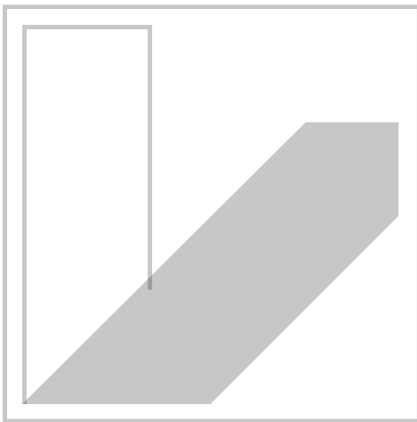


# Portfolioverluste bei plötzlichen Kurssprüngen beim Hedgen von Optionen



Michael Heinrich Baumann  
(1242113)

UNIVERSITÄT  
28. Februar 2014  
BAYREUTH

Masterarbeit  
am Lehrstuhl für angewandte Mathematik  
bei Prof. Dr. Lars Grüne

am Mathematischen Institut  
der Fakultät für Mathematik, Physik und Informatik  
der Universität Bayreuth (UBT)



# Inhaltsverzeichnis

0.1	Motivation . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
1.1	Der Markt . . . . .	9
1.2	Optionen . . . . .	9
1.2.1	Begriffsklärung . . . . .	9
1.2.2	Anwendungen . . . . .	10
1.3	Marktannahmen . . . . .	11
1.4	Risikoneutrale Bewertung . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Finanzmathematik im Ein-Perioden-Markt</b>	<b>15</b>
2.1	Arbitrage . . . . .	15
2.2	Vollständige Märkte und der faire Preis . . . . .	19
2.3	Beispiel . . . . .	23
2.4	Analyse des Phänomens . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Die Binomialmethode</b>	<b>29</b>
3.1	Das Kursmodell . . . . .	29
3.2	Optionsbewertung und Hedging . . . . .	31
3.2.1	Algorithmus mit Hilfe der risikoneutralen Bewertung . . . . .	31
3.2.2	Algorithmus mit Hedging-Strategie . . . . .	33
3.3	Das äquivalente Martingalmaß im Binomialmodell . . . . .	37
3.4	Simulation des Phänomens . . . . .	38
3.5	Analytischer Lösungsversuch des Phänomens . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Die Brown'sche Bewegung</b>	<b>49</b>
4.1	Der Wiener Prozess . . . . .	49
4.2	Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	51
4.2.1	Itô-Integral . . . . .	52
4.2.2	Itô-Lemma . . . . .	53
4.3	Geometrische Brown'sche Bewegung . . . . .	54
4.4	Random Walks . . . . .	56
4.5	Simulation geometrische Brown'sche Bewegung . . . . .	59

<b>5</b>	<b>Black-Scholes-Gleichung</b>	<b>65</b>
5.1	Herleitung der Black-Scholes-Gleichung . . . . .	65
5.2	Lösung der Black-Scholes-Gleichung . . . . .	69
5.3	Hedging . . . . .	76
5.4	Die Simulation des Phänomens . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Analytische Lösung</b>	<b>87</b>
<b>7</b>	<b>Fazit und Interpretation</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>103</b>
<b>B</b>	<b>R</b>	<b>107</b>



## 0.1 Motivation

Bei der Simulation eines Aktienkurses durch die *Brown'sche Bewegung* und der Betrachtung einer *europäischen Option* auf diesen Wert kommt es zu einem interessanten Phänomen. Wenn man die Option mit der *Black-Scholes-Gleichung* bewertet, das kontinuierliche Marktgeschehen diskretisiert und die Option mit dem sogenannten  $\Delta$ -*Hedging* aus der *Black-Scholes-Gleichung* und einem durch die Selbstfinanziertheit bestimmten Bond-Anteil hedged, das heißt sich gegen Verluste absichert, ist zu erwarten, dass sich dieses Absicherungsportfolio im Mittel verhält wie der Bond (die Bank).

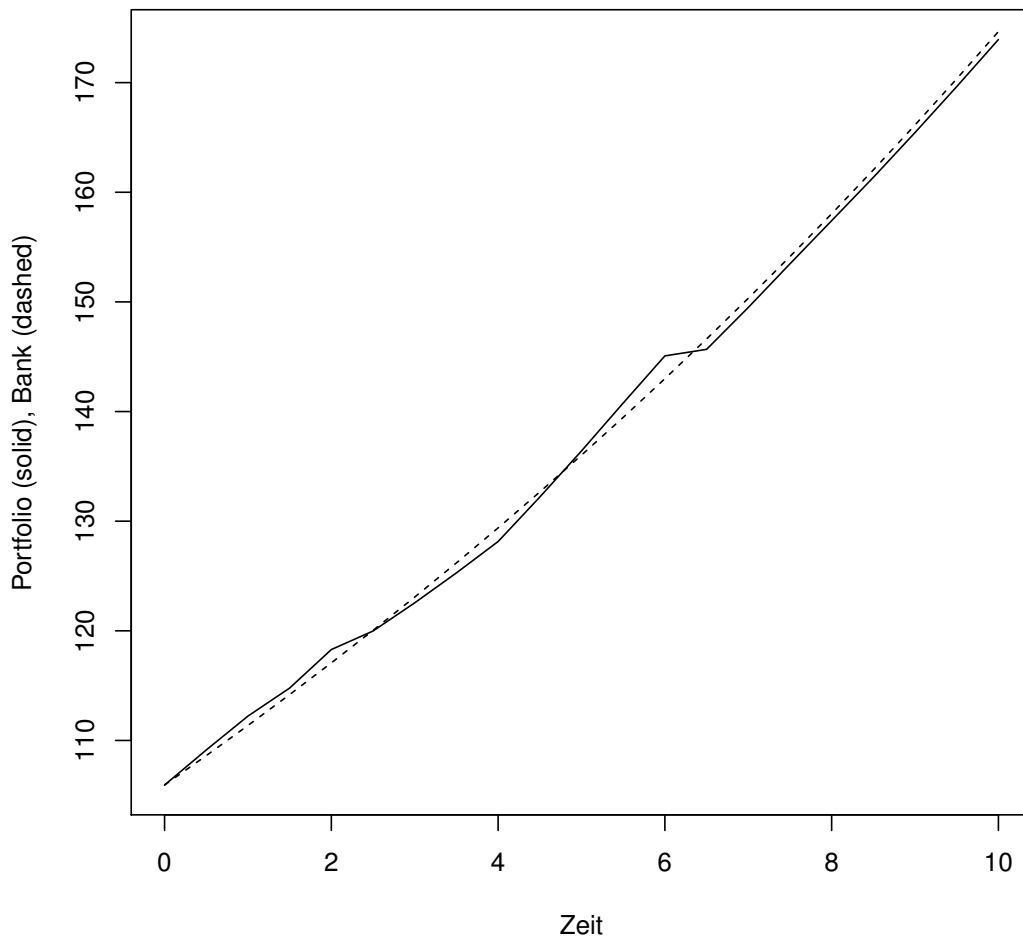


Abbildung 1: Wachstum Portfolio und Bank

Simuliert man nun einen plötzlichen Kursabfall, so verliert das Portfolio signifi-

kant an Wert.

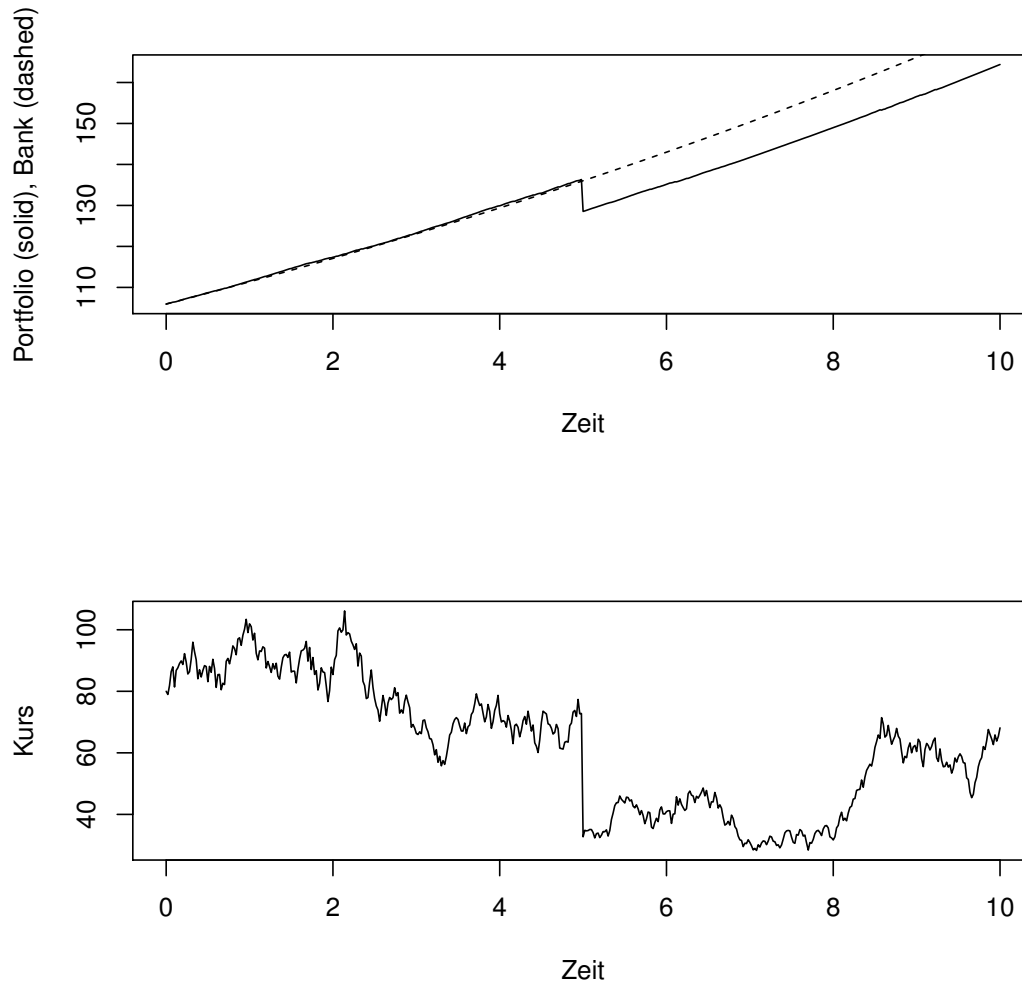


Abbildung 2: Kurssturz bei  $t = 5$

Dies ist im Moment zwar noch unbegründet, erscheint aber plausibel. Interessanter ist jedoch, dass auch bei einem spontanen Kursanstieg der Wert des Hedgingportfolios deutlich fällt.

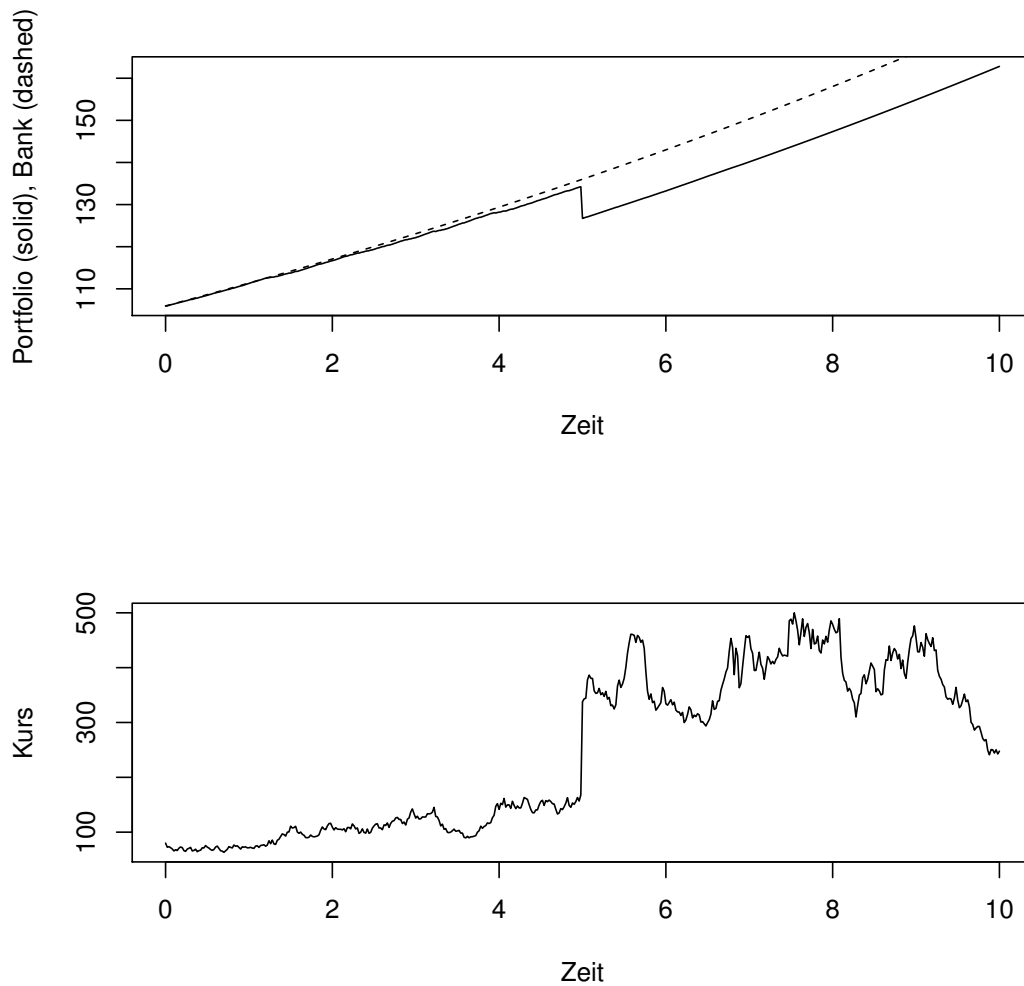


Abbildung 3: Kursanstieg bei  $t = 5$

Wir werden einige Grundlagen und Begriffe der Finanzmathematik erläutern und schließlich das hier motivierte Phänomen genauer untersuchen, wobei das Wort „plötzlich“ aus dem Titel der Arbeit einigen Interpretationsspielraum zulässt: Hier ist gemeint, dass eine solche Kursänderung im Modell unmöglich oder zumindest sehr unwahrscheinlich ist.



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Der Markt

Wir werden in dieser Arbeit Marktmodelle betrachten, die aus einer Aktie und einem Bond - also einem Bankkonto - bestehen. Wir benötigen zur näheren Beschreibung der Aktie folgende Definition.

**Definition 1.** *Ein stochastischer Prozess ist eine Funktion  $X$  mit*

$$X : \mathbb{D} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (t, \omega) \mapsto X(t, \omega).$$

Für die ganze Arbeit werden wir einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  zugrundelegen<sup>1</sup>, in dem  $\mathbb{P}$  das sogenannte Marktmaß, das ist ein Maß, von dem man zum Beispiel aus Erfahrung ausgeht, dass es das Marktgeschehen beschreibt, ist. Dabei erhält man für jedes feste  $\omega \in \Omega$  eine deterministische Funktion (genannt *Pfad*) und für jedes feste  $t \in \mathbb{D}$  eine Zufallsvariable über dem Raum  $\Omega$ . Mit  $\mathbb{D}$  wird dabei die Definitionsmenge bezeichnet, die in unserem Fall entweder kontinuierlich  $[0, T]$  oder diskret  $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  mit  $t_0 = 0, t_N = T$  ist. Die Menge  $\mathbb{D}$  steht dabei für die Zeit,  $X$  bzw.  $S$  für den Wert der Aktie. Wir modellieren den Aktienkurs  $S$  als einen solchen stochastischen Prozess mit Startwert  $S(0) = S_0$  und den Bond als festverzinslich und kontinuierlich verzinst<sup>2</sup> mit Startwert  $B(0) = B_0$ , also

$$B(t) = e^{rt} B_0.$$

### 1.2 Optionen

#### 1.2.1 Begriffsklärung

In Worten ausgedrückt stellt eine Option  $V$  das Recht – nicht jedoch die Pflicht – dar einen Basiswert  $S$  (zum Beispiel eine Fremdwährung oder wie in unserem

---

<sup>1</sup>Für Mehr-Perioden-Modelle kommt zur  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  noch eine Filtration  $(\mathcal{A}_t)_t$  hinzu.

<sup>2</sup>In diskreten Marktmodellen kann man auch exakt verzinsen:  $B(t) = (1 + r)^t B_0 \approx e^{rt} B_0$ .

Fall eine Aktie) zu einem vorher festgelegten Preis  $K$  zu kaufen (Call) oder zu verkaufen (Put). Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf eine spezielle Klasse von Optionen, nämlich auf die sogenannten europäischen Optionen. Bei diesen ist der Ausübungszeitpunkt  $T$  vorher festgelegt. Das heißt zum Zeitpunkt  $T$  darf der Käufer der Option entscheiden, ob er die Option einlösen will oder nicht. Er wird die Option natürlich nur einlösen, wenn er dadurch einen Gewinn erzielen kann, also wenn – im Fall einer Calloption – der Basiswert  $S$  mehr wert ist als der Ausübungspreis  $K$ , da er so durch den Kauf des Basiswertes bei der Emittentin der Option zum Preis  $K$  und Verkauf (an der Börse) zum Marktpreis  $S$  den Gewinn  $S - K$  erzielt. Ist der Basiswert weniger als  $K$  wert, lässt er die Option verfallen, bekommt also 0. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der Wert der Calloption zum Ausübungszeitpunkt

$$V_{Ce}(T) = (S - K)^+ \quad (1.1)$$

beträgt. Analog überlegt man sich, dass eine Putoption nur Gewinn bringt, wenn der Ausübungspreis über dem Marktpreis liegt. Also gilt

$$V_{Pe}(T) = (K - S)^+. \quad (1.2)$$

Mit den Indizes  $Ce$  und  $Pe$  wird signalisiert, dass es sich um eine europäische Call- oder Putoption handelt.

## 1.2.2 Anwendungen

Beispielhaft sollen hier zwei Standardanwendungen von Optionen aufgeführt werden. Zum einen dienen Optionen der Absicherung, so kann eine Unternehmerin (aus der Euro-Zone), die in einem Monat 100.000 \$ in den USA investieren will, sich durch den Kauf einer Calloption auf 100.000 \$ mit  $K$  fest und  $T = 30$  Tagen vor Kursschwankungen absichern. Diese Risikobegrenzung ist natürlich nicht kostenlos, denn die Unternehmerin muss die Option kaufen. Wie viel so eine Option wert ist, das heißt wie hoch ihr *fairer Preis* ist, ist eine der Grundfragen der Finanzmathematik.

Eine andere Anwendung für Optionen bietet die Spekulation. Angenommen, ein Aktienbündel  $S$  hat im Zeitpunkt  $t_0 = 0$  einen Wert von 4.000 EUR, der Marktzins ist konstant 6% und der Spekulant erwartet, dass das Bündel innerhalb eines Jahres deutlich an Wert gewinnt. Deshalb kauft er sich das Recht, das Aktienpaket in einem Jahr ( $T = 1$ ) für den heutigen Preis zu kaufen. Diese Calloption kostet 590 EUR<sup>3</sup>. Alternativ dazu hätte der Spekulant das Aktienbündel auch für 4.000 EUR kaufen können. Betrachten wir nun drei Szenarien:

1. Der Wert des Paketes sinkt unerwartet auf 2.000 EUR. Falls die Option gekauft wurde, beträgt der Verlust 590 EUR, bei Kauf der Aktien hätte er 2.000 EUR betragen.

---

<sup>3</sup>gerundeter Black-Scholes-Wert mit  $\sigma = 0,3$

2. Der Wert des Aktienbündels bleibt gleich. Durch den Kauf der Option entsteht ein Verlust von 590 EUR, durch den Kauf der Aktien würde er eine „schwarze Null“ erzielen.
3. Der Wert der Aktien steigt auf 6.000 EUR. Der durch den Kauf der Option entstehende Gewinn beträgt 1.410 EUR, dies ergibt eine Rendite von 239 %. Durch die Aktien selbst betrüge der Gewinn 2.000 EUR, die Rendite jedoch nur 50 %.

Wie man leicht sieht, hat der Kauf der Option die Vorteile der Verlustdeckelung (maximaler Verlust: Kaufpreis der Option), einer kleineren Investitionssumme und der Chance auf (deutlich) größere Renditen. Im Fall eines Gewinnes wird dieser jedoch immer kleiner sein, als beim direkten Kauf der Aktien.

## 1.3 Marktannahmen

Die Annahmen, auf denen unsere Marktmodelle beruhen, sind im wesentlichen folgende zwei:

1. Geld kann jederzeit und in beliebiger Höhe auf die Bank gelegt oder von dieser geliehen werden, dabei werden die *Zinsen* für einen Betrag  $x$  und eine Verzinsungsdauer  $t$  kontinuierlich mittels  $e^{rt}x$  berechnet.  $r$  stellt dabei den Zinssatz dar, dieser ist konstant über die Zeit und der gleiche für Anlagen und Kredite.
2. Der Markt ist *arbitragefrei*, das heißt jede Anlage, die fast sicher keinen Verlust macht, macht fast sicher auch keinen Gewinn. Diese Bedingung nennt man auch *Non-Arbitrage (NA)*.

Manche dieser Annahmen sind zugegebenermaßen unrealistisch, da zum Beispiel in echt keine Kredite beliebiger Größe vergeben werden können. Andere Annahmen, wie beispielsweise die der Arbitragefreiheit, sind durchaus gerechtfertigt, denn, sollte in einem Markt die Möglichkeit auf risikofreien Gewinn bestehen, würde jeder Marktteilnehmer diese ergreifen und der Schaffer dieser Chance somit ausgebeutet. Diese beiden Annahmen sind sehr wichtig für die Theorie hinter der Optionsbewertung. Dass der Zinssatz für Darlehen und Anlagen gleich ist, ist bei Bank-zu-Bank-Geschäften in etwa gerechtfertigt, bei Bank-zu-Kunde-Geschäften nicht. Diese Annahme könnte verallgemeinert werden, wodurch jedoch sowohl das Schreiben als auch das Verstehen der Arbeit erschwert würde.

Aus den obigen Annahmen kann man eine Fülle an Folgerungen ableiten, so zum Beispiel, dass auch keine Möglichkeit auf Verlust ohne die Möglichkeit auf Gewinn vorhanden sein kann, da eine solche Option für die Emittentin Arbitrage bedeuten würde. Des Weiteren kann man sich mittels Portfolios überlegen, dass folgender Satz gilt, da sonst der Markt nicht arbitragefrei wäre.

**Satz 2.** Sei  $P$  ein Finanzprodukt, welches zum Zeitpunkt  $T$  den festen Wert  $P(T) = P_T$  oder mindestens den Wert  $P_T$  (das heißt  $P(T) \geq P_T$ ) oder höchstens den Wert  $P_T$  (das heißt  $P(T) \leq P_T$ ) hat, so gilt zum Zeitpunkt  $t < T$ :

$$P(t) = e^{r(t-T)} P_T$$

bzw. „ $\geq$ “ oder „ $\leq$ “ statt „ $=$ “.

*Beweis.* Wir wollen zuerst „ $P(T) \geq P_T \stackrel{!}{\Rightarrow} P(t) \geq e^{r(t-T)} P_T$ “ beweisen. Für  $t \in [0, T]$  stellen wir uns das Portfolio

$$\Pi(t) = P(t) - P(t) = 0$$

zusammen, wobei der Subtrahend für das Finanzprodukt und der Minuend für den Preis dieses Produktes steht. Dann gilt:

$$\Pi(T) = P(T) - P(t)e^{r(T-t)}$$

Nehmen wir nun an, dass  $P(T) \geq P_T$  und  $P(t) < e^{r(t-T)} P_T$  sind. So folgt, dass

$$\Pi(T) > P_T - e^{r(T-t)} e^{r(t-T)} P_T = 0$$

gilt, was ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit ist. Analog beweist man „ $\leq$ “. Und damit folgt „ $=$ “.  $\square$

Damit können wir eine erste Aussage über den Preis europäischer Put- und Calloptionen machen.

**Satz 3** (Put-Call-Parität). Für alle  $t \in [0, T]$  gilt:

$$S(t) - Ke^{r(t-T)} = V_{Ce}(t, S(t)) - V_{Pe}(t, S(t)).$$

*Beweis.* Betrachten wir das Portfolio  $\Pi(t) = S(t) + V_{Pe}(t, S(t)) - V_{Ce}(t, S(t))$  für  $t \in [0, T]$ . In  $t = T$  gilt

$$\Pi(T) = S(T) + (K - S(T))^+ - (S(T) - K)^+ = K.$$

Mit Satz 2 folgt, dass  $\Pi(t) = e^{r(t-T)} K$  ist.  $\square$

## 1.4 Risikoneutrale Bewertung

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt kennengelernt, wie Finanzprodukte mit festen Auszahlungen zu bewerten sind. Des Weiteren haben wir einen Zusammenhang zwischen den Preisen für europäische Put- und europäische Calloptionen bewiesen. Es stellt sich nun die Frage, wie der Preis für Optionen bestimmt werden kann. Dazu führen wir die risikoneutrale Bewertung ein. Wir werden im Verlauf der Arbeit sehen, dass diese sinnvoll ist.

**Definition 4.** Der risikoneutrale Wert einer Option  $V$  zum Zeitpunkt  $t$  ist

$$V(t) = e^{r(t-T)} \mathbb{E}[V(T) | \mathcal{A}_t].$$

Dabei stellt sich die Frage, bezüglich welchen Maßes der Erwartungswert berechnet werden soll. Das bisher aufgeführte Marktmaß  $\mathbb{P}$  ist hierfür nicht geeignet, da es auf subjektiven Einschätzungen der einzelnen Marktteilnehmer beruht. Aus diesem Grund führen wir die sogenannten risikoneutralen Maße (Martingalmeße) ein, die zur Berechnung des risikoneutralen Preises dienen<sup>4</sup> und für alle Marktteilnehmer gleich sind.

**Definition 5.** Ein Maß, für das gilt, dass

$$\mathbb{E}[S(s) | \mathcal{A}_t] = e^{r(s-t)} S(t) \quad \forall 0 \leq t \leq s \leq T$$

und alle Erwartungswerte existieren, heiße risikoneutrales Maß oder Martingalmaß.

Mit der Bedingung auf  $\mathcal{A}_t$  ist gemeint, dass wir uns im Zeitpunkt  $t$  befinden und alle Informationen bis dahin bekannt sind.  $(\mathcal{A}_t)_t$  ist dabei eine Filtration der Sigmaalgebra  $\mathcal{A}$ . Das Marktmaß scheint dabei keine Rolle zu spielen, ist jedoch insofern wichtig, als dass es beschreibt, welche Szenarien möglich sind und welche nicht. Deshalb definieren wir im nächsten Kapitel *quivalente Maße*.

---

<sup>4</sup>wenn sie zum Marktmaß quivalent sind



# Kapitel 2

## Finanzmathematik im Ein-Perioden-Markt

Dieses Kapitel ist angelehnt an [6] und [2], worauf ich den Leser für tiefer gehende Fragen verweise.

### 2.1 Arbitrage

**Definition 6.** Seien  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  zwei Maße über dem selben Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$ , dann heiße  $\mathbb{P}$  absolut stetig bezüglich  $\mathbb{Q}$  ( $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ ), wenn für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\mathbb{Q}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A) = 0.$$

Weiter heißen  $\mathbb{P}$  und  $\mathbb{Q}$  äquivalent ( $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$ ) wenn gilt, dass  $\mathbb{P}$  absolut stetig bezüglich  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Q}$  absolut stetig bezüglich  $\mathbb{P}$  ist.

Im Folgenden werden wir einen Ein-Perioden-Markt mit nur einer Aktie  $S$  im Markt betrachten. Das heißt  $S(0)$  und  $B(0)$  sind positive, reelle Zahlen,  $B(1) = e^r B(0)$  ( $r > -1$ ) und  $S(1)$  ist eine positive<sup>1</sup>, reelle Zufallsvariable auf dem Raum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Verallgemeinerungen sind – teils mit Abschwäcungen der Aussagen – möglich, siehe dazu [6].

Ein Maß wie in Def. 5 gibt es, wie uns der folgende Satz sagt, unter unseren Marktannahmen immer. Das heißt wir wollen von einem Marktgeschehen ausgehen, in dem die Aktie im Mittel wie eine festverzinsliche Anleihe wächst; dies ist ökonomisch sinnvoll, da eine Bank das bei ihr angelegte Geld anlegt und den mittleren Ertrag als Zinsen weitergibt<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>Das nächste Lemma zeigt uns, warum wir positiv und nicht nur nicht-negativ annehmen dürfen.

<sup>2</sup>Wie bei den konstanten Zinsen für Anlage und Kredit wird auch hier davon ausgegangen, dass die Bank keine Gewinnabsicht hat.

**Satz 7** (first fundamental theorem of asset pricing (1<sup>st</sup> FTAP)). Ein Ein-Perioden-Marktmodell ist genau dann arbitragefrei, wenn es (mindestens) ein zum Marktmaß  $\mathbb{P}$  äquivalentes, risikoneutrales Maß gibt. In diesem Fall gibt es so ein Maß  $\mathbb{P}^*$  mit beschränkter *Radon-Nydydym-Dichte*  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$ .

Für den Beweis des Satzes brauchen wir einige Vorarbeit. Die Definition von Arbitragefreiheit, wie sie oben in Textform angegeben ist, können wir wie folgt ausdrücken: Eine *Arbitragestrategie* ist ein Vektor  $(\beta, \Delta)$ , für den gilt, dass

$$\beta B(0) + \Delta S(0) \leq 0, \quad \beta B(1) + \Delta S(1) \geq 0 \text{ f. s. und } \mathbb{P}(\beta B(1) + \Delta S(1) > 0) > 0.$$

**Lemma 8.** Aus der Non-Arbitrage-Bedingung folgt, dass

$$S(1) = 0 \text{ f. s. } \Rightarrow S(0) = 0.$$

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $S(1) = 0$  f. s., aber  $S(0) > 0$ . Für die Strategie  $(\beta, \Delta) = (\frac{S(0)}{B(0)}, -1)$  rechnet man nach, dass

$$\beta B(0) + \Delta S(0) = S(0) - S(0) = 0$$

und

$$\beta B(1) + \Delta S(1) = S(0)e^r > 0 \text{ f. s.},$$

dies widerspricht der Arbitragefreiheit.  $\square$

**Lemma 9.** Die Existenz einer Arbitragestrategie ist äquivalent zu

$$\exists \Delta : \Delta S(1) \geq e^r \Delta S(0) \text{ f. s.}$$

$$\wedge \mathbb{P}(\Delta S(1) > e^r \Delta S(0)) > 0.$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Aussage des Lemmas äquivalent dazu ist, dass  $S(1) \geq e^r \Delta S(0)$  fast sicher und  $\mathbb{P}(S(1) > e^r S(0)) > 0$  oder  $S(1) \leq e^r \Delta S(0)$  fast sicher und  $\mathbb{P}(S(1) < e^r S(0)) > 0$ . In der Formulierung des Lemmas ist dieses jedoch leicht auf einen Markt mit mehr als einer Aktie verallgemeinerbar.

