gilt dann:}$$

$$\overline{OP} \cdot \frac{\mu_{SZ}(n)}{360^\circ} = \overline{OP} \cdot \frac{\mu_{MZ}(n)}{360^\circ} \cdot \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{1}{12}} \quad \Bigg| : \frac{\overline{OP}}{360^\circ} \quad (> 0) \quad .$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_{SZ}(n) = \frac{1}{11} \cdot \mu_{MZ}(n) \quad (6).$$

Weil der Mensch den Vollwinkel des Zifferblattes in zwölf kongruente Sektoren eingeteilt hat, gilt zur n -ten vollen Stunde

$$\mu_{MZ}(n) = \frac{n}{11} \cdot 30^\circ \quad (7).$$

Das bedeutet: Bis sich nach der n -ten Stunde beide Zeiger decken, hat der SZ einen Winkel von $\frac{n}{11} \cdot 30^\circ$ überstrichen. Wir lesen die Zeit jedoch nicht in Winkelmaßen, sondern in Stunden und Minuten ab.

Die Minuten und Sekunden (auch deren Bruchteile) bis zum Treffpunkt der beiden Zeiger werden auf die folgende Weise berechnet:

Zu diesem Zeitpunkt hat sich der MZ um den Winkel $\alpha = \mu_{MZ}(n) + \mu_{SZ}(n)$ weiterbewegt. Mit (7) ergibt sich:

$$\alpha = n \cdot 30^\circ + \frac{n}{11} \cdot 30^\circ \quad .$$

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit überstreicht der MZ in 5 Minuten einen 30° -Winkel. Es sei t der Zeitraum, den den MZ braucht, um nach dem Start zu n -ten Stunde den SZ einzuholen. Dann gilt:

$$t(n) = \frac{60}{11} \cdot n \text{ Minuten} \quad .$$

Beispiel: Startet der Minutenzeiger um 14 Uhr ($n = 2$), dann folgt:

$$t(2) = \frac{120}{11} \text{ min} = 10 \frac{10}{11} \text{ min} = 10 \text{ min} \frac{600}{11} \text{ s} = 10 \text{ min } 54, \overline{54} \text{ s} \quad .$$

Also decken sich die beiden Zeiger um 14 Uhr 10 min und $54, \overline{54}$ s. Es erhebt sich die Frage, ob dieser Zeitpunkt im Universum überhaupt fassbar ist. Wenn es eine Uhr gäbe, die beliebig kleine Zeitintervalle messen könnte, dann ist noch nichts darüber ausgesagt,

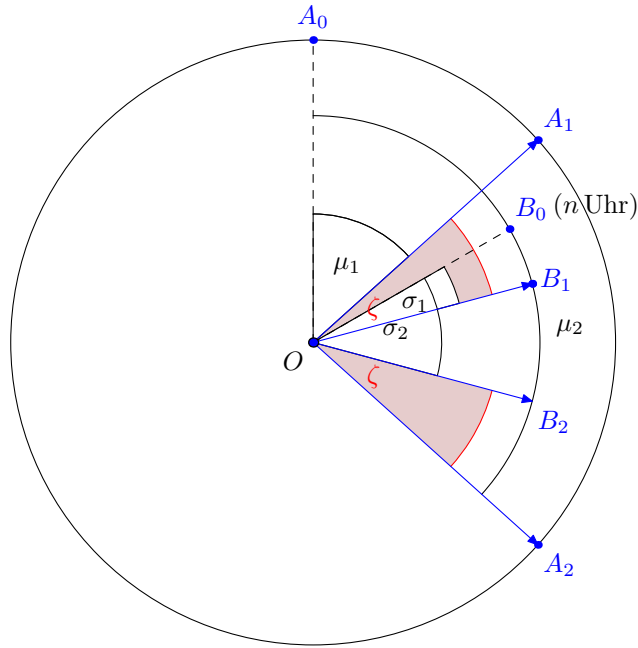


Abbildung 6.4: Stunden- und Minutenzeiger schließen einen Winkel ζ ein

ob sich die Zeit in beliebig kleine Intervalle zerlegen lässt. Es sind nämlich Überlegungen im Gange, die auf eine Quantelung der Zeit hindeuten. [7]

Wir erweitern diesen Themenkreis nun um die Frage:

Zu welchem Zeitpunkt t schließen Stunden- und Minutenzeiger („SZ“ und „MZ“) auf dem Zifferblatt einer Uhr einen bestimmten Winkel ζ mit $0^\circ \leq \zeta \leq 180^\circ$ ein?

In der Abb. 6.4 startet der MZ am Punkt A_0 auf der „12“. Gleichzeitig zeigt der SZ am Punkt B_0 die Stunde n an. Dann wandert der MZ um den Winkel μ_1 bis zum Punkt A_1 und der SZ überstreicht währenddessen zum Punkt B_1 den Winkel σ_1 . Dort schließen die beiden Zeiger den Winkel ζ ein.

Am Punkt A_2 hat der MZ den SZ so weit überholt, dass die beiden Zeiger erneut den Winkel mit dem Maß $\zeta = \angle A_2 O B_2$ einschließen. Vom Start aus gerechnet haben dort der MZ den Winkel μ_2 und der SZ den Winkel σ_2 überstrichen.

$$\begin{aligned} \text{Daraus ergibt sich : } \quad \mu_1 &= n \cdot 30^\circ + (\zeta - \sigma_1) \quad \Leftrightarrow \quad \mu_1 = n \cdot 30^\circ + \sigma_1 - \zeta \\ &\text{und } \mu_2 = n \cdot 30^\circ + \sigma_2 + \zeta \quad . \end{aligned}$$

$$\text{Kürzer: } \quad \mu_{1;2} - \sigma_{1;2} = n \cdot 30^\circ \pm \zeta \quad (8).$$

Weil der MZ zwölfmal so schnell ist wie der SZ, folgt $\sigma_{1;2} = \frac{1}{12} \cdot \mu_{1;2}$. In (8):

$$\mu_{1;2} - \frac{1}{12} \mu_{1;2} = n \cdot 30^\circ \pm \zeta \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{1;2} = \frac{12}{11} \cdot (n \cdot 30^\circ \pm \zeta) \quad (9).$$

Es seien t_1 bzw. t_2 die Stellungen des MZ, wenn er zwischen der Stunden n und $n + 1$ vom Punkt A_0 bis zu den Punkten A_1 bzw. A_2 gewandert ist. Dann gilt:

$$\frac{\mu_{1;2}}{360^\circ} = \frac{t_{1;2}}{60 \text{ min}} \Leftrightarrow \mu_{1;2} = \frac{360^\circ \cdot t}{\text{min}} .$$

Eingestetzt in (9): $\frac{6^\circ \cdot t_{1;2}}{\text{min}} = \frac{12}{11} \cdot (n \cdot 30^\circ \pm \zeta)$

$$\text{oder: } t_{1;2} = \frac{2}{11^\circ} \cdot (n \cdot 30^\circ \pm \zeta)$$

1. Beispiel: $\zeta = 0^\circ \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{60}{11^\circ} \cdot n \text{ min} .$

Dieser Sonderfall deckt sich mit der vorherigen Lösung.

2. Beispiel: Zu welchem Zeitpunkt zwischen vier Uhr und fünf Uhr bilden die beiden Zeiger einen 30° -Winkel?

Es ist $n = 4$ und $\zeta = 30^\circ$:

$$t_1 = \frac{2}{11^\circ} \cdot (4 \cdot 30^\circ - 30^\circ) \text{ min} = 16, \overline{36} \text{ min} = 16 \text{ min } 21, \overline{81} \text{ s} .$$

$$t_2 = \frac{2}{11^\circ} \cdot (4 \cdot 30^\circ + 30^\circ) \text{ min} = 27, \overline{27} \text{ min} = 27 \text{ min } 16, \overline{36} \text{ s} .$$

3. Beispiel: Zu welchem Zeitpunkt zwischen 1 Uhr und 2 Uhr bilden die beiden Zeiger einen gestreckten Winkel?

Es ist $n = 1$ und $\zeta = 180^\circ$:

$$t_1 = \frac{2}{11^\circ} \cdot (1 \cdot 30^\circ - 180^\circ) \text{ min} = -27, \overline{27} \text{ min} = -27 \frac{3}{11} \text{ min}$$

Das bedeutet, dass der MZ $27 \frac{3}{11} \text{ min}$ vor 1 Uhr mit dem Stundenzeiger einen gestreckten Winkel bildet.

$$\text{Dann ist es } 1 \text{ Uhr} - 27 \frac{3}{11} \text{ min} = 0 \text{ Uhr } 32 \frac{8}{11} \text{ min} = 0 \text{ Uhr } 32, \overline{72} \text{ min}$$

$$= 32 \text{ min } 43, \overline{63} \text{ s} .$$

Das gleiche Ergebnis erhalten wir für $n = 0$ und $\zeta = 180^\circ$:

$$t_1 = \frac{2}{11^\circ} \cdot 180^\circ \text{ min} = 32, \overline{72} \text{ min} \quad \text{usw.}$$

Die eigentlich im 3. Beispiel geforderte Lösung t_2 ergibt sich aus:

$$t_2 = \frac{2}{11^\circ} \cdot (1 \cdot 30^\circ + 180^\circ) \text{ min} = 38, \overline{18} \text{ min} = 38 \text{ min } 10, \overline{90} \text{ s} .$$

Um 1 Uhr 38 min 10, $\overline{90}$ s wäre es dann so weit.

Kapitel 7

Eine Gerade wird zur Strecke gebracht

Um ja keinen Kubikzentimeter Raum in den Zügen auf der Yamanote-Linie der Tokioter U-Bahn zu verschenken, stopfen Bedienstete mit weißen Handschuhen noch überraschend viele von den am Bahnsteig Wartenden hinein, die eigentlich wegen Überfüllung der Abteile keine Aussicht mehr auf momentane Beförderung hätten. Wie es heißt, können dabei Fahrgäste im Zug derart deformiert werden, dass zuweilen Nase und Fußspitzen einer Person in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Woanders zielen eher sportliche Versuche, möglichst viele Personen in einen PKW zu verstauen, auf einen Eintrag ins Guinness-Buch der Rekorde.

Geradezu lächerlich aber wirken diese Möglichkeiten einer optimierten Unterbringung im Vergleich zu den Spielräumen, wie sie die Geometrie beim Zusammenpacken von Punktmengen bereithält.

Mit der Aufforderung „Nun mach’ mal einen Punkt!“ können wir jene Prahler, die ihr Gegenüber mit Übertreibungen beeindrucken wollen, ab und zu auf den Boden der Tatsachen zurückholen.

Im Gegensatz zur sprichwörtlichen Redewendung, die dem Gedanken Raum lässt, ist die Position von Punkten auf einer Skala unverrückbar festgelegt.



Abbildung 7.1: Ein Ausschnitt aus einer Thermometerskala

Dort, wo der Skalenstrich die Zahlengerade schneidet, wird der Temperaturpunkt „1 °C“ eindeutig dargestellt. In Grafikprogrammen und Fachbüchern werden verschiedene Bilder für Punkte gehandelt, z.B.:



Abbildung 7.2: Die unterschiedliche Darstellung von Punkten

In der Mathematik wäre es im Gegensatz zur Physik jedoch mehr als gewagt, die Darstellung des Punktes, der z.B. zur „1“ gehört, im Idealfall etwa als winzige Kreisscheibe

zuzulassen. Hätte dieser Kreis einen Durchmesser von auch nur $\frac{1}{10}$ mm (mit noch weniger wäre der Winzling endgültig unserem Gesichtskreis entzogen), dann darf das für jene Zahlen, die in engster Nachbarschaft wohnen, nicht bedeuten, dass der Kreis um die „1“ als exterritoriales Gebiet tabu ist. Denn auch die allernächsten Anwohner hätten dann ebenfalls Anspruch auf eine Privatsphäre, so dass wir auf Interessenskonflikte und damit unauflösliche Widersprüche stoßen würden:

Die Annahme, zwischen zwei reellen Zahlen gäbe es ein Niemandsland, wird durch das arithmetische Mittel aus beiden sofort widerlegt.

Um die friedliche Koexistenz unter allen reellen Zahlen zu gewährleisten, darf deren Wohnung also keine räumliche Ausdehnung besitzen. Einen Punkt können wir nicht zeichnen, geschweige denn sehen. Das, was ein Schüler an die Tafel malt, ist ein kleiner Kreidehügel, unter dem maulwurfsgleich der Punkt im Verborgenen haust.

Das hat nun Konsequenzen:

Ebenso wie auf einer Geraden können wir auf noch so kurzen Strecken unendlich viele Punkte unterbringen. Und mit der folgenden Abbildung von einer unendlichen Punktmenge auf eine zweite lässt sich unsere Vorstellungskraft aushebeln:

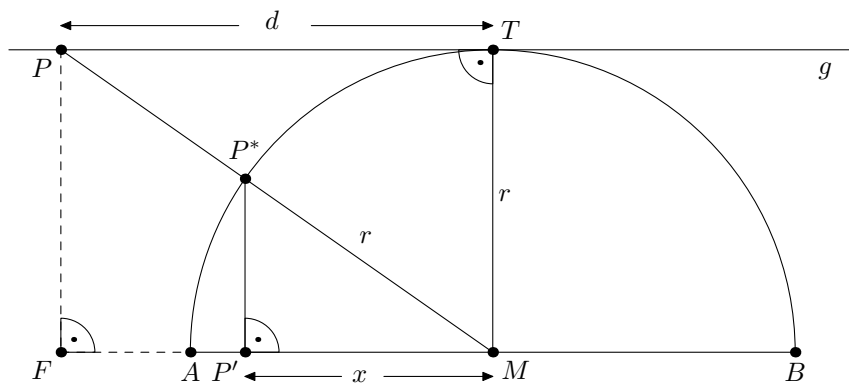


Abbildung 7.3: Der Punkt P wird auf den Punkt P' abgebildet

Ein Punkt P auf der Geraden g , die parallel zu $[AB]$ verläuft, wird mit dem Mittelpunkt M des Halbkreises mit dem Radius r verbunden. Die Strecke $[PM]$ schneidet die Kreislinie im Punkt P^* . Der Fußpunkt des Lotes vom Punkt P^* auf den Halbkreisdurchmesser $[AB]$ ist der Bildpunkt P' . Auf diese Weise wird jedem Punkt P auf der Geraden g eindeutig sein Bildpunkt P' auf der Strecke $[AB]$ zugeordnet und umgekehrt. Die ganze Gerade lässt sich in eine Strecke packen!

Berechnungen sollen uns helfen, diese Ungeheuerlichkeit zu begreifen:

Die Dreiecke PMT und $P'MP^*$ sind zueinander ähnlich.

$$\frac{\overline{P'M}}{\overline{P^*M}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \frac{x}{r} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + r^2}} \Leftrightarrow x = \frac{r}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{d}\right)^2}} .$$

Wenn sich nun der Punkt P auf die Reise nach links bzw. nach rechts in die Unendlichkeit begibt, rückt sein Bildpunkt P' immer näher an den Punkt A bzw. den Punkt B heran. Erst, wenn P außerhalb jeder messbaren Reichweite liegt, betritt P' den Rand A bzw. B . Wir schätzen die Streckenlänge $\overline{P'A}$ mit Hilfe der erweiterten BERNOULLI'schen Unglei-

chung ab. Mit $d = \overline{TP}$ und $0 < \frac{r}{d} = q < 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+q^2} &= (1+q^2)^{\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{2}q^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} > \frac{1}{1 + \frac{1}{2}q^2} \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{1+q^2}} &< -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}q^2} \quad | +1 \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} &< 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}q^2} = \frac{\frac{1}{2}q^2}{1 + \frac{1}{2}q^2} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}q^2} + 1} < \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2}q^2}} = \frac{1}{2}q^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{d^2} \\ \Rightarrow \quad \overline{AP'} &= r - x = r \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \right) < \frac{1}{2} \cdot \frac{r^3}{d^2} \end{aligned}$$

Im folgenden Beispiel versuchen wir, Bildpunkte einzuordnen, die von weit entfernten Urbildern stammen:

Für $r = 4 \text{ cm}$ und $d = 1000 \text{ km}$ ergibt sich:

$$\overline{AP'} < \frac{1}{2} \cdot \frac{(4 \cdot 10^{-2} \text{ m})^3}{(10^6 \text{ m})^2} = 32 \cdot \frac{10^{-6} \text{ m}^3}{10^{12} \text{ m}^2} = 32 \cdot 10^{-18} \text{ m}.$$

$$32 \cdot 10^{-18} \text{ m} = 32 \text{ attometer} = 32 \text{ am} = (32 \cdot 10^{-9}) \cdot 10^{-9} \text{ m}.$$

$10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ Nanometer (1 nm)} = 1 \text{ Milliardstel m} = 1 \text{ Millionstel mm}$; der Durchmesser eines Wasserstoffatoms beträgt etwa 10 nm .

Wenn der Punkt P also 1000 km vom Berührungspunkt T entfernt ist (die Krümmung der Erdoberfläche soll dabei unberücksichtigt bleiben), dann rückt der Punkt P' dem Punkt A so weit auf den Pelz, dass es einem den Atem nimmt. In die unvorstellbar kleine Lücke stoßen nun noch „alle“ diejenigen Bildpunkte, deren Urbilder jenseits der 1000 km -Marke daheim sind. Trotzdem behauptet jeder Bildpunkt seinen eigenen Platz! Auf einem Neutronenstern geht es luftiger zu.

Doch damit nicht genug:

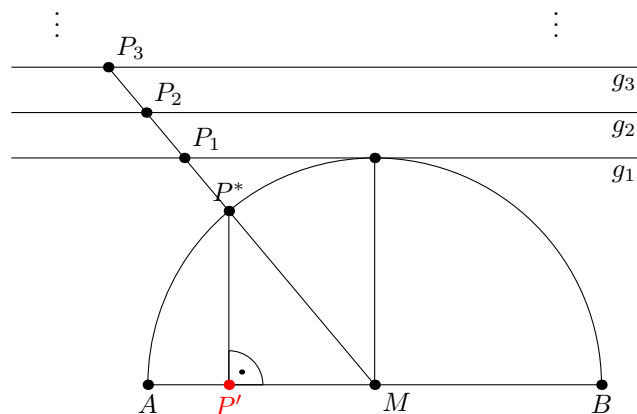


Abbildung 7.4: Ein Punktestapel

Die Bilder von unendlich vielen weiteren parallelen Geraden $g_2, g_3 \dots$ haben ebenfalls

noch auf dem Durchmesser $[AB]$ Platz, ohne dass man es dieser Strecke ansieht. Ja, und wenn wir nun noch den Kreisradius immer mehr schrumpfen lassen, was unsere Geraden völlig kalt lässt, dann Entschuldigen Sie - ich muss ins Freie.

Anmerkungen

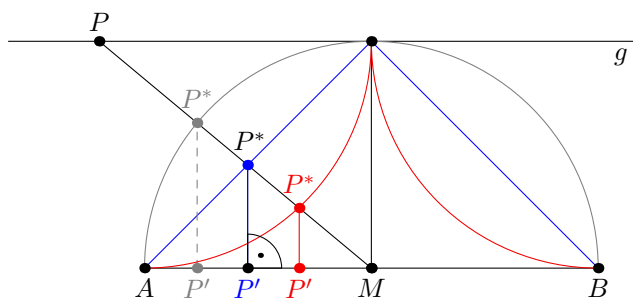


Abbildung 7.5: Beispiele für anders geformte Brenngläser

Den ursprünglichen (in der Abb. 7.5 grau gezeichneten) Halbkreis, der die Gerade g auf seinen Durchmesser $[AB]$ fokussiert, kann man durch andere Graphen ersetzen, wenn diese nur entsprechende Monotonie- und Stetigkeitseigenschaften besitzen. In der Abbildung 7.5 fungiert einerseits das blaue gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck mit seiner Basis $[AB]$ als Brennglas, andererseits sind dafür auch die beiden roten Viertelkreisbögen brauchbar. Am Halbkreis ist die Abbildung jedoch spektakulärer, da die Kreislinie in den Punkten A und B senkrechte Tangenten aufweist. Dadurch wird die gefühlte Reibungshitze zwischen den Bildpunkten an den Rändern des Durchmessers besonders hoch, ja es stehen einem allein schon bei dem Gedanken die Schweißperlen auf der Stirn.

Das ist aber noch nicht das Ende an Merkwürdigkeiten.

Wenn wir also unendlich viele Punkte auf geeignete Weise aneinander reihen, kann sich eine Gerade oder eine Strecke bilden. Diese hat eine endliche Länge, jene nicht.

Die beiden formalen Notizen $0 \text{ cm} \cdot \infty = \infty \text{ cm}$ und z.B. $0 \text{ cm} \cdot \infty = 1 \text{ cm}$ ergeben keinen Sinn. Wenn wir das Symbol ∞ nämlich als eine reelle (wenn auch nicht zu bändigende) Zahl gelten ließen, liegt der Widerspruch auf der Hand.

Weil jeder Punkt in unserer Idealvorstellung keinerlei Ausdehnung besitzt, dürfen damit sowohl Strecke als auch Gerade keine Dicke besitzen.

Aber:

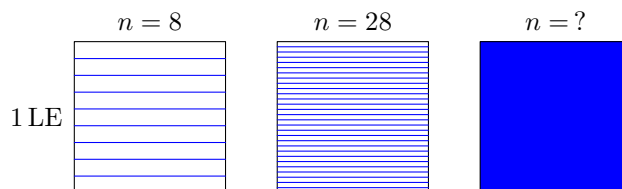


Abbildung 7.6: Strecken im Quadrat

In ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 LE werden in gleichen Abständen n Strecken eingezeichnet, die parallel zur Grundseite sind (vgl. Abb. 7.6).

Je mehr wir solche Strecken auf den Bildschirm oder auf einem Blatt Papier unterbringen, desto kleiner werden die Zwischenräume, deren Anzahl $n + 1$ beträgt. In unserer Vorstellung des Idealfalles dürfen die Zwischenräume gar nicht kleiner werden, denn sämtliche Parallelen wären ja 0 cm dick! Der Spielraum zwischen benachbarten Strecken nimmt andererseits aber monoton ab; jedoch ist er nach unten durch 0 beschränkt.

Für die Dicke d eines „weißen“ Streifens gilt dann rechnerisch aber $d = \frac{1}{n + 1}$ LE.

$$\text{Und } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n + 1} = 0.$$

Das Quadrat lässt sich also durch unendlich viele solcher Strecken vollständig ausfüllen. Wie kann aber ein Objekt ohne Dicke eine Fläche ausfüllen, wenn man es „nur oft genug“ darin unterbringt?

Der Umgang mit dem Symbol ∞ fördert eine Merkwürdigkeit nach der anderen zutage. Der eben gezeigten profanen Methode, ein Quadrat mit eindimensionalen Gebilden vollständig auszufüllen, fehlt allerdings jener ästhetische Reiz, den David HILBERT (1862-1943) mit der von ihm 1891 entdeckten und nach ihm benannten Kurve im analogen Zusammenhang vorweisen kann. Ihr Strickmuster hat es im Jahre 2005 immerhin auf eine Briefmarke in Macao [18] geschafft; dagegen würden die Figuren in der Abb. 7.6 allenfalls Fehldrucke abliefern, die dann höchstens von philatelistischem Interesse wären.

In [19] sehen wir dass sich die Hilbert-Kurve zu einem beliebig großen Würfel zusammenknüllen lässt, gegen den der Gordische Knoten ein Kringel ist. Allerdings ist die brutale Auflösung jener Häkelkurve mit dem Schwert Alexanders des Großen völlig unnötig: Wir müssen nur an einer der beiden Zuleitungen ziehen, bis sich alle Schlaufen entwirrt haben – das kann allerdings dauern.

Kapitel 8

Schilda in neuem Licht

Als die Baumeister vor ca. 600 Jahren während der Errichtung des Rathauses von Schilda vergessen hatten, das Gebäude mit Fenstern auszustatten, war guter Rat teuer. Wie es weiter heißt, waren die Einwohner auf merkwürdige Ideen gekommen, um diesen Mangel zu beseitigen. Unter blauem Himmel trugen sie alle möglichen Gefäße ins Freie und ließen die Sonne hineinscheinen. Die Behältnisse wurden dann geschlossen, ins finstere Rathaus gebracht und dort geöffnet, um die eingesperrte Helligkeit ins Gebäude zu entlassen. Manche hatten noch versucht, das Licht in Säcken zu transportieren, ja sogar in Mausefallen einzufangen.

Dennoch lässt sich solchem Irrsinn mit Hilfe physikalischer Gesetze und geometrischer Schlussfolgerungen etwas abgewinnen, wenn z.B. aus den Säcken gerade dreiseitige Prismen werden, deren Innenflächen totalreflektierend ausgestattet sind.

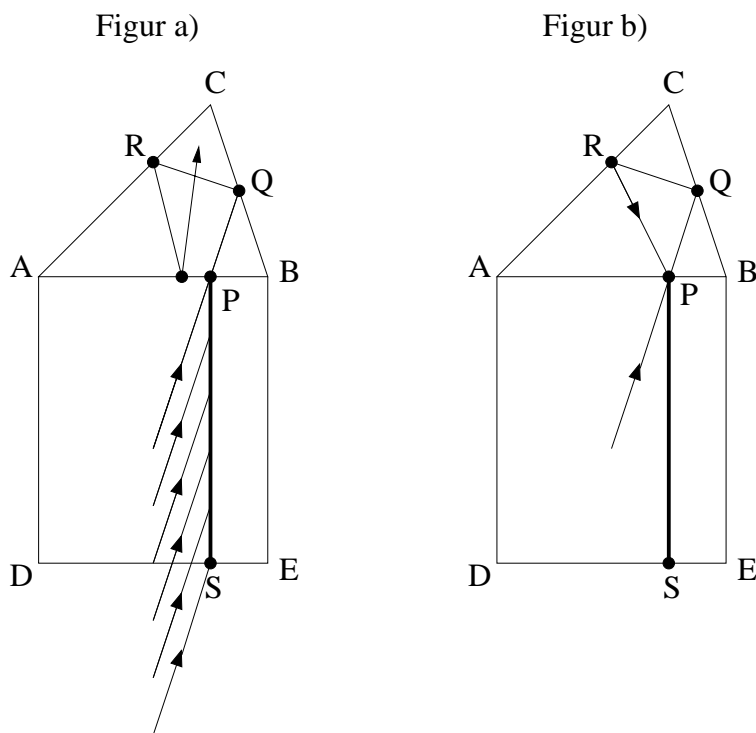


Abbildung 8.1: Licht tritt ins Prisma ein

In der Abbildung 8.1 dringt ein Lichtstreifen (am besten monochromatisch und kohärent) durch den zunächst offenen Spalt $[PS]$ ins Innere.

Wenn nun dieses Lichtbündel aus irgendeiner Richtung kommt und irgendwie an den Seiten $[BC]$, $[CA]$ und $[AB]$ reflektiert wird, ist im Rathaus sein Entkommen - was erst das Gelingen des Schildbürgerstreichs garantieren würde - praktisch ausgeschlossen, weil dann die Rückkehr zum Spalt $[PS]$ extrem unwahrscheinlich ist. (Figur a)

Das Licht muss also, wie in Figur b) gezeigt, wieder zur Eintrittsöffnung zurückkehren. Eine Schlüsselstelle nimmt offenbar der Zielpunkt Q auf der Seite $[BC]$ ein. Wenn der an der richtigen Stelle liegt, regelt sich alles Weitere von selbst.

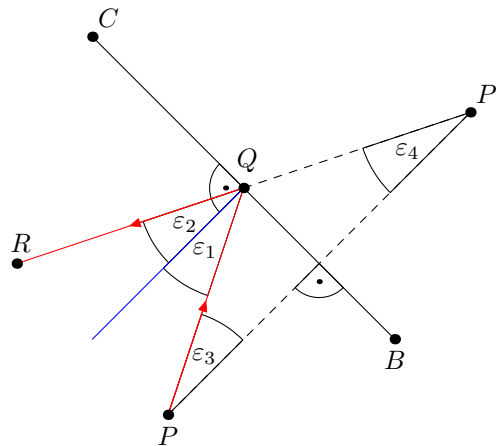


Abbildung 8.2: Reflexion an einer ebenen Fläche

Der am Punkt P ausgesandte Lichtstrahl wird in der Abb. 8.2 an der Seite $[BC]$ im Punkt Q reflektiert. Der reflektierte Lichtstrahl lässt sich nicht nur durch Achsenspiegelung am blauen Einfallslot, sondern auch auf andere Weise gewinnen:

Spiegeln wir den Punkt P an der Seite $[BC]$, dann entsteht der Punkt P' . Anscheinend liegt nun der reflektierte Lichtstrahl auf der Halbgeraden $[P'Q]$:

- Das Reflexionsgesetz im Punkt Q verlangt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
- Weiter gilt $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ (Z-Winkel).
- Das Dreieck $PP'Q$ ist gleichschenkelig, also folgt $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.
- Damit folgt $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$. Also ist der Winkel RQP ein Außenwinkel am Dreieck $PP'Q$ und damit ist der Winkel RQP' ein gestreckter.

Während der Reflexion eines Lichtstrahls an einer ebenen Fläche ist der Lichtweg umkehrbar; d.h. der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl sind nicht voneinander zu unterscheiden, wenn die Lichtquelle nicht sichtbar ist. (Das kann man erst durch Ausblenden des einen und dann des anderen Lichtstrahls feststellen.)

In der Abb. 8.1 ist es im Dreieck ABC gleichgültig, ob das Licht zunächst auf den Punkt Q oder den Punkt R trifft: Das Reflexionsdreieck bleibt unverändert.

Um bei der Rückkehr eine Punktlandung in P hinzulegen, muss am Punkt R dasselbe wie am Punkt Q gelten.

In der Abbildung 8.3 sieht man: Der Punkt P'' ist das Spiegelbild des Punktes P an der

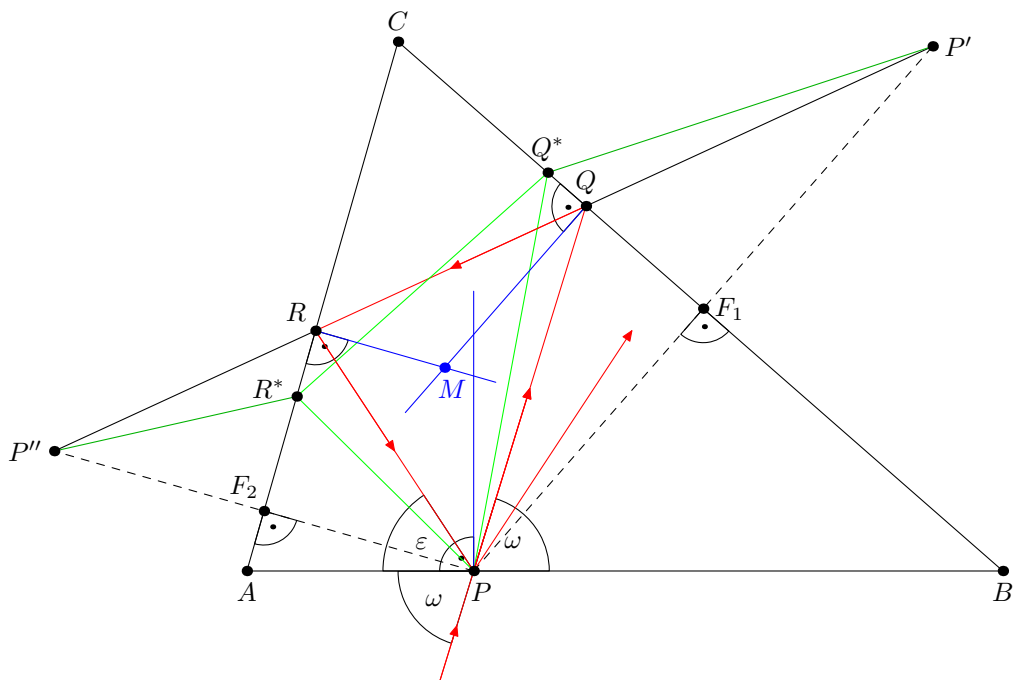


Abbildung 8.3: Zwei einbeschriebene Dreiecke

Seite $[AC]$. Vom Punkt R aus scheint das Licht vom Punkt P' her zu kommen. Die Punkte P'' , R und Q müssen dann auf einer Geraden liegen. Die Länge der Strecke $[P'P'']$ stellt den Umfang des Reflexionsdreiecks dar, denn es gilt: $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ und $\overline{PR} = \overline{P'R}$. In das Dreieck ABC ist neben dem Dreieck PQR noch ein weiteres, nämlich das Dreieck PQ^*R^* stellvertretend für alle möglichen einbeschrieben worden. Dieses Dreieck ist nicht durch Reflexion entstanden, und es hat offenbar einen längeren Umfang. Wir sehen:

Unter allen einbeschriebenen Dreiecken mit einem festen Punkt P auf einer Dreiecksseite hat das Reflexionsdreieck den kleinsten Umfang.

