

# Steigerung der Abbildungsgenauigkeit lokaler FE-Ergebnisse mittels Netzverfeinerung bestehender Tetraeder-Netze

Martin Neidnicht, Florian Nützel, Bernd Roith, Christoph Wehmann, Frank Rieg

Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth

Universitätsstraße 30, 95440 Bayreuth

Email: martin.neidnicht@uni-bayreuth.de

Internet: <http://www.konstruktionslehre.uni-bayreuth.de>

**Inhalt:** Im vorliegenden Beitrag wird ein Werkzeug zur lokalen Netzverfeinerung bestehender Tetraeder-netze für die Finite Elemente Analyse (FEA) vorgestellt. Die Bauteildiskretisierungen, die ausgehend von groben, jedoch zumindest geometriebeschreibenden Tetraederzerlegungen gewonnen werden können, vermitteln zwischen konkurrierenden Zielen. Dabei steht eine gute Abbildungsgenauigkeit des realen Bauteilverhaltens in der FE-Simulation einer möglichst kurzen Rechenzeit gegenüber. Zunächst wird ein Algorithmus zur räumlichen Subtriangulierung vorgestellt, der eine nutzergesteuerte Auswahl der interessierenden Bauteilregionen berücksichtigt. Das Verfahren wird anschließend um eine Funktionalität zur Aufrechterhaltung der Netzkonformität ergänzt. Unter besonderer Berücksichtigung gängiger Netzgütekriterien erfolgt schließlich die Anwendung auf ein Beispielbauteil.

**Abstract:** This article provides a tool for local refinement of already existing tetrahedron meshes, which are used in the finite element analysis (FEA). The body discretizations, synthesized of raw but at least geometry mapping tetrahedron meshes give an opportunity to combine the competing aims of reliable FE-results against moderate calculation time for handling the according differential equations. At first an algorithm for three-dimensional decomposition of user selected mesh regions is defined. Furthermore this method is completed by a functionality to keep the mesh conformity alive. Finally the developed utility is applied to an example with special regards to common mesh quality criteria.

**Stichwörter:** Finite Elemente, Diskretisierung, Adaptive Netzgenerierung, Tetraeder, Mapped-Meshing

**Keywords:** Finite Element, Discretisation, Adaptive Mesh, Tetrahedral Mesh Generation, Mapped Meshing

## **1 Lokale Netzverfeinerung zur Steigerung der FE-Ergebnisgüte bei gleichzeitig moderatem zusätzlichem Rechenaufwand**

Eine möglichst genaue Repräsentation der Bauteilgeometrie ist die wichtigste notwendige Bedingung zur Durchführbarkeit der Finite-Elemente-Analyse (FEA). [1] Die Abweichung zwischen kontinuierlicher Bauteiloberfläche und dessen diskretisierter FE-Modellierung wird als Diskretisierungsfehler bezeichnet und hat erheblichen Einfluss auf die zu erwartenden numerischen Fehler der FE-Rechenergebnisse in sämtlichen Anwendungsbereichen dieser Methode. Diese Sensitivität bzgl. Geometrieabbildung wird bei allen gängigen Netzgeneratoren beachtet, so dass sich der erstellte Algorithmus lediglich an der bereits vorhandenen Diskretisierung orientieren muss. Als Ausgangssituation wird ferner angenommen, dass es sich bei der Eingabe zunächst um lineare Tetraedernetze handelt.

Ziel der Arbeit ist die Vereinigung der zu erwartenden höheren Reliabilität der lokalen FE-Ergebnisse an den betrachteten Stellen mit gleichzeitig nur moderat steigendem Berechnungsaufwand bei der Lösung des charakterisierenden Gleichungssystems.