*Beweis.* Wir nehmen o. B. d. A. an, dass  $B(0) = 1$ . Sei  $(\beta, \Delta)$  eine Arbitragemöglichkeit, das heißt

$$0 \geq \beta B(0) + \Delta S(0) \Rightarrow -\Delta S(0) \geq \beta$$

und

$$\beta B(1) + \Delta S(1) \geq 0, \text{ wobei } \mathbb{P}(\beta B(1) + \Delta S(1) > 0) > 0.$$

Es gilt

$$0 \leq \beta B(1) + \Delta S(1) = \Delta S(1) + \beta e^r \leq \Delta S(1) - e^r \Delta S(0),$$

womit folgt

$$\mathbb{P}(\Delta S(1) - e^r \Delta S(0) > 0) > 0.$$



Für die Gegenrichtung definieren wir  $\beta := -S(0)\Delta$ . Damit gilt

$$\begin{aligned}\beta B(0) + \Delta S(0) &= -\Delta S(0) + \Delta S(0) = 0, \\ \beta B(1) + \Delta S(1) &= \Delta S(1) + \beta e^r = \Delta S(1) - S(0)\Delta e^r \geq 0\end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}(\beta B(1) + \Delta S(1) > 0) > 0.$$

□

Nun können wir den 1<sup>st</sup> FTAP beweisen:

*Beweis.* Wir wollen zeigen, dass mit  $\mathcal{P} := \{\mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid \mathbb{Q} \text{ ist Martingalmaß für } S\}$

$$(\text{NA}) \Leftrightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$$

gilt.

Wenn  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ , dann existiert die Radon-Nykodym-Dichte  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}(\omega) > 0$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Das heißt, es gilt

$$\mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \right] = \int_{\Omega} \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = 1$$

und für alle  $A \in \mathcal{A}$  ist

$$\mathbb{P}^*(A) = \int_A \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Wir verwenden die Notation  $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}$  und  $\mathbb{E}^* = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}$ . Die Definition von risikoneutralem Maß bedeutet in diesem Fall, dass  $\mathbb{P}^*$  ein Martingalmaß für  $S$  ist, falls

$$S(0) = \mathbb{E}^*[e^{-r}S(1)] = \int_{\Omega} e^{-r}S(1)d\mathbb{P}^*(\omega)$$

ist. Wir wollen die Richtung  $(\text{NA}) \Leftrightarrow \mathcal{P} \neq \emptyset$  durch Widerspruch beweisen. Sei dazu  $\mathcal{P} \neq \emptyset$  und  $\beta, \Delta$  eine Arbitragemöglichkeit:

$$\beta B(1) + \Delta S(1) \geq 0, \mathbb{P}(\beta B(1) + \Delta S(1) > 0) > 0 \text{ und } \beta B(0) + \Delta S(0) \leq 0.$$

Daraus folgt, dass  $\mathbb{E}[\beta B(1) + \Delta S(1)] > 0 \xrightarrow{\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*} \mathbb{E}^*[\beta B(1) + \Delta S(1)] > 0$ . Es gilt für den Erwartungswert  $\mathbb{E}^*[\beta B(1) + \Delta S(1)] = e^r(\beta B(0) + \Delta S(0))$  und somit

$$0 \geq e^r(\beta B(0) + \Delta S(0)) = \mathbb{E}^*[\beta B(1) + \Delta S(1)] > 0,$$

was unmöglich ist.

Für die Gegenrichtung nehmen wir an, dass die (NA)-Bedingung gilt. Zu zeigen

ist nun, dass  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ , bzw. dass ein Maß  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$  mit  $0 < \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} < c$  ( $c \in \mathbb{R}$ ) existiert. Wir definieren den *diskontierten Nettogewinn* von  $S$  als

$$Y_S := e^{-r}S(1) - S(0).$$

Aus Lemma 9 folgt

$$(\text{NA}) \Leftrightarrow (\Delta \in \mathbb{R}, \Delta Y_S \geq 0 \Rightarrow \Delta Y_S = 0 \text{ f. s.}).$$

Weiter gilt, dass  $\mathbb{P}^*$  genau dann ein Martingalmaß bezüglich  $S$  ist, wenn  $\mathbb{E}^*[Y_S] = 0$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $Y_S$  unter  $\mathbb{P}$  integrierbar ist, das heißt  $\mathbb{E}[|Y_S|] < \infty$ . Wir definieren

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \mid \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \text{ beschränkt} \right\}$$

und

$$\mathcal{C} = \{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_S] \in \mathbb{R} \mid \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \}.$$

Man bemerke, dass  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{Q}$  genau dann ein Martingalmaß ist, wenn  $0 \in \mathcal{C}$ , und weiter, dass  $\mathcal{Q}$  nicht leer ist, da  $\mathbb{P} \in \mathcal{Q}$ . Das heißt, dass, wenn wir  $0 \in \mathcal{C}$  zeigen können, damit die Existenz eines Maßes  $\mathbb{P}^*$  mit  $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}^*$  ist Martingalmaß und  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$  beschränkt, folgt. Zunächst rechnen wir nach, dass  $\mathcal{C}$  konvex ist: Für  $0 < \alpha < 1$  und  $y_1, y_2 \in \mathcal{C}$  muss auch  $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \in \mathcal{C}$  gelten. Seien also  $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{Q}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[Y_S] + (1 - \alpha) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[Y_S] &= \alpha \mathbb{E} \left[ Y_S \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} \right] + (1 - \alpha) \mathbb{E} \left[ Y_S \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ Y_S \left( \alpha \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + (1 - \alpha) \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ Y_S \frac{d\mathbb{Q}_3}{d\mathbb{P}} \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_3}[Y_S] \\ &\in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

da für

$$\frac{d\mathbb{Q}_3}{d\mathbb{P}} := \alpha \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} + (1 - \alpha) \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}}$$

$\frac{d\mathbb{Q}_3}{d\mathbb{P}} > 0$ ,  $\mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{Q}_3}{d\mathbb{P}} \right] = \alpha \mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} \right] + (1 - \alpha) \mathbb{E} \left[ \frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} \right] = 1$  und  $\frac{d\mathbb{Q}_3}{d\mathbb{P}}$  beschränkt (weil  $\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}}$ ,  $\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}}$  beschränkt). Das heißt  $\mathbb{Q}_3 \in \mathcal{Q}$  und somit  $\mathcal{C}$  konvex. Wir nehmen nun an, dass  $0 \notin \mathcal{C}$ . Da  $0 \notin \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  konvex,  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  und  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}$  folgt (siehe Satz 54), dass es ein  $\Delta \in \mathbb{R}$  gibt, mit

$$\Delta \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_S] \geq 0 \quad \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$$

$$\Delta \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}[Y_S] > 0 \quad \text{für ein } \mathbb{Q}_0 \in \mathcal{Q},$$

das heißt, dass  $\Delta$  eine Arbitragemöglichkeit (im Sinne von Lemma 9) bezüglich des Maßes  $\mathbb{Q}_0$  ist. Es gilt  $\mathbb{Q}_0(\Delta Y_S > 0) > 0$  und somit wegen  $\mathbb{Q}_0 \sim \mathbb{P}$  auch, dass

$\mathbb{P}(\Delta Y_S > 0) > 0$ . Als nächstes wollen wir zeigen, dass  $\Delta Y_S \geq 0$   $\mathbb{P}$ -f. s.. Dazu nehmen wir an, es sei nicht so, es existiere also ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $A = \{\Delta Y_S < 0\}$  und  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Sei  $\psi_n := (1 - \frac{1}{n})I_A + \frac{1}{n}I_{A^c}$  und  $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}_n}{d\mathbb{P}} := \frac{\psi_n}{\mathbb{E}[\psi_n]}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $\tilde{\mathbb{Q}}_n \sim \mathbb{P}$  und  $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}_n}{d\mathbb{P}}$  beschränkt, folgt

$$\tilde{\mathbb{Q}}_n \in \mathcal{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt  $0 \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}_n}[\Delta Y_S] = \mathbb{E}\left[\Delta Y_S \frac{\psi_n}{\mathbb{E}[\psi_n]}\right]$ . Weiter gilt  $\Delta Y_S \frac{\psi_n}{\mathbb{E}[\psi_n]} \rightarrow I_A \Delta Y_S$  f. s. und die Konvergenz von  $\Delta Y_S \frac{\psi_n}{\mathbb{E}[\psi_n]}$  ist dominiert von  $\Delta Y_S \cdot K$  ( $K \in \mathbb{R}$ ). Beachte, dass  $Y_S$  integrierbar ist.

$$0 \leq \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}_n}[\Delta Y_S] \rightarrow \mathbb{E}[\Delta Y_S I_A] < 0$$

Dies ist ein Widerspruch! Also gilt  $\Delta Y_S \geq 0$  f. s., woraus zusammen mit  $\mathbb{P}(\Delta Y_S > 0) > 0$  folgt, dass  $\Delta$  eine Arbitragemöglichkeit ist. Dies ist wieder ein Widerspruch! Also gilt  $0 \in \mathcal{C}$ , das heißt es existiert ein  $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$  mit beschränkter Dichte. Nun müssen wir noch zeigen, dass der Satz auch für  $Y_S$  nicht integrierbar gilt. Sei nun  $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$  mit Dichte  $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} := \frac{1}{1+|Y_S|} \cdot c$ , mit  $c = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1+|Y_S|}\right]^{-1}$ . Es gilt  $\mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right] = 1$ ,  $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} > 0$  und  $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} < c$ . Unter  $\tilde{\mathbb{P}}$  ist  $Y_S$  integrierbar, da  $\tilde{\mathbb{E}}[|Y_S|] = \int_{\Omega} |Y_S| \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[|Y_S| \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right] = \mathbb{E}\left[c \cdot \frac{1}{1+|Y_S|} \cdot |Y_S|\right] < c$ . Wir können jetzt das Ergebnis für  $|Y_S|$  integrierbar bezüglich  $\tilde{\mathbb{P}}$  benutzen: Aus (NA) folgt, dass es ein Martingalmaß  $\mathbb{P}^*$  für  $Y_S$  mit durch  $K$  beschränkter Dichte  $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$  gibt.

$$\mathbb{E}^*[Y_S] = 0,$$

$$\mathbb{P}^* \sim \tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P} \Rightarrow \mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$$

und

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \text{ ist beschränkt,}$$

$$\text{da } \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\tilde{\mathbb{P}}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} < K \cdot c. \quad \square$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass die Preisdefinition für Optionen über risikoneutrale Maße<sup>3</sup> nicht die einzig mögliche ist. Es wird erläutert, was Hedging ist, wie man daraus den *fairen Preis* ableitet und dass die beiden Preisdefinitionen unter gewissen Voraussetzungen äquivalent sind.

## 2.2 Vollständige Märkte und der faire Preis

**Definition 10.** *Ein Finanzvertrag, der in  $t = 0$  geschlossen wird und die Auszahlung  $0 \leq C < \infty$  in  $t = T$  hat, wobei  $C$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ist, heißt Eventualforderung<sup>4</sup>.*

<sup>3</sup>welche äquivalent zur Definition des arbitragefreien Preises ist (siehe dazu [6])

<sup>4</sup>engl.: contingent claim

**Definition 11.** Ein Markt heißt vollständig, wenn jede Eventualforderung  $C$  repliziert werden kann, das heißt,  $\exists \beta, \Delta \in \mathbb{R} : C(T) = \beta \cdot B(T) + \Delta \cdot S(T)$ .<sup>5</sup>

**Definition 12.** Eine Eventualforderung, die sich als  $C(T) = V(T, S(T))$ ,  $V$  messbar, schreiben lässt, heißt Derivat.

Die Optionen, die wir bis jetzt kennen gelernt haben, sind Derivate.

In den letzten beiden Abschnitten haben wir die risikoneutrale Bewertung kennengelernt. Für replizierbare Finanzprodukte kann man noch ein anderes Konzept der Bewertung einführen: den *fairen Preis*. Dazu überlegt man sich, dass eine Emittentin einer Eventualforderung  $C$  sich gegen Verluste absichern kann, indem sie ein replizierendes Portfolio  $(\beta, \Delta)$  kauft. Denn in allen Fällen erhält sie aus dem Portfolio genau den Betrag, den sie ihrem Kunden in  $t = T$  auszahlen muss. Wenn wir davon ausgehen, dass die Ausgeberin, also zum Beispiel die Bank, keine Gewinnabsicht hat, ist der faire Preis des Produktes genau der Betrag, den die Emittentin braucht um sich dieses sogenannte Hedging-Portfolio zu kaufen, also

$$C_{fair}(0) = \Delta S(0) + \beta B(0).$$

Der über die risikoneutrale Bewertung berechnete Preis für  $C(0)$  ist  $e^{-r} \mathbb{E}^*[C(1)]$ . Diese beiden Preise müssen aber gleich sein, da sonst eine Arbitragemöglichkeit entstünde. Angenommen, das Hedging-Portfolio und die Option wären ungleich teuer, hätten jedoch in  $t = T$  die gleiche Auszahlung. So könnte man das teurere Produkt verkaufen, das billigere kaufen und den Rest anlegen. In  $t = T$  liefert das billigere Produkt genau den Wert, den man dem Käufer des teureren auszahlen muss und der Rest wäre risikofreier Gewinn, also Arbitrage. Mit der gleichen Überlegung folgert man, dass der faire Preis eindeutig ist. Die Eindeutigkeit des Hedgingportfolios kann unter einer weiteren, schwachen Voraussetzung an den Markt gefolgert werden.

**Definition 13.** Ein Marktmodell heißt nicht redundant, falls

$$\beta B(1) + \Delta S(1) = 0 \text{ f. s. } \Rightarrow \beta = 0 \wedge \Delta = 0.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass unsere Märkte nicht redundant sind, da sonst die Aktie nur ein Vielfaches des Bondes wäre. Ist der Markt nicht redundant, so ist das Hedgingportfolio eindeutig.<sup>6</sup>

Zur genaueren Untersuchung von vollständigen Märkten benötigen wir einige Vorarbeit.

<sup>5</sup>In einem Marktmodell mit mehr als einer Periode muss die Strategie  $(\beta(t), \Delta(t))$  selbstfinanzierend sein, das heißt in unserem Fall:  $\beta(t-1)B(t) + \Delta(t-1)S(t) = \beta(t)B(t) + \Delta(t)S(t)$

<sup>6</sup>In einem Marktmodell mit nur einer Aktie mag die Definition der Nicht-Redundanz des Marktes überflüssig erscheinen, sie wurde hier jedoch der Vollständigkeit und der leichten Verallgemeinerbarkeit der Aussagen halber aufgenommen.

**Definition 14** ( $L^p$ -Räume). Sei  $p \in [0, \infty]$  und  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , dann ist

- $X \in \mathcal{L}^p$  für  $0 < p < \infty$  genau dann, wenn

$$|X|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

- $X \in \mathcal{L}^\infty$  genau dann, wenn

$$|X|_\infty := \text{esssup}_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| < \infty \text{ und}$$

- $X \in \mathcal{L}^0$ , wenn

$$|X(\omega)| < \infty \text{ f. s.}$$

Weiter sei  $L^p := \mathcal{L}^p / \sim$ , mit  $X \sim Y \Leftrightarrow X(\omega) = Y(\omega) \forall \omega \in \Omega$ , das heißt für fast alle  $\omega \in \Omega$ .

Für  $p \geq 1$  ist  $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Banachraum (siehe Satz von Fischer-Riesz). Weiter gilt für alle  $0 \leq p \leq q \leq \infty$ , dass  $L^q \subseteq L^p$ .

**Definition 15.** Ein Atom  $A$  eines Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ist ein  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) > 0$ , sodass

$$\forall B \subseteq A, B \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(B) = 0 \vee \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A).$$

**Satz 16.** Für alle  $p \in [0, \infty]$  gilt:

$$\dim L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A_i) > 0 \text{ und} \\ A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Falls  $\dim L^p = n < \infty$ , existiert eine Familie  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  von Atomen, sodass

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

*Beweis.* Definiere

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} \mid \Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathcal{A}, \mathbb{P}(A_i) > 0 \text{ und} \\ A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Angenommen es existiert eine vollständige, disjunkte Zerlegung  $A_1, \dots, A_n$  von  $\Omega$ , sodass  $A_i \in \mathcal{A}$  und  $\mathbb{P}(A_i) > 0$ . Die korrespondierenden Indikatorfunktionen  $I_{A_1}, \dots, I_{A_n}$  sind linear unabhängige Vektoren in  $L^p$ . Deshalb ist  $\dim L^p \geq n$ .

Für  $n = \infty$  folgt sofort  $\dim L^p = \infty$ . Sei nun also  $n = n_0 < \infty$  maximal, d. h.  $n_0 = \sup \mathcal{N}$ . Dann ist für die Partition  $A_1, \dots, A_{n_0}$  jedes  $A_i$  ein Atom, sonst wäre  $n_0$  nicht maximal. Jede Zufallsvariable  $Z \in L^p$  ist fast sicher konstant auf  $A_i$ , denn:

Angenommen,  $Z$  hätte zwei verschiedene Werte  $z_1$  und  $z_2$  auf  $A_i$ . Definiere  $B_j := \{\omega \in A_i \mid Z(\omega) = z_j\} \subseteq A_i, j = 1, 2$ ,  $B_j \in \mathcal{A}, j = 1, 2$ .  $B_1$  und  $B_2$  sind disjunkt, da  $z_1 \neq z_2$ . Da  $A_i$  ein Atom ist, ist entweder  $\mathbb{P}(B_1) = 0, \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_i)$  oder  $\mathbb{P}(B_2) = 0, \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(A_i)$ . Daraus folgt, dass  $Z(\omega) = z_i \forall \omega \in A_i$ . Somit kann  $Z$  geschrieben werden als

$$Z = \sum_{i=1}^{n_0} z_i I_{A_i} \quad \forall Z \in L^p.$$

Also  $\dim L^p \leq n_0 \quad \forall p \in [0, \infty]$  und damit  $\dim L^p = \sup \mathcal{N}$ .  $\square$

Man bemerke, dass die Dimension von  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  unabhängig von  $p$  ist.

**Satz 17** (second fundamental theorem of asset pricing (2<sup>nd</sup>FTAP)). Ein arbitragefreier Markt ist genau dann vollständig, wenn es genau ein zum Marktmaß  $\mathbb{P}$  äquivalentes, risikoneutrales Maß  $\mathbb{P}^*$  gibt.

*Beweis.* Es gilt (NA). Wir wollen zeigen:

$$\text{Jede Eventualforderung ist replizierbar} \Leftrightarrow |\mathcal{P}| = 1.$$

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $A \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $I_A$  eine Eventualforderung. Da der Markt vollständig ist, ist  $I_A$  replizierbar und somit der Preis  $I_A(0)$  von  $I_A$  eindeutig. Seien nun  $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \in \mathcal{P}$ . Dann sind  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_i}[I_A] = \mathbb{P}_i(A)$  für  $i = 1, 2$ . Wegen der risikoneutralen Bewertung gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}[I_A] = e^r I_A(0) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}[I_A].$$

Da dies für alle  $A \in \mathcal{A}$  gilt, ist  $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ , also

$$\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2.$$

Dies gilt für alle  $\mathbb{P}_i \in \mathcal{P}$ , woraus die Behauptung folgt.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $|\mathcal{P}| = 1$ . Sei  $X(1) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Dann existiert  $\mathbb{E}^*[|X(1)|] < \infty, \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ . Da  $\exists! \mathbb{P}^*$ , ist  $X(0) = e^{-r} \mathbb{E}^*[X(1)]$  eindeutig.

$$\mathcal{V} := \{\beta B(1) + \Delta S(1) \mid (\beta, \Delta) \in \mathbb{R}^2\}$$

sei die Menge der *erreichbaren Auszahlungen*. Da  $X(1)$  replizierbar, folgt:

$$L^\infty \subseteq \mathcal{V}.$$

Also ist  $\dim L^\infty \leq \dim \mathcal{V} \leq 2$  und damit  $\dim L^p \leq 2$  ( $p \in [0, \infty]$ ). Also kann  $\Omega$  als eine maximale Zerlegung von Atomen dargestellt werden, woraus folgt, dass alle Zufallsvariablen  $X$  beschränkt sind. Also ist

$$\{X \mid X \text{ Zufallsvariable}\} \subseteq L^\infty \subseteq \mathcal{V}.$$

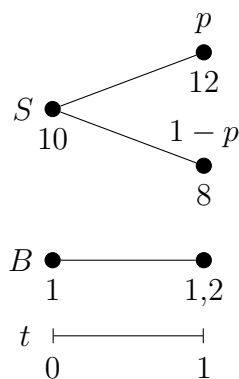
Das heißt alle Eventualforderungen sind replizierbar (bzw. erreichbar), was genau die Definition von vollständigem Markt ist.  $\square$

Es folgt:

**Satz 18.** In einem vollständigen Ein-Perioden-Markt ist der Preis einer Eventualforderung eindeutig, insbesondere ist der faire Preis gleich dem risikoneutralen Preis. Ist der Markt zusätzlich nicht redundant, so ist die Hedging-Strategie ebenfalls eindeutig.

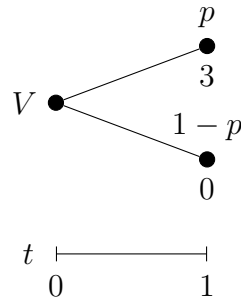
## 2.3 Beispiel

Die Bewertung, das ist die Bestimmung eines angemessenen Preises, einer Option stellt eine der zentralen Aufgaben der Finanzmathematik dar. Dieser sogenannte faire Preis soll hier anhand eines einfachen Beispiels veranschaulicht werden. Auch wenn spätere Kursmodelle deutlich anspruchsvoller sind als dieses einfachste, bleibt die Idee der Bewertung stets die gleiche. Nehmen wir an, wir haben eine Aktie  $S$ , die heute 10 EUR wert ist und morgen mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0 < p < 1$  den Wert  $12 = 10 \cdot 1,2 = 10 \cdot \alpha_u$  EUR und mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1 - p)$  den Wert  $8 = 10 \cdot 0,8 = 10 \cdot \alpha_d$  EUR annimmt. Des Weiteren kann Geld auf die Bank gelegt oder von dort geliehen werden; der Zinssatz sei dabei konstant  $-1 < r \approx 0,2$ .<sup>7</sup> Damit lässt sich das Marktgeschehen wie folgt grafisch darstellen:



Eine europäische Calloption  $V$  auf diese Aktie mit Ausübungspreis  $K$  i.H.v. 9 EUR hätte bei  $t = 1$  mit Wahrscheinlichkeit  $p$  einen Wert von 3 EUR, mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  einen Wert von 0 EUR.

<sup>7</sup>Es sei  $r$  so, dass  $\exp(r) = 1,2$ .  $B(0)$  sei o.B.d.A. 1.



Eine Emittentin der Option kann nun versuchen, Basiswerte  $S$  und Bankanteile  $B$  zu (ver-)kaufen, um in allen Fällen das Risiko, das mit dem Verkauf der Option verbunden ist, zu minimieren oder gar zu eliminieren. Im Speziellen wird die Ausgeberin der Option (in  $t = 0$ ) hier  $\Delta$  Anteile von  $S$  kaufen (bei negativem  $\Delta$  verkaufen) und  $\beta$  EUR auf die Bank legen (bei negativem  $\beta$  von der Bank leihen) um so die Entwicklung von  $V$  zu replizieren. Dieses Vorgehen nennt man *hedgen*.

$$\Delta S(1) + \beta B(1) = V(1)$$

soll in jedem Fall gelten, daraus folgt:

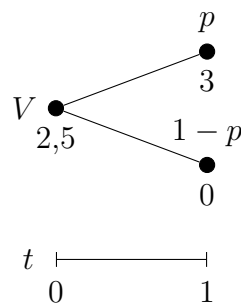
$$\Delta \cdot 12 + \beta \cdot 1,2 = 3$$

$$\wedge \quad \Delta \cdot 8 + \beta \cdot 1,2 = 0.$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist lösbar und es gilt  $\Delta = \frac{3}{4}$  und  $\beta = -5$ . Das bedeutet, dass in  $t = 0$  für das Hedgingportfolio  $\frac{3}{4}$  Anteile der Aktie  $S$  gekauft (7,50 EUR) und 5 EUR von der Bank geliehen ( $-5$  EUR) werden müssen. Für das Kaufen dieser Absicherungsstrategie fehlen also 2,50 EUR – dies ist der faire Preis für  $V$ . Das heißt es gilt

$$V(0) := \Delta S(0) + \beta B(0)$$

mit  $\Delta, \beta$  aus obigem Gleichungssystem.



Der faire Preis ist also genau der Betrag, der der Ausgeberin der Option fehlt, um sich gegen Risiken aus dem Verkauf abzusichern. Wie man sieht, gehen in diese Berechnung  $p$  und  $1-p$  nicht ein, das heißt die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Szenarien spielen keine Rolle<sup>8</sup>, da man sich für jeden Fall absichert,

<sup>8</sup>Natürlich ist es wichtig, ob eine Wahrscheinlichkeit für ein Szenario gleich oder größer Null ist, da dies aussagt, ob es das Szenario gibt, oder nicht.



egal, ob dieser wahrscheinlich oder unwahrscheinlich ist.

## 2.4 Analyse des Phänomens

Das Phänomen des Abfalls des Portfoliowertes beruht auf plötzlichen Kursänderungen, das heißt wir untersuchen, wie sich das Portfolio

$$\Pi(S^+) := -V(S^+) + \Delta S^+ + \beta B^+$$

der sich hedgenden Ausgeberin der Option in Abhängigkeit von  $S^+$  verhält, falls andere Kurse  $S(1)$  als die angenommenen auftreten. Wir wollen mit  $S_0, V_0$  und  $B_0$  die Werte von  $S, V$  und  $B$  in  $t = 0$  und mit  $S_u = \alpha_u S_0, S_d = \alpha_d S_0, V_u = V(S_u), V_d = V(S_d)$  und  $B^+ = e^r B_0$  die modellgemäßen Werte von  $S, V$  und  $B$  sowie mit  $S^+$  und  $V^+ = V(S^+)$  die unbekanntenen Werte von  $S$  und  $V$  zum Zeitpunkt  $t = 1$  bezeichnen<sup>9</sup>. Zunächst berechnen wir das Hedgingportfolio gemäß:

$$\begin{aligned} \Delta S_u + \beta B^+ &= V_u, \\ \Delta S_d + \beta B^+ &= V_d. \end{aligned}$$

Dies löst man zu:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}, \\ \beta &= \frac{V_d - \Delta S_d}{B^+} = \frac{V_u - \Delta S_u}{B^+}. \end{aligned}$$

Betrachten wir im jetzt folgenden Teil einen europäischen Call, das heißt  $V(S^+) = V_{Ce}(S^+) = (S^+ - K)^+$  und unterscheiden drei Fälle.

$K > S_u$ : In diesem Falle ist  $V_u = V_d = 0$ , also auch  $\Delta = \beta = 0$  und somit  $\Pi(S^+) = -(S^+ - K)^+ = (K - S^+)^-$ . Das heißt das Portfolio ist im Fall, dass der Kurs größer als der Ausübungspreis ist,  $K - S^+ < 0$ , sonst 0.

$K < S_d$ : Hier berechnet man  $\Delta = 1$  und  $\beta = \frac{V_d - S_d}{B^+} = -\frac{K}{B^+}$ . Somit gilt  $\Pi(S^+) = -(S^+ - K)^+ + (S^+ - K) = (S^+ - K)^-$ . Das heißt das Portfolio ist kleiner 0, falls der Kurs unter dem Ausübungspreis liegt, sonst 0.

$S_d \leq K \leq S_u$ : Hier, in diesem interessanten Fall, wird man sehen, dass das Portfolio auch Gewinn erwirtschaften kann. Es gilt:  $\Delta = \frac{S_u - K}{S_u - S_d}$  und  $\beta = -\frac{S_u - K}{S_u - S_d} \cdot \frac{S_d}{B^+}$ .

$$\Pi(S^+) = -(S^+ - K)^+ + \frac{S_u - K}{S_u - S_d} S^+ - \frac{S_u - K}{S_u - S_d} S_d.$$

---

<sup>9</sup> $u$  steht dabei für Up und  $d$  für Down

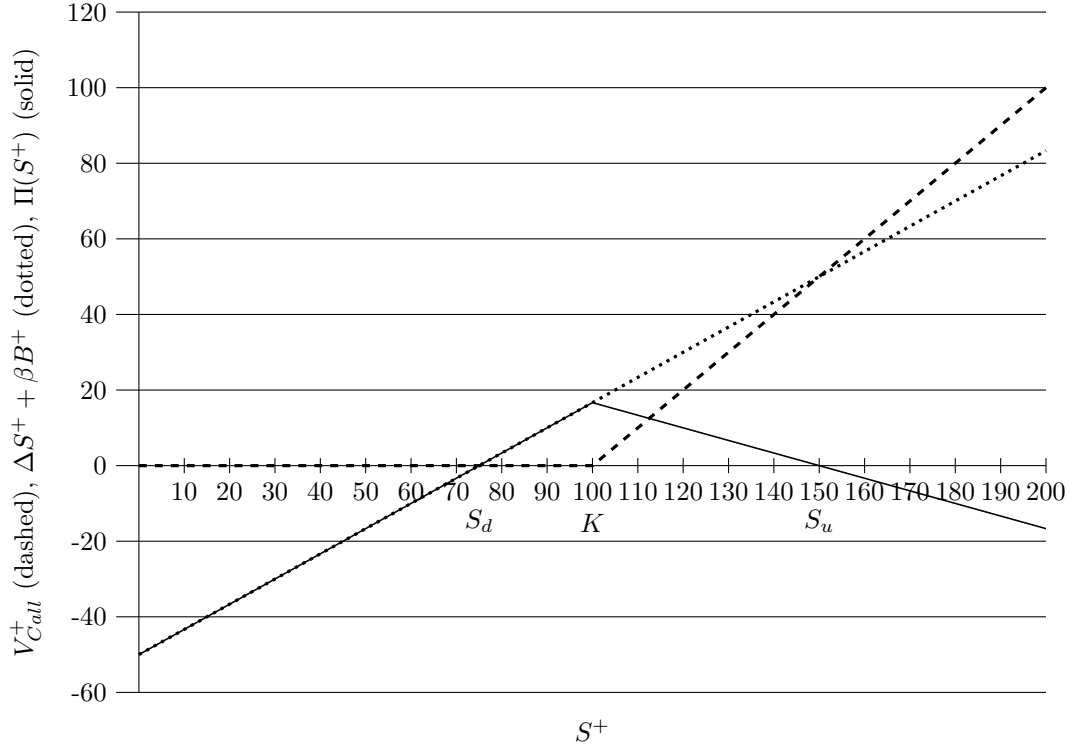


Abbildung 2.1: Abhängigkeit des Hedgingportfolios für eine europäische Calloption von  $S^+$

Man rechnet nach, dass  $\Pi$  für  $S^+ < K$  eine steigende Gerade mit Nullstelle  $S_u$  und für  $S^+ > K$  eine fallende mit Nullstelle  $S_d$  beschreibt.  $\Pi$  wird folglich für  $K$  maximal und es gilt  $\Pi(K) = \frac{(S_u - K)(K - S_d)}{S_u - S_d}$ . Das heißt für Kurse zwischen den angenommenen ( $S_u$  und  $S_d$ ) macht das Portfolio einen beschränkten Gewinn, für Kursewerte außerhalb entsteht jedoch ein Verlust, der unbeschränkt ist.