Allerdings wird in der Abbildung 8.3 ein technischer Mangel deutlich: Nach der erstmaligen Rückkehr zum Punkt P gerät der Lichtstrahl aus der Bahn. In diesem Fall hätten die Schildbürger im Rathaus wieder keine Chance:

Angenommen, der Streckenzug $P-Q-R$ wäre einen Meter lang. Dann müssten die Leute wegen der enorm hohen Lichtgeschwindigkeit innerhalb der Zeit

$$t = \frac{1 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 0,3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

mit ihren Prismen im Rathaus sein, damit das Licht den Austrittspunkt P nicht verpasst. Das Reflexionsdreieck PQR muss also („realistischerweise“) ständig auf der Stelle treten, sodass dem Licht genug Zeit bleibt, bis es im Rathaus dem Prisma entkommen kann. In der Abb. 8.3 ist daher $\omega = \varepsilon$ gefordert.

Die blauen Einfallslote in den Punkten P und R dieser Abbildung halbieren jeweils einen Innenwinkel des Reflexionsdreiecks PQR . Wenn dieses Reflexionsdreieck die ganze Zeit über erhalten bleiben soll, muss auch das dritte Einfallslot im Punkt P den dritten Innenwinkel halbieren. Und weil sich die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks stets in

einem Punkt schneiden, muss daher auch das dritte Einfallslot durch den Schnittpunkt M der beiden anderen verlaufen. Der Punkt M stellt dann den Inkreismittelpunkt des „stehenden“ Reflexionsdreiecks dar. Also folgt: $\omega = \varepsilon$.

Um vom Lotfußpunkt P aus den Lotfußpunkt Q zu treffen, muss der Winkel ω einjustiert werden. Es gilt nun $\omega = \varepsilon$:

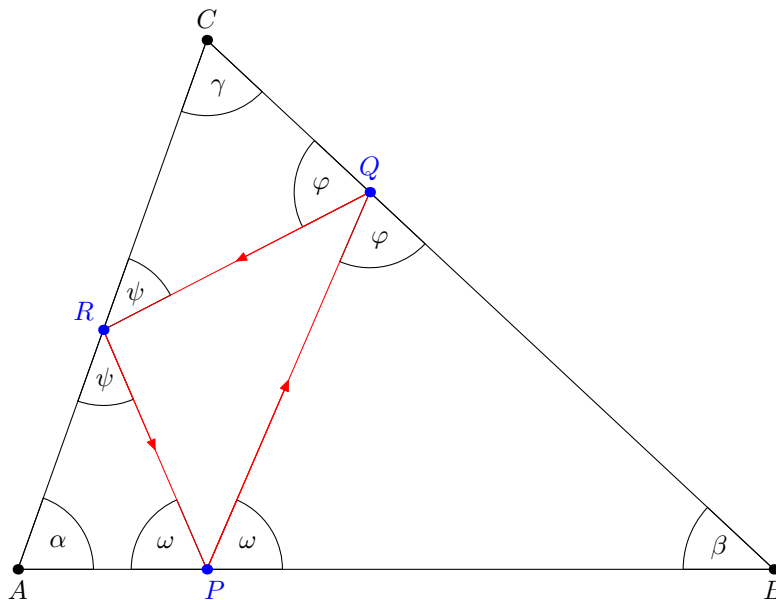


Abbildung 8.4: Ein besonderes Reflexionsdreieck

$$\Delta APR : \omega + \alpha + \psi = 180^\circ \quad (1)$$

$$\Delta PBQ : \omega + \beta + \varphi = 180^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) : 2\omega + (\alpha + \beta) + (\varphi + \psi) = 180^\circ \quad (3)$$

ΔABC : $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ und ΔRQC : $\varphi + \psi = 180^\circ - \gamma$ in (3):

$$2\omega + 2(180^\circ - \gamma) = 360^\circ \Rightarrow \omega = \gamma$$

Innenwinkelsumme im ΔPBQ : $\varphi = \alpha$ und Innenwinkelsumme im ΔAPR : $\psi = \beta$.

Das bedeutet:

Die Teildreiecke APR , PBQ und RQC und das Dreieck ABC sind zueinander ähnlich.

In der Abbildung 8.5 sieht das so aus:

$$\Delta PBQ \sim \Delta ABC : \frac{s_1}{z} = \frac{b}{a} \qquad s_1 = \frac{z}{a} \cdot b$$

$$\Delta PBC : \frac{z}{a} = \cos \beta \quad \text{Also : } s_1 = b \cdot \cos \beta$$

Eine zyklische Vertauschung liefert: $s_2 = c \cdot \cos \gamma$ und $s_3 = a \cdot \cos \alpha$.

Für den Umfang u des Reflexionsdreiecks PQR erhalten wir:

$$u = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma$$

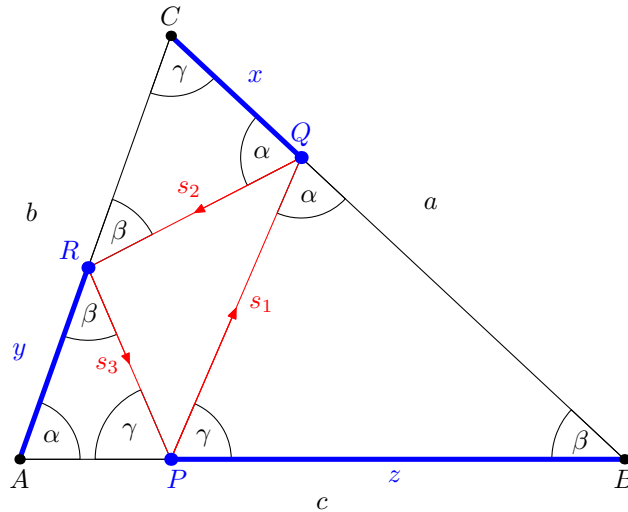


Abbildung 8.5: Am Dreieck ABC werden die Abschnitte x , y und z erzeugt

Wir vergleichen noch den Flächeninhalt des Dreiecks PQR mit dem des Dreiecks ABC :
Weil z.B. $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$ gilt, folgt:

$$A_{\triangle PBQ} = \left(\frac{z}{a}\right)^2 = \cos^2 \beta \cdot A_{\triangle ABC}$$

$$\text{und analog: } A_{\triangle RQC} = \left(\frac{x}{b}\right)^2 = \cos^2 \gamma \cdot A_{\triangle ABC}$$

$$\text{und analog: } A_{\triangle APR} = \left(\frac{y}{c}\right)^2 = \cos^2 \alpha \cdot A_{\triangle ABC}$$

Nun ist $A_{\triangle PQR} = A_{\triangle ABC} - (A_{\triangle APR} + A_{\triangle PBQ} + A_{\triangle RQC})$:

$$\Rightarrow A_{\triangle PQR} = A_{\triangle ABC} \cdot [1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)]$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} A_{\triangle PQR} &= \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot s_3 \cdot \sin(180^\circ - 2\gamma) \\ &= \frac{1}{2} b \cos \beta \cdot a \cos \alpha \cdot \sin(2\gamma) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ab \cos \alpha \cos \beta \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma \\ &= \underbrace{ab \cdot \sin \gamma}_{= 2 \cdot A_{\triangle ABC}} \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

Und damit erhalten wir:

$$A_{\triangle PQR} = 2 \cdot A_{\triangle ABC} \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Dann gilt zumindest für spitze Winkel:

$$1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 2 \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

Spezialfall: rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90^\circ$:

$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 0 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$ und der Satz des PYTHAGORAS hat sich demaskiert.

Es lohnt sich, noch genauer ins Reflexionsdreieck PQR mit seinen blauen Einfallsloten hineinzuschauen.

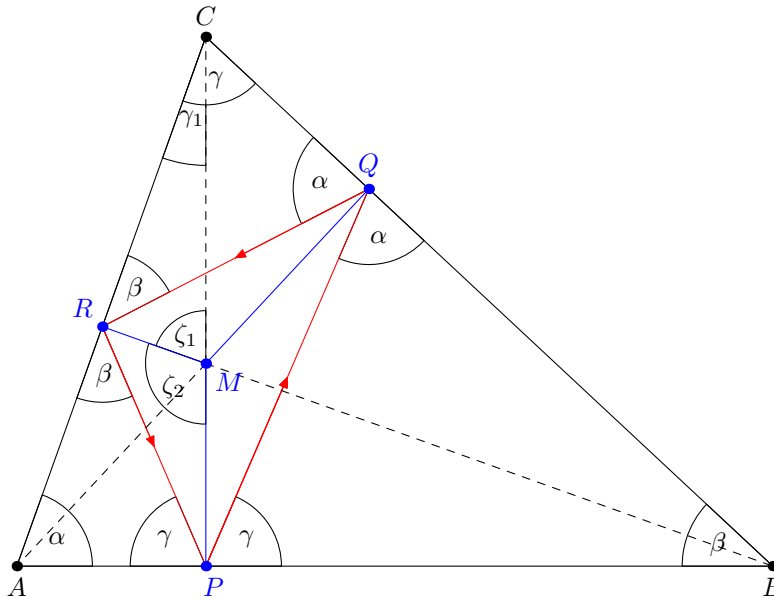


Abbildung 8.6: Das Reflexionsdreieck mit seinen blauen Einfallsloten

Im Dreieck RMC gilt: $\zeta_1 = 90^\circ - \gamma_1$.

Im Dreieck APC gilt: $\alpha = 90^\circ - \gamma_1$. Damit folgt $\zeta_1 = \alpha$

Im Dreieck RPM gilt: $\zeta_2 = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \gamma) \Rightarrow \zeta_2 = \beta + \gamma$.

$\Rightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Damit ergeben die beiden Winkel ζ_1 und ζ_2 in der Abbildung 8.6 einen gestreckten Winkel; d.h. $[PC]$ ist eine Strecke, und zwar eine der Dreieckshöhen. Analog liegen auch die beiden anderen Einfallsloten $[MR]$ und $[MQ]$ auf den entsprechenden Dreieckshöhen.

Im Dreieck ABC wird genau dann ein stehendes Reflexionsdreieck erzeugt, wenn dessen Eckpunkte mit den Höhenfußpunkten des Dreiecks ABC zusammenfallen.

Dieses auf der Stelle tretende Dreieck ist wieder eines jener umfangs kleinsten einbeschriebenen Dreiecke. Ist es vielleicht sogar dasjenige mit dem absolut kleinsten Umfang? Betrachten wir zunächst die Abbildung 8.7:

Wenn sich der Eintrittspunkt P in einem Winkelfeld mit dem Scheitel C und dem konstanten Öffnungswinkel $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ auf einem Kreisbogen mit dem konstanten Radius r bewegt, dann wird wieder der Umfang u des Reflexionsdreiecks PQR durch die Strecke $[P'P'']$ dargestellt. Aber egal, wo sich der Punkt P gerade auf dem Kreisbogen befindet: Die Streckenlänge $u = \overline{P'P''}$ bleibt konstant, weil die Schenkellänge r des Dreiecks $P''P'C$

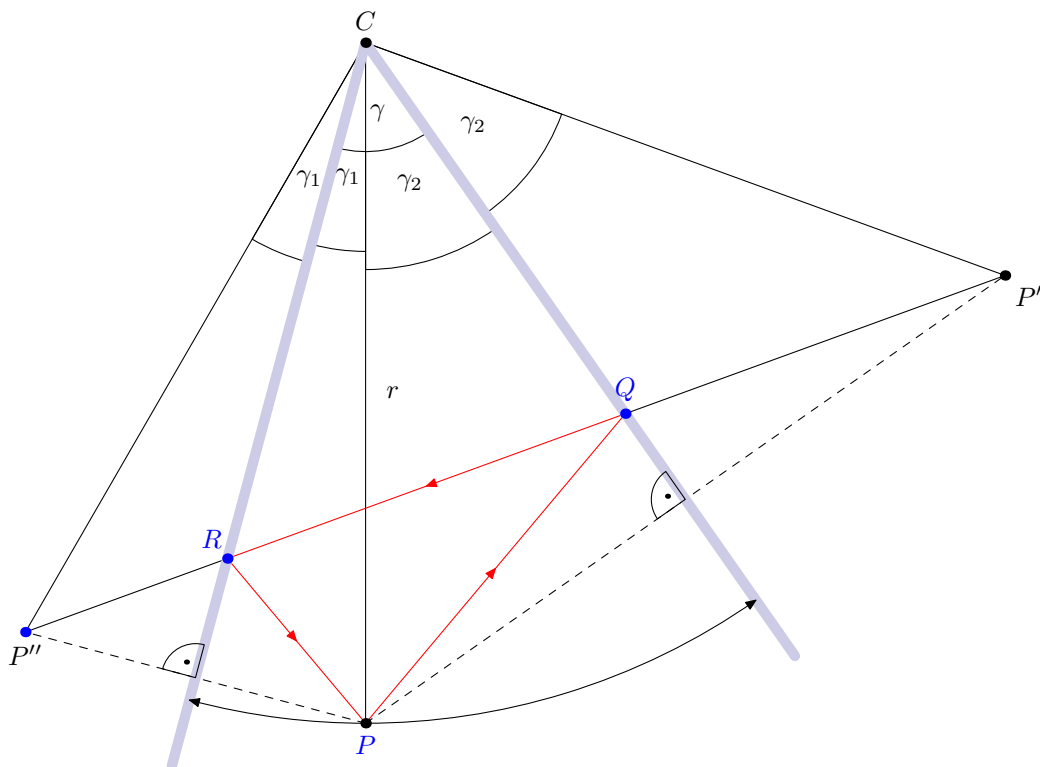


Abbildung 8.7: Die Reflexion am Winkelspiegel

und das Winkelmaß $2\gamma_1 + 2\gamma_2 = 2\gamma$ während der Wanderbewegung des Punktes P unveränderlich sind.

Wenn der Punkt P aber an den Punkt C heranrückt, wird der Kreisradius r und damit der Umfang des Reflexionsdreiecks kürzer.

Übrigens: Im Sonderfall $\gamma = 45^\circ$ stehen der vom Punkt P ausgesandte und der am Punkt P wieder ankommende Lichtstrahl aufeinander senkrecht.

Lassen wir nun in der Abbildung 8.8 den Punkt P auf der Seite $[AB]$ vom Punkt A nach rechts wandern.

Am Startpunkt A läge ein pathologischer Fall vor: Der Lichtstrahl würde im Höhenfußpunkt Q wieder zum Punkt A reflektiert; d.h. das Reflexionsdreieck entartet zur Doppelstrecke mit der Gesamtlänge von $2 \cdot h_a$. Dann nimmt der Umfang des Reflexionsdreiecks zunächst ab. Am Fußpunkt H angelangt, wird der Umfang des stehenden Reflexionsdreiecks am kleinsten.

Unter allen Dreiecken, die man in ein Dreieck einbeschreiben kann, hat das Dreieck, das aus den drei Höhenfußpunkten erzeugt wird, den kleinsten Umfang. Dieses minimale einbeschriebene Dreieck ist gleichzeitig das ideale - weil stehende - Reflexionsdreieck.

Der Lichtstreifen, der in der Abb. 8.1 durch den Spalt $[PS]$ hereingekommen ist, hat vor der Dunkelheit im „Prismensack“ offenbar panische Angst und will so schnell wie möglich wieder hinaus.

Der Kreisbogen mit dem Mittelpunkt C verläuft durch den Punkt A und schneidet die Seite $[AB]$ im Punkt A^* .

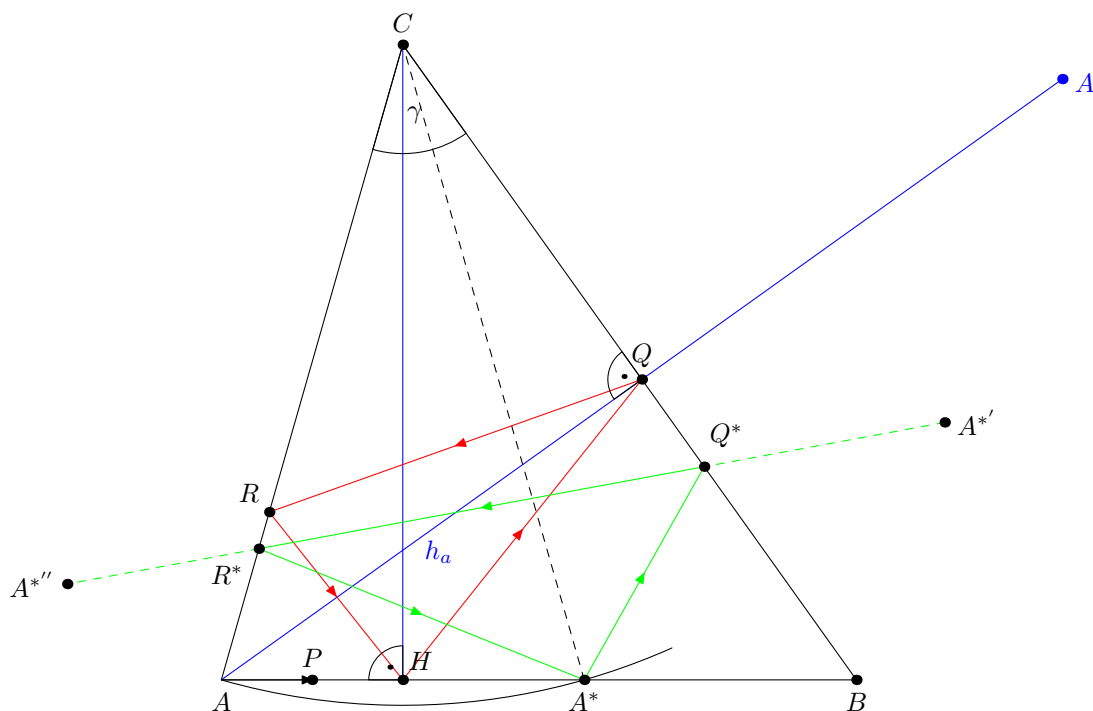


Abbildung 8.8: Der Punkt P wandert auf $[AB]$ nach rechts

Gelangt der Punkt P zum Punkt A^* , dann wird das grüne Reflexionsdreieck erzeugt. Weil die Punkte A und A^* gleich weit von Punkt C entfernt sind, ist der Umfang des grünen Dreiecks genau so lang wie der des entarteten „Dreiecks“ AQA : $u_{\Delta A^*Q^*R^*} = 2 \cdot h_a = \overline{AA'}$. Auch wenn die Schildbürger schon unruhig werden, wollen wir noch die zugehörigen Sehenvierecke mit ihren THALES-Kreisen ins Bild rücken:

Für die Kreisdurchmesser in der Abbildung 8.9 setzen wir: $d_a = \overline{MA}$, $d_b = \overline{MB}$ und $d_c = \overline{MC}$.

Aus der Abbildung 8.5 wissen wir: $z = a \cos \beta$.

Eine zyklische Vertauschung ergibt: $x = b \cos \gamma$. (*)

Im rechtwinkligen Dreieck MQC gilt: $\sin \beta = \frac{x}{d_c}$. Mit (*) folgt:

$$\sin \beta = \frac{b \cos \gamma}{d_c} \Leftrightarrow d_c = b \cdot \frac{\cos \gamma}{\sin \beta}.$$

Wieder liefert eine zyklische Vertauschung: $d_a = c \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$ und $d_b = a \cdot \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$.

$$\Rightarrow \frac{d_a}{d_b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$\text{Sinussatz im Dreieck } ABC: \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}.$$

$$\text{Also ergibt sich: } \frac{d_a}{d_c} = \frac{c}{a} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cdot \frac{a}{c} \Leftrightarrow d_a : d_c = \cos \alpha : \cos \gamma.$$

Insgesamt folgt daraus:

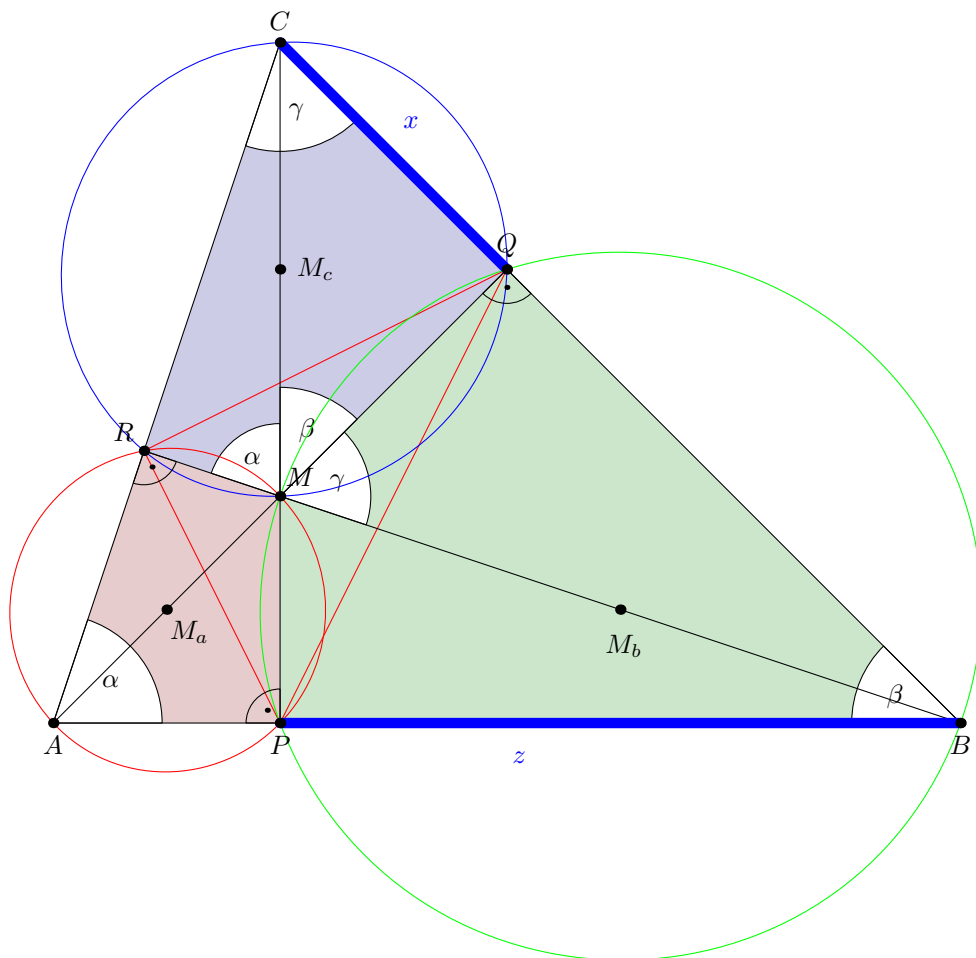


Abbildung 8.9: Drei besondere Sehnenvierecke mit ihrem Umkreis

$$d_a : d_b : d_c = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma .$$

Schließlich finden wir noch:

$$d_a \cdot d_b \cdot d_c = abc \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} = abc \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma .$$

Und für die Verhältnisse der drei Kreisflächen folgt dann:

$$(d_a)^2 : (d_b)^2 : (d_c)^2 = \cos^2 \alpha : \cos^2 \beta : \cos^2 \gamma .$$

(Die Kreiszahl π hat sich herausgekürzt.)

VON DER SPIELWIESE ZURÜCK ZUR REALITÄT

Tritt ein paralleler, kohärenter und monochromatischer Lichtstreifen in den Spalt $[PS]$ - wie in der Abbildung 8.1 gezeigt - ein, so entstehen an den Spaltkanten Beugungsmuster, die eine unterschiedliche Intensitätsverteilung des Lichtes im Prisma hervorrufen, wobei das Lichtbündel divergiert.

Wenn das Lichtbündel das Höhenfußpunktdreieck bei einem länger geöffnetem Spalt durchläuft, trifft es auf das von außen eintretende Lichtbündel, wobei Interferenzen so unglücklich verlaufen könnten, dass eine Auslöschung die Folge ist. Um diesen Effekt zu entrinnen, müsste also spätestens dann, wenn das reflektierte Licht zur Eintrittsöffnung zurückkehrt, der Spalt $[PS]$ geschlossen sein. Wie schon gezeigt, beträgt die Verschlusszeit etwa $0,3 \cdot 10^{-8}$ s, wenn das Licht im ersten Durchlauf einen Meter zurückgelegt hat. Technisch wäre das heute kein Problem mehr: Z. B. arbeitet der Physiker Ferenc Kraus von der Universität München während der Beobachtung von Elektronen bei chemischen Reaktionen mit Verschlusszeiten von ca. 10^{-18} s. [17]

Noch aus einem anderen Grund hat unser scheinbar perfektes Gedankenmodell einen Haken. Es gibt wegen der Wellennatur des Lichtes keine hundertprozentige Totalreflexion, genauso wie es keine 1 m lange Strecke gibt: Die Kopie des Urmeters in der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt in Braunschweig hat im Bereich des Feinst-Messwesens praktisch ausgedient.

Nehmen wir wieder an, dass der Umfang des Höhenfußpunktdreiecks 1 m beträgt. Nach jedem Umlauf ist das Licht dreimal total reflektiert worden. Nehmen wir weiter an, dass es 10 s dauert, bis der „Prismensack“ im Rathaus ankommt. Dann hat das Licht einen Gesamtweg von $3 \cdot 10^6$ km = $3 \cdot 10^9$ m zurückgelegt. Während dieser Zeit ist es $3 \cdot 3 \cdot 10^9$ -mal $\approx 10^{10}$ -mal reflektiert worden.

Angenommen, es geht bei jedem Reflexionsvorgang nur ca. ein Promille an Energie verloren, so dass also 99,9% weitergereicht werden, dann kommt am Ende

$$0,999^{(10^{10})} < 1,9 \cdot 10^{-4 \cdot 10^6}$$

der eingestrahnten Lichtmenge zutage.

Wenn wir nun darüber hinaus noch bedenken, dass die Innenwände des Rathauses nur einen kleinen Teil dieser Reststrahlung zur Erhellung der dort Tätigen reflektieren würden, dann bliebe alles im Dunkeln. An diesem Punkt unserer Überlegungen haben sich auch die letzten Schildbürger, die bis dahin noch Interesse gezeigt haben, verabschiedet.

Und dennoch: Im Piemont liegt das Dorf Viganella, das in der Winterzeit von allen Sonnenstrahlen gemieden wird. Im Dezember 2006 wurde 500 Höhenmeter über der Ortschaft ein Spiegel installiert, der das Sonnenlicht auf den Marktplatz reflektiert. Wie es heißt, ist die Ausbeute an Helligkeit geringer als erwartet. Die Gemeinden Personico und Cadenazzo haben dennoch Interesse gezeigt. Neben diesen „Schattendörfern“ gibt es noch weitere im Tessin: Gambarogno, Magadino und Vira.

VORWÄRTS IM FORMELDICKICHT

Wir greifen nochmals die folgende Beziehung auf: $A_{\Delta PQR} = 2 \cdot A_{\Delta ABC} \cdot \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Mit dem Kosinussatz folgt:

$$\begin{aligned} A_{\Delta PQR} &= A_{\Delta ABC} \cdot 2 \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2ab \cdot 2ac \cdot 2bc} \\ &= A_{\Delta ABC} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Wir nennen den Zähler T_2 und quadrieren ihn:

$$\begin{aligned} T_2^2 &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 + c^2 - b^2)^2 (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= [a^2 + (b^2 - c^2)] \cdot [a^2 - (b^2 - c^2)] \cdot [b^2 + (a^2 - c^2)] \cdot [b^2 - (a^2 - c^2)] \cdot \\ &\quad \cdot [c^2 + (a^2 - b^2)] \cdot [c^2 - (a^2 - b^2)] \\ &= \underbrace{[a^4 - (b^2 - c^2)^2]}_{\leq a^4} \cdot \underbrace{[b^4 - (a^2 - c^2)^2]}_{\leq b^4} \cdot \underbrace{[c^4 - (a^2 - b^2)^2]}_{\leq c^4} \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\boxed{(a^2 + b^2 - c^2)^2 (a^2 + c^2 - b^2)^2 (b^2 + c^2 - a^2)^2 \leq a^4 b^4 c^4} . \quad (2)$$

Diese Ungleichung gilt offenbar für alle reellen Zahlen a , b und c .

Das Höhenfußpunktdreieck PQR liegt jedoch nur dann vollständig im Inneren seines Dreiecks ABC , wenn dieses spitzwinklig ist. Nach dem Kosinussatz gilt dann z.B.:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \gamma > 0 \quad .$$

Der Sonderfall des rechtwinkligen Dreiecks lässt das Höhenfußpunktdreieck zur Strecke entarten: $A_H = 0$ und $2ab \cos \gamma = 0$.

Also gilt in spitzwinkligen Dreiecken $2ab \cos \gamma \geq 0$.

Und damit ergibt sich: $a^2 + b^2 - c^2 \geq 0$ und analog $a^2 + c^2 - b^2 \geq 0$ sowie $b^2 + c^2 - a^2 \geq 0$. Somit ist die Ungleichung (2) äquivalent mit

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2) \leq a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 . \quad (3)$$

Damit lässt sich der Term (1) für spitzwinklige Dreiecke abschätzen:

$$\boxed{A_H \leq \frac{1}{4} \cdot A} .$$

Das einbeschriebene Dreieck aus den Höhenfußpunkten nimmt höchstens 25% der Fläche des Dreiecks ABC ein. Die 25% werden nur dann erreicht, wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Mit $A_H = A \cdot 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ folgt sofort

$$\boxed{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}} .$$

Wieder gilt das Gleichheitszeichen wie auch in allen folgenden Ungleichungen nur im Fall des gleichseitigen Dreiecks. Sonst sind die Ungleichungen für alle möglichen Dreiecke (also auch rechtwinklige und stumpfwinklige) gültig.

