

Globale Deformation Spezieller Fano 3-Mannigfaltigkeiten

Von der Universität Bayreuth
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Abhandlung

von

Tobias Alfons Dorsch

aus Forchheim

1. Gutachter: Prof. Dr. Th. Peternell
2. Gutachter: Prof. Dr. I. Bauer

Tag der Einreichung: 09. 07. 2013
Tag des Kolloquiums: 25. 10. 2013

Danksagungen

Ich danke in erster Linie Prof. Dr. Th. Peternell für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit. Besonders danke ich ihm auch dafür, dass er, anders als ich, immer davon überzeugt war, dass dieses Projekt erfolgreich abgeschlossen werden kann.

Darüberhinaus geht mein Dank an Dr. Vlad Lazić für die zahlreichen Vorschläge zur Verbesserung der Präsentation des Inhalts. Obwohl ich nur einen kleinen Bruchteil dieser umgesetzt habe, denke ich doch, dass sich die Lesbarkeit der Arbeit dadurch erheblich verbessert hat.

Ich danke Dr. Tim Kirschner für seine Bereitschaft zu jeder Zeit und an jedem Ort über jede beliebige mathematische Fragestellung zu diskutieren.

Schließlich danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Finanzierung meines Promotionsstudiums im Rahmen der Forschergruppe 790 *Classification of algebraic surfaces and compact complex manifolds*.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Einleitung | 7 |
| 1.1 | Motivation | 7 |
| 1.2 | Formulierung der Resultate und Beweisidee | 10 |
| 2 | Grundlagen | 13 |
| 2.1 | Notation und Konvention | 13 |
| 2.2 | Grundlegende Resultate über komplexe Räume | 15 |
| 2.3 | Hirzebruch-Flächen | 16 |
| 2.4 | Notation zu Auflösungen | 17 |
| 3 | Vorüberlegungen | 23 |
| 3.1 | Allgemeine, elementare Hilfsresultate | 23 |
| 3.2 | Globale Deformationen mit Picardzahl 1 | 40 |
| 4 | Beweis der beiden Haupthilfssätze | 51 |
| 4.1 | Beweis von Satz 3.2.6 | 51 |
| 4.1.1 | Degenerierter Basisort | 53 |
| 4.1.2 | Nicht-degenerierter Basisort | 78 |
| 4.2 | Beweis von Satz 3.2.7 | 91 |
| A | Ein Beispiel | 97 |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Jeder komplexen Mannigfaltigkeit unterliegt eine \mathcal{C}^∞ -Mannigfaltigkeit. Nach einem klassischen Resultat von Ehresmann ist eine eigentliche, submersive, surjektive \mathcal{C}^∞ -Abbildung $p: X \rightarrow B$ lokal über der Basis B isomorph zu einer Projektionsabbildung. Insbesondere sind für $0 \in B$ und $b \in B$ nahe bei 0 (bzw. in derselben Zusammenhangskomponente von B wie 0) die Fasern $X_0 = p^{-1}(0)$ und $X_b = p^{-1}(b)$ diffeomorph.

Sind X und B komplexe Mannigfaltigkeiten und ist p zusätzlich als holomorph vorausgesetzt, so sind jedoch X_0 und X_b im Allgemeinen nicht biholomorph. Man kann nun fragen “wie stark” sich die komplexe Struktur der Fasern verändern kann bzw. welche Eigenschaften komplexer Mannigfaltigkeiten stabil unter Deformation sind. Man unterscheidet dabei für gewöhnlich die lokale und die globale Sichtweise. Die lokale fragt danach, ob eine bestimmte Eigenschaft der Fasern offen in B ist, die globale fragt, ob eine bestimmte Eigenschaft der Fasern (auch) abgeschlossen ist.

Eine wichtige und in einem gewissen Sinn einfache Klasse kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten ist die der Fano Mannigfaltigkeiten. Wir wiederholen kurz deren Definition. Auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit X gibt es das Kotangentenbündel Ω_X^1 und dieses ist ein Vektorbündel vom Rang $\dim X$. Das kanonische Geradenbündel ist definiert als

$$\omega_X = \bigwedge^{\dim X} \Omega_X^1 = \det \Omega_X^1.$$

Man nennt X eine Fano Mannigfaltigkeit, wenn das dualisierte Geradenbündel

$$\omega_X^{-1} = \mathcal{H}om(\omega_X, \mathcal{O}_X) = \det T_X$$

ample ist, d.h. wenn es $m, M \in \mathbb{N}$ gibt und eine Einbettung $f: X \hookrightarrow \mathbb{P}^M$ derart, dass

$$(\omega_X^{-1})^{\otimes m} = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$$

ist. Bekanntermaßen ist $\omega_{\mathbb{P}^n}^{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ und die $(n+1)$ -Veroneseabbildung zeigt, dass \mathbb{P}^n Fano ist.

Für ein Geradenbündel L auf X ist die Bedingung, dass $L|_{X_t}$ ample ist, offen in B . Die Adjunktionsformel impliziert $\omega_{X_t} = \omega_{X|X_t}$. Folglich ist die Fano Eigenschaft stabil unter lokaler Deformation. Wir untersuchen in der Folge eine spezielle Version der Frage nach der globalen Stabilität der Fano Eigenschaft, von der wir schnell sehen werden, dass sie weit davon entfernt ist eine positive Antwort zu haben: ist die zentrale Faser X_0 eine Fano Mannigfaltigkeit, wenn $B = \Delta$ die Einheitskreisscheibe ist und X_t Fano für $t \in \Delta \setminus \{0\}$.

In Dimension 1 ist \mathbb{P}^1 die einzige Fano Mannigfaltigkeit. Auch ist \mathbb{P}^1 die einzige Riemannsche Fläche mit Geschlecht 0. Das Geschlecht ist eine topologische Invariante und die globale Stabilität der Fano Eigenschaft in Dimension 1 folgt auf triviale Weise (unter Verwendung des Satzes von Ehresmann).

Ab Dimension 2 ist die Fano Eigenschaft im Allgemeinen instabil unter globaler Deformation. Wir konstruieren ein einfaches und wohlbekanntes Beispiel.

Sei $x \in \mathbb{P}^2$ und $l \subset \mathbb{P}^2$ eine Gerade. Wir blasen \mathbb{P}^2 in x auf und verwenden die Notation, die das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \subset & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{x\} & \subset & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

suggeriert. Darüberhinaus bezeichne C die Strikttransformierte von l . Wir setzen

$$Z = S \times C, \quad F' = C \times C \subset Z, \quad D = \{(c, c) \mid c \in C\} \subset F'.$$

Ferner definieren wir Y als die Aufblasung von Z in der glatten Kurve D . Es gibt eine kanonische Abbildung $Y \rightarrow C$. Die Faser über einem Punkt $p \in C$ ist die Aufblasung von S in p , d.h. außerhalb von $E \cap C$ ist dies die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in zwei verschiedenen Punkten und im Schnittpunkt mit E die Aufblasung zweier infinitesimal naher Punkte. Die Strikttransformierte F von F' ist isomorph zu $F' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und der Schnitt mit einer Faser Y_p ist die Strikttransformierte der Verbindungsgerade der beiden aufgeblasenen Punkte.

Aus dem Kontraktionskriterium von Fujiki und Nakano folgt, dass wir diese simultan niederblasen können. Wir erhalten eine Mannigfaltigkeit X und eine natürliche Abbildung $X \rightarrow C$. Die Faser über einem Punkt außerhalb von $E \cap C$ ist $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, also Fano. Die Faser über $E \cap C$ ist die zweite Hirzebruchfläche $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Man sieht leicht, dass es eine glatte rationale Kurve $C_\infty \subset \mathbb{F}_2$ mit $C_\infty^2 = -2$ gibt: in unserer Konstruktion ist es

die Strikttransformierte der exzeptionellen Kurve E der ersten Aufblasung. Aus der Adjunktionsformel folgt

$$\omega_{\mathbb{F}_2}^{-1}.C_\infty = \deg \omega_{C_\infty}^{-1} + C_\infty^2 = -2 + 2 = 0.$$

Also ist \mathbb{F}_2 nicht Fano.

Sicherlich müssen wir also zusätzliche Annahmen an die allgemeinen Fasern stellen, um zu erreichen, dass die spezielle Faser wieder Fano ist. Eine naheliegende Annahme, die Beispiele wie das obige ausschließt, ist die, dass die Picardzahl der allgemeinen Mannigfaltigkeiten 1 ist. Für eine Fano Mannigfaltigkeit Y ist $\rho(Y) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \text{Pic}(Y)$ die Picardzahl von Y (und es gilt $\text{Pic}(Y) \simeq \mathbb{Z}^{\rho(Y)}$). Das obige Beispiel zeigt, dass es für $n = 2$, $\rho = 2$ bzw. durch das Bilden von Produkten auch für $n \geq 3$, $\rho \geq 3$ Fano Mannigfaltigkeiten mit Dimension n und Picardzahl ρ gibt, die zu Mannigfaltigkeiten degenerieren, die nicht Fano sind. Vermutlich ist dies auch für $n = 2$, $\rho = 2$ richtig. Es stellt sich die Frage:

Ist eine globale Deformation von Fano Mannigfaltigkeiten
mit Picardzahl 1 Fano?

Um eine Teilantwort auf diese Frage zu geben, führen wir eine weitere Invariante ein. Für den Rest des Abschnitts sei X eine Fano Mannigfaltigkeit mit Picardzahl 1 und Dimension n . Die größte unter den natürlichen Zahlen $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass es ein Geradenbündel L auf X gibt mit $\omega_X^{-1} = L^{\otimes m}$, nennen wir den Index i_X von X . Man sieht leicht, dass in der gegebenen Situation der Index lokal konstant ist¹. Nach einem Ergebnis von S. Kobayashi und T. Ochiai ([KO73]) ist $i_X \leq n + 1$ und es ist $i_X = n + 1$ genau dann, wenn $X = \mathbb{P}^n$ der projektive Raum ist und $i_X = n$ genau dann, wenn $X = Q^n$ die glatte Hyperquadrik in \mathbb{P}^{n+1} ist.

Die globale Stabilität in beliebiger Dimension n mit Index $i_X \geq n$ wurde von Y.-T. Siu ([Siu89], [Siu92], [Siu91]) im Fall von \mathbb{P}^n und von J.-M. Hwang ([Hwa95]) im Fall von Q^n bewiesen. Weitere Ergebnisse in beliebiger Dimension gibt es nicht. In den beiden Fällen mit (sub-)maximalem Index gibt es auf den degenerierenden Mannigfaltigkeiten (nicht-triviale) Vektorfelder und diese Tatsache ist wesentlich für die jeweiligen Beweise. Die Ergebnisse sind also kein starkes Indiz dafür, dass die obige Frage für beliebigen Index eine positive Antwort hat. Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass die obige Fragestellung äquivalent zu der folgenden, a priori schwächeren, ist:

Ist eine globale Deformation von Fano Mannigfaltigkeiten
mit Picardzahl 1 Kähler?

Es ist wohlbekannt, dass die Kähler Eigenschaft im Allgemeinen instabil unter globaler Deformation ist ([Hir62]). Es ist jedoch ein Resultat von

¹Es ist $\omega_{X_t} = \omega_{X|X_t}$ und wir werden später sehen, dass die Restriktionsabbildung $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_t)$ ein Isomorphismus ist.

Moishezon, dass jede Moishezon, Kähler Mannigfaltigkeit projektiv ist (siehe z.B. [MM07, Theorem 2.2.26]). Da außerdem $\text{Pic}(X_0) = \mathbb{Z}$ ist (Lemma 3.2.2) und $-K_{X_0}$ „big“ (nach dem Halbstetigkeitssatz), sieht man leicht, dass die beiden obigen Fragestellungen äquivalent sind.

In Dimension 3 gibt es eine vollständige Klassifikation der Fano Mannigfaltigkeiten. Die Fragestellung kann für 3-Faltigkeiten also relativ explizit untersucht werden. Wegen der Resultate von Siu und Hwang bleiben die 3-Faltigkeiten mit Index 1 und 2 zu betrachten.

Für Index 1 sind bisher keine Ergebnisse bekannt. Es gibt fünf Familien mit Index 2 und diese sind durch $-K_X^3$ klassifiziert. Für $-K_X^3 = 8 \cdot 5$ ist $X = V_5$, ein Schnitt der Grassmannschen $\mathbf{Gr}(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$ mit einem linearen Unterraum von Kodimension 3, und die globale Stabilität folgt aus einem Resultat von J. Kollár ([Kol91, Corollary 5.3.13]).

Für $-K_X^3 = 8 \cdot 4$ ist $X = V_4$, ein Durchschnitt zweier Hyperquadriken in \mathbb{P}^5 . Für eine globale Deformation X_0 solcher Mannigfaltigkeiten folgt aus [Kol91, Theorem 5.3.12], dass das Linearsystem $|-K_{X_0}|$ basispunktfrei ist und mit unserem Lemma 3.2.5 folgt, dass X_0 tatsächlich Fano ist.

Für $-K_X^3 = 8 \cdot 3$ ist $X = V_3$ eine Kubik in \mathbb{P}^4 und die globale Stabilität folgt aus einem Resultat von I. Nakamura [Nak96]².

Der Fall $-K_X^3 = 8 \cdot 2$ ist Hauptgegenstand dieser Arbeit. Der Fall $-K_X^3 = 8$ ist unbehandelt.

1.2 Formulierung der Resultate und Beweisidee

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die globale Stabilität der Fano Eigenschaft für Fanomannigfaltigkeiten mit Dimension 3, Picardzahl 1, Index 2 und $-K_X^3 = 8 \cdot 4$ bzw. $-K_X^3 = 8 \cdot 2$ zu beweisen. Im ersten Fall ist X , wie bereits erwähnt, ein Durchschnitt zweier Hyperquadriken. Im zweiten Fall ist X eine zweifache Überlagerung $f: X \rightarrow \mathbb{P}^3$, die entlang einer glatten Quartik verzweigt ist. Solche Fano Mannigfaltigkeiten nennen wir vom Typ V_2 . Die präzisen Resultate, auf die wir abzielen, sind die folgenden.

Satz 1.2.1. *Sei $p: X \rightarrow \Delta$ eine glatte Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten über der Einheitskreis $\Delta \subset \mathbb{C}$, d.h. X ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, p eine eigentliche, submersive holomorphe Abbildung mit zusammenhängenden Fasern. Für $t \in \Delta \setminus \{0\}$ seien die Fasern $X_t = p^{-1}(t)$ Fano Mannigfaltigkeiten, die Durchschnitt zweier Hyperquadriken in \mathbb{P}^5 sind. Dann ist auch die zentrale Faser X_0 Fano.*

Satz 1.2.2. *Sei $p: X \rightarrow \Delta$ eine glatte Familie kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten über der Einheitskreis $\Delta \subset \mathbb{C}$. Für $t \in \Delta \setminus \{0\}$ seien die*

²Dieser Beweis ist auch Gegenstand der Diplomarbeit [Mei96]. Ich möchte an dieser Stelle darauf hinweisen, dass es mir diese zu Beginn der Promotion erleichtert hat, die Arbeit [Nak96] zu verstehen.

Fasern $X_t = p^{-1}(t)$ Fano Mannigfaltigkeiten, die zweifache Überlagerungen von \mathbb{P}^3 verzweigt über einer Quartik sind. Dann ist auch die zentrale Faser X_0 Fano.

Die wesentliche Schwierigkeit der Sätze besteht darin, zu zeigen, dass X_0 projektiv ist. Wir werden uns unter Verwendung der Deformationstheorie glatter, rationaler Kurven leicht davon überzeugen, dass es dafür in der gegebenen Situation hinreichend ist die Basispunktfreiheit des Linearsystems $|-K_{X_0}|$ zu zeigen. Diese folgt für X_0 wie in Satz 1.2.1 unmittelbar aus [Kol91, Theorem 5.3.12]. Für X_0 wie in Satz 1.2.2 führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Unter der Annahme, dass $-K_{X_0}$ nicht global erzeugt ist, liefert ein Struktursatz von J. Kollár, dass die vom Linearsystem $|\frac{1}{2}K_{X_0}|$ induzierte Abbildung die Mannigfaltigkeit X_0 bimeromorph auf entweder den 3-dimensionalen projektiven Raum oder die 3-dimensionale Quadrik abbildet. Wir werden in beiden Fällen einen Widerspruch zu der Tatsache herleiten, dass X_0 den Diffeomorphietyp einer Fano Mannigfaltigkeit vom Typ V_2 hat.

In dem Fall, dass X_0 auf die Quadrik abgebildet wird, zeigt man leicht, dass die bimeromorphe Abbildung durch die Aufblasung in einem \mathbb{P}^1 aufgelöst werden kann und damit, dass X_0 nicht diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit vom Typ V_2 sein kann. Der Beweis folgt eng dem Beweis von I. Nakamura eines etwas stärkeren Resultats mit der 3-dimensionalen Kubik an Stelle von V_2 .

In dem Fall, dass X_0 auf den 3-dimensionalen projektiven Raum abgebildet wird, ist die Auflösung der entsprechenden bimeromorphen Abbildung deutlich schwieriger zu kontrollieren. Wir unterscheiden zwei Unterfälle.

Im ersten Unterfall ist der Schnitt zweier allgemeiner Flächen aus dem Linearsystem $|\frac{1}{2}K_{X_0}|$ nicht reduziert und es ist uns nicht möglich dessen exakte Geometrie zu bestimmen. In Folge dessen ist es uns auch nicht möglich eine explizite Beschreibung der Auflösung der bimeromorphen Abbildung $X_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ anzugeben. Wir können in diesem Fall jedoch zeigen, dass X_0 eine Kompaktifizierung von \mathbb{C}^3 ist. Den gewünschten Widerspruch erhalten wir dann durch eine relativ detaillierte und aufwändige strukturelle Beschreibung des kompaktifizierenden Divisors.