Für eine europäische Putoption  $V(S^+) = V_{Pe}(S^+) = (K - S^+)^+$  gilt ähnlich:

$$K < S_d: \quad V_u = V_d = 0 \text{ und } \Delta = \beta = 0, \text{ also } \Pi(S^+) = -(K - S^+)^+ = (S^+ - K)^-.$$

$$K > S_u: \quad \Delta = -1 \text{ und } \beta B^+ = K. \text{ Daraus folgt, dass } \Pi(S^+) = (K - S^+) - (K - S^+)^+ = (K - S^+)^-.$$

$$S_d \leq K \leq S_u: \quad \Delta = \frac{S_d - K}{S_u - S_d} \text{ und } \beta B^+ = -\frac{S_d - K}{S_u - S_d} S_u. \text{ Woraus folgt, dass}$$

$$\Pi(S^+) = -(K - S^+)^+ + \frac{S_d - K}{S_u - S_d} S^+ - \frac{S_d - K}{S_u - S_d} S_u$$

ist. Auch dies ist für  $S^+ < K$  eine steigende Gerade mit Nullstelle  $S_d$  und für  $S^+ > K$  eine fallende mit Nullstelle  $S_u$ .  $\Pi$  nimmt sein Maximum bei  $K$  an und hat dort den Wert  $\frac{(S_d - K)(K - S_u)}{S_u - S_d}$ .

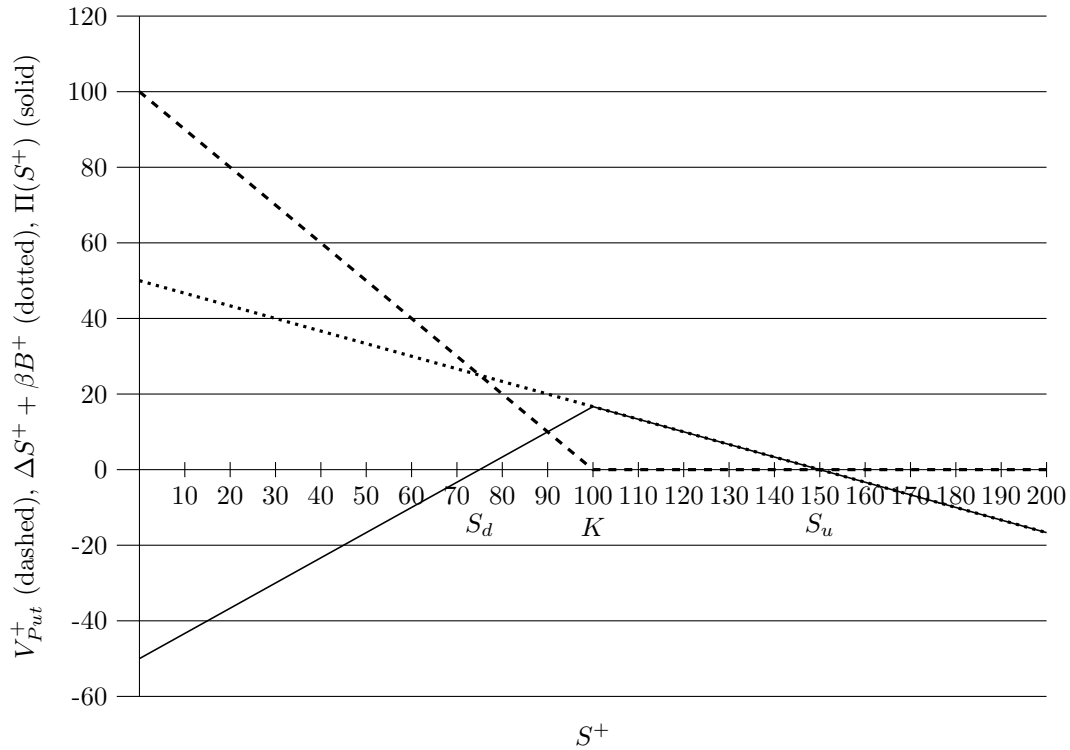


Abbildung 2.2: Abhängigkeit des Hedgingportfolios für eine europäische Putoption von  $S^+$

Sowohl für Call- als auch für Putoptionen ergibt sich also die gleiche Funktionenschar  $\Pi$ , die zeigt, dass Gewinne im Hedging nur auf  $(S_d, S_u)$  möglich sind, diese sind dann jedoch beschränkt, während Verluste potentiell unbeschränkt und auf den Intervallen  $[0, S_d)$  und  $(S_u, \infty)$  möglich sind.



# Kapitel 3

## Die Binomialmethode

Nachdem wir nun die Grundlagen der Finanzmathematik kennen gelernt und das Problem im Ein-Perioden-Modell verstanden haben, wollen wir nun ein weiteres Kursmodell einführen, uns für dieses einen Hedging-Algorithmus herleiten, diesen implementieren, das Problem simulieren und versuchen analytisch eine Lösung zu finden.

### 3.1 Das Kursmodell

Im einleitenden Satz steht: „ein weiteres Kursmodell einführen“, damit ist ein mehrperiodiges gemeint, da in Abschnitt 2.3 schon das Ein-Perioden-Modell Anwendung fand, aber genau dieses wollen wir auf  $T$  Perioden ausdehnen. Dieses sogenannte Binomialmodell wird zu Ehren seiner Erfinder auch Cox-Ross-Rubinstein-Modell genannt. Sei dazu  $S(t)$  ein Kurs (also zum Beispiel eine Aktie), der für  $t \in \{0, \dots, T\}$  oder im Allgemeinen für  $t \in \mathbb{N}_0$  einen Wert aus  $\mathbb{R}^+$  annimmt, und  $Z(t)$  seien für  $t \in \{1, \dots, T\}$  bzw.  $t \in \mathbb{N}$  dichotome, stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die je mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ( $0 < p < 1$ ) den Wert  $\alpha_u$  und mit Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  den Wert  $\alpha_d$  annehmen; dabei gelte  $0 < \alpha_d < e^r < \alpha_u$ . Nun definieren wir mit  $S_0 > 0$  den Kurs  $S$  iterativ durch

$$S(t) = \begin{cases} S_0, & t = 0, \\ Z(t) \cdot S(t-1), & t \geq 1, \end{cases}$$

das heißt es gilt mit  $\prod_{i=1}^0 Z(t) = 1$

$$S(t) = \prod_{i=1}^t Z(i) \cdot S_0.$$

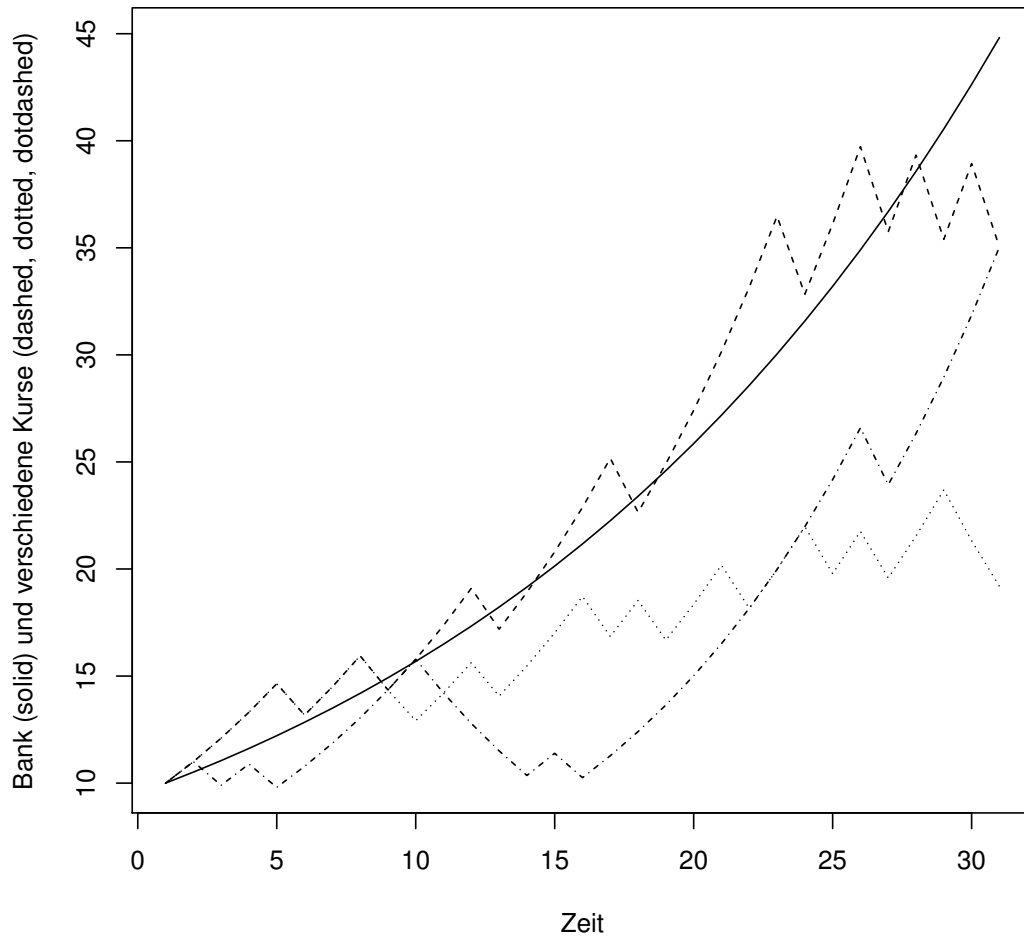
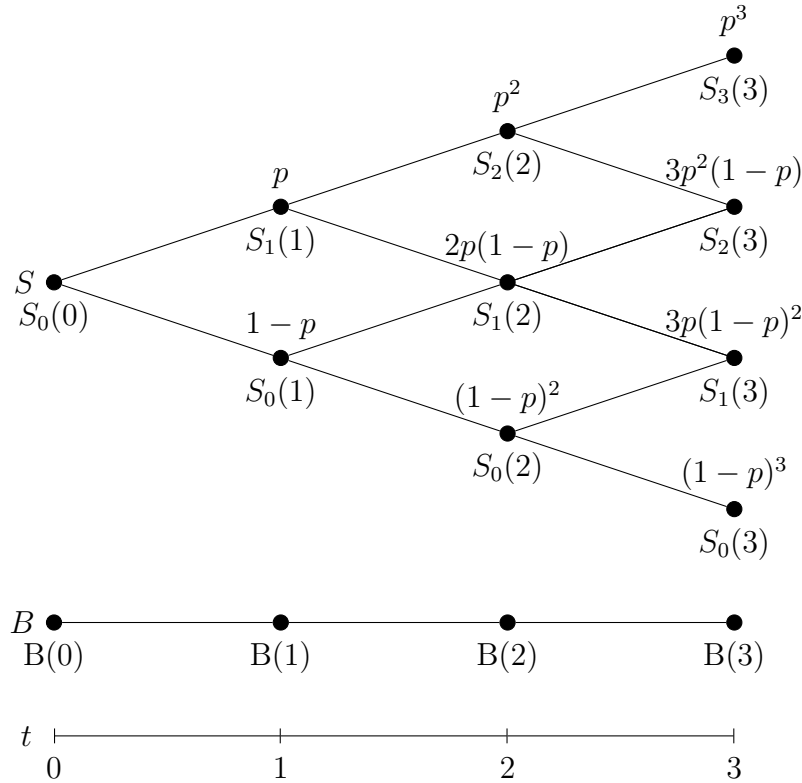


Abbildung 3.1: Mögliche Kursverläufe im Binomialmodell mit  $\alpha_u = 1,1$ ,  $\alpha_d = 0,9$ ,  $r = 0,05$  und  $p \approx 0,756$  (risikoneutral gewählt).

Wie man leicht mit Hilfe der Kommutativität der Multiplikation sieht, kann  $S$  im Zeitpunkt  $t$  nur  $t+1$  mögliche Kurswerte annehmen. In Worten ausgedrückt heißt das, dass es für den Kurswert in  $t$  nur darauf ankommt, wie oft der Kurs gestiegen und wie oft er gefallen ist<sup>1</sup>, nicht jedoch in welcher Reihenfolge das Steigen und Fallen aufgetreten ist. Alle möglichen Kursverläufe einer Aktie lassen sich also wie folgt als Baum darstellen:

---

<sup>1</sup>im Vergleich zu  $e^r$



Solche Binomialbäume nennt man rekombinierbar. Bei schwächeren Marktannahmen kann es vorkommen, dass die Pfade im Binomialbaum nicht (immer) zusammenlaufen. Diese Bäume nennt man nicht-rekombinierbar, werden hier jedoch nicht näher behandelt.

## 3.2 Optionsbewertung und Hedging

### 3.2.1 Algorithmus mit Hilfe der risikoneutralen Bewertung

Wie wir in Abschnitt 1.4 gesehen haben, berechnet sich der faire Preis einer Option als

$$V(t) = e^{r(t-T)} \mathbb{E}[V(T) | \mathcal{A}_t].$$

Dies lässt sich zu

$$V(t) = e^{r(t-s)} \mathbb{E}[V(s) | \mathcal{A}_t]$$

mit  $t \leq s \leq T$  verallgemeinern. Dies erlaubt uns, unter der Voraussetzung, dass  $p$  das äquivalente Martingalmaß ist – auf das wir später noch zu sprechen kommen –  $V(t)$  für  $t = T - 1, \dots, 0$  zu berechnen. Beschriften wir die möglichen Werte von  $S(t)$  und  $V(t)$  im Zeitpunkt  $t$  mit  $S_k(t)$  und  $V_k(t)$  für  $k = 0, \dots, t$  im Wert

aufsteigend (wie im Bild oben) so gilt:

$$V(t-1) = e^{-r} \mathbb{E}[V(t) | \mathcal{A}_{t-1}], \quad t = 1, \dots, T$$

und damit im Binomialmodell

$$V_k(t-1) = e^{-r} (p \cdot V_{k+1}(t) + (1-p) \cdot V_k(t)).$$

Dies können wir direkt als Algorithmus in R implementieren.

```

>
> au <- 1.1
> ad <- 0.9
> r <- 0.05
> p <- (exp(r)-ad)/(au-ad)
> p
[1] 0.7563555
> S_0 <- 100
> T <- 20
> Typ <- 0
> # 0 = Call, 1 = Put
> K <- 80
>
> # Berechnung der Kurswerte
>
> S <- matrix(0,T+1,T+1)
> # Indexverschiebung
> for (i in 1:(T+1)) {
+ for (j in 1:i) {
+ S[i,j] <- S_0*au^(j-1)*ad^(i-j)
+ }
+ }
>
> # Berechnung der Endwerte der Option
>
> V <- matrix(0,T+1,T+1)
> for (j in 1:(T+1)) {
+ if (Typ == 0) {
+ V[T+1,j] <- max(S[T+1,j]-K,0)
+ } else {
+ V[T+1,j] <- max(K-S[T+1,j],0)
+ }
+ }
>

```



```

> # Rekursive Berechnung der Optionswerte mit Hilfe der
> # risikoneutralen Bewertung
>
> for (i in T:1) {
+ for (j in 1:i) {
+ V[i,j] <- exp(-r)*(p*V[i+1,j+1]+(1-p)*V[i+1,j])
+ }
+ }
>
> # Ausgabe des Optionswertes in t=0
>
> V[1,1]
[1] 70.5809
>

```

Hierbei können wir zwar  $V(0)$  berechnen, erhalten jedoch keine Hedging-Strategie, die wir aber zur Lösung des Hedging-Problems brauchen. Warum  $p$  als  $\frac{e^r - \alpha_d}{\alpha_u - \alpha_d}$  gewählt wurde, wird in Abschnitt 3.3 erklärt.

Weiterhin sei zu R angemerkt, dass die hier aufgeführten Programme nicht auf Effizienz getrimmt sind, so werden zum Beispiel viele Schleifen verwendet, obwohl man die meisten Schleifen in R durch geschickte Matrixoperationen ersetzen kann, was die Programme effizienter machen würde. Ich bevorzuge - vor allem für diese Arbeit - jedoch die Schleifenschreibweise, da diese viel lesbarer ist und man so die Idee bzw. die Struktur der Programme leichter verstehen kann.

### 3.2.2 Algorithmus mit Hedging-Strategie

In Abschnitt 2.3 haben wir eine Hedgingstrategie für den Ein-Perioden-Markt kennengelernt. Satz 18 sagt, dass im vollständige Ein-Perioden-Markt der faire Preis gleich dem risikoneutralen Preis ist. Dies gilt, wie uns der nächste Satz zeigt, auch im Binomialmodell. Die Definitionen von Replizierbarkeit, Vollständigkeit und Hedgingstrategie aus dem Ein-Perioden-Modell können auf natürliche Weise auf mehrere Perioden ausgeweitet werden, siehe dazu [6]. Die Hedgingstrategie  $(\beta, \Delta)$  hängt dabei von der Zeit und dem bisherigen Kursverlauf ab und ist selbstfinanzierend, das heißt, dass kein Geld in das oder aus dem Portfolio fließt. Zur Existenz solcher Strategien siehe [6].

**Satz 19.**  $V(t)$  im Sinne der risikoneutralen Bewertung ist der faire Preis  $V_{fair}$  einer Option  $V$ .

*Beweis.* Seien  $\beta, \Delta$  so, dass  $V$  durch  $\beta(t) \cdot B(t) + \Delta(t) \cdot S(t)$  repliziert wird und sei  $\mathbb{P}$  ein risikoneutrales Maß. Unter Verwendung der Selbstfinanzierungseigenschaft von  $(\beta, \Delta)$  wird der faire Preis einer Option  $V$  als

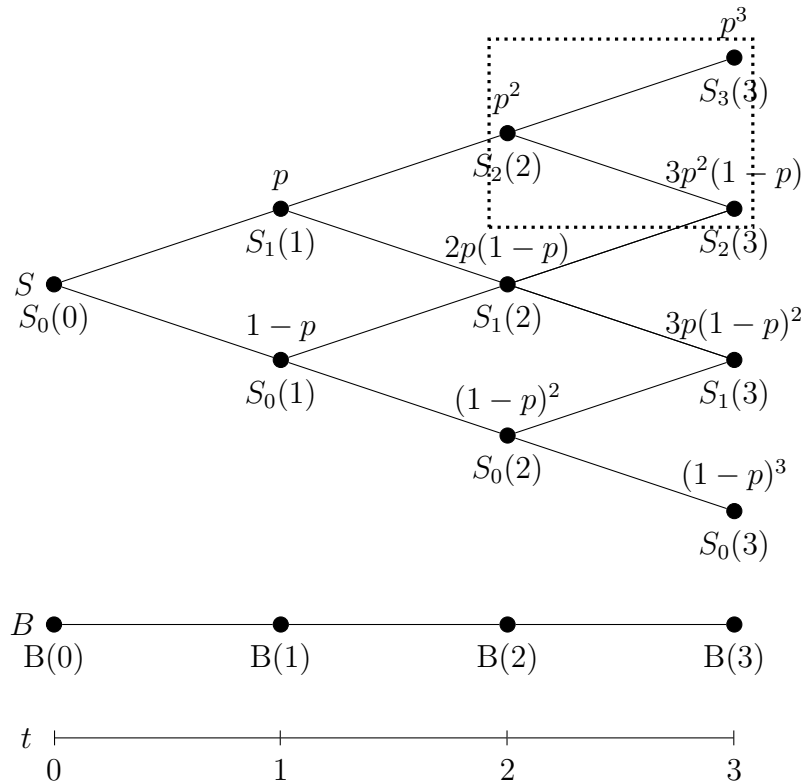
$$\begin{aligned}
V_{fair}(t) &= \beta(t) \cdot B(t) + \Delta(t) \cdot S(t) \\
&= \beta(t) \cdot B(t) + \Delta(t) \cdot e^{-r} \mathbb{E}[S(t+1) | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{-r} \beta(t) \cdot e^r B(t) + e^{-r} \Delta(t) \cdot \mathbb{E}[S(t+1) | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{-r} (\beta(t) \cdot B(t+1) + \Delta(t) \cdot \mathbb{E}[S(t+1) | \mathcal{A}_t]) \\
&= e^{-r} \mathbb{E}[\beta(t) \cdot B(t+1) + \Delta(t) \cdot S(t+1) | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{-r} \mathbb{E}[\beta(t+1) \cdot B(t+1) + \Delta(t+1) \cdot S(t+1) | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{-r} \mathbb{E}[V_{fair}(t+1) | \mathcal{A}_t]
\end{aligned}$$

berechnet. Nun ersetzen wir  $V_{fair}(t+1)$  in der letzten Zeile durch  $e^{-r} \mathbb{E}[V_{fair}(t+2) | \mathcal{A}_{t+1}]$  nach der gleichen Rechnung. Nach  $(T-t)$ -maligem solchem Vorgehen bekommen wir:

$$\begin{aligned}
V_{fair}(t) &= e^{r(t-T)} \mathbb{E}[\dots \mathbb{E}[V_{fair}(T) | \mathcal{A}_{T-1}] \dots | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{r(t-T)} \mathbb{E}[V_{fair}(T) | \mathcal{A}_t] \\
&= e^{r(t-T)} \mathbb{E}[V(T) | \mathcal{A}_t] \\
&= V(t)
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt verwenden wir Satz 61, im zweiten ersetzen wir  $V_{fair}(T)$  durch  $V(T)$ , da hier die Optionspreise eindeutig festgelegt sind und im dritten die risikoneutrale Bewertung.  $\square$

Auch die Methode zur Berechnung des fairen Preises können wir auf  $T$  Perioden verallgemeinern. Betrachten wir dazu einen  $T$ -Perioden-Binomialbaum mit  $S_0 > 0$ ,  $0 < \alpha_d < e^r < \alpha_u$  und festem  $K$ . Dabei ist  $S$  für alle Knoten und  $V$  für alle Blätter des Baums bekannt.



Der Teilbaum ab Knoten  $S_{T-1}(T-1)$  entspricht bis auf die Indizierung unserem Ein-Perioden-Modell, kann also wie in 2.3 gehedged werden. Wendet man dies iterativ auf alle Teilbäume mit Startknoten in  $T-1$  an, erhält man die fairen Preise und Hedgingstrategien für die letzte Periode. Im nächsten Schritt betrachten wir die Unterbäume mit Start im Zeitpunkt  $T-2$  und Ende im Zeitpunkt  $T-1$ , für die wir analog vorgehen können. Nun fahren wir iterativ bis zum Zeitpunkt 0 fort und erhalten so  $V(0)$  und die komplette Absicherungsstrategie. Auch diesen Algorithmus können wir in R implementieren.

```
>
> T <- 20
> au <- 1.1
> ad <- 0.9
> S0 <- 100
> B0 <- 1
> r <- 0.05
> K <- 80
> Typ <- 0
> # 0=Call, 1=Put
>
> p <- (exp(r)-ad)/(au-ad)
> p
```

```
[1] 0.7563555
>
> # Berechnung der Kurswerte
>
> S <- matrix(0,T+1,T+1)
> # Indexverschiebung
> for (i in 1:(T+1)) {
+ for (j in 1:i) {
+ S[i,j] <- S0*au^(j-1)*ad^(i-j)
+ }
+ }
>
> # Berechnung der Endwerte der Option
>
> V <- rep(0,T+1)
> for (j in 1:(T+1)) {
+ if (Typ == 0) {
+ V[j] <- max(S[T+1,j]-K,0)
+ } else {
+ V[j] <- max(K-S[T+1,j],0)
+ }
+ }
>
> #S
> #V
>
> # Entwicklung des Bonds
>
> B <- rep(0,T+1)
> for (i in 1:(T+1)) {
+ B[i] <- B0*exp(r*(i-1))
+ }
>
> # Berechnung der Hedgingstrategie
> # Pi = Delta*S + beta*B
>
> Delta <- matrix(0,T,T)
> beta <- matrix(0,T,T)
> Pi <- matrix(0,T+1,T+1)
>
> Pi[T+1,] <- V
>
> for (i in T:1) {
```

```

+ for (j in 1:i) {
+ A <- solve(matrix(c(S[i+1,j+1],S[i+1,j],B[i+1],
+ B[i+1]),nrow=2,ncol=2),c(Pi[i+1,j+1],Pi[i+1,j]))
+ Delta[i,j] <- A[1]
+ beta[i,j] <- A[2]
+ Pi[i,j] <- Delta[i,j]*S[i,j]+beta[i,j]*B[i]
+ }
+ }
>
> # Ausgabe von Pi(0)=V(0)
>
> Pi[1,1]
[1] 70.5809
>
> # Hedgingstrategie fuer die erste Periode
>
> Delta[1,1]
[1] 0.9989041
> beta[1,1]
[1] -29.30951
>

```

Wie wir sehen, erhalten wir den gleichen fairen Preis zum Zeitpunkt 0 und hier in der Ausgabe beispielhaft die Hedging-Strategie für die erste Periode.

### 3.3 Das äquivalente Martingalmaß im Binomialmodell

Das risikoneutrale Maß  $\mathbb{P}$  ist in der Binomialmethode durch die Wahrscheinlichkeit  $p \in (0, 1)$  eindeutig bestimmt. Wir nennen deshalb  $p$  kurzerhand auch das risikoneutrale Maß (Martingalmaß). In der Definition der risikoneutralen Bewertung wurde der Erwartungswert bezüglich des risikoneutralen Maßes berechnet. Für  $p$  muss deswegen gelten:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[S(t+1)|\mathcal{A}_t] \stackrel{!}{=} e^r S(t) \\
\Leftrightarrow & (p\alpha_u + (1-p)\alpha_d)S(t) = e^r S(t) \\
\Leftrightarrow & (p\alpha_u + (1-p)\alpha_d) = e^r \\
\Leftrightarrow & p = \frac{e^r - \alpha_d}{\alpha_u - \alpha_d}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen also an, dass  $p$  durch  $\alpha_d$ ,  $\alpha_u$  und  $r$  gegeben ist und sehen, dass mit

unserer Annahme  $0 < \alpha_d < e^r < \alpha_u$  gilt:

$$p \in (0, 1)$$

### 3.4 Simulation des Phänomens

Im Folgenden ändern wir das R-Programm so, dass für  $t \in \{T_1, \dots, T_2 - 1\}$  der Kurs um den Faktor  $0 < f < 1$  verringert wird. Wir erhalten das folgende Programm:

```
>
> T <- 50
> au <- 1.1
> ad <- 0.9
> S0 <- 100
> B0 <- 100
> r <- 0.05
> K <- 500
> Typ <- 0
> # 0=Call, 1=Put
>
> # 0<=T1<T2<=T
> # Aenderungszeitpunkt 1
> T1 <- 20+1
> # Aenderungszeitpunkt 2
> T2 <- 30+1
> # Aenderungsfaktor
> f <- 0.5
>
> p <- (exp(r)-ad)/(au-ad)
>
> # Berechnung der Kurswerte
> # ohne ploetzliche Kurasaenderungen
>
> S <- matrix(0,T+1,T+1)
>
> # Indexverschiebung
> for (i in 1:(T+1)) {
+ for (j in 1:i) {
+ S[i,j] <- S0*au^(j-1)*ad^(i-j)
+ }
+ }
>
```

```
> # Berechnung der veraenderten Kurswerte
>
> ST <- S*f
>
> # Berechnung der Endwerte der Option
> # sowohl fuer die veraenderten
> # als auch fuer die unveraenderten Kurswerte
>
> V <- rep(0,T+1)
> for (j in 1:(T+1)) {
+ if (Typ == 0) {
+ V[j] <- max(S[T+1,j]-K,0)
+ } else {
+ V[j] <- max(K-S[T+1,j],0)
+ }
+ }
>
> VT <- rep(0,T+1)
> for (j in 1:(T+1)) {
+ if (Typ == 0) {
+ VT[j] <- max(ST[T+1,j]-K,0)
+ } else {
+ VT[j] <- max(K-ST[T+1,j],0)
+ }
+ }
>
> # Berechnung des Bondes
>
> B <- rep(0,T+1)
> for (i in 1:(T+1)) {
+ B[i] <- B0*exp(r*(i-1))
+ }
>
> # Berechnung der Hedgingstrategien der Option
> # sowohl fuer die veraenderten
> # als auch fuer die unveraenderten Kurswerte
> # Pi = Delta*S + beta*B
>
> Delta <- matrix(0,T,T)
> beta <- matrix(0,T,T)
> Pi <- matrix(0,T+1,T+1)
>
> Pi[T+1,] <- V
```

```

>
> for (i in T:1) {
+ for (j in 1:i) {
+ A <- solve(matrix(c(S[i+1,j+1],S[i+1,j],B[i+1],
+ B[i+1]),nrow=2,ncol=2),c(Pi[i+1,j+1],Pi[i+1,j])))
+ Delta[i,j] <- A[1]
+ beta[i,j] <- A[2]
+ Pi[i,j] <- Delta[i,j]*S[i,j]+beta[i,j]*B[i]
+ }
+ }
>
> DeltaT <- matrix(0,T,T)
> betaT <- matrix(0,T,T)
> PiT <- matrix(0,T+1,T+1)
>
> PiT[T+1,] <- VT
>
> for (i in T:1) {
+ for (j in 1:i) {
+ A <- solve(matrix(c(ST[i+1,j+1],ST[i+1,j],B[i+1],
+ B[i+1]),nrow=2,ncol=2),c(PiT[i+1,j+1],PiT[i+1,j])))
+ DeltaT[i,j] <- A[1]
+ betaT[i,j] <- A[2]
+ PiT[i,j] <- DeltaT[i,j]*ST[i,j]+betaT[i,j]*B[i]
+ }
+ }
>
> # Erzeugung eines Randomwalks
>
> Z <- rbinom(T,1,p)
> Z <- c(0,cumsum(Z))+1
>
> p
[1] 0.7563555
>
> # Portfolio der sich hedgenden Emittentin der Option
> # (Bank)
> # mit Startwert V(0)
>
> Port <- rep(0,T+1)
> Port[1] <- Pi[1,1]
>
> # oder mit ueberschuessigem Geld am Anfang

```



```

> #Port[1] <- Port[1]+10
>
> # In jedem Schritt kauft die Bank gemaess der
> # Hedgingstrategie Anteile der Aktie und des
> # Bondes, welche sie nach der modellgemaessen
> # Kursaenderung wieder verkauft. Ueberschuessiges
> # oder fehlendes Geld wird mit dem Marktzins verzinst.
>
> for (i in 1:(T1-2)) {
+ Port[i] <- Port[i] -
+ (Delta[i,Z[i]]*S[i,Z[i]]+beta[i,Z[i]]*B[i])
+ Port[i+1] <- Port[i]*exp(r) +
+ (Delta[i,Z[i]]*S[i+1,Z[i+1]]+beta[i,Z[i]]*B[i+1])
+ }
>
> Port[T1-1] <- Port[T1-1] -
+ (Delta[T1-1,Z[T1-1]]*S[T1-1,Z[T1-1]]+
+ beta[T1-1,Z[T1-1]]*B[T1-1])
> Port[T1] <- Port[T1-1]*exp(r) +
+ (Delta[T1-1,Z[T1-1]]*ST[T1,Z[T1]]+
+ beta[T1-1,Z[T1-1]]*B[T1])
>
> for (i in T1:(T2-2)) {
+ Port[i] <- Port[i] -
+ (DeltaT[i,Z[i]]*ST[i,Z[i]]+betaT[i,Z[i]]*B[i])
+ Port[i+1] <- Port[i]*exp(r) +
+ (DeltaT[i,Z[i]]*ST[i+1,Z[i+1]]+betaT[i,Z[i]]*B[i+1])
+ }
>
> Port[T2-1] <- Port[T2-1] -
+ (DeltaT[T2-1,Z[T2-1]]*ST[T2-1,Z[T2-1]]+
+ betaT[T2-1,Z[T2-1]]*B[T2-1])
> Port[T2] <- Port[T2-1]*exp(r) +
+ (DeltaT[T2-1,Z[T2-1]]*S[T2,Z[T2]]+
+ betaT[T2-1,Z[T2-1]]*B[T2])
>
> for (i in T2:(T)) {
+ Port[i] <- Port[i] -
+ (Delta[i,Z[i]]*S[i,Z[i]]+beta[i,Z[i]]*B[i])
+ Port[i+1] <- Port[i]*exp(r) +
+ (Delta[i,Z[i]]*S[i+1,Z[i+1]]+beta[i,Z[i]]*B[i+1])
+ }
>

```

```

> # Die Emittentin zahlt (wenn vorhanden) den
> # Gewinn der Option aus
>
> Port[T+1] <- Port[T+1] - V[Z[T+1]]
> #Port
>
> # Die Pfade fuer den Plot werden berechnet
>
> PS <- rep(0,T+1)
> PPi <- rep(0,T+1)
> PDelta <- rep(0,T)
> Pbeta <- rep(0,T)
>
> for (i in 1:(T+1)) {
+ if (i<T1 || i>=T2) {
+ PS[i] <- S[i,Z[i]]
+ PPi[i] <- Pi[i,Z[i]]
+ } else {
+ PS[i] <- ST[i,Z[i]]
+ PPi[i] <- PiT[i,Z[i]]
+ }
+ }
>
> for (i in 1:(T)) {
+ if (i<T1 || i>=T2) {
+ PDelta[i] <- Delta[i,Z[i]]
+ Pbeta[i] <- beta[i,Z[i]]
+ } else {
+ PDelta[i] <- DeltaT[i,Z[i]]
+ Pbeta[i] <- betaT[i,Z[i]]
+ }
+ }
>
> #PS
> #PPi
>
> p
[1] 0.7563555
>
> # Ausgabe der Grafiken
>
> oldpar <- par(mfrow=c(2,1))
> #oldpar <- par(mfrow=c(3,1))

```

```
> plot(0:T,PS,type="l",ylim=c(0,max(PS)),
+ xlab="Zeit",
+ ylab="Kurs_(solid),_Option_(dotted),_Bond_(dashed)")
> lines(0:T,PPi,type="l",lty=3)
> lines(0:T,B,type="l",lty=2)
> #plot(0:(T-1),PDelta,type="l",
> #ylim=c(min(Delta,beta),max(Delta,beta)),
> #xlab="Zeit",ylab="Delta (solid), beta (dashed)")
> #lines(0:(T-1),Pbeta,type="l",lty=2)
> plot(0:T,Port,type="l",
+ xlab="Zeit",ylab="Portfolio_der_Bank")
> par(oldpar)
>
> # Endwert der Option
>
> V[Z[T+1]]
[1] 791.1667
> PPi[T+1]
[1] 791.1667
>
```

Als Plot erhält man:

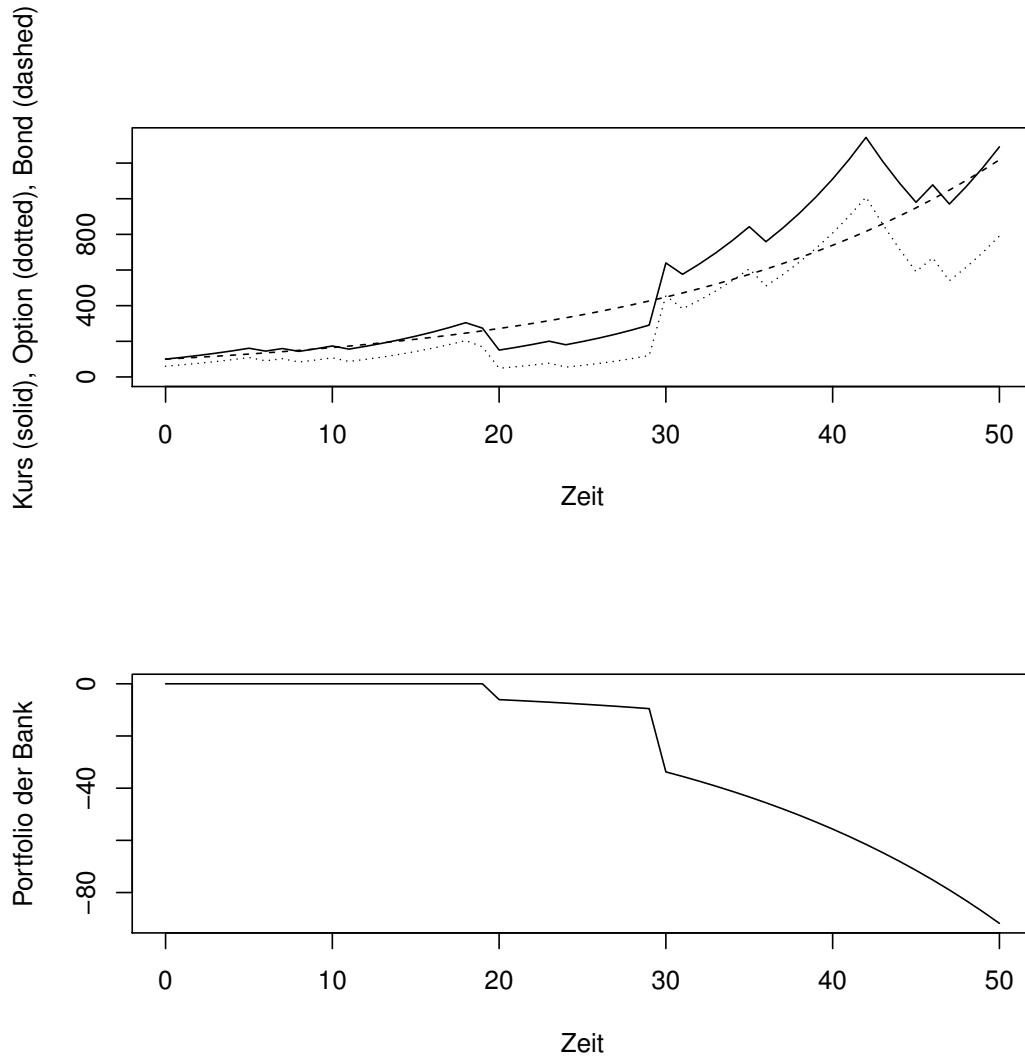


Abbildung 3.2: Portfolioverluste im Binomialmodell

In diesem Programm werden zwei Binomialbäume mit allen dazugehörigen Kursen und Strategien berechnet. Der Baum mit dem gefallenem Kurs ist mit dem Suffix T bezeichnet. Der Zufall kommt erst durch den Randomwalk Z ins Spiel. Mit dem Präfix P sind die Vektoren für den Plot gekennzeichnet. Die entsprechenden Teile der beiden Bäume werden bei der Berechnung des Portfolios `Port` an den Sprungstellen T1 und T2 zusammengefügt.

Zu beachten ist hierbei, dass das Portfolio „von Hand“ so berechnet wird, wie eine Emittentin der Option hedgen würde. Das heißt, wir kaufen zu Beginn der neuen Periode  $\Delta S + \beta B$  und verkaufen dies in der nächsten Periode wieder anstatt in jeder Periode  $-V + \Delta S + \beta B$  als Portfoliowert zu berechnen. Da wir im Binomialmodell aber exakt hedgen, sind diese Werte – sofern sich unser Kurs im

Modell bewegt – gleich.

Wir werden später annehmen, dass sich das Hedgingportfolio (im Black-Scholes-Modell) wie eine risikofreie Anlage entwickelt. Hier ist das Portfolio bis zur ersten plötzlichen Kursänderung jedoch konstant 0, was daran liegt, dass das Portfolio am Anfang den Wert 0 hat und dieser bei Verzinsung 0 bleibt. Falls wir – wie dies später u. U. der Fall sein wird – in  $t_0$  „zu viel“ Geld haben, wird dieses festverzinslich angelegt und unser Portfolio steigt wie der Bond. Das untere Bild im Plot des abgeänderten Programms ist mit einem anfänglichen Überschuss von 10 berechnet:

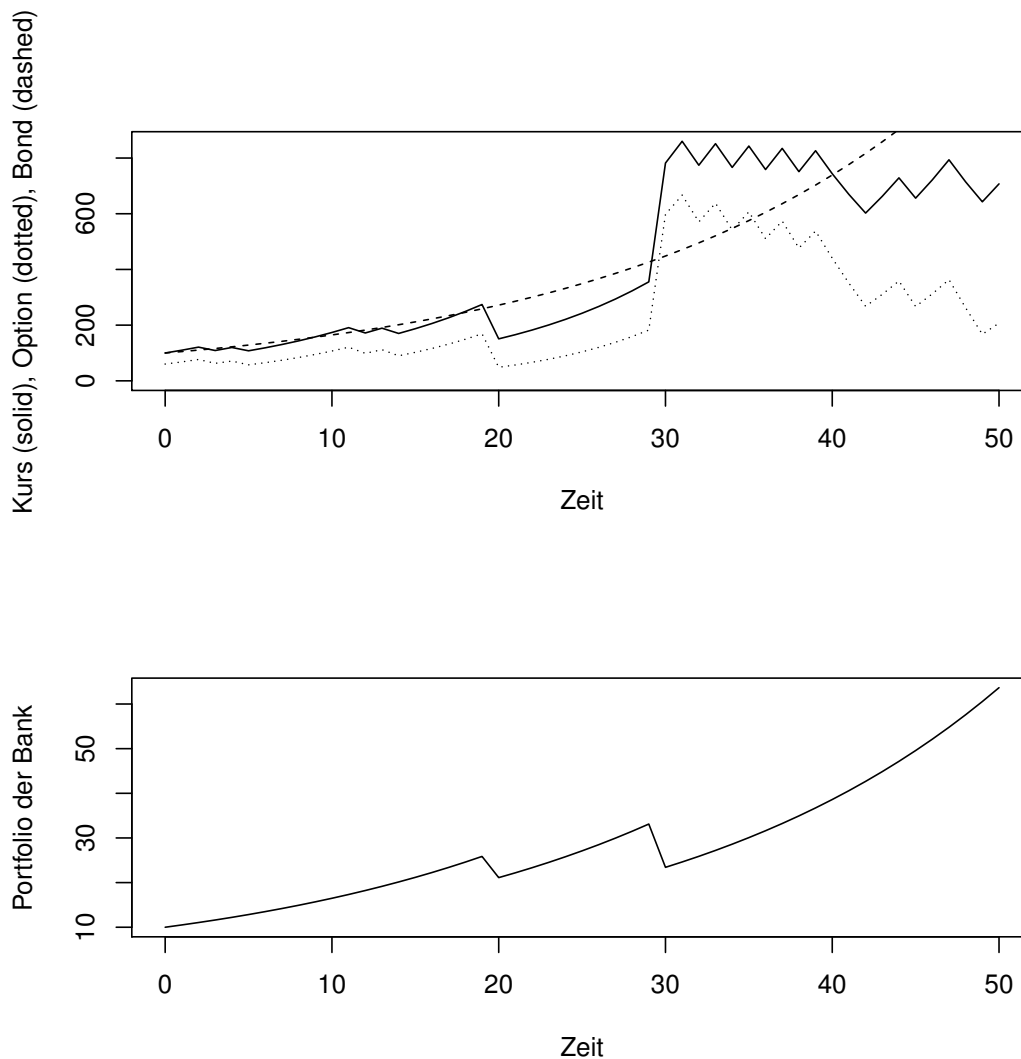


Abbildung 3.3: Exponentielles Portfoliowachstum mit Kurssprüngen

Dies bringt für die Analyse des Problems jedoch keine Vorteile und wird deshalb hier nicht weiter ausgeführt. Beim Plot ist zu beachten, dass ein anderer zufälliger

Pfad durch die Binomialbäume gewählt wurde.

### 3.5 Analytischer Lösungsversuch des Phänomens

Das Programm zeigt uns, dass das Phänomen auch im Binomialbaum auftritt. Wir wollen nun versuchen dies zu begründen. Wie wir im obigen Programm sehen, sind nur die Perioden interessant, in denen sich der Kurs plötzlich ändert, da in allen anderen richtig gehedged wird. Nehmen wir dazu an, wir befinden uns in einem festen Zeitpunkt  $i$  in einem festen Knoten. Dann hat die Option den Wert  $V$ , der Kurs den Wert  $S$ , die Bank  $B$  und wir kaufen  $\Delta S + \beta B$ . Die modellgemäßen Werte von  $S$ ,  $V$  und  $B$  zum Zeitpunkt  $i + 1$  seien mit  $S_u = S\alpha_u$ , bzw.  $S_d = S\alpha_d$ ,  $V_u$  und  $V_d$  sowie  $B^+ = Be^r$  bezeichnet. Mit  $S^+$  und  $V^+$  kennzeichnen wir die unbekanntes (nicht modellgemäßen Werte) von  $S$  und  $V = V(S)$ . Zunächst berechnen wir  $\Delta$  und  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \Delta S_u + \beta B^+ &= V_u \\ \wedge \quad \Delta S_d + \beta B^+ &= V_d \\ \implies \Delta &= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} = \frac{V_u - V_d}{S(\alpha_u - \alpha_d)} \\ \implies \beta &= \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{\alpha_u - \alpha_d} \cdot \alpha_u \right) : B^+ \end{aligned}$$

Nun berechnen wir, wie sich das Portfolio von  $i$  nach  $i + 1$  ändert.

$$\begin{aligned} \text{Port}(i + 1) - \text{Port}(i) &= \Delta S^+ + \beta B^+ - V^+ \\ &= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} \cdot S^+ + \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{\alpha_u - \alpha_d} \cdot \alpha_u \right) - V(S^+). \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass für  $S^+ = S_u \vee S^+ = S_d$  und damit  $V^+ = V(S_u) = V_u \vee V^+ = V(S_d) = V_d$  die Portfolioänderung 0 ist, dabei nehmen wir an, dass im Portfolio zum Zeitpunkt  $i$  weder zu viel, noch zu wenig Geld ist.  $V^+$  ist im Allgemeinen eine unbekanntes Funktion, für bestimmte Optionen lassen sich jedoch geschlossene Formeln angeben. Der nächste Satz sagt uns, wie wir  $V^+$  im Falle europäischer Optionen berechnen können. Siehe dazu [6].

**Satz 20.** Falls  $V(T) = v(S(T))$  nur vom Endwert von  $S$  abhängt, so hängt  $V(t)$  auch nur vom aktuellen Wert  $S(t)$  des Wertpapiers ab und es gilt:

$$V(t, \omega) = \sum_{k=0}^{T-t} v(S(t, \omega) \alpha_d^{T-t-k} \alpha_u^k) \binom{T-t}{k} p^k (1-p)^{T-t-k}$$

Dabei ist  $p = \frac{e^r - \alpha_d}{\alpha_u - \alpha_d}$  die risikoneutrale Up-Wahrscheinlichkeit.

*Beweis.* Sei  $\mathbb{P}$  das Martingalmaß und sei  $\mathbb{P}(Z(t+1) = \alpha_u) = p, \mathbb{P}(Z(t+1) = \alpha_d) = 1 - p, S(t+1) = Z(t+1)S(t)$ .

$$\begin{aligned}
 V(t, \omega) &= pV_u(t+1, \omega) + (1-p)V_d(t+1, \omega) \\
 &= p^2V_{uu}(t+2, \omega) + 2p(1-p)V_{ud}(t+2, \omega) + (1-p)^2V_{dd}(t+2, \omega) \\
 &= \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{T-t} V_{u^k d^{T-t-k}}(T, \omega) \binom{T-t}{k} p^k (1-p)^{T-t-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{T-t} v(S_{u^k d^{T-t-k}}(T, \omega)) \binom{T-t}{k} p^k (1-p)^{T-t-k} \\
 &= \sum_{k=0}^{T-t} v(S(t, \omega) \alpha_d^{T-t-k} \alpha_u^k) \binom{T-t}{k} p^k (1-p)^{T-t-k}
 \end{aligned}$$

Dabei ist beispielsweise mit  $V_{uu}$  der Wert von  $V$  gemeint, wenn  $S(t+2) = \alpha_u^2 S(t)$  ist.  $\square$

Für eine europäische Calloption ist  $v(S(T)) = (S(T) - K)^+$ , für eine europäische Putoption ist  $v(S(T)) = (K - S(T))^+$ .

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 &\text{Port}(i+1) - \text{Port}(i) \\
 &= \Delta S^+ + \beta B^+ - V^+ \\
 &= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} \cdot S^+ + \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{\alpha_u - \alpha_d} \cdot \alpha_u \right) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{T-(t+1)} v\left( S^+ \alpha_d^{T-(t+1)-k} \alpha_u^k \right) \binom{T-(t+1)}{k} p^k (1-p)^{T-(t+1)-k} \\
 &= \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} \cdot S^+ + \left( V_u - \frac{V_u - V_d}{\alpha_u - \alpha_d} \cdot \alpha_u \right) \\
 &\quad - \sum_{k=0}^{T-(t+1)} v\left( S^+ \alpha_d^{T-(t+1)-k} \alpha_u^k \right) \binom{T-(t+1)}{k} \left( \frac{e^r - \alpha_d}{\alpha_u - \alpha_d} \right)^k \left( 1 - \frac{e^r - \alpha_d}{\alpha_u - \alpha_d} \right)^{T-(t+1)-k}
 \end{aligned}$$

Der Leser möge es mir nachsehen, wenn ich, auf Grund der Komplexität der angegebenen Formel, die Analyse des Phänomens im Binomialmodell hier abbreche und im Folgenden ein Modell einführe, in dem die Untersuchung einfacher vonstattengeht.





# Kapitel 4

## Die Brown'sche Bewegung

Da in dem sehr einfachen, aber zugegebenermaßen schönen Binomialmodell  $V$  nicht auf einfache Weise als Funktion von  $S$  berechenbar ist, wollen wir zu einem anderen, und leider auch komplizierteren, Kursmodell, der geometrischen Brown'schen Bewegung, und darauf aufbauend zur Black-Scholes-Theorie übergehen. Dazu führen wir nun den Wiener Prozess ein. Bei den im Folgenden betrachteten stochastischen Prozessen legen wir für alle Zeitpunkte  $t$  den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  zugrunde. Als Hintergrundliteratur ist [8] sowie [3], [12] und [9] zu empfehlen.

### 4.1 Der Wiener Prozess

Im Folgenden werden Kurse als „zufällige Funktionen“, genauer gesagt als stochastische Prozesse, definiert. Aus Gründen der schöneren Modellierbarkeit soll dies jedoch nicht direkt geschehen, sondern über einen Umweg, nämlich den Wiener Prozess und stochastische Differentialgleichungen.

Ein besonderer stochastischer Prozess ist der oben genannte *Wiener Prozess*. Dieser dient als Grundlage zur Definition anderer stochastischer Prozesse und stellt eine „Hauptzutat“ für stochastische Differentialgleichungen dar. Zu seiner Beschreibung erinnern wir an die Normalverteilung.

**Definition 21.** Eine Zufallsvariable  $X$  über  $\mathbb{R}$  heißt normalverteilt, falls sie die Dichte

$$\phi(x) (= \phi(x, \mu, \sigma^2)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ , hat. In diesem Falle schreibt man:  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Sie heißt standardnormalverteilt, falls sie die Dichte

$$\varphi(x) = \phi(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

hat.

Dass die hier angegebene Dichte wohldefiniert, also wirklich eine Dichte ist, kann mit mehreren Substitutionen, u. a. in Polarkoordinaten, nachgerechnet werden. Die Rechnung findet sich in den meisten Stochastikbüchern.

**Satz 22.** Es gilt für  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ :

$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

und

$$\text{Var}(X) = \sigma^2$$

*Beweis.* Sei  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma t + \mu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ mit } \frac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow dx = \sigma dt \\ &= \mu \cdot 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \mu \end{aligned}$$

Die Varianz kann ähnlich berechnet werden, wobei hier die Definition und Funktionalgleichung der Gammafunktion (Definition 46 und Satz 47) Verwendung finden.

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \text{ mit } \frac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow dx = \sigma dt, (x-\mu)^2 = t^2 \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{2s} e^{-s} ds \text{ mit } \frac{t^2}{2} = s \Rightarrow dt = \frac{ds}{t}, t = \sqrt{2s} \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{s} e^{-s} ds \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

□

**Definition 23.** Ein stochastischer Prozess  $W(t)$  für  $t \geq 0$  heißt Wiener Prozess, falls er folgenden Bedingungen genügt:

- (i)  $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$
- (ii)  $W(t_1) - W(t_0) \sim \mathcal{N}(0, t_1 - t_0)$  für  $t_1 \geq t_0 \geq 0$
- (iii)  $W(t_1) - W(t_0)$  und  $W(s_1) - W(s_0)$  sind für  $s_1 \geq s_0 \geq t_1 \geq t_0 \geq 0$  unabhängige Zufallsvariablen

Für  $t = 0$  erhält man  $\sigma = 0$ . Dies widerspricht der Definition der Normalverteilung, ist jedoch so zu verstehen, dass für  $\sigma = 0$  fast sicher der Wert 0 angenommen wird.

Es kann gezeigt werden, dass der Wiener Prozess existiert und dass jeder Pfad fast sicher stetig in  $t$ , jedoch fast sicher nirgends differenzierbar ist. Aus obigen Eigenschaften folgt, dass  $W_{neu}(t) = W(t + t_0) - W(t_0)$  wieder ein Wiener Prozess ist (*Verschiebungsregel*). Der Wiener Prozess selbst ist als Kursmodell jedoch nicht geeignet, da er zum einen negativ werden kann und zum anderen nicht über Parameter einstellbar ist. Deshalb definieren wir im Folgenden komplexere stochastische Prozesse.

## 4.2 Itô-Integral und stochastische Differentialgleichungen

**Definition 24.** Eine stochastische Differentialgleichung ist (in Analogie zur Definition deterministischer Differentialgleichungen) eine Gleichung der Form

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t,$$

deren Lösung  $X = X(t, \omega)$  ein stochastischer Prozess ist.

Dabei ist unklar, was  $b(t, X(t))dW_t$  sein soll. Die stochastische Differentialgleichung, wie sie hier aufgeschrieben ist, ist lediglich eine abkürzende Schreibweise für die Integralgleichung

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, X(\tau))dW_\tau.$$

Aber auch hier ist  $\int_{t_0}^t b(\tau, X(\tau))dW_\tau = \int_{t_0}^t b(\tau, X(\tau))dW(\tau)$  nicht definiert – ebenso wie  $a(t, X(t))dt$  bzw.  $\int_{t_0}^t a(\tau, X(\tau))d\tau$ , da  $X$  ein stochastischer Prozess ist. Die Funktion  $a$  wird in der stochastischen Differentialgleichung als *Drift* und die Funktion  $b$  als *Diffusion* bezeichnet. Im Folgenden wollen wir die Integrale über  $a$  und  $b$  definieren.

### 4.2.1 Itô-Integral

Für stochastische Prozesse kann man, ähnlich wie für deterministische Funktionen bei der Herleitung des Riemann-Integrals bzw. des Jean-Gaston-Darboux-Integrals, Zwischensummen definieren. Dazu nimmt man eine Folge von Verfeinerungen  $(\tau_0^N, \dots, \tau_N^N)_N$  der Zeitachse bzw. des Integrationsintervalls  $[t_0, t_1]$  mit  $\tau_0^N = t_0$ ,  $\tau_N^N = t_1$ ,  $\tau_{i-1}^N < \tau_i^N$  für alle  $i = 1, \dots, N$  für alle  $N$  und  $\delta^N = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (\tau_i^N - \tau_{i-1}^N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . Für stochastische Prozesse  $a(t, \omega)$  und  $b(t, \omega)$  und einen Wiener Prozess  $W$  definiert man für jedes  $\omega \in \Omega$

$$I_W^N(b)(\omega) := \sum_{i=0}^{N-1} b(\tau_i^N, \omega)(W(\tau_{i+1}^N, \omega) - W(\tau_i^N, \omega))$$

und

$$I_t^N(a)(\omega) := \sum_{i=0}^{N-1} a(\tau_i^N, \omega)(\tau_{i+1}^N - \tau_i^N).$$

Der Term  $I_W^N(b)$  ist eine Zufallsvariable und konvergiert im Quadrat-Mittel-Sinn, jedoch nicht pfadweise, für  $N \rightarrow \infty$  gegen eine Zufallsvariable. Der Grenzwert von  $I_W^N(b)$  wird Itô-Integral genannt. Man kann zeigen, dass die Lösung von

$$dX(t) = dW_t$$

gleich

$$X(t) = W(t)$$

ist.  $\int_{t_0}^{t_1} b(t, X(t))dW_t$  ist eine Zufallsvariable, also  $\int_{t_0}^t b(t, X(t))dW_t$  wieder ein stochastischer Prozess. Im Allgemeinen kann man Itô-Integrale auch bezüglich mehrerer Wiener Prozesse oder bezüglich anderer stochastischer Prozesse analog definieren. Es gilt der folgende Satz:

**Satz 25.** Für einen stochastischen Prozess  $F$  gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t)dW_t \right] = 0,$$

wenn  $F(t)$  und  $W(s) - W(t)$  für alle  $s > t \geq 0$  stochastisch unabhängig sind.

*Beweis.* Seien also  $F$  ein stochastischer Prozess,  $W$  ein Wiener Prozess, so dass  $F(t)$  und  $W(s) - W(t)$  stochastisch unabhängig sind für alle  $s > t \geq 0$ . Die Definition des Itô-Integrals sagt uns für eine geeignete – der Definition entsprechenden – Familie an Zeitgittern  $((\tau_i^N)_{i \in \{1, \dots, N\}})_{N \in \mathbb{N}}$ , dass:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \left| \int_{t_0}^{t_1} F(t)dW_t - \sum_{i=1}^{N-1} F(\tau_i^N)(W(\tau_{i+1}^N) - W(\tau_i^N)) \right|^2 \right] \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t)dW_t - \sum_{i=1}^{N-1} F(\tau_i^N)(W(\tau_{i+1}^N) - W(\tau_i^N)) \right] \right|^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

was mit der Jensen'schen Ungleichung und der Konvexität von  $|\cdot|^2$  folgt. Also ist wegen der für diesen Satz ausschlaggebenden, stochastischen Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right] - \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^{N-1} F(\tau_i^N) (W(\tau_{i+1}^N) - W(\tau_i^N)) \right] \right|^2 \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right] - \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{E}[F(\tau_i^N)] \mathbb{E}[(W(\tau_{i+1}^N) - W(\tau_i^N))] \right|^2 \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right] - \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{E}[F(\tau_i^N)] \cdot 0 \right|^2 \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right] \right|^2 \\
&= \left| \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^{t_1} F(t) dW_t \right] \right|^2,
\end{aligned}$$

woraus das Behauptete unmittelbar folgt.  $\square$

Die Aussage von Satz 25 gilt immer, falls  $F$  die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung bezüglich  $W$  ist, da die Lösung einer Differentialgleichung zum Zeitpunkt  $t_1$  nur von den Werten  $W(t)$  für  $0 \leq t \leq t_1$  abhängt.

## 4.2.2 Itô-Lemma

Für deterministische Differentialgleichungen sind Lösungsstrategien wie „Trennung der Variablen“ oder „Variation der Konstanten“ bekannt. Das Finden der Lösung einer stochastischen Differentialgleichung ist leider komplizierter.

Einen schönen Weg bietet das Itô-Lemma, welches wir nun besprechen, und das im Laufe der Arbeit öfters Anwendung findet. Das Itô-Lemma kann in gewisser Weise als Verallgemeinerung der Kettenregel für deterministische Differentialgleichungen aufgefasst werden.

**Satz 26** (Itô-Lemma). Gegeben sei eine stochastische Differentialgleichung der Form  $dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t$  mit der Lösung  $X(t)$ . Dann ist  $Y(t) = g(t, X(t))$  mit  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto g(t, x)$  zweimal stetig differenzierbar eine Lösung von

$$\begin{aligned}
dY(t) &= \left( \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))a(t, X(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))b(t, X(t))^2 \right) dt \\
&\quad + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))b(t, X(t))dW_t,
\end{aligned}$$

wobei der Wiener Prozess  $W$  in den beiden stochastischen Differentialgleichungen der gleiche ist.

Im Folgenden wollen wir uns überlegen, wieso dieser Satz plausibel ist, für einen genauen Beweis möchte ich den Leser jedoch auf [3], [12] oder [9] verweisen. Wenn wir  $g(t, X)$  um  $x$  und  $t$  nach Taylor entwickeln, erhalten wir

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Delta X^2 + \dots$$

Dabei ist  $\Delta g = g(t + \Delta t, X + \Delta X) - g(t, X)$ . Wegen  $\Delta X \approx a(t, X) \Delta t + b(t, X) \Delta W_t$  setzen wir

$$\Delta X = a(t, X) \Delta t + b(t, X) \Delta W_t,$$

wobei  $\Delta W_t = W(t + \Delta t) - W(t)$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{\partial g}{\partial x} (a(t, X) \Delta t + b(t, X) \Delta W_t) + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (a(t, X) \Delta t + b(t, X) \Delta W_t)^2 + \dots \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} a(t, X) \Delta t + \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (a(t, X))^2 (\Delta t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial g}{\partial x} b(t, X) \Delta W_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} a(t, X) b(t, X) \Delta t \Delta W_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (b(t, X))^2 (\Delta W_t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Man bemerke, dass  $\Delta g$  kein  $\Delta X$  mehr enthält. Es kann gezeigt werden, dass nur die Terme zu berücksichtigen sind, die höchstens von Ordnung  $\Delta t$  sind. Aus der Definition des Wiener-Prozesses folgt, dass  $(\Delta W_t)^2$  von Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t)$  ist. Damit erhält man die angegebene Formel.

Zu beachten ist jedoch, dass dies kein Beweis ist, da  $d$  kein Differentialoperator, sondern nur eine Kurzschreibweise ist. Für eine Limesbildung muss auch hier das Konzept der Quadrat-Mittel-Konvergenz Anwendung finden, wobei genau darin die Schwierigkeit des Beweises liegt.