Aus

$$A_H = A \cdot [1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)] \leq \frac{1}{4}$$

folgt

$$\boxed{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \geq \frac{3}{4}} .$$

Und wegen der Beziehung $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ ergibt sich

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4}} .$$

Wir ersetzen in der Ungleichung (3) a^2 durch a , b^2 durch b und c^2 . Wir deuten a , b und c als Streckenlängen, für die die Dreiecksungleichungen gelten sollen. Dann erhalten wir einen Term T_3 mit der Abschätzung

$$\boxed{T_3 = (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc} .$$

Mit $s = \frac{a+b+c}{2}$ ergibt sich:

$$b + c - a = 2(s - a), \text{ sowie } a + b - c = 2(s - c), \text{ und } a + c - b = 2(s - b).$$

$$\text{Dann ist } T_3 = 8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc; \text{ d.h. } (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{1}{8}abc.$$

Ist ρ der Inkreisradius eines Dreiecks mit den Seiten a , b und c , dann finden wir in jeder gebräuchlichen Formelsammlung:

$$\rho^2 \cdot s = (s - a)(s - b)(s - c) \leq \frac{abc}{8}. \text{ Mit } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ ergibt sich nun:}$$

$$\rho^2 \leq \frac{abc}{8 \cdot \frac{a+b+c}{2}}. \text{ Wir erhalten schließlich:}$$

$$\boxed{\rho \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{abc}{a + b + c}}} .$$

Wir multiplizieren im Term T_3 alle Klammern aus und erhalten somit:

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c - a^3 - b^3 - b^2c + ab^2 + 2b^2c + 2bc^2 - 2abc - bc^2 - c^3 + ac^2 &\leq abc \\ \Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc &\leq abc \\ \Leftrightarrow 2abc \cos \alpha + 2abc \cos \beta + 2abc \cos \gamma - 2abc &\leq abc \\ \Leftrightarrow 2abc(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) &\leq 3abc \end{aligned}$$

Und damit gilt:

$$\boxed{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}} .$$

Die Dominanz der Kosinusfunktion ist beeindruckend.

Kapitel 9

Divide sed ne imperaveris!

Aus der Verneinung des Spruchs „Teile und herrsche!“, der die Taktik von Feldherren oder auch von Politikern beschreibt, durch Angriffe auf kleine Abteilungen bzw. durch die Aussaat von Zwietracht den Gegner zu schwächen, erwächst für uns der Auftrag, Teilungsprobleme gerecht zu lösen und damit zwischen den betroffenen Parteien Frieden zu stiften.

ERBSCHAFTSANGELEGENHEITEN

Dreieckige Grundstücke sind zwar eher selten und unter den Anhängern des Feng Shui verpönt, aber dennoch hat es wohl Fälle gegeben, dass ein dreieckiges Grundstück so unter zwei Erben aufgeteilt werden soll, dass jeder die Hälfte bekommt. In der Abb. 9.1 ist das

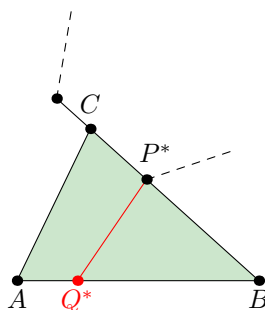


Abbildung 9.1: Ausschnitt aus einer Flurkarte

dreieckige Grundstück mit den Marksteinen A , B und C dargestellt, an das irgendeine weitere Fläche (gestrichelte Linien) mit dem Grenzstein P^* angrenzt. Die Erben kommen überein, das Grundstück so zu halbieren, dass vom Markstein P^* aus eine gerade Linie zu einem Punkt Q^* auf $[AB]$ führt, der noch ermittelt werden muss. Nur dieser Grenzstein muss dann neu gesetzt werden.

Konstruktionen und Berechnungen

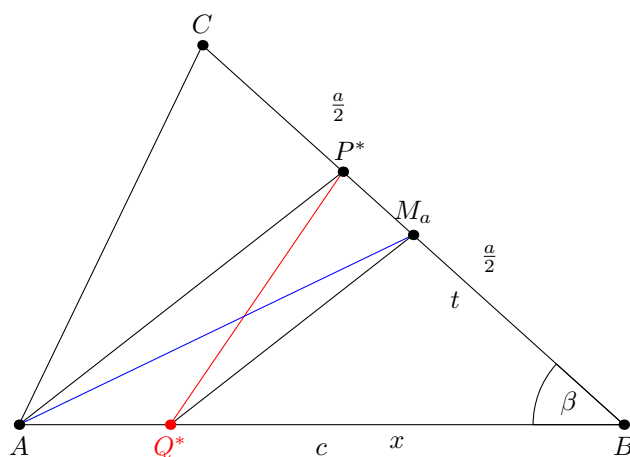


Abbildung 9.2: Eine mögliche Vorgehensweise

Konstruktionsbeschreibung:

- Markiere den Mittelpunkt M_a der Seite a .
- Zeichne die Seitenhalbierende $[AM_a]$ und die Strecke $[AP^*]$ ein.
- Die Parallele zu $[AP^*]$ durch den Punkt M_a schneidet die Seite $[AB]$ im gesuchten Punkt Q^* .

Begründung:

Wir erinnern uns in diesem Zusammenhang an die Tatsache, dass jede Seitenhalbierende eines Dreiecks (hier ist es $[AM_a]$) dessen Fläche halbiert.

Die Strecke $[P^*Q^*]$ erzeugt das Dreieck Q^*BP^* mit $t = \overline{BP^*}$ und $x = \overline{BQ^*}$, dessen Fläche halb so groß sein muss wie die des Dreiecks ABC mit den Seitenlängen $a = \overline{BC}$ und $c = \overline{AB}$.

Die Dreiecke Q^*M_aA und $Q^*M_aP^*$ sind flächengleich, denn sie besitzen die gleiche Grundlinie Q^*M_a und wegen $[Q^*M_a] \parallel [AP^*]$ sind auch ihre Höhen gleich.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_{\Delta ABC} &= A_{\Delta ABM_a} = A_{\Delta Q^*BM_a} + A_{\Delta Q^*M_aA} = A_{\Delta Q^*BM_a} + A_{\Delta Q^*M_aP^*} \\ &= A_{\Delta Q^*BP^*} \end{aligned}$$

Weiter gilt $\Delta ABP^* \sim \Delta Q^*BM_a$ und damit:

$$\frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{t}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{2tx = ac} \quad (*)$$

Aber auch Ahnungslose, für die Seitenhalbierende nichtssagende Dreieckstransversalen sind, können über die Sinus-Flächenformel zur Gleichung (*) gelangen:

$$2 \cdot A_{\Delta AQ^*BP^*} = A_{\Delta ABC} \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}tx \sin \beta = \frac{1}{2}ac \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow 2tx = ac \quad \Leftrightarrow \boxed{\frac{2t}{c} = \frac{a}{x}}.$$

Diese Bruchgleichung können wir als Vierstreckensatz deuten. Damit eröffnet sich eine weitere Konstruktionsmöglichkeit:

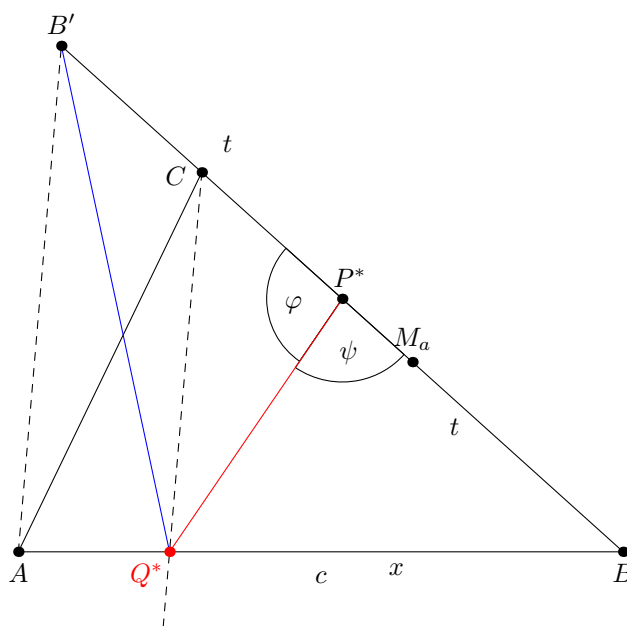


Abbildung 9.3: Eine andere Konstruktionsmöglichkeit

- Der Punkt B' ist das Spiegelbild des Punktes B am Punkt P^*
- Die Parallele zur Strecke $[AB']$ durch den Punkt C schneidet die Seite $[AB]$ im gesuchten Punkt Q^* .

Begründung:

In der Abb. 9.3 gilt: $\psi = 180^\circ - \varphi$.

$$A_{\Delta Q^*BP^*} = \frac{1}{2} \cdot \overline{P^*Q^*} \cdot \overline{P^*B} \cdot \sin \psi \quad \text{und} \quad A_{\Delta Q^*P^*B'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{B'P^*} \cdot \overline{P^*Q^*} \cdot \sin \varphi.$$

Nun gilt $\sin \psi = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ und $\overline{B'P^*} = \overline{P^*B} \Rightarrow A_{\Delta Q^*P^*B'} = A_{\Delta Q^*BP^*}$. Weil die Dreiecke Q^*CB' und Q^*CA den gleichen Flächeninhalt besitzen, sind das Viereck AQ^*CB' und das Dreieck Q^*BP^* flächengleich. Damit ist die Halbierung des Dreiecks ABC vollzogen.

Anmerkung:

Damit diese Konstruktion überhaupt zum Ziel führt, muss $P^* \in [CM_a]$ gelten.

Für $P^* = M_a$ oder $P^* = C$ wird die Markierungslinie $[P^*Q^*]$ zur Halbierenden der Seite $[BC]$ bzw. der Seite $[AB]$.

Im Fall $P^* \in [M_aB]$ wird statt des Punktes B der Punkt C am Punkt P^* gespiegelt; der Rest spielt sich dann analog ab.

Sonderwünsche

Möglicherweise haben die Erben Gründe, eine Halbierung des Grundstücks unter Bedingungen vorzunehmen, die in der Abb. 9.2 an die Gestalt des Dreiecks Q^*BP^* oder des Vierecks AQ^*P^*C geknüpft sind. Dann wäre die Position des Marksteins P^* ohne Bedeutung, und es müssen zwei neue Grenzsteine P und Q gesetzt werden.

a) Das Dreieck QBP soll gleichschenkelig mit der Basis $[PQ]$ werden:

Dann muss in der Gleichung (*) $t = x$ gelten, also folgt $2x^2 = ac$.

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 = c \cdot \frac{a}{2}} \quad (*)$$

Der Höhensatz des EUKLID ermöglicht uns die Konstruktion:

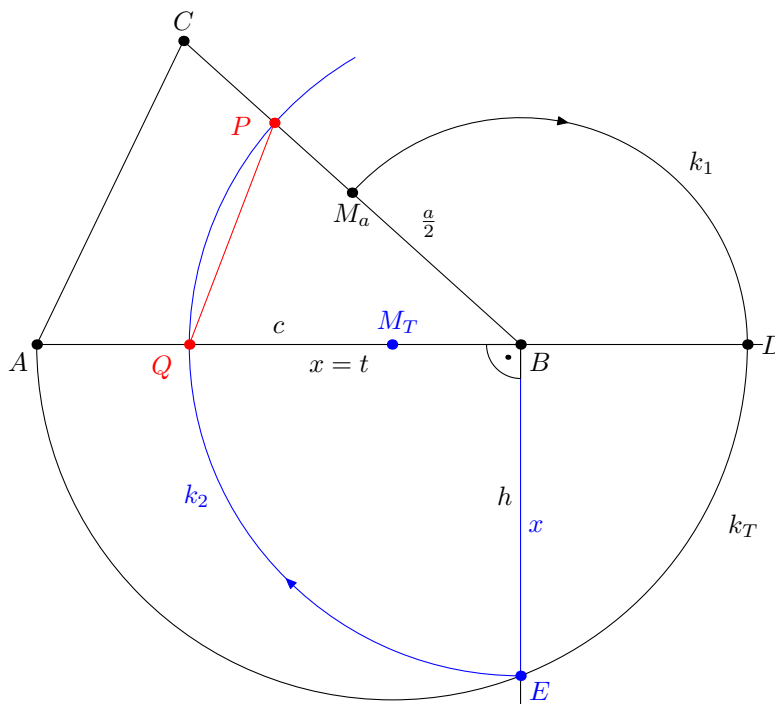


Abbildung 9.4: Konstruktion mit Hilfe des Höhensatzes

- $k_1(B; r_1 = \frac{a}{2}) \cap [AB] = \{D\}$
- THALES-Halbkreis k_T unterhalb von $[AD]$ mit dem Durchmesser $[AD]$ und dem Mittelpunkt M_T
- Errichte im Punkt B nach unten die senkrechte Halbgerade h
- $h \cap k_T = \{E\}$ mit $\overline{BE} = x$
- $k_2(B; r_2 = \overline{BE} = x) \cap [AB] = \{Q\}$ und $k_2(B; r_2 = \overline{BE} = x) \cap [BC] = \{P\}$

Offensichtlich gibt es nur für $x \leq a$ eine konstruktive Lösung. Mit der eingerahmten Formel (*) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{ac}{2}} \leq a &\Leftrightarrow ac \leq 2a^2 \\ &\Leftrightarrow a(2a - c) \geq 0 &\Leftrightarrow a \geq \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Der Grenzfall $\frac{c}{2} = a$ liefert $x = a$; Das bedeutet:

Gilt in einem Dreieck ABC die Beziehung $c = \frac{a}{2}$, dann ist der Flächenteiler, welcher vom Punkt B aus ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, identisch mit der Seitenhalbierenden s_a .

In diesem Zusammenhang wendet sich unsere erhöhte Aufmerksamkeit einer Meldung in der „Kraut-und-Rüben-Zeitung“ zu. Es heißt dort: „... Wie wir aus gut unterrichteten Kreisen erfahren haben, prozessieren die beiden Schwestern Zeta und Omikron aus Pequien wegen eines geerbten dreieckigen Grundstücks. Es geht nach Aussage beider Beteiligten darum, aus Kostengründen einen möglichst kurzen Zaun zwischen die beiden Grundstückshälften zu ziehen. Alle Bemühungen, eine Einigung zu erzielen, sind bislang gescheitert. Nach unseren letzten Informationen hat das Vermessungsbüro TRI & ANGEL in einem Gutachten eine tragfähige Lösung des Problems erarbeitet, die aber vermutlich für die meisten unserer Leser nicht nachvollziehbar ist. Wir sind gespannt, ob es zu einer Einigung kommt.“

Der Lösungsvorschlag ist in der Abb. 9.5 dargestellt:

Angenommen, der Zaun $[PQ]$ trennt das Grundstück ABC in zwei gleiche Teile, wobei das Dreieck QBP gleichschenkelig ist. Dann lassen sich mit Hilfe eines Punktes K , der sich irgendwo zwischen den Punkten C und P aufhält, auf die folgende Weise beliebig viele Zäune $[KL]$ errichten, die ebenfalls Flächenhalbierende sind:

- Zeichne die Strecke $[KQ]$ ein
- Die Parallele zu $[KQ]$ durch den Punkt P schneidet die Strecke $[AB]$ im Punkt L . Dann ist der Zaun $[KL]$ ebenfalls eine Flächenhalbierende

Begründung:

Die beiden Dreiecke LPQ und LPK besitzen den gleichen Flächeninhalt. Damit sind auch die beiden Dreiecke QBP und LBK flächengleich.

In der Abb. 9.5 ist der blaue Zaun $[KL]$ offensichtlich länger als der rote. Aber ist das für alle möglichen Positionen des Punktes $K \in [PC]$ der Fall?

Zur Verdeutlichung haben wir den Punkt K an der Mittelsenkrechten $m_{[PL]}$ der Strecke $[PL]$ gespiegelt. Dadurch erhalten wir das symmetrische Trapez $K'LPK$. Seine Diagonalen $[KL]$ und $[K'P]$ sind gleich lang.

Bewegt sich der Punkt K immer weiter vom Punkt P weg, dann nähert sich gleichzeitig der zugehörige Punkt L dem Punkt B . Synchron dazu wächst zwar auch das Winkelmaß δ , aber es erreicht nie das Winkelmaß φ , denn für $\delta = \varphi$ fände das Rendezvous der Dreiecksseiten $[BC]$ und $[AC]$ erst im Unendlichen in Richtung $[QC^*]$ bzw $[BC]$ statt. Wäre das aber der Fall, dann hätte der blaue Zaun eine unendliche Länge, während gleichzeitig das Grenzstück $[LB]$ auf Null schrumpft. Das Teildreieck LBK würde zu einer Strecke entarten, deren Länge alle positiven reellen Zahlen übertrifft. Wir sinnieren noch kurz über die Frage:

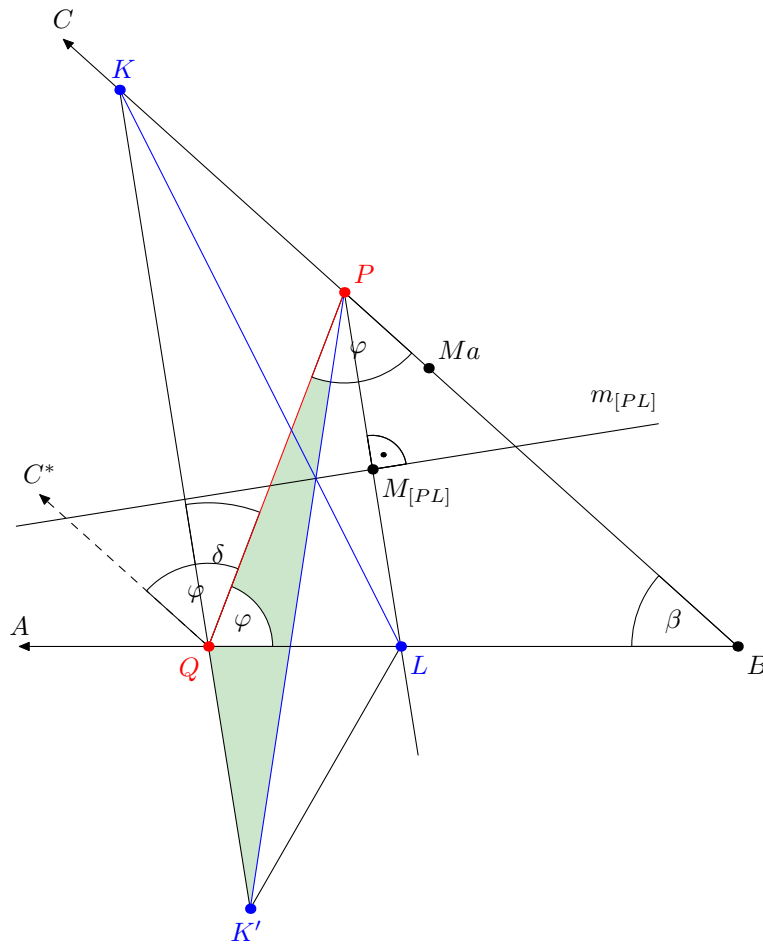


Abbildung 9.5: Ein gleichschenkliges Dreieck und weitere Flächenteiler

„Ergibt $\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \infty \cdot \sin \beta = 0 \cdot \infty$ dann immer noch die halbe Grundstücksgröße?“
und wenden uns wieder dem eigentlichen Thema zu:

Weil das Dreieck PQB gleichschenkelig ist, folgt $\varphi < 90^\circ$, und wegen $\delta < \varphi$ gilt dann $\delta < 90^\circ$.

Nun ist δ ein Außenwinkel am Dreieck $QK'P$. Der zugehörige Innenwinkel $K'QP$ ist dann jedoch stets größer als 90° .

Weil es aber pro Dreieck nur einen stumpfen Innenwinkel geben kann, muss die Seite $[K'P]$ aufgrund der Seiten-Winkelbeziehungen in Dreiecken stets die längste Dreiecksseite bleiben; d.h. keiner der blauen Zäune kann kürzer als der rote werden.

Damit haben wir ein wichtiges Zwischenergebnis erhalten:

Schneidet man von irgendeinem Eckpunkt eines Dreiecks ABC ein gleichschenkliges Dreieck so ab, dass dieses gleichzeitig halb so groß wie das ursprüngliche Dreieck ist, dann ist die Länge der Schnittlinie kürzer als bei allen anderen Dreiecken, die an dieser Ecke zum Zwecke der Flächenhalbierung abgeschnitten werden.

Die Anwälte der beiden Geschwister warfen in diesem Zusammenhang die Frage auf, ob es nicht einen noch kürzeren Zaun gäbe, wenn das gleichschenklige Dreieck von einem anderen Eckpunkt A oder C aus konstruiert worden wäre.

Die Leitung des Vermessungsbüros TRI & ANGEL beauftragte deshalb ihren Mitarbeiter, Herrn Dr. Theo Dolit, mit der Lösung dieses Problems.

Er führte im Einzelnen Folgendes aus:

Wie wir im Zusammenhang mit der Abb. 9.4 schon wissen, war die Konstruktion des fraglichen Teildreiecks QBP nur unter der Bedingung $a \geq \frac{c}{2}$ möglich.

Durch zyklische Vertauschung erhalten wir noch $b \geq \frac{a}{2}$ und $c \geq \frac{b}{2}$.

Das Grundstück ABC hat die Abmessungen $a = 90$ m, $b = 85$ m und $c = 95$ m.

Dann ist $a = 90$ m $>$ $47,5$ m, $b = 85$ m $>$ $42,5$ m und $c = 95$ m $>$ $47,5$ m.

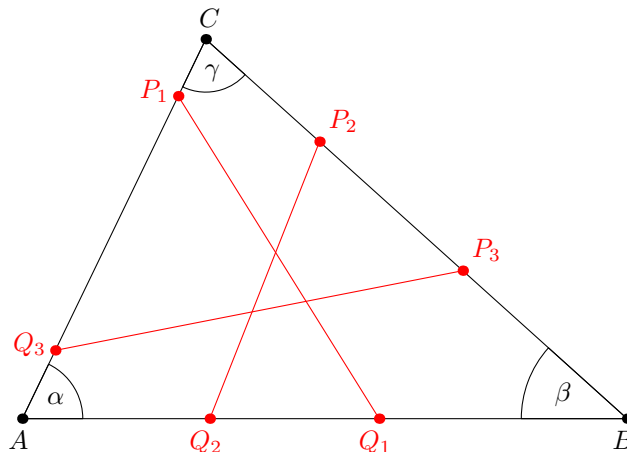


Abbildung 9.6: Alle drei Flächenteiler

Damit haben wir die Auswahl aus drei gleichschenkligen Dreiecken, deren Zäune $[P_1Q_1]$, $[P_2Q_2]$ und $[P_3Q_3]$ jeweils das Grundstück ABC halbieren (siehe Abb.9.6).

Welcher Zaun ist nun der kürzeste?

Nachdem in einem Dreieck der kürzesten (längsten) Seite jeweils der kleinste (größte) Innenwinkel gegenüberliegt, muss in unserem konkreten Fall $\beta < \alpha < \gamma$ gelten.

Nun ist ja $A_{\Delta AQ_1P_1} = A_{\Delta BP_2Q_2} = A_{\Delta CP_3Q_3}$.

Wenn wir die jeweiligen Schenkellängen mit x_1 , x_2 und x_3 bezeichnen, dann gilt für die Flächeninhalte der drei gleichschenkligen Dreiecke:

$$\frac{1}{2} \cdot x_1^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot x_2^2 \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot x_3^2 \cdot \sin \gamma.$$

Weil β am kleinsten ist, muss dafür die zugehörige Schenkellänge x_2 die größte von allen sein.

Zeta: „??“ Herr Dolit erklärte es den beiden Erbinen so: „Wenn die beiden Schenkel am längsten werden, muss die zugehörige Basis vom gegenüber liegenden Eckpunkt (hier der Punkt B) am weitesten entfernt sein. Dann ist diese Basislinie von allen die kleinste.“

Wir halten kurz inne und stellen fest:

Von allen Flächenhalbierenden eines Dreiecks ist diejenige die kürzeste, die als Basis eines gleichschenkligen Dreiecks dem kleinsten Innenwinkel gegenüberliegt.

Natürlich wollten Zeta und Omikron jetzt wissen, wie lang ihr Zaun nun wird. Um derartige Anfragen künftig schneller verbescheiden zu können, nahm Herr Dolit gleich eine allgemeine Berechnung vor:

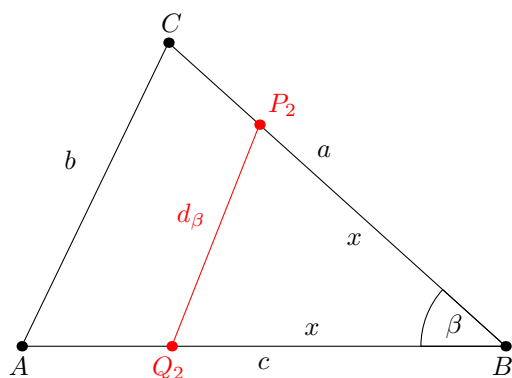


Abbildung 9.7: Die Berechnung von d_β

In der Abb. 9.7 ist β der kleinste Innenwinkel.

Kosinussatz im Dreieck Q_2BP_2 : $d_\beta^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \beta$. Mit $x^2 = \frac{ac}{2}$ folgt:

$$d_\beta^2 = ac - ac \cos \beta. \quad (*)$$

Kosinussatz im Dreieck ABC : $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; mit (*):

$$\begin{aligned} d_\beta^2 &= ac - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \\ &= \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2} \\ &= \frac{b^2 - (a - c)^2}{2} = \frac{(b - a + c)(b + a - c)}{2} \\ d_\beta^2 &= \frac{2 \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}}{2}. \quad \text{Und mit } s = \frac{a + b + c}{2} \text{ folgt:} \end{aligned}$$

$$\boxed{d_\beta = \sqrt{2 \cdot (s - a)(s - c)}}. \quad (**)$$

Anmerkungen

- Wenn wir a mit c vertauschen, bleibt der Radikand in (**) und damit d_β unverändert.
Das bedeutet geometrisch: Die Streckenlänge d_β bleibt unverändert, wenn wir das Dreieck ABC an der Halbierenden des Winkels CBA spiegeln.
- Wenn β der kleinste Innenwinkel ist, gilt:

$$\begin{aligned} b < a \wedge b < c &\Leftrightarrow -b > -a \quad \wedge \quad -b > -c \\ &\Leftrightarrow s - b > s - a \quad \wedge \quad s - b > s - c \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Radikand in (**) tatsächlich der kleinstmögliche ist. Also wird auch d_β minimal.

Die Erbbinnen sind schon ungeduldig geworden:

Für $a = 90$ m, $b = 85$ m und $c = 95$ m ergibt sich $s = 135$ m und damit als Zaunlänge:

$$d_\beta = \sqrt{2 \cdot 45 \text{ m} \cdot 40 \text{ m}} = 60 \text{ m}.$$

Der Baumarkt bietet genügend Möglichkeiten, diesen Zaun in gleiche Felder ohne Sonderanfertigungen einzuteilen. Zeta und Omikron waren's zufrieden.

HINEIN INS FORMELGESTRÜPP

Wir starten mit $d_\beta = \sqrt{2 \cdot (s - a)(s - c)}$.

Zyklische Vertauschungen liefern die beiden anderen roten Flächenteiler d_α und d_γ in der Abb 9.6:

$$d_\gamma = \sqrt{2 \cdot (s - a)(s - b)} \text{ und } d_\alpha = \sqrt{2 \cdot (s - b)(s - c)}$$

Wir bringen nun die HERON-Formel zur allgemeinen Berechnung der Dreiecksfläche A ins Spiel:

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

Außerdem verwenden wir noch die Beziehung $A = \rho \cdot s$, wobei ρ der Inkreisradius des Dreiecks ist. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} d_\alpha \cdot d_\beta \cdot d_\gamma &= 2(s - a)(s - b)(s - c)\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \frac{A^2}{s} \\ &= 2\sqrt{2} \frac{\rho^2}{s^2} \end{aligned}$$

Und daraus folgt:

$$\boxed{d_\alpha \cdot d_\beta \cdot d_\gamma = 2\sqrt{2} s \cdot \rho^2}.$$

Wir finden weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_\alpha^2} + \frac{1}{d_\beta^2} + \frac{1}{d_\gamma^2} &= \frac{1}{2(s - b)(s - c)} + \frac{1}{2(s - a)(s - c)} + \frac{1}{2(s - a)(s - b)} \\ &= \frac{(s - a) + (s - b) + (s - c)}{2(s - a)(s - b)(s - c)} \\ &= \frac{3s - (a + b + c)}{2(s - a)(s - b)(s - c)} = \frac{s}{2(s - a)(s - b)(s - c)} \end{aligned}$$

Und daraus folgt:

$$\boxed{\frac{1}{d_\alpha^2} + \frac{1}{d_\beta^2} + \frac{1}{d_\gamma^2} = \frac{1}{2\rho^2}}. \quad (***)$$

Wir multiplizieren die Gleichung (***) mit $\frac{4}{\pi}$:

$$\frac{4}{d_\alpha^2 \pi} + \frac{4}{d_\beta^2 \pi} + \frac{4}{d_\gamma^2 \pi} = \frac{2}{\rho^2 \pi}$$

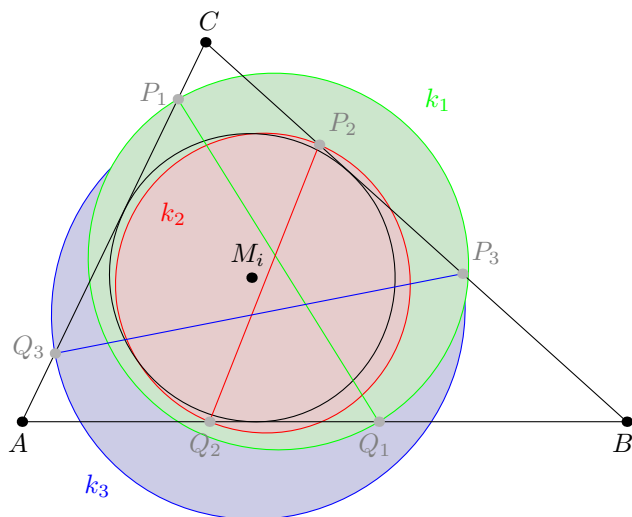


Abbildung 9.8: Transversalen ziehen Kreise

Für den Flächeninhalt A einer Kreisfläche gilt $A = r^2\pi = \frac{d^2}{4}\pi$.