Im zweiten Fall ist der Durchschnitt zweier allgemeiner Flächen aus $|\frac{1}{2}K_{X_0}|$ ein reduzierter Zykel glatter rationaler Kurven. Die wesentliche Schwierigkeiten besteht dann darin, die Anzahl dieser Kurven zu beschränken.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Notation und Konvention

Topologische Begriffe beziehen sich standardmäßig auf die Hausdorff Topologie. Bezüge auf die Zariski Topologie werden stets explizit gemacht.

Ist X ein komplexer Raum und sind $A, B \subset X$ abgeschlossene komplexe Unterräume mit zugehörigen Idealgarben $I_A, I_B \subset \mathcal{O}_X$, so schreiben wir

$$A.B \quad \text{bzw.} \quad A + B$$

für die zu den Idealgarben $I_A + I_B$ bzw. $I_A \cap I_B$ gehörigen Unterräume. Sowohl für die dem Raum $A.B$ zugrunde liegende Punktmenge als auch für die Reduktion $(A.B)_{\text{red}}$ als komplexer Unterraum schreiben wir je nach Kontext $A \cap B$.

Ist X ein kompakter komplexer Raum, so schreiben wir

$$\text{Komp}(X)$$

für die Menge der irreduziblen Komponenten von X .

Eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit heißt Moishezon, wenn

$$\text{tr deg}_{\mathbb{C}} \mathcal{M}(X) = \dim X$$

ist, wobei $\mathcal{M}(X)$ den Körper der meromorphen Funktionen auf X bezeichnet und $\text{tr deg}_{\mathbb{C}}$ den Transzendenzgrad über \mathbb{C} .

Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel auf X so definieren wir das Basisideal $\mathfrak{b}(L)$ von L als das Bild der natürlichen Abbildung

$$H^0(X, L) \otimes_{\mathbb{C}_X} L^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Der (reduzierte) Basisort von L

$$\text{Bs}(L) = \{x \in X \mid \mathfrak{b}(L)_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

ist die Verschwindungsmenge von $\mathfrak{b}(L)$.

Ist Y ein weiterer komplexer Raum, $f: X \dashrightarrow Y$ eine meromorphe Abbildung und $A \subset X$ eine abgeschlossene, analytische Teilmenge mit der Eigenschaft, dass jede irreduzible Komponente $K \subset A$ den Definitionsbereich $\text{dom}(f)$ trifft, so setzen wir

$$f_*A = \overline{f(A \cap \text{dom}(f))}$$

und nennen f_*A die Strikttransformierten von A unter f . Ist f bimeromorph, so schreiben wir f_*^{-1} für $(f^{-1})_*$.

Ist f holomorph und $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ eine kohärente Idealgarbe, so schreiben wir

$$f^{-1}\mathcal{I}$$

für die inverse Idealgarbe von \mathcal{I} , d.h. für das Bild der Abbildung $f^*\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_X$.

Für eine komplexe Mannigfaltigkeit X schreiben wir wie üblich

$$\omega_X = \det \Omega_X^1.$$

Ist X kompakt und $Y \subset X$ ein lokal vollständiger Durchschnitt, so definieren wir $\omega_Y = \omega_X \otimes N_{Y/X}$ – in Übereinstimmung mit der ersten Definition, falls Y glatt ist. Dann ist ω_Y ein dualisierendes Geradenbündel auf Y , d.h. es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$H^{n-i}(Y, -)^\vee \rightarrow \text{Ext}^i(-, \omega_Y),$$

wobei beide Seiten als Funktoren von der Kategorie der kohärenten \mathcal{O}_Y -Moduln in die Kategorie der \mathbb{C} -Vektorräume auffassen. Ist Y glatt so ist dies gerade die klassische Dualität von Serre. Wenn Y nicht glatt ist, werden wir das Ergebnis in dieser Arbeit nur im Fall $n = 1$, $i = 0$ anwenden. Sofern existent, bezeichnen wir mit K_X jeden Divisor, der

$$\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X$$

erfüllt, wobei die Gleichheit, wie üblich, in $\text{Pic}(X)$ zu verstehen ist.

Ist X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit und L ein Geradenbündel auf X , so schreiben wir

$$|L| = \mathbb{P}(H^0(X, L))$$

für den (endlich-dimensionalen) projektiven Raum der Geraden in $H^0(X, L)$. Für die induzierte meromorphe Abbildung in den zu $|L|$ dualen projektiven Raum schreiben wir

$$\Phi_L: X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee) =: \mathbb{P}_L.$$

Es ist $H^0(\mathbb{P}_L, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_L}(1)) = H^0(X, L)^{\vee\vee}$ und der kanonische Isomorphismus

$$\alpha_L: H^0(X, L) \rightarrow H^0(X, L)^{\vee\vee}$$

induziert einen Isomorphismus

$$\beta_L: |L| \rightarrow |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^L}(1)|.$$

Da in der Arbeit stets klar sein wird für welches L wir die obigen Konstruktionen betrachten, schreiben wir zur Vereinfachung der Notation für $D \in |L|$ bzw. $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^L}(1)|$

$$D^\# = \beta_L(D), \quad H^\# = \beta_L^{-1}(H).$$

Wie üblich verwenden wir die Aussage „Für allgemeines $x \in X$ gilt $A(x)$ “ im Sinne von „Es existiert eine Zariski-offene, Zariski-dichte Teilmenge $U \subset X$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in U$ die Aussage $A(x)$ gilt.“ Desöfteren verwenden wir außerdem für ein Geradenbündel L die Sprechweise

$$\text{„Für allgemeine } D_1, D_2 \in |L| \text{ gilt } A(D_1, D_2)\text{“}$$

im Sinne von

„Es gibt eine Zariski-offene, nicht-leere Teilmenge $U \subset |L|$ und für jedes $D_1 \in U$ eine Zariski-offene, nicht-leere Teilmenge $V_{D_1} \subset |L|$ mit der Eigenschaft, dass für alle $D_2 \in V_{D_1}$ die Aussage $A(D_1, D_2)$ gilt.“

Also nicht in dem Sinne von „Für $(D_1, D_2) \in |L| \times |L|$ allgemein, gilt die Aussage $A(D_1, D_2)$ “.

2.2 Grundlegende Resultate über komplexe Räume

Wir sammeln noch einige wohlbekanntete Resultate über komplexe Räume, die jedoch nicht in dieser Form in Standardlehrbüchern zu finden sind. Zunächst zwei Verschwindungsergebnisse, die wir im Hauptteil zumeist ohne expliziten Hinweis anwenden.

Proposition 2.2.1. *Sei X ein komplexer Raum. Ist $k > \dim X$ und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul, dann ist $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$. Ist $l > 2 \dim X$ und \mathcal{G} eine beliebige Garbe auf X , so ist $H^l(A, \mathcal{G}) = 0$.*

Beweis. Die erste Aussage ist [Dem09, Chapter IX, Corollary 4.15]. Für die zweite verweisen wir auf [Ive86, Chapter X, Proposition 1.4]. Das Resultat ist dort für Schemata formuliert, der Beweis bleibt aber gültig, wenn man stets „algebraic scheme“ durch „complex space“ ersetzt. \square

Wir formulieren hier das bekannte Kontraktionskriterium von Fujiki und Nakano. Mit einer zusätzlichen Voraussetzung ist dies gerade der Hauptsatz aus [Nak71]. In der Arbeit [FN72] wird gezeigt, dass diese überflüssig ist.¹

¹Das Kriterium wir hier wie in der ursprünglichen Arbeit für Dimension $n \geq 3$ formuliert. Es ist natürlich auch für $n = 2$ richtig und gerade das klassische Castelnuovo Kriterium. Für $n = 1$ sind Voraussetzung und Folgerung leer.

Proposition 2.2.2. *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ und $E \subset X$ ein glatter Divisor, der ein holomorphes \mathbb{P}^r -Faserbündel*

$$f: E \rightarrow B$$

über einer komplexen Mannigfaltigkeit B ist. Es sei $b \in B$ und $F_b := f^{-1}(b) \simeq \mathbb{P}^r$. Dann gibt es genau dann eine glatte Mannigfaltigkeit Y mit $B \subset Y$ und eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$ derart, dass g die Aufblasung von Y in B ist und $g|_E = f$, wenn

$$\mathcal{O}_X(-E)|_{F_b} = \mathcal{O}_{F_b}(1)$$

ist.

Zu Referenzzwecken zitieren wir den Halbstetigkeitssatz von H. Grauert ([Gra60, §7, Satz 3]).

Proposition 2.2.3. *Seien X, B komplexe Räume, B reduziert, $f: X \rightarrow B$ eine eigentliche, holomorphe Abbildung und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul, der f -flach ist. Dann ist für alle $k \in \mathbb{N}$ die Funktion*

$$b \mapsto \dim H^k(X_b, L|_{X_b})$$

halbstetig nach oben, d.h. für alle $b_0 \in B$ gibt es eine offene Menge $U \subset B$ derart, dass für alle $b \in U$

$$\dim H^k(X_b, L|_{X_b}) \leq \dim H^k(X_{b_0}, L|_{X_{b_0}})$$

ist.

2.3 Hirzebruch-Flächen

Wir rufen die Definition und einige grundlegenden Resultate für Hirzebruchflächen ins Gedächtnis und führen Notation ein.

Für $0 \leq e \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\mathbb{F}_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)).$$

Im Fall $e = 0$ ist $\mathbb{F}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, wir schreiben p_1, p_2 für die beiden Projektionen auf \mathbb{P}^1 und setzen

$$\mathbf{e} = p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \quad \mathbf{f} = p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).$$

Für jedes $e > 0$ bezeichnen wir mit C_∞ die eindeutig bestimmte (irreduzible) Kurve mit $C_\infty^2 = -e$ und mit $p: \mathbb{F}_e \rightarrow \mathbb{P}^1$ die Projektion. Es gilt $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(C_\infty) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1)$. Wir definieren

$$\mathbf{e}_\infty := \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(C_\infty), \quad \mathbf{f} := p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1), \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_\infty + e \cdot \mathbf{f}.$$

Dann sind (e, f) und (e_∞, f) \mathbb{Z} -Basen von $\text{Pic}(\mathbb{F}_e)$.

Für $a \geq b \in \mathbb{Z}$ definieren wir

$$\mathbb{F}_{a,b} = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$$

und bezeichnen die natürliche Projektion auf \mathbb{P}^1 mit q . Es gibt genau eine biholomorphe Abbildung $f: \mathbb{F}_{a,b} \rightarrow \mathbb{F}_e$ mit $p \circ f = q$ und es gilt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{a,b}}(1) = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1) \otimes q^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) = e_\infty + a \cdot f.$$

Mitunter verwenden wir die folgenden elementaren Aussagen, die sich z.B. in [Fri98, Chapter 5] finden. Durch jeden Punkt $x \in \mathbb{F}_e$ gibt es genau eine p -Faser. Bläst man \mathbb{F}_e im Punkt x auf, so ist die Striktransformierte dieser Faser eine (-1) -Kurve und es ist möglich diese niederzublasen. Ist $e > 0$ und $x \in C_\infty \subset \mathbb{F}_e$ oder ist $e = 0$, so ist das Ergebnis dieser Operation \mathbb{F}_{e+1} . Ist $e > 0$ und $x \in \mathbb{F}_e \setminus C_\infty$, so erhalten wir \mathbb{F}_{e-1} .

2.4 Notation zu Auflösungen

Im Hauptteil der Arbeit benötigen wir etwas mehr als die bloße Aussage des Satzes, dass es für jedes Idealgarbe \mathcal{I} auf einem komplexen Raum X eine Auflösung $g: \tilde{X} \rightarrow X$ mit der Eigenschaft gibt, dass die inverse Idealgarbe $g^{-1}\mathcal{I}$ invertierbar ist und einen Divisor mit einfachen Kreuzungssingularitäten definiert. Wir greifen daher auf den Auflösungsalgorithmus aus [BEVU05]² zurück.

In diesem Abschnitt wollen wir dessen für uns relevanten Eigenschaften kurz beschreiben und Notation für den späteren Gebrauch einführen sowie einige einfache, aber wichtige Hilfsresultate zeigen. Für weite Teile des Abschnitts machen wir die folgende

Voraussetzung 2.4.1. *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe und L ein Geradenbündel auf X .*

Wir beginnen mit einer Definition.

Definition 2.4.2. *Es gelte Voraussetzung 2.4.1. Für $b \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$\text{Sing}(\mathcal{I}, b) := \left\{ x \in X \mid \mathcal{I}_x \subset m_x^b \right\}.$$

Wir nennen eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ zulässig für $(X, (\mathcal{I}, b))$, wenn $Y \subset \text{Sing}(\mathcal{I}, b)$ ist. Deweiteren definieren wir

$$\text{Sing}(L, b) := \left\{ x \in X \mid \forall s \in H^0(X, L) : s_x \in m_x^b \cdot L_x \right\}.$$

²Es sei angemerkt, dass die Resultate in [BEVU05] für Schemata formuliert sind. Die Autoren behaupten jedoch (siehe Absatz nach Theorem 8.3), und man überzeugt sich leicht davon, dass die Ergebnisse auch für kompakte komplexe Räume gelten.

Die folgenden Aussagen sind elementar:

Lemma 2.4.3. *Es gelte Voraussetzung 2.4.1 und es sei $b \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\text{Sing}(\mathfrak{b}(L), b) = \text{Sing}(L, b).$$

Sei weiter $Y \subset X$ glatt, $g: X_1 \rightarrow X$ die Aufblasung von X in Y und E der zugehörige exzeptionelle Divisor. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- *Die natürliche Abbildung*

$$H^0(X_1, g^*L - bE) \rightarrow H^0(X_1, g^*L)$$

ist ein Isomorphismus.

- $Y \subset \text{Sing}(L, b)$.
- *Es existiert eine Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{X_1}$ mit der Eigenschaft*

$$g^{-1}\mathfrak{b}(L) = \mathcal{J} \cdot I_E^b.$$

- $Y \subset \text{Sing}(\mathfrak{b}(L), b)$.

Gilt die dritte Aussage, so ist \mathcal{J} eindeutig bestimmt und es ist

$$\mathfrak{b}(g^*L - bE) = \mathcal{J}.$$

Beweis. Die Gleichheit der Singularitätenmengen folgt direkt aus der Definition des Basisideals und zeigt unmittelbar die Äquivalenz der zweiten und vierten Aussage. Um die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass die Abbildung

$$H^0(X_1, g^*L - bE) \rightarrow H^0(X_1, g^*L)$$

stets injektiv ist und die Abbildung

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(X_1, g^*L)$$

stets ein Isomorphismus ist. Die erste Abbildung ist daher genau dann ein Isomorphismus, wenn die zweite durch sie faktorisiert. Dies gilt genau dann, wenn für alle $s \in H^0(X, L)$ und alle $x \in X_1$

$$(g^*s)_x \in I_{E,x}^b \cdot (g^*L)_x \tag{2.4.1}$$

ist. Da Y glatt ist, gilt für $t \in \mathcal{O}_{X,g(x)}$ genau dann $t \in I_{Y,g(x)}^b$, wenn $g^*(t) \in I_{E,x}^b$ gilt und daher gilt (2.4.1) genau dann, wenn

$$s_{g(x)} \in I_{Y,g(x)}^b \cdot L_{g(x)}$$

gilt. Wieder da Y glatt ist, gilt für eine offene Menge $U \subset X$ und einen Schnitt $t \in \mathcal{O}_X(U)$ genau dann $t \in I_Y^b(U)$, wenn $t_x \in m_x^b$ ist, für alle $y \in Y \cap U$. Die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen ist damit gezeigt. Der Beweis der Äquivalenz der letzten beiden ist ähnlich.

Um die letzte Behauptung zu zeigen, fixieren wir eine Basis

$$s_0, \dots, s_n \in H^0(X, L)$$

und nehmen an, dass eine der vier äquivalenten Bedingungen erfüllt ist. Wir zeigen die behauptete Gleichheit halmweise. Sei also $x \in X_1$. Wir setzen $y := g(x)$ und wählen lokale Erzeuger

$$I_{E,x} = t \cdot \mathcal{O}_{X_1,x}, \quad L_y = u \cdot \mathcal{O}_{X,y}.$$

Folglich existieren eindeutig bestimmte $\alpha_i \in \mathcal{O}_{X,y}$ mit der Eigenschaft, dass $(s_i)_y = \alpha_i \cdot u$. Dann ist

$$\mathfrak{b}(L)_y = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \cdot \mathcal{O}_{X,y}$$

und es folgt, dass $(g^{-1}\mathfrak{b}(L))_x$ das von $g^*\alpha_0, \dots, g^*\alpha_n$ erzeugte Ideal ist und daraus wiederum folgt

$$\mathcal{J}_x = (g^*\alpha_0/t^b, \dots, g^*\alpha_n/t^b) \cdot \mathcal{O}_{X_1,x}.$$

Ein Erzeuger von $(g^*L - bE)_x$ ist $t^b \cdot g^*u$ und g^*s_0, \dots, g^*s_n ist eine Basis von $H^0(X_1, g^*L - bE)$. Es gilt

$$(g^*s_i)_x = g^*\alpha_i \cdot g^*u = (g^*\alpha_i/t^b) \cdot (t^b \cdot g^*u)$$

und daher ist

$$\mathfrak{b}(g^*L - bE)_y = (g^*\alpha_0/t^b, \dots, g^*\alpha_n/t^b) \cdot \mathcal{O}_{X_1,x} = \mathcal{J}_y.$$

Die Behauptung ist damit gezeigt. \square

Wir führen Notation für den späteren Gebrauch ein.