### 4.3 Geometrische Brown'sche Bewegung

Nun haben wir alle Mittel, die wir zur Definition des angestrebten Kursmodells, der geometrischen Brown'schen Bewegung, brauchen, kennengelernt. Die geometrische Brown'sche Bewegung ist ursprünglich ein physikalisches Modell, das die Bewegung eines auf einer Wasseroberfläche schwimmenden Teilchens beschreibt. Es eignet sich aber auch sehr gut als Kursmodell und findet in der Finanzmathematik viel Anwendung. Die geometrische Brown'sche Bewegung ist die Lösung der Differentialgleichung

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t.$$

$\mu$  wird als Trend bezeichnet und modelliert das mittlere Wachstum,  $\sigma$  als Volatilität und modelliert die Varianz. Die Varianz hängt selbst wiederum von der Kurshöhe ab.

**Satz 27.** Die Lösung der Differentialgleichung der geometrischen Brown'schen Bewegung ist

$$S(t, S_0) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)},$$

wobei das  $S_0$  in  $S(t, S_0)$  für die Anfangsbedingung  $S(0, S_0) = S_0$  steht.

*Beweis.* Zum Beweis verwenden wir das Itô-Lemma.  $X(t) = W(t)$  ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung  $dX(t) = dW_t = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW_t$  mit  $a \equiv 0$  und  $b \equiv 1$ . Definiert man  $Y(t) := g(t, X(t))$  mit

$$g(t, x) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma x}$$

und berechnet man

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = g(t, x)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = g(t, x)\sigma \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = g(t, x)\sigma^2,$$

so folgt mit  $X(t) = W(t)$ , dass  $Y(t) = S(t)$  die Lösung von

$$\begin{aligned} dS(t) &= dY(t) \\ &= \left( Y(t)(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{2}\sigma^2 Y(t) \right) dt + Y(t)\sigma dW_t \\ &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t \end{aligned}$$

ist. □

Auch der Erwartungswert und die Varianz der geometrischen Brown'schen Bewegung lassen sich für jeden Zeitpunkt  $t$  explizit angeben.

**Satz 28.** Es gilt:

$$\mathbb{E}[S(t, S_0)] = S_0 e^{\mu t}$$

und

$$\text{Var}[S(t, S_0)] = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(t, S_0)] &= \mathbb{E}[S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}] \\
&= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \mathbb{E}[e^{\sigma W(t)}] \\
&= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2} dx \\
&= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\left(\frac{x^2}{2t} - \frac{2t\sigma x}{2t} + \frac{(t\sigma)^2}{2t}\right) + \frac{t\sigma^2}{2}} dx \\
&= S_0 e^{\mu t} e^{-\frac{t\sigma^2}{2}} e^{\frac{t\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-t\sigma}{\sqrt{t}}\right)^2} dx \\
&= S_0 e^{\mu t},
\end{aligned}$$

wobei  $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-t\sigma}{\sqrt{t}}\right)^2}$  die Dichte einer Normalverteilung mit Mittelwert  $t\sigma$  und Varianz  $t$  ist.

$$\begin{aligned}
\text{Var}[S(t, S_0)] &= \mathbb{E}[S^2(t, S_0) - \mathbb{E}^2[S(t, S_0)]] \\
&= \mathbb{E}[S_0^2 e^{2\mu t - \sigma^2 t + 2\sigma W(t)} - S_0^2 e^{2\mu t}] \\
&= S_0^2 e^{2\mu t} (\mathbb{E}[e^{-\sigma t + 2\sigma W(t)}] - 1) \\
&= S_0^2 e^{2\mu t} (\mathbb{E}[\tilde{S}_0 e^{(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2)t + \tilde{\sigma} W(t)}] - 1) \text{ mit } \tilde{S}_0 = 1, \tilde{\mu} = \sigma^2, \tilde{\sigma} = 2\sigma \\
&= S_0^2 e^{2\mu t} (\tilde{S}_0 e^{\tilde{\mu} t} - 1) \\
&= S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).
\end{aligned}$$

□

Wegen der risikoneutralen Bewertung muss gelten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S(T)] &= e^{rT} S(0) \\
\Leftrightarrow S_0 e^{\mu T} &= S_0 e^{rT} \\
\Leftrightarrow \mu &= r.
\end{aligned}$$

Das heißt, dass in diesem Kursmodell ein freier Parameter, nämlich die Volatilität  $\sigma$ , für die Modellierung zur Verfügung steht.

## 4.4 Approximation eines stochastischen Prozesses durch Random Walks

Da wir stochastische Prozesse (mit zum Beispiel  $\mathbb{D} = [0, T]$ ) am Computer simulieren wollen und diese nur in diskreten Schritten rechnen können, müssen



wir stochastische Prozesse, die zum Beispiel auf Intervallen definiert sind, durch solche, die auf Zeitgittern definiert sind, so genannten *Random Walks*, approximieren.

Wir nehmen an, dass der zu approximierende, stochastische Prozess  $X$  auf  $[0, T] \times \Omega$  definiert ist und dass  $(\mathcal{T}_N)_N = (\{0, \tau_N, 2\tau_N, \dots, N\tau_N\})_N$  mit  $N\tau_N = T$  eine Familie von je äquidistanten Gittern ist. Es ist jedoch nicht sinnvoll, eine Folge  $(X_N)_N : \mathcal{T}_N \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  von Random Walks zu suchen, die jeden Pfad von  $X$  für beliebige stochastische Prozesse  $X$  möglichst gut approximiert, da  $X$ , wie im Falle des Wiener Prozesses, zum Beispiel nicht differenzierbar sein kann, also in sehr kurzer Zeit sehr stark den Wert ändern kann. Wir suchen daher eine Folge von Random Walks  $(X_N)_N$ , die im Mittel  $X$  gut annähern. Für die Definition von „im Mittel“ gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wir wollen eine „besonders starke“ hier vorstellen.

**Definition 29.** *Eine Folge  $(X_N)_N$  mit  $X_N : \mathcal{T}_N \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  von Random Walks mit einer Familie von Gittern wie oben beschrieben approximiert den stochastischen Prozess  $X$  bezüglich einer Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , falls*

$$\max_{t_i \in \mathcal{T}_N} \mathbb{E}[|g(X(t_i)) - g(X_N(t_i))|] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Im Folgenden wollen wir einen Algorithmus angeben, mit dem eine Folge von Random Walks  $(W_N)_N$  gefunden werden kann, die den interessantesten stochastischen Prozess, den Wiener Prozess,  $W$  approximiert.

### Algorithmus

Gegeben:

Intervall  $[0, T]$ , Anzahl  $N + 1$  der Zeitpunkte im Gitter

Gesucht:

Ein Pfad von  $W_N$  auf  $\mathcal{T}_N$ , also  $(W_N(0, \omega_1), W_N(\tau, \omega_1), \dots, W_N(T, \omega_1))$

1. Berechne  $\tau = \frac{T}{N}$  und erzeuge das Gitter  $\mathcal{T}_N = \{0, \tau, 2\tau, \dots, T\}$ , das heißt  $t_i = i\tau$
2. Erzeuge  $N$  unabhängige  $\mathcal{N}(0, \tau)$ -verteilte Zufallsvariable  $\Delta W_N(i, \omega_1)$ ,  $i = 1, \dots, N$
3. Berechne  $W_N(t_i, \omega_1)$  durch

$$W_N(0, \omega_1) = 0 \text{ und}$$

$$W_N(t_i, \omega_1) = W_N(t_{i-1}, \omega_1) + \Delta W_N(i, \omega_1) \text{ für } i = 1, \dots, N.$$

Der so berechnete Random Walk  $W_N$  hat sehr schöne Eigenschaften, wie uns der nächste Satz, zu dessen Beweis wir folgendes Lemma brauchen, zeigt.

**Lemma 30.** Seien  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$  stochastisch unabhängig, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

*Beweis.* Wir werden das Lemma für  $n = 2$  beweisen, da man so induktiv auf beliebiges  $n$  schließen kann. Seien  $X_1, X_2$  wie im Lemma beschrieben und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ .

$$\begin{aligned} \varphi_{X_1+X_2}(s) &= \mathbb{E}[e^{is(X_1+X_2)}] \\ &= \mathbb{E}[e^{isX_1}] \cdot \mathbb{E}[e^{isX_2}], \text{ da } X_1 \text{ und } X_2 \text{ stochastisch unabhängig sind} \\ &= e^{is\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2 s^2} \cdot e^{is\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2 s^2} \\ &= e^{is(\mu_1+\mu_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)s^2} \\ &= \mathbb{E}[e^{isY}] \\ &= \varphi_Y(s) \quad \forall s \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow X_1 + X_2 &\sim Y \\ X_1 + X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \end{aligned}$$

Für die Rechenregeln für charakteristische Funktionen siehe im Anhang im entsprechenden Paragraph auf Seite 104.  $\square$

**Satz 31.** Die nach obigem Algorithmus berechnete Approximation  $W_N$  für  $W$  erfüllt für alle  $N$  und für alle  $t \in \mathcal{T}_N$  exakt die Eigenschaften des Wiener Prozesses.

*Beweis.* Um die Übersichtlichkeit in den folgenden Rechnungen zu erhalten verzichte ich in der Notation auf die  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad W_N(t_i) &\stackrel{!}{\sim} \mathcal{N}(0, t_i) \\ W_N(t_i) &= W_N(t_{i-1}) + \Delta W_N(i) = W_N(t_{i-2}) + \Delta W_N(i-1) + \Delta W_N(i) = \dots = \\ &= \sum_{k=1}^i \Delta W_N(k) \\ W_N(0) &= 0 \\ \Delta W_N(j) &\sim \mathcal{N}(0, \tau) \\ W_N(t_i) &= \sum_{k=1}^i \Delta W_N(k) \\ \Delta W_N &\stackrel{\text{unabh.}}{\sim} \mathcal{N}(\sum_{k=1}^i 0, \sum_{k=1}^i \tau) = \mathcal{N}(0, i\tau) = \mathcal{N}(0, t_i) \\ \text{(ii)} \quad W_N(t_j) - W_N(t_i) &\stackrel{!}{\sim} \mathcal{N}(0, t_j - t_i), T \geq t_j > t_i \geq 0 \\ W_N(t_j) - W_N(t_i) &= \sum_{k=1}^j \Delta W_N(k) - \sum_{k=1}^i \Delta W_N(k) = \sum_{k=i+1}^j \Delta W_N(k) \\ \Delta W_N &\stackrel{\text{unabh.}}{\sim} \mathcal{N}(\sum_{k=i+1}^j 0, \sum_{k=i+1}^j \tau) = \mathcal{N}(0, (j-i)\tau) = \mathcal{N}(0, j\tau - i\tau) = \\ &= \mathcal{N}(0, t_j - t_i) \end{aligned}$$

(iii) Die Unabhängigkeit der Inkremente folgt direkt aus der der  $\Delta W_N(i)$ .

□

Nun haben wir einen Algorithmus zur Simulation des Wiener Prozesses gefunden. Diesen werden wir im nächsten Abschnitt auch implementieren. Allerdings wollen wir ja eigentlich die geometrische Brown'sche Bewegung simulieren. Das folgende Lemma sagt etwas darüber aus, wie sich Approximationseigenschaften auf andere Prozesse vererben.

**Lemma 32.** Approximiert  $X_N$  den Prozess  $X$  bzgl.  $g$  und ist  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine global lipschitzstetige Funktion mit Lipschitzkonstante  $L > 0$ , so approximiert  $X_N$  den Prozess  $X$  auch bzgl.  $h \circ g$ .

*Beweis.* Für alle  $N$  und alle  $t_i \in \mathcal{T}_N$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|h(g(X(t_i))) - h(g(X_N(t_i)))|] &\leq \mathbb{E}[L|g(X(t_i)) - g(X_N(t_i))|] \\ &= L\mathbb{E}[|g(X(t_i)) - g(X_N(t_i))|], \end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. □

Dieses Lemma können wir leider nicht auf die geometrische Brown'sche Bewegung anwenden, da

$$S(t, w, S_0) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w}$$

nicht global lipschitzstetig in  $w$  ist. Wir brauchen dies jedoch auch nicht, da der letzte Satz besagt, dass unser Algorithmus den Wiener Prozess pfadweise approximiert, das heißt man kann für alle  $N$  jedem approximativen Pfad  $W_N(\omega_j)$  einen Pfad des exakten Wiener Prozesses  $W$  zuordnen, also

$$W_N(t_i, \omega_j) = W(t_i, \omega_j) \quad \forall t_i \in \mathcal{T}_N, \omega_j \in \Omega.$$

Daraus folgt, dass  $W_N$  für alle  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Approximation von  $W$  bezüglich  $g$  ist, also:

$$g(W_N(t_i, \omega_j)) = g(W(t_i, \omega_j)) \quad \forall t_i \in \mathcal{T}_N, \omega_j \in \Omega$$

So können wir mit  $g(w) = S(t, w, S_0)$  die geometrische Brown'sche Bewegung approximieren.

## 4.5 Simulation der geometrischen Brown'schen Bewegung

Wir implementieren den Algorithmus in R und erweitern ihn so, dass wir  $M$  approximative, unabhängige Pfade des Wiener Prozesses erhalten.

```
>
> T <- 10
> N <- 100
> tau <- T/N
> M <- 5
>
> t <- seq(from=0, to=T, by=tau)
> W <- matrix(0,N+1,M)
>
> # DeltaW und W werden erzeugt
>
> for (j in 1:M) {
+ DeltaW <- rnorm(N,0,sqrt(tau))
+
+ for (i in 2:(N+1)) {
+ W[i,j] <- W[i-1,j] + DeltaW[i-1]
+ }
+
+ }
>
> # Plot
>
> x <- c(2,3,4,5)
>
> plot(t,W[,1],type="l",ylab="Wiener_Prozess",
+ ylim=c(min(W),max(W)))
> for (j in 2:M) {
+ lines(t,W[,j],lty=x[j-1])
+ }
>
```

Dieses R Programm liefert folgenden Plot, auf dem wir fünf Pfade des approxi-  
mierten Wiener Prozesses erkennen.

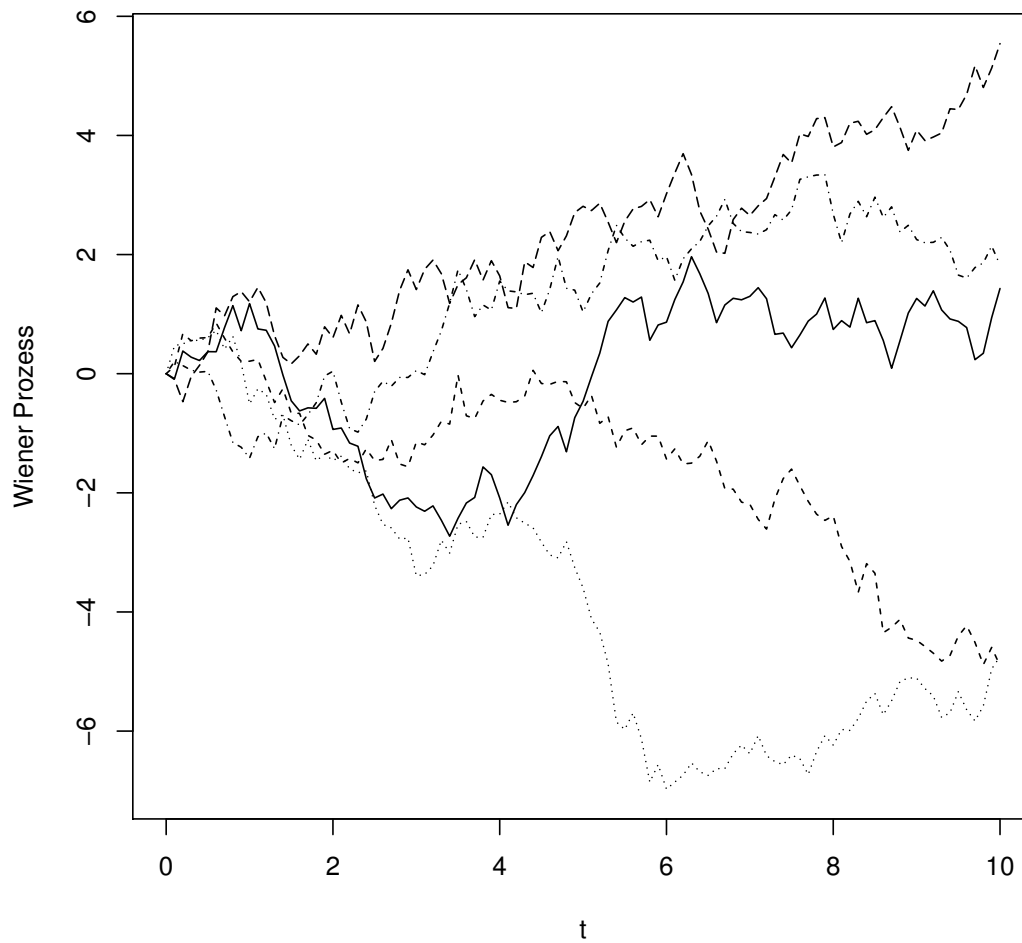


Abbildung 4.1: Fünf zufällige Pfade des Wiener Prozesses

Dieses Programm ändern wir nun so ab, dass wir zusätzlich  $M$  approximative Pfade der geometrischen Brown'schen Bewegung ausgegeben bekommen.

```
>  
> r <- 0.05  
> mu <- r  
> sigma <- 0.3  
> S_0 <- 80  
>  
> T <- 10  
> N <- 100  
> tau <- T/N
```

```
>
> M <- 5
>
> # Zeitstrahl wird erzeugt
> # Matrizen Initialisierung
>
> t <- seq(from=0, to=T, by=tau)
> S <- matrix(0,N+1,M)
> S[1,] <- rep(S_0,M)
> W <- matrix(0,N+1,M)
>
> # DeltaW, W und S werden berechnet
>
> for (j in 1:M) {
+ DeltaW <- rnorm(N,0,sqrt(tau))
+
+ for (i in 2:(N+1)) {
+ W[i,j] <- W[i-1,j] + DeltaW[i-1]
+ S[i,j] <- S_0*exp((r-sigma^2/2)*t[i]+sigma*W[i,j])
+ }
+
+ }
>
> # Plot
>
> x <- c(2,3,4,5)
>
> oldpar <- par(mfrow=c(2,1))
> plot(t,W[,1],type="l",ylab="Wiener_Prozess",
+ ylim=c(min(W), max(W)))
> for (j in 2:M) {
+ lines(t,W[,j],lty=x[j-1])
+ }
> plot(t,S[,1],type="l",
+ ylab="geometrische_brownsche_Bewegung",
+ ylim=c(min(S),max(S)))
> for (j in 2:M) {
+ lines(t,S[,j],lty=x[j-1])
+ }
> par(oldpar)
>
```

Dieses abgeänderte Programm liefert das folgende Bild, welches fünf Pfade des angenäherten Wiener Prozesses und die dazugehörigen Pfade der geometrischen Brown'schen Bewegung zeigt.

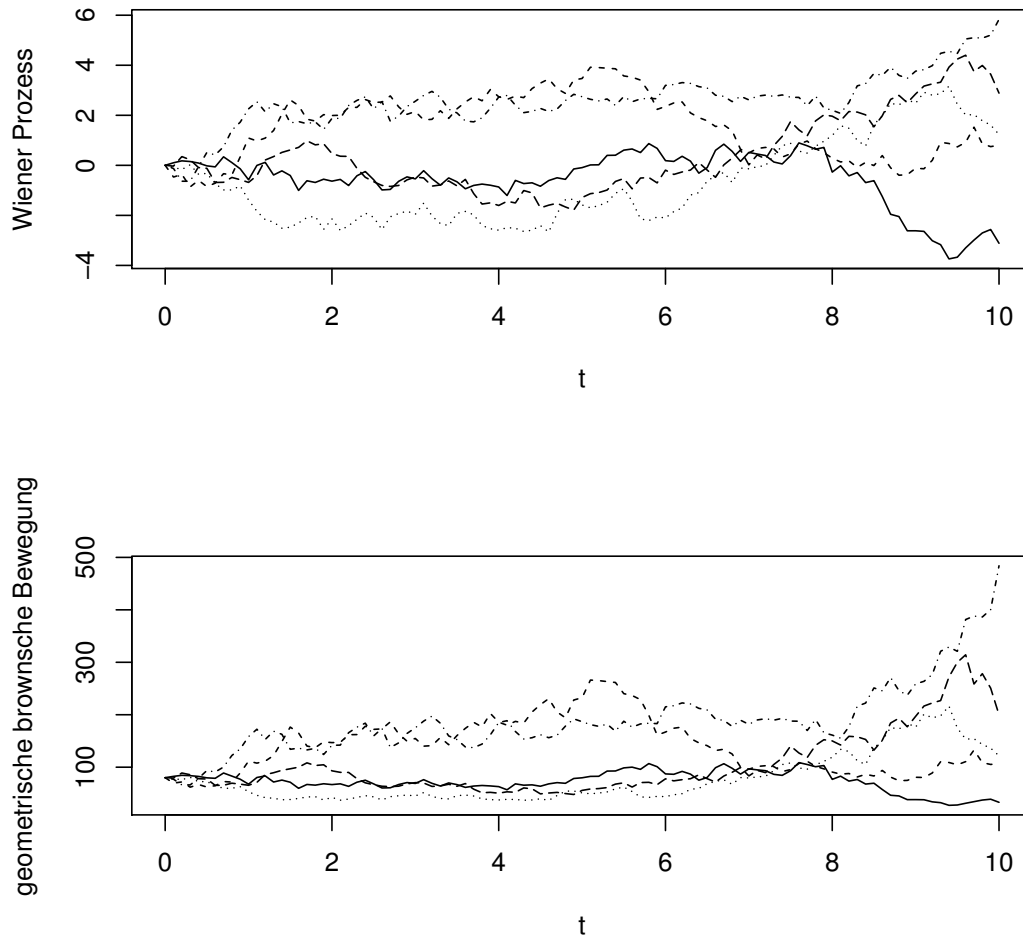


Abbildung 4.2: Fünf Pfade des Wiener Prozesses (oben) und die zugehörigen Pfade der geometrischen Brown'schen Bewegung (unten)

Im nächsten Kapitel werden wir uns überlegen, wie man dieses Kursmodell zur Optionsbewertung nutzen kann.





# Kapitel 5

## Black-Scholes-Gleichung

Das Problem bei der Analyse des Phänomens der Portfolioverluste mit Hilfe der Binomialmethode war, dass wir  $V$  nicht als einfach handhabbare Funktion von  $t$  und  $S$  bzw.  $S(t)$  angeben konnten. Fisher Black, Myron Scholes und Robert Merton ist es gelungen, unter folgenden Voraussetzungen bzw. (Markt-)Annahmen eine partielle Differentialgleichung herzuleiten, die  $V$  als  $V(t, S)$  beschreibt. Für europäische Optionen ist diese sogenannte Black-Scholes-Gleichung explizit lösbar, für viele andere Optionsarten kann man nur Näherungen der Lösung berechnen<sup>1</sup>.

Folgende Annahmen werden getroffen:

- Die Option  $V : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, S) \mapsto V(t, S)$  sei zweimal stetig differenzierbar in  $t$  und  $S$ .
- Der Kurs  $S$  folgt einer geometrischen Brown'schen Bewegung.
- Der Markt ist arbitragefrei.
- Das eigene Kaufverhalten hat keinen Einfluss auf den Markt.
- Es gibt weder Transaktionskosten noch Gebühren, aber auch keine Dividenden.
- Die risikofreie Zinsrate  $r > -1$  ist konstant.
- Die Optionsbewertung erfolgt risikoneutral.

### 5.1 Herleitung der Black-Scholes-Gleichung

Wie in [8] werden wir die Black-Scholes-Gleichung Schritt für Schritt herleiten:

---

<sup>1</sup>zum Beispiel mit der finite Differenzen-Methode, siehe dazu [8]

**Schritt 1**  $S(t)$  löst  $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t$ . Mit dem Itô-Lemma, angewandt auf  $V(t, S)$  folgt, dass  $V(t, S(t))$

$$dV = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t$$

löst. Dabei ist  $V$  eine reellwertige Funktion in den unabhängigen Variablen  $t$  und  $S$ , während  $S(t)$  und  $W_t$  stochastische Prozesse sind.

**Schritt 2** Andererseits können wir die Emittentin einer solchen Option  $V$  betrachten, die versucht, sich, wie in 2.3, durch den Kauf von  $\Delta$  Anteilen an  $S$  und  $\beta$  Anteilen an  $B$  gegen Risiken abzusichern. Der faire Preis für  $V$ , der gleich dem risikoneutralen Preis ist, ist der, den die Ausgeberin der Option braucht, damit sich ihr Hedging-Portfolio

$$\Pi(t) = -V(t, S(t)) + \Delta(t)S(t) + \beta(t)B(t)$$

wie eine festverzinsliche Anlage entwickelt. Würde sich das Portfolio im Mittel nicht wie der Bond entwickeln, wäre die Non-Arbitrage-Bedingung verletzt. Dieses Portfolio soll selbstfinanzierend sein, das heißt es soll in  $(0, T)$  weder Geld in das Portfolio investiert noch welches entnommen werden. Es darf lediglich Geld umgeschichtet werden. Im nächsten Schritt diskretisieren wir das Zeitintervall  $[0, T]$  in  $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$  mit  $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_N = T$  und  $\bar{\tau}_N = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} (t_i - t_{i-1})$ , und nehmen an, dass  $\Delta(0) = \Delta_0$  und  $\beta(0) = \beta_0$ , das heißt

$$\Pi(t_0) = -V(t_0, S(t_0)) + \Delta(t_0)S(t_0) + \beta(t_0)B(t_0).$$

Zum Zeitpunkt  $t_1$  hat das Portfolio vor der Umschichtung (Index  $v$ ) den Wert

$$\Pi_v(t_1) = -V(t_1, S(t_1)) + \Delta(t_0)S(t_1) + \beta(t_0)B(t_1).$$

Geld umschichten bedeutet, dass man Anteile von  $S$  und  $B$  (ver-)kauft. Da dies selbstfinanzierend geschehen soll, muss das Portfolio

$$\Pi_n(t_1) = -V(t_1, S(t_1)) + \Delta(t_1)S(t_1) + \beta(t_1)B(t_1)$$

nach der Umschichtung (Index  $n$ ) den selben Wert haben, also

$$\Pi_v(t_1) = \Pi_n(t_1),$$

$$\Delta(t_0)S(t_1) + \beta(t_0)B(t_1) = \Delta(t_1)S(t_1) + \beta(t_1)B(t_1).$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} \Pi(t_1) - \Pi(t_0) &= V(t_0, S(t_0)) - V(t_1, S(t_1)) \\ &\quad + \Delta(t_1)S(t_1) + \beta(t_1)B(t_1) - \Delta(t_0)S(t_0) - \beta(t_0)B(t_0) \\ &= V(t_0, S(t_0)) - V(t_1, S(t_1)) \\ &\quad + \Delta(t_0)(S(t_1) - S(t_0)) + \beta(t_0)(B(t_1) - B(t_0)). \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}\Pi(t_2) - \Pi(t_1) &= V(t_1, S(t_1)) - V(t_2, S(t_2)) \\ &\quad + \Delta(t_1)(S(t_2) - S(t_1)) + \beta(t_1)(B(t_2) - B(t_1))\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\Pi(t_2) - \Pi(t_0) &= V(t_0, S(t_0)) - V(t_2, S(t_2)) \\ &\quad + \Delta(t_0)(S(t_1) - S(t_0)) + \Delta(t_1)(S(t_2) - S(t_1)) \\ &\quad + \beta(t_0)(B(t_1) - B(t_0)) + \beta(t_1)(B(t_2) - B(t_1)).\end{aligned}$$

Durch iteratives Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned}\Pi(t_k) - \Pi(t_0) &= V(t_0, S(t_0)) - V(t_k, S(t_k)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \Delta(t_{i-1})(S(t_i) - S(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^k \beta(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))\end{aligned}$$

Mit Limesbildung  $N \rightarrow \infty$ , sodass  $\bar{\tau}_N \rightarrow 0$ , folgt

$$\Pi(t_k) = \Pi(t_0) + V(t_0, S(t_0)) - V(t_k, S(t_k)) + \int_{t_0}^t \Delta(\tau) dS(\tau) + \int_{t_0}^t \beta(\tau) dB(\tau),$$

wobei die beiden Integrale Itô-Integrale, nicht bezüglich eines Wiener Prozesses, sondern bzgl. der stochastischen Prozesse  $S$  und  $B$ , sind. Dabei ist  $B$  ein entarteter stochastischer Prozess, da  $B$  eine deterministische Funktion ist. Diese stochastische Integralgleichung kann man wieder als stochastische Differentialgleichung schreiben:

$$d\Pi(t) = -dV(t, S(t)) + \Delta(t)dS(t) + \beta(t)dB(t).$$

**Schritt 3** Mit  $dB = rBdt$  folgt

$$d\Pi(t) = -dV(t, S(t)) + \Delta(t)dS(t) + \beta(t)rB(t)dt$$

bzw. ohne die Argumente in der Notation

$$d\Pi = -dV + \Delta dS + \beta r B dt.$$

Einsetzen von

$$dV = \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t$$

und

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t$$

liefert

$$\begin{aligned}
d\Pi &= - \left( \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW_t \right) \\
&\quad + \Delta(\mu S dt + \sigma S dW_t) + \beta r B dt \\
&= - \left( \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta \mu S - \beta r B \right) dt \\
&\quad - \left( \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \sigma S \right) dW_t \\
&= - \left( \mu S \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta r B \right) dt \\
&\quad - \left( \sigma S \left( \frac{\partial V}{\partial S} - \Delta \right) \right) dW_t.
\end{aligned}$$

**Schritt 4** Da sich das Portfolio wie eine festverzinsliche Anlage, also risikofrei, entwickeln soll, müssen die zufälligen Terme eliminiert werden, deshalb setzen wir

$$\Delta(t) := \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))$$

und erhalten damit die deterministische, partielle Differentialgleichung

$$d\Pi = - \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta r B \right) dt.$$

**Schritt 5** Wenn sich das Portfolio risikofrei wie eine festverzinsliche Anlage verhält, was es wegen der Arbitragefreiheit tun muss, genügt es der Formel

$$\Pi(t) = e^{rt} \Pi(0),$$

die sich wie folgt als Differentialgleichung schreiben lässt:

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Durch Einsetzen von

$$\Pi = -V + \Delta S + \beta B$$

und

$$\Delta(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))$$

erhält man

$$\begin{aligned}
d\Pi &= r\Pi dt \\
&= r(-V + \Delta S + \beta B) dt \\
&= \left( -rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\beta B \right) dt.
\end{aligned}$$

**Schritt 6** Setzen wir die beiden Gleichungen für  $d\Pi$  aus den vorherigen Schritten gleich, so erhalten wir

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \beta r B\right) = -rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} + r\beta B.$$

Einige kleine Umformungen liefern

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S} = 0.$$

Diese deterministische, partielle, parabolische (siehe Definition 52) Differentialgleichung heißt *Black-Scholes-Gleichung*. Diese Gleichung beschreibt  $V$  in Abhängigkeit von  $S$  und  $t$ . Zusammen mit den Randwerten  $V(T, S)$ ,  $T > 0$  und  $S \in [0, \infty)$ , die wir durch den Preis der Option bei Fälligkeit gegeben haben, hat die Black-Scholes-Gleichung eine eindeutige Lösung. Sehr schön an dieser Herleitung der Black-Scholes-Gleichung ist, dass wir zusätzlich die Hedging-Regel für  $\Delta$  erhalten. Wird  $\beta(0)$  so gewählt, dass  $\Pi(0) = 0$ , so ist das Portfolio konstant 0, wie wir es von der Binomialmethode kennen. In diesem Fall hat  $\Delta(t)S(t) + \beta(t)B(t)$  genau den Wert  $V(t, S(t))$  und ist somit ein replizierendes Portfolio.

## 5.2 Lösung der Black-Scholes-Gleichung

Wir werden die Black-Scholes-Gleichung für europäische Call- und Putoptionen lösen. Dafür überführen wir die Black-Scholes-Gleichung in die aus der Physik wohlbekannte Wärmeleitungsgleichung und lösen diese. Für Fragen zur Wärmeleitungsgleichung siehe [4].

**Definition 33.** Die partielle Differentialgleichung der Form

$$u_{xx} = u_t$$

mit  $u : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$  heißt Wärmeleitungsgleichung. Dabei wurden die in der Physik üblichen Schreibweisen  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  und  $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$  verwendet.

Zunächst leiten wir eine spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung her, die wir anschließend verallgemeinern. Dazu setzen wir  $u(t, x) := t^{-\alpha}v(\xi)$  und  $\xi := t^{-\beta}x$  für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha t^{-\alpha-1}v(\xi) + t^{-\alpha}v'(\xi) \frac{-x\beta t^{\beta-1}}{t^{2\beta}} = -\alpha t^{-\alpha-1}v(\xi) - t^{-\alpha}v'(\xi)\xi t^\beta \beta t^{-\beta-1} \\ u_x &= t^{-\alpha}v'(\xi) \frac{1}{t^\beta} \\ u_{xx} &= t^{-\alpha-2\beta}v''(\xi) \end{aligned}$$

$$0 = u_{xx} - u_t = t^{-\alpha-2\beta}v''(\xi) + \alpha t^{-\alpha-1}v(\xi) + t^{-\alpha-1}v'(\xi)\xi\beta$$

Nun setzen wir  $\beta = \frac{1}{2}$ :

$$0 = v''(\xi) + \alpha v(\xi) + \frac{\xi}{2}v'(\xi)$$

Setzen wir nun  $\alpha = 0$ , so erhalten wir

$$0 = v''(\xi) + \frac{\xi}{2}v'(\xi).$$

Durch Integration gelangt man zu

$$a = z'(\xi) + \frac{\xi}{2}z(\xi)$$

für eine Konstante  $a$ . Hier sei daran erinnert, dass wir eine spezielle Lösung finden wollen, dazu können wir die Konstante  $a$  beliebig wählen, also auch als  $a := 0$ .

$$0 = z'(\xi) + \frac{1}{2}\xi z(\xi)$$

Diese eindimensionale, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung hat eine Lösung der Form

$$z = be^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

für ein unbekanntes, konstantes  $b$ . Es kann nun berechnet werden, dass  $\frac{b}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$  die Wärmeleitungsgleichung löst.

**Definition 34.** *Die Funktion*

$$\Psi(t, x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ 0, & x \in \mathbb{R}, t < 0 \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

$\Psi$  ist singular im Punkt  $(0, 0)$ , radial in  $x$ , das heißt  $\Psi(t, x) = \Psi(t, |x|)$ , und es gilt  $\int_{\mathbb{R}} \Psi(t, x)dx = 1 \forall t > 0$ .

Typischerweise wird für die Wärmeleitungsgleichung, die die Temperatursausbreitung in einem „unendlich“ dünnen und langen Stab beschreibt, eine Randbedingung der Form  $u(0, x) = u_0(x) \forall x \in \mathbb{R}$  mit  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt angegeben. Aus der Stetigkeit folgt auf Kompakta die gleichmäßige Stetigkeit. Dadurch wird die Lösung der Wärmeleitungsgleichung aus Definition 33 eindeutig. Die Lösung erhält man durch Faltung der Fundamentallösung mit der Anfangswertfunktion.

**Lemma 35.** Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} = u_t$$

mit Randbedingung  $u(0, x) = u_0(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ist:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} u_0(s)ds, t > 0.$$

*Beweis.* Es sei bemerkt, dass  $u$  unendlich oft stetig differenzierbar ist, da  $u_0$  eine Funktion in der Integrationsvariablen  $s$  ist.

$$u_t - u_{xx} = \int_{\mathbb{R}} [(\Psi_t - \Psi_{xx})(t, x - s)] u_0(s) ds = 0,$$

da  $\Psi$  die Wärmeleitungsgleichung löst. Dass  $u$  die Randbedingung erfüllt, das heißt, dass

$$\lim_{(t,x) \rightarrow (0,x_0), x \in \mathbb{R}, t > 0} u(t, x) = u_0(x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

gilt, zeigt man wie folgt: Für ein festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  und  $\epsilon > 0$  wähle man  $\delta > 0$  so, dass  $|u_0(y) - u_0(x_0)| < \epsilon$ , wenn  $|y - x_0| < \delta$  für  $y \in \mathbb{R}$ . Für  $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$  gilt ( $\int_{\mathbb{R}} \Psi = 1$ ):

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u_0(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \Psi(t, x - y) (u_0(y) - u_0(x_0)) dy \right| \\ &\leq \int_{B(x_0, \delta)} \Psi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \Psi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy \end{aligned}$$

Dabei ist der erste Summand offensichtlich kleiner-gleich  $\epsilon$ . Aus  $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$  und  $|y - x_0| \geq \delta$ , folgt  $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \Psi(t, x - y) |u_0(y) - u_0(x_0)| dy &\leq 2 \|u_0\|_{\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \Psi(t, x - y) dy \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{(y-x_0)^2}{16t}} dy \\ &= \frac{2C}{\sqrt{t}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} dr \rightarrow 0 \text{ für } t \searrow 0 \end{aligned}$$

Woraus für  $t, |x - x_0|$  klein genug die Behauptung folgt.  $\square$

**Definition 36.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt durch ein Polynom beschränkt, wenn

$$\exists n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hier sei bemerkt, dass die Bedingungen an  $u_0$  im Satz auch abgeschwächt werden können, so muss die Randfunktion nicht beschränkt sein: Es genügt, wenn sie

durch ein Polynom beschränkt ist. Um dies zu sehen betrachte man die letzte Abschätzung in obigem Beweis:

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \Psi(t, x-y) |(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\
&= \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} |(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\
&\leq \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(y-x_0)^2}{16t}} |(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\
&= \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot (8t)}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{y-x_0}{\sqrt{8t}} \right)^2} |(u_0(y) - u_0(x_0))| dy \\
&\leq \lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R} \setminus B(x_0, \delta)} \phi(y, x_0, 8t) \cdot p_n(y) dy \\
&= 0
\end{aligned}$$

Hierbei ist  $\phi$  die Dichte einer Normalverteilung und  $p_n$  ein Polynom vom Grad  $n$ . Da die Exponentialfunktion schneller steigt als jedes Polynom, ist für jedes feste  $t > 0$  das Integral beschränkt und für  $t$  klein „sammelt sich die Masse“ des Integranden um  $x_0$ , da die Varianz der Normalverteilung gegen 0 geht. In einer Umgebung von  $x_0$  wird jedoch nicht integriert.

Dies können wir nun benutzen um die Black-Scholes-Gleichung zu lösen.

**Satz 37.** Die Lösungen der Black-Scholes-Gleichung für europäische Call- und Putoptionen sind

$$V_{Call}(t, S) = S\Phi(a) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(b)$$

und

$$V_{Put}(t, S) = S(\Phi(a) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(b) - 1),$$

wobei

$$a = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad b = a - \sigma\sqrt{T-t}$$

und

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$  ist.

*Beweis.* Für den Beweis wollen wir die Black-Scholes-Gleichung (BS-Gl.) in die uns nun bekannte Wärmeleitungsgleichung überführen. Dies geschieht in zwei Schritten. Sei  $V$  die Lösung der Black-Scholes-Gleichung auf  $[0, T]$ . Mit der Variablentransformation  $x = \ln \frac{S}{K}$  und  $\tau = \frac{\sigma^2(T-t)}{2}$  ist mit  $v(\tau, x) := \frac{V(t, S)}{K}$  und



$$\kappa := \frac{2r}{\sigma^2}:$$

$$\begin{aligned}
v_\tau(\tau, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V(t, S)}{K} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} t \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V(t, S)}{K} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left( T - \frac{2\tau}{\sigma^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V(t, S)}{K} \right) \cdot \left( -\frac{2}{\sigma^2} \right) \\
&= \frac{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) - rV(t, S) + rS \frac{\partial V}{\partial S}(t, S)}{K} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \quad \text{siehe BS-Gl.} \\
&= \frac{1}{K} \left( S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(t, S) - \kappa V(t, S) + \kappa S \frac{\partial V}{\partial S}(t, S) \right) \\
&= S^2 \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \right) - \kappa v + \kappa S \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \right) \\
&= S^2 \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} \right) - \kappa v + \kappa S \left( \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{S} \right) \\
&= S^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \cdot \frac{1}{S} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \left( -\frac{1}{S^2} \right) \right) - \kappa v + \kappa \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa v \\
&= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - \kappa v
\end{aligned}$$

Wir können also schreiben

$$v_\tau - v_{xx} + (1 - \kappa)v_x + \kappa v = 0.$$

Im zweiten Schritt setze man

$$u(\tau, x) := e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} v(\tau, x).$$

Mit  $E := e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}$  ist dann

$$u_\tau(\tau, x) = E v_\tau(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{4}(\kappa + 1)^2 v(\tau, x)$$

und

$$\begin{aligned}
u_{xx}(\tau, x) &= \frac{\partial}{\partial x} (E \cdot v_x(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{2}(\kappa - 1)v(\tau, x)) \\
&= E \cdot v_{xx}(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{2}(\kappa - 1)v_x(\tau, x) \\
&\quad + E \cdot \frac{1}{2}(\kappa - 1)v_x(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{4}(\kappa - 1)^2 v(\tau, x).
\end{aligned}$$

Nun berechnet man, dass

$$\begin{aligned}
u_\tau(\tau, x) - u_{xx}(\tau, x) &= E v_\tau(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{4}(\kappa + 1)^2 v(\tau, x) \\
&\quad - (E \cdot v_{xx}(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{2}(\kappa - 1)v_x(\tau, x) \\
&\quad + E \cdot \frac{1}{2}(\kappa - 1)v_x(\tau, x) + E \cdot \frac{1}{4}(\kappa - 1)^2 v(\tau, x)) \\
&= E(v_\tau(\tau, x) - v_{xx}(\tau, x) - (\kappa - 1)v_x(\tau, x) \\
&\quad + \frac{1}{4}v(\tau, x)((\kappa + 1)^2 - (\kappa - 1)^2)) \\
&= E(v_\tau(\tau, x) - v_{xx}(\tau, x) + (1 - \kappa)v_x(\tau, x) + \kappa v(\tau, x)) \\
&= E \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir also  $V(t, S)$  durch  $u(\tau, x)$  ausdrücken:

$$\begin{aligned}
u(\tau, x) &= e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x + \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \frac{V(t, S)}{K} \\
\Leftrightarrow V(t, S) &= K u(\tau, x) e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\
&= K \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} u_0(s) ds e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau}
\end{aligned}$$

Im Folgenden wollen wir eine europäische Calloption betrachten. Es gilt für  $t = T$ :

$$V_{Ce} = (S - K)^+$$

Somit gilt für  $\tau = 0$ :

$$\begin{aligned}
v_0 &= \frac{(S - K)^+}{K} \text{ und} \\
u_0(x) &= \frac{(S - K)^+}{K} e^{\frac{1}{2}(\kappa-1)x} = \left( e^{\frac{\kappa+1}{2}x} - e^{\frac{\kappa-1}{2}x} \right)^+
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$a = \frac{x + r(T - t) + \tau}{\sqrt{2\tau}}, \quad b = \frac{x + r(T - t) - \tau}{\sqrt{2\tau}}$$

und für  $u(\tau, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4\tau}} u_0(s) ds$  mit der Substitution  $y = \frac{(s-x-r(T-t)-\tau)}{\sqrt{2\tau}}$ , welche impliziert, dass  $dy = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} ds$ , erhält man

$$u(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\sqrt{2\tau}y + x + r(T - t) + \tau) e^{-\frac{\left(y + \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)^2}{2}} dy$$

mit

$$u_0(\sqrt{2\tau}y + x + r(T-t) + \tau) = \left( e^{\frac{\kappa+1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} - e^{\frac{\kappa-1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} \right)^+.$$

$$\begin{aligned} V_{Ce}(t, S) &= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{\frac{\kappa+1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} - e^{\frac{\kappa-1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} \right)^+ \\ &\quad \cdot e^{-\frac{\left(y+\frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)^2}{2}} dy \cdot e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &= K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{\infty} \left( e^{\frac{\kappa+1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} - e^{\frac{\kappa-1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} \right) \\ &\quad \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-y \cdot \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau}} dy \cdot e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &= K \int_{-a}^{\infty} e^{\frac{\kappa+1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} e^{-y \cdot \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau}} e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &\quad \cdot \varphi(y) dy \\ &\quad - K \int_{-a}^{\infty} e^{\frac{\kappa-1}{2}(\sqrt{2\tau}y+x+r(T-t)+\tau)} e^{-y \cdot \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau}} e^{\frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &\quad \cdot \varphi(y) dy \\ &= K \int_{-a}^{\infty} e^{y\left(\frac{\kappa+1}{2}\sqrt{2\tau} - \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)} e^{\frac{\kappa+1}{2}(x+r(T-t)+\tau) - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau} + \frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &\quad \cdot \varphi(y) dy \\ &\quad - K \int_{-a+\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{(y-\sqrt{2\tau})\left(\frac{\kappa-1}{2}\sqrt{2\tau} - \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{\kappa-1}{2}(x+r(T-t)+\tau) - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau} + \frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \\ &\quad \cdot \varphi(y - \sqrt{2\tau}) dy \\ &= K \int_{-a}^{\infty} e^{y \cdot 0} e^{x \cdot 0} \varphi(y) dy \\ &\quad - K \int_{-a+\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{y \cdot 0} e^{-\sqrt{2\tau}\left(\frac{\kappa-1}{2}\sqrt{2\tau} - \frac{r(T-t)+\tau}{\sqrt{2\tau}}\right)} \\ &\quad \cdot e^{\frac{\kappa-1}{2}(x+r(T-t)+\tau) - \frac{(r(T-t)+\tau)^2}{4\tau} + \frac{1}{2}(1-\kappa)x - \frac{1}{4}(\kappa+1)^2\tau} \cdot e^{-\tau} \varphi(y) dy \\ &= S \int_{-a}^{\infty} \varphi(y) dy - K e^{-r(T-t)} \int_{-b}^{\infty} \varphi(y) dy \\ &= S \int_{-\infty}^a \varphi(y) dy - K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^b \varphi(y) dy \\ &= S\Phi(a) - K e^{-r(T-t)}\Phi(b) \end{aligned}$$

Für den europäischen Put verwendet man die Put-Call-Parität (Satz 3), also gilt

$$\begin{aligned} V_{Pe}(t, S) &= V_{Ce}(t, S) - S + Ke^{r(t-T)} \\ &= S\Phi(a) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(b) - S + Ke^{r(t-T)} \\ &= S(\Phi(a) - 1) - Ke^{r(t-T)}(\Phi(b) - 1). \end{aligned}$$

□

### 5.3 Hedging

Nun können wir in jedem Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  den Wert  $V(t)$  explizit und leichter als im Binomialmodell berechnen. Zudem erhalten wir aus der Herleitung der Black-Scholes-Gleichung eine Hedginganweisung:  $\Delta(t, S(t)) = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S(t))$ , welche wir auch explizit angeben können, wie uns der nächste Satz zeigen wird. Dabei ist zu beachten, dass  $V(T)$  in  $S = K$  nicht differenzierbar ist. Für alle  $0 < \varepsilon \leq T$  ist  $V(T - \varepsilon)$  jedoch differenzierbar.

**Lemma 38.** Es gilt:

$$S\Phi'(a) - e^{-r(T-t)}K\Phi'(b) = 0$$

*Beweis.* Es ist  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  und  $\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

Also ist  $\Phi'(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2}$  und  $\Phi'(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}b^2}$ .

Mit  $b = a - \sigma\sqrt{T-t}$  ist

$$\begin{aligned} S\Phi'(a) - e^{-r(T-t)}K\Phi'(b) &= S \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} - e^{-r(T-t)}K \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}b^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} (S - e^{-r(T-t)}K \cdot e^{a\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}) \\ &=: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}a^2} \cdot (*). \end{aligned}$$

Da  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \neq 0$  und  $e^{-\frac{1}{2}a^2} \neq 0$  ist

$$\begin{aligned} S\Phi'(a) - e^{-r(T-t)}K\Phi'(b) = 0 &\Leftrightarrow (*) = 0 \\ &\Leftrightarrow S = e^{-r(T-t)}K \cdot e^{a\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}. \end{aligned}$$

Wegen  $a = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$  und  $S = K \cdot e^{\ln \frac{S}{K}}$  ist

$$\begin{aligned} e^{-r(T-t)}K \cdot e^{a\sigma\sqrt{T-t}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} &= e^{-r(T-t)}K \cdot e^{\ln \frac{S}{K} e^{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\ &= S \cdot e^{-r(T-t)} \cdot e^{r(T-t)} \cdot e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\ &= S. \end{aligned}$$

□

**Satz 39.** Für den europäischen Call gilt

$$\Delta(t, S(t)) = \Phi(a)$$

und für den europäischen Put

$$\Delta(t, S(t)) = \Phi(a) - 1.$$

*Beweis.* Für den Call gilt

$$V_{Ce}(t, S) = S\Phi(a) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(b).$$

Die Funktion  $V_{Ce}(t, S)$  nach  $S$  abgeleitet ist

$$\begin{aligned} \Delta_{Ce}(t, S) &= \Phi(a) + S\Phi'(a)\frac{\partial a}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(b)\frac{\partial b}{\partial S} \\ &= \Phi(a) + \frac{\Phi'(a)}{\sigma\sqrt{T-t}} - Ke^{-r(T-t)}\frac{\Phi'(b)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \\ &= \Phi(a) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \Phi'(a) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\Phi'(b)}{S} \right). \end{aligned}$$

Wegen Lemma 38 ist der Term in der Klammer gleich null und somit bleibt

$$\Delta_{Ce}(t, S) = \Phi(a).$$

Analog gilt für den Put mit

$$V_{Pe}(t, S) = S(\Phi(a) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(b) - 1),$$

dass

$$\begin{aligned} \Delta_{Pe}(t, S) &= (\Phi(a) - 1) + S\Phi'(a)\frac{\partial a}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(b)\frac{\partial b}{\partial S} \\ &= (\Phi(a) - 1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left( \Phi'(a) - Ke^{-r(T-t)}\frac{\Phi'(b)}{S} \right) \\ &= \Phi(a) - 1. \end{aligned}$$

□

Die zweite Hedgingvariable  $\beta$  erhalten wir aus der Selbstfinanzierungsbedingung. Um nun aber hedgen zu können müssen wir das Zeitintervall diskretisieren, da man in der Realität bzw. bei der Simulation mit dem Rechner nicht in jedem Zeitpunkt umschichten kann. Wir wählen daher ein äquidistantes Zeitgitter  $t_0, \dots, t_N$  mit  $t_0 = 0$  und  $t_N = T$  und sind damit befähigt zu hedgen, also nachfolgenden Algorithmus anzugeben:

```
>
> Typ <- 0
> # 0 = Call, 1 = Put
>
> r <- 0.05
> sigma <- 0.3
> T <- 15
> S_0 <- 80
> B_0 <- 80
> # r > -1
> # sigma, T, S_0, B_0 > 0
> beta_0 <- 1
> # beta_0 >= 0
> tau <- 0.1
> # tau > 0, sodass T = tau*N
> K <- 100
>
> # Zeitgitter
>
> N <- T/tau
>
> # Achtung! Indexverschiebung
>
> if (floor(N)==N) {
+ N
+ } else {
+ 'N nicht ganzzahlig.'
+ }
[1] 150
>
> t <- seq(from=0, to=T, by=tau)
>
> # Erzeugung des Kurses und des Bondes
>
> S <- rep(0,N+1)
> S[1] <- S_0
> W <- rep(0,N+1)
> DeltaW <- rnorm(N,0,sqrt(tau))
> B <- rep(0,N+1)
> B[1] <- B_0
>
> # Klammern ganz wichtig! 2:N+1 heisst 3:(N+1)
```

```

> for (i in 2:(N+1)) {
+ W[i] <- W[i-1] + DeltaW[i-1]
+ S[i] <- S_0*exp((r-sigma^2/2)*t[i]+sigma*W[i])
+ B[i] <- B_0*exp(r*t[i])
+ }
>
> # Berechnung der Optionspeise und
> # der Hedgingstrategie Delta
>
> V <- rep(0,N+1)
> Delta <- rep(0,N+1)
>
> for (i in 1:(N+1)) {
+ a <- (log(S[i]/K)+(r+sigma^2/2)*(T-t[i]))/
+ (sigma*sqrt(T-t[i]))
+ b <- a-sigma*sqrt(T-t[i])
+ if (Typ==0) {
+ Delta[i] <- pnorm(a)
+ V[i] <- S[i]*pnorm(a)-K*exp(-r*(T-t[i]))*pnorm(b)
+ } else {
+ Delta[i] <- pnorm(a)-1
+ V[i] <- S[i]*(pnorm(a)-1)-K*exp(-r*(T-t[i]))*
+ (pnorm(b)-1)
+ }
+ }
>
> # Berechnung des Hedging-Portfolios und
> # Berechnung von beta ueber die Selbst-
> # finanzierungsbedingung
>
> beta <- rep(0,N+1)
> beta[1] <- beta_0
> Pi <- rep(0,N+1)
> Pi[1] <- -V[1]+Delta[1]*S[1]+beta[1]*B[1]
>
> for (i in 2:(N+1)) {
+ Pi[i] <- -V[i]+Delta[i-1]*S[i]+beta[i-1]*B[i]
+ beta[i] <- (Pi[i]+V[i]-Delta[i]*S[i])/B[i]
+ }
>
> # Andere Plots zum Ueberpruefen
>
> #plot(S,type="l")

```

```
> #lines(B,type="l",lty=2)
>
> #plot(V,type="l")
>
> #plot(Delta,type="l")
> #lines(beta,type="l",lty=2)
>
> # Festverzinsliches Wachstum zum Vergleich
>
> Bank <- rep(0,N+1)
> Bank[1] <- Pi[1]
> for (i in 2:(N+1)) {
+ Bank[i] <- Bank[1]*exp(r*t[i])
+ }
>
> # Plot
>
> oldpar <- par(mfrow=c(2,1))
> plot(t,Pi,type="l",xlab="Zeit",
+ ylab="Portfolio□(solid),□Bank□(dashed)")
> lines(t,Bank,type="l",lty=2)
> plot(t,S,type="l",
+ xlab="Zeit",ylab="Kurs")
> par(oldpar)
>
```



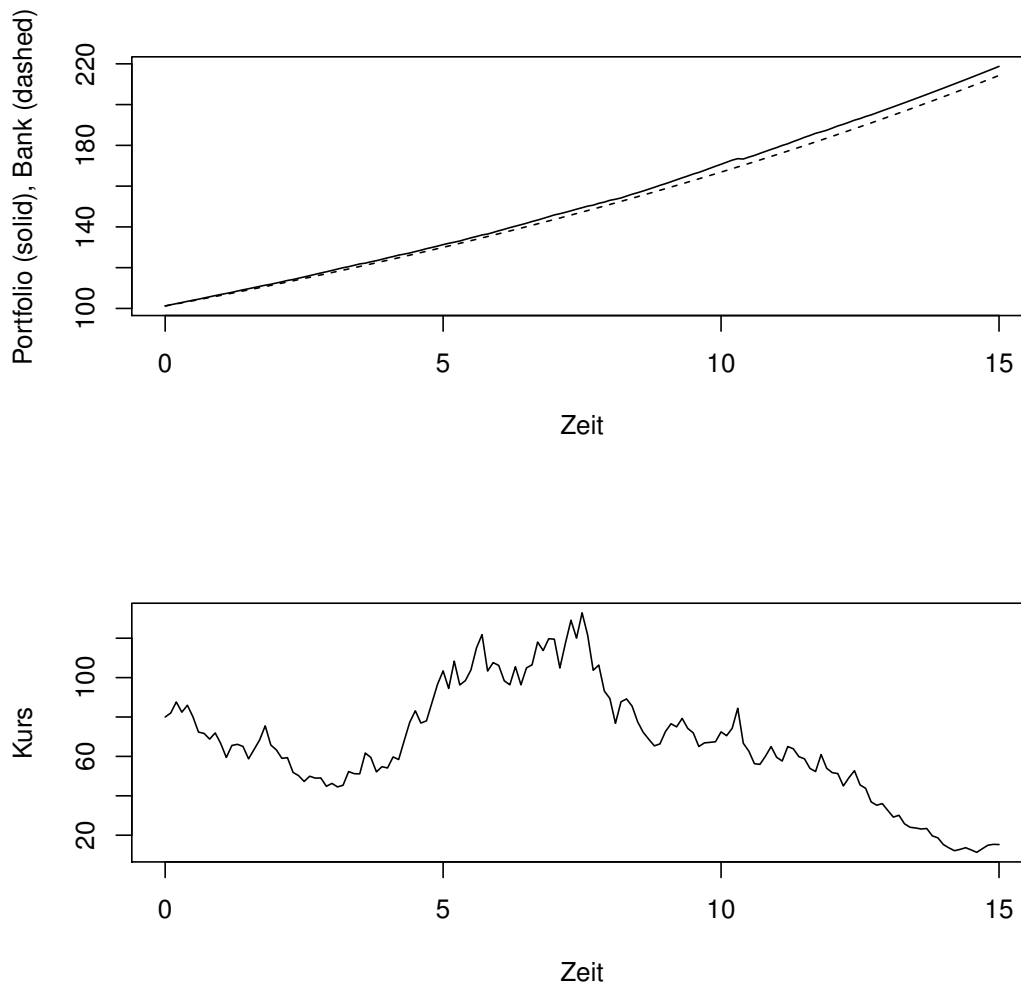


Abbildung 5.1: Portfolioentwicklung beim Hedgen im Vergleich zur Entwicklung des Bonds

Wie wir sehen können, wächst das Portfolio in etwa wie die Bank, was ja, wie wir uns schon überlegt haben, sinnvoll ist, da wir das Risiko weghedgen und das Geld, das nicht für die Hedgingstrategie benötigt wird, auf dem Bankkonto liegt. Die geringen Abweichungen lassen sich durch das zeitdiskrete Hedging erklären, wo die Information, mit der gehedget wird, immer um einen Zeitschritt veraltet ist und somit nicht ganz stimmt. Im nächsten Abschnitt werden wir nun dieses Programm so abändern, dass unser Phänomen wieder zu beobachten sein wird.

## 5.4 Die Simulation des Phänomens

```
>
> Typ <- 0
> # 0 = Call, 1 = Put
>
> r <- 0.05
> sigma <- 0.3
> T <- 15
> S_0 <- 80
> B_0 <- 80
> # r > -1
> # sigma, T, S_0, B_0 > 0
> beta_0 <- 1
> # beta_0 >= 0
> tau <- 0.1
> # tau > 0, sodass T = tau*N
> K <- 100
>
> # Zeitgitter
>
> N <- T/tau
>
> # Achtung! Indexverschiebung
>
> if (floor(N)==N) {
+ N
+ } else {
+ 'N nicht ganzzahlig.'
+ }
[1] 150
>
> t <- seq(from=0, to=T, by=tau)
>
> # Wiener Prozess, geometrische brownische Bewegung,
> # Bond
>
> S <- rep(0,N+1)
> S[1] <- S_0
> W <- rep(0,N+1)
> DeltaW <- rnorm(N,0,sqrt(tau))
> B <- rep(0,N+1)
> B[1] <- B_0
>
```

```

> for (i in 2:(N+1)) {
+ W[i] <- W[i-1] + DeltaW[i-1]
+ S[i] <- S_0*exp((r-sigma^2/2)*t[i]+sigma*W[i])
+ B[i] <- B_0*exp(r*t[i])
+ }
>
> ###
> # Ploetzliche Kursaenderung
> von <- 5
> bis <- 10
>
> Fak <- 0.5
> for (i in ((von/tau):(bis/tau))+1) {
+ S[i] <- S[i]*Fak
+ }
> ###
>
> # Optionspreise und Hedgingstrategie Delta
>
> V <- rep(0,N+1)
> Delta <- rep(0,N+1)
>
> for (i in 1:(N+1)) {
+ a <- (log(S[i]/K)+(r+sigma^2/2)*(T-t[i]))/
+ (sigma*sqrt(T-t[i]))
+ b <- a-sigma*sqrt(T-t[i])
+ if (Typ==0) {
+ Delta[i] <- pnorm(a)
+ V[i] <- S[i]*pnorm(a)-K*exp(-r*(T-t[i]))*pnorm(b)
+ } else {
+ Delta[i] <- pnorm(a)-1
+ V[i] <- S[i]*(pnorm(a)-1)-K*exp(-r*(T-t[i]))*
+ (pnorm(b)-1)
+ }
+ }
>
> # Hedgingportfolio und beta
>
> beta <- rep(0,N+1)
> beta[1] <- beta_0
> Pi <- rep(0,N+1)
> Pi[1] <- -V[1]+Delta[1]*S[1]+beta[1]*B[1]
>

```

```
> for (i in 2:(N+1)) {
+ Pi[i] <- -V[i]+Delta[i-1]*S[i]+beta[i-1]*B[i]
+ beta[i] <- (Pi[i]+V[i]-Delta[i]*S[i])/B[i]
+ }
>
> # Andere Plots zum Ueberpruefen
>
> #plot(S,type="l")
> #lines(B,type="l",lty=2)
>
> #plot(V,type="l")
>
> #plot(Delta,type="l")
> #lines(beta,type="l",lty=2)
>
> # Festverzinsliches Geldanlegen
>
> Bank <- rep(0,N+1)
> Bank[1] <- Pi[1]
> for (i in 2:(N+1)) {
+ Bank[i] <- Bank[1]*exp(r*t[i])
+ }
>
> # Plot
>
> oldpar <- par(mfrow=c(2,1))
> plot(t,Pi,type="l",xlab="Zeit",
+ ylab="Portfolio (solid), Bank (dashed)")
> lines(t,Bank,type="l",lty=2)
> plot(t,S,type="l",
+ xlab="Zeit",ylab="Kurs")
> par(oldpar)
>
```

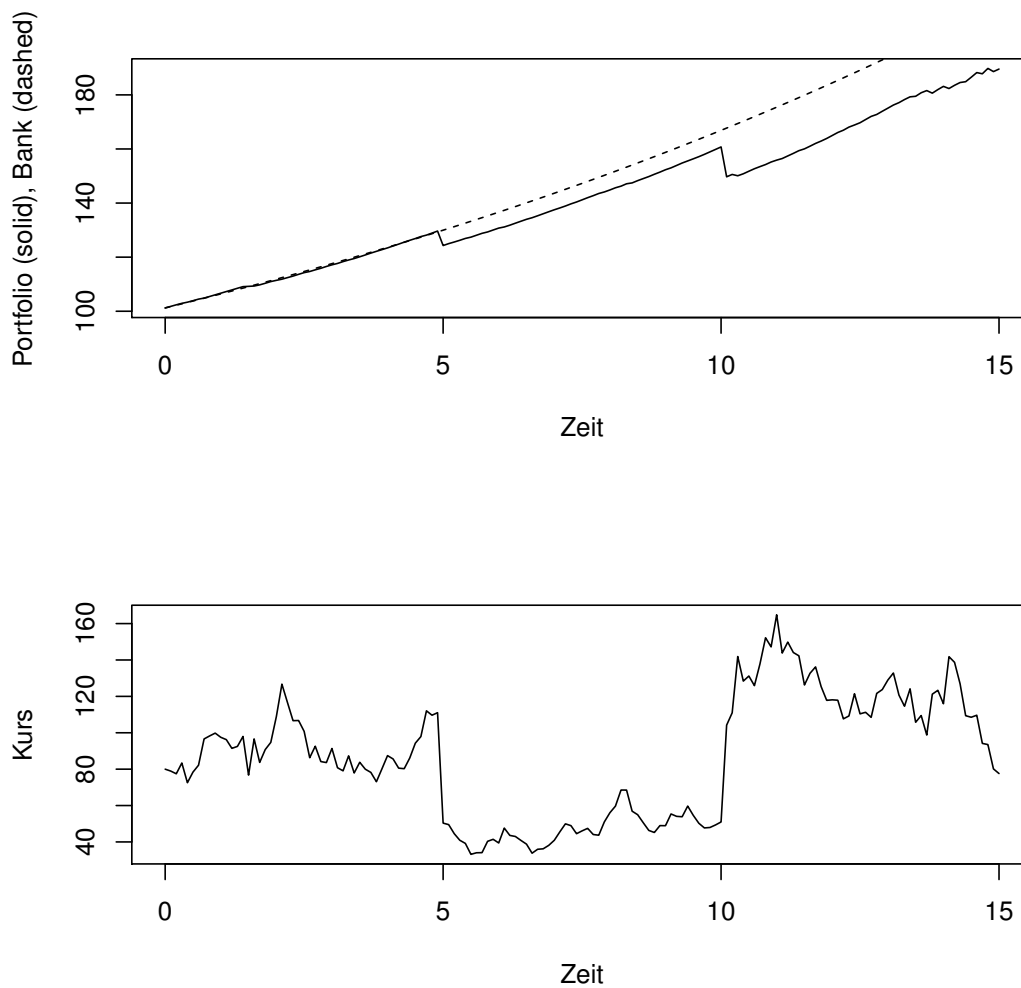


Abbildung 5.2: Portfolioentwicklung beim Hedgen im Vergleich zur Entwicklung des Bonds mit Kurssprüngen bei  $t = 5$  und  $t = 10$

Auch hier können wir den Abfall des Portfolios gut beobachten. Im nächsten Kapitel werden wir der Ursache hierfür analytisch auf den Grund gehen.



# Kapitel 6

## Analytische Lösung

Zur Analyse dieses Phänomens gehen wir analog zu Abschnitt 2.4 vor, in dem wir für den Ein-Perioden-Binomialmarkt das Problem ja schon durchdrungen haben. Da uns – wie beim Lösungsversuch im Binomialbaum – nur die Periode interessiert, in der die plötzliche Kursänderung passiert, greifen wir uns eine beliebige Periode  $t_i > 0$  heraus und untersuchen die Abhängigkeit des Hedgingportfolios von dem zukünftigen Kurswert. Wir befinden uns also zum Zeitpunkt  $t_i$  mit Kurswert  $S_i$ , Optionswert  $V_i$  und Bankkonto  $B_i$ . Versetzen wir uns nun in die Lage einer Verkäuferin einer solchen Option, die sich nach Black-Scholes hedged, das heißt, sie hält das Portfolio

$$\Pi_i = -V_i + \Delta_i S_i + \beta_i B_i,$$

wobei  $S_i$  und alle anderen Größen für  $t_i$  bekannt sind. Zum Zeitpunkt  $t_{i+1}$  hat sie

$$\Pi_{i+1} = -V_{i+1} + \Delta_i S_{i+1} + \beta_i B_{i+1}$$

mit unbekanntem  $S_{i+1}$  und von ebendiesem abhängendem  $V_{i+1}$ . Im Folgenden muss zwischen Put und Call unterschieden werden; wollen wir zuerst den Call diskutieren.

$$V_{Call}(t_{i+1}, S_{i+1}) = S_{i+1} \Phi(a_{i+1}) - K e^{-r(T-t_{i+1})} \Phi(b_{i+1})$$

und

$$\Delta_{Call}(t_{i+1}, S_{i+1}) = \Phi(a_{i+1})$$

wobei

$$a_{i+1} = \frac{\ln\left(\frac{S_{i+1}}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t_{i+1})}{\sigma\sqrt{T - t_{i+1}}}, \quad b_{i+1} = a_{i+1} - \sigma\sqrt{T - t_{i+1}}$$

und

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

Zusammengefasst gilt also (für den europäischen Call):

$$\Pi_{i+1} = -(S_{i+1}\Phi(a_{i+1}) - Ke^{-r(T-t_{i+1})}\Phi(b_{i+1})) + \Delta_i S_{i+1} + \beta_i B_{i+1}$$

Wir wollen uns diese Funktion mit Werten des Programmes aus Abschnitt 5.3 betrachten. Dazu ändern wir besagtes Programm wie folgt ab:

```

>
> r <- 0.05
> sigma <- 0.3
> T <- 15
> S_0 <- 80
> B_0 <- 80
> # r, sigma, T, S_0, B_0 > 0
> beta_0 <- 1
> # beta_0 >= 0
> tau <- 0.1
> # tau > 0, sodass T = tau*N
> K <- 50
>
> N <- T/tau
>
> # Achtung! Indexverschiebung
>
> # Zeitgitter, Wiener Prozess, brownsche Bewegung
> # und Bond
>
> t <- seq(from=0, to=T, by=tau)
> S <- rep(0,N+1)
> S[1] <- S_0
> W <- rep(0,N+1)
> DeltaW <- rnorm(N,0,sqrt(tau))
> B <- rep(0,N+1)
> B[1] <- B_0
>
> # Klammern ganz wichtig! 2:N+1 heisst 3:(N+1)
> for (i in 2:(N+1)) {
+ W[i] <- W[i-1] + DeltaW[i-1]
+ S[i] <- S_0*exp((r-sigma^2/2)*t[i]+sigma*W[i])
+ B[i] <- B_0*exp(r*t[i])
+ }
>
> ###
> # Ploetzliche Kursaenderung

```



```

> von <- 5
> bis <- 10
>
> Fak <- 0.5
> for (i in ((von/tau):(bis/tau))+1) {
+ S[i] <- S[i]*Fak
+ }
> ###
>
> # Option und Hedging
>
> V <- rep(0,N+1)
> Delta <- rep(0,N+1)
>
> for (i in 1:(N+1)) {
+ a <- (log(S[i]/K)
+ +(r+sigma^2/2)*(T-t[i]))/(sigma*sqrt(T-t[i]))
+ b <- a-sigma*sqrt(T-t[i])
+ Delta[i] <- pnorm(a)
+ V[i] <- S[i]*pnorm(a)-K*exp(-r*(T-t[i]))*pnorm(b)
+ }
>
> # Selbstfinanzierung
>
> beta <- rep(0,N+1)
> beta[1] <- beta_0
> Pi <- rep(0,N+1)
> Pi[1] <- -V[1]+Delta[1]*S[1]+beta[1]*B[1]
>
> for (i in 2:(N+1)) {
+ Pi[i] <- -V[i]+Delta[i-1]*S[i]+beta[i-1]*B[i]
+ beta[i] <- (Pi[i]+V[i]-Delta[i]*S[i])/B[i]
+ }
>
>
> t1 <- bis
>
> # Abhaengigkeit von Pi(i+1) von S(i+1)
>
> # Entwicklung von t1 nach t1+tau wird untersucht
> # Beispielsweise wird bei der Wahl t1=bis der 2.
> # und bei t1=von-tau der 1. Sprung betrachtet
>
> t2 <- t1+tau

```

```

> Delta1 <- Delta[t1/tau+1]
> beta1 <- beta[t1/tau+1]
> B2 <- B[t2/tau+1]
>
> limu <- 100
> limo <- 2500
>
> Pi2 <- rep(0,(limo-limu)+1)
> S2 <- rep(0,(limo-limu)+1)
> Pi1 <- Pi[t1/tau+1]
> S1 <- S[t1/tau+1]
>
> for (s in (limu:limo)/10) {
+ a2 <- (log(s/K)
+ +(r+sigma^2/2)*(T-t2))/(sigma*sqrt(T-t2))
+ b2 <- a2 - sigma*sqrt(T-t2)
+ Pi2[s*10+1-limu] <- -(s*pnorm(a2,0,1)
+ -K*exp(-r*(T-t2))*pnorm(b2,0,1))+Delta1*s+beta1*B2
+ S2[s*10+1-limu] <- s
+ }
>
> plot(S2,Pi2,type="l",xlab="S_{i+1}",ylab="Pi_{i+1}")
> lines(c(limu/10,limo/10),c(Pi1,Pi1))
> lines(c(S1,S1),c(0,max(c(max(Pi2),Pi1))))
>

```

Dieses Programm liefert uns zum Beispiel folgendes Bild:

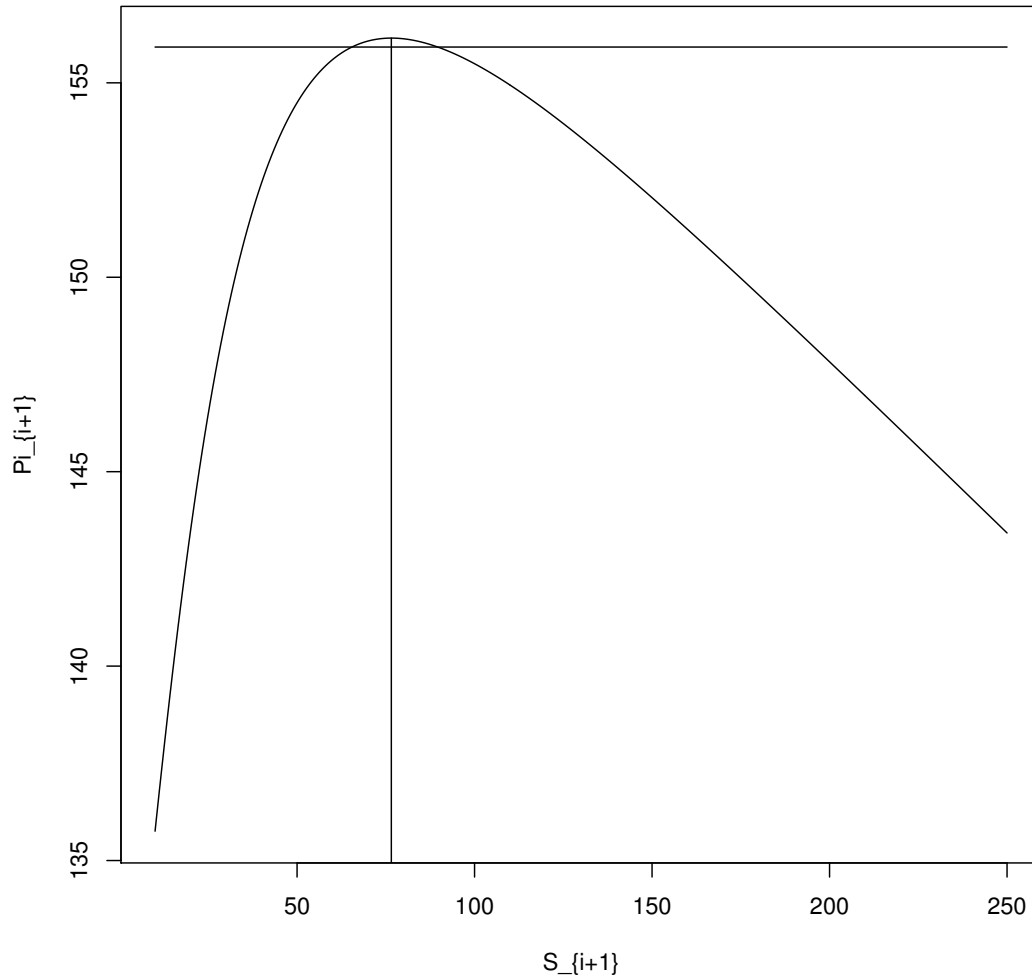


Abbildung 6.1: Abhängigkeit zwischen  $\Pi_{i+1}$  und  $S_{i+1}$ , wobei  $S_i$  und  $\Pi_i$  eingezeichnet sind

Wie man erkennt, ist das Intervall für  $S_{i+1}$ , in dem  $\Pi_{i+1}$  steigt, relativ klein und die Gewinne sind beschränkt. Das bedeutet, dass eine große Veränderung von  $S$  viel eher zu (großen) Portfolioverlusten führt, als eine kleine.

Damit der Leser sich den Verlauf der in die Berechnung des Portfolios eingehenden Größen besser vorstellen kann, sind diese im Folgenden grafisch dargestellt.

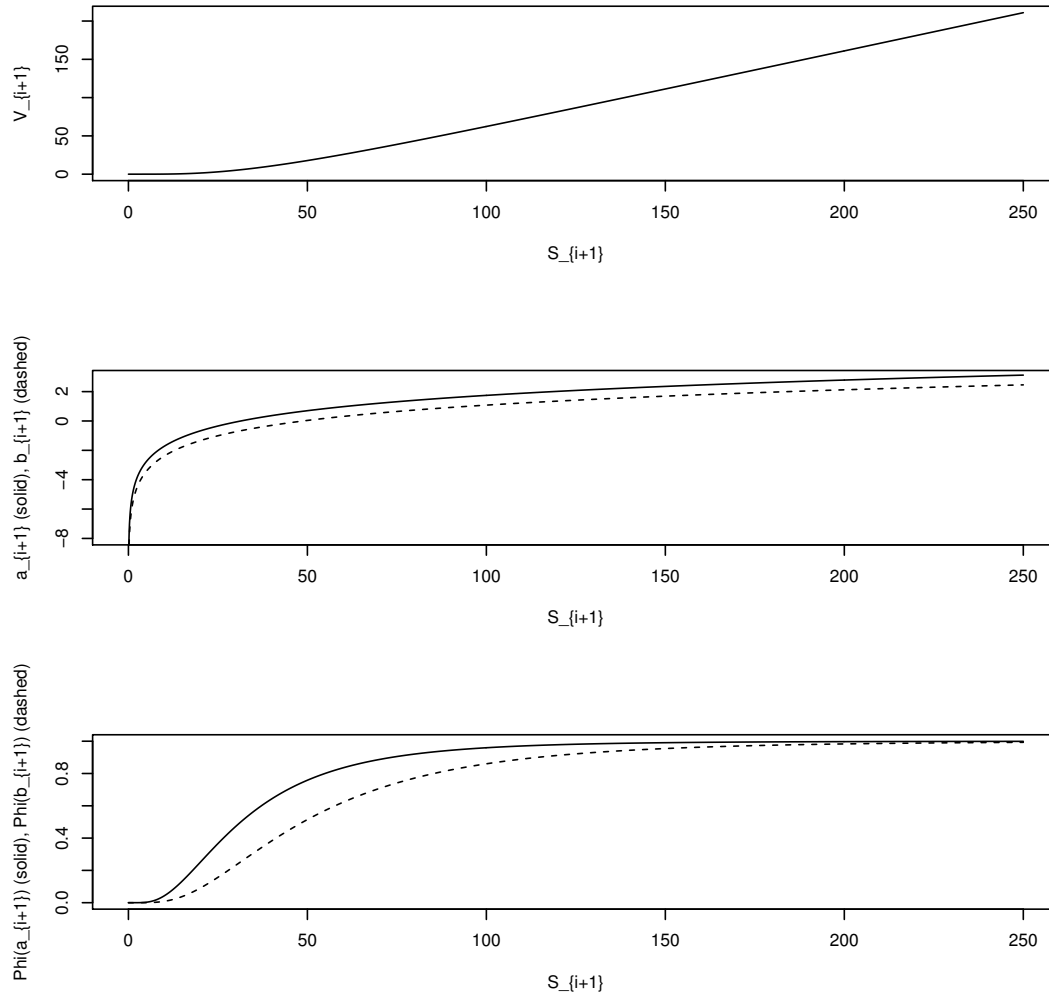


Abbildung 6.2: Abhängigkeit zwischen  $V_{i+1}$  (oben),  $a_{i+1}$  und  $b_{i+1}$  (Mitte) sowie  $\Phi(a_{i+1})$  und  $\Phi(b_{i+1})$  (unten) und  $S_{i+1}$

Wir wollen uns nun überlegen, für welches  $S_{i+1}$  das Portfolio  $\Pi_{i+1}$  maximal wird. Dazu betrachten wir:

$$\Pi_{i+1} = -V_{i+1} + \Delta_i S_{i+1} + \beta_i B_{i+1}$$

und

$$\frac{\partial \Pi_{i+1}}{\partial S_{i+1}} = -\Delta_{i+1} + \Delta_i.$$

$\Delta$  kann als Funktion von  $\mathbb{R}_0^+$  nach  $\mathbb{R}$  aufgefasst werden und ist für den europäischen Call (und Put) streng monoton, da  $\Phi(\ln(\cdot))$  streng monoton ist.

$$\frac{\partial \Pi_{i+1}}{\partial S_{i+1}} = -\Delta(S_{i+1}) + \Delta(S_i),$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_{i+1}}{\partial S_{i+1}^2} = -\Gamma(S_{i+1}),$$

wobei  $\Gamma$  eine der in der Finanzliteratur als „Griechen“ bezeichneten Kennzahlen ist und im Falle des europäischen Calls zu

$$\Gamma(S_{i+1}) = \frac{\phi(a_{i+1})}{S_{i+1}\sqrt{T-t_{i+1}}} > 0$$

berechnet werden kann. Hieraus folgt, dass die betrachtete Ableitung maximal eine Nullstelle hat, wobei sich eine offensichtlich bei  $S_{i+1} = S_i$  befindet, was bedeutet, dass  $\Pi_{i+1}$  dort ein Maximum hat.

Im nächsten Schritt wollen wir den maximalen Portfoliogewinn berechnen:

$$\begin{aligned} \max_{S_{i+1} \in \mathbb{R}_0^+} \Pi_{i+1} - \Pi_i &= \max_{S_{i+1} \in \mathbb{R}_0^+} \Pi_{i+1}(S_{i+1}) - \Pi_i \\ &= \Pi_{i+1}(S_i) - \Pi_i \\ &= -V_i + \Delta_i S_i + \Pi_i e^{r\tau} + V_i e^{r\tau} - \Delta_i S_i e^{r\tau} - \Pi_i \\ &= -V_i(1 - e^{r\tau}) + S_i \Delta_i(1 - e^{r\tau}) - \Pi_i(1 - e^{r\tau}) \\ &= (1 - e^{r\tau})(-V_i + S_i \Delta_i - \Pi_i) \\ &= (1 - e^{r\tau})(-\beta_i B_i) \\ &= \beta_i(B_{i+1} - B_i). \end{aligned}$$

Das heißt, dass das Portfolio maximal an Wert gewinnt, wenn der Kurs konstant bleibt, und der maximale Gewinn entspricht dem Gewinn auf dem Bankkonto. Dies steht jedoch in keinem Widerspruch dazu, dass das Portfolio Gewinn gegenüber dem Bond machen kann (siehe Seite 6), da „der Bond“ immer einem Anteil von 1 entspricht, im Hedgingportfolio dieser jedoch höher sein kann. Falls  $\beta_i$  negativ ist, macht das Hedgingportfolio immer Verlust.<sup>1</sup>

Für einen Put erhält man beispielsweise folgendes (analoges) Bild,

---

<sup>1</sup>Hier sei immer ein „echter“ Zinssatz  $r > 0$  angenommen.

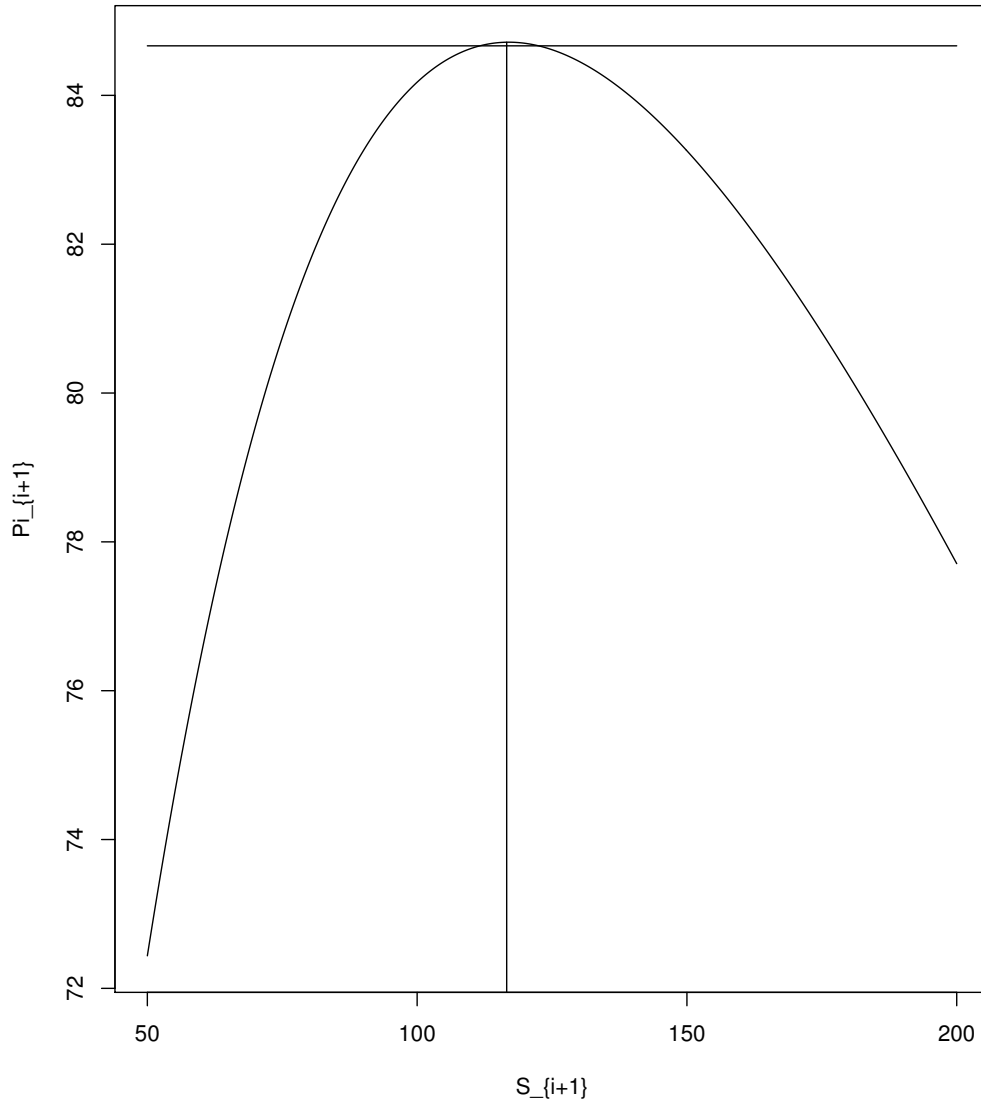


Abbildung 6.3: Abhängigkeit zwischen  $\Pi_{i+1}$  und  $S_{i+1}$ , wobei  $S_i$  und  $\Pi_i$  eingezeichnet sind.

wobei die Rechnungen weitestgehend denen des Calls entsprechen. Es ändert sich

$$V_{Put}(t_{i+1}, S_{i+1}) = S_{i+1}(\Phi(a_{i+1}) - 1) - Ke^{-r(T-t_{i+1})}(\Phi(b_{i+1}) - 1)$$

und

$$\Delta_{Put}(t_{i+1}, S_{i+1}) = \Phi(a_{i+1}) - 1;$$

$$\Gamma(S_{i+1}) = \frac{\phi(a_{i+1})}{S_{i+1}\sqrt{T-t_{i+1}}} > 0$$

bleibt gleich.

**Zeitgitter** Im Moment ist die Frage, wie die Feinheit  $\tau$  des Zeitgitters eingeht, noch unbeantwortet. Die Funktionen, die die Abhängigkeit zwischen  $\Pi_{i+1}$  und  $S_{i+1}$  ausdrücken, bleiben grundsätzlich die gleichen. Was sich jedoch ändert, ist die Verteilung von  $S_{i+1}$ . Wenn wir uns im Zeitpunkt  $i$  befinden sind alle Werte bis zum Zeitpunkt  $i$  bekannt und deterministisch. Es gilt:

$$S_i = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} S_{i+1} &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_{i+1} + \sigma W(t_{i+1})} \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_i + \tau) + \sigma(W(t_i) + \Delta W(i+1))} \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t_i + \sigma W(t_i)} \cdot e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma \Delta W(i+1)} \\ &= S_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma \Delta W(i+1)} \end{aligned}$$

Man sieht, dass nur  $\Delta W(i+1) \sim \mathcal{N}(0, \tau)$  stochastisch ist. Die Zufallsvariable  $S_{i+1}$  hat, gegeben, dass alle Werte bis zum Zeitpunkt  $i$  deterministisch sind, den Erwartungswert  $S_i e^{\mu\tau}$  und die Varianz  $S_i^2 e^{2\mu\tau} (e^{\sigma^2\tau} - 1)$ . Es gibt also zwei verschiedene Fehler, die durch das zeitdiskrete Hedging entstehen: Einen systematischen und einen zufälligen Fehler. Es folgt, dass für kleinere Zeitschritte  $\tau$  der Erwartungswert näher an der Maximalstelle  $S_i$  liegt und die Varianz kleiner wird, also zusammengefasst es häufiger vorkommt, dass  $\Pi_{i+1} - \Pi_i > 0$  ist.

Diese theoretischen Überlegungen sollen durch Simulation veranschaulicht werden. Die folgende Abbildung zeigt die Entwicklung zweier Hedgingportfolios für die gleiche Calloption, wobei das zugrundeliegende Zeitgitter unterschiedlich fein gewählt wurde. Bei der Berechnung des Kurses wurden keine plötzlichen Sprünge eingearbeitet.

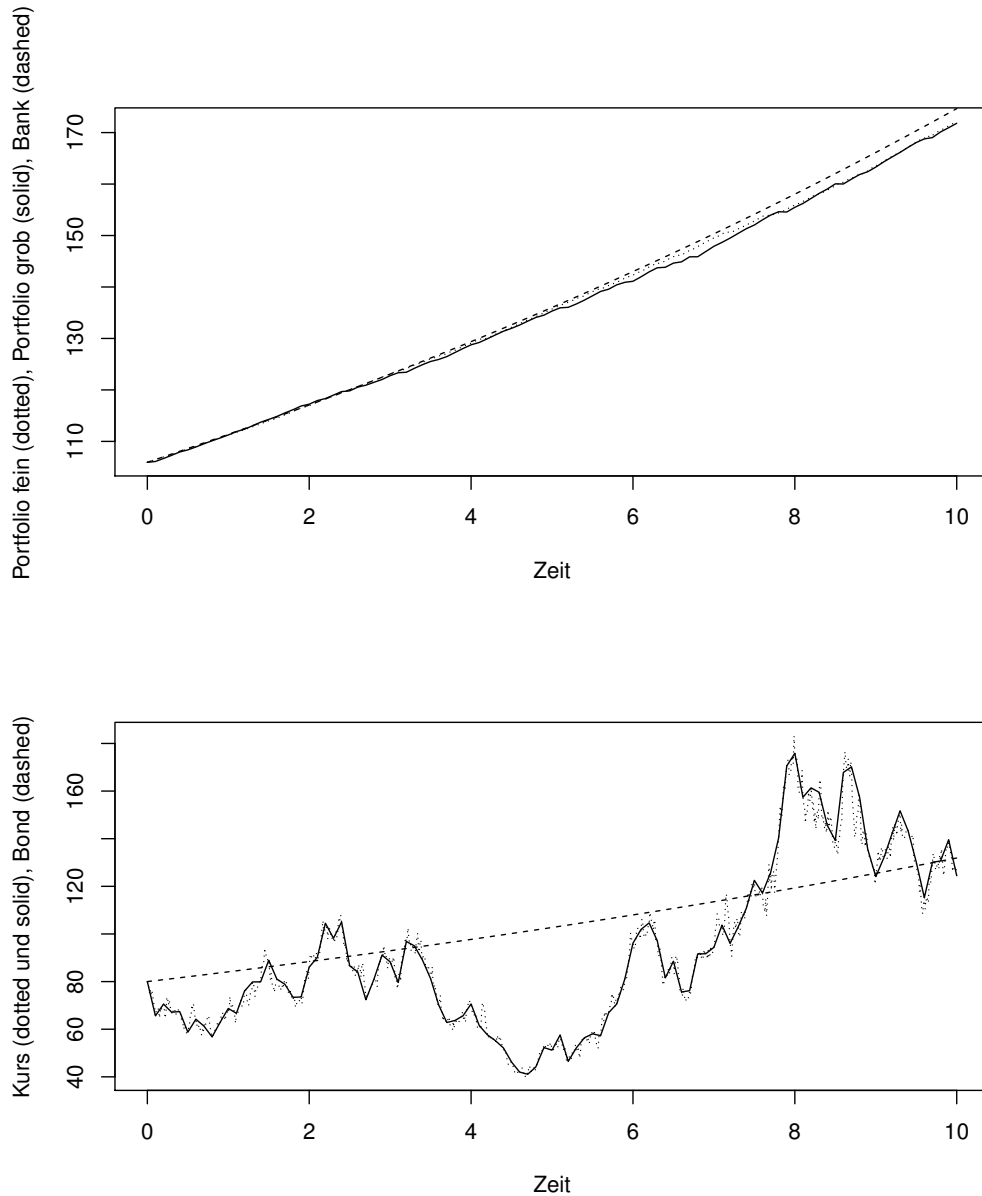


Abbildung 6.4: Hedging mit verschieden feinem Zeitgitter. Parameterwahl:  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $T = 10$ ,  $\tau_{fein} = 0,01$ ,  $\tau_{grob} = 0,1$ ,  $S_0 = 80$ ,  $K = 100$ ,  $B_0 = 80$ ,  $\beta_0 = 1$

Man erkennt, dass die gepunktete Linie (Portfolio fein) ruhiger und näher an der gestrichelten (Bank) verläuft, als die durchgezogene (Portfolio grob). Beide Portfolios entwickeln sich aber in etwa wie die Bank. In der nächsten Abbildung wollen wir den Verlauf beider Portfolios bei einem Kursabfall von  $S$  betrachten. Dabei fällt der Kurs in zehn Perioden in Folge um den Faktor  $\sqrt[10]{2}$ , so dass er im groben Zeitgitter plötzlich, also von einem Zeitschritt auf den nächsten, um 50%



abfällt.

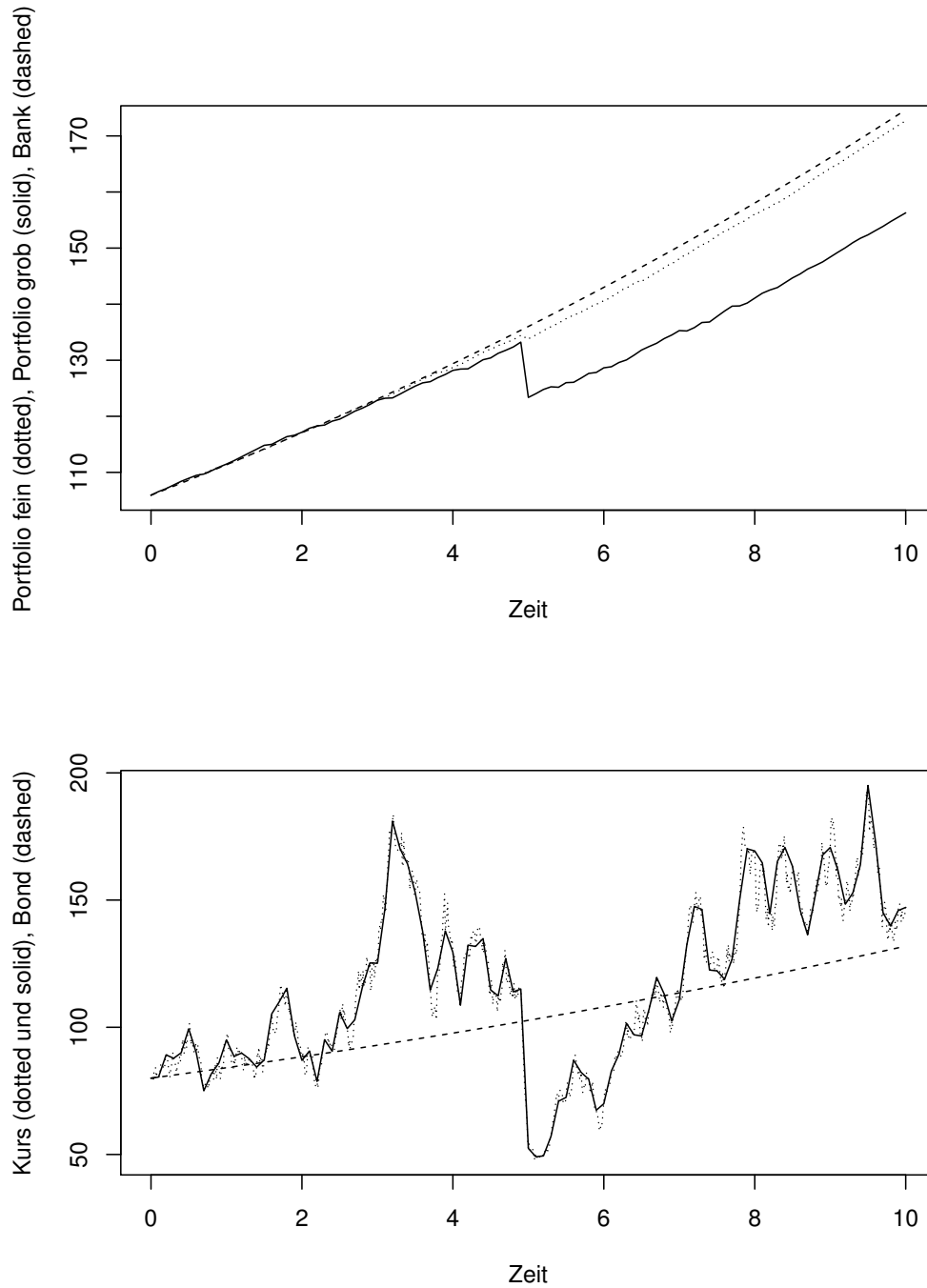


Abbildung 6.5: Hedging mit verschieden feinem Zeitgitter und Kursabfall. Parameterwahl:  $r = 0,05$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $T = 10$ ,  $\tau_{fein} = 0,01$ ,  $\tau_{grob} = 0,1$ ,  $S_0 = 80$ ,  $K = 100$ ,  $B_0 = 80$ ,  $\beta_0 = 1$

Wie in der Grafik erkennbar fällt der Portfoliowert deutlich stärker, wenn der Kurs auf einmal abfällt, als wenn der Kurs *peu à peu* an Wert verliert. Bei einem un stetigen Kursabfall bringt das Verfeinern des Zeitgitters keine Verbesserung, bei einem stetigen Kursabfall können durch ein feineres Gitter große Sprünge in viele kleine zerlegt und somit der Portfolioverlust vermindert werden.

# Kapitel 7

## Fazit und Interpretation

Wie wir sowohl im Ein- als auch im Mehr-Perioden-Modell sehen konnten, ist das anfänglich gestellte Problem der Portfolioverluste bei plötzlichen Kursänderungen beim Hedgen von Optionen kein unerklärliches Phänomen, sondern modellbegründet. Im Mehr-Perioden-Modell wäre es durchaus möglich, dass ohne künstliches Eingreifen in die Kursentwicklung große Sprünge auftreten und somit das Hedgingportfolio große Verluste erfahren würde. Dies ist jedoch auf Grund der sogenannten *small tails* der Normalverteilung sehr unwahrscheinlich.

Abgesehen von den Rechnungen im letzten Kapitel, die zeigen, dass (im Mehr-Perioden-Modell)  $\Pi_{i+1}(S_{i+1})$  für  $S_{i+1} = S_i$  maximal wird, ist dies auch sehr plausibel, da die Emittentin einer Option  $\Delta_i$  und  $\beta_i$  auf Grundlage des Kurses zum Zeitpunkt  $t_i$ , also für  $S_i$ , berechnet und somit ist es nicht weiter verwunderlich, dass sich das Portfolio am besten entwickelt, wenn der neue Kurs tatsächlich dem, mit dem gerechnet wurde, entspricht. Um dem Leser zu zeigen, dass es auch plausibel ist, dass das Portfolio sowohl bei Kursanstiegen, als auch bei Kursabfällen, falls diese genügend groß sind, Wert verliert, sei im Folgenden  $V$ , also der Wert der Option, grafisch dargestellt.

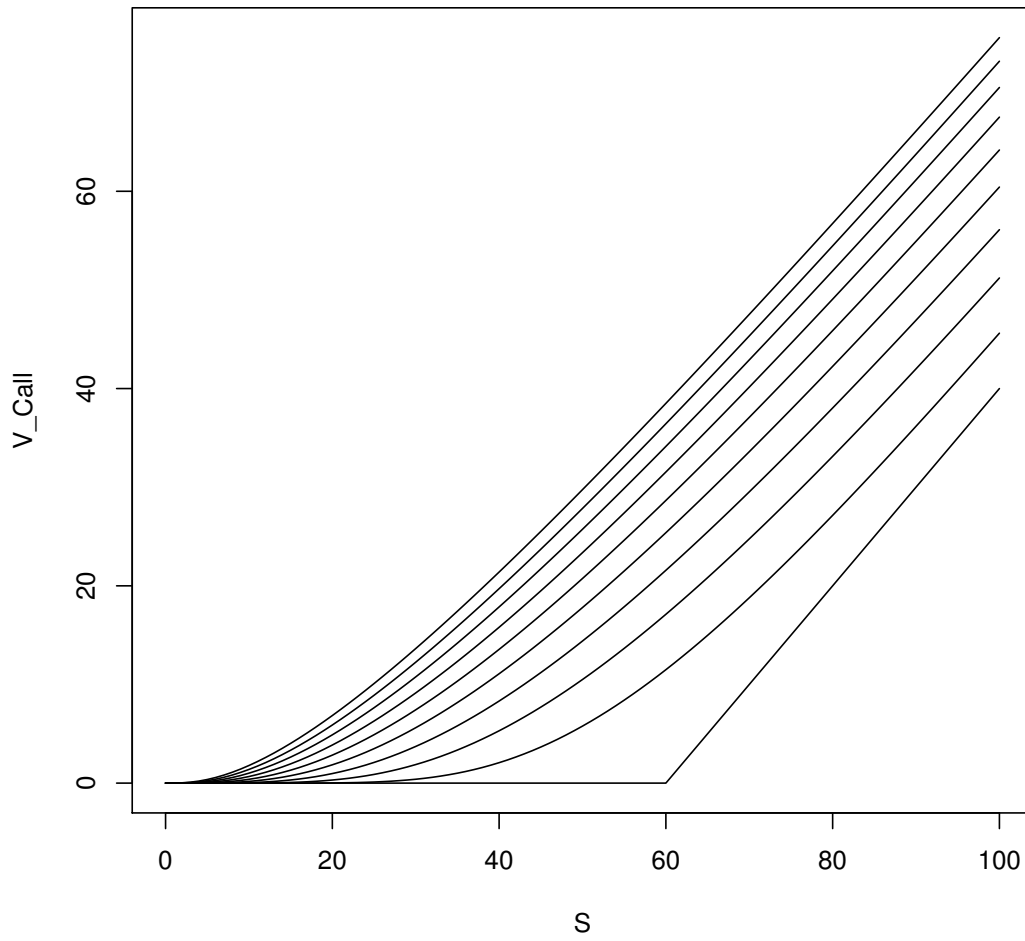


Abbildung 7.1:  $V_{Call}$  in Abhängigkeit von  $S$  und  $t$ . Von  $t = 0$  (oben) äquidistant bis  $t = T$  (unten).

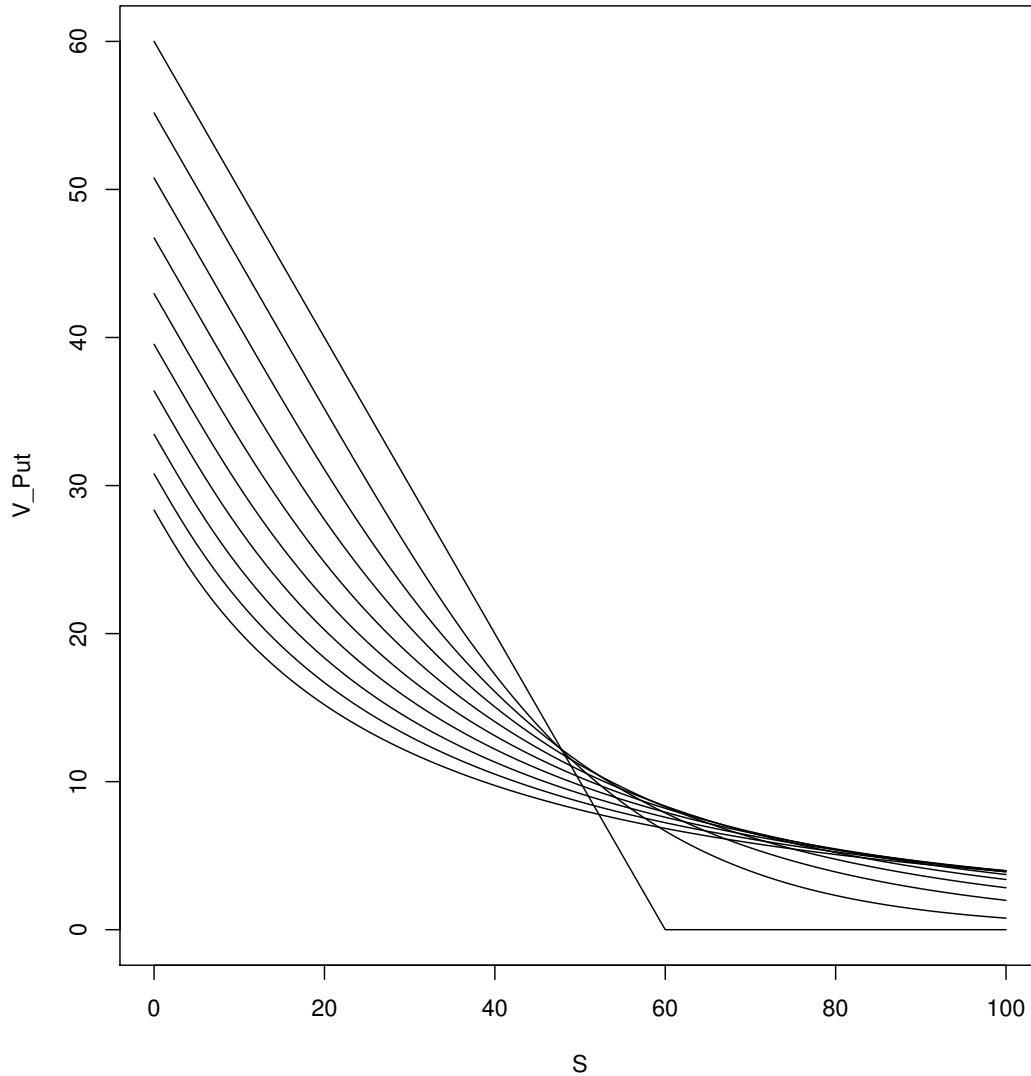


Abbildung 7.2:  $V_{Put}$  in Abhängigkeit von  $S$  und  $t$ . Von  $t = 0$  (links-unten – rechts-oben) äquidistant bis  $t = T$  (links-oben – rechts-unten).

Da  $\Delta_{Call} \in (0, 1)$  und  $\Delta_{Put} \in (-1, 0)$ , kommt es, betrachtet man das Portfolio  $-V + \Delta S + \beta B$ , prinzipiell zum selben Verhalten wie in Abschnitt 2.4. Die Option  $V$  steht immer mit dem Faktor 1 im Portfolio, allerdings ist  $|\Delta| < 1$ . Das heißt, bildlich gesprochen, besteht das Portfolio für einen Call aus einer flach (flacher als die Winkelhalbierende) steigenden bzw. für den Put aus einer flach fallenden Geraden und aus  $-V$ , einer Funktion die sich  $(S(T) - K)^+$  bzw.  $(K - S(T))^+$  annähert. Die entsprechenden Graphen gleichen schematisch denen

aus Abschnitt 2.4.

**Schlussbemerkungen** Zur ökonomischen Interpretation bleibt mir nur, den Gedanken meines Betreuers aufzufassen, dass einer der Gründe, warum Optionen gekauft werden, die Risikominimierung beim Käufer ist (siehe Seite 10), dementsprechend erscheint es wohl plausibel, dass die Verkäuferin einer solchen Option mehr Risiko zu tragen hat.

Gundsätzlich sieht man jedoch sehr schön, dass, könnte die Emittentin einer Option kontinuierlich hedgen, das Portfolio risikofrei wäre. Das heißt, die Wertschwankungen im Portfolio und das damit verbundene Risiko entstehen nur durch den Informationsverzug beim Hedgen, woraus man für eine praktische Anwendung lernen kann, dass möglichst feine Zeitgitter, was hohe Rechenleistung voraussetzt, der Risikominimierung bzw. -elimination sehr dienlich sind.

Als Anregung für praktische Umsetzungen und für weitere, zukünftige Analysen möchte ich hier noch eine Idee niederschreiben: Wie wir gesehen haben, entsteht durch das zeitdiskrete Hedging ein systematischer und ein zufälliger Fehler bei der Berechnung des Hedgingportfolios. Beide Fehler gehen gegen 0 wenn die Schrittweite im Zeitgitter gegen 0 geht. In praktischen Anwendungen kann jedoch nie  $\tau = 0$  erreicht werden. Die sich hedgende Emittentin könnte jedoch bei ihrer Berechnung des Hedgingportfolios zumindest den systematischen Fehler, der im Mittel bekannt ist, einplanen. Das heißt, sie könnte  $\Delta(t)$  nicht auf Basis von  $S(t)$  berechnen sondern auf Basis von  $S(t)e^{r\tau}$ , dem erwarteten Wert von  $S(t + \tau)$ , wenn bis zum Zeitpunkt  $t$  alle Größen deterministisch sind.

# Kapitel A

## Appendix

Die hier aufgeführten Definitionen und Sätze finden in der vorliegenden Arbeit Anwendung und sollen dem Leser zum Nachschlagen dienen. Es wird dabei jedoch weder auf Vollständigkeit der Sammlung noch auf etwaige Wichtigkeit der Sätze und Definitionen geachtet, auch werden die Sätze im Allgemeinen nicht bewiesen.

### Grundlagen

**Definition 40** (Natürliche Zahlen).  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

**Definition 41.** Eine Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt global Lipschitzstetig falls es eine Konstante  $L > 0$  (die Lipschitzkonstante) gibt, so dass

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  gilt.

**Definition 42.** Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

heißt Exponentialfunktion. Weiter gilt:  $e = \exp(1)$ .

**Satz 43.** Es gilt:  $e^x = \exp(x) \forall x \in \mathbb{R}$ .

### Konvergenz

**Definition 44.** Eine Folge von Zufallsvariablen  $X_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert im Quadrat-Mittel-Sinn gegen eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , falls

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_N - X|^2] = 0.$$

**Satz 45** (Satz von der Dominierten Konvergenz). Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Maßraum,  $(f_n)_n$  eine Folge von messbaren Funktionen, die von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  abbilden und durch eine integrierbare Funktion  $g$  majorisiert sind. Außerdem konvergiere  $(f_n)_n$  fast überall gegen eine messbare Funktion  $f$ . Dann sind alle  $f_n$  und  $f$  integrierbar und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mathbb{P} = 0$$

### Gammafunktion

**Definition 46** (Gammafunktion). Die Funktion  $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

heißt Gammafunktion.

**Satz 47.** Die Gammafunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

und es gilt:

$$\Gamma(1) = 1$$

und

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

**Charakteristische Funktion** Siehe zum Beispiel [11] Kapitel 15.

**Definition 48.** Die charakteristische Funktion  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  einer reellwertigen Zufallsvariable  $X$  über einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ist für  $s \in \mathbb{R}$  definiert als:

$$\varphi_X(s) = \mathbb{E}[e^{isX}],$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit ist.

**Satz 49** (Charakteristische Funktion einer Gaußverteilten Zufallsvariable). Für eine Zufallsvariable  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ist die charakteristische Funktion gegeben durch:

$$\varphi_X(s) = e^{is\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2}.$$

**Satz 50** (Eindeutigkeitssatz für charakteristische Funktionen). Wenn  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen sind und für ihre charakteristischen Funktionen gilt

$$\varphi_X(s) = \varphi_Y(s) \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

dann gilt  $X \sim Y$ , das heißt  $X$  und  $Y$  haben die gleiche Verteilungsfunktion.



## Differentialgleichungen

**Satz 51** (Kettenregel). Falls  $x(t)$  die Lösung einer eindimensionalen, deterministischen Differentialgleichung  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  ist, so ist  $y(t) = g(t, x(t))$  mit  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, x(t))f(t, x(t)).$$

**Definition 52.** Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\begin{aligned} & a(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \\ & + d(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + e(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + f(x, y)u(x, y) = 0 \end{aligned}$$

heißt parabolisch im Punkt  $(x, y)$ , wenn gilt, dass

$$a(x, y)c(x, y) = \left( \frac{b(x, y)}{2} \right)^2.$$

Eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung heißt parabolisch, wenn sie in allen Punkten  $(x, y)$  parabolisch ist.

## Funktionalanalysis

**Definition 53** (Banachraum). Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Das ist ein normierter Vektorraum, in dem alle Cauchyfolgen, bezüglich der durch die Norm induzierten Metrik, konvergieren.

**Satz 54** (Trennende Hyperebenen). Sei  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $\mathcal{C}$  nicht leer und  $0 \notin \mathcal{C}$ . Dann existiert  $\eta \in \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{aligned} \eta \cdot x &\geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{C}, \\ \exists x_0 \in \mathcal{C} &: \eta \cdot x_0 > 0. \end{aligned}$$

Falls  $\inf_{x \in \mathcal{C}} |x| > 0$ , dann existiert  $\eta \in \mathbb{R}^n$  mit  $\inf_{x \in \mathcal{C}} \eta \cdot x > 0$ .

*Beweis.* Siehe [15] Theorem V.4. □

## Wahrscheinlichkeitstheorie

**Definition 55.** Das essentielle Supremum einer Zufallsvariablen  $X$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ist definiert als

$$\text{esssup}_{\omega \in \Omega} X = \inf_{\lambda} \{ \lambda \geq X \text{ f. s.} \}.$$

**Definition 56.** Eine Filtration ist eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , so dass für alle  $s < t \in \mathcal{T}$  gilt:  $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$ .

**Definition 57** (Messbarkeit einer reellwertigen Funktion). Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum. Eine Funktion  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  heißt messbar, wenn

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Merksatz: „Urbilder messbarer Mengen sind messbar.“

**Satz 58.** Seien  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -Algebren über  $\Omega$ ,  $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  eine messbare Funktion und es gilt:

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A},$$

so ist  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ebenfalls messbar.

*Beweis.* Sei  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Es gilt:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}.$$

□

### Bedingter Erwartungswert

**Definition 59.** Der bedingte Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$  auf einem Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  bezüglich der Teil- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  ist eine  $\mathcal{F}$ -messbare Zufallsvariable  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ , für die für alle  $A \in \mathcal{F}$  gilt, dass

$$\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[1_A X].$$

**Lemma 60.** Sei  $X$  eine  $\mathcal{F}$ -messbare Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ , dann gilt:

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$$

*Beweis.* Laut Voraussetzung ist  $X$   $\mathcal{F}$ -messbar. Weiter gilt offensichtlich für alle  $A \in \mathcal{F}$ :

$$\mathbb{E}[1_A X] = \mathbb{E}[1_A X]$$

Also erfüllt  $X$  alle Eigenschaften, die  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$  erfüllen muss. □

**Satz 61** (Iterierte Erwartung – Turmeigenschaft). Sind  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -Algebren mit  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$  und  $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , so gilt:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}|\mathcal{F}]] \quad \mathbb{P}\text{-f. s.}$$

*Beweis.* Linkes Gleichheitszeichen:  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}|\mathcal{G}]$  ist  $\mathcal{G}$ -messbar, da  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}|\mathcal{G}]$  die bedingte Erwartung der Zufallsvariablen  $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$  bezüglich  $\mathcal{G}$  ist, und für alle  $A \in \mathcal{G}$  gilt, dass, wegen  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , auch  $A \in \mathcal{F}$  und deswegen:

$$\mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}|\mathcal{G}]] \stackrel{A \in \mathcal{G}}{=} \mathbb{E}[1_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] \stackrel{A \in \mathcal{F}}{=} \mathbb{E}[1_A X].$$

Rechtes Gleichheitszeichen: Da  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$   $\mathcal{G}$ -messbar ist, ist  $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$  auch  $\mathcal{F}$ -messbar, woraus die Behauptung mit Lemma 60 folgt. □

# Kapitel B

## R

R ist eine freie und für viele Plattformen verfügbare Programmiersprache. Sie ist an S angelehnt und ein Teil des GNU-Projekts. R besitzt keine grafische Benutzeroberfläche und ist vielmehr eine interaktive Konsole mit der verschiedenste Rechnungen erledigt werden können. Die Hauptanwendung von R ist jedoch die Statistik und als Teil davon die Datendarstellung.

Im Folgenden sollen nur die wichtigsten und die in dieser Arbeit verwendeten Befehle vorgestellt werden, wobei kein Wert auf Vollständigkeit, sondern vielmehr darauf gelegt wird, dem Leser ein Gefühl für R zu vermitteln. Für tiefere Fragen oder Fragen zur Installation verweise ich den Leser auf [13] und [14]. Die Seite [10] kann ich als Einführung in R empfehlen.

**Grundlagen** R beherrscht neben den Standardoperationen  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ ,  $^$  die gebräuchlichen Klammer- und Punkt-vor-Strich-Regeln. Die Funktionen `log()`, `sin()`, `sqrt()`, `floor()`, ... sind so belegt, wie man es intuitiv erwarten würde und  $\pi$  ist mit `pi` verfügbar. Als Dezimalzeichen dient der Punkt. Eine Variablenzuweisung erfolgt mit `x <- 3` oder im Falle, dass ein Text zugewiesen werden soll, mit `x <- "abc"`. Die Ausgabe des Wertes einer Variablen `a` erfolgt durch `a`, mit `"a"` wird der Buchstabe „a“ ausgegeben. Kommentare sind mit `#` markiert, Vergleiche mit `==`, `>=`, `<=`, `>`, `<`, `!=`.

**Vektoren und Matrizen** Beliebige Zahlen, Texte, Variablen oder Vektoren `x1`, `x2`, ... können mit `c(x1,x2, ...)` zu Vektoren zusammengefügt werden. `rep(3,5)` erzeugt einen Vektor der Länge 5, bei dem jede Komponente gleich 3 ist, `seq(2,7,0.5)` erzeugt den Vektor `(2;2,5;3;...;7)`, `2:7` erstellt eine Sequenz von 2 bis 7 `((2;3;...;7))`. Die Ansprache (sowohl zum Lesen, als auch zum Schreiben) einzelner Komponenten erfolgt mit `a[k]`, wobei hier auf die  $k$ -te Komponente des Vektors  $a$  zugegriffen wird. Mit `max(a)` bzw. `min(a)` erhält man

den größten bzw. kleinsten Eintrag des Vektors. `sum()` berechnet die Summe der Komponenten eines Vektors, `cumsum()` erzeugt einen Vektor mit den Zwischensummen der Einträge.

Der Befehl `A <- matrix(4,M,N)` schreibt auf  $A$  eine  $M \times N$ -Matrix, die nur 4er enthält; für einen Vektor  $a$  der Länge 12 erhält man mit `matrix(a,4,3)` die  $4 \times 3$ -Matrix, in die spaltenweise die Einträge des Vektors  $a$  geschrieben sind. Die Ansprache einzelner Komponenten erfolgt beispielsweise mit `A[3,2]`; mit `A[3,]` erhält man die 3. Zeile, mit `A[2 : 4, 1 : 2]` die entsprechende Untermatrix. Matrixmultiplikation erhält man mit `%*%`, die Transponierte der Matrix  $A$  mit `t(A)`.

**Lineare Gleichungssysteme** Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit entsprechenden Vektoren  $b$  und  $x$  und der Matrix  $A$  wird mit `solve(A,b)` gelöst. `solve(A)` berechnet die Inverse zu  $A$  ( $A^{-1}$ ).

**Schleifen und Bedingungen** Mit `for (i in 1:N) {` wird eine Schleife eröffnet, die für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  berechnet wird; die Schleife wird mit `}` beendet.

Eine Bedingung (Abfrage) wird mit `if (` begonnen, anschließend kommt die eigentliche Bedingung, also zum Beispiel `i == 5`, worauf nach `) {` der Programmteil, der nur berechnet werden soll, falls die Bedingung erfüllt ist, folgt. Dieser wird mit `}` beendet. Anschließend kann mit `else {` der sonst-Fall aufgeschrieben werden, der auch mit `}` beendet wird.

**Verteilungen und Zufallszahlen** In R sind für die meisten gängigen Verteilungen die Dichte, die Verteilungsfunktion, die Quantilsfunktion, ... vorhanden. `dnorm(a,mu,sigma)` berechnet den Wert der Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma$  am Punkt  $a$ , `pnorm(a,mu,sigma)` den entsprechenden Wert der Verteilungsfunktion. Mit `rnorm(N,5,3)` erhält man einen Vektor mit  $N$  unabhängig gezogenen Zufallszahlen aus  $\mathcal{N}(5,9)$ . Lässt man die hinteren beiden Argumente weg, wird die Standardnormalverteilung zugrundegelegt.

Andere Verteilungen sind zum Beispiel `binom` (Binomialverteilung) oder `chisq` ( $\chi^2$ -Verteilung), die wieder mit vorangestelltem `d`, `p`, ... verwendet werden können. `rbinom(5,10,0.2)` zieht 5 zufällige Zahlen aus einer Binomialverteilung mit  $p = 0,2$  und  $n = 10$ .

**Plot** Mit `plot()` werden zwei gleich lange Vektoren gegeneinander geplottet, wobei mit verschiedenen optionalen Argumenten der Typ, die Farbe, die Beschriftung, die Größe, ... geändert werden können. So wird zum Beispiel mit `type="l"` der Typ von der für Scatterplots üblichen Kreischendarstellung in eine Linie, wie man sie standardmäßig für Graphen verwendet, geändert. `lines()` fügt einem bestehenden Plot weitere Linien hinzu und `oldpar` ermöglicht es, mehrere Plots in eine Zeichnung zu setzen.

**Hilfe** Für alle Befehle kann man mit zum Beispiel `?plot` sich diesen erklären lassen und vor allem die möglichen Argumente nachschlagen.



# Literaturverzeichnis

- [1] H. Bauer: Wahrscheinlichkeitstheorie. De Gruyter Lehrbuch 1991
- [2] F. Biagini: Annalen zur Vorlesung Finanzmathematik I. Ludwig-Maximilians-Universität München WS 2010/11
- [3] T. Deck: Der Itô-Kalkül, Einführung und Anwendungen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006
- [4] L. C. Evans: Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics 2002
- [5] L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz: Statistik, Der Weg zur Datenanalyse. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007
- [6] H. Föllmer, A. Schied: Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time. De Gruyter Graduate 2011
- [7] H.-O. Georgii: Stochastik, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. De Gruyter Lehrbuch 2007
- [8] L. Grüne: Skript zur Vorlesung Numerische Methoden der Finanzmathematik. Universität Bayreuth  
[http://num.math.uni-bayreuth.de/en/team/Gruene\\_Lars/lecture\\_notes/index.html](http://num.math.uni-bayreuth.de/en/team/Gruene_Lars/lecture_notes/index.html). 23. Dezember 2013
- [9] W. Hackenbroch, A. Thalmaier: Stochastische Analysis, eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale. Teubner Stuttgart 1994
- [10] M. Kerscher: Skript zur Vorlesung Computergestützte Mathematik. Ludwig-Maximilians-Universität München  
[www.mathematik.uni-muenchen.de/~kerscher/vorlesungen/compmathws1314/](http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~kerscher/vorlesungen/compmathws1314/). 23. Dezember 2013
- [11] A. Klenke: Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006

- [12] N. Privault: Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings, With Normal Martingales. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009
- [13] [www.r-project.org/](http://www.r-project.org/). 23. Dezember 2013
- [14] [cran.r-project.org/manuals.html](http://cran.r-project.org/manuals.html). 23. Dezember 2013
- [15] M. Reed, B. Simon: Functional Analysis, Methods of Modern Mathematical Physics. Academic Press – Elsevier 1980



**Selbständigkeitserklärung** Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die Arbeit nicht bereits zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht zu haben.

Bischberg, den 28. Februar 2014