Damit können wir in der Abb. 9.6 die drei Transversalen $[P_1Q_1]$, $[P_2Q_2]$ und $[P_3Q_3]$ als den jeweiligen Durchmesser dreier bunten Kreise k_1 , k_2 und k_3 deuten:

Sind in der Abb. 9.8 A_α , A_β und A_γ die jeweiligen Flächeninhalte der bunten Kreise und M_i der Mittelpunkt des Inkreises k_i des Dreiecks ABC mit dem Flächeninhalt A_i , dann gilt:

$$\frac{1}{A_\alpha} + \frac{1}{A_\beta} + \frac{1}{A_\gamma} = \frac{2}{A_i}.$$

b) Das Dreieck QBP soll gleichschenkelig mit der Basis $[QB]$ werden; d.h. es soll $\overline{PB} = \overline{PQ} = t = x$ gelten:

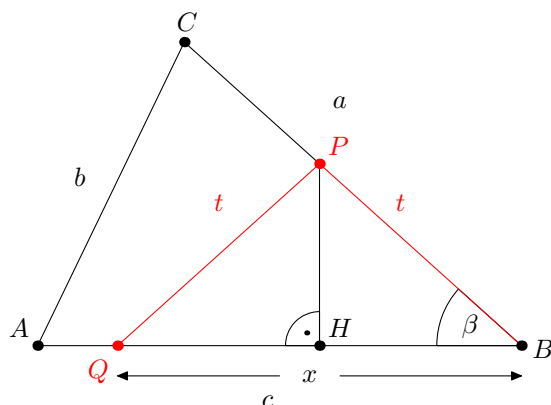


Abbildung 9.9: Zur Berechnung von x im Fall b)

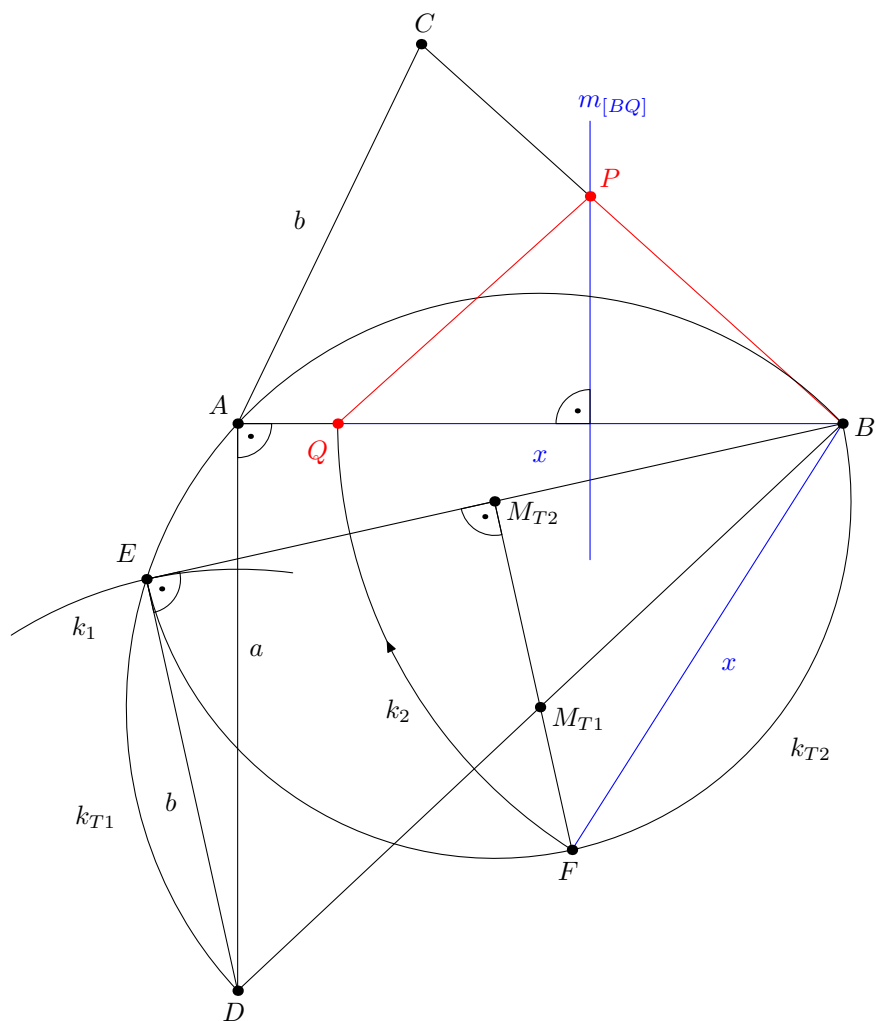


Abbildung 9.10: Die Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $[BQ]$

$$\begin{aligned} \Delta HBP : \quad \cos \beta &= \frac{\frac{x}{2}}{t} = \frac{x}{2t} \\ \Delta ABC : \quad \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \frac{x}{2t} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow t = \frac{acx}{a^2 + c^2 - b^2} \end{aligned}$$

Mit $t = \frac{ac}{2x}$ folgt:
$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}} .$$

Die Abbildung 9.10 zeigt, wie wir die Strecke x konstruiert haben:

- Zeichne im Punkt A die Senkrechte mit $\overline{AD} = a$
- THALES-Halbkreis k_{T1} über $[BD]$: $\overline{BD} = \sqrt{a^2 + c^2}$
- $k_1(D; r_1 = b) \cap k_{T1} = \{E\}$: $\overline{EB} = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$

- Mittelpunkt M_{T_2} von $[EB]$
- THALES-Halbkreis k_{T_2} über $[BE]$
- Die Senkrechte im Punkt M_{T_2} zu $[BE]$ schneidet k_{T_2} im Punkt F . $\overline{M_{T_2}F} = \overline{M_{T_2}B}$

$$\overline{FB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BE} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 - b^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}} = x$$

- $k_2(B; r_2 = x) \cap [AB] = \{Q\}$ und $m_{[BQ]} \cap [BC] = \{P\}$.

c) Das Dreieck QBP soll gleichschenkelig mit der Basis $[PB]$ werden:

Hier müssen wir nur x mit t vertauschen, so dass jetzt $t = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$ gilt.

Die Konstruktion des Dreiecks BPQ folgt bis zur Strecke $[BF]$ genau der im Teil b).
Dann folgt noch:

- $k_3(B; r_3 = \overline{BF}) \cap [BC] = \{P\}$ und damit ist $\overline{BP} = t$.

Andererseits könnten wir das Dreieck BPQ auch dadurch konstruieren, dass wir in der Abb. 9.10 die Strecke $[PQ]$ an der Halbierenden des Winkels CBA spiegeln. Dann entsteht das hier gesuchte Dreieck BPQ .

d) Das Dreieck QBP soll rechtwinklig mit der Hypotenuse $[PB]$ werden:

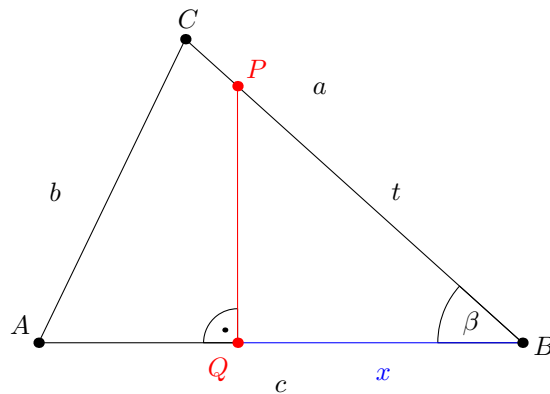


Abbildung 9.11: Zur Berechnung von x im Fall d)

$$\Delta QBP: \quad \cos \beta = \frac{x}{t}$$

$$\text{Analog wie im Abschnitt b) folgt: } \frac{x}{t} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow t = \frac{2acx}{a^2 + c^2 - b^2}$$

$$\text{Mit } 2tx = ac \text{ folgt: } \frac{4acx^2}{a^2 + c^2 - b^2} = ac \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}} .$$

Die Konstruktionsbeschreibung lehnt sich eng an die vom Abschnitt b) an:

- Konstruiere den Punkt M_{T_2} wie in b): $\overline{EB} = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$

- Nun gilt in d): $x = \frac{1}{2} \cdot \overline{EB}$; der Rest läuft genauso wie in b) ab.

e) **Das Dreieck QBP soll rechtwinklig mit der Hypotenuse $[QB]$ werden:**

Die Konstruktion verläuft analog zu der im Abschnitt d), nur dass jetzt die Kreislinie k_2 die Strecke $[BC]$ im Punkt P schneidet, was wiederum wie im Fall d) einer Spiegelung des Dreiecks QBP an der Winkelhalbierenden w_β entspricht.

f) **Jetzt soll bei der Halbierung des Dreiecks ABC gelten: $\overline{AQ} = \overline{CP}$**

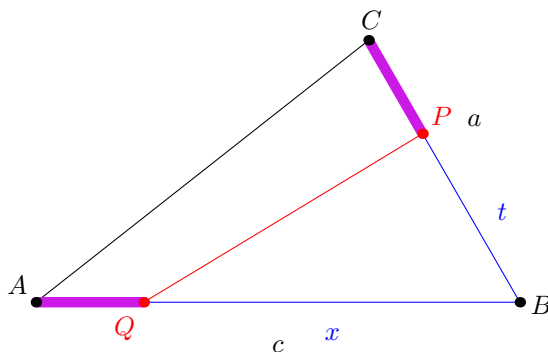


Abbildung 9.12: Zur Berechnung von x und t im Fall f)

Hier gilt: $a - t = c - x \Leftrightarrow x = c - a + t$. Mit $2xt = ac$ folgt weiter:

$$c - a + t = \frac{ac}{2t} \quad | \cdot 2t$$

$$\Leftrightarrow 2t(c - a) + 2t^2 - ac = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 2t(c - a) - ac = 0$$

Diskriminante $D = 4(c - a)^2 + 8ac = 4c^2 - 8ac + 4a^2 + 8ac \Rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{a^2 + c^2}$.

$t_{1;2} = \frac{-(c - a) \pm \sqrt{a^2 + c^2}}{2}$. Wegen $t > 0$ folgt:

$$t = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + c^2} - (c - a) \right] .$$

Andererseits gilt: $x = t + c - a = t + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (c - a) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + c^2} - (c - a) + 2 \cdot (c - a) \right]$.

Damit ergibt sich:

$$x = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a^2 + c^2} + (c - a) \right] .$$

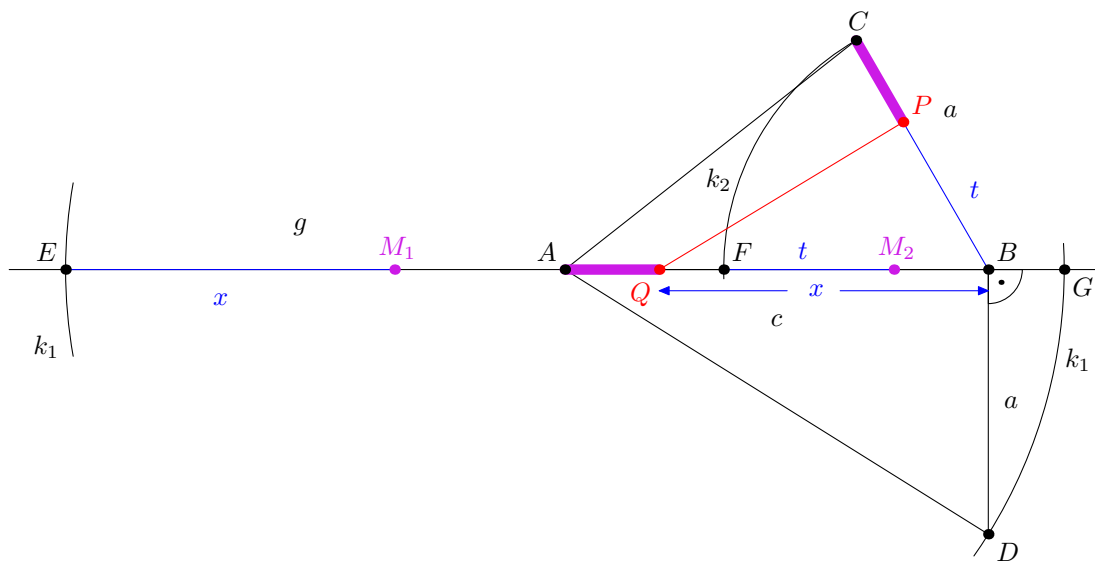


Abbildung 9.13: Die Konstruktion von x und t im Fall f)

Die beiden Ergebnisse ermöglichen wieder eine Konstruktion der Grenzlinie $[PQ]$: Von den beiden Kreisen k_1 und k_2 sind nur deren Bögen dort gezeichnet, wo sie Schnittpunkte liefern. Die gesuchten Strecken x bzw. t in der Abb. 9.13 wurden für $c > a$ konstruiert. Der Fall $c < a$ lässt sich analog darstellen.

Falls $c = a$ gilt, haben wir ein gleichschenkliges Grundstück ABC vor uns. Dann muss das Viereck $AQPC$ ein achsensymmetrisches Trapez werden. In diesem Fall gilt: $t = x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Dieses Thema greifen wir allgemeiner im Abschnitt g) auf.

- Zeichne durch die Punkte A und B eine Gerade g
- Trage die Streckenlänge a senkrecht zum Punkt B nach unten an.
Dann gilt: $\overline{AD} = \sqrt{a^2 + c^2}$.
- $k_1(A, r_1 = \sqrt{a^2 + c^2}) \cap g = \{E, G\}$: $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AG} = \sqrt{a^2 + c^2}$
- $k_2(B, r_2 = a) \cap [AB] = \{F\}$. Damit gilt $\overline{AF} = c - a$.
- Dann folgt $\overline{EF} = \sqrt{a^2 + c^2} + (c - a)$ und $\overline{FG} = \sqrt{a^2 + c^2} - (c - a)$
- Die Punkte M_1 und M_2 halbieren die Strecken $[EF]$ bzw. $[FG]$.
Also gilt $x = \overline{EM_1} = \overline{M_1F}$ und $t = \overline{FM_2} = \overline{M_2G}$.
- Trage die Streckenlänge x von B aus auf $[AB]$ ab. Das ergibt den Punkt Q .
- Trage die Streckenlänge t von B aus auf $[BC]$ ab. Das ergibt den Punkt P .

g) Das Viereck $AQPC$ soll zum Trapez werden:

Dann muss $[PQ] \parallel [AB]$ gelten.

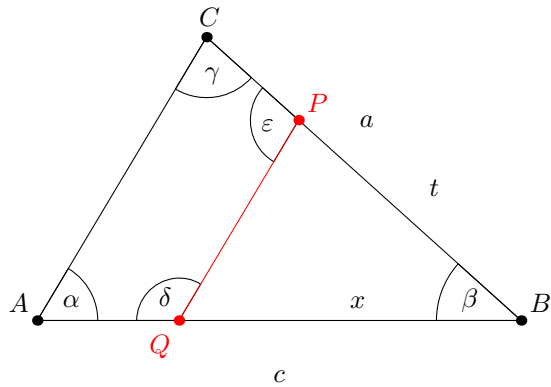


Abbildung 9.14: Zur Berechnung von x und t im Fall g)

$$A_{\Delta QBP} \sim A_{\Delta ABC}: \quad \frac{x}{t} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow t = \frac{ax}{c}. \quad (*)$$

Mit $2tx = ac$ folgt: $\frac{2ax^2}{c} = ac.$

$$\boxed{x = \frac{c}{2}\sqrt{2}} \quad \text{und mit } (*) \text{ folgt: } \boxed{t = \frac{a}{2}\sqrt{2}}.$$

Für $a = c$ (gleichschenkliges Dreieck) erhalten wir wieder wie schon im Fall g) dargelegt: $t = x = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$

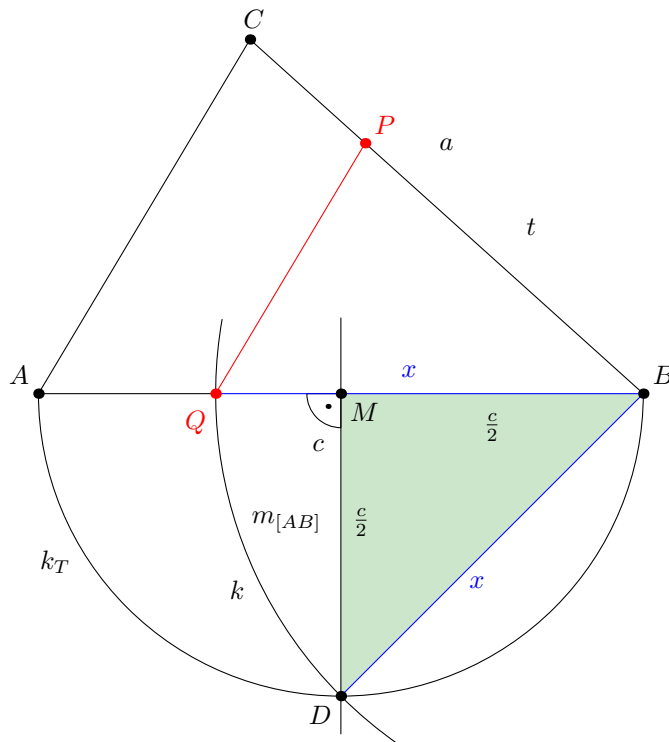


Abbildung 9.15: Die Konstruktion der Strecken x und t im Fall g)

- Konstruiere die Mittelsenkrechte $m_{[AB]}$ zur Strecke $[AB]$
- THALES-Halbkreis k_T unter $[AB]$
- $k_T \cap m_{[AB]} = \{D\} \Rightarrow \overline{MD} = \frac{\varepsilon}{2}$ und $\overline{BD} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2} = x$
- $k(B, r = \overline{BD}) \cap [AB] = \{Q\}$ und damit gilt: $\overline{BQ} = x$
- Die Parallele zur Strecke $[AC]$ durch den Punkt Q scheidet die Strecke $[BC]$ im Punkt P , und damit gilt: $\overline{BP} = t$.

Wenn wir mit der Konstruktion von t statt mit der von x begonnen hätten, wäre das gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck nicht an c sondern an a errichtet worden. Die Verfahrensweise vollzöge sich danach analog.

h) Das Viereck $AQPC$ soll ein Sehnenviereck werden:

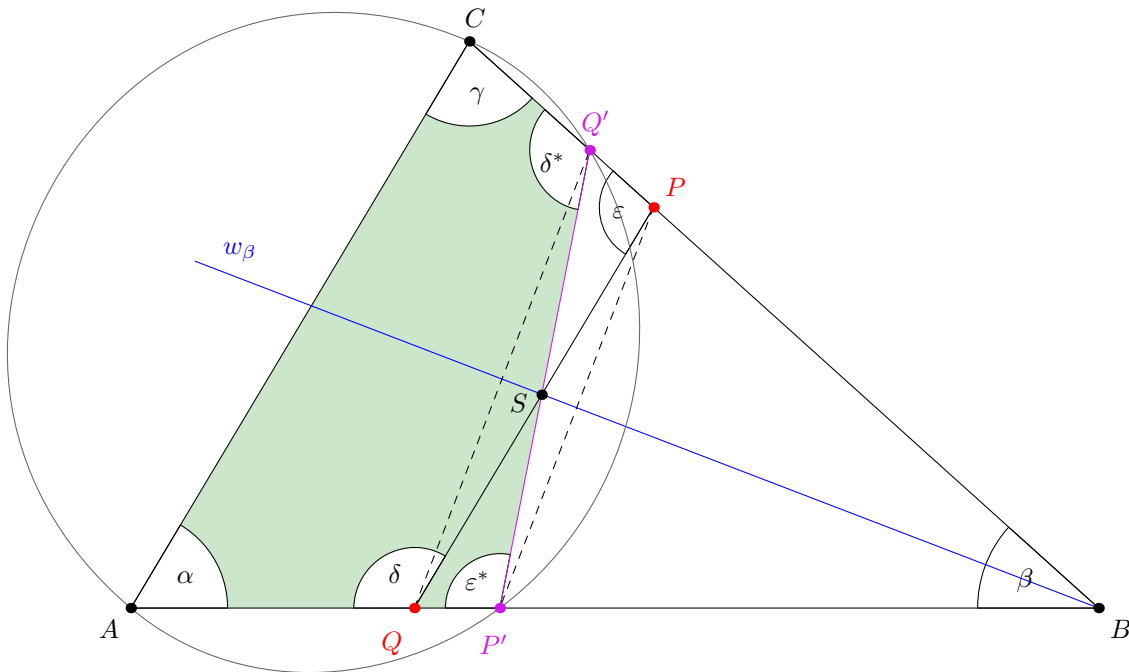


Abbildung 9.16: Vom Trapez zum Sehnenviereck

Wir starten in der Abb. 9.16 mit dem Trapez $AQPC$ (vgl. Abb. 9.15).

Nun gilt: $\alpha + \delta = \gamma + \varepsilon = 180^\circ$ (siehe auch Abb. 9.14).

Das Viereck $AP'Q'C$ haben wir durch Spiegelung der Punkte P und Q an der Winkelhalbierenden w_β erzeugt.

Dann sind die beiden Dreiecke $QP'S$ und SPQ' kongruent; d.h. das Trapez $AQPC$ und das Viereck $AP'Q'C$ besitzen den gleichen Flächeninhalt.

Aufgrund der Winkeltreue jeder Achsenspiegelung gilt nun:

$\varepsilon = \varepsilon^*$ und $\delta = \delta^*$ (vgl. Abb. 9.14).

Daraus folgt: $\alpha + \delta^* = \gamma + \varepsilon^* = 180^\circ$. Damit erfüllt das Viereck $AP'Q'C$ die Eigenschaften eines Sehnenvierecks, das stets einen Umkreis besitzt. Für die dargestellte Teilung gibt es nur diese eine Lösung.

Ein letzter Anhaltspunkt

Es gab da in dem Grundstück ABC eine aufragende Felsnadel F , die keiner der Erben auf seiner Flächenhälfte haben wollte. Also einigte man sich dahingehend, dass die Grenze $[PQ]$ durch F verlaufen sollte:

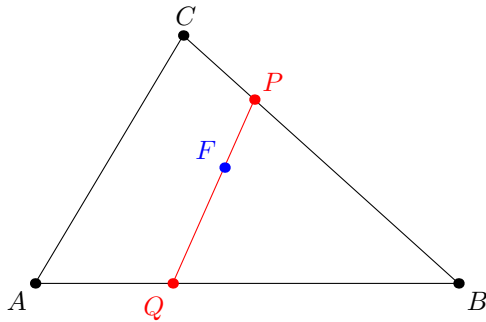


Abbildung 9.17: Die Halbierung mittels einer Geraden durch den Punkt F

Herr Li Neal, ein externer Mitarbeiter in der Vermessungsabteilung, war schnell mit einer Idee bei der Hand: „Wir müssen nur den Punkt F mit dem Schwerpunkt S des Dreiecks verbinden. Die Gerade SF liefert dann $[PQ]$. Für $F = S$ gibt es sogar drei Lösungen, nämlich die drei Seitenhalbierenden.“

Sein Motiv ist klar: Aus dem Physikunterricht wissen wir, dass sich das Dreieck ABC auf jeder seiner Schwerlinien (hier FS) balancieren lässt:

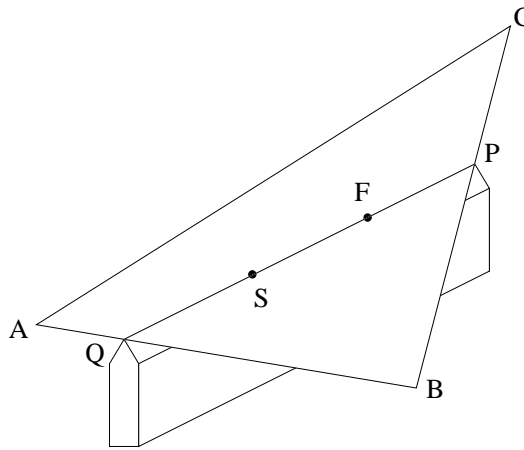


Abbildung 9.18: Das Dreieck ABC kippt nicht

Wie es die Abb. 9.19 zeigt, kommen wir leider mit diesem Vorschlag nicht weiter:

Wir wählen $S \in PQ$ und $[PQ] \parallel [AB]$.

Durch Spiegelung des Mittelpunktes M_c am Schwerpunkt S erzeugen wir das Parallelogramm $M_cPM'_cQ$. Die Punkte M'_c , S und M_c dritteln dann die Seitenhalbierende $[CM_c]$.

$$\Rightarrow A_{\Delta QM'_cC} = A_{\Delta QSM'_c} = A_{\Delta QM_cS}.$$

Die Dreiecke AM_cQ und QM_cS mit den Grundlinien $[AM_c]$ bzw. $[QS]$ sind gleich hoch.

Da jedoch $\overline{AM_c} > \overline{QS}$ ist, gilt: $A_{\Delta AM_cQ} > A_{\Delta QM_cS}$.

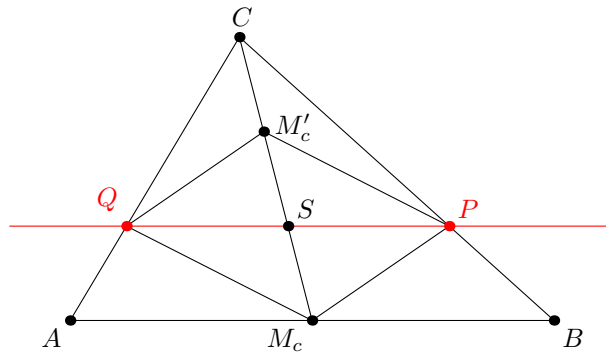


Abbildung 9.19: Eine spezielle Schwerlinie

Also hat das Trapez AM_cSQ einen größeren Flächeninhalt als das Dreieck QSC . Weil sich rechts von $[CM_c]$ Analoges abspielt, ist $[PQ]$ hier keine Flächenhalbierende.

Warum gelingt dann trotzdem der Balanceakt in Abb. 9.18?

Das Dreieck ABC wird z.B. aus Pappe zugeschnitten. Das Dreieck QBP kompensiert sein Untergewicht gegenüber dem Viereck $AQPC$ dadurch, dass sein Schwerpunkt einen größeren Abstand zur Drehachse PQ besitzt als der Massenmittelpunkt des Restes vom Dreieck ABC . Also wird das ganze vom Hebelgesetz gerichtet.

Die Geschichte mit dem Parallelogramm brachte aber Herrn Li auf eine andere Idee (siehe Abb. 9.20).

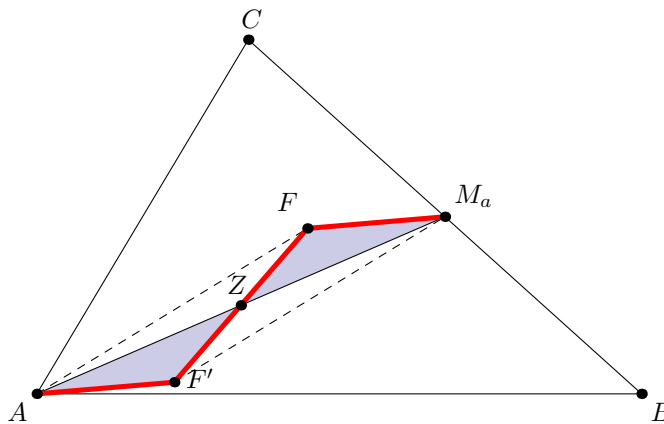


Abbildung 9.20: Die Zweitidee von Herrn Li

Er meinte: „Der Punkt Z ist der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden $[AM_a]$. Das Spiegelbild des Punktes F an Z ist der Punkt F' . Dadurch entsteht das Parallelogramm $AF'M_aF$ mit den flächengleichen Dreiecken $AF'Z$ und ZM_aF . Also halbiert der Streckenzug $A - F' - F - M_a$ das Dreieck ABC . – Na?“ Als Antwort zitieren wir den Dichter und Arzt Dr. Carl Arnold Kortum (1745-1824). In seiner von Wilhelm Busch (1832-1908) illustrierten „Jobsiade“ heißt es:

Über diese Antwort des Kandidaten Jobses
 Geschah allgemeines Schütteln des Kopfes
 Der Inspektor sprach zuerst „Hem, hem!“
 Darauf die andern secundo ordinem.

Was nun? In der Figur 9.19 erkennen wir die ähnlichen Dreiecke ABC und QPC . Auch die Tatsache, dass der Schwerpunkt eines Dreiecks jede Seitenhalbierende im Verhältnis $1 : 2$ teilt, lässt sich mit Ähnlichkeitssätzen begründen. Ein herausragender Virtuose in der Proportionenlehre war EUKLID (ca. 300 v.Chr.). Er hatte das Problem der Halbierung einer Dreiecksfläche durch eine Strecke, die durch einen festen Punkt im Inneren eines Dreiecks verläuft, gelöst.

P. Schreiber hat dessen Lösungsstrategie in [8] dokumentiert:

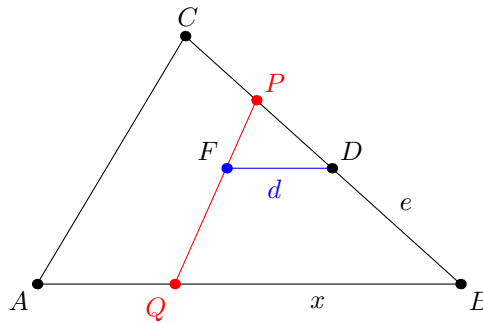


Abbildung 9.21: Die Strategie von EUKLID

Die Parallele durch den Punkt F zur Seite $[AB]$ schneidet die Seite $[BC]$ im Punkt D . Dann sind $d = \overline{FD}$ und $e = \overline{BD}$ bekannte Streckenlängen. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$t = \overline{BP}$ und $x = \overline{BQ}$, $a = \overline{BC}$ und $c = \overline{AB}$.

$\triangle PFD \sim \triangle QBP$: $\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{QB}}$ und damit: $\frac{t - e}{t} = \frac{d}{x}$.

$\Leftrightarrow x(t - e) = dt \mid \cdot x \Leftrightarrow tx \cdot x - ex^2 = d \cdot tx$.

Mit $tx = \frac{1}{2}ac$ folgt: $\frac{1}{2}ac \cdot x - ex^2 = \frac{1}{2}ac \cdot d$.

Wir erhalten die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{ac}{2e} \cdot x + \frac{ac}{2e} \cdot d = 0,$$

deren Koeffizienten nur aus bekannten Streckenlängen bestehen.

In [8] heißt es weiter: „Euklid konstruiert nun eine Lösung x dieser Gleichung nach den Methoden der geometrischen Algebra. Aus der Lösungsmethode geht hervor, dass der Faktor $\frac{1}{2}$ durch jeden beliebigen Faktor [Anm.: Der Faktor sollte im Intervall $[0, 1]_{\mathbb{R}}$ liegen. d. Verf.] ersetzt werden kann.“

Auf unserem Lösungsweg müssen wir zunächst die Koeffizienten $\frac{ac}{2e}$ und $\frac{ac}{2e} \cdot d$ konstruieren. Die Darstellung von Produkt- und Quotientenwerten wird in der Abb. 9.22 durch Ähnlichkeitssätze möglich:

Es gilt $[HL] \parallel [H'L']$.

Mit $\overline{GL'} = 1 \text{ LE}$, $u = \overline{GL}$, $y = \overline{GH}$ und $z = \overline{GH'}$ gilt einerseits:

$$\frac{u}{1} = \frac{y}{z} \Leftrightarrow u = \frac{y}{z}.$$

Somit ist die Konstruktion eines Quotientenwertes u aus dem Dividenten y und dem Divisor z vorgeführt.

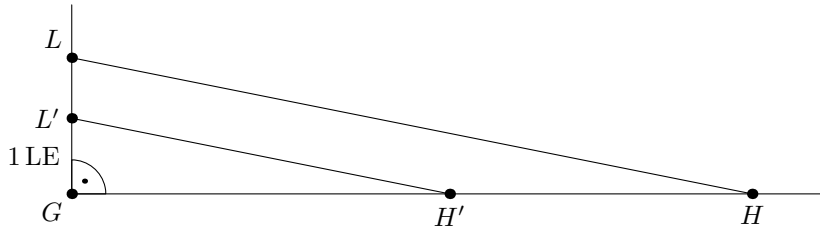


Abbildung 9.22: Die Darstellung von Produkt- und Quotientenwerten

Andererseits gilt: $y = u \cdot z$. Damit wird der Produktwert y aus seinen Faktoren u und z konstruiert.

Wir haben damit eine Gleichung der Form $x^2 - px + q = 0$ mit $p = \frac{ac}{2e}$ und $q = \frac{ac}{2e} \cdot d$ vor uns, wobei p und q als konstruiert gelten. An dieser Stelle trennt sich unser Lösungsweg von dem EUKLIDS.