Notation 2.4.4. *Es gelte Voraussetzung 2.4.1. Eine Auflöserung von \mathcal{I} besteht aus den folgenden Daten:*

- einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$,
- Mannigfaltigkeiten $X_0 := X, X_1, \dots, X_n$,
- ganzen Zahlen b_0, \dots, b_{n-1} mit $b_i \geq 1$ für alle i ,
- Untermannigfaltigkeiten $A_k \subset X_k$ für $k = 0, \dots, n-1$,
- Abbildungen $h_k: X_{k+1} \rightarrow X_k$ für $k = 0, \dots, n-1$,

- effektiven Divisoren E^k auf X_k und
- Idealgarben $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{O}_{X_k}$ für $k = 0, \dots, n$,

mit den folgenden Eigenschaften:

- A_k ist zulässig für $(X_k, (\mathcal{I}_k, b_k))$ und h_k ist die Aufblasung von X_k in A_k
- mit $E_{k+1} := h_k^{-1}(A_k)$, $g_0 = \text{id}_{X_0}$ und rekursiv definierten Abbildungen

$$g_k = g_{k-1} \circ h_{k-1}$$

gelten die Gleichheiten

$$h_k^{-1}(\mathcal{I}_k) = \mathcal{I}_{k+1} \cdot (I_{E_{k+1}})^{b_k} \quad \text{und} \quad g_k^{-1}(\mathcal{I}) = \mathcal{I}_k \cdot I_{E^k}.$$

Wir bezeichnen des Weiteren mit F^k die eindeutig bestimmten, effektiven Divisoren, die die Gleichung

$$K_{X_k} = g_{k-1}^* K_X + F^k$$

erfüllen und definieren

$$\begin{aligned} a_k &= \text{codim}_{X_k}(A_k) - 1 \\ c_k &= \max \left\{ c \in \mathbb{N} \mid h_k^{-1} \mathcal{I}_k \cdot I_{E_{k+1}}^{-c} \subset \mathcal{O}_{X_{k+1}} \right\}. \end{aligned}$$

Der Algorithmus aus [BEVU05] liefert in dieser Notation für ein gegebenes $b \in \mathbb{N}$ eine Auflösung von \mathcal{I} mit

$$\text{Sing}(\mathcal{I}_n, b) = \emptyset.$$

Wir betrachten nun den Fall $\mathcal{I} = \mathfrak{b}(L)$. Wir wählen b_k stets maximal mit der Eigenschaft, dass $\text{Sing}(\mathcal{I}_k, b_k) \neq \emptyset$ ist. Dann ist $b_k = c_k$ für alle $k = 0, \dots, n$ und wir definieren rekursiv

$$L_{k+1} = h_k^* L_k - c_k E_{k+1}.$$

Das vorangehende Lemma impliziert, dass für alle $k = 1, \dots, n$

$$\mathcal{I}_k = \mathfrak{b}(L_k)$$

ist. Insbesondere können wir den Algorithmus verwenden, um den Basisort der von $|L|$ induzierten Abbildung aufzulösen.

Wir wollen hinreichende Kriterien dafür finden, dass $E^n \geq F^n$ ist.

Lemma 2.4.5. In Notation 2.4.4 sei zusätzlich $\dim X = 3$.

Wenn es für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ mit $a_k = 2$, $b_k = 1$ einen irreduziblen Divisor $\Gamma \supset A_k$ derart gibt, dass $\text{mult}_\Gamma(E^k - F^k) > 0$ ist, so ist $E^n \geq F^n$.

Beweis. Wir nehmen also an, dass die Voraussetzung des Lemmas erfüllt ist und zeigen, die Behauptung per Induktion. Der Induktionsanfang

$$0 = E^0 \geq F^0 = 0$$

gilt trivialerweise. Für den Induktionsschritt nehmen wir $E^k \geq F^k$ an, für ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Zunächst untersuchen wir, wie sich die Divisoren E^k , F^k unter h_k transformieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{k+1} &= h_k^{-1} \mathcal{I}_k(b_k E_{k+1}) = g_{k+1}^{-1} \mathcal{I}(h_k^* E^k + b_k E_{k+1}) = \\ &= g_{k+1}^{-1} \mathcal{I}\left((h_k)_*^{-1} E^k + \left(\sum_{\Gamma \supset A_k} \text{mult}_\Gamma E^k + b_k\right) E_{k+1}\right) \\ K_{X_{k+1}} &= h_k^* K_{X_k} + a_k E_{k+1} = g_{k+1}^* K_X + h_k^* F^k + a_k E_{k+1} = \\ &= g_{k+1}^* K_X + (h_k)_*^{-1} F^k + \left(\sum_{\Gamma \supset A_k} \text{mult}_\Gamma F^k + a_k\right) E_{k+1} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} E^{k+1} - F^{k+1} &= \\ &= (h_k)_*^{-1}(E^k - F^k) + \left(\sum_{\Gamma \supset A_k} \text{mult}_\Gamma (E^k - F^k) + b_k - a_k\right) E_{k+1}. \quad (2.4.2) \end{aligned}$$

Also ist $E^{k+1} \geq F^{k+1}$, wenn $a_k \leq b_k$ ist. Ist $a_k > b_k$, so ist

$$a_k = 2 \quad \text{und} \quad b_k = 1,$$

da stets $2 \geq a_k$ ist und $b_k \geq 1$. Wieder aus der obigen Formel folgt, dass auch in diesem Fall $E^{k+1} \geq F^{k+1}$ ist, da nach Voraussetzung ein irreduzibler Divisor $\Gamma \subset \text{Supp}(E^k - F^k)$ mit $A_k \subset \Gamma$ existiert. \square

Lemma 2.4.6. *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 3 und sei $\Delta \subset X$ ein irreduzibler, reduzierter Divisor. Dann existiert eine eingebettete Auflöserung*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_n & \subset & X_n \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ \Delta & \subset & X \end{array}$$

von Δ mit der folgenden Eigenschaft: Es existiert ein effektiver Cartierdivisor $B_n \subset \Delta_n$ derart, dass zum einen

$$\omega_{\Delta_n} = (h^* \omega_\Delta)(-B_n)$$

ist und dass zum anderen für alle irreduziblen $C \subset \text{Exc}(h)$ mit $\dim h(C) = 1$

$$C \subset \text{Supp}(B_n)$$

gilt.

Beweis. Wir wenden den Auflösungsalgorithmus auf die Idealgarbe I_Δ an, solange bis

$$\text{Sing}(\Delta_k) = \text{Sing}(I_k, 2) = \emptyset$$

ist, und verwenden Notation 2.4.4. Wir schreiben $g = g_n$, $E = E^n$, $F = F^n$, d.h. es gilt:

$$K_{X_n} = g^*K_X + F, \quad g^*\Delta = \Delta_n + E.$$

Wir schreiben Δ_k für die Striktransformierte von Δ in X_k . Wir bemerken, dass $b_k \geq 2$ ist für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ und mit Lemma 2.4.5 folgt $E \geq F$. Wir setzen

$$B_n := (E - F)|_{\Delta_n}$$

und bemerken, dass B_n effektiv ist, da $\Delta_n \not\subset \text{Supp}(E - F)$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta_n} &= \omega_{X_n}(\Delta_n)|_{\Delta_n} = g^*\omega_X(F + g^*\Delta - E)|_{\Delta_n} \\ &= (h^*\omega_X(\Delta)|_\Delta)((F - E)|_{\Delta_n}) = (h^*\omega_\Delta)(-B_n). \end{aligned}$$

Wir zeigen per Induktion die folgende Aussage. Für alle $k \in \{0, \dots, n\}$ gilt: ist $C \subset \text{Exc}(g_k)$ und $\dim g_k(C) = 1$, so ist $C \subset \text{Supp}(E^k - F^k)$. Die eigentliche Behauptung folgt daraus, weil $\text{Exc}(h) \subset \text{Exc}(g)$ ist.

Sei also $C \subset \text{Exc}(g_k)$ mit $\dim g_k(C) = 1$. Ist $C \subset \text{Exc}(h_{k-1})$, so ist $h_{k-1}(C) \subset A_{k-1}$. Da $\dim h_{k-1}(C) = 1$ ist, ist $a_{k-1} = 1$ (und $A_{k-1} = h_{k-1}(C)$). Daher ist

$$b_{k-1} - a_{k-1} \geq 1$$

und mit (2.4.2) aus dem Beweis von Lemma 2.4.5 folgt

$$C \subset \text{Exc}(h_{k-1}) = E_k \subset \text{Supp}(E^k - F^k).$$

Ist $C \not\subset \text{Exc}(h_{k-1})$, so ist $h_{k-1}(C) \subset \text{Exc}(g_{k-1})$, da $g_k = g_{k-1} \circ h_{k-1}$ ist. Per Induktionsannahme ist daher $h_{k-1}(C) \subset \text{Supp}(E^{k-1} - F^{k-1})$ und wieder mit der Formel aus dem Beweis von Lemma 2.4.5 folgt

$$C \subset \text{Supp}((h_{k-1})_*^{-1}(E^{k-1} - F^{k-1})) \subset \text{Supp}(E^k - F^k),$$

wobei die erste Inklusion gilt, da $C \not\subset \text{Exc}(h_{k-1})$. □

Kapitel 3

Vorüberlegungen

3.1 Allgemeine, elementare Hilfsresultate

In diesem Abschnitt tragen wir einige Lemmata für den späteren Gebrauch zusammen. Fast alle sind elementar und dem Experten vermutlich wohlbekannt oder zumindest leicht einsichtig. Wir geben die Beweise der Vollständigkeit halber.

Das erste Lemma untersucht Aufblasungen der Hirzebruchflächen \mathbb{F}_0 und \mathbb{F}_2 . Wir verwenden die Notation aus Abschnitt 2.3.

Lemma 3.1.1. *a) Sei $x \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $g: S \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Aufblasung in x und $E = g^{-1}(x)$ die exzeptionelle Kurve. Die Strikttransformierten der beiden Fasern $p_1^{-1}(p_1(x))$, $p_2^{-1}(p_2(x))$ sind (-1) -Kurven und seien mit A, B bezeichnet. Durch Niederblasen dieser erhält man \mathbb{P}^2 .*

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

Die Abbildung f ist durch das Linearsystem $|g^*(e + f) - E|$ gegeben. Die Picardgruppe von S besitzt die beiden \mathbb{Z} -Basen

$$\mathfrak{A} = (g^*e, g^*f, E), \quad \mathfrak{B} = (f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), A, B)$$

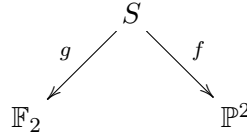
und die zugehörigen Basiswechselmatrizen sind

$$M_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei ferner $y \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit $p_1(x) \neq p_1(y)$, $h: T \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Aufblasung in $\{x, y\}$ und $F = h^{-1}(y)$. Dann ist T die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in drei Punkten,

die nicht kollinear sind. Ist das Geradenbündel $h^*(\mathbf{e}+\mathbf{f})-E-F$ basispunktfrei, so sind diese Punkte paarweise verschieden.

b) Sei $x \in \mathbb{F}_2$, $g: S \rightarrow \mathbb{F}_2$ die Aufblasung von \mathbb{F}_2 in x und $E = g^{-1}(x)$ die exzeptionelle Kurve. Ist $x \in C_\infty$, so ist das Geradenbündel $h^*(\mathbf{e})-E$ nicht global erzeugt. Ist $x \notin C_\infty$, so ist die Striktransformierte B der Faser durch x eine (-1) -Kurve und $A = \hat{C}_\infty = g_*^{-1}C_\infty$ eine (-2) -Kurve. Bläst man zuerst B und danach A nieder, so erhält man \mathbb{P}^2 .



Die Abbildung f ist durch das Linearsystem $|g^*\mathbf{e} - E|$ gegeben. Die Picardgruppe von S besitzt die beiden \mathbb{Z} -Basen

$$\mathfrak{A} = (g^*\mathbf{e}, g^*\mathbf{f}, E) \quad \mathfrak{B} = (f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1), A, B)$$

und die zugehörigen Basiswechselmatrizen sind

$$M_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad M_{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei ferner $y \in \mathbb{F}_2$ mit $p(x) \neq p(y)$, $h: T \rightarrow \mathbb{F}_2$ die Aufblasung in $\{x, y\}$ und $F = h^{-1}(y)$. Dann ist T die Aufblasung von \mathbb{P}^2 in drei Punkten, die nicht „kollinear“ sind. Ist das Geradenbündel $h^*\mathbf{e} - E - F$ global erzeugt, so sind nur zwei der drei Punkte infinitesimal nah.

Beweis. a) Die ersten Aussagen folgen aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.3. Blasen wir einen weiteren Punkt $y \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf erhalten wir natürlich eine Aufblasung von \mathbb{P}^2 in 3 Punkten. Wir zeigen nun, dass aus $p_1(x) \neq p_1(y)$ folgt, dass diese Punkte nicht kollinear sind. Wir setzen

$$q_1 = f(A), \quad q_2 = f(B), \quad q_3 = f(F).$$

Die Striktransformierte der Verbindungsgerade von q_1, q_2 wird von $p_1 \circ h$ auf den Punkt $p_1(x)$ abgebildet. Daher sind q_1, q_2, q_3 nicht kollinear.

Wir nehmen nun an, dass das Geradenbündel $h^*(\mathbf{e}+\mathbf{f})-E-F$ global erzeugt ist und wollen zeigen, dass dann die Punkte q_1, q_2, q_3 paarweise verschieden sind. Wir wissen, dass $q_1 \neq q_2$ ist und es bleibt daher $y \in A \cup B$ auszuschließen. Da $p_1 \circ h(A) = p_1(x)$ ist, folgt $y \notin A$ aus $p_1(x) \neq p_1(y)$. Angenommen es ist $y \in B$. Dann ist $B \sim h^*\mathbf{e} - E - F$ und es folgt

$$(h^*(\mathbf{e}+\mathbf{f})-E-F) \cdot \hat{B} = -1.$$

Also ist $B \subset \text{Bs}(h^*(\mathbf{e}+\mathbf{f})-E-F)$. Ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

b) Ist $x \in C_\infty$, so ist $\hat{C}_\infty = h^*C_\infty - E$ und es gilt

$$(h^*e - E) \cdot \hat{C}_\infty = (h^*e - E) \cdot (h^*C_\infty - E) = -1.$$

Also ist $h^*e - E$ nicht global erzeugt. Sei nun $x \in \mathbb{F}_2 \setminus C_\infty$. Die ersten Aussagen folgen wieder aus der Bemerkung am Ende von Abschnitt 2.3 bzw. sind leicht zu verifizieren.

Sei nun $y \in \mathbb{F}_2$ mit $p(x) \neq p(y)$ und mit $h^*e - E - F$ global erzeugt. Aus der ersten Bedingung folgt, dass $y \notin A$ ist und dass die drei Punkte nicht kollinear sind. Aus der zweiten folgt wie zuvor, dass $y \notin \hat{C}_\infty = B$ ist. Folglich ist $f(F) \neq f(C_\infty)$. \square

Lemma 3.1.2. *Sei S eine reduzierte, kompakte komplexe Fläche, C eine reduzierte, kompakte komplexe Kurve und $f: S \rightarrow C$ eine holomorphe Abbildung, deren allgemeine Faser (isomorph zu) \mathbb{P}^1 ist und die keine Fasern mit Dimension 2 hat. Gibt es ein Geradenbündel L auf S mit der Eigenschaft, dass L auf der allgemeinen Faser von f nicht trivial ist, so gilt*

$$b_3(S) \leq b_1(C).$$

Insbesondere gilt dies stets, wenn es ein amples Geradenbündel auf S gibt, d.h. wenn S projektiv ist.

Beweis. Man beachte, dass wir nicht voraussetzen, dass C irreduzibel ist. Wir wollen $b_3(S)$ mit Hilfe der Leray-Spektralsequenz abschätzen. Wir betrachten die Einträge des zweiten Blattes E_2^{pq} auf der Diagonalen $p + q = 3$. Es gilt

$$H^3(C, R^0 f_* \mathbb{Q}_S) = 0,$$

da C topologische Dimension 2 hat. Für alle $x \in C$ mit $f^{-1}(x) \simeq \mathbb{P}^1$ ist $H^1(f^{-1}(x), \mathcal{O}_{f^{-1}(x)}) = 0$. Aus der Voraussetzung an die Fasern von f folgt damit, dass $R^1 f_* \mathbb{Q}_S$ außerhalb endlich vieler Punkte verschwindet und daher ist

$$H^2(C, R^1 f_* \mathbb{Q}_S) = 0$$

nach Proposition 2.2.1. Da die Fasern von f eindimensional sind, gilt $R^3 f_* \mathbb{Q}_S = 0$ und insbesondere ist

$$H^0(C, R^3 f_* \mathbb{Q}_S) = 0.$$

Die Leray-Spektralsequenz liefert mit diesen Ergebnissen

$$b_3(S) \leq \sum_{p=0}^3 h^{3-p}(C, R^p f_* \mathbb{Q}_S) = h^1(C, R^2 f_* \mathbb{Q}_S). \quad (3.1.1)$$

(Und man überzeugt sich leicht, dass tatsächlich Gleichheit gilt.) Die erste Chernklasse von L gibt einen globalen Schnitt in der Garbe $R^2 f_* \mathbb{Q}_S$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(S) & \xrightarrow{c_1} & H^2(S, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^0(C, R^2 f_* \mathbb{Q}_S) \\ & & \downarrow \\ & & L \longmapsto s \end{array}$$

Der Keim dieses Schnittes in einem Punkt x entspricht

$$c_1(L|_{f^{-1}(x)}) \in H^2(f^{-1}(x), \mathbb{Q})$$

(siehe z.B. [Ive86, III. Theorem 6.2]).

Für allgemeines x ist also nach Voraussetzung $s_x \neq 0$ und da die Menge $\{x \mid s_x \neq 0\}$ abgeschlossen ist, gilt dies tatsächlich für alle $x \in C$. Multiplikation mit s liefert daher eine injektive Abbildung $\mathbb{Q}_C \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Q}_S$, deren Kokern wir mit Q bezeichnen.

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_C \rightarrow R^2 f_* \mathbb{Q}_S \rightarrow Q \rightarrow 0 \quad (3.1.2)$$

Für allgemeines $x \in C$ ist $f^{-1}(x)$ irreduzibel und wir haben

$$(R^2 f_* \mathbb{Q}_S)_x = H^2(f^{-1}(x), \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}.$$

Daher besteht der Träger von Q nur aus endlich vielen Punkten und es folgt $h^1(C, Q) = 0$. Somit erhalten wir aus der zu (3.1.2) assoziierten langen exakten Sequenz die Ungleichung

$$h^1(C, R^2 f_* \mathbb{Q}_S) \leq h^1(C, \mathbb{Q}) = b_1(C).$$

Zusammen mit (3.1.1) folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.1.3. *Sei X eine 3-dimensionale, kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $C \subset X$ ein 1-dimensionaler, abgeschlossener, komplexer Unterraum, $C_1, C_2, C_3 \subset C$ paarweise verschiedene irreduzible, reduzierte Kurven und es existiere $p \in C_1 \cap C_2 \cap C_3$. Falls $h^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ ist, so gibt es lokale Koordinaten in p derart, dass die Kurven C_1, C_2, C_3 lokal den drei Koordinatenachsen entsprechen.*

Beweis. Wir zeigen, dass C_1, C_2, C_3 in p glatt sind, je zwei (lokal) in einer glatten Fläche enthalten sind und die dritte diese transversal schneidet. Formal gehen wir wie folgt vor: Für jeden abgeschlossenen, komplexen Unterraum $C' \subset C$ gilt

$$h^1(C', \mathcal{O}_{C'}) \leq h^1(C, \mathcal{O}_C) = 0.$$

Insbesondere gilt dies für $C' = C_i$ und daher ist $C_i \simeq \mathbb{P}^1$ für $i = 1, 2, 3$. Weiter gilt dies für $C' = C_1 + C_2$ und es folgt aus der langen exakten Sequenz zur Schnitt-Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \rightarrow \mathcal{O}_{C_1.C_2} \rightarrow 0,$$

dass $h^0(C_1.C_2, \mathcal{O}_{C_1.C_2}) = 1$ ist. Daher ist $I_{C_1,p} + I_{C_2,p} = m_p$ und insbesondere

$$(I_{C_1,p} + I_{C_2,p})/m_p^2 = m_p/m_p^2$$

Dies sagt gerade, dass die Tangentialrichtungen von C_1 und C_2 in p verschieden sind. Es gibt daher eine Funktion $x \in (I_{C_1,p} \cap I_{C_2,p}) \setminus m_p^2$, d.h. $C_1 + C_2$

ist lokal in p in einer glatten Fläche enthalten. Man sieht jetzt leicht, dass es lokale Koordinaten (x, y, z) in p derart gibt, dass $I_{C_1,p} = (x, y)$, $I_{C_2,p} = (x, z)$. Dann ist $I_{C',p} = (xy, z)$. Wie oben folgt

$$(I_{C',p} + I_{C_3,p})/m_p^2 = m_p/m_p^2,$$

d.h. C_3 schneidet die Fläche $(z = 0)$ im Punkt p transversal. Die Behauptung folgt. \square

Lemma 3.1.4. *Sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 3, $D_1, D_2 \subset X$ irreduzible, reduzierte Divisoren mit $D_1 \neq D_2$ und $C \subset D_1 \cap D_2$ eine glatte Kurve derart, dass $D_1 \cdot D_2$ generisch entlang C reduziert ist. Es bezeichne $\mathcal{J}_{D_2} = (I_{D_2})|_{D_1}$ die Idealgarbe der Einschränkung des Cartierdivisors D_2 auf D_1 . Dann sind die Abbildungen*

$$\begin{aligned} (I_{D_1} + I_{D_2})|_C &= (I_{D_1} + I_{D_2}) \otimes \mathcal{O}_X/I_C \rightarrow I_C/I_C^2 = N_{C/X}^\vee, \\ (\mathcal{J}_{D_2})|_C &= \mathcal{J}_{D_2} \otimes \mathcal{O}_{D_1}/\mathcal{J}_C \rightarrow \mathcal{J}_C/\mathcal{J}_C^2 = N_{C/D_1}^\vee \end{aligned}$$

injektiv. Wir definieren Q_1, Q_2 als die jeweiligen Kokerne. Dann gibt es eine natürliche Abbildung $Q_1 \rightarrow Q_2$ und diese ist ein Isomorphismus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (I_{D_1} + I_{D_2})|_C & \longrightarrow & N_{C/X}^\vee & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{dotted} \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{J}_{D_2})|_C & \longrightarrow & N_{C/D_1}^\vee & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ist zusätzlich $h^1(\text{red}(D_1 \cdot D_2), \mathcal{O}_{\text{red}(D_1 \cdot D_2)}) = 0$ und D_1 glatt in $p \in C$, so gibt es in p lokale Koordinaten x, y derart, dass

$$C = (x = 0) \quad \text{und} \quad (D_2)|_{D_1} = (xy^k = 0) \quad \text{mit} \quad k = h^0(p, Q_2).$$

Beweis. Es ist $(I_{D_1} + I_{D_2})|_C \simeq (I_{D_1})|_C \oplus (I_{D_2})|_C$ und die erste vertikale Abbildung entspricht gerade der Projektion auf die zweite Komponente. Die zweite vertikale Abbildung ist die natürliche. Beide Abbildungen sind also surjektiv und haben Kern $(N_{D_1/X}^\vee)|_C = (I_{D_1})|_C$. Aus dem Schlangenlemma folgt, dass die induzierte Abbildung $Q_1 \rightarrow Q_2$ ein Isomorphismus ist.

Sei jetzt $h^1(\text{red}(D_1 \cdot D_2), \mathcal{O}_{\text{red}(D_1 \cdot D_2)}) = 0$ und $p \in C$ ein glatter Punkt von D_1 . Wir schreiben

$$\text{red}(D_1 \cdot D_2) = C + B'.$$

Ist $p \notin B'$ ist die Aussage trivial (mit $k = 0$). Andernfalls schreiben wir B für diejenige Zusammenhangskomponente von B' , die p enthält. Dann ist

$$h^0(C + B, \mathcal{O}_{C+B}) = h^0(B, \mathcal{O}_B) = 1$$

und “noch immer” $h^1(C + B, \mathcal{O}_{C+B}) = 0$. Aus der langen exakten Sequenz zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C+B} \rightarrow \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_B \rightarrow \mathcal{O}_{C.B} \rightarrow 0$$

folgt $h^0(p, \mathcal{O}_{C.B}) = 1$. Also ist $I_{C,p} + I_{B,p} = m_p$. Da D_1 glatt in p ist, gibt es $x, y \in \mathcal{O}_{D_1,p}$ mit

$$I_{C,p} = (x), \quad I_{B,p} = (y).$$

Dann ist $(x, y) = I_C + I_B = m_p$ und deshalb sind x, y lokale Koordinaten in p . Da $D_1.D_2$ ein Cartierdivisor auf D_1 ist, der generisch entlang C reduziert ist und dessen Reduktion in p durch xy gegeben ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $D_1.D_2$ in p durch xy^k gegeben ist. Man sieht nun leicht, dass

$$(Q_2)_p \simeq \mathbb{C}[y]/(y^k)$$

ist. □

Lemma 3.1.5. *Es seien $0 \in U \subset \mathbb{C}^3$ offen und $I_{C_1} = (x, y) \cdot \mathcal{O}_U$ sowie $I_{C_2} = (y, z) \cdot \mathcal{O}_U$, wobei x, y, z die Koordinatenfunktionen in \mathbb{C}^3 bezeichnen. Ferner seien $s_1, s_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}(U)$ und $k_1, k_2 \geq 1$ derart, dass für $I_{D_i} = (s_i)$ gilt:*

$$(I_{D_1} + I_{D_2})|_{C_1 \setminus \{0\}} = (I_{C_1})|_{C_1 \setminus \{0\}}$$

$$s_1 \in I_{C_2}^{k_1} \setminus I_{C_2}^{k_1+1}, \quad s_2 \in I_{C_2}^{k_2} \setminus I_{C_2}^{k_2+1}.$$

Es sei $f: \hat{U} \rightarrow U$ die Aufblasung von U entlang der Idealgarbe I_{C_2} und $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{C}_1$ jeweils die Striktttransformierten von D_1, D_2, C_1 . Die \mathcal{O}_{C_1} -Garben Q_1, Q_2 seien durch die folgenden exakten Sequenzen definiert:

$$0 \rightarrow (I_{D_1} + I_{D_2})|_{C_1} \rightarrow N_{C_1/U}^\vee \rightarrow Q_1 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow (I_{\hat{D}_1} + I_{\hat{D}_2})|_{\hat{C}_1} \rightarrow N_{\hat{C}_1/\hat{U}}^\vee \rightarrow Q_2 \rightarrow 0$$

Dann gelten die Aussagen:

1. Q_1 und Q_2 sind jeweils in einem Punkt konzentriert.
2. $h^0(U, Q_1) = h^0(\hat{U}, Q_2) + k_1 + k_2 - 1$

Beweis. Es bezeichne E den exzeptionellen Divisor von f . Es gibt eine offene Umgebung

$$V \simeq \{(u, v, w) \in \mathbb{C}^3 \mid |u| < 1, |v| < 1, |w| < 1\}$$

um den Punkt $p = \hat{C}_1.E$ mit der Eigenschaft, dass $f|_V$ durch

$$(u, v, w) \mapsto (u, vw, w)$$

gegeben ist. Auf V gilt

$$I_E = (w), \quad I_{\hat{C}} = (u, v), \quad I_{\hat{D}_1} = (f^*(s_1)/w^{k_1}), \quad I_{\hat{D}_2} = (f^*(s_2)/w^{k_2}).$$

Die Abbildung $g = f|_{\hat{C}_1}$ ist ein Isomorphismus. Bei dem folgenden kommutativen Diagramm ist daher auch die erste Zeile exakt

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & g^*(I_{D_1} + I_{D_2})|_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & g^*N_{\hat{C}_1/U}^\vee & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (I_{\hat{D}_1} + I_{\hat{D}_2})|_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & N_{\hat{C}_1/\hat{U}}^\vee & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0, \end{array}$$

wobei wir unter leichtem Missbrauch der Notation $Q_1 = g^*Q_1$ schreiben. Das Diagramm induziert eine Abbildung $Q_1 \rightarrow Q_2$. Die ersten beiden Garben der exakten Sequenzen sind jeweils freie $\mathcal{O}_{\hat{C}_1}$ -Moduln. Durch trivialisieren erhalten wir das folgende kommutative Diagramm, bei dem die mittleren beiden Zeilen exakt sind und die Einträge in der ersten bzw. letzten Zeile Kern bzw. Kokern der jeweiligen vertikalen Pfeile sind

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ker(h_3) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{C}_1} \oplus \mathcal{O}_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{C}_1} \oplus \mathcal{O}_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & Q_1 \longrightarrow 0 \\ & & \left(\begin{array}{cc} w^{k_1} & 0 \\ 0 & w^{k_2} \end{array} \right) \downarrow & & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & w \end{array} \right) \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{C}_1} \oplus \mathcal{O}_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{C}_1} \oplus \mathcal{O}_{\hat{C}_1} & \longrightarrow & Q_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}_p^{k_1+k_2} & \longrightarrow & \mathbb{C}_p & \longrightarrow & \text{coker}(h_3) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Die Behauptung folgt nun mit dem Schlangenlemma und (zweimaliger Anwendung) der Tatsache, dass die Eulercharakteristik¹ einer exakten Sequenz gleich 0 ist. \square

Proposition 3.1.6. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine surjektiver Morphismus kompakter, komplexer Räume und $B \subset Y$ ein abgeschlossener, komplexer Unterraum, derart dass für $A = f^{-1}(B)$ die Restriktion $f|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow Y \setminus B$ ein Isomorphismus ist. Dann existiert eine exakte Sequenz der Gestalt:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^0(B, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(A, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(Y, \mathbb{C}) \rightarrow \\ \dots \\ \rightarrow H^k(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{C}) \oplus H^k(B, \mathbb{C}) \rightarrow H^k(A, \mathbb{C}) \rightarrow H^{k+1}(Y, \mathbb{C}) \rightarrow \end{aligned}$$

¹Diese bezeichnet hier die alternierende Summe der Dimensionen der Einträge der Sequenz.

Beweis. Die Aussage ist wohlbekannt und findet sich z.B. als Proposition 3.A.7 in der Arbeit [BK82]². Wegen deren schlechter Zugänglichkeit geben wir einen kurzen Hinweis auf den einfachen Beweis. Unter Berücksichtigung der Kompaktheit von X und Y erhalten wir aus [Bre97, Chapter II, 10.3] ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H_c^k(X \setminus A, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^k(X, \mathbb{C}) & \xrightarrow{i^*} & H^k(A, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(X \setminus A, \mathbb{C}) \\ \uparrow \simeq & & \uparrow f^* & & \uparrow (f|_A)^* & & \uparrow \simeq \\ H_c^k(Y \setminus B, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^k(Y, \mathbb{C}) & \xrightarrow{j^*} & H^k(B, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(Y \setminus B, \mathbb{C}) \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Die Abbildungen der langen exakten Sequenz definieren wir als

$$\begin{array}{ccc} H^k(Y, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^k(X, \mathbb{C}) \oplus H^k(B, \mathbb{C}) \\ u & \longmapsto & (f^*u, j^*u) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} H^k(X, \mathbb{C}) \oplus H^k(B, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^k(A, \mathbb{C}) \\ (v, w) & \longmapsto & i^*v - (f|_A)^*w. \end{array}$$

Der verbindende Homomorphismus ergibt sich als Komposition

$$\begin{array}{ccc} H^k(A, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H_c^{k+1}(X \setminus A, \mathbb{C}) \\ & & \updownarrow \simeq \\ & & H_c^{k+1}(Y \setminus B, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{k+1}(Y, \mathbb{C}). \end{array}$$

Die Exaktheit der resultierenden Sequenz zeigt man durch eine routinemäßige Diagrammjagd. \square

Es folgen zwei elementare Aussagen über die Invarianz der dritten Betti-zahl unter gewissen birationalen Transformationen. Diese ließen sich (leichter) auch mit Hilfe der Leray Spektralsequenz herleiten. Wir wählen einen in einem gewissen Sinn geometrischeren Ansatz über Proposition 3.1.6.

Lemma 3.1.7. *Seien S, T irreduzible, reduzierte, normale, kompakte komplexe Flächen und $f: S \rightarrow T$ eine bimeromorphe, holomorphe Abbildung. Dann ist*

$$b_3(S) = b_3(T).$$

²In der genannten Arbeit wird vorausgesetzt, dass $X \setminus A, Y \setminus B$ jeweils dicht in X, Y sind. Die resultierende Sequenz wird andernfalls weniger hilfreich, die Aussage über ihre Existenz bleibt aber richtig.

Beweis. Sei zunächst S zusätzlich als glatt vorausgesetzt. Wir setzen $E = \text{Exc}(f)$ und $F = f(E)$. Wir schreiben E_1, \dots, E_n für die irreduziblen Komponenten von E und bemerken, dass all diese Dimension 1 haben. Aus Proposition 3.1.6 erhalten wir eine exakte Sequenz

$$H^2(S, \mathbb{C}) \oplus H^2(F, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(E, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(T, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(S, \mathbb{C}) \oplus 0 \rightarrow 0.$$

Es ist $H^2(E, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^n H^2(E_i, \mathbb{C})$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} c_1(\mathcal{O}_S(E_i)) & & H^2(S, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^2(E, \mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \simeq \downarrow \\ [E_i] & & \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C} \cdot [E_i] & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^r H^2(E_i, \mathbb{C}), \end{array}$$

bei dem die Abbildungsmatrix der unteren horizontalen Abbildung bzgl. der natürlichen Basen gerade die Schnittmatrix $(E_i \cdot E_j)$ ist. Nach einem Ergebnis von Grauert ([Gra62, §4, Abschnitt 8, e]) ist diese Matrix negativ definit und hat insbesondere vollen Rang. Es folgt, dass die obere, horizontale Abbildung des Quadrates surjektiv ist und zusammen mit der exakten Sequenz folgt die Behauptung.

Sei nun S nicht mehr notwendigerweise glatt. Wir wählen eine Desingularisation $g: \hat{S} \rightarrow S$. Die bereits bewiesene Version des Lemmas lässt sich auf g und $f \circ g$ anwenden und wir erhalten

$$b_3(S) = b_3(\hat{S}) = b_3(T).$$

Das Lemma ist damit gezeigt. \square

Lemma 3.1.8. *Sei Y eine glatte, kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 3, $C \subset Y$ eine glatte rationale Kurve. Ist X die Aufblasung von Y in C , so ist $b_3(X) = b_3(Y)$.*

Beweis. Wir bezeichnen den exzeptionellen Divisor der Aufblasung mit E . Mit Proposition 3.1.6 erhalten wir unter Verwendung von $b_3(E) = 0$ die exakte Sequenz

$$H^2(X, \mathbb{C}) \oplus H^2(C, \mathbb{C}) \xrightarrow{\alpha} H^2(E, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(X, \mathbb{C}) \oplus 0 \rightarrow 0.$$

Der Vektorraum $H^2(E, \mathbb{C})$ wird von $c_1(\mathcal{O}_E(1))$ und $f^*c_1(\omega_C)$ erzeugt. Da $\mathcal{O}_X(-E)|_E = \mathcal{O}_E(1)$ ist, ist die Abbildung α surjektiv. Dies zeigt die Behauptung. \square

Lemma 3.1.9. *Sei C ein reduzierter, irreduzibler, kompakter komplexer Raum der Dimension 1. Dann gilt*

$$b_1(C) \leq 2 \cdot h^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Beweis. Es bezeichne $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ die Normalisierung, $S := \text{Sing}(C)$ und $R = \nu^{-1}(S)$. Wir definieren die Garbe Q durch die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Es gilt $\text{Supp}(Q) = S$ und für alle $x \in C$ gilt $|\nu^{-1}(x)| - 1 \leq h^0(x, Q_x)$. Sei, um die letzte Ungleichung zu erhalten,

$$\nu^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad \text{mit } n = |\nu^{-1}(x)|,$$

und seien $U_i \ni y_i$ paarweise disjunkte offene Mengen. Da ν eigentlich ist, gibt es eine offene Menge $U \ni x$ mit

$$\nu^{-1}(U) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Dann ist für jede offene Menge $x \in V \subset U$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(V) &= \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\nu^{-1}(V)) \rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ f &\mapsto (f(y_2) - f(y_1), \dots, f(y_n) - f(y_1)) \end{aligned}$$

surjektiv. Offensichtlicherweise erhalten wir durch Präkomposition mit der Abbildung $\mathcal{O}_C(V) \rightarrow \nu_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(V)$ die Nullabbildung, so dass wir – unter Verwendung der universellen Eigenschaft des Quotienten Q – eine surjektive Abbildung $Q_x \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ erhalten. Damit folgt wie gewünscht $h^0(x, Q) \geq n - 1$. Durch Aufsummieren über alle $x \in S$ erhalten wir

$$|R| - |S| \leq h^0(C, Q).$$

Die zur obigen Sequenz gehörige lange exakte Kohomologisequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \underbrace{H^0(C, \mathcal{O}_C)}_{\simeq \mathbb{C}} \rightarrow \underbrace{H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})}_{\simeq \mathbb{C}} \rightarrow H^0(C, Q) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \rightarrow H^1(C, Q) = 0 \end{aligned}$$

liefert

$$h^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) = h^1(C, \mathcal{O}_C) - h^0(C, Q) \leq h^1(C, \mathcal{O}_C) + |S| - |R|.$$

Außerdem erhalten wir mit Proposition 3.1.6 die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(\tilde{C}, \mathbb{C}) \oplus H^0(S, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(R, \mathbb{C}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\tilde{C}, \mathbb{C}) \oplus 0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

und es gilt daher

$$b_1(C) = b_1(\tilde{C}) + |R| - |S| - 1 + 1.$$

Da die Kurve \tilde{C} glatt ist, gilt $b_1(\tilde{C}) = 2 \cdot h^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ und wir erhalten insgesamt $b_1(C) = 2 \cdot h^1(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}) + |R| - |S| \leq 2 \cdot h^1(C, \mathcal{O}_C) + |S| - |R| \leq 2 \cdot h^1(C, \mathcal{O}_C)$.

□

Lemma 3.1.10. *Sei X eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 3, L ein Geradenbündel auf X derart, dass mit $s = h^0(X, L)$ die zugehörige Abbildung*

$$\Phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^{s-1}$$

die Mannigfaltigkeit X bimeromorph auf ein glattes $Y \subset \mathbb{P}^{s-1}$ abbildet und $\text{Bs}(L)$ keine divisorischen Komponenten hat. Dann gibt es eine nicht-leere Zariski-offene Teilmenge $U \subset |L|$ und für jedes $D_1 \in U$ eine nicht-leere Zariski-offene Teilmenge $V_{D_1} \subset |L|$ derart, dass für alle $D_2 \in V_{D_1}$ die folgenden Aussagen gelten ³:

1. $C_{D_1, D_2} = \Phi_*^{-1}(D_1^\# \cap D_2^\#)$ ist definiert und es ist

$$D_1 \cap D_2 = \Phi_*^{-1}(D_1^\# \cap D_2^\#) \cup \text{Bs}(L).$$

2. Es gilt $L \cdot C_{D_1, D_2} \geq \deg Y$ und falls Gleichheit gilt, ist

$$\text{Bs}(L) \cap C_{D_1, D_2} = \emptyset.$$

Beweis. Wir wählen eine Auflösung $g: Z \rightarrow X$ von Φ mit $g(\text{Exc}(g)) = \text{Bs}(L)$ und bezeichnen mit $f: Z \rightarrow Y \subset \mathbb{P}^{s-1}$ die induzierte holomorphe Abbildung.

$$\begin{array}{ccc} Z & & \\ g \downarrow & \searrow f & \\ X & \dashrightarrow \Phi & Y \subset \mathbb{P}^{s-1} \end{array}$$

Wir setzen

$$A = f(\text{Exc}(g)), \quad B = f(\text{Exc}(f))$$

und merken an, dass $\dim B \leq 1$ ist. Wir setzen weiter

$$U = \bigcap_{K \in \text{Komp}(A) \cup \text{Komp}(B)} \{D \in |L| \mid K \not\subset D^\#\}.$$

Dann ist U Zariski-offen und nicht leer. Wir fixieren $D_1 \in U$. Nach Definition von U sind $\dim(D_1^\# \cap A) \leq 1$, $\dim(D_1^\# \cap B) \leq 0$ und daher ist die Menge

$$\begin{aligned} V_{D_1} &:= \left\{ D \in |L| \mid \dim(D^\# \cap D_1^\# \cap A) \leq 0, D^\# \cap D_1^\# \cap B = \emptyset \right\} = \\ &= \bigcap_{K \in \text{Komp}(D_1^\# \cap A)} \{D \in |L| \mid K \not\subset D^\#\} \cap \bigcap_{x \in D_1^\# \cap B} \{D \in |L| \mid x \notin D^\#\} \end{aligned}$$

Zariski-offen und nicht-leer. Sei nun $D_2 \in V_{D_1}$. Wir setzen $l = D_1^\# \cdot D_2^\#$. Man sieht zunächst, dass keine irreduzible Komponente von l in $A \cup B$ enthalten

³Es sei hier noch einmal daran erinnert, dass wir für $D \in |L|$ den korrespondierenden Divisor in $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s-1}}(1)|$ mit $D^\#$ bezeichnen.

ist. Insbesondere ist $C_{D_1, D_2} = \Phi_*^{-1}l$ definiert und (rein) 1-dimensional. Man sieht weiter, dass keine Komponente von $\tilde{C} = f_*^{-1}l$ in $\text{Exc}(g)$ enthalten ist. Insbesondere ist $g|_{\tilde{C}}: \tilde{C} \rightarrow C_{D_1, D_2}$ birational.

Die Inklusion „ \supset “ der ersten Aussage gilt für alle $D_1, D_2 \in |L|$. Sei, um die umgekehrte Inklusion zu zeigen,

$$x \in D_1 \cap D_2 \setminus \text{Bs}(L).$$

Dann ist Φ in x definiert und $\Phi(x) \in l$. Nach Definition von V_{D_1} ist $\Phi(x) \notin B$ und daher ist die Abbildung Φ^{-1} in $\Phi(x)$ definiert und sogar ein lokaler Isomorphismus. Lokal um x ist daher

$$D_1 \cap D_2 = \Phi_*^{-1}l.$$

Insbesondere ist $x \in C_{D_1, D_2} = \Phi_*^{-1}l$. Dies zeigt die erste Behauptung.

Für die zweite Behauptung sei E der effektive Divisor auf \tilde{X} mit

$$f^* \mathcal{O}_Y(1) = g^*L - E.$$

Dann gilt, da $g|_{\tilde{C}}, f|_{\tilde{C}}$ birational sind,

$$\begin{aligned} L.C_{D_1, D_2} &= g^*L.\tilde{C} = (f^* \mathcal{O}_Y(1) + E).\tilde{C} = \\ &= \mathcal{O}_Y(1).l + E.\tilde{C} = \deg(Y) + E.\tilde{C} \geq \deg(Y) \end{aligned}$$

und wenn Gleichheit gilt, so ist $E.\tilde{C} = 0$. Es folgt $\text{Exc}(g) \cap \tilde{C} = \emptyset$. Daraus folgt

$$\text{Bs}(L) \cap C_{D_1, D_2} = \emptyset,$$

weil $\text{Bs}(L) \subset g(\text{Exc}(g))$ ist und g zusammenhängende Fasern hat. \square

Die Idee für den Beweis des folgenden Lemmas findet sich im Wesentlichen schon im Beweis zu [Nak96, Lemma 4.7].

Lemma 3.1.11. *Seien X, Y kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension 3,*

$$f: X \rightarrow Y$$

eine bimeromorphe, holomorphe Abbildung, $E \not\subset \text{Exc}(f)$ ein glatter, irreduzibler Divisor. Ist $C \subset f(E) \cap f(\text{Exc}(f))$ eine irreduzible Kurve mit

$$C \not\subset f(\text{Exc}(f|_E)),$$

so gibt es genau einen irreduziblen Divisor $\Delta \subset \text{Exc}(f)$ mit

$$D := (f|_E)_*^{-1}(C) \subset \Delta.$$

Es gilt $\Delta \cap E \subset D \cup \text{Exc}(f|_E)$ und außerhalb von $\text{Exc}(f|_E)$ gilt

$$I_{\Delta, X|_E} = I_{D, E}, \tag{3.1.3}$$

d.h. Δ und E schneiden sich generisch entlang D transversal. Ist darüberhinaus, mit $H := f(E)$, über dem allgemeinen Punkt von C

$$f^* \mathcal{O}_Y(H) \simeq \mathcal{O}_X(E + \Delta), \quad (3.1.4)$$

so entspricht f im allgemeinen Punkt von C der Aufblasung von Y in C .

Beweis. Da die Fasern von f zusammenhängend sind, ist $D \subset \text{Exc}(f)$. Sei Δ' zunächst ein reduzierter Divisor mit $D \subset \Delta'$ und $f(\Delta') = C$. Ist $D' \subset \Delta' \cap E$ eine irreduzible Kurve mit $D' \not\subset \text{Exc}(f|_E)$, so ist $f(D') \subset f(\Delta')$. Also ist $f(D') = C$ und damit $D' = D$. Dies zeigt

$$\Delta' \cap E \subset D \cup \text{Exc}(f|_E).$$

Die Inklusion „ \subset “ in Gleichung (3.1.3) (mit Δ ersetzt durch Δ') ist offensichtlich erfüllt, da D reduziert ist und $D \subset \Delta'$. Sei, um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, $x \in D \setminus \text{Exc}(f|_E)$ und $s \in (I_{D,E})_x$. Da $f|_E$ in x ein lokaler Isomorphismus ist, gibt es nach Definition von D ein $t \in (I_{C,H})_{f(x)}$ mit

$$(f|_E)^*(t) = s.$$

Sei nun $u \in (I_{C,Y})_{f(x)}$ ein Repräsentant von t . Dann ist $f^*u \in (I_{\Delta',X})_x$, da Δ' reduziert ist und $f(\Delta') \subset C$. Es ist also

$$s = (f|_E)^*(t) = f^*(u)|_E \in (I_{\Delta',X|_E})_x$$

und dies zeigt die Inklusion „ \supset “. Aus Gleichung (3.1.3) folgt, dass Δ' im allgemeinen Punkt von D glatt ist und daher gibt es insbesondere nur einen irreduziblen, exzeptionellen Divisor $\Delta \supset D$. Die Voraussetzung 3.1.4 impliziert, dass es einen abgeschlossenen, komplexen Unterraum $C \not\subset A \subset f(\text{Exc}(f))$ mit $\dim A \leq 1$ derart gibt, dass, mit $U = Y \setminus A$,

$$(f|_{f^{-1}(U)})^* \mathcal{O}_Y(H)|_U \simeq \mathcal{O}_X(E + \Delta)|_{f^{-1}(U)} \quad (3.1.5)$$

ist. Wir setzen $G = f^*H - E - \Delta$. Dann ist $G \geq 0$ und $\text{Supp}(G) \subset \text{Exc}(f)$. Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} H^0(f^{-1}(U), I_{G,X}) &\subset H^0(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \subset H^0(X \setminus \text{Exc}(f), \mathcal{O}_X) \\ &\simeq H^0(Y \setminus f(\text{Exc}(f)), \mathcal{O}_Y) \\ &\simeq H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \end{aligned}$$

und andererseits ist nach (3.1.5) $H^0(f^{-1}(U), I_{G,X}) \simeq H^0(f^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$. Es folgt, dass $1 \in H^0(f^{-1}(U), I_{G,X})$ ist. Also ist $(I_{G,X})|_{f^{-1}(U)} = \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}$ und daraus folgt

$$f^{-1}((I_{H,Y})|_U) = (I_{E+\Delta,X})|_{f^{-1}(U)}. \quad (3.1.6)$$

Insbesondere zeigt dies, dass Δ der einzige exzeptionelle Divisor mit $f(\Delta) = C$ ist. Wir setzen

$$V = U \setminus \left(f(\text{Exc}(f|_E)) \cup \bigcup_{\Delta \neq F \in \text{Komp}(\text{Exc}(f))} f(F) \right).$$

Dann ist $C \cap V \neq \emptyset$ und wir zeigen:

Behauptung 1. $(f^{-1}I_{C,Y})|_{f^{-1}(V)} = (I_{\Delta,X})|_{f^{-1}(V)}$.

Die Inklusion $f^{-1}(I_{C,Y}) \subset I_{\Delta,X}$ gilt sogar global, da Δ reduziert ist und $f(\Delta) \subset C$. Sei, um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, $x \in f^{-1}(V)$. Wir unterscheiden drei Fälle.

$x \notin \Delta$: Nach Wahl von V ist $x \notin \text{Exc}(f)$. Also ist f lokal in x ein Isomorphismus. Da die Fasern von f zusammenhängend sind, gilt $f^{-1}(C) \subset \text{Exc}(f)$ und daher ist $f(x) \notin C$. Wir haben also

$$(I_{C,Y})_{f(x)} = \mathcal{O}_{Y,f(x)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{X,x} = (I_{\Delta,X})_x.$$

$x \in \Delta \setminus \mathbf{E}$: Dann ist $(I_{\Delta,x})_x = (I_{E+\Delta,X})_x$ und unter Verwendung von (3.1.6) und der Inklusion $C \subset H$ erhalten wir

$$(I_{\Delta,X})_x = (I_{E+\Delta,X})_x = (f^{-1}I_{H,Y})_x \subset (f^{-1}I_{C,Y})_x$$

$x \in \Delta \cap \mathbf{E}$: Sei $s \in (I_{\Delta,X})_x$. Da $x \notin \text{Exc}(f|_E)$ ist, ist $s|_E \in (I_{D,E})_x$ nach (3.1.3) und $f|_E$ ist lokal in x ein Isomorphismus. Es gibt daher $t \in (I_{C,H})_{f(x)}$ mit der Eigenschaft, dass $s|_E = (f|_E)^*t$ ist. Sei $u \in (I_{C,Y})_{f(x)}$ ein Repräsentant von t . Dann ist $(s - f^*u)|_E = s|_E - s|_E = 0$ und $f^*u \in (I_{\Delta,X})_x$. Daher ist

$$s - f^*u \in (I_{E,X} \cap I_{\Delta,X})_x = (I_{E+\Delta,X})_x = (f^{-1}I_H)_x \subset (f^{-1}I_{C,Y})_x$$

und damit ist $s \in (f^{-1}I_{C,Y})_x$.

Es ist wohlbekannt (siehe [Fis76, 4.1, Theorem]), dass aus Behauptung 1 folgt, dass $f|_{f^{-1}(V)}$ durch die Aufblasung von V in $V \cap C$ faktorisiert. Wir setzen $W = V \setminus \text{Sing}(C)$, schreiben

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(W) & & \\ \downarrow f|_{f^{-1}(W)} & \searrow g & \\ & & Z \\ & \swarrow h & \\ W & & \end{array}$$

für die Einschränkung der Faktorisierung und behaupten, dass g ein Isomorphismus ist. Da $W \cap C$ glatt ist, ist Z glatt. Da auch $f^{-1}(W)$ glatt ist, ist $\text{Exc}(g)$ divisoriell und $g(\text{Exc}(g))$ hat mindestens Kodimension 2 in Z . Wir setzen $\Delta' = \text{Exc}(h)$ und $\Delta'' = \text{Exc}(f) \cap f^{-1}(W) = \Delta \cap f^{-1}(W)$. Es ist $Z \setminus \Delta' \subset g(f^{-1}(W))$ und da g eigentlich ist, gilt tatsächlich $Z \subset g(f^{-1}(W))$, also $Z = g(f^{-1}(W))$. Notwendigerweise ist $\Delta' = g(\Delta'')$. Es ist

$$\text{Exc}(g) \subset \Delta''$$

und Δ'' ist irreduzibel. Also ist entweder $\text{Exc}(g) = \emptyset$ oder $\text{Exc}(g) = \Delta''$. Da aber $\text{codim}_{\Delta'}(Z) = 1$ ist und $g(\Delta'') = \Delta'$, ist $\Delta'' \not\subset \text{Exc}(g)$. Es folgt, dass $\text{Exc}(g) = \emptyset$ ist. Also ist wie behauptet g ein Isomorphismus. \square

In Ermangelung einer Referenz geben wir den Beweis des folgenden elementaren Lemmas:

Lemma 3.1.12. *Seien C, D irreduzible, reduzierte kompakte komplexe Räume der Dimension 1 und sei $f: C \rightarrow D$ eine surjektive (also endliche) holomorphe Abbildung vom Grad 1. Ist D glatt, so ist f biholomorph. Insbesondere ist C glatt.*

Beweis. Es bezeichne $\nu: \tilde{C} \rightarrow C$ die Normalisierung von C . Wir setzen $g = f \circ \nu$. Dann ist g ein birationaler Morphismus glatter Kurven.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \xrightarrow{\nu} & C & \xrightarrow{f} & D \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & g & \end{array}$$

Glatte komplexe Kurven sind projektiv algebraisch und aus [Har77, Chapter V, Lemma 5.1] folgt, dass g ein Isomorphismus ist.

Wir zeigen nun, dass die holomorphe Abbildung $\nu \circ g^{-1}$ invers zu f ist. Es gilt zum Einen

$$f \circ (\nu \circ g^{-1}) = (f \circ \nu) \circ g^{-1} = \text{id}_D.$$

Zum Anderen gilt

$$((\nu \circ g^{-1}) \circ f) \circ \nu = \nu \circ (g^{-1} \circ (f \circ \nu)) = \nu \circ \text{id}_C = \text{id}_C \circ \nu$$

und da ν surjektiv ist, folgt $(\nu \circ g^{-1}) \circ f = \text{id}_C$. \square

Lemma 3.1.13. *Sei S eine glatte (zusammenhängende) Fläche, C eine irreduzible Kurve,*

$$f: S \rightarrow C$$

eine holomorphe Abbildung, $C_1 \subset C$ eine irreduzible Kurve mit

$$f(C_1) = C.$$

Dann gibt es eine endliche Menge $M \subset C$ derart, dass es durch jeden Punkt $p \in S \setminus f^{-1}(M)$ genau eine irreduzible Kurve gibt, die von f kontrahiert wird und jede solche Kurve schneidet C_1 (und ist glatt). Mit anderen Worten: über jedem Punkt $q \in S$ ist die f -Faser eine disjunkte Vereinigung glatter Kurven und jede dieser Kurven schneidet C_1 .

Sei D eine weitere irreduzible Kurve,

$$g: S \rightarrow D$$

eine holomorphe Abbildung, die C_1 kontrahiert. Dann gibt es eine endliche Menge $N \subset D$ derart, dass für jedes $p \in D \setminus N$ und jede irreduzible Kurve $F \subset g^{-1}(p)$ gilt:

$$f(F) = C.$$

Beweis. Sei $S \xrightarrow{f_1} C' \xrightarrow{f_2} C$ die Steinfaktorisierung von f . Da S irreduzibel ist und f_1 surjektiv, ist C' irreduzibel. Es folgt, dass $f_1(C_1) = C'$ ist. Wir können also o.E. annehmen, dass die Fasern von f zusammenhängend sind. Es gibt eine endliche Menge $M \subset C$ derart, dass $f|_{S \setminus f^{-1}(M)}$ eine glatte Abbildung ist. Die erste Behauptung folgt nun leicht.

Wir definieren, um die zweite Behauptung zu zeigen, die Mengen

$$A = \{C \subset f^{-1}(M) \text{ irreduzible Kurve} \mid g(C) \neq D\},$$

$$B = \bigcup_{C \in A} g(C), \quad N = B \cup g(C_1).$$

Die Menge N ist endlich, da B und $g(C_1)$ endlich sind. Sei $p \in D \setminus N$ und $F \subset g^{-1}(p)$ eine irreduzible Kurve. Wir wollen $f(F) = C$ zeigen. Angenommen dies gilt nicht, d.h. f kontrahiert F . Wenn $f(F) \subset M$ ist, so ist $F \in A$ und wir erhalten den Widerspruch

$$p \in g(F) \subset B \subset N.$$

Also ist $f(F) \not\subset M$ und mit dem ersten Teil des Lemmas folgt $F \cap C_1 \neq \emptyset$. Daraus folgt der Widerspruch

$$\{p\} = g(C_1) \subset N.$$

Also ist wie behauptet $f(F) = C$. □

Das folgende Lemma ist wohlbekannt (siehe z.B. [Sha99, Tabelle 12.2])

Lemma 3.1.14. *Sei X eine Fano Mannigfaltigkeit vom Typ V_2 . Dann ist $b_3(X) = 20$.*

Beweis. Auf der projektiven Mannigfaltigkeit X gilt die Hodge-Zerlegung. Wir haben daher

$$b_3(X) = 2(h^{3,0}(X) + h^{2,1}(X)).$$

Da $-K_X$ ample ist, gilt $h^{3,0}(X) = h^0(X, K_X) = 0$. Es bleibt also

$$h^{2,1}(X) = h^{1,2}(X) = h^2(X, \Omega_X^1) = 10$$

zu zeigen. Nach Iskovskikh's Klassifikation gibt es eine holomorphe Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{P}^3$$

mit der Eigenschaft, dass es eine glatte Quartik $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$ derart gibt, dass $f|_{f^{-1}(\mathbb{P}^3 \setminus D)}$ eine zweifache, unverzweigte Überlagerung ist. Es ist wohlbekannt (siehe z.B. [Laz80, Lemma 1.1]), dass es daher ein Geradenbündel $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)$ mit der Eigenschaft gibt, dass

$$f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus L^{-1}$$

ist. Sei $s \in H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4))$ ein Schnitt, der D definiert, $p: Z \rightarrow \mathbb{P}^3$ der Totalraum von L und $t \in H^0(Z, p^*L)$ der tautologische Schnitt ($t(z) = z$). Dann können wir X mit dem Divisor

$$(t^{\otimes 2} - p^*s = 0) \subset Z$$

identifizieren. Da f eine endliche Abbildung ist, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle lokal-freien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ -Moduln F

$$H^k(X, f^*F) = H^k(\mathbb{P}^3, F \otimes f_*\mathcal{O}_X) = H^k(\mathbb{P}^3, F \oplus F \otimes L^{-1}). \quad (3.1.7)$$

Insbesondere ist für alle $k \in \{1, 2\}$ und alle Geradenbündel L auf \mathbb{P}^3

$$H^k(X, f^*L) = 0. \quad (3.1.8)$$

Wir haben die exakte Sequenz von lokal-freien \mathcal{O}_X -Moduln

$$0 \rightarrow N_{X/Z}^\vee \rightarrow \Omega_{Z|X}^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow 0.$$

Es ist $N_{X/Z}^\vee = (p^*L^{-2})|_X = f^*L^{-2}$ und wir werden

$$H^2(X, \Omega_{Z|X}^1) \stackrel{\alpha}{=} 0, \quad H^3(X, \Omega_X^1) \stackrel{\beta}{=} 0$$

zeigen, so dass wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^2(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^3(X, f^*L^{-2}) \rightarrow H^3(X, \Omega_{Z|X}^1) \rightarrow 0$$

erhalten. Die Behauptung des Lemmas folgt aus

$$h^3(X, f^*L^{-2}) \stackrel{\gamma}{=} 11, \quad h^3(X, \Omega_{Z|X}^1) \stackrel{\delta}{=} 1.$$

Es bleiben die Behauptungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu zeigen. Es ist

$$h^3(X, \Omega_X^1) \stackrel{Hodge}{=} h^1(X, \omega_X) \stackrel{Serre}{=} h^2(X, \mathcal{O}_X) \stackrel{(3.1.8)}{=} 0.$$

Dies zeigt β . Es ist

$$h^3(X, f^*L^{-2}) \stackrel{(3.1.7)}{=} h^3(\mathbb{P}^3, L^{-2} \oplus L^{-3}) \stackrel{Serre}{=} h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus L) = 11.$$

Dies zeigt γ . Um α, δ zu zeigen, betrachten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow p^*\Omega_{\mathbb{P}^3}^1 \rightarrow \Omega_Z^1 \rightarrow p^*L^{-1} \rightarrow 0.$$

Da alle dort auftretenden \mathcal{O}_Z -Moduln lokal-frei sind, ist auch die auf X zurückgezogene Sequenz

$$0 \rightarrow f^*\Omega_{\mathbb{P}^3}^1 \rightarrow \Omega_{Z|X}^1 \rightarrow f^*L^{-1} \rightarrow 0$$

exakt. Unter Zuhilfenahme der Eulersequenz zeigt man leicht, dass für $k \geq 2$

$$h^k(X, f^*\Omega_{\mathbb{P}^3}^1) \stackrel{(3.1.7)}{=} h^k(\mathbb{P}^3, \Omega_{\mathbb{P}^3}^1 \oplus \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(-2)) = 0$$

ist und es folgt $h^k(X, \Omega_{Z|X}^1) = h^k(X, f^*L^{-1})$ für $k = 2, 3$. Es ist

$$h^k(X, f^*L^{-1}) = h^k(\mathbb{P}^3, L^{-1} \oplus L^{-2}) = h^{3-k}(\mathbb{P}^3, L^{-1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}).$$

Dies zeigt α und δ . □

3.2 Globale Deformationen von Fano Mannigfaltigkeiten mit Picardzahl 1

Wir sammeln im Folgenden einige grundlegende und elementare Eigenschaften globaler Deformationen. Diese sind dem Experten wohlbekannt und finden sich z.B. auch in [Pet89]. Wir zeigen außerdem die globale Stabilität der Fano Eigenschaft für den Durchschnitt zweier Quadriken und reduzieren den Beweis für V_2 auf zwei Hilfsresultate (Satz 3.2.6, Satz 3.2.7), die auch isoliert betrachtet von gewissem Interesse sind.

Im ersten Teil des Abschnitts machen wir die folgende Voraussetzung.

Voraussetzung 3.2.1. *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 4, $p: X \rightarrow \Delta$ eine eigentliche, submersive, holomorphe Abbildung mit zusammenhängenden Fasern und der Eigenschaft, dass für $t \in \Delta \setminus \{0\}$ die Fasern X_t Fano Mannigfaltigkeiten mit Picardzahl 1 sind.*

Lemma–Definition 3.2.2. *Es gelte Voraussetzung 3.2.1. Dann ist*

1. X_0 Moishezon,
2. $H^k(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$ für alle $k > 1$,
3. $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_t)$ ein Isomorphismus für alle $t \in \Delta$ und

4. $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Wir bezeichnen mit $L \in \text{Pic}(X)$ einen Erzeuger, dessen Rückzug $L_t = L|_{X_t}$ für ein $t \in \Delta^\times$ der ample Erzeuger von $\text{Pic}(X_t)$ ist. Dann ist tatsächlich für alle $t \in \Delta^\times$ der Rückzug L_t der ample Erzeuger von $\text{Pic}(X_t)$ und ein (positives) Vielfaches von L_0 ist effektiv. Für alle $t \in \Delta$ ist $L_0^3 = L_t^3$.

Beweis. Die Abbildung p ist submersiv und liefert daher für alle $t \in \Delta$ einen nirgends verschwindenden globalen Schnitt von $N_{X_t/X}^\vee$. Das Konormalenbündel ist daher trivial und die Adjunktionsformel ergibt

$$K_{X_t} = (K_X + X_t)|_{X_t} = K_X|_{X_t}.$$

Für $t \neq 0$ ist $-K_{X_t}$ ample und daher gibt es $C > 0$ (nur abhängig von $-K_{X_t}^3$ und daher unabhängig von t) mit der Eigenschaft, dass

$$h^0(X_t, -kK_{X_t}) \geq C \cdot k^3$$

ist. Aus dem Halbstetigkeitssatz folgt, dass für t nahe 0

$$h^0(X_0, -kK_{X_0}) \geq h^0(X_t, -kK_X|_{X_t}) = h^0(X_t, -kK_{X_t}) \geq C \cdot k^3$$

ist. Es folgt z.B. aus [MM07, Lemma 2.2.6], dass für genügend großes k die von $|-kK_{X_0}|$ induzierte Abbildung bimeromorph ist. Also ist X_0 Moishezon. Insbesondere gilt auf X_0 die Hodge-Zerlegung (siehe z.B. [MM07, Theorem 2.2.18]). Für $t \neq 0$, $k > 0$ folgt $H^k(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ aus dem Kodairaschen Verschwindungssatz. Daher ist $H^1(X_t, \mathbb{C}) = 0$ und daher nach dem Satz von Ehresmann auch $H^1(X_0, \mathbb{C}) = 0$.

Da auf X_0 die Hodge Zerlegung gilt, folgt $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$. Für $t \neq 0$ ist $\rho(X_t) = 1$ und daher ist $H^2(X_t, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Also ist $H^2(X_0, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ und wieder aus der Hodge-Zerlegung für X_0 folgt $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$. Es ist $H^0(X_0, K_{X_0}) = 0$, da $h^0(X_0, -mK_{X_0}) > 1$ ist für große m und X_0 irreduzibel ist. Serre Dualität liefert also $H^3(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$.

Aus $H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ bzw. $H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t}) = 0$ für alle $t \in \Delta$ folgt nach dem Grauert'schen Stetigkeitssatz (siehe z.B. [BS76, Theorem 4.12 (ii)]) $R^1 p_* \mathcal{O}_X = 0$ bzw. $R^2 p_* \mathcal{O}_X = 0$. Der \mathcal{O}_Δ -Modul $p_* \mathcal{O}_X$ ist kohärent, da p eigentlich ist. Wir haben daher $H^k(\Delta, p_* \mathcal{O}_X) = 0$ für $k > 0$. Die Leray Spektralsequenz liefert unter Zuhilfenahme der obigen Ergebnisse

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0, \quad H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Für alle $t \in \Delta$ erhalten wir aus den Exponentialsequenzen für X und X_t ein

kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overbrace{H^1(X, \mathcal{O}_X)}^{=0} & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \overbrace{H^2(X, \mathcal{O}_X)}^{=0} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \\
 \underbrace{H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t})}_{=0} & \longrightarrow & H^1(X_t, \mathcal{O}_{X_t}^*) & \longrightarrow & H^2(X_t, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \underbrace{H^2(X_t, \mathcal{O}_{X_t})}_{=0}
 \end{array}$$

Dabei ist die Abbildung α ein Isomorphismus, da X_t Deformationsretrakt von X ist. Sei nun $L \in \text{Pic}(X)$ ein Erzeuger mit der Eigenschaft, dass für ein $t \in \Delta^\times$ der Rückzug L_t ample ist. Die Menge

$$A = \{t \in \Delta^\times \mid L_t \text{ ist ample}\}.$$

ist offen. Da für $t \neq 0$ ein nicht-triviales Geradenbündel auf X_t genau dann nicht ample ist, wenn sein Inverses ample ist, ist auch $\Delta^\times \setminus A$ offen. Nach Wahl von L ist A nicht leer und deshalb ist tatsächlich $A = \Delta^\times$. Aus dem Halbstetigkeitssatz folgt, dass $h^0(X_0, mL_0) > 0$ ist für große m und wegen der Invarianz der Eulercharakteristiken $\chi(X_t, mL_t)$ ist $L_0^3 = L_t^3$. \square

Der Beweis des folgenden Lemmas ist [Pet89] entnommen, wenn auch mit einigen notationellen Änderungen.

Lemma 3.2.3. *Es gelte Voraussetzung 3.2.1 und L sei wie in Lemma 3.2.2. Dann gibt es nur endlich viele Kurven $C \subset X_0$ mit $L.C \leq 0$.*

Beweis. Nach einem Resultat von B.G. Moishezon ([Moi74], [Hir75]) gibt es eine projektive Mannigfaltigkeit Y und eine bimerorphe, holomorphe Abbildung $f: Y \rightarrow X_0$. Der Satz von Bertini garantiert die Existenz eines irreduziblen, reduzierten Divisors $A \subset Y$, $A \not\subset \text{Exc}(f)$, dessen zugehöriges Geradenbündel $\mathcal{O}_Y(A)$ (sehr) ample ist. Dann ist $B = f(A)$ ein irreduzibler Cartierdivisor, da X_0 glatt ist. Es gibt einen effektiven Divisor $E \subset Y$ mit der Eigenschaft, dass

$$f^*B - E = A$$

ist. Da $\text{Pic}(X_0) = \mathbb{Z}L_0$ ist, gibt es $m \in \mathbb{Z}$ derart, dass

$$\mathcal{O}_{X_0}(B) = mL$$

ist. Da ein positives Vielfaches von L_0 effektiv ist, gilt $m > 0$. Sei nun $C \subset X_0$ eine irreduzible Kurve, die nicht in $f(\text{Exc}(f))$ enthalten ist. Dann gibt es eine irreduzible Kurve $\tilde{C} = f_*^{-1}(C) \subset Y$, die von f birational auf C abgebildet wird und es gilt

$$mL.C = B.C = f^*B.\tilde{C} = (A + E).C > 0,$$

wobei die Ungleichung gilt, da A ample ist, E effektiv und $\tilde{C} \not\subset \text{Supp}(E)$. Aus $m > 0$ folgt, dass $L.C > 0$ ist. Die Behauptung folgt aus der Tatsache, dass $f(\text{Exc}(f))$ höchstens 1-dimensional ist. \square

Wir merken noch an, dass es für $t \in \Delta^\times$ keine irreduzible Kurve $C \subset X_t$ mit $L.C \leq 0$ gibt, da $L|_{X_t}$ für diese t ample ist. Die Deformationstheorie glatter rationaler Kurven liefert uns dann zusammen mit $\dim X = 4$ das folgende Resultat.

Lemma 3.2.4. *Es gelte Voraussetzung 3.2.1 und L sei wie in Lemma 3.2.2. Dann gibt es keine glatte rationale Kurve $C \subset X_0$ mit $L.C = 0$.*

Beweis. Angenommen wir haben eine solche glatte rationale Kurve $C \subset X_0$ mit $L.C = 0$. Sei \mathcal{D} der Douady Raum von X und $Z \subset X \times \mathcal{D}$ die universelle Familie. Für einen kompakten komplexen Unterraum $A \subset X$ bezeichnen wir den zugehörigen Punkt in \mathcal{D} mit $[A]$. Nach [Kol96, Theorem 1.14]⁴ gilt für die lokale Dimension von \mathcal{D} im Punkt $[C]$

$$\dim_{[C]} \mathcal{D} \geq -K_X.C + (\dim X - 3) \cdot \chi(C, \mathcal{O}_C) = 1.$$

Es folgt, dass es eine irreduzible Komponente von \mathcal{D} durch den Punkt $[C]$ gibt, die unendlich viele (irreduzible, reduzierte) Kurven in X parametrisiert. Für jede solche Kurve D gilt $L.D = 0$. Aus der Vorbemerkung zum Lemma folgt, dass all diese in X_0 enthalten sind. Ein Widerspruch zu Lemma 3.2.3. \square

Aus diesem Lemma können wir leicht das folgenden Projektivitätskriterium ableiten.

Lemma 3.2.5. *Es gelte Voraussetzung 3.2.1. Ist dann das Geradenbündel $-K_{X_0}$ global erzeugt, so ist es tatsächlich ample.*

Beweis. Wir bezeichnen die vom Linearsystem $|-K_{X_0}|$ induzierte, holomorphe Abbildung mit f und mit Y deren Bild. Für die Stein-Faktorisierung von f verwenden wir die Bezeichnungen aus dem folgenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & \nearrow h & \downarrow g \\ X_0 & \xrightarrow{f} & Y \subset \mathbb{P}^n \end{array}$$

Da g endlich ist, folgt aus der Projektivität von Y die von Z . Das Ziel ist es nun mittels des vorangehenden Lemmas zu zeigen, dass h ein Isomorphismus ist, indem man zeigt, dass andernfalls eine glatte rationale Kurve $C \subset X_0$ mit $-K_{X_0}.C = 0$ existiert.

⁴Das Theorem ist für Schemata formuliert, gilt aber auch für komplexe Räume (siehe auch [Kol96, Remark 1.17]).

Wir nehmen also an, dass h kein Isomorphismus ist. Da X_0 normal, ist auch Z normal (siehe [GR84, Chap. 10, Par. 6, Sec. 1]). Die Fasern von h sind zusammenhängend. Hat ein Punkt $z \in Z$ nur einen Urbildpunkt $x \in X_0$, so ist h in x ein Isomorphismus. Außerdem kontrahiert f , und damit auch g , keine Divisoren, da $\text{Pic}(X_0) \simeq \mathbb{Z}$ ist. Also ist $\dim h(\text{Exc}(h)) = 0$ und $\text{Exc}(h)$ ist rein 1-dimensional.

Sei $z \in h(\text{Exc}(h))$ und $C \subset h^{-1}(z)$ eine irreduzible, reduzierte Kurve. Nach Definition von f gilt $-K_{X_0} \cdot C = 0$. Wir schließen den Beweis ab, indem wir zeigen, dass C eine glatte, rationale Kurve ist. Für $\tilde{L} := g^* \mathcal{O}_Y(-1)$ gilt

$$\omega_{X_0} = f^* \mathcal{O}_Y(-1) = h^* \tilde{L}.$$

Die Menge $h^{-1}(z)$ ist exzeptionell im Sinne von [Gra62, Definition 3]. Deshalb existiert nach Satz 3 derselben Arbeit eine strikt-pseudokonvexe Umgebung $U \supset f^{-1}(z)$ derart, dass $f^{-1}(z)$ deren maximale kompakte Teilmenge ist. Die Einschränkung $h|_U$ ist die holomorphe Reduktion von U im Sinne von [Gra62, Definition 1]. Nach [GR70, Satz 2.4] haben wir deshalb

$$R^1 h_* \omega_U = 0.$$

Die Projektionsformel liefert dann

$$0 = R^1 h_* \omega_U = R^1 h_*(h^* \tilde{L})|_U = \tilde{L}|_{h(U)} \otimes R^1 h_* \mathcal{O}_U,$$

woraus wiederum $R^1 h_* \mathcal{O}_U = 0$ folgt, da \tilde{L} ein Geradenbündel ist. Insbesondere haben wir $(R^1 h_* \mathcal{O}_U)_p = 0$ und da h eigentlich ist, folgt (z.B. aus [Ive86, Theorem III.6.2]) $H^1(h^{-1}(z), \mathcal{O}_{h^{-1}(z)}) = 0$. Deshalb ist auch $H^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ und es folgt, dass C glatt und rational ist. \square

Um also Satz 1.2.2 zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass L_0 (und damit $-K_{X_0}$) global erzeugt ist. Falls dies nicht der Fall ist, so sagt uns [Kol91, Theorem (5.3.12)], dass die von $|L_0|$ induzierte Abbildung X_0 bimeromorph auf entweder den projektiven Raum \mathbb{P}^3 oder die 3-dimensionale Quadrik $Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ abbildet. Aus dem Satz von Ehresmann folgt, dass für jedes $t \in \Delta$ die Fasern X_t und X_0 diffeomorph sind. Insbesondere gilt (siehe Lemma 3.1.14) für die dritte Bettizahl von X_0

$$b_3(X_0) = 20.$$

Der Beweis von Satz 1.2.2 ist also abgeschlossen, wenn wir die folgenden beiden Aussagen zeigen können.

Satz 3.2.6. *Sei X eine kompakte Moishezon Mannigfaltigkeit der Dimension 3 derart, dass $L \in \text{Pic}(X)$ existiert mit*

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}L \quad K_X = -2L \quad L^3 = 2 \quad h^0(X, L) = 4.$$

Es gebe keine glatte rationale Kurve $C \subset X$ mit $L \cdot C = 0$ und L sei nicht global erzeugt. Dann ist

$$b_3(X) \leq 12.$$

Satz 3.2.7. *Sei X eine kompakte Moishezon Mannigfaltigkeit der Dimension 3 derart, dass $L \in \text{Pic}(X)$ existiert mit*

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}L \quad K_X = -2L \quad L^3 = 2 \quad h^0(X, L) = 5.$$

Dann ist

$$b_3(X) \leq 6.$$

Wir geben noch einige allgemeine Resultate über derartige Moishezon Mannigfaltigkeiten an. All diese finden sich auch in [Kol91], [Nak96] – aber nur für die nicht-trivialen geben wir eine explizite Referenz. Für den Rest dieses Abschnittes machen wir die folgende Voraussetzung.

Voraussetzung 3.2.8. *Sei X eine Moishezon Mannigfaltigkeit der Dimension 3, $L \in \text{Pic}(X)$ mit*

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}L \quad K_X = -2L \quad L^3 = 2 \quad h^0(X, L) > 0.$$

Wir setzen $s = h^0(X, L)$. Für die von $|L|$ induzierte meromorphe Abbildung schreiben wir

$$\Phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee) \simeq \mathbb{P}^{s-1}$$

Die ersten beiden Aussagen des folgenden Lemmas finden sich in [Kol91, Corollary 5.3.9, Corollary 5.3.10].

Lemma 3.2.9. *Es gelte Voraussetzung 3.2.8. Dann gilt*

$$\begin{aligned} h^0(X, kL) = 0, k < 0 & \quad h^3(X, kL) = 0, k > -2 \\ h^1(X, kL) = 0, k \leq 0 & \quad h^2(X, kL) = 0, k \geq -2 \end{aligned}$$

sowie

$$\chi(X, kL) = 2 \cdot \frac{1}{6}k(k+1)(k+2) + k + 1.$$

Jeder Divisor $D \in |L|$ ist irreduzibel und reduziert. Für verschiedene $D_1, D_2 \in |L|$ mit $C := D_1 \cdot D_2$ eine zusammenhängende, Gorensteinsche Kurve mit

$$h^1(C, \mathcal{O}_C) = 1, \quad \omega_C \simeq \mathcal{O}_C, \quad L \cdot C = L^3 = 2.$$

(Man beachte, dass die Spalten der ersten Aussage nach Serre-Dualität äquivalent sind und nur die zweite Zeile nicht-trivial ist.) Den folgenden Struktursatz von Kollár ([Kol91, Theorem 5.3.12]) haben wir oben bereits erwähnt.

Lemma 3.2.10. *Zusätzlich zu Voraussetzung 3.2.8 gelte $s \geq 4$. Ist dann Φ kein Morphismus, so ist entweder*

1. $s = 4$ und $\Phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ bimeromorph oder
2. $s = 5$ und $\Phi : X \dashrightarrow Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ bimeromorph.

Wir zitieren ein Lemma von I. Nakamura [Nak96, Lemma 3.2] samt Beweis.

Lemma 3.2.11. *Es gelte Voraussetzung 3.2.8. Ist $C' \subset C$ ein abgeschlossener, komplexer Unterraum und gilt $h^1(C', \mathcal{O}_{C'}) = 1$, so ist $C = C'$.*

Beweis. Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_C$ die zu C' gehörige kohärente Idealgarbe, dann haben wir die folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C'} \rightarrow 0.$$

Ein Ausschnitt der dualisierten langen exakten Kohomologiesequenz sieht dann wie folgt aus:

$$0 = H^2(C, \mathcal{I})^\vee \rightarrow H^1(C', \mathcal{O}_{C'})^\vee \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C)^\vee \rightarrow H^1(C, \mathcal{I})^\vee$$

Dabei folgt $h^2(C, \mathcal{I}) = 0$ aus $\dim C = 1$. Grothendieck-Serre-Dualität liefert unter Berücksichtigung von $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$ das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(C', \mathcal{O}_{C'})^\vee & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{O}_C)^\vee & \longrightarrow & H^1(C, \mathcal{I})^\vee \\ & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}, \mathcal{O}_C) \end{array}$$

Da nach Voraussetzung $h^1(C', \mathcal{O}_{C'}) = 1$ ist, ist die Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}, \mathcal{O}_C)$$

die Nullabbildung. Dann ist insbesondere die Inklusionsabbildung $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_C$, als Bild von $\text{id}_{\mathcal{O}_C}$ unter obiger Abbildung, die Nullabbildung. Es folgt, dass $\mathcal{I} = 0$ ist. Also ist $C' = C$ wie behauptet. \square

Das folgenden Lemma ist elementar.

Lemma 3.2.12. *Es gelte Voraussetzung 3.2.8. Seien $D_1, D_2 \in |L|$ mit $D_1 \neq D_2$ und sei $C = D_1.D_2$. Dann gilt*

$$\text{Bs}(L) = \text{Bs}(L|_{D_1}) = \text{Bs}(L|_C).$$

Beweis. Die Inklusionen von rechts nach links sind jeweils allgemeingültig. Die umgekehrten Inklusionen gelten, wenn die Restriktionsabbildungen

$$H^0(X, L) \rightarrow H^0(D_1, L|_{D_1}) \quad \text{bzw.} \quad H^0(D_1, L|_{D_1}) \rightarrow H^0(C, L|_C)$$

surjektiv sind. Dies wiederum folgt, wenn $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ bzw. $H^1(D_1, \mathcal{O}_{D_1})$ verschwinden. Diese verschwinden aber tatsächlich wie man leicht unter Verwendung Lemma 3.2.9 zeigt. \square

Das folgende Lemma gibt eine starke Einschränkung für die Geometrie von $\text{Bs}(L)$. Es wird vielfache Anwendung finden.

Lemma–Definition 3.2.13. *Seien $D_1, D_2 \in |L|$ mit $D_1 \neq D_2$ und sei $C' \subset D_1 \cap D_2$ eine glatte Kurve derart, dass $D_1 \cdot D_2$ generisch entlang C' reduziert ist – d.h.: es gibt eine endliche Menge $F \subset C'$ mit*

$$I_{C'}|_{C' \setminus F} = (I_{D_1} + I_{D_2})|_{C' \setminus F}.$$

Dann ist die Abbildung $(I_{D_1} + I_{D_2})|_{C'} \rightarrow N_{C'/X}^\vee$ injektiv und wir definieren $Q_{D_1, D_2}^{C'}$ als deren Kokern. Ist C' rational, so gilt $h^0(C', Q_{D_1, D_2}^{C'}) = 2$.

Beweis. Man beachte zunächst, dass $(I_{D_1} + I_{D_2})|_{C'} = (I_{D_1} \oplus I_{D_2})|_{C'}$ gilt, da $I_{D_1} \cap I_{D_2} = I_{D_1} \cdot I_{D_2}$ ist. Die natürliche Abbildung

$$(I_{D_1} \oplus I_{D_2})|_{C'} = (I_{D_1} + I_{D_2})|_{C'} \rightarrow N_{C'/X}^\vee$$

ist daher ein Morphismus lokaler freier Garben und da dieser nach Voraussetzung generisch ein Isomorphismus ist, ist er injektiv. Die Garbe $Q_{D_1, D_2}^{C'}$ fügt sich per Definition in die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (I_{D_1} \oplus I_{D_2})|_{C'} \rightarrow N_{C'/X}^\vee \rightarrow Q_{D_1, D_2}^{C'} \rightarrow 0.$$

Sei nun C' zusätzlich rational. Da die erste Abbildung generisch ein Isomorphismus ist, ist $Q_{D_1, D_2}^{C'}$ eine Wolkenkratzergarbe. Also ist $h^1(C', Q_{D_1, D_2}^{C'}) = 0$. Ferner ist $(I_{D_i})|_{C'} \simeq -L|_{C'}$ und die Adjunktionsformel liefert

$$\det N_{C'/X}^\vee = -K_{C'} + K_X|_{C'} = -K_{C'} - 2L|_{C'}.$$

Mit Riemann-Roch erhalten wir unter Verwendung, dass C' glatt und rational ist:

$$\begin{aligned} h^0(C', Q_{D_1, D_2}^{C'}) &= \chi(C', Q_{D_1, D_2}^{C'}) = \chi(C', N_{C'/X}^\vee) - \chi(C', L_{|C'}^{-1} \oplus L_{|C'}^{-1}) = \\ &= 2 - 2L \cdot C' + 2 - (-2L \cdot C' + 2) = \\ &= 2 \end{aligned}$$

Die Behauptung ist damit gezeigt. \square

Das Lemma macht auf den ersten Blick einen technischen Eindruck. Die folgende leicht einzusehende Aussage deutet seine geometrische Bedeutung an.

Lemma 3.2.14. *Unter den Voraussetzungen des vorangehenden Lemmas gelten für einen Punkt $p \in C'$ die folgenden Äquivalenzen:*

$$(Q_{D_1, D_2}^{C'})_p = 0 \iff (I_{D_1} + I_{D_2})_p = (I_{C'})_p \quad (3.2.1)$$

$$(Q_{D_1, D_2}^{C'})_p = \mathbb{C} \iff \begin{cases} \exists x, y, z \in \mathcal{O}_{X, p} : \\ (x, y, z) = \mathcal{I}_p, & (I_{C'})_p = (x, y), \\ (I_{D_1} + I_{D_2})_p = (x, yz) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Beweis. Die Implikationen von rechts nach links sind jeweils trivial. Die erste Äquivalenz ist klar und gilt genau dann, wenn sich D_1 und D_2 in p transversal schneiden (und dort glatt sind).

Gilt die linke Seite der zweiten Aussage, so ist zumindest eine der Flächen D_1, D_2 glatt in p . Die rechte Seite folgt dann leicht bzw. unter Verwendung von Lemma 3.1.4. \square

Bemerkung 3.2.15. *Ist $(Q_{D_1, D_2}^C)_p = \mathbb{C}^k$ mit $k \geq 2$, so können wir nicht mehr auf die lokale Glattheit einer der beiden Flächen schließen. Setzen wir diese jedoch voraus, erhalten wir analoge Ergebnisse (siehe Lemma 3.1.4).*

Lemma 3.2.16. *Sei $F \subset X$ ein irreduzibler Divisor. Dann ist $\Phi_*(F)$ in höchstens einer Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^{s-1}$ enthalten.*

Beweis. Wir zeigen, dass für $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ genau dann $\Phi_*(F) \subset H$ gilt, wenn $F \subset H^\#$ gilt. Wir erinnern daran, dass $H^\# \in |L|$ den zu H korrespondierenden Divisor bezeichnet. Seien $H_1, H_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{s-1}}(1)$ mit

$$\Phi_*(F) \subset H_1 \cap H_2.$$

Dann ist $F \subset H_1^\# \cap H_2^\#$ und da $H_1^\#, H_2^\#$ irreduzibel sind, folgt $H_1^\# = F = H_2^\#$ und damit $H_1 = H_2$.

Es bleibt also die obige Äquivalenz zu zeigen. Eine Hyperebene H in $\mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$ ist gegeben durch ein $\varphi \in H^0(X, L)^{\vee\vee}$. Das kanonische Urbild von φ in $H^0(X, L)$ bezeichnen wir mit t , so dass $H^\# = (t = 0)$ ist. Nun ist genau dann $\Phi_*(F) \subset H$, wenn für alle $x \in F \setminus \text{Bs}(L)$

$$\varphi(\Phi(x)) = \Phi(x)(t) = 0$$

ist, was per Definition von Φ genau dann gilt, wenn $t(x) = 0$ ist. Per Definition von $\text{Bs}(L)$ können wir $F \setminus \text{Bs}(L)$ durch F ersetzen und dies zeigt die Behauptung. \square

Lemma 3.2.17. *Es gelte Voraussetzung 3.2.8. Ist $\dim(\text{Bs}(L)) < 1$, so ist $s = h^0(X, L) = 4$ und $\text{Bs}(L) = \emptyset$.*

Beweis. Sei also $\dim \text{Bs}(L) < 1$. Dann ist für $D_1, D_2 \in |L|$ allgemein wie in Lemma 3.1.10 die Kurve $C = D_1 \cdot D_2$ irreduzibel und reduziert. Wir können außerdem erreichen, dass die Kurve $D_1^\# \cap D_2^\#$ glatt ist. Es gilt $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C$ und $L \cdot C = L^3 = 2$.

Angenommen C ist singular. Dann wählen wir $p \in \text{Sing}(C)$. Da $D_1^\# \cap D_2^\#$ glatt ist, ist $p \in \text{Bs}(L)$. Wir bezeichnen mit $g: X_1 \rightarrow X$ die Aufblasung von X in p und mit E den exzeptionellen Divisor. Wir setzen $L_1 = g^*L - aE$ mit $a \geq 1$ wie in Notation 2.4.4. Dann gilt

$$L_1 \cdot g_*^{-1}C \leq 2 - 2 = 0. \quad (3.2.3)$$

Die Mannigfaltigkeit X_1 und das Geradenbündel L_1 erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 3.1.10. Dessen zweiter Teil liefert einen Widerspruch zur Ungleichung (3.2.3). Also ist C glatt und mit Riemann-Roch sowie Serre-Dualität folgt

$$s - 2 = h^0(C, L|_C) = 2,$$

also $s = 4$. Weiter ist $L|_C$ global erzeugt, da für jedes $p \in C$ nach Serre-Dualität

$$H^1(C, L|_C(-p)) = 0$$

ist. Nach Lemma 3.2.12 ist auch L global erzeugt. \square

Lemma 3.2.18. *Es gelte Voraussetzung 3.2.8 und es seien $D_1, D_2 \in |L|$ derart, dass $C = D_1.D_2$ reduziert ist und es sei $C_0 \subset D_1.D_2$ eine irreduzible Komponente und B die Vereinigung der übrigen. Ist $\text{Bs}(L) \neq \emptyset$ und $B \subset \text{Bs}(L)$ und zusammenhängend, so ist*

$$L.C_0 = s - 1.$$

Beweis. Es sei zunächst bemerkt, dass in den betrachteten Fällen B stets zusammenhängend ist, wie wir später sehen werden. Wir setzen voraus, dass C reduziert ist, also sind auch C_0 und B reduziert. Ist $B = \emptyset$, so ist $\dim \text{Bs}(L) < 1$ und aus Lemma 3.2.17 folgt, dass tatsächlich $\text{Bs}(L) = \emptyset$ ist. Ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Es ist also $B \neq \emptyset$ und $h^0(B, \mathcal{O}_B) = 1$. Nach Lemma 3.2.11 ist

$$h^1(B, \mathcal{O}_B) = h^1(C_0, \mathcal{O}_{C_0}) = 0.$$

Wir definieren die Garbe Q über die folgende exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C_0} \oplus \mathcal{O}_B \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Die zugehörige lange exakte Sequenz impliziert mit obigen Bemerkungen, dass $h^0(C, Q) = 2$ ist. Wir tensorieren die obige exakte Sequenz mit L und erhalten:

$$0 \rightarrow L|_C \rightarrow L|_{C_0} \oplus L|_B \rightarrow Q \rightarrow 0$$

Ein Ausschnitt der zugehörigen langen exakten Sequenz ist:

$$0 \rightarrow H^0(C, L|_C) \rightarrow H^0(C_0, L|_{C_0}) \oplus H^0(B, L|_B) \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Da B reduziert und in $\text{Bs}(L)$ enthalten ist, liegt das Bild der ersten Abbildung (vollständig) im ersten Summanden. Insbesondere ist

$$h^0(C_0, L|_{C_0}) \geq h^0(C, L|_C) = s - 2 \geq 2.$$

Also ist $L|_{C_0}$ sehr ample ($C_0 \simeq \mathbb{P}^1$) und die Abbildung $H^0(C_0, L|_{C_0}) \rightarrow \mathbb{C}^2$ ist surjektiv. Es folgt, dass $h^0(C_0, L|_{C_0}) = s$ ist (und $h^0(B, L|_B) = 0$). Also ist $L.C_0 = s - 1$. \square

Kapitel 4

Beweis der beiden Haupthilfssätze

4.1 Beweis von Satz 3.2.6

Wir erinnern daran, dass Satz 3.2.6 die Ungleichung $b_3(X) \leq 12$ postuliert unter untenstehender Voraussetzung 4.1.1. Zu Beginn des Abschnitts machen wir einige allgemeine Bemerkung und führen Notation ein. Danach teilen wir den Beweis in zwei grundverschiedene Fälle auf. Den Plan für den Fortgang des Beweises geben wir zu Beginn der jeweiligen Unterabschnitte.

Im gesamten Abschnitt machen wir folgende Voraussetzungen, welche gerade die von Satz 3.2.6 sind.

Voraussetzung 4.1.1. *Zusätzlich zu Voraussetzung 3.2.8 nehmen wir*

$$s = 4, \quad \text{Bs}(L) \neq \emptyset$$

an und setzen voraus, dass es keine glatte, rationale Kurve $C \subset X$ mit $K_X \cdot C = 0$ gibt.

Aus Lemma 3.2.10 folgt, dass Φ bimeromorph ist. Der Basisort von L ist nach Lemma 3.2.17 tatsächlich 1-dimensional. Bis auf Widerruf verwenden wir die folgende Notation.

Notation 4.1.2. *Sei $g: X_n \rightarrow X$ eine Auflösung von Φ mit*

$$g(\text{Exc}(g)) = \text{Bs}(L),$$

die eine Komposition von glatten Aufblasungen ist.

$$\begin{array}{ccc} & X_n & \\ g \swarrow & & \searrow f \\ X & \dashrightarrow \Phi \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Wir bezeichnen die irreduziblen Komponenten von $\text{Exc}(g)$ mit E_1, \dots, E_n , definieren

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid E_i \not\subset \text{Exc}(f)\}$$

und schreiben

$$\{\Delta_i \mid i \in I\}$$

für die Menge derjenigen f -exzeptionellen Divisoren, die nicht g -exzeptionell sind.

Lemma–Definition 4.1.3. *Es seien $D_1, D_2 \in |L|$, $D_1 \neq D_2$, derart, dass die Gerade*

$$l_{D_1^\#, D_2^\#} = D_1^\# \cap D_2^\#$$

den Ort, wo Φ^{-1} ein Isomorphismus ist, schneidet, also derart, dass

$$l_{D_1^\#, D_2^\#} \not\subset f(\text{Exc}(f) \cup \text{Exc}(g)).$$

Dann ist

$$C_{D_1, D_2} := \Phi_*^{-1}(l_{D_1^\#, D_2^\#})$$

definiert und 1-dimensional. Es gilt $C_{D_1, D_2} \subset D_1 \cdot D_2$ und im allgemeinen Punkt von C_{D_1, D_2} gilt Gleichheit. Die Kurve C_{D_1, D_2} ist glatt und rational. Wir definieren

$$Q_{D_1, D_2} = Q_{D_1, D_2}^{C_{D_1, D_2}}.$$

Es ist $h^0(X, Q_{D_1, D_2}) = 2$.

Beweis. Wir erinnern daran, dass $D^\# \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ den zu $D \in |L|$ korrespondierenden Divisor bezeichnet. Es ist klar, dass unter den gegebenen Voraussetzungen C_{D_1, D_2} definiert und rein von Dimension 1 ist. Ist $W \subset X$ offen und $\Phi|_W$ ein Isomorphismus, so ist $\Phi(D \cap W) = D^\# \cap \Phi(W)$, für alle $D \in |L|$. Dies zeigt, dass im allgemeinen Punkt von C_{D_1, D_2}

$$C_{D_1, D_2} = D_1 \cdot D_2$$

ist.

Es gilt nicht Gleichheit schlechthin, da $\dim \text{Bs}(L) = 1$ ist und natürlich $C_{D_1, D_2} \not\subset \text{Bs}(L)$. Aus Lemma 3.2.11 folgt daher, dass C_{D_1, D_2} glatt und rational ist. Aus Lemma 3.2.13 folgt die letzte Behauptung. \square

Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ ist Q_{D_1, D_2} definiert und eine Wolkenkratzergarbe mit $h^0(C_{D_1, D_2}, Q_{D_1, D_2}) = 2$. Die folgende Aussage gilt für alle dem Autor bekannten Mannigfaltigkeiten, die Voraussetzung 4.1.1 erfüllen.

Aussage 1. *Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ besteht der Träger der Garbe Q_{D_1, D_2} aus zwei verschiedenen Punkten. Explizit: es gibt eine nicht-leere, Zariski-offene Menge $U \subset |L|$ und für jeden Divisor $D_1 \in U$ gibt es eine nicht-leere, Zariski-offene Menge $V_{D_1} \subset |L|$ mit der Eigenschaft, dass für alle $D_2 \in V_{D_1}$ der Träger von Q_{D_1, D_2} aus zwei verschiedenen Punkten besteht.*

Wir können jedoch nicht zeigen, dass dies tatsächlich für alle Mannigfaltigkeiten, die Voraussetzung 4.1.1 erfüllen, gilt und machen daher eine Fallunterscheidung.

4.1.1 Degenerierter Basisort

Der Plan des Beweises in diesem Fall ist wie folgt: Ziel des ersten Teils des Unterabschnitts ist es, Lemma 4.1.9 zu zeigen. Dieses beschreibt X als die Kompaktifizierung von \mathbb{C}^3 durch einen irreduziblen Divisor $\Delta_0 \subset X$. Folglich ist $b_3(X) = b_3(\Delta_0)$. Danach ist das Ziel, eine gutartige Auflösung von Δ_0 zu finden, um damit $b_3(\Delta_0)$ abzuschätzen. Dies ist der Gegenstand von Lemma 4.1.16. Für dessen Beweis müssen wir zunächst eine spezielle, gutartige Auflösung von Φ finden. Diese liefert Lemma 4.1.15. Der Beweis des letztgenannten Lemmas ist relativ aufwändig. Er bildet das technische Herz des Unterabschnitts.

Im gesamten Unterabschnitt machen wir folgende Voraussetzung.

Voraussetzung 4.1.4. *Zusätzlich zu Voraussetzung 4.1.1 nehmen wir an, dass Aussage 1 für das gegebene X falsch ist.*

Lemma 4.1.5. *Falls $E_{i_0} \not\subset \text{Exc}(f)$ ist, d.h. falls $i_0 \in I$, so ist $f(E_{i_0}) \subset \mathbb{P}^3$ eine Hyperebene.*

Beweis. Wir setzen $H_0 := f(E_{i_0})$. Nach Voraussetzung ist $\dim H_0 = 2$. Wir nehmen an, dass H_0 keine Hyperebene ist. Für alle $j \neq i_0$ ist $f(E_j) \neq f(E_{i_0})$, da f zusammenhängende Fasern hat. Die Menge

$$A := H_0 \cap \left(f(\text{Exc}(f)) \cup \bigcup_{j \neq i_0} f(E_j) \right)$$

hat daher höchstens Dimension 1.

Für allgemeines $H_1 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ besteht die Menge $H_1 \cap A$ also aus endlich vielen Punkten. Sei ein solches H_1 fixiert. Die Kurve $H_0 \cap H_1 \subset H_1$ hat Grad mindestens 2. Für allgemeines $H_2 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ enthält daher $H_1 \cap H_2 \cap H_0$ mindestens zwei verschiedene Punkte. Wir können außerdem erreichen, dass $H_1 \cap H_2 \not\subset H_0$ ist und $H_1 \cap H_2 \cap A = \emptyset$.

Wir setzen $l_{H_1, H_2} = H_1 \cap H_2$ und wählen

$$x, y \in l_{H_1, H_2} \cap H_0, \quad \text{mit } x \neq y.$$

Wegen $x, y \notin A$ haben wir $x, y \notin f(\text{Exc}(f))$ und daher ist f^{-1} in x und y definiert und $f_*^{-1}(l_{H_1, H_2})$ schneidet E_{i_0} in den beiden zugehörigen Bildpunkten. Wegen $x, y \notin A$ haben wir außerdem

$$f^{-1}(x), f^{-1}(y) \notin \bigcup_{j \neq i_0} E_j$$

und es folgt, dass $f_*^{-1}(l_{H_1, H_2}) \not\subset \text{Exc}(g)$ ist. Insbesondere ist

$$C_{D_1, D_2} = g(f_*^{-1}l_{H_1, H_2})$$

eine (irreduzible) Kurve, wobei wir $D_1 = H_1^\#$, $D_2 = H_2^\#$ setzen.

Ist $g(f^{-1}(x)) = g(f^{-1}(y))$, so ist diese Kurve singulär. Also ist

$$h^1(C_{D_1, D_2}, \mathcal{O}_{C_{D_1, D_2}}) \geq 1$$

und mit Lemma 3.2.11 folgt, dass $D_1 \cdot D_2 = C_{D_1, D_2}$ ist. Ein Widerspruch dazu, dass nach Lemma 3.2.17 $\dim \text{Bs}(L) = 1$ ist.

Also ist $g(f^{-1}(x)) \neq g(f^{-1}(y))$ und insbesondere hat $g(E_{i_0})$ Dimension 1. Nach Wahl von g ist $g(E_{i_0}) \subset \text{Bs}(L) \subset D_1 \cap D_2$ und daher gilt

$$\{\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y)\} \subset g(E_{i_0}) \cap C_{D_1, D_2} \subset Q_{D_1, D_2}.$$

Dies zeigt, dass Aussage 1 gilt. Ein Widerspruch zur Annahme. \square

Lemma 4.1.6. *Es gilt $E_{i_0} \not\subset \text{Exc}(f)$ für höchstens ein i_0 , d.h. $|I| \leq 1$.*

Beweis. Seien i_0, i_1 mit $i_0 \neq i_1$ derart, dass $E_{i_0}, E_{i_1} \not\subset \text{Exc}(f)$. Nach dem vorangehenden Lemma sind $H_{i_0} = f(E_{i_0})$, $H_{i_1} = f(E_{i_1})$ Hyperebenen. Wir setzen $l = H_{i_0} \cap H_{i_1}$. Weil die Fasern von f zusammenhängend sind, ist

$$A := E_{i_0} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{f(E_i)=l} E_i \right)}_{=: M} \cup E_{i_1}$$

zusammenhängend. Sei, um dies zu sehen, $\emptyset \neq B \neq A$ die Vereinigung einiger irreduzibler Komponenten von A und C die Vereinigung der übrigen. Wir wollen zeigen, dass $B \cap C \neq \emptyset$ ist. Nach Lemma 3.2.16 ist $f(\Delta_i) \neq l$, für alle $i \in I$. Wir setzen

$$F = l \cap \left(\bigcup_{i \in I} f(\Delta_i) \cup \bigcup_{f(E_i) \neq l} E_i \right).$$

Dann ist F endlich und für alle $x \in l \setminus F$ gilt

$$f^{-1}(x) \subset A = B \cup C.$$

Da $f^{-1}(x)$ zusammenhängend ist und

$$B \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset, \quad C \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset,$$

folgt wie gewünscht $B \cap C \neq \emptyset$.

Es ist $A \subset \text{Exc}(g)$ und daher $g(A) \subset \text{Bs}(L)$ nach Wahl von g . Da $g(A)$ zusammenhängend ist, besteht $g(A)$ entweder aus genau einem Punkt

oder ist rein 1-dimensional. Für allgemeine $H_1, H_2 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ ist die Kurve $f_*^{-1}(H_1 \cap H_2)$ nicht in $\text{Exc}(g)$ enthalten und schneidet A in zwei verschiedenen Punkten. Diese werden von g nicht auf denselben Punkt abgebildet, da $g(f_*^{-1}(H_1 \cap H_2)) = C_{D_1, D_2}$ glatt ist, wobei wir, wie üblich, $D_i = H_i^\# \in |L|$ schreiben. Insbesondere ist $g(A)$ kein Punkt, also nach obiger Überlegung rein 1-dimensional, und es gilt

$$C_{D_1, D_2} \cap g(A) \subset \text{Supp}(Q_{D_1, D_2}).$$

Dies zeigt, dass – im Widerspruch zu Voraussetzung 4.1.4 – Aussage 1 gilt. \square

Lemma 4.1.7. *Es gibt tatsächlich genau ein i_0 mit $\dim f(E_{i_0}) = 2$, d.h. es ist $|I| = 1$, und es ist $n > 1$.*

Beweis. Angenommen es ist $|I| = \emptyset$, d.h. es ist $\text{Exc}(f) = \text{Exc}(g)$. Es gibt (eindeutig bestimmte) effektive Divisoren E, F derart, dass gilt:

$$g^*K_X + E = K_{X_n} = f^*K_{\mathbb{P}^3} + F \quad (4.1.1)$$

Durch Anwendung von $(g^*L)^2 \cdot (-)$ auf diese Gleichung erhalten wir dann den Widerspruch $2 = 4$. Also ist wie behauptet $|I| = 1$.

Angenommen es ist $n = 1$. D.h. g besteht aus nur einer Aufblasung. Da $\dim(\text{Bs}(L)) = 1$ ist, muss dies die Aufblasung in einer (glatten, zusammenhängenden) Kurve sein. Dann gilