

Finite Elemente Analysen zur Berechnung von Maschinenelementen mit nichtlinearem Verhalten

Christoph Wehmann, Martin Neidnicht, Florian Nützel, Bernd Roith, Frank Rieg

Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Universitätsstraße 30, 95440 Bayreuth

E-Mail: christoph.wehmann@uni-bayreuth.de

Internet: www.konstruktionslehre.uni-bayreuth.de

Inhalt: Die vorliegende Arbeit untersucht Berechnungsmöglichkeiten für die Kennlinienbestimmung von Tellerfedern. Es werden Finite Elemente Analysen mit verschiedenen Elementtypen, Elementformulierungen und Diskretisierungsgraden betrachtet. Ziel der Analysen ist die korrekte Beschreibung der auftretenden Nichtlinearität. Die Güte der Berechnungsergebnisse wird mit Hilfe der experimentell abgesicherten Kennlinie von Almen und László bewertet.

Abstract: The present publication analyzes possibilities to calculate the characteristic curve of disk springs. Therefore it contains Finite Element Analysis with different element types, element formulation and mesh fineness. The intention is getting a correct model of the nonlinear behavior. The performance of the results will be evaluated by the characteristic curve of Almen and László.

Stichwörter: Tellerfeder, Federkennlinie, Finite Elemente Analyse, Elementformulierung, Elementtyp.

Keywords: disk spring, characteristic curve, Finite Element Analysis, element formulation, element type.

1 Zielsetzung

Die Berechnung von Maschinenelementen mit nichtlinearem Verhalten und die dazu notwendigen Vorgehensweisen hinsichtlich der Modellbildung stehen im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen. Dazu werden verschiedene Finite Elemente Analysen zur Berechnung der Kennlinien von Tellerfedern durchgeführt.

Die Analysen unterscheiden sich durch Elementtyp, Elementformulierung und Diskretisierung. Als Elementtypen kommen lineare und quadratische Tetraeder und Hexaeder aus [1] zum Einsatz. Die Elementformulierung betreffend wird die Eignung der totalen Lagrange'schen Formulierung [2] untersucht. Außerdem wird der Gewinn an Ergebnisgüte gegenüber der klassischen, linearen Formulierung herausgearbeitet. Schließlich wird der Einfluss des Diskretisierungsgrads geprüft.

Zur Berechnung der Kennlinien wird eine eigens für diese Zwecke entwickelte Funktionalität des Präprozessors von Z88 Aurora[®] [3] angewendet. Sie erlaubt, an diskreten Orten mechanische Größen über den Verlauf der Verformung aufzuzeichnen.

2 Modellbildung und Vorgehen

2.1 Grundlegendes Finite Elemente Modell

Als Berechnungsgrundlage dient die in Bild 1 gezeigte Tellerfeder, bei der der äußere Tellerrand reibungsfrei in der Tellerebene beweglich ist. Allein die Bewegung in Axialrichtung ist fixiert. Ein virtueller Fixpunkt gewährleistet eine statisch bestimmte Lagerung ohne die radiale Bewegungsfreiheit einzuschränken. Die Kraft wird gleichmäßig auf die Knoten des inneren Tellerrandes aufgebracht.

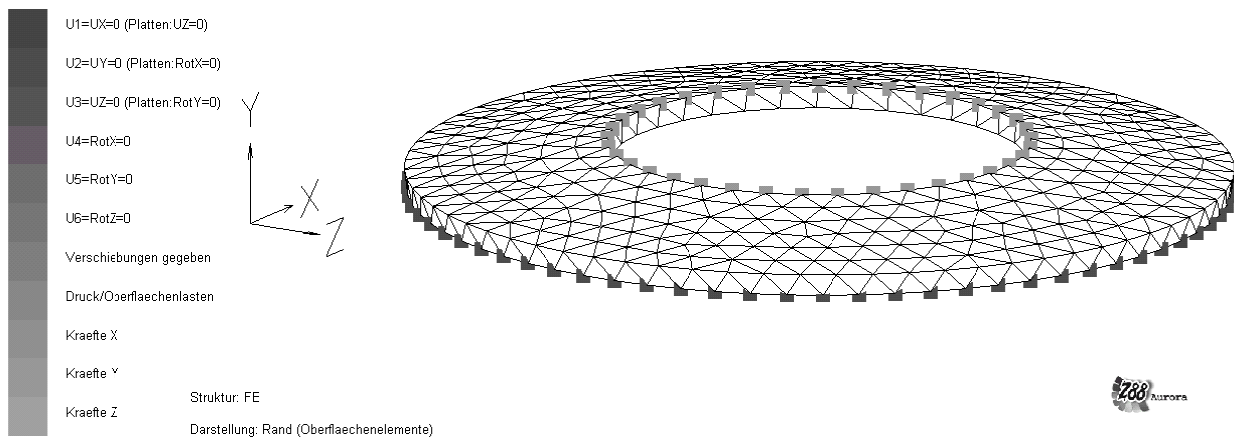


Bild 1: Modell der Tellerfeder mit Randbedingungen, dargestellt in Z88 Aurora[®]

2.2 Totale Lagrange'sche und klassische Elementformulierung

Die Elementformulierung erfordert die Wahl eines geeigneten Spannungsmaßes, auch wenn lediglich Verschiebungen berechnet werden sollen. Bei der klassischen Elementformulierung ist dies die technische Spannung σ . Zur Beschreibung geometrischer Nichtlinearitäten existieren mehrere Spannungsmaße, insgesamt 16 Stück [4]. Hier wird die 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannung S angewendet, die bezogen auf die unverformte Struktur definiert ist. Auch das zur totalen Lagrange'schen Elementformulierung gehörige Dehnungsmaß, die Lagrange'sche Dehnung λ , ist bezogen auf die unverformte Struktur

definiert. In Tabelle 1 ist ein Überblick über einige Spannungs- und Dehnungsmaße gegeben.

Tabelle 1: Übersicht über verschiedene Spannungs- und Dehnungsmaße

Spannungsmaß	Arbeitskonjugiertes Dehnungsmaß
Technische Spannung σ	Technische Dehnung ϵ
2. Piola-Kirchhoff'sche Spannung S	Lagrange'sche Dehnung λ
Cauchy'sche Spannung σ_c	Euler'sche Dehnung η

Im nächsten Schritt müssen Spannung und Dehnung über ein Materialgesetz verknüpft werden. Für die klassische Elementformulierung wird das Hooke'sche Gesetz nach Gl. (1) verwendet.

$$\sigma = C \epsilon \quad (1)$$

Bei der totalen Lagrange'schen Elementformulierung findet die Übertragung des Hooke'schen Gesetzes auf die Theorie endlicher Dehnungen, das St. Venant'sche Gesetz (2), Anwendung [5].

$$S = C \lambda \quad (2)$$

In den Gleichungen (1) und (2) ist mit C die Materialmatrix bezeichnet, die aus Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl berechnet werden kann [1].

2.3 Tetraeder- und Hexaederelemente, Diskretisierung

Die Kennlinien werden mit Hilfe von vier verschiedenen Elementen berechnet. Es kommen zwei Z88-Tetraederelemente, Tetraeder Nr. 16 mit 10 Knoten und Tetraeder Nr. 17 mit 4 Knoten, zum Einsatz, sowie die Z88-Hexaederelemente Hexaeder Nr. 1 mit 8 Knoten und Hexaeder Nr. 10 mit 20 Knoten. Die Integrationsordnung zur Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen wird gemäß der Empfehlung in [1] gewählt. Die Elemente werden außerdem in unterschiedlich fein diskretisierten Netzen verwendet. Die feinsten Netze besitzen knapp 75.000 Freiheitsgrade, während die größten Netze nur ungefähr 5.000 Freiheitsgrade umfassen.

2.4 Computertechnische Auswertung

Aufgrund der Symmetrie genügt es, die Verschiebung eines Knotens des belasteten Tellerinnenrandes zu betrachten. Dieser Knoten kann in Z88 Aurora[®] über die grafische

Benutzeroberfläche gewählt werden, so dass der Gleichungslöser für jede Laststufe die zugehörige Verschiebung in Achsrichtung ausgibt. Diese Berechnungsergebnisse dienen als Grundlage für die Untersuchungen in Kapitel 3.

3 Ergebnisse und Auswertung der Berechnungen von Tellerfedern

3.1 Analytische Referenzberechnung

Die Güte der mittels der Finite Elemente Analyse berechneten Kennlinien wird über die Abweichung von der Kennlinie nach Almen und László bewertet. Der entsprechende Zusammenhang zwischen Kraft und Weg ist in (3) dargestellt, entnommen aus [6].

$$F = \frac{4 \cdot E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{t^4}{K_1 \cdot D_e^2} \cdot \frac{s}{t} \cdot \left[\left(\frac{h_0 - s}{t} \right) \cdot \left(\frac{h_0 - s}{t} - \frac{s}{2t} \right) + 1 \right] \quad (3)$$

Die Eingabewerte sind $E=206.000 \text{ N/mm}^2$, $\nu=0.3$, $D_e=112 \text{ mm}$, $D_i=57 \text{ mm}$, $h_0=3,9 \text{ mm}$, $t=3,0 \text{ mm}$ und $K_1=0,687$.

3.2 Einfluss der Elementformulierung

Die beiden verwendeten Elementformulierungen führen bei der Kennlinienberechnung auf deutlich unterschiedliche Kurven. Sind Elementtyp und Diskretisierungsgrad gleich, liegt die mittels der totalen Lagrange'schen Formulierung errechnete Linie stets näher an der Referenzlinie als bei Berechnung über die klassische Elementformulierung.

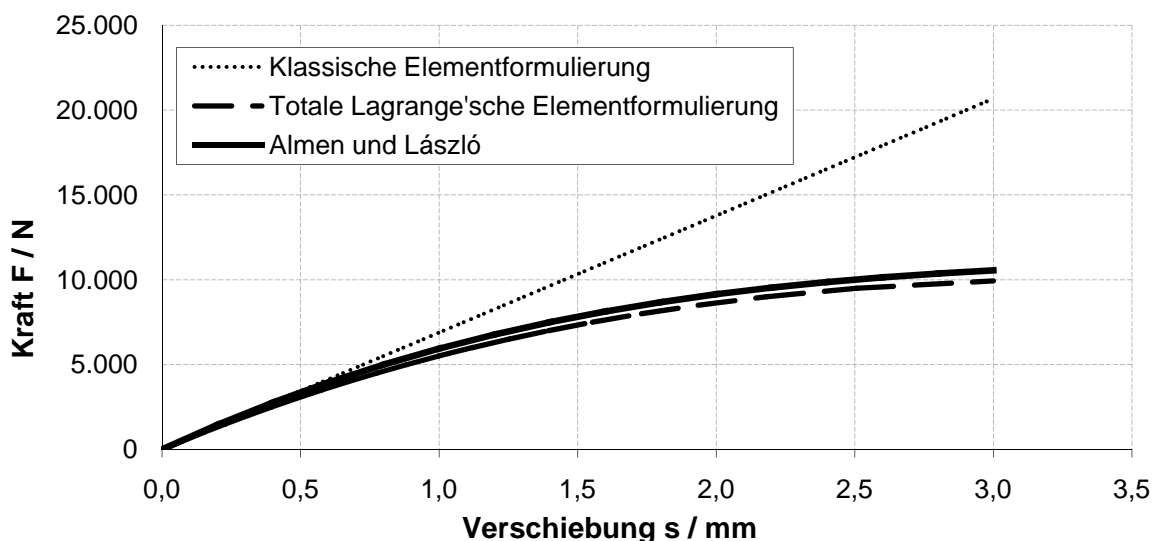


Bild 2: Berechnete Federkennlinien für verschiedene Elementformulierungen

Insbesondere bei Verwendung der Elementtypen Tetraeder Nr. 16, Hexaeder Nr. 1 und Hexaeder Nr. 10 erhält man eine sehr gute Annäherung an die analytisch berechnete Referenzlinie. In Bild 2 sind die mit Tetraedern Nr. 16 berechneten Federkennlinien zu sehen. Das zu Grunde liegende Netz besitzt 5332 Elemente und 33252 Freiheitsgrade. Die totale Lagrange'sche Formulierung liefert eine leicht degressivere Kennlinie als die nach Almen und László. Dies könnte auf die im Finite Elemente Modell näherungsweise angenommene reibungsfreie Lagerung zurückzuführen sein. Reibung würde die radiale Bewegung behindern und könnte so ein weniger nachgiebiges Verhalten der Tellerfeder nach sich ziehen.

3.3 Einfluss von Elementtyp und Diskretisierungsgrad

Aus Kapitel 3.2 geht hervor, dass die totale Lagrange'sche Elementformulierung sehr gut für die Kennlinienberechnung geeignet ist. Daher wird fortan mit dieser Formulierung gearbeitet. Es soll nun der Einfluss des Elementtyps untersucht werden. Dazu werden die in Kapitel 2.3 beschriebenen Elementtypen herangezogen. Alle vier verwendeten Netze besitzen jeweils knapp 10.000 Knoten. In Bild 3 ist zu sehen, dass Tetraeder mit linearen Formfunktionen keine gute Übereinstimmung mit der Referenzlinie liefern.

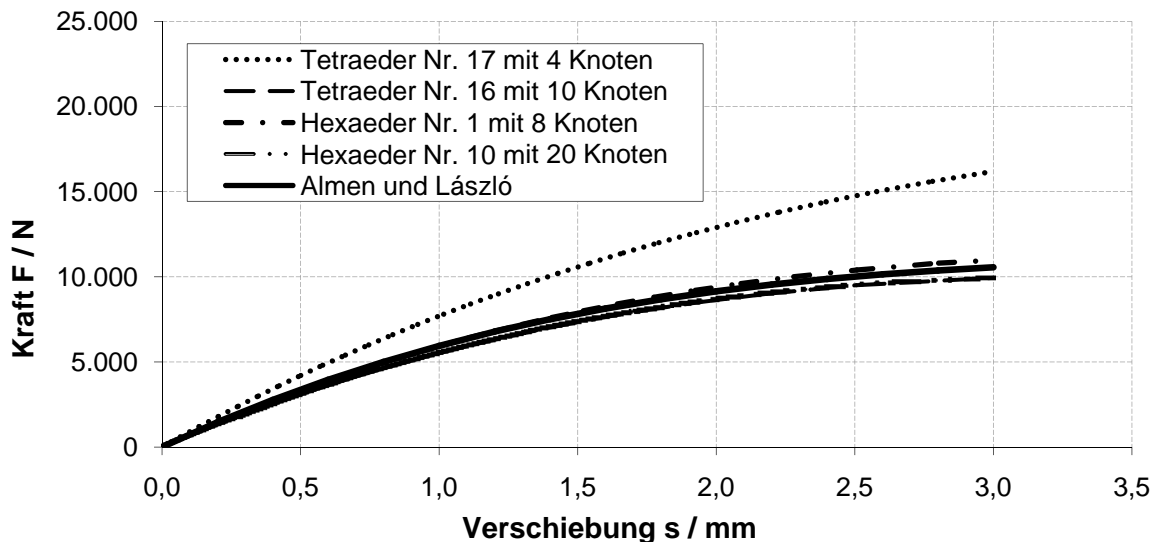


Bild 3: Berechnete Federkennlinien, totale Lagrange'sche Formulierung

Die anderen drei Elementtypen dagegen führen auf eine Federkennlinie mit sehr geringer Abweichung von der Referenzlinie. Mit zunehmend feinerer Diskretisierung konnte eine Annäherung der auf Tetraedern Nr. 17 basierenden Kennlinie an die beiden Linien, die

von Elementen mit quadratischen Formfunktionen stammen, beobachtet werden. Dies könnte auf die unzureichende Abbildungsgenauigkeit des Tetraeders Nr. 17 hinsichtlich des Spannungsverlaufs zurückzuführen sein. Tetraeder mit linearen Formfunktionen besitzen eine über das Element konstante Spannung. Daher sind in Dickenrichtung mehrere Elemente notwendig, um die Spannungen mitten in der Tellerfeder wiederzugeben und gleichzeitig die Randbedingung einer kräftefreien Oberfläche einzuhalten. Auch bei den Hexaedern Nr. 1 konnte die gleiche Annäherung mit zunehmend feineren Netzen festgestellt werden. Die Änderung ist hier allerdings nicht so stark, was auf die Abbildungsmöglichkeit von linearen Spannungsverläufen zurückzuführen sein könnte.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Es konnte gezeigt werden, dass die totale Lagrange'sche Elementformulierung sehr gut zur Beschreibung des nichtlinearen Verhaltens von Tellerfedern geeignet ist. Hinsichtlich der Elementtypen weisen die Elemente Tetraeder Nr. 16, Hexaeder Nr. 1 und Hexaeder Nr. 10 geringe Abweichungen von der Referenzlinie auf. Tetraeder Nr. 17 dagegen zeigt hohe Abweichungen von der Referenzlinie.

In weiteren Untersuchungen wäre zu klären, ob das leicht nachgiebigere Verhalten auf Reibungseffekte zurückzuführen ist oder ob vielleicht eine dritte Elementformulierung die Referenzlinie noch besser trifft.

Literatur

- [1] Rieg, Frank; Hackenschmidt, Reinhard: *Finite Elemente Analyse für Ingenieure*. 3. Auflage München, Wien: Carl Hanser Verlag, 2009. – ISBN 978-3-446-40215-7
- [2] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. 2. Auflage Berlin: Springer Verlag, 2002. – ISBN 3-540-66806-3
- [3] Rieg, Frank: Homepage des Finite Elemente Systems Z88 Aurora[®]: <http://www.z88.de>.
- [4] Macvean, D. B.: *Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren*. ZAMP, 19, 1968, S. 157-185.
- [5] Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin: Springer Verlag, 2001. – ISBN 3-540-67747-X
- [6] Decker, K.-H.; Kabus, K.: *Maschinenelemente. Funktion, Gestaltung und Berechnung*. 16. Auflage München: Carl Hanser Verlag, 2007. – ISBN 978-3-446-40897-5