Über die Lösbarkeit quadratischer Gleichungen entscheidet die Diskriminante

$$D^* = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - 4q = \frac{a^2c^2}{4e^2} - \frac{2ac}{ed}.$$

Damit die Konstruktion der Strecke $x = [BQ]$ möglich ist, muss

$$\frac{a^2c^2}{4e^2} - \frac{2ac}{ed} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{ac}{2e} \left(\frac{ac}{2e} - 4d\right) \geq 0 \Leftrightarrow ac \geq 8de \text{ gelten.}$$

Für den Spezialfall $e = \frac{a}{2}$ müsste $d \leq \frac{c}{4}$ werden.

Für $d \geq \frac{c}{4}$ schneiden wir dann halt die Parallele zu $[AB]$ durch den Punkt F mit der Seite $[AC]$.

Die Gleichung $x^2 - px + q = 0$ hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

wobei x_1 und x_2 für $p, q > 0$ stets positive Lösungen sind.

Wir setzen $w = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - (\sqrt{q})^2}$.

\sqrt{q} konstruieren wir mit dem Höhensatz des EUKLID. Danach liefert uns der Satz des PYTHAGORAS die Streckenlänge w . Für $p = 6$ und $q = 8$ ist dies in der Abb. 9.23 dargestellt:

- Es gilt: $\overline{FF_1} = q$ und $\overline{FF_2} = 1 \text{ LE}$.
- Der THALES-Kreis k_T mit dem Durchmesser $\overline{F_1F_2}$ schneidet die Sekrechte durch F im Punkt G . Dann ist $\overline{FG} = \sqrt{q}$.
- $k_1(G, r_1 = \frac{p}{2}) \cap F_1F_2 = \{S_1; S_2\}$.
- Dann ist $\overline{FS_1} = \overline{FS_2} = w$.

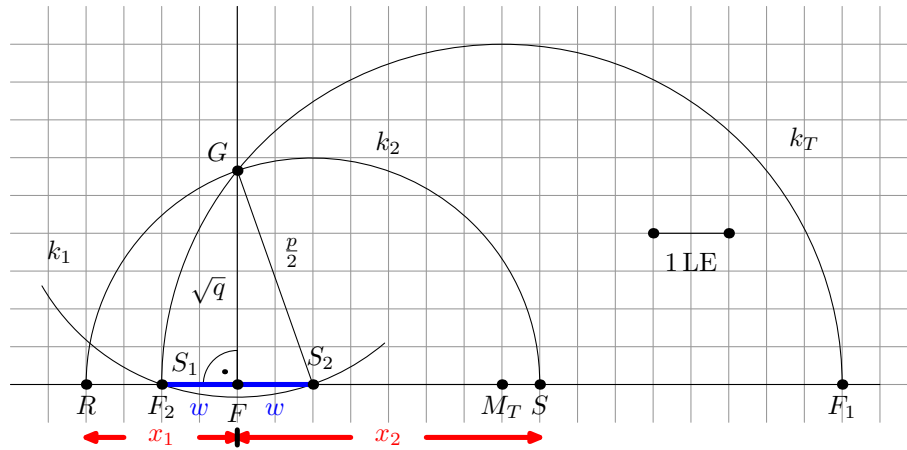


Abbildung 9.23: Die Konstruktion der Lösungen x_1 und x_2

- $k_2(S_2, r_2 = \frac{p}{2}) \cap F_1F_2 = \{R; S\}$.

Damit ist $\overline{FR} = (\frac{p}{2}) - w = x_1$ und $\overline{FS} = (\frac{p}{2}) + w = x_2$, wobei sich für $p = 6$ und $q = 8$ die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ ergeben.

Eine andere Idee hat Georg Wengler [9] in eine dynamische Konstruktion umgesetzt: Die quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 - px + q$ weist in unserem Beispiel für $p = 6$ und $q = 8$ zwei Nullstellen auf. Der zugehörige Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel, die nun so von einer Kreislinie begleitet wird, dass die Schnittpunkte mit der x-Achse für Parabel und Kreislinie stets die gleichen sind.

Für unser Zahlenbeispiel stellt sich die Situation in der Abb. 9.24 folgendermaßen dar: Der Kreis k mit dem Mittelpunkt $M(x_M | y_M)$ und dem Radius r hat die Gleichung

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2. \quad (*)$$

Er muss durch die Nullstellen $R(\frac{p}{2} - w | 0)$ und $S(\frac{p}{2} + w | 0)$ verlaufen.

Aus Symmetriegründen folgt $x_M = \frac{p}{2}$. Wir setzen zudem z.B. die Koordinaten von S in die Kreisgleichung ein:

$$\left(\frac{p}{2} + w - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y_M)^2 = r^2 \Leftrightarrow w^2 + y_M^2 = r^2 \quad \text{in } (*):$$

$$\begin{aligned} x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 - 2yy_M + y_M^2 &= \frac{p^2}{4} - q + y_M^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - px + y^2 - 2yy_M &= -q \end{aligned}$$

Wir wählen nun x und y so, dass sich y_M möglichst einfach darstellen lässt.

Zunächst setzen wir $x = 0$. Dann hängt y_M nicht mehr von p ab:

$$y^2 - 2yy_M + q = 0 \Leftrightarrow y_M = \frac{y^2 + q}{2y}.$$

$$1. \text{ Möglichkeit: } y = q \Rightarrow y_M = \frac{1 + q}{2}.$$

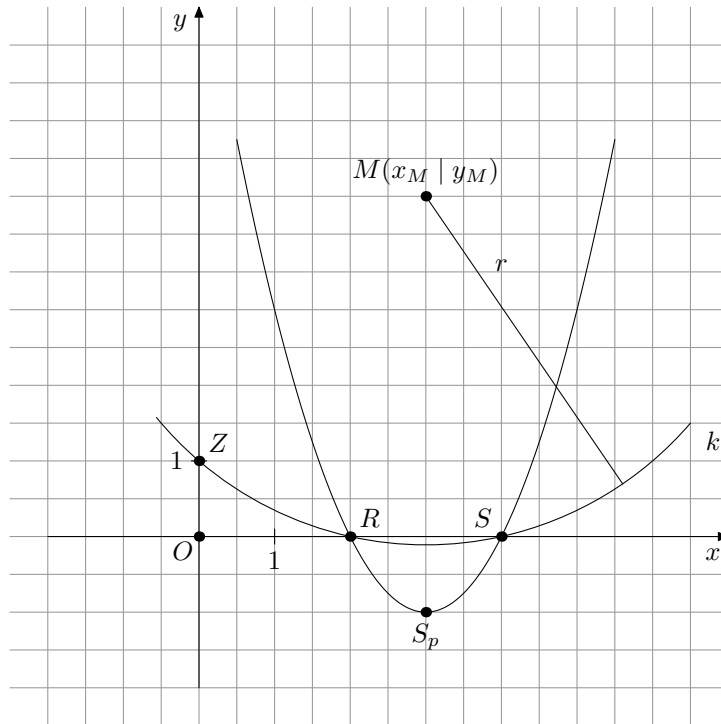


Abbildung 9.24: Parabel und Kreis schneiden sich auf der x -Achse

2. Möglichkeit: $y = 1 \Rightarrow y_M = \frac{1+q}{2}$.

Die zweite Möglichkeit verdient den Vorzug, denn dann verlaufen alle fraglichen Kreislinien durch den festen Punkt $Z(0 | 1)$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Die quadratische Gleichung $x^2 - px + q = 0$ hat für $p^2 - 4q \geq 0$ mindestens eine reelle Lösung.
- Die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt $M\left(\frac{p}{2} \mid \frac{1+q}{2}\right)$ und dem Radius $r = \overline{ZM}$ mit $Z = (0 | 1)$ berührt oder schneidet im Fall $p^2 - 4q \geq 0$ die x -Achse.
Die Abszissenwerte der zugehörigen Schnittpunkte auf der x -Achse sind in jedem Fall mit den Lösungen der obigen quadratischen Gleichung identisch.
- Im Fall $p^2 - 4q < 0$ meidet k die x -Achse. Dann sind die Lösungen der betreffenden quadratischen Gleichung nicht reell.

RÜCKSCHAU UND AUSBLICK

Alle konstruktiven Lösungen der Teilungsprobleme wurden jeweils aus einer Gleichung gewonnen, die aus elementargeometrischen Sätzen (z.B. Ähnlichkeitssätze, der Satz des PYTHAGORAS) hergeleitet worden ist.

Die Variante, dass die halbierende Strecke durch einen Punkt F im Inneren des Dreiecks ABC verlaufen soll, hat den meisten Aufwand erfordert. Vermutlich ist auch EUKLIDS

Lösung verzwick, denn nur deren erste und nicht alle Schritte werden in der einschlägigen Literatur dargelegt.

Wem's nicht genug ist: Die Bedingungen für die Halbierung eines Dreiecks ABC können wir weiter variieren:

Z.B. könnte die Teilung durch eine Gerade erfolgen, die durch einen festen Punkt außerhalb des Dreiecks verläuft.

Die nächste Forderung, dass nämlich die Trennungslinie auf einem Kreisbogen verläuft, ist mit Zirkel und Lineal allein nicht zu bewältigen: Die Kreiszahl π macht alle Bemühungen zunichte.

Kommen wir mit zwei aneinander gefügten Kreisbögen durch? Das hängt davon ab, wo sich der Punkt F aufhält und welche der drei Seitenhalbierenden als Hilfslinie fungiert: Unsere Überlegungen gründen sich auf die analoge Fortsetzung der Abb. 9.20 mit den

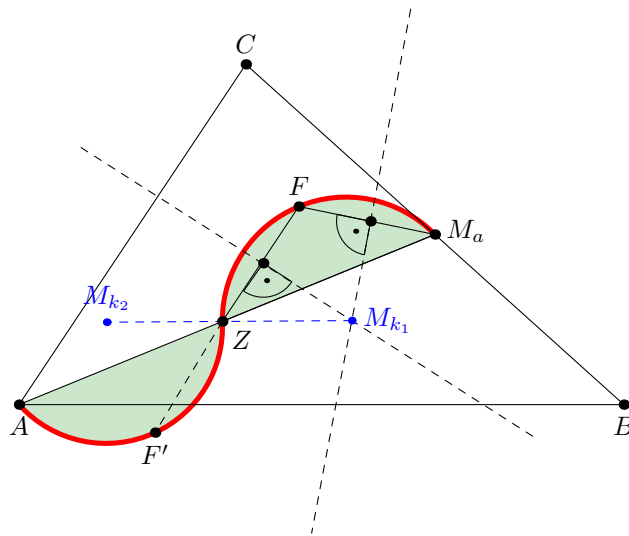


Abbildung 9.25: Zwei Kreisbögen als Grenzlinie: zunächst eine Sackgasse

zwei punktsymmetrischen Dreiecken ZM_aF und $AF'Z$: Durch die Punkte Z , M_a und F lässt sich eine eindeutig festgelegte Kreislinie legen, deren Mittelpunkt M_{k_1} als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zweier Seiten des Dreiecks ZM_aF konstruiert wird. Dadurch entsteht ein Kreissegment mit der Sehne ZM_a . Dieses Kreissegment wird dann am Punkt Z gespiegelt.

Doch der Pferdefuß ist offensichtlich: Das gespiegelte Kreissegment mit der Sehne $[AZ]$ hängt an der Grundlinie $[AB]$ durch.

Besser geht es, wenn wir uns an einer anderen Seitenhalbierenden orientieren.

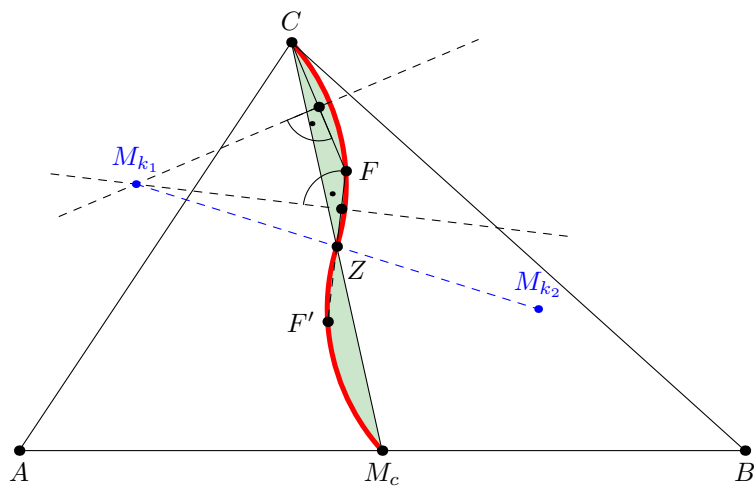


Abbildung 9.26: Zwei andere Kreisbögen als Grenzlinie

Kapitel 10

Winkelsenkrechte oder Mittelhalbierende?



Das Peverellwappen in der Harry-Potter-Serie (links) und das Siegel Salomos vertreten eine Welt der Symbole und Wahrzeichen, die In- und Umkreis von (gleichseitigen) Dreiecken darstellen.

Die Konstruktion der betreffenden Kreismittelpunkte für allgemeine Dreiecke mit Zirkel und Lineal ist im Mathematikunterricht häufig Anlass für Verwechslungen der Rollen von Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten eines Dreiecks, wobei die Gedächtnisstütze „**W**inkelhalbierende liefern den **I**nkreis“ die Entscheidung für den richtigen Konstruktionsweg erleichtert.

Und dennoch: Auch bestimmte **Mittelsenkrechte** am Dreieck sind imstande, dessen **Inkreismittelpunkt** aufzuspüren. Wir eröffnen unsere Überlegungen mit der folgenden Darstellung:

Die beiden Kreisbögen durch den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten A und B liefern die Punkte D und E .

Die beiden Kreisbögen durch D und E mit den Mittelpunkten B und A erzeugen die Punkte F und G .

m_1 und m_2 sind die Mittelsenkrechten der Strecken $[FC]$ und $[GC]$.

m_1 und m_2 schneiden sich im Punkt M_i .

Wir benutzen in der Abb. 10.1 und im Folgenden die traditionellen Bezeichnungen der Bestimmungsstücke eines Dreiecks ABC .

Es gilt $\overline{FC} = a - (c - b) = a + b - c$ und $\overline{GC} = b - (c - a) = a + b - c = \overline{FC}$.

Wir sehen:

(a) M_i ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks GFC .

(b) Das Dreieck $M_b M_a C$ ist gleichschenkelig.

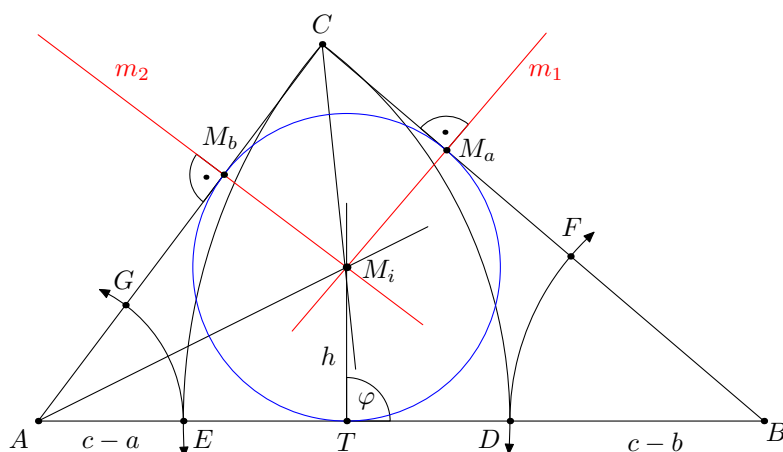


Abbildung 10.1: Der Schnittpunkt M_i zweier besonderer Mittelsenkrechte

- (c) m_1 und m_2 stehen auf den Schenkeln dieses Dreiecks M_bM_aC in den Basiseckpunkten M_a und M_b senkrecht.
- (d) Die Dreiecke M_bM_iC und M_iM_aC sind somit kongruent (s,s,w_g). Also folgt: CM_i halbiert den Winkel γ .

Wir zeigen noch: $\overline{AM_b} = (c - a) + \frac{1}{2} \cdot [b - (c - a)] = \frac{b + c - a}{2}$. (1)

Es liegt nun nahe, den Punkt T auf der Grundseite $[AB]$ so zu wählen, dass er analog zu M_a und M_b die Strecke $[ED]$ halbiert. Dann ist:

$\overline{AT} = (c - a) + \frac{1}{2} \cdot [c - (c - b) - (c - a)] = \dots = \frac{b + c - a}{2} = \overline{AM_b}$. (2)

Also ist das Dreieck ATM_b ebenfalls gleichschenkelig. m_2 steht auf dem Schenkel $[AM_b]$ senkrecht und verläuft gleichzeitig durch M_i . Analog zu (d) muss dann die Halbgerade h auf dem zweiten Schenkel $[AT]$ senkrecht stehen, damit sie durch M_i verläuft ($\varphi = 90^\circ$). Daher halbiert die Symmetrieachse AM_i den Winkel α :

Der Punkt M_i erweist sich als Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC . (3)

Wir sehen noch:

$\overline{ED} = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c = \overline{FC} = \overline{GC}$.

Die Kreisbögen schälen aus den Dreiecksseiten gleich lange Strecken heraus.

Kommentare:

Der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC lässt sich als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten konstruieren. Im Vergleich zur konventionellen Vorgehensweise scheint dieser Weg mit deutlich mehr Kreisbögen gepflastert zu sein. Wenn wir jedoch bedenken, dass uns mit Hilfe der Abb. 10.1 gleichzeitig der Inkreisradius in den Schoß fällt (er wird im Unterrichtsbetrieb häufig mit dem Endstück einer Winkelhalbierenden verwechselt), der sich sonst mit dem Zirkel nur über die Senkrechte durch M_i auf eine der Dreiecksseiten zu erkennen gibt, dann fällt die Bilanz überraschend aus aus: Wir brauchen als Vorbereitung

zur Konstruktion des Inkreises auf die herkömmliche Weise neun, aber in der Abb. 10.1 nur acht Kreisbögen.

Übrigens mischt auch bei der lehrbuchgemäßen Konstruktion der Winkelhalbierenden eine Mittelsenkrechte mit.

Warum hat sich jedoch die Mittelsenkrechten-Methode im Mathematikunterricht nie durchgesetzt? Ein Grund ist dieser:

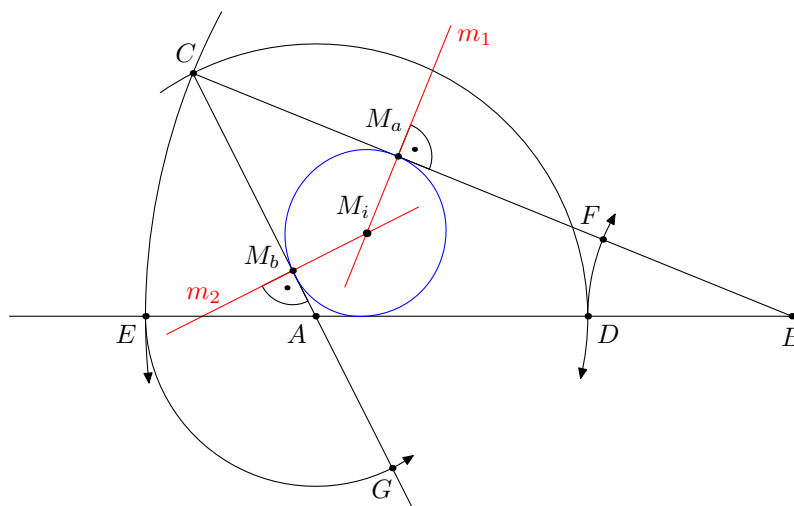


Abbildung 10.2: Ein schräger Fall

In der Abb. 10.2 greift der Kreisbogen um den Punkt B durch den Punkt C zunächst ins Leere (in einem anderen Fall könnte das gleichzeitig auch mit dem Kreisbogen um den Punkt A passieren). Erst der zur Halbgeraden verlängerte Arm der Strecke $[AB]$ fängt den Schnittpunkt E ein.

Ebenso erreichen wir den Punkt G mit dem entsprechenden Kreisbogen um A erst nach einem Ausfallschritt der Strecke $[AC]$ über A hinaus. Der Rest erfolgt wieder in geordneten Bahnen.

Diese verschiedenen Herangehensweisen strapazieren Vorstellungskraft und Durchhaltevermögen zumindest während der Hefteinträge über die Maßen.

In Formelsammlungen finden wir für den Flächeninhalt A eines Dreiecks ABC mit dem Inkreisradius ρ und dem Umkreisradius r :

$$A = \frac{1}{2}\rho \cdot (a + b + c) = \frac{abc}{4r} \quad \Rightarrow \quad 2r\rho = \frac{abc}{a + b + c}.$$

ALTERNATIVE KONSTRUKTIONSWEGE ZUM INKREIS

Der Betrachter durchschaut sicher in den folgenden Darstellungen das Gestrüpp aus Konstruktionslinien, wobei wir in jeder Phase die Dominanz gleichschenkliger Dreiecke mit Händen greifen können:

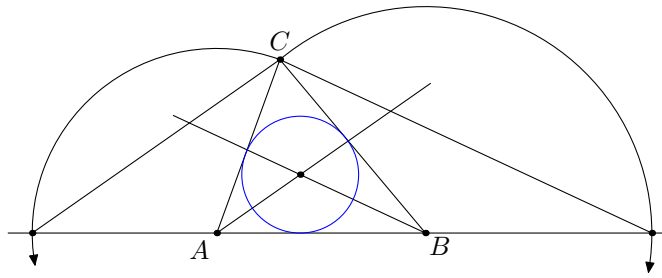


Abbildung 10.3: Kreisbögen nach unten

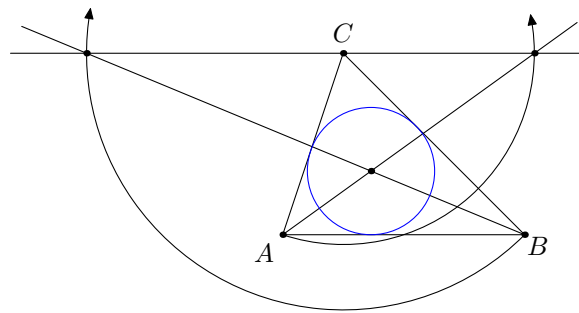


Abbildung 10.4: Kreisbögen nach oben

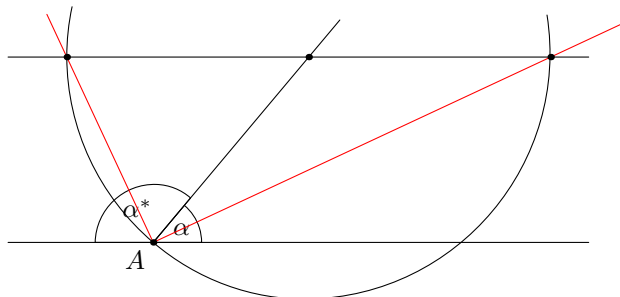


Abbildung 10.5: Der Inkreis hat Pause

Kapitel 11

Schleifen

Viele Mathematik-Lehrbücher bieten Aufgaben an, die Gleichungen von Spurkurven zum Ziel haben. Spurkurven (auch „Trägergraphen“ oder „Ortslinien“ genannt) entstehen dann, wenn sich ein Punkt („Urpunkt“) in der Zeichenebene so bewegt, dass sich ein anderer, von ihm abhängiger Punkt („Bildpunkt“) entsprechend mitbewegt. Dessen „Fußstapfen“ lassen sich oft mit Hilfe einer Funktionsgleichung beschreiben

EINE STANDARDAUFGABE

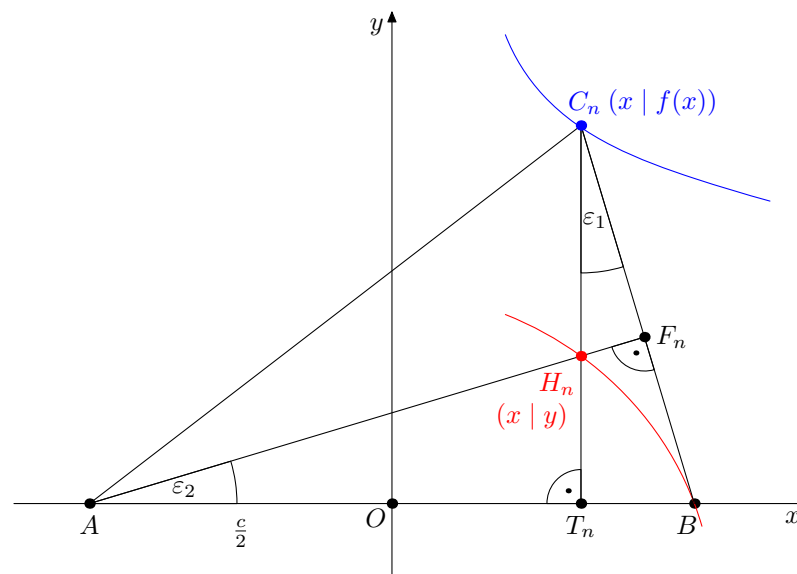


Abbildung 11.1: Der Höhenschnittpunkt geht auf Wanderschaft

Aufgabe:

In der Abb. 11.1 wandern die Eckpunkte $C_n(x | f(x))$ von Dreiecken ABC_n mit der Basislänge $\overline{AB} = c$ auf dem Graphen einer Funktion $f(x)$. Berechne die Gleichung des Graphen, den die Höhenschnittpunkte $H_n(x | y)$ der Dreiecke ABC_n dabei erzeugen.

Lösung:

Die Scheitel der (spitzen) Winkel $T_n C_n B$ und BAF_n stehen paarweise aufeinander senkrecht.

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_n B C_n \sim \Delta A B F_n \sim \Delta A T_n H_n \sim \Delta H_n F_n C_n.$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{T_n C_n}}{\overline{A T_n}} = \frac{\overline{T_n B}}{\overline{H_n T_n}}; \text{ und damit: } \frac{f(x)}{\frac{c}{2} + x} = \frac{\frac{c}{2} - x}{y}.$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{f(x)} + \frac{c^2}{4 \cdot f(x)} = \frac{-x^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{f(x)}.$$

$$\text{Spezialfall: } |f(x)| = \text{konstant} = k \quad (\text{wobei } k \neq 0 \text{ gelten soll}): \quad y = \mp \frac{1}{k} \cdot x^2 \pm \frac{c^2}{4k}.$$

Wenn also die Punkte C_n auf einer Parallelen zur x -Achse mit dem Abstand $|k|$ wandern, dann bewegen sich die Punkte H_n auf einer Parabel mit dem Scheitel $S(0 | \pm \frac{c^2}{4k})$.

EIN QUADRAT WÄCHST ÜBER SICH HINAUS

Die obige Aufgabe variieren wir nun auf die folgende Weise:

Die Lage des Schnittpunktes H der drei Höhen von **gleichschenkligen Dreiecken** $A_n B_n C_n$ mit den Grundseiten $[A_n B_n]$ sei **fest vorgegeben**, ebenso wie der Abstand d dieses Punktes H zu $[A_n B_n]$.

Ermittle für alle möglichen **variablen Basislängen** $c = \overline{A_n B_n}$ die Ortslinie s der Fußpunkte der Dreieckshöhen auf die beiden Schenkel der Dreiecke $A_n B_n C_n$ oder auf deren geradlinige Verlängerung.

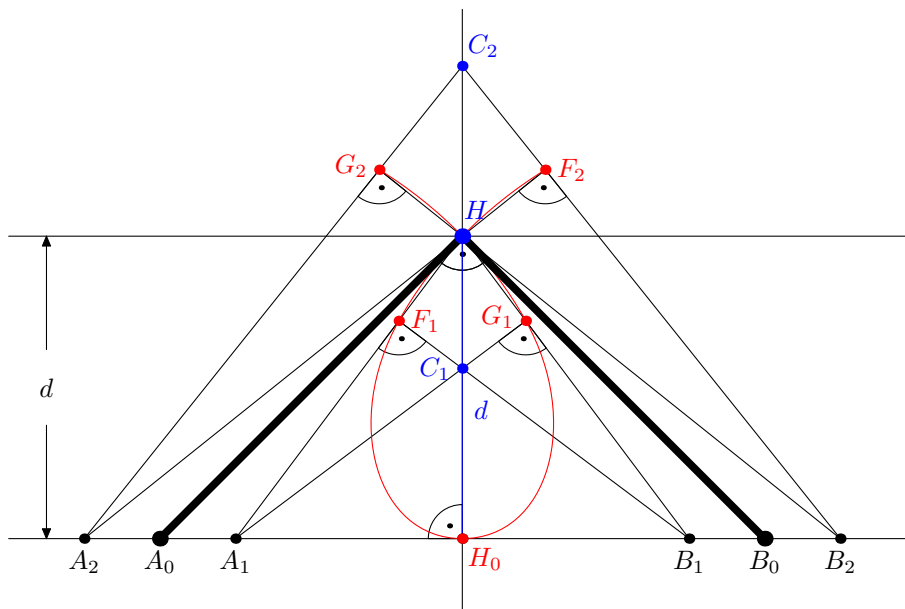


Abbildung 11.2: Der feste Höhenschnittpunkt H in gleichschenkligen Dreiecken

Die Abb. 11.2 verdeutlicht wieder die drei verschiedenen elementargeometrischen Fälle:

- Beim (gleichschenklig-) rechtwinkligen Dreieck $A_0B_0C_0$ liegt der Höhenschnittpunkt H auf einem Eckpunkt des Dreiecks.
- Für alle $\overline{A_nB_n} < \overline{A_0B_0}$ liegt der Höhenschnittpunkt H außerhalb der betreffenden (stumpfwinkligen) Dreiecke $A_nB_nC_n$.
- Für alle $\overline{A_nB_n} > \overline{A_0B_0}$ liegt der Höhenschnittpunkt H innererhalb der betreffenden (spitzwinkligen) Dreiecke $A_nB_nC_n$.

Wenn die Basislängen $\overline{A_nB_n}$ zunehmen, dann wandern die Höhenfußpunkte F_n bzw. G_n auf einer Ortslinie, die einer Schleife gleicht. Der Grenzfall $\overline{A_nB_n} = 0$ LE drängt die betreffenden Höhenfußpunkte in den Punkt H_0 . Dieser Punkt stellt demnach den tiefsten Punkt der Ortslinie dar. Das zugehörige Dreieck entartet zur Halbgeraden $[H_0H]$.