## **2 Algorithmische Umsetzung**

Anders als beim Mapped-Meshing für Hexaederstrukturen gibt es bei der Tetraederverfeinerung keine Wahlfreiheit bzgl. der Unterteilungsintervalle. Es ist nämlich mathematisch keineswegs gewährleistet, dass die bei beliebiger Subtriangulierung jeweils verbleibenden Polygonteile ihrerseits noch eine sinnvolle Triangulierung zulassen. Insbesondere müsste hier mit einer starken Verschlechterung der Netzgütekriterien [2] wie kleinsten Winkeln, unausgeglichene Seitenverhältnissen, etc. gerechnet werden. Vielmehr bietet sich gerade für Tetraeder eine feste Unterteilung mit beherrschbarem Einfluss auf die Netzqualität an. Als Ansatz für den erstellten Mapped-Mesher wurde eine Halbierung jeder Elementkante gewählt. Abbildung 1 illustriert das Vorgehen für jede der Tetraeder-oberflächenseiten.

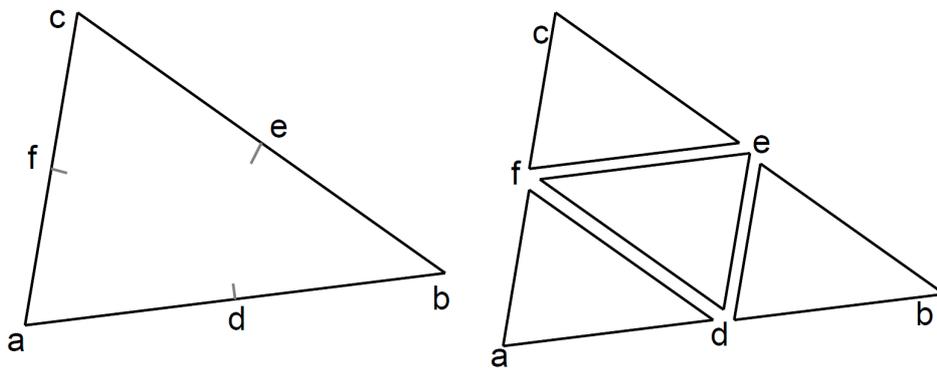


Abbildung 1: Ähnlichkeitsbeziehungen für jede Tetraederoberflächenseite

Durch eine Betrachtung der Innenwinkelsummen an den neu entstandenen Mittenknoten d, e, f erhält man die erwarteten Ähnlichkeitsbeziehungen. [4] Die Formeln (1) – (3) führen die neu entstandenen Winkel auf die bereits existierenden Winkel zurück.

$$\angle dea = \frac{\pi}{2} - \angleafd - \angleefc = \frac{\pi}{2} - \angleacb - \anglebac = \anglecba \tag{1}$$

$$\angle fed = \frac{\pi}{2} - \angledeb - \anglecef = \frac{\pi}{2} - \angleacb - \anglecba = \anglebac \tag{2}$$

$$\angle fde = \frac{\pi}{2} - \anglefda - \anglebde = \frac{\pi}{2} - \anglecba - \anglebac = \angleacb \tag{3}$$

Da diese Beziehungen für alle Seitenflächen eines jeden Tetraeders Gültigkeit besitzen, folgt, dass alle Winkel, die auch durch räumliche Subtriangulierung erzeugt werden, denen der bereits existierenden Struktur entsprechen.

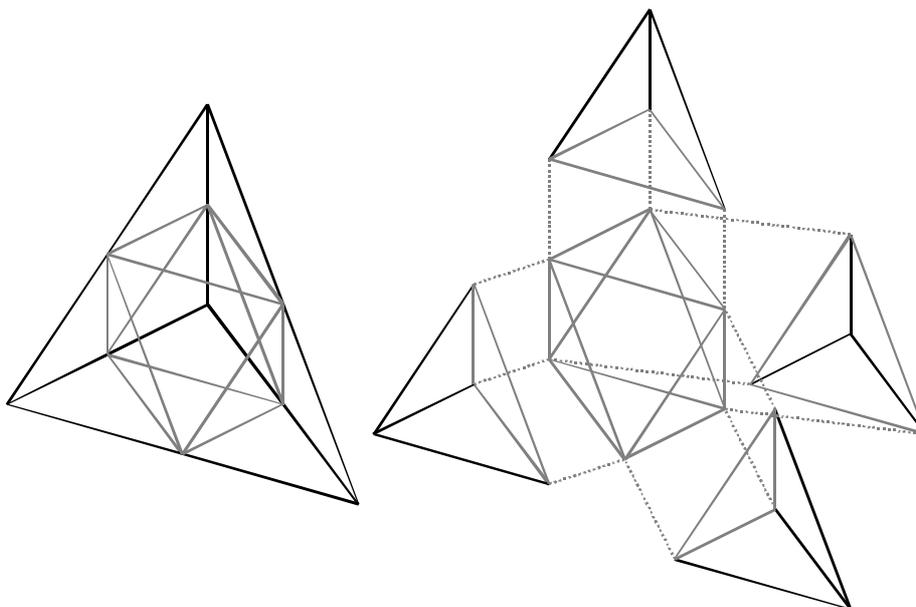


Abbildung 2: Zerlegung eines Tetraeders in vier ähnliche Tetraeder und ein oberflächenähnlicher Oktaeder

In Abbildung 2 wird das Vorgehen in Bezug auf jede der vier Seitenflächen demonstriert. Der durch die beschriebene Subtriangulierung entstehende Oktaeder besitzt lediglich Außenflächen, die ähnlich zur Ausgangsstruktur sind und kann demnach ebenfalls wieder in vier ähnliche Tetraeder geteilt werden. Unter der Annahme, dass der Ausgangstetraeder gleichseitig ist, lässt sich sogar zeigen, dass jeder Teiltetraeder ebenfalls gleichseitig ist und zudem identisches Volumen besitzt. Eine Verschlechterung der Netzgütekriterien ist damit ausgeschlossen.

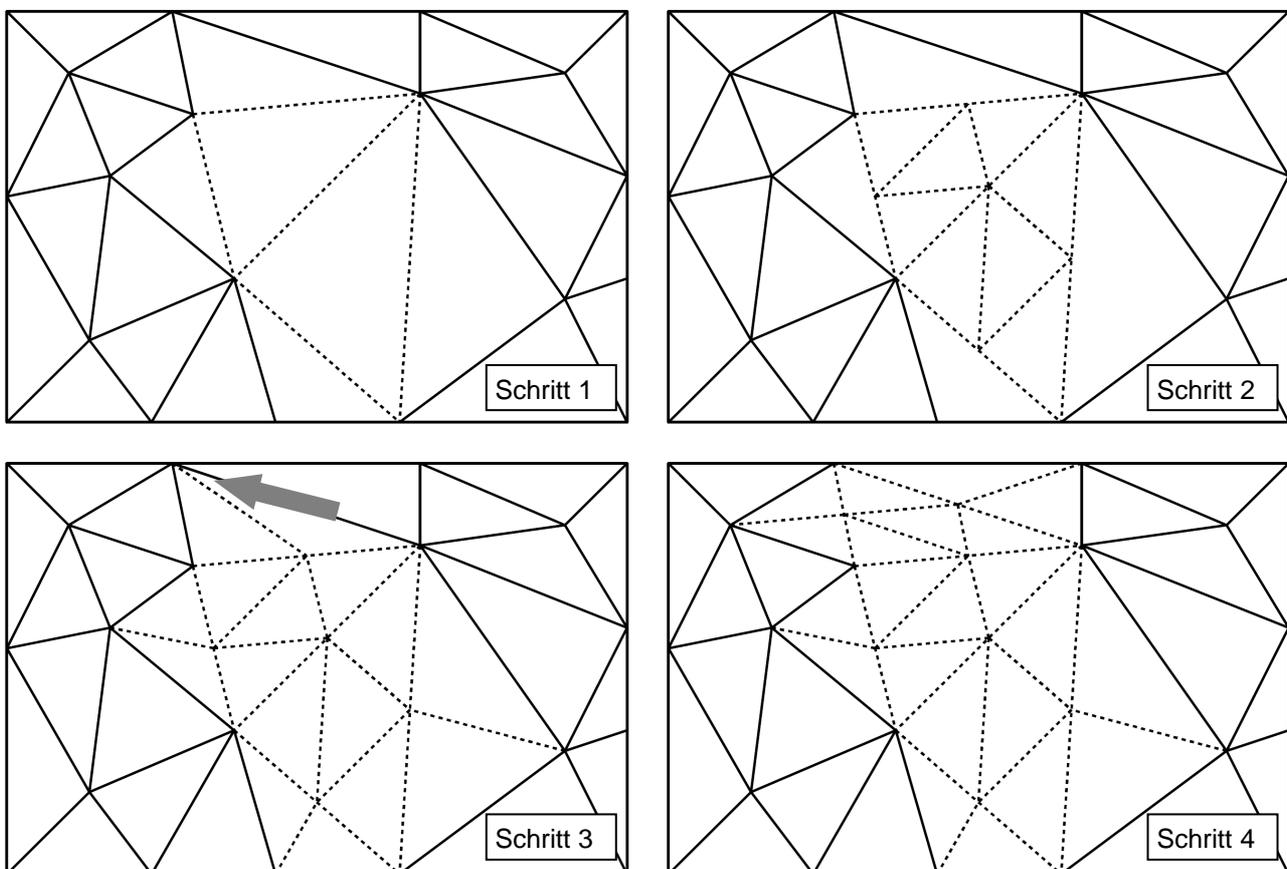


Abbildung 3: Verlauf des Verfeinerungsalgorithmus mit Winkelkriterium auf einer Netzoberfläche

Einhergehend mit einer lokalen Netzverfeinerung tritt das Problem der Nichtkonformität der entstehenden Netze auf. So liegen an angrenzenden Tetraedern nach der Verfeinerung eines Nachbarelements 7 statt 4 Knoten. Um die erzeugten Netze weiterhin mit den bestehenden Algorithmen berechnen zu können, sind Maßnahmen zum Erhalt der Konformität notwendig. Hierzu wurde festgelegt, dass lediglich die Seitenflächen angrenzender Elemente verfeinert werden, die dies erfordern, alle anderen sollen in originalen Abmessungen erhalten bleiben. Da es durch diese Konvention zu sehr spitzen Winkeln innerhalb

dieser Bindeelemente kommen kann, wurde ein Mindestwinkel festgelegt, der nicht unterschritten werden darf. Löst dieses Qualitätskriterium aus, wird das Element trotzdem so verfeinert, wie es der Ausgangsalgorithmus vorschreibt. Der Gesamtalgorithmus lässt sich in 4 Schritte gliedern, die in Abbildung 3 exemplarisch für eine Oberfläche dargestellt sind:

**Schritt 1:** Identifikation der zu unterteilenden Ausgangstetraeder aus einer Eingabedatei

**Schritt 2:** Subtriangulierung dieser in je 8 ähnliche Tetraeder

**Schritt 3:** Übertragung der Kantenverfeinerung auf alle angrenzenden Tetraeder

**Schritt 4:** Prüfung auf Verletzung des Mindestwinkelkriteriums, ggf. zurück zu Schritt 1

### 3 Ergebnisse

Der beschriebene Algorithmus wurde in der Programmiersprache C implementiert und hinsichtlich der spezifischen Abspeicherung der Netzstruktur des FE-Programms Z88 [3] ausgelegt. Im Folgenden sollen anhand eines einfachen Beispiels die Resultate des Mapped-Meshers für Tetraeder dargestellt werden.

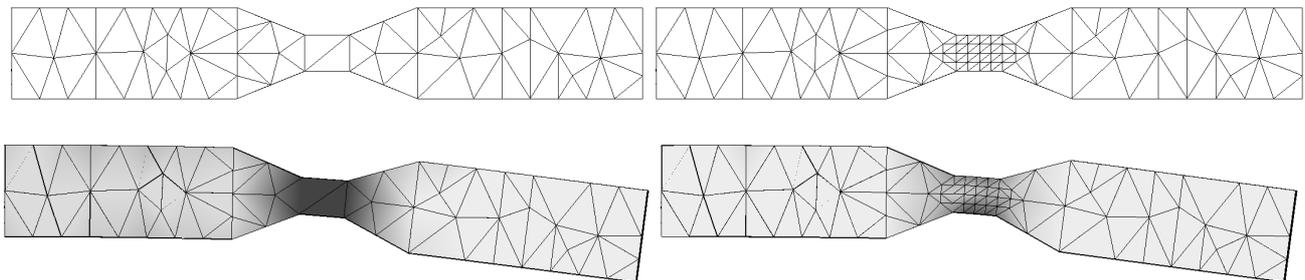


Abbildung 4: Bauteilvernetzung mit Tetgen (links), zweifach mapped-meshed im sensiblen Bereich (rechts)

Das obige Bauteil wurde zunächst mit dem in Z88 Aurora® integrierten Tetraeder-Vernetzer Tetgen grob vernetzt. Anschließend wurden die Elemente an der Einschnürung ausgewählt und dem erstellten Verfeinerungs-Tool übergeben. Da dies zweifach ausgeführt wurde, ist also jeder Originaltetraeder in  $8^2=64$  ähnliche Tetraeder zerlegt worden. An den Bindeelementen links und rechts der Zerlegung tritt das Winkelkriterium (hier:  $> 5^\circ$ ) in Kraft, sodass auch einige zusätzliche Elemente verfeinert worden sind. Beide FE-Modelle wurden identischen Randbedingungen ausgesetzt. (Die Fläche links ist in alle Raumrichtungen fixiert; rechts wurde eine Verschiebung der Oberkante nach unten erzwungen. Auf den unteren Abbildungen sind die qualitativen Spannungen in den Eckknoten (berechnet nach GEH in einem Gauß-Punkt) erkennbar.

Tabelle 1: FE-Netzdaten und Ergebnisse der Berechnung bzgl. originaler Tetgen-Vernetzung (grob), deren lokaler Verfeinerung sowie einer global feinen Vernetzung mit vergleichbarer Ergebnisgüte

	Tetgen (grob)	lok. Verfeinerung	Tetgen (fein)
Anzahl der FE-Knoten	197	350	5.697
Anzahl der FE-Elemente	491	1.118	28.155
mittl. kleinster Winkel	18,112°	15,443°	17,309°
mittl. Kantenverhältnis (min./max.)	0,378	0,283	0,304
max. Knotenspannung	320 N/mm <sup>2</sup>	653 N/mm <sup>2</sup>	642 N/mm <sup>2</sup>

Die Berechnungsergebnisse, die bzgl. des lokal verfeinerten Netzes und eines global gleichmäßig Netzes mit vergleichbarem Diskretisierungsgrad erzeugt wurden, zeigen gute Übereinstimmungen des Verschiebungs- und Spannungsverlaufs in der Einschnürungsregion. Auch über das verbleibende Bauteil hinweg, sind nur geringe Abweichungen zu beobachten, da dort, wie erwartet, ohnehin nur sehr kleine Gradienten auftreten.

Der numerische Aufwand zur Lösung des resultierenden Gleichungssystems hängt stark von der Größe der Gesamtsteifigkeitsmatrix ab, welche wiederum proportional mit der FE-Knotenzahl steigt. Im Falle des betrachteten Bauteils konnte die zur zuverlässigen Spannungsabschätzung nötige Knotenzahl um ca. 93,8% gegenüber dem global feinen Netz gesenkt werden, was sich in einer signifikant kürzeren Rechenzeit niederschlägt. Die hinsichtlich der betrachteten Gütekriterien leicht gesunkene Netzqualität, ist aufgrund der hergeleiteten Ähnlichkeitsbeziehungen einzig auf die erzeugten Bindeelemente zurückzuführen und lässt sich demnach ggf. durch die Wahl des Winkelkriteriums beeinflussen.

## Literatur

- [1] Rieg, Frank; Hackenschmidt, Reinhard; *Finite-Elemente-Analyse für Ingenieure*. 3. Aufl. München: Hanser, 2009
- [2] Frey, Pascal; Borouchaki, Houman; *Geometric evaluation of finite element surface meshes*. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 31 (1998), 33-53
- [3] Rieg, Frank; *Homepage des Finite Elemente Systems Z88 Aurora®*: <http://www.z88.de>
- [4] Lax, Peter D.; *Linear algebra and its applications*. 2. Aufl. Hoboken, N.J., Wiley-Interscience, 2007