Da es die folgenden Überlegungen nur auf die Eigenschaften dieses Trägergraphen abgesehen haben, beschränken wir uns auf die Darstellung der Höhenfußpunkte allerdings in einem größeren Bereich. Gleichzeitig betten wir die Darstellung in ein Koordinatensystem ein, wobei der feste Höhenschnittpunkt H im Ursprung liegt:

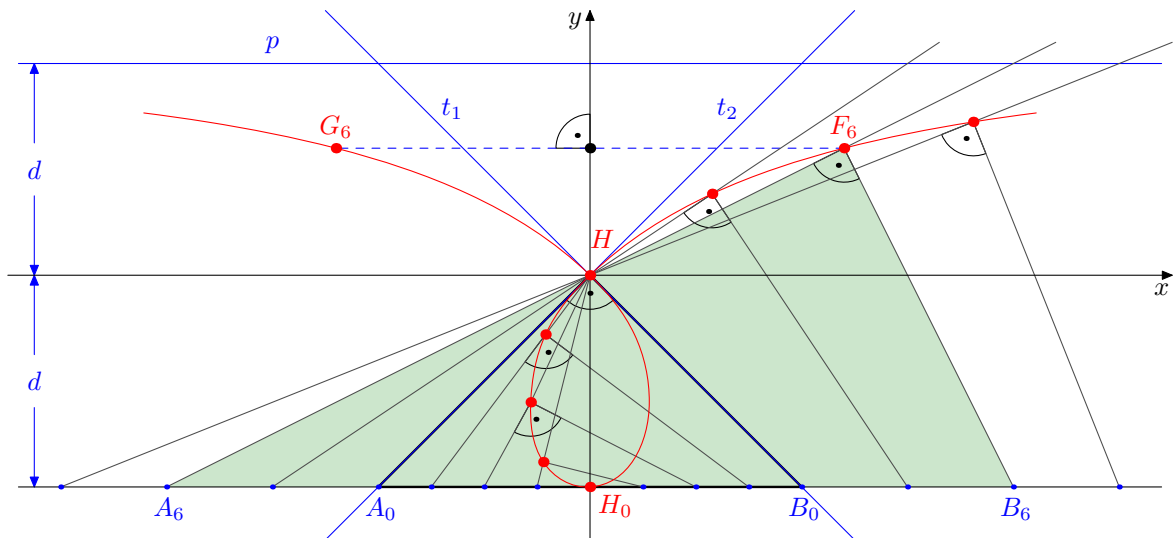


Abbildung 11.3: Die Darstellung des Trägergraphen der Höhenfußpunkte

Zur Verdeutlichung der Entstehung der Spurkurve haben wir nur das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck A_0B_0H eingezeichnet. Stellvertretend für alle Höhenfußpunkte F_n haben wir die Punkte $F_1; \dots; F_7$ herausgegriffen. Die zweite Menge der Höhenfußpunkte G_n wird durch die Spiegelbilder aller Punkte F_n an der y -Achse dargestellt.

Wir stellen fest, dass die beiden Winkelhalbierenden t_1 und t_2 des I. und III. bzw. II. und IV. Quadranten die Tangenten des Trägergraphen im Punkt H sind.

Wir vermuten, dass sich die Punkte F_n und G_n mit wachsenden Basislängen $\overline{A_nB_n} > 2d$ der Parallelen p mit der Gleichung $y = d$ immer mehr nähern.

Für eine vereinfachte punktweise Konstruktion der Spurkurve lassen wir überflüssige Details in der Abb. 11.3 weg:

- Zeichne eine Gerade g (hier: die x -Achse) und einen festen Punkt H , der nicht auf g liegt.

- Zeichne die Senkrechte h auf die Gerade g durch den Punkt H . $h \cap g = H_0$.
- Wähle einen Punkt $A \in g$ zunächst mit $A \neq H_0$. Zeichne die Gerade AH .
- Das Spiegelbild des Punktes A an der Geraden h ist der Punkt B .
- Zeichne die Senkrechte g_\perp auf AH durch den Punkt B .
Dann liegt der Punkt $F = g \cap g_\perp$ auf der Spurkurve.
- Der entsprechende Punkt G ist das Spiegelbild des Punktes F an h .

Diese Vorgehensweise ermöglicht uns mit Hilfe der Abb. 11.3, die Gleichung der Spurkurve zu berechnen:

Es gilt: $O = H = (0 \mid 0)$, $A_n(-\frac{c}{2} \mid -d)$ und $B_n(\frac{c}{2} \mid -d)$, mit $c, d > 0$.

$$A_n H = g: y = mx \quad \wedge \quad A_n \in g: -d = m \cdot \left(-\frac{c}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{2d}{c}.$$

$$g: y = \frac{2d}{c} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2dx}{y}. \quad (*)$$

$$h \perp g: m_\perp = -\frac{c}{2d} \quad \Rightarrow \quad h: y = -\frac{c}{2d}x + t.$$

$$\text{Und mit } B_n\left(\frac{c}{2} \mid -d\right) \in h \text{ folgt: } -d = -\frac{c}{2d} \cdot \frac{c}{2} + t.$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{c^2}{4d} - d = \frac{c^2 - 4d^2}{4d} \quad \text{und damit gilt für } h: y = -\frac{c}{2d} \cdot x + \frac{c^2 - 4d^2}{4d} \Big| \cdot 4d.$$

$$4dy = -2cx + c^2 - 4d^2. \quad \text{Mit } (*) \text{ ergibt sich:}$$

$$4dy = \frac{-4dx}{y} \cdot x + \frac{4d^2x^2}{y^2} - 4d^2 \Big| \cdot \frac{y^2}{4d}$$

$$y^3 = -x^2y + dx^2 - dy^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2(y + d) = x^2(d - y) \quad \Leftrightarrow \quad |x| = |y| \sqrt{\frac{d+y}{d-y}}. \quad (1)$$

Der Nenner im Radikanden macht deutlich, dass jedem Punkt des Trägergraphen der Aufenthalt über der Parallelen p mit der Gleichung $y = d$ oder auf ihr verwehrt ist.

Wir berechnen noch die Koordinaten der Schnittpunkte F_n von g und h in Abhängigkeit von c :

$$g \cap h: \quad \frac{2d}{c} \cdot x = -\frac{c}{2d} \cdot x + \frac{c^2 - 4d^2}{4d}$$

$$x \left(\frac{2d}{c} + \frac{c}{2d} \right) = \frac{c^2 - 4d^2}{4d}$$

$$x \cdot \frac{c^2 + 4d^2}{4cd} = \frac{c^2 - 4d^2}{4cd} \Big| \cdot 4cd$$

usw.

$$\text{Und schließlich:} \quad x = \frac{c}{2} \cdot \frac{c^2 - 4d^2}{c^2 + 4d^2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - d^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + d^2}. \quad (**)$$

Aus der Gleichung für die Gerade g erhalten wir $y = d \cdot (x : \frac{c}{2})$. Mit (**) ergibt sich:

$$y = d \cdot \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - d^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + d^2} = d \cdot \frac{1 - \left(\frac{2d}{c}\right)^2}{1 + \left(\frac{2d}{c}\right)^2}.$$

$$\text{Wegen } \lim_{c \rightarrow \infty} 1 \mp \left(\frac{2d}{c}\right)^2 = 1 \quad \text{folgt:} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} y = d.$$

Das bedeutet, dass die Parallele p mit der Gleichung $y = d$ die Asymptote der Spurkurve ist.

Wir setzen $\frac{c}{2} = \lambda > 0$ und schreiben so die Gleichung dieser Spurkurve in der Parameterform auf:

$$x = \pm \lambda \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2} \quad \text{und} \quad y = d \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2}. \quad (2)$$

Um diese Spurkurve namentlich einzuordnen und deren weitere Eigenschaften zu erforschen, ist es günstig, den Graphen an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten zu spiegeln; das bedeutet rechnerisch: In den Gleichungen (1) und (2) werden die Variablen x und y getauscht. Das sieht dann so aus:

$$\text{Mit (1) ergibt sich:} \quad \boxed{y^2(d - x) = x^2(d + x)} \quad (3)$$

Endlich ist es gewiss: Dieses schleifenförmige Gebilde ist eine Strophoide (*griech.* „strophe“: Drehung, Wendung auch im Zusammenhang mit der Strophe in Gedichten oder Liedern).

$$\text{Mit (2) ergibt sich:} \quad \boxed{y = \pm \lambda \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2}} \quad \text{und} \quad \boxed{x = d \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2}}.$$

Nun leiten wir noch mit (2) die Gleichung der Strophoide in Polarkoordinaten her:

$$x = r \cos \varphi = d \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2} \quad \wedge \quad y = r \sin \varphi = \lambda \cdot \frac{\lambda^2 - d^2}{\lambda^2 + d^2} \quad \Rightarrow \quad \tan \varphi = \frac{\lambda}{d}$$

$$r \cos \varphi = d \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1}{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 + 1}$$

$$r \cos \varphi = d \cdot \frac{\tan^2 \varphi - 1}{\tan^2 \varphi + 1} = d \cdot \frac{\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} - 1}{\frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + 1}. \quad \text{Wir erweitern mit } \cos^2 \varphi :$$

$$r \cos \varphi = d \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

$$r \cos \varphi = -d \cdot \cos 2\varphi.$$

Dann ist:

$$\boxed{r = -d \cdot \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}} \quad (4)$$

Der Graph dazu sieht so aus:

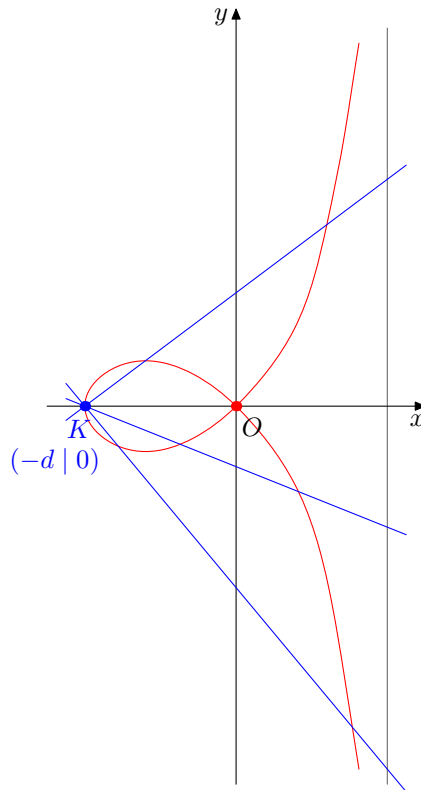


Abbildung 11.4: Die Darstellung einer Strophoide

Die erwirtschafteten Formelgleichungen ermöglichen weitere Erkenntnisse.

Wir bringen ein Geradenbüschel $g(m)$ mit der Gleichung $y = m \cdot (x + d)$ und dem Büschelpunkt $K(-d | 0)$ ins Spiel (vgl. Abb. 11.4) und schneiden es mit der Strophoide:

$$\begin{aligned} \text{Mit (3):} \quad & y^2(d - x) = x^2(d + x) \quad \wedge \quad y = m(x + d) \\ & m^2(x + d)^2(d - x) = x^2(d + x) \\ \Leftrightarrow & m^2(d^2 - x^2) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 d^2 = x^2(1 + m^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |x| = d \cdot \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x|}{d} = \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad (5)$$

Nachdem der Graph früher durch die Konstruktion von Höhenfußpunkten zustande kam (vgl. Abb. 11.3), ermöglicht jetzt die Gleichung (5) die Anwendung des Vierstreckensatzes und damit eine andere punktweise Konstruktion der Strophoide:

- Zeichne den Punkt K mit $\overline{OK} = d$ ein. Errichte das Quadrat über der Strecke $[OK]$.
- Zeichne eine Gerade g_1 durch den Punkt K , die nicht auf der x -Achse liegt. Zeichne das grüne Steigungsdreieck der Geraden g_1 mit der Kathetenlänge $\overline{KQ_1} = 1 \text{ LE}$ im Punkt K ein.

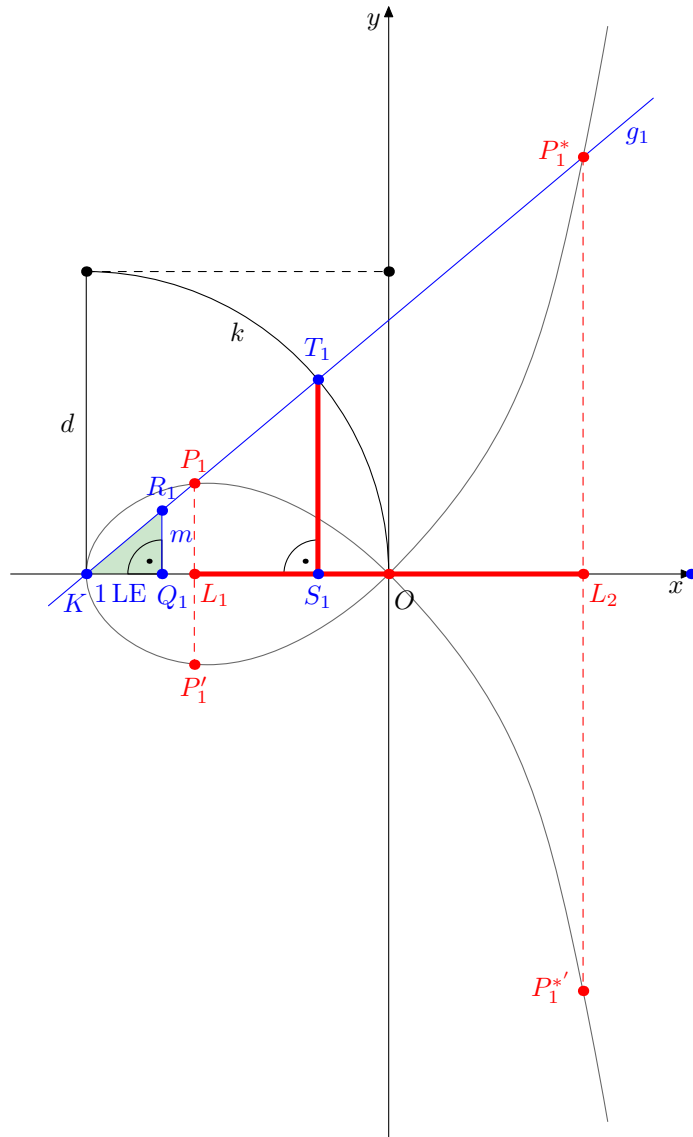


Abbildung 11.5: Die Strophoide wird erneut punktweise konstruiert

- Zeichne den Viertelkreis k in das Quadrat. $k \cap g_1 = \{T_1\}$.
- Das Lot vom Punkt T_1 auf die x -Achse erzeugt den Fußpunkt S_1 .

Die beiden Dreiecke KQ_1R_1 und KS_1T_1 sind zueinander ähnlich:

$$\frac{\overline{S_1T_1}}{\overline{KT_1}} = \frac{\overline{Q_1R_1}}{\overline{KR_1}} \Leftrightarrow \frac{\overline{S_1T_1}}{d} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \Leftrightarrow \overline{S_1T_1} = d \cdot \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Der Vergleich mit (5) macht deutlich, dass die Strecke $\overline{S_1T_1}$ den x -Wert zumindest eines Punktes auf der Strophoide liefert. Damit können wir die punktweise Konstruktion des Graphen vollenden:

- Zeichne die Punkte L_1 und L_2 so auf die x -Achse, dass $|x| = \overline{OL_1} = \overline{OL_2}$ gilt.

- Die beiden Senkrechten auf die x -Achse durch die Punkte L_1 und L_2 schneiden die Gerade g_1 in den Punkten P_1 und P_1^* .
- Die Punkte P_1' und $P_1^{*'}$ sind die Spiegelbilder der Punkte P_1 und P_1^* an der x -Achse.
- Weitere Geraden g_2, g_3, \dots durch den Punkt K liefern beliebig viele Punkte auf dieser Strophoide.

Wir machen uns nun über den Flächeninhalt her, den das tropfenförmige Gebilde („Tr“) besitzt. Ebenso ermitteln wir denjenigen Flächeninhalt, den die beiden Äste des Graphen mit ihrer Asymptote a einschließen („As“).

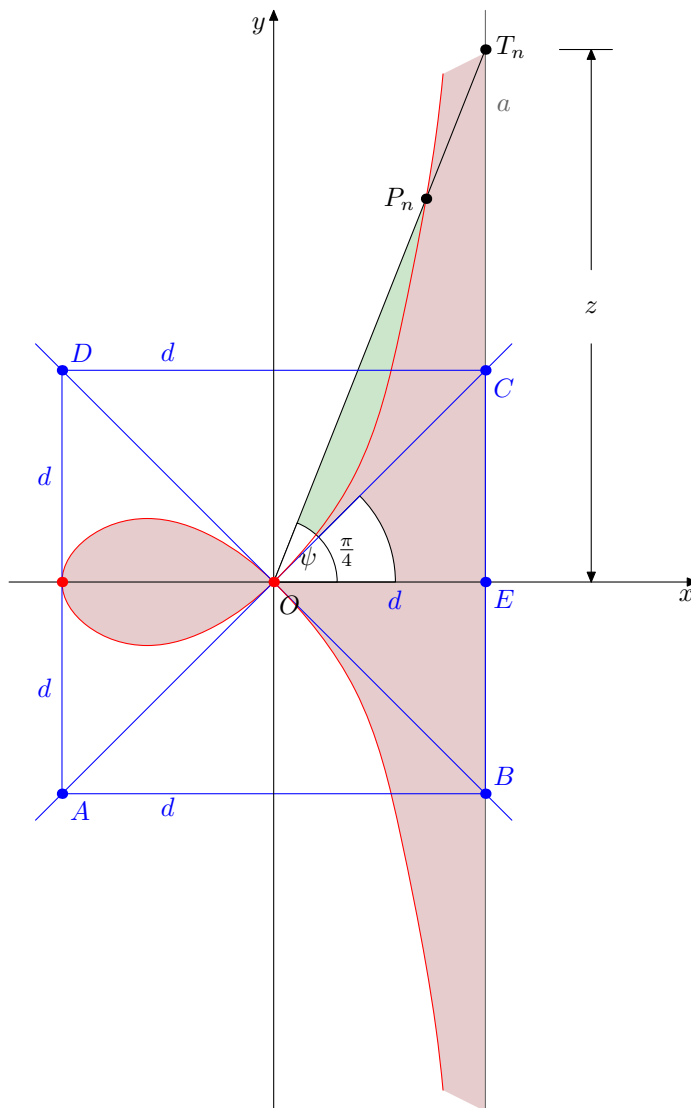


Abbildung 11.6: Die Berechnung der Inhalte der getönten Flächen

In der Abb. 11.6 wird deutlich:

Die Integralgrenzen werden durch die Richtungen der beiden Tangenten an die Kurve im Koordinatenursprung O festgelegt. Wir integrieren die Parameterdarstellung (4) mit

Hilfe der LEIBNITZschen Sektorenformel:

$$A_{Tr} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} r^2 d\varphi.$$

$$r(\varphi) = -d \cdot \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \quad \wedge \quad \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$

$$r^2(\varphi) = d^2 \cdot \frac{(2 \cos^2 \varphi - 1)^2}{\cos^2 \varphi} = d^2 \cdot \frac{4 \cos^4 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + 1}{\cos^2 \varphi}$$

$$r^2(\varphi) = d^2 \cdot \left(4 \cos^2 \varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)$$

Weil der Graph symmetrisch zur x -Achse verläuft, genügt es, die obere Hälfte zu integrieren und das Ergebnis zu verdoppeln.

$$A_{Tr} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \left(4 \cos^2 \varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi$$

Die Integration erfolgt summandenweise. Sie ist daher elementar:

$$A_{Tr} = d^2 \cdot \left[4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} - 4\varphi \Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} + \tan \varphi \Big|_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \right]$$

$$A_{Tr} = 2d^2 - \frac{d^2}{2} \cdot \pi = \left(d\sqrt{2} \right)^2 - \left(\frac{d\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \pi.$$

Geometrische Deutung:

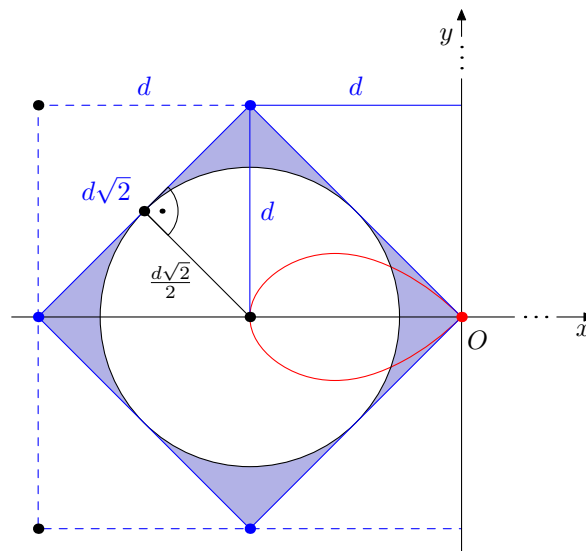


Abbildung 11.7: Gleiche Flächeninhalte

Die Fläche, die der rote Tropfen in der Abb. 11.7 einschließt, ist genauso groß wie der gesamte blaue Flächeninhalt zwischen dem Kreis mit dem Radius $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ und dem Quadrat mit der Seitenlänge $d\sqrt{2}$.

Die beiden Äste im I. und IV. Quadranten schließen zusammen mit ihrer Asymptote eine Fläche ein, die genau so groß ist wie die Kreisfläche in der Abb.11.7.

Wir berechnen nun mit Hilfe der Abb. 11.6 den Inhalt A_{As} der Fläche, den die beiden Äste der Strophoide mit ihrer Asymptote a einschließen. Dabei ist der Punkt P_n der Stellvertreter von beliebig vielen Punkten auf den beiden Ästen und der Punkt T_n der Stellvertreter entsprechender Punkte auf der Asymptote a .

In den Dreiecken OET_n gilt: $\tan \psi = \frac{z}{d} \Leftrightarrow z = d \cdot \tan \psi$.

$$\Rightarrow A_{\Delta OET_n} = \frac{1}{2} \cdot d \cdot z = \frac{1}{2} \cdot d^2 \cdot \tan \psi.$$

Der Inhalt des Segments, das die Sehnen $[OP_n]$ mit dem zugehörigen Kurvenbogen einschließen (grüne Teilfläche), wird wieder mit der LEIBNITZschen Sektorenformel berechnet:

$$A_{\text{Segment}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\psi} r^2 d\varphi.$$

Damit ergibt sich als Inhalt $A(\psi)$ der Fläche zwischen der x -Achse dem Ast der Strophoide im I. Quadranten und seiner Asymptote: $A(\psi) = A_{\Delta OET_n} - A_{\text{Segment}}$. Der gesamte Flächeninhalt zwischen den beiden Ästen und deren Asymptote ergibt sich durch Verdopplung:

$$\begin{aligned} 2A(\psi) &= d^2 \tan \psi - d^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\psi} \left(4 \cos^2 \varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi \\ &= d^2 \tan \psi - 4d^2 \left[\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\psi} + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\psi} d\varphi \right] + 4d^2 \left(\psi - \frac{\pi}{4} \right) - d^2 \tan \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\psi} \\ &= d^2 \tan \psi - 4d^2 \left[\frac{\cos \psi \sin \psi}{2} - \frac{1}{4} \right] - 2d^2 \left[\psi - \frac{\pi}{4} \right] + 4d^2 \psi - d^2 \pi \\ &\quad - d^2 \tan \psi + d^2 \end{aligned}$$

Um den gesuchten Flächeninhalt A_{As} zu berechnen, müssen sich die Punkte T_n im I. Quadranten (und ihre Spiegelbilder im IV. Quadranten) unendlich weit von der x -Achse entfernen.

Wir betrachten also den Grenzfall $\psi = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} 2A\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2d^2 - d^2\pi + \frac{1}{2}d^2\pi + 2d^2\pi - d^2\pi \\ \Rightarrow A_{As} &= 2d^2 + \frac{d^2}{2} \cdot \pi \\ &\Rightarrow \boxed{A_{As} + A_{Tr} = 4d^2 = (2d)^2} \end{aligned}$$

Die Abbildung 11.6 erzählt uns eine Geschichte:

Ein Flachsleifen-Krake (lat. *octopus politus*; erst in jüngster Zeit von den berühmten Forscher Prof. Dr. Dr. Stocupo entdeckt) langweilt sich in der drangvollen Enge des Quadrates $ABCD$, das er zunächst vollständig ausfüllt. Aus Neugier erkundet er vorsichtig

mit seinen Tentakeln eine Gegend entlang der Asymptote a so weit, bis die Spitzen seiner Fangarme mit der Unendlichkeit in Berührung kommen. In diesem denkwürdigen Augenblick hat die rot dargestellte Querschnittsfläche des Abenteurers die seiner ursprünglichen Behausung $ABCD$ wieder angenommen.

EIN KREIS ALS SCHLINGENSTELLER

Schon seit jeher deckt das „Spieglein an der Wand“ entgleiste oder ebenmäßige Gesichtszüge schonungslos auf, egal, welches Ansehen der Betrachter sonst genießt. Andererseits ist es immer wieder für die Menschen eine Belustigung, sich in Spiegeln mit gekrümmten Oberflächen zu betrachten: Die verkleinerte Welt in einer silbrig-glänzenden Christbaumkugel zum Beispiel erscheint auf merkwürdige Weise verbogen. Im Bild erscheinen manche der geraden Kanten von Gegenständen mehr oder weniger gekrümmt, wenn ihr Abstand zur Kugeloberfläche variiert. Falls der Betrachter seine Nase dicht an die Kugeloberfläche hält, ragt ihm ein klobiges Bild seines Riechkolbens entgegen.

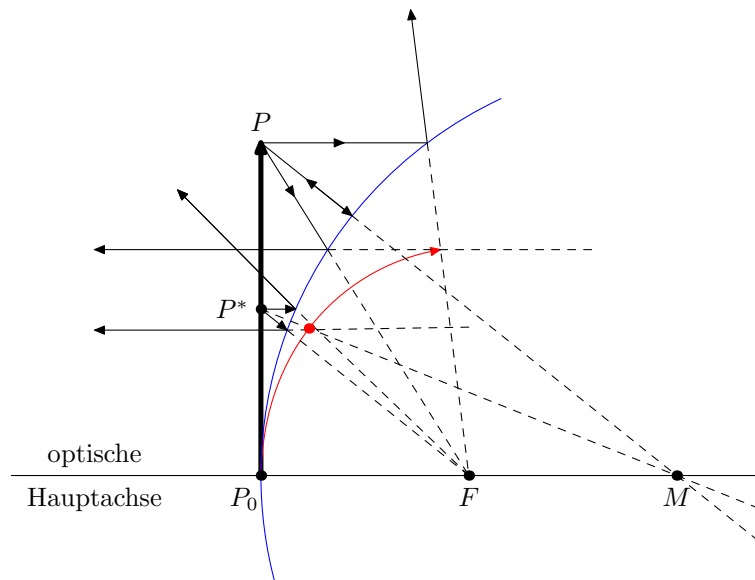


Abbildung 11.8: Ein Pfeil wird an einem Wölbspiegel abgebildet

Die Abb. 11.8 zeigt näherungsweise im Schnitt das Bild eines Pfeiles, der die Kugel berührt. Vereinfacht lässt sich ein Bildpunkt mit Hilfe dreier Abbildungsgesetze konstruieren (je zwei davon genügen, um diesen zu erzeugen):

- Parallelstrahl wird Brennpunktstrahl
 F : Brennpunkt, f : Brennweite mit $f \approx \overline{FP_0} = \overline{FM}$
- Brennpunktstrahl wird Parallelstrahl
- Mittelpunktstrahl bleibt Mittelpunktstrahl

Diese Art der Bildkonstruktion hat den Vorzug, ein realistisches Spiegelbild zu erzeugen. Manche Darstellungen in Lehrbüchern machen es sich mit einem verkleinerten virtuellen Bild, dem jegliche Krümmung fehlt, zu einfach.

Andererseits werden in der Abb. 11.8 verschiedene Mängel deutlich: Zum einen schneiden sich die von der Pfeilspitze P ausgehenden virtuellen (gestrichelt gezeichneten) Verlängerungen von Mittelpunktstrahl, Parallelstrahl und Brennstrahl nicht in einem Punkt. Zum zweiten liegt der Brennpunkt F (mit \overline{MF} = halber Krümmungsradius) nur für die Bildkonstruktion von Urpunkten, die genügend nahe an der optischen Hauptachse liegen (wie z.B. der Punkt P^*), annähernd korrekt.

Problemlos liefert uns dagegen ein ebener Spiegel seine Bilder:

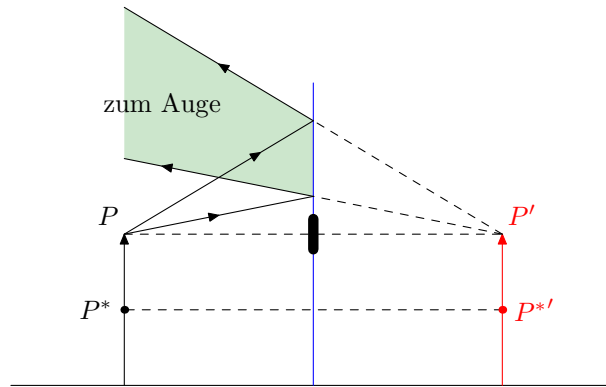


Abbildung 11.9: Das Pfeilbild an einem ebenen Spiegel

Das vom Punkt P ausgehende divergente Lichtbündel gelangt nach der Reflexion als weiterhin divergentes Lichtbündel zum Auge des Beobachters. Auf der Netzhaut wird dann das Spiegelbild P' erzeugt. Im Gegensatz zur Abb. 11.8 wird in der Abb. 11.9 mit allen Punkten auf dem Urbildpfeil ein Spiegelbild erzeugt, das mit dem Urbild deckungsgleich ist. (In der Praxis wird zudem an räumlichen Objekten „nur“ rechts mit links bzw. vorne mit hinten getauscht.)

Mit wesentlich weniger Aufwand lassen sich Bildpunkte mit Hilfe der Gesetze der Achsen Spiegelung konstruieren: Die Strecke $[PP']$ lehnt sich dabei vom Spiegel lediglich ein infinitesimales Flächenstück.

Diese Vorgehensweise übertragen wir nun auf die Abbildung eines Punktes P an einer Kreislinie k und betten das Ganze in ein Koordinatensystem ein (siehe Abb. 11.10):

Die Erzeugung des Bildpunktes P' auf diese Weise ist völlig unreal, weil der Punkt P als Lichtquelle divergente Lichtbündel aussendet, die erst nach der Reflexion auf der Netzhaut konvergieren. Oder anders gesagt: Dem Bildpunkt P' fehlt zu seiner Daseinsberechtigung ein anderer, vom Urbild P ausgehender Lichtstrahl.

Dennoch können wir die Abb. 11.10 geometrisch weiterverfolgen:

Der Punkt K liegt jeweils im Zentrum einer infinitesimalen Strecke, an der der jetzt variable Punkt P gespiegelt wird. Sein Spiegelbild ist der Punkt P' . Dann gilt:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \oplus 2 \cdot \overrightarrow{PK}$$

und damit
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \oplus 2 \cdot \begin{pmatrix} R \cos \varphi - r \cos \varphi \\ R \sin \varphi - r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Abbildungsgleichungen:

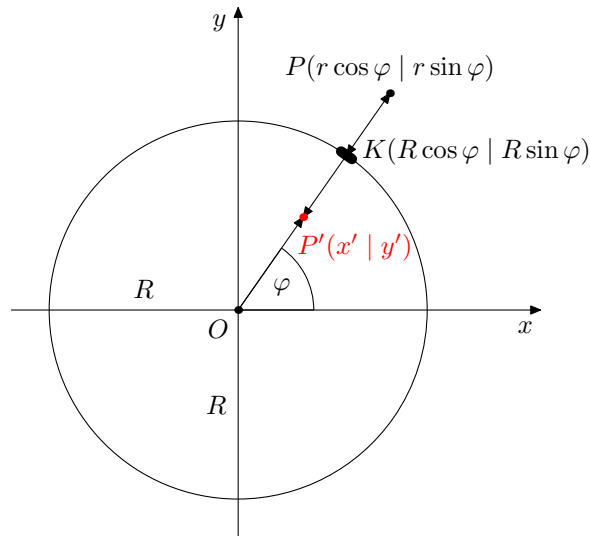


Abbildung 11.10: Die Spiegelung eines Punktes P an einer Kreislinie k

$$\begin{array}{l} x' = 2R \cos \varphi - r \cos \varphi \\ \wedge \quad y' = 2R \sin \varphi - r \sin \varphi \end{array} \quad (*)$$

Sonderfälle

1. Der Punkt P liegt auf einer Kreislinie mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r .

$$\begin{array}{l} x' = \cos \varphi \cdot (2R - r) \\ \wedge \quad y' = \sin \varphi \cdot (2R - r) \\ \Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 = (2R - r)^2 \end{array}$$

Das Spiegelbild ist, wie nicht anders zu erwarten, wieder eine Kreislinie.

2. Der Punkt P wandert auf einer Tangente t an die Kreislinie k mit dem Mittelpunkt O und dem Radius R .

Mit $\overline{PO} = r$ gilt im Dreieck TOP : $\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{R}{r} \Leftrightarrow r = -\frac{R}{\cos \varphi}$.

Dann wird aus (*):

$$\left. \begin{array}{l} x' = 2R \cos \varphi + R \\ \wedge \quad y' = 2R \sin \varphi + R \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \end{array} \right\} , \text{ wobei } \varphi \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[\mathbb{R}$$

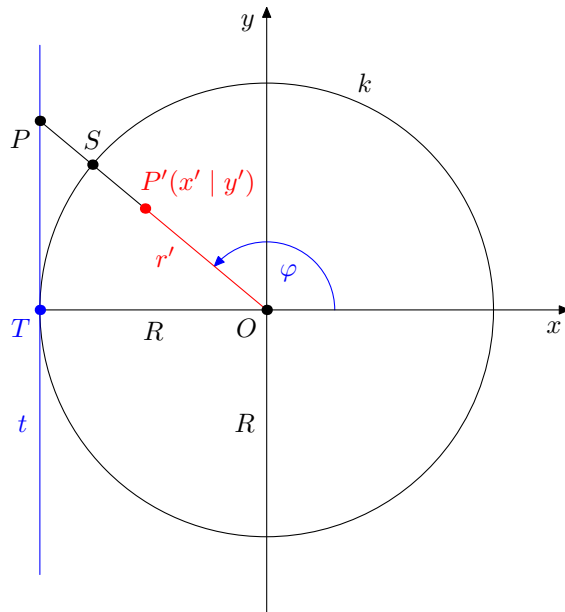


Abbildung 11.11: Die Spiegelung einer Tangente t an der Kreislinie k

Das ergibt:

$$\begin{aligned}
 x'^2 &= 4R^2 \cos^2 \varphi + 4R^2 \cos \varphi + R^2 \\
 \wedge \quad y'^2 &= 4R^2 \sin^2 \varphi + 4R^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + R^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \\
 x'^2 + y'^2 &= 4R^2 + 4R^2 \cdot \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + R^2 \cdot \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \\
 &= R^2 \cdot \frac{4 \cos^2 \varphi + 4 \cos \varphi + 1}{\cos \varphi} = \left[\frac{R}{\cos \varphi} \cdot (2 \cos \varphi + 1) \right]^2
 \end{aligned}$$

Wegen $x'^2 + y'^2 = r'^2$ und $R > 0$ gilt dann:

$$r'(\varphi) = R \cdot \left| 2 + \frac{1}{\cos \varphi} \right|. \quad (**)$$

Der zugehörige Graph ist in der Abb. 11.12 in roter Farbe dargestellt:

Anmerkung:

Die Gleichung (**) generiert für $\varphi \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[_{\mathbb{R}}$ einen weiteren Graphen, der sich an die Kreislinie $k^*(A; R^* = 2R)$ anschmiegt. Er verdankt seine Existenz der Spiegelung der Tangente t an dem zum Kreispunkt S diametral gegenüberliegenden Kreispunkt S' .

Für die rote Schleife galt: $x' = 2R \cos \varphi + R = R(2 \cos \varphi + 1)$.

Für $\varphi \in]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}[_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &\leq 0 \quad | \cdot 2R \\
 \Leftrightarrow \quad 2R \cos \varphi &\leq 0 \quad | +R \\
 \text{und damit: } x' = 2R \cos \varphi + R &\leq R
 \end{aligned}$$

$$\frac{dr'}{d\varphi} = \frac{r'}{\tan \tau}. \quad (***)$$

Wir begnügen uns zunächst mit $\varphi \in [\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}]_{\mathbb{R}}$. In diesem Intervall gilt:

$$\cos \varphi \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cos \varphi \geq -1 \Leftrightarrow 2 \cos \varphi + 1 \geq 0.$$

Im besagten Intervall gilt also:

$$\begin{aligned} r' &= R \left(2 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{dr'}{d\varphi} &= R \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

Mit (***) folgt:
$$\tan \tau = \frac{R \left(2 + \frac{1}{\cos \varphi} \right) \cdot \cos^2 \varphi}{R \cdot \sin \varphi} = 2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi.$$

Sobald Leitstrahl und Tangente zur Deckung kommen, gilt $\tau = 0$:

$$\tan(0) = 0 = 2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi (2 \cos \varphi + 1) = 0.$$

Diese Gleichung wird zwar durch die Werte $\{\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\}$ erfüllt, aber nur $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ (oder anders: $\varphi = 240^\circ$) liegt im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]_{\mathbb{R}}$.

Wegen $\cos \varphi = \cos(360^\circ - \varphi)$ ist die x -Achse die Symmetrieachse des Graphen in der Abb. 11.12. Damit spreizen sich die Tangenten der Strophoide im Koordinatenursprung von ihrem 90° -Winkel zu einem 120° -Winkel auf.

Passt ein auf diese Weise deformierter Flachsleifenkrake wieder in ein Areal, dessen Rand sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt?

Wir integrieren analog zur Abb. 11.6 im II. Quadranten: Der Flächeninhalt A_{Kopf} seines tropfenförmigen Kopfes berechnet sich aus:

$$A_{\text{Kopf}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} R^2 \cdot \left(2 + \frac{1}{\cos \varphi} \right)^2 d\varphi = R^2 \cdot \left[\frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{3} - 4 \cdot \ln(\sqrt{3} + 2) \right]$$

Nun wäre der Ausdruck

$$R^2 \cdot \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{(2R)^2 \pi}{3} + \frac{(2R)^2}{4} \sqrt{3}$$

als Sektor eines Kreises mit dem Radius $2R$ und als gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2R$ ohne weiteres mit Zirkel und Lineal darstellbar. Dem inkommensurablen Gebilde $4R^2 \cdot \ln(\sqrt{3} + 2)$ ist jedoch mit diesen Instrumenten nicht beizukommen.

Vielleicht aber kann diese Unebenheit mit Hilfe des Flächeninhaltes zwischen den beiden Ästen und deren Asymptote kompensiert werden?

Wir integrieren dazu wieder analog zur Abb. 11.6 im III. Quadranten, der allerdings die Vorzeichenumkehr verlangt:

$$\begin{aligned}
A_{\Delta} &= -R^2 \cdot \tan \psi \\
A_{\text{Segment}} &= -R^2 \cdot \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\psi} R^2 \cdot \left(4 + \frac{4}{\cos \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right) d\varphi \\
&= -R^2 \cdot \left\{ 4\varphi + 4 \ln \left| \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \tan \varphi \right\} \Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\psi} \\
A_{\Delta} - A_{\text{Segment}} &= -R^2 \tan \psi + \\
&\quad + R^2 \cdot \left\{ \left(4\psi - \frac{8\pi}{3} \right) + 4 \ln \left| \frac{\tan \left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| + \tan \psi - \tan \frac{2\pi}{3} \right\}
\end{aligned}$$

$-R^2 \tan \psi$ hebt sich gegen $R^2 \tan \psi$ weg.

Der Grenzübergang $\psi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ hat aber nun fatale Folgen, denn der Wert Logarithmusfunktion

$$\dots 4 \ln \frac{\left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right|}{2 + \sqrt{3}} \dots$$

gerät dabei außer Rand und Band. Zirkel und Lineal bleiben liegen. Schade.

Kapitel 12

Schach in Potenz

GESCHICHTLICHES

Wenn man neueren Forschungen glauben darf, ist das Schachspiel zwischen 550 und 660 n.Chr. entstanden [10]. Es gilt als sicher, dass sich dieses Spiel von Indien aus (dort hieß es „Tschaturanga“) nach Westen verbreitete [10], [11]. Einem Zeitungsbericht zufolge haben Archäologen in Süd-Usbekistan Schachfiguren entdeckt, die aus dem 2. Jahrhundert n.Chr. stammen [12].

Es ranken sich viele ähnlich klingende Erzählungen um die Ausbreitung dieses Spieles. Die folgende legt den Schauplatz nach Indien:

Vor der Residenz eines Maharadschas, der durch seinen Reichtum zum „süßen“ Nichtstun verurteilt ist, begehrt ein Mann Einlass, der ein Schachspiel bei sich trägt. Auf die neugierigen Fragen des Herrn gibt der Besucher bereitwillig Auskunft. Der Fürst erkennt sofort, welche tiefgründigen und vielfältigen Varianten dem überaus spannenden Spielablauf innewohnen und ist entzückt. Aus Freude darüber, dass ihm dieses Spiel künftig jede Langeweile vertreibt, bietet er seinem Gast die Erfüllung eines beliebigen Wunsches an. Wider Erwarten äußert sich dieser scheinbar bescheiden: „Lege auf das erste Feld meines Schachbrettes ein Reiskorn, auf das nächste 2 Körner, auf das folgende 4, dann 8 usw. bis zum letzten (64.) Feld meines Schachbrettes.“

Schnell wies der Maharadscha einige seiner Beamten an, mit der Zählung zu beginnen (damit es sich der Gast nicht noch anders überlegt). Wie ihnen befohlen, begannen sie zu zählen und zu zählen und zu zählen Seitdem hat man nie wieder etwas von ihnen gehört.

POTENZEN KOMMEN INS SPIEL

Die Untersuchung der Frage nach der Anzahl der Reiskörner macht dem Leser deutlich, dass ihn der Potenzbegriff mit seinen Rechenregeln befähigt, den Überblick zu behalten. Exakte Zahlen, wie sie inzwischen jeder hergelaufene Computer liefern kann, sind dabei eher hinderlich. Am Horizont tauchen schließlich Vergleiche mit geographischen, astronomischen und statistischen Daten auf, damit Potenzen mit relativ große Exponenten dingfest gemacht und eingeordnet werden können. (Anregungen zu diesem Thema finden wir z.B. auch in [13]).

Machen wir uns zunächst eine Tabelle. Das Schachbrett hat 64 Felder:

Feld-Nr.	Anzahl der Reiskörner	Potenzschreibweise
1	1	?
2	2	$2 = 2^1$
3	4	$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
4	8	$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
5	16	$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$
\vdots	\vdots	\vdots
64	?	$? = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{63 \text{ Faktoren}} = 2^{63}$

Subtrahiert man die Zahl 1 von der jeweiligen Nummer des Feldes, so erhält man den Exponenten der zugehörigen Potenz mit der Basis 2. Jetzt erscheint es sinnvoll, dem Wert 1 die Potenz 2^0 nachträglich zuzuordnen.

Nun gilt es, die Zahl 2^{63} abzuschätzen. (Unruhe im Hintergrund.) Was ist? „Wir sind vom Deutschen Rechenverein und möchten die **genaue** Anzahl der Reiskörner auf dem 64. Feld wissen.“ Warum? „Weil wir **immer** alles genau wissen wollen.“ Nichts da! Machen Sie sich selber an die Arbeit! (Abordnung entfernt sich murrend.)

DIE ABSCHÄTZUNG VON POTENZWERTEN

Auf dem 64. Feld des Brettes liegen 2^{63} Körner.

$$2^{63} = 2^3 \cdot 2^{60} = 2^3 \cdot (2^{10})^6. \quad (*)$$

Wir stapeln tief: $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$. Mit (*) ergibt sich: $2^{63} \approx 8 \cdot (10^3)^6 = 8 \cdot 10^{18}$.

Auf dem letzten Feld befinden sich „etwas mehr“ als 8 Trillionen Reiskörner.

Auf das ganze Schachbrett müssen $S = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{61} + 2^{62} + 2^{63}$ Körner verteilt werden.

$$\begin{aligned} 2S &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64} \\ &= \underbrace{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{62} + 2^{63}}_{=S} + 2^{64} - 1 \end{aligned}$$

$$2S = S + 2^{64} - 1$$

$$S = 2^{64} - 1$$

(Lärm im Hintergrund.) Was ist? Sie schon wieder! „Ja, wir möchten gerne wissen, wie viele ...“ Raus! „Aber wir möchten wenigstens noch wissen, ...“ Was? „... ob $2^{64} - 1$ eine Primzahl ist.“ Also gut:

1. Möglichkeit:

$$2^{64} - 1 = (2^{32})^2 - 1^2 = (2^{32} + 1) \cdot (2^{32} - 1). \text{ Also ist } 2^{64} - 1 \text{ keine Primzahl.}$$

$$\text{Nebenbei: } 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6700417 \text{ und } 2^{32} - 1 = (2^{16})^2 - 1^2 \text{ usw.}$$

2. Möglichkeit:

$$2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32.$$

Die Endziffern der Potenzwerte wiederholen sich in der gleichen Reihenfolge nach der vierten Potenz. Die vierte Potenz endet auf 6. Weil aber 4 ein Teiler des Exponenten 64 ist, muss die Endziffer von 2^{64} die 6 sein. Dann endet $2^{64} - 1$ auf 5. Alle natürlichen Zahlen (> 5), die auf 5 enden, sind keine Primzahlen.

Also: $S = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} = 2 \cdot 2^{63}$. Auf das ganze Schachbrett gehören etwa doppelt so viele Reiskörner wie sich auf dem 64. Feld befinden: $S \approx 16$ Trillionen Körner. Wohlgermerkt: „In Wirklichkeit“ sind es „etwas“ mehr.

Hätte Goethes Thoas nicht mit Iphigenie geredet, sondern uns über die Schulter geschaut, müsste man ihn wohl so zitieren: „Du schreibst eine große Zahl gelassen hin.“

WAS SIND 16 TRILLIONEN?

Böse Überraschungen für den Maharadscha und seine Beamten! Nehmen wir an, dass zum Zählen 100 von ihnen herangezogen wurden und dass pro Sekunde von jedem ein Reiskorn abgezählt werden kann. (Bei den ersten hundert Körnern erscheint dieser Zeitraum zu lang, aber man bedenke, dass z.B. in der Gegend des 800 573 421 999-sten Reiskorns eine hohe und zeitaufwendige Konzentration erforderlich ist.)

Der gesamte Abzählprozess würde etwa 5 Milliarden Jahre dauern; das entspricht ungefähr dem Alter unserer Erde.

2^{64-1} Körner: Etwa 100 000 Welt-Getreideernten (Reis, Roggen, Hafer, Hirse, ...) wären dafür nötig. „Erst“ seit etwa 10 000 Jahren betreiben Menschen Ackerbau (siehe z.B. [14]). Etwa 20 Reiskörner ergeben ein Gramm. $16 \cdot 10^{18}$ Reiskörner haben dann eine Masse von $16 \cdot 10^{18} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ kg} = 8 \cdot 10^{14} \text{ kg}$, das sind 800 Billionen kg.

Eine Handelskette bietet Reis in quaderförmigen 1 kg-Schachteln mit den Abmessungen $5 \text{ cm} \times 13 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ an.

Mit den Körnern auf dem Schachbrett könnte man damit 800 Billionen solche Schachteln füllen. Wenn man diese dann flach übereinander legen und zu einem Turm stapeln würde, wäre dieser Turm $8 \cdot 10^{14} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 4 \cdot 10^{10} \text{ km}$, also 40 Milliarden km hoch.

Der Bahndurchmesser der Erde um die Sonne beträgt ca. 300 Millionen km. Der Bahndurchmesser des Pluto um die Sonne beträgt etwa 12 Milliarden km. Die Dimensionen unseres Sonnensystems würden locker gesprengt!

Der internationale Eisenbahnverband UIC hat für den gedeckten Einheitsgüterwagen vom Typ 571-2 folgende Größen vorgegeben:

Zuladung maximal: 60 bis 75 t, also ca. 70 t

Länge über Puffer: 21,70 m, also ca. 20 m

maximale Geschwindigkeit: $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

$8 \cdot 10^{14} \text{ kg} = 8 \cdot 10^{11} \text{ t}$. Anzahl der vollbeladenen Güterwagen: $8 \cdot 10^{11} \text{ t} : 70 \text{ t} \approx 10^{10}$ Waggons.

Länge des Güterzuges: $10^{10} \cdot 20 \text{ m} = 2 \cdot 10^8 \text{ km}$. Die Äquatorlänge unserer Erde beträgt ca. $4 \cdot 10^4 \text{ km}$. Die Gesamtlänge des globalen Schienennetzes beträgt ca. $2 \cdot 10^6 \text{ km}$. Aber egal:

Angenommen, ein Güterzug, der alle Reiskörner geladen hat, passiert mit der maximal zulässigen Geschwindigkeit einen beschränkten Bahnübergang, vor dem die Autofahrer anhalten mussten. Die Wartezeit, bis sich die Schranken wieder heben, beträgt dann:

$2 \cdot 10^8 \text{ km} : 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 1,7 \cdot 10^6 \text{ h} \approx 71\,000 \text{ d}$; das wären etwa 194 Jahre. Hoffnungslos, sowohl für den Lockführer, die Wartenden und für den Bahnübergang. Die Unentwegten können zwar nicht hören, aber lebenslang im Wandel der Jahreszeiten zuschauen, wie das Gras wächst. Die Lösung von Catering-Problemen und die Antwort auf die Frage, was alles beim und nach dem Ableben der Insassen in die Wege geleitet werden soll, werden an dieser Stelle auf einen späteren Termin verschoben.

16 Reiskörner lassen sich lückenlos zu einer ca. 10 cm langen geraden Kette aneinander reihen.

$16 \cdot 10^{18}$ Reiskörner ergeben dann eine Streckenlänge von $16 \cdot 10^{18} \cdot \frac{10}{16} \text{ cm} = 10^{14} \text{ km}$.

Das Licht legt in einem Jahr ca. 10^{13} km zurück.

Wenn also eine Maus das Reiskorn am Anfang der Kette stibitzt, wird dieser Diebstahl am Kettenende frühestens in zehn Jahren registriert.

Schließen wir die besagte Kette jedoch zu einem Kreis, so hätte dieser einen Durchmesser von ca. 30 Billionen km. Damit rückt diese Kreislinie an den uns am nächsten gelegenen Stern „proxima centauri“, bis auf etwa ein Lichtjahr ($\approx 10^{10}$ km) heran.

Zurück zum Schachspiel. $S = 2^{64} - 1$: Es heißt, so viele sinnvolle Züge stünden dem Schachspieler am Brett zu Verfügung [15].

„Könnten wir nicht doch...?“

Also, dass „a Ruah is“: $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Kapitel 13

Eine rätselhafte Unachtsamkeit

Am Beginn des Schuljahres 2001/2002 hatte in Auerbach die Biologielehrerin, eine der „Schulschwestern von Unserer Lieben Frau“, aus einem vom Bayerischen Kultusministerium genehmigten Lehrbuch der Biologie für die 10. Klasse die 13 Seiten zur Sexualkunde herausgerissen. Darüber hinaus hatte sie Ende Oktober das Biologie-Lehrbuch der 8. Klasse eingezogen [16].

In einem dazu merkwürdigen Zusammenhang schlägt ein Zeitungsartikel unseres Korrespondenten Sigmapi aus dem arabischen Raum hohe Wellen, in dem eine Reihe Aufsehen erregender Ereignisse geschildert werden, die sich im Lande Al’Gebr zugetragen haben. Seinem Bericht zufolge stiftete die Lösung einer scheinbar harmlosen Aufgabe in einem gerade erschienenen Mathematikbuch für die 5. Jahrgangsstufe unter den betroffenen Lehrkräften erhebliche Unruhe:

„Schreibe die zwei kleinsten natürlichen Zahlen auf, die sich jeweils nur aus der Ziffer 1 zusammensetzen lassen und die jeweils durch 9 ohne Rest teilbar sind. Berechne die Werte dieser Quotienten.“

Dabei stellte sich Folgendes heraus:

$$\begin{aligned} 111\,111\,111 : 9 &= 1\,234\,679 \\ 111\,111\,111\,111\,111\,111 : 9 &= 12\,345\,679\,012\,345\,679 \end{aligned}$$

Offensichtlich hatte sich die 8 aus der wohlgeordneten Reihe aller Ziffern der Quotientenwerte davongemacht. Schnell wurde klar, dass diese Ziffer auch bei der Division der nächstgrößeren Einser-Zahlen durch 9 wie vom Erdboden verschluckt blieb.

Nachdem dieses ungeheuerliche Ereignis übergeordneten Behörden zu Ohren gekommen war, erging von dort an alle Mathematiklehrer die Anweisung, die Seite mit dieser Aufgabe aus dem Buch herauszureißen.

Die Durchführung dieses Vorhabens blieb jedoch nicht geheim. Nachdem diesbezügliche Informationen dem Regenten des Landes, dem Emir El’Sifr vom Stamme der Minussi, zugetragen worden waren, wurde die Aktion sofort gestoppt und eine eigentlich erst später fällige umfassende routinemäßige Kontrolle vorgezogen:

Alle Rechenmeister wurden angewiesen, ihre momentane Arbeit unverzüglich zu unterbrechen und stattdessen aus allen 9-stelligen Zahlen die jeweils aus **allen** positiven Ziffern bestehen, den Summenwert zu bilden und diesen in seine Primfaktoren zu zerlegen.

Die damit Beauftragten gingen ans Werk und schrieben dann den folgenden Bericht:

Die Zahl der Möglichkeiten, n verschiedene Objekte anzuordnen, beträgt bekanntlich

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Aus diesen 9 verschiedenen Ziffern wird nun die Ziffer k herausgegriffen und an der i -ten Stelle (mit $i \in 1; 2; 3 \dots ; 9$) platziert. Da es aber $8!$ verschiedene Möglichkeiten gibt, die restlichen 8 Ziffern anzuordnen, tritt die Ziffer k $8!$ -mal an der i -ten Stelle (die durch $k \cdot 10^{9-i}$ beschrieben wird) auf. Den gesamten Summenwert S erhält man durch:

$$\begin{aligned} S &= 8! \cdot \sum_{i=1}^9 k \cdot \sum_{i=1}^9 10^{9-i} = 8! \sum_{k=1}^9 k \cdot \sum_{i=1}^9 10^{i-1} \\ &= 8! \cdot \frac{9}{2} \cdot (9+1) \frac{10^9 - 1}{10 - 1} \\ S &= 8! \cdot 45 \cdot 111\,111\,111 \end{aligned}$$

Schon das Ausrufungszeichen hinter der 8 wies wie ein Menetekel auf drohendes Unheil hin, denn da tauchte er wieder auf - der gespenstische Faktor $111\,111\,111 = 9 \cdot \mathbf{12\,345\,679}$, der aus einer nur scheinbar unbedeutenden Einserzahl entsprungen war!

Obwohl der Bericht hier noch nicht zu Ende war (er schloss mit dem Hinweis, dass mit $12\,345\,679 = 37 \cdot 333\,667$ alles erledigt sei), versetzte die Nachricht vom zwar 8-stelligen aber 8-losen Faktor **12 345 679** das ganze Land in helle Aufregung.

Einer rasch ins Leben gerufenen Sonderkommission namens „Hbt’Cht“ der Polizeiorgane lagen Zeugenaussagen vor, wonach die fehlende 8 durch eine geschickte 90° -Drehung bei irgendeinem der Grenzübergänge entschlüpft sei.

Der Geheimdienst „Bibi’Qd“ meldete im gleichen Atemzug, dass ein gewisser MÖBIUS Beihilfe zur Flucht geleistet habe, angeblich, um einer Verhängung von Acht und Bann über diese Ziffer zuvorzukommen. Genaueres wisse man aber noch nicht. –

gez. Sigmapi

Dieser Korrespondentenbericht löste in aller Welt fiebrhafte Aktivitäten aus. In einem von ihm eilends einberufenen Kolloquium informierte der deutsche Innenminister die geladenen Professoren dahingehend, dass die Deutsche Acht am Rhein nach den Vorkommnissen in Al’Gebr sofort ins sichere Hinterland, nämlich in die Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig, verbracht worden sei. Eine Direktübertragung von dort trug erheblich zur Beruhigung der Lage bei.

Der Minister berichtete darüber hinaus, dass die Polizeiorgane angewiesen seien, bei allen von einreisenden Personen mitgeführten Fahrrädern besonders auf gewisse Weise deformierte Vorder- oder Hinterräder zu 8-en und bei den bald anstehenden Volksfesten die 8-erbahnen scharf im Auge zu behalten. Auch relevante Zeitungs-8-ikel seien mit erhöhter Aufmerksamkeit zu lesen.

Im Zentralorgan „Blattschuss“ der Deutschen Jägervereinigung wurde ein Verbot, 8-Ender zu erlegen, veröffentlicht.

Die bis dahin zur Floskel erstarrten Briefunterschriften „Hoch-8-ungsvoll“ oder „Mit vorzüglicher Hoch-8-ung“ erfuhren in F8-Kreisen enorm gesteigertes Interesse.

Wir alle sollten künftig wieder mehr 8-geben.

Kapitel 14

Das verweigerte Obdach

Nachdem vor Urzeiten die natürlichen Zahlen auf die Welt gekommen waren, hat die Menschheit diese als enorm wichtiges Werkzeug auf vielfältige Weise benutzt. Und neugierig, wie der Mensch nun einmal ist, begann er, sich für die innere Struktur der Zahlen – quasi für deren „atomaren Aufbau“ – zu interessieren.

Ob dieser Aufmerksamkeit fühlten sich die natürlichen Zahlen sehr geschmeichelt, bis, ja, bis es sich herausgestellt hatte, dass sich die sagenhafte Vielfalt dieser Zahlen durch ganz bestimmte Vervielfältigungen gewisser Elementarzahlen erklären ließ. Die Menge dieser Zahlenatome hieß von da an „Die Primzahlen \mathbb{P} “, und sie stiftete gehörigen Unfrieden: Es gab von da an also „adlige“, die den Stammbaum für alle anderen „gemeinen“ darstellten. Das Gesetz, das die Zugehörigkeit zu dieser elitären Kaste regelte, wurde zunächst so formuliert:

„Jede natürliche Zahl, die ausschließlich durch eins oder sich selbst teilbar ist, darf sich Primzahl nennen.“

Einer der ersten Sachwalter dieser Vorschrift war ERATHOSTENES von Kyrene (276? – 194? v. Chr.). In dem nach ihm benannten Rechensieb blieben nur die Primzahlen hängen. Die anderen natürlichen Zahlen mussten sich daraufhin zwar als geprüft, aber durchgefallen betrachten. Welch eine Erniedrigung!

Eine Spezies allerdings, die mit durchzurutschen drohte, sträubte sich energisch: die Einser. Sie beharrten darauf, dass sie den Buchstaben des Gesetzes voll genügen würden und daher Anspruch auf die Zugehörigkeit zur Menge der Primzahlen hätten. Ihre Argumentation stieß bei den „richtigen“ Primzahlen auf Misstrauen, ja Ablehnung, die jedoch eher emotional begründet war. Niemand wollte es zudem riskieren, das Begehren der Einser gerichtlich anzufechten. Die Widerborstigen fristeten fortan ein Mauerblümchendasein im Niemandsland.

Etwa 2000 Jahre hielt dieser Zustand an, bis C.F. GAUß (1777 - 1855) die Bühne betrat und 1831 die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung postulierte. Seitdem sind die Teilbarkeitsregeln für die natürlichen Zahlen widerspruchsfrei und den Einsern bleibt der Zutritt zur Menge der Primzahlen endgültig verwehrt.

Der Gesetzestext wurde dahingehend verschärft, dass sich künftig nur solche natürlichen Zahlen als Primzahlen bezeichnen durften, die genau zwei verschiedene Teiler besaßen.

Dass von da an (neben der Primzahl selbst) die Eins in jeder Teilermenge vertreten sein musste, war für die Hinauskomplimentierten kein Trost. Enttäuscht und niedergeschlagen fügten sie sich notgedrungen in ihr Schicksal.

Der joviale Hinweis aus der Menge \mathbb{P} , dass es in ihr auch solche Elemente gebe, die sich

ausschließlich aus Einsern rekrutierten, war kaum tröstlich, denn entsprechende Nachforschungen waren wenig ergiebig:

Es sei $i(1)$ eine solche Zahl mit i Einsern. Dann brauchen wir nicht nach Zahlen zu suchen, für die i gerade oder durch drei teilbar ist, denn dann ist $i(1)$ durch 11 oder durch 3 teilbar. Eine systematische Vorgehensweise bringt Folgendes zutage:

$$\begin{aligned}
 2(1) &= 11 \in \mathbb{P} \\
 5(1) &= 41 \cdot 271 \\
 7(1) &= 239 \cdot 4\,679 \\
 11(1) &= 21\,649 \cdot 513\,239 \\
 13(1) &= 53 \cdot 79 \cdot 265\,371\,653 \\
 17(1) &= 2\,071\,723 \cdot 79 \cdot 5\,363\,222\,357 \\
 19(1) &\in \mathbb{P} \\
 23(1) &\in \mathbb{P} \\
 25(1) &= 41 \cdot 271 \cdot 21\,401 \cdot 25\,601 \cdot 182\,521\,213\,001
 \end{aligned}$$

Die Floskel „Usw.“ wäre jetzt unangebracht, denn derartige Einser-Primzahlen (es gibt unter ihnen offenbar mindestens ein Zwillingsspaar) sind doch recht dünn gesät. Unser Blick in die Ferne verliert sich zudem noch im Nebel der Ungewissheit, ob es unendlich viele Einser-Primzahlen gibt oder nicht.

Die Ansammlung von so vielen Einsern erregte bei den Angehörigen der Dualzahlen zunächst ein gewisses Interesse, aber da sich keine der Nullen dazugesellen wollte, wandte man sich wieder dem Tagesgeschäft zu.

Den Einsern fiel jedoch auf, dass ihre Konglomerate, wenn sie nicht selbst prim waren, mehr und mehr eine imposante Menge aus Primteilern zutage förderten. Es keimte der Verdacht auf, dass sogar jede Primzahl bis auf wenige Ausnahmen als Teiler in einer passenden Einserzahl unterkommen könnte.

In dieser recht unübersichtlichen Situation trafen entscheidende Hinweise „ausgerechnet“ aus einer Zahlenmenge ein, zu der die natürlichen Zahlen schon immer ein gebrochenes Verhältnis hatten, nämlich von den periodischen Dezimalzahlen:

Aus den periodischen Dezimalzahlen fischen wir die Darstellung $z = 0, \overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ heraus, wobei n die Periodenlänge ist (mit $x_n \neq 0$) und $x_i \in \{0; 1; \dots; 9\}$ die Periodenziffern sind. Der Rest ließe sich durch Multiplikationen mit 10^m ($m \in \mathbb{Z}$) und durch Addition von natürlichen Zahlen abdecken; er ist aber für die folgenden Überlegungen uninteressant.

Für z gilt nun die Darstellung

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i}}{(10^n)^k} = \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)^k \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)^k - 1 \right]
 \end{aligned}$$

Die eckigen Klammern enthalten eine konvergente geometrische Reihe:

$$\begin{aligned}
 z &= \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} - 1 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} \cdot \left[\frac{10^n}{10^n - 1} - 1 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} \cdot \left[\frac{10^n - 10^n + 1}{10^n - 1} \right] \\
 z &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i}}{10^n - 1}
 \end{aligned}$$

Der Nenner erzeugt für alle $n \in \mathbb{N}$ nur Zahlen mit der Ziffer 9.

Diese Erkenntnis lässt sich auch einfacher gewinnen:

$$\begin{aligned}
 \text{Es sei } z &= 0, \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}_{\text{Periodenlänge } n} \mid \cdot 10^n \\
 10^n \cdot z &= \underbrace{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}_{\text{Zahl aus den Periodenziffern}} + z \\
 z \cdot (10^n - 1) &= x_1 x_2 x_3 \dots x_n \\
 z &= \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}{10^n - 1} = \frac{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}{\underbrace{999 \dots 9}_{n \text{ Neuner}}}
 \end{aligned}$$

Damit können wir Folgendes feststellen:

Satz 1:

Jede periodische Dezimalzahl $z = 0, \overline{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$ lässt sich in einen Bruch verwandeln, dessen Nenner nur aus Neunern besteht. Die Anzahl dieser Neuner ist mit der Periodenlänge identisch. Im Zähler steht die Periode.

Im Weiteren bezeichnen wir Zahlen, die sich ausschließlich z.B. aus Neunern, Dreieren oder Einsern zusammensetzen als Neuner- Dreier bzw. Einserzahlen.

$$\begin{aligned}
 \text{Beispiel 1: } & \frac{7011}{9999} = 0, \overline{7011}. \\
 \text{Wegen } & \frac{7011}{9999} = \frac{9 \cdot 19 \cdot 41}{9 \cdot 11 \cdot 101} \quad \text{folgt auch} \quad \frac{779}{1111} = 0, \overline{7011}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Beispiel 2: } \frac{7011}{99999} = \frac{9 \cdot 19 \cdot 41}{9 \cdot 41 \cdot 271} = \frac{779}{11111} = \frac{19}{271} = 0, \overline{07011}.$$

Die periodischen Dezimalzahlen offenbaren erneut Zusammenhänge zwischen Neuner- bzw. Einserzahlen und gewissen Primzahlen.

Welche Primzahlen im Nenner liefern nun überhaupt periodische Dezimalzahlen? Zwei und Fünf sicher nicht. Und alle anderen?

Wir beschränken uns zur Klärung dieser Frage auf Stammbrüche $\frac{1}{p}$ mit $p \in \mathbb{P} \setminus \{2; 5\}$.
 Ließe sich $\frac{1}{p}$ als abbrechende Dezimalzahl darstellen, so müsste es ein $n \in \mathbb{N}$ geben, so dass gilt:

$$\frac{1}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i}}{10^n} \Leftrightarrow p = \frac{2^n \cdot 5^n}{\sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i}}.$$

Weil p ganz ist, muss der Nenner auf der rechten Seite ein echter Teiler des Zählers sein. Zudem soll der Bruch eine Primzahl und keine aus 2^n und 5^n zusammengesetzte Zahl liefern. Also gilt entweder $p = 2$ oder $p = 5$. Das widerspricht aber der Voraussetzung. Der Stammbruch $\frac{1}{p}$ erzeugt für alle $p \in \mathbb{P} \setminus \{2; 5\}$ periodische Dezimalzahlen. Das bedeutet, dass es stets ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, für das gilt:

$$\frac{1}{p} = z = \frac{\sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i}}{10^n - 1} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i 10^{n-i} = \frac{10^n - 1}{p} = \frac{\overbrace{999 \dots 9}^{n \text{ Neuner}}}{p}.$$

Der Zähler rechts muss den Teiler p haben, denn der Summenwert auf der linken Seite der letzten Gleichung ist immer ganz.

Satz 2:

Jede Primzahl $p \in \mathbb{P} \setminus \{2; 5\}$ ist Teiler einer geeigneten Neunerzahl.

Weil aber $9 \notin \mathbb{P}$ ist, folgt

Satz 3:

Jede Primzahl $p \in \mathbb{P} \setminus \{2; 5\}$ ist Teiler einer geeigneten Einserzahl.

$p = 3$ z.B. teilt sogar beliebig viele Einserzahlen, wenn nur die Anzahl der Einsen durch 3 teilbar ist.

Alles in allem vermag dann diese Unterkunft die Hausnummer nach Belieben zu wechseln, wenn nur diese Nummer aus einer einzigen Ziffer (z.B. aus der 1) erzeugt wird.

Was für eine Überraschung! Die Einsen, die zwar hartnäckig, aber erfolglos ein Obdach unter den Primzahlen gesucht hatten, bieten durch eigenes Zutun eine Herberge für diese hochmögende Adelskaste. Selbst die Tatsache, dass schon EUKLID (ca. 360 - 280 v.Chr.) die Menge \mathbb{P} als unerschöpflich erkannt hat, ist für jene kein Problem. Die Anbaumöglichkeiten solcher Unterkünfte sind ebenso grenzenlos. Allerdings müssen die einzelnen Primzahlen lange Wartezeiten in Kauf nehmen, bis ihr jeweiliges Domizil empirisch ausgekundschaftet ist. Kein Mensch hat bisher eine Strategie, damit das schneller geht. Die Zwei oder die Fünf allerdings kämen nur in Gebäuden mit der Zweier- oder Fünfer-Hausnummer noch zur Not unter. Besonders Gewitzte versuchten den Beiden durch Anhängen einer Null an die Hausnummer aus der Bredouille zu helfen, doch die Einsen ließen nicht mit mehr mit sich reden. Dadurch aber, dass diese zwei Versprengten dem Menschen ein globales und existenzsicherndes Stellenwertsystem in die Hand gegeben haben, gebührt ihnen allerhöchste Anerkennung.

Die Null jedoch konnte ihre Ablehnung nicht verwinden. Sie fand Verbündete, die seitdem unentwegt an der Frage arbeiten, ob es für jedes $p \in \mathbb{P}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass p die

$\sum_{i=0}^n 10^{2i+1}$ teilt. Der Leser möge sich Gedanken machen.

Wäre nicht der Mensch, sondern das Dreifinger-Faultier (*Bradypus tridactylus*) der Ausbund an Intelligenz - aber das ist eine andere Geschichte.

Kapitel 15

Auf nach Paradoxien!

In dem Kapitel „Auf der Verfolgung“ war von ZENON von Elea die Rede, der seinen Mitbürgern weiß machen wollte, dass der schnellfüßige Achilles den Wettlauf gegen eine gemächlich daherkommende Schildkröte, die beim Start einen Vorsprung besitzt, nicht gewinnen kann. Durch rechnerische Handgriffe wurde diese Behauptung unumstößlich als Trugschluss entlarvt.

Bei anderen Behauptungen dagegen hängen wir in der Luft:

„ $x = 4$ “ oder „Am 13. April hat es geregnet.“

Was soll x sein? Ist der ersten Feststellung ein Rechenfehler vorausgegangen oder nicht? Zum anderen sind schon seit jeher auf der Erde Regenfälle niedergegangen, so dass die Datierung wertlos wird, weil uns nicht mitgeteilt wird, wo und in welchem Jahr dieses Ereignis stattgefunden hat.

Keiner der beiden Sätze enthält Informationen, die irgendeinen verwertbaren Gehalt oder gar Nutzen darstellen. (Manchen unserer Zeitgenossen gelingt es manchmal mühelos, Gedanken zu einer Rede aneinanderzufügen, die sich als sinnfrei erweist.)

AUS DER SPIELKISTE

Zum Thema „Trugschlüsse und Sophismen“ erzählt uns „Das große Buch der Spiele“ [20] verschiedene Geschichten. Es wird darin z.B. von einem Ereignis berichtet, das wir etwas variiert schildern:

Der Gelehrte T. Lephath ist Kannibalen in die Hände gefallen. Sie fordern ihn auf, eine Frage zu stellen. Wenn sie darauf mit „Ja.“ antworten, ist er frei. Wenn sie darauf mit „Nein.“ antworten, wird er umgebracht.

Die Frage des Gefangenen lautet: „Werdet ihr mich töten?“ Daraufhin setzt ein lebhaftes Palaver unter den Menschenfressern ein.

Die einen argumentieren so: „Wir wollen unseren Gefangenen doch töten. Also darf die Antwort auf dessen Frage nur 'Ja.' lauten.“ Die Gegenpartei kontert damit, dass sie T. Lephath dann gemäß der Vereinbarung freilassen müssten. Also könne die Antwort nur „Nein.“ heißen. Man redete sich stundenlang die Köpfe heiß, aber alle Versuche, einen Weg aus der Sackgasse zu finden, waren vergeblich, denn das „Nein.“ brächte ja dem Gefangenen die Freiheit, weil wir davon ausgehen, dass sich die „Wilden“ an ihr gegebenes Wort halten. Diesen Umstand nutzte der Gefangene, um sich auf Nimmerwiedersehen in die Büsche zu schlagen.

Im Baumdiagramm in der Abb. 15.1 ist das Dilemma dargestellt.

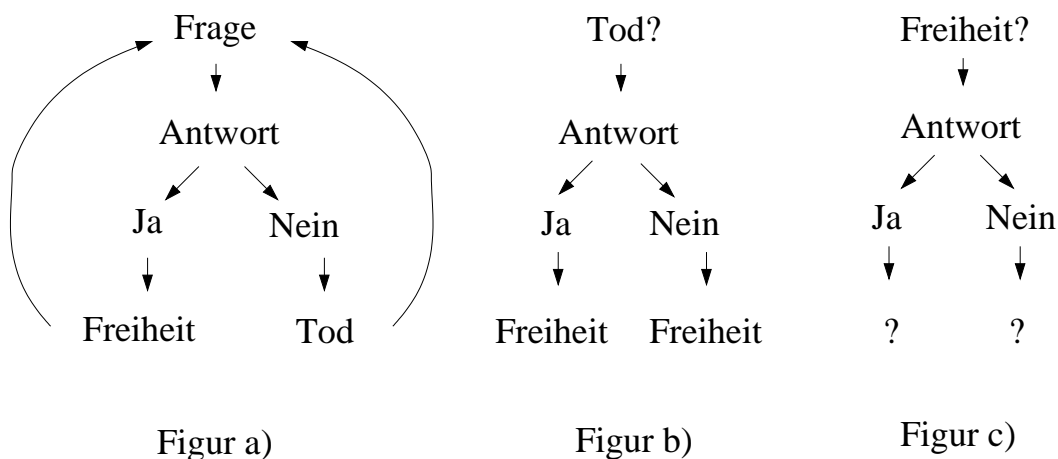


Abbildung 15.1: Baumdiagramme zum Frage-Antwort-Spiel

Figur a):

Wenn der Gelehrte die obige Frage gestellt hat, kann die Antwort entweder nur „Ja.“ oder „Nein.“ heißen. Dann müsste entweder Freiheit oder Tod die Folge sein - so geben es die Regeln des „gesunden Menschenverstandes“ vor.

Figur b):

Wenn sich aber die Frage schon mit einem Resultat aus der Antwort beschäftigt, dann bildet sich eine Schleife, die das „Entweder-Oder“ auflöst: Der Weg in die Freiheit ist gewiss.

Figur c):

Hätte Herr Lepath gefragt: „Lasst ihr mich frei?“, hätte das seinen Tod bedeutet. Hätten die Kannibalen umgekehrt vereinbart, dass die Antwort „Nein.“ die Freiheit bringt, und das „Ja.“ den Tod, wäre „Werdet ihr mich laufen lassen?“ seine Rettung gewesen.

In jedem Fall kann also die rettende Frage weder durch „Ja.“ noch durch „Nein.“ entschieden werden, weil in ihr eine Antwort bereits eingewoben ist.

Stellen wir uns vor, Herr Lepath hätte gefragt: „Wie spät ist es?“ Die Antwort „Ja.“ oder „Nein.“ täte hier nichts zur Sache. Zudem teilen solche Eingeborenen den Ablauf der Zeit vermutlich kaum in Stunden und Minuten ein, so dass ihre eigennützige Antwort wohl „Zu spät!“ lauten würde.

KURT GÖDEL (1906-1978)

Als der griechische Philosoph EPIMENIDES (5. oder 6. oder 7. Jh. v.Chr.) auf Kreta lebte, behauptete er: „Alle Einwohner Kretas lügen.“ Ist das wahr oder gelogen? Ja oder Nein?

Hatte EPIMENIDES recht, dann war seine Aussage gelogen, weil er ja auch ein Kreter ist. Wenn seine Behauptung aber falsch war, dann gehörte er zu den Lügnern, und seine Aussage wäre wahr. Diese Zwickmühle ist in der Abb. 15.2 dargestellt.

Hier liefert uns jede Antwort einer Endlosschleife aus, die sich als Sackgasse erweist: Erkennen wir die Behauptung als wahr an, dann erweist sie sich als falsch, was zur Folge hat, dass sie wahr sein muss, daraus folgt, dass sie falsch ist, was wiederum zur Folge hat, dass ...

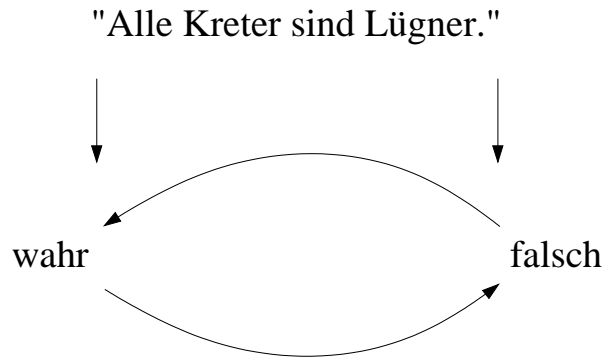


Abbildung 15.2: Das EPIMENIDES-Paradoxon

Hätte EPIMENIDES dagegen festgestellt: „Kreter lügen stets.“, so wäre auch diese Aussage gelogen. Dann gäbe es aber mindestens einen Zeitpunkt, am dem irgendein Bewohner Kretas die Wahrheit gesagt hat. Also hätte EPIMENIDES Falsches ausgesagt. Somit ist erwiesen, dass seine Feststellung falsch ist. Wenn das Wort „alle“ durch „stets“ ersetzt wird, hat das die Auflösung der Endlosschleife zur Folge.

Noch weitere Beispiele von Aussagenpaaren:

1. Erwin stellt fest: „Edwin lügt.“ Edwin entgegnet: „Erwin lügt.“
2. Erwin stellt fest: „Edwin sagt die Wahrheit.“ Edwin bestätigt: „Erwin sagt die Wahrheit.“
3. Erwin behauptet: „Edwin lügt.“ Edwin gibt zu: „Erwin sagt die Wahrheit.“
4. Erwin stellt fest: „Edwin sagt die Wahrheit.“ Edwin entgegnet: „Erwin lügt.“

Während die Aussagen 1. und 2. mit der Logik vereinbar sind, führen die Aussagen 3. und 4. (jede einzelne für sich ist dort harmlos) ins Dilemma.

Bertrand RUSSELL (1872-1970) warf 1902 die folgende Frage auf:

„Nennen wir \mathbf{R} die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Enthält \mathbf{R} sich selbst als Element?“ [21]

Bejahen wir die Frage, dann ist das ein Widerspruch zur Definition von \mathbf{R} , denn \mathbf{R} soll sich ja gerade nicht als Element enthalten.

Falls die Antwort „Nein.“ hieße, sich also \mathbf{R} nicht selbst als Element enthält, dann müsste wiederum nach der obigen Definition \mathbf{R} ein Element von \mathbf{R} sein. Also ist diese Frage nicht entscheidbar.

Damit sind wir endgültig von der Spielwiese in ein steiniges Feld der Logik geraten, auf dem der in Brno (früher Brünn) geborene Kurt GÖDEL bahnbrechende Entdeckungen gemacht hat.

In den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts stellte sich David HILBERT (1862-1943) die Aufgabe, den „Beweis der Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems [...] zu erbringen [...] ausgehend von den Axiomen und gemäß den Regeln, die Unbeweisbarkeit einer Formel der Form $1 \neq 1$ zu beweisen.“

In [21] heißt es auf S. 38 f. weiter: „Darüberhinaus sind beweistheoretisch zwei sprachliche Ebenen rigoros zu unterscheiden: die Ebene einer gegebenen Theorie selbst und diejenige, in der über eine gegebene Theorie Untersuchungen angestellt werden.“

HILBERT: „In dieser Mathematik wird mit Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert, und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung.“
Im Jahre 1926 legte GÖDEL seine Dissertation mit dem Titel „Über die Vollständigkeit des Logikkalküls“ vor (siehe [21] S. 43).

Er verstand *Vollständigkeit* „[...] , so [...] daß jede im engeren Formelkalkül ausdrückbare allgemein gültige Formel [...] sich durch eine endliche Reihe formaler Schlüsse aus den Axiomen definieren lässt.“ (siehe [21] S. 43). „GÖDELS große Leistung bestand nun in der Erfindung eines Mittels, die Barriere zwischen den verschiedenen Sprachschichten (‘Metasprache’ und ‘Objektsprache’ geheißen) zu überwinden.“ (siehe [21], S. 48).

Also: wahr \neq beweisbar.

GÖDEL hat diesen Sachverhalt in seinen ersten Unvollständigkeitssatz gekleidet:

Wenn die Arithmetik widerspruchsfrei ist, ist sie unvollständig. (siehe [21], S. 48).

Der Satz zeigt, „dass nicht alle wahren Sätze der Arithmetik in einem einzigen gegebenen formalen System bewiesen werden können.“ (Jaakko Hintikka)

In [22] finden wir auf S.19 diese Variante:

Alle widerspruchsfreien axiomatischen Formulierungen der Zahlentheorie enthalten unentscheidbare Aussagen.

„Dieser Satz ist (formal) nicht beweisbar.“

Wäre die Aussage falsch, dann wäre sie beweisbar, also durch logische Schritte aus einem anderen Sachverhalt ableitbar. Damit wird aber das Gegenteil dessen ausgedrückt, was die Aussage beinhaltet. Also muss sie wahr sein, sie ist aber nicht beweisbar.

Aus dem ersten Unvollständigkeitssatz folgerte GÖDEL einen zweiten (siehe[21], S.53):

„Die Widerspruchsfreiheit eines genügend reichhaltigen Axiomensystems (das also mindestens das Zählen mit natürlichen Zahlen enthält) ist mit den Mitteln des Systems selbst und nur mit diesen nicht beweisbar.

[...] das bedeutet, dass in jeder axiomatischen, widerspruchsfreien und genügend reichhaltigen Theorie die Widerspruchsfreiheit der Theorie selbst mit ihren eigenen Mitteln nicht ausdrückbar (beweisbar) ist.“

Hao Wang, ein Vertrauter GÖDELS, schlug für die Unvollständigkeitssätze umgangssprachliche Fassungen vor (siehe[21], S.5):

- Die Mathematik ist unerschöpflich: Sie kann nicht vervollständigt werden.
- Kein Computerprogramm kann alle und nur die wahren Aussagen der Mathematik beweisen.
- Kein formales System der Mathematik (das wenigstens die Theorie der natürlichen Zahlen umfasst) kann sowohl widerspruchsfrei als auch vollständig sein.

Wang führt weiter aus: „Die Tatsache der algorithmischen Unerschöpflichkeit zeigt, ... , dass entweder der menschliche Geist allen Computern überlegen ist, oder dass die Mathematik nicht vom menschlichen Geist geschaffen ist; oder aber sie zeigt beides zugleich. Es ist daher einleuchtend, dass das Theorem sowohl für die Philosophie des Geistes als auch für die Philosophie der Mathematik von Bedeutung ist.“

Du kannst Dein eigenes Gehirn
mit Deinem eigenen Gehirn erforschen:
aber nicht ganz . . .

Hans Magnus Enzensberger
Gedichte (1955-1970)



Eben!

Kapitel 16

Von gestern bis heute

DER UNÜBERWINDLICHE

Karl Kraus (1874-1936) war ein Schriftsteller und Kritiker. Er stammte aus Jičín in Böhmen. Sein späterer Lebensmittelpunkt war Wien. Er gab die Zeitschrift „Die Fackel“ heraus, in der Themen aus Kultur, Politik und Zeitgeschehen in einer meisterhaften Sprache dargestellt, und darüber hinaus sehr oft seiner beißenden Kritik ausgesetzt waren. Auch über die Sprache selbst dachte er tiefgründig nach. („Ich beherrsche die Sprache nicht, sie beherrscht mich.“)

*

Ein Gedicht von ihm [23] liefert die Nahtstelle zum vorigen Kapitel:

Wahl des Titels

Ein neues Blatt? Ich schlag' als Titel vor: „Die Lüge“;
der Kopf der Zeitung zeige ihres Wesens Züge.
Es gibt nur einen Grund, dass er ihr nicht behagt:
weil selbst im Titel doch kein Blatt die Wahrheit sagt.

*

„Daß Bildung der Inbegriff dessen sei, was man vergessen hat, ist eines der schönsten Worte. Darüber hinaus ist Bildung eine Krankheit und eine Last für die Umgebung des Gebildeten. Eine Gymnasialreform, die auf die Abschaffung der toten Sprachen mit der Begründung hinarbeitet, man brauche sie eben nicht fürs Leben, ist lächerlich. Brauchte man sie fürs Leben, so müßte man sie eher abschaffen. Sie dienen freilich nicht dazu, daß man sich einst in Rom oder Athen durch die Sehenswürdigkeiten durchfragen könne. Aber sie pflanzen in uns die Fähigkeit, uns diese vorzustellen. Die Schule dient nicht der Anhäufung praktischen Wissens. Aber Mathematik reinigt die Gehirnbahnen, und wenn man Jahreszahlen büffeln muß, die man nach dem Austritt sogleich vergißt, so tut man trotzdem nichts Unnützes. Verfehlt ist nur der Unterricht in der deutschen Sprache. Aber dafür lernt man sie durch das Lateinische, das noch diesen besonderen Wert hat. Wer gute Aufsätze macht, wird in der Regel ein Kommissar. Wer schlechte macht und dafür im Lateinischen besteht, wird wahrscheinlich ein Schriftsteller. Was die Schule bewirken kann, ist, daß sie jenen Dunst von Dingen schafft, in den eine Individualität hineingestellt

werden kann. Weiß einer noch nach Jahren, aus welchem klassischen Drama und aus welchem Akt ein Zitat stammt, so hat die Schule ihren Zweck verfehlt. Aber fühlt er, wo es stehen könnte, so ist er wahrhaft gebildet und die Schule hat ihren Zweck vollauf erreicht.“ [24]

*

„Nicht der Stock war abzuschaffen, sondern die Lehrer, die ihn schlecht anwenden. Die neue Gymnasialreform ist, wie alles humanitäre Flickwerk, ein Sieg über die Phantasie. Dieselben Lehrer, die bis nun nicht imstande waren, mit Hilfe des Katalogs zu einem Urteil zu gelangen, werden sich jetzt liebevoll in die Schülerindividualität versenken müssen. Die Humanität hat den Alpdruck der Furcht vor dem 'Drankommen' beseitigt, aber das gefahrlose Schülerleben wird unerträglicher sein als das gefährliche. Zwischen vorzüglich und ganz ungenügend lag ein Spielraum für romantische Erlebnisse. Ich möchte den Schweiß und die Trophäen der Kindheit nicht von meiner Erinnerung wischen. Mit dem Stachel ist auch der Sporn dahin. Der Gymnasiast lebt ehrgeizlos wie ein lächelnder Weltweiser und tritt unvorbereitet in die Streberei des Lebens, die sein Charakter ehemals schadlos antizipiert hatte, wie der geimpfte Körper die Blattern. Er hatte früh alle Gefahren des Lebens bis zum Selbstmord verkostet. Anstatt daß man die Lehrer verjagt, die ihm das Spiel der Gefahren manchmal zum Ernst erwachsen ließen, wird jetzt der Ernst des ruhigen Lebens verordnet. Früher erlebten die Schüler die Schule, jetzt müssen sie sich von ihr bilden lassen. Mit den Schauern ist auch die Schönheit vertrieben und der junge Geist steht vor der Kalkwand eines protestantischen Himmels. Die Schülerelbstmorde, deren Motiv die Dummheit der Lehrer und Eltern war, werden aufhören, und als legitimes Selbstmordmotiv bleibt die Langeweile zurück.“ [24]

*

„Ich will nun des 'Tibetteppich' dieses allerschönsten Gedichtes [von Else Lasker-Schüler, d. Verf.], Geheimnisse enthüllen, nicht um es verständlich zu machen oder zu rechtfertigen, sondern um zu zeigen, wie jeder lebende Organismus - und dieses Kunstwerk ist es wie wenige - sich in jedem seiner Teile dem Schöpfer unbewußt, beweist und darum in jeder zufälligst herausgegriffenen Verbindung der mathematische Beweis höchster notwendiger Schönheit nur an der Unzulänglichkeit der Mathematik scheitern könnte.“ [25]

ERLESENES UND ERFAHRENES

Bildung ist das, was die meisten empfangen, viele weitergeben und wenige haben. [26]

*

Die Psychoanalyse ist jene Krankheit, für deren Therapie sie sich hält. [27]

*

Die Wissenschaft ist der Missbrauch einer zu diesem Zweck erfundenen Terminologie. [29]

*

Der Schüler übersetzte den Text aus dem Englischen in eine ihm gleichfalls fremde Sprache.

Im Originaltext kanzelt Karl Kraus im Jahre 1924 in der „Fackel“ auf analoge Weise den Shaw-Übersetzer Siegfried Trebitsch so ab:

„Man erinnert sich noch der Fülle von Stilproben, die dargeboten wurde, als Herr Trebitsch die ersten Stücke des Herrn Shaw in eine ihm gleichfalls fremde Sprache übersetzte.“ [28]

*

Der Term hat den Spießrutenlauf in der Gasse aus Gleichheitszeichen nicht überlebt.

*

Man hat mehrfach festgestellt, dass einem die Gedanken allein schon beim Betrachten einer Hochglanzbroschüre darauf ausrutschen.

*

Was kann für eine Schreibunterlage wohltuender sein, als die Akupunktur mit einer Zirkelspitze?

*

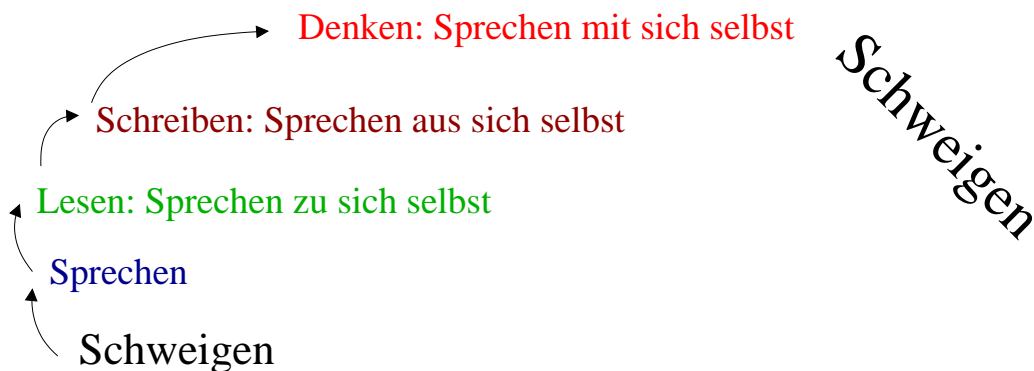


Abbildung 16.1: Ein Kreislauf

Im Jahre 1935 nahm sich Kurt Tucholsky durch Gift das Leben. Kurz vor seinem Tode fertigte er die folgende Skizze an:

Eine Treppe

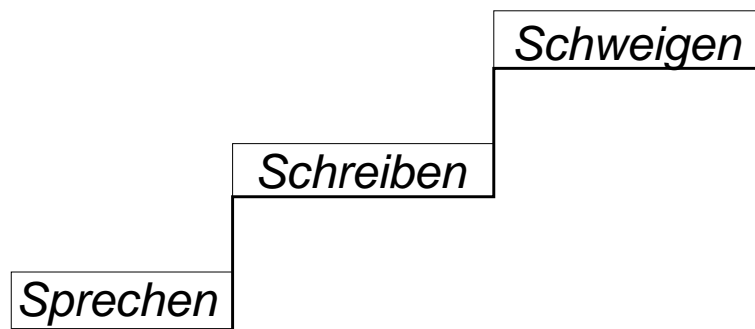


Abbildung 16.2: Ohne Ausweg

Kapitel 17

Epilog

Aus der Internet-Postille

„Ich weis eigentlich überhaupt nicht wie faktorisieren funktioniert und habe mir nur ein Video bei Youtube darüber angesehen, verstehe es aber noch nicht.“

„... hilft mir bitte, ich checks i-wie nicht so richtig-.“

„Wenn du z.B. $2/4$ (diviesor) : $6/8$ (dividend) hast musst du den dividenden ganz einfach umstellen und das geteilt(:) in ein mal(x) umändern dann hast du also $2/4 \times 8/6$ und das musst du nur noch multiplizieren.“

„brüce werden dividiert in dem man sie mit dem kehrwert der summe mukltipliziert sagt mein lehrer“

„Der Zweifel als die große moralische Gabe, die der Mensch der Sprache verdanken könnte und bis heute verschmäht hat, wäre die rettende Hemmung eines Fortschritts, der mit vollkommener Sicherheit zum Ende eine Zivilisation führt, der er zu dienen wähnt.“

Karl Kraus 1932

Literaturverzeichnis

- [1] Aus Wikipedia
- [2] Peter Baptist: Pythagoras und kein Ende?, Ernst Klett Schulbuchverlag, Leipzig GmbH, Leipzig 1997, S. 50 ff
- [3] www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik.../11Pythagoras.doc
- [4] Meldung von „Spiegel-Online“ am 24. April 2008
- [5] Die Fackel Nr. 735-742, S. 110
- [6] Spektrum der Wissenschaft Spezial 1/2003, Das Unendliche, S. 48
- [7] www.quanten.de/quantengravitation.php
- [8] P. Schreiber: Euklid, Teubner Verlagsgesellschaft 1987, Band 87, S. 63 f.
- [9] http://ne.lo-net2.de/nullstellen-quadratische-funktionen/quadratische_funktion_ab1.html
- [10] Dufresne-Mieses: Lehrbuch des Schachspiels, 24. Auflage, Stuttgart 1972, S. 3
- [11] Harold Schonberg: Die Großmeister des Schach, Moewig-Sachbuch Nr. 3150, S. 3
- [12] MAIN-POST: Ausgabe vom 29.12.1979
- [13] Rudolf Kippenhahn: „Eins, zwei, drei ... unendlich“, Piper 2007, S. 30
- [14] Isaac Asimov: „500 000 Jahre Erfindungen und Entdeckungen“, Bechtermünz-Verlag 1996, S. 14
- [15] Martin Beheim-Schwarzbach: KNAURs Schachbuch, TB Nr. 280, S. 14
- [16] <http://www.miz-online.de/node/210>
- [17] Wunderwelt Wissen, Nov. 2010, S. 71
- [18] <http://www.fb-web-tutor.com/hobby/asien-a---m/macao/index.html>
- [19] <http://komplexify.com/images/2006/HilbertCube.jpg>
- [20] R. Göock: Das große Buch der Spiele, Bertelsmann-Verlag Gütersloh 1964, S. 82
- [21] G. Guerrerio: Kurt Gödel; Spektrum der Wissenschaft Biografie 1/2002, S. 14
- [22] D. Hofstadter: Gödel, Escher, Bach; dtv-TB 30017

- [23] Die Fackel Nr. 751-756, Feb. 1927
- [24] Die Fackel Nr. 259-260, 13.07.1908 S. 49
- [25] Die Fackel Nr. 331-332, 29.04.1911 S. 47f
- [26] Die Fackel Nr. 277-278, S. 58
- [27] Die Fackel Nr. 376-377, 30.05.1913 S. 21
- [28] Die Fackel Nr. 668-675, Dez. 1924 S. 140
- [29] Kurt Tucholsky: „Der kranke Zeisig“, Zwischen Gestern und Morgen, Rowohlt 1930, S. 143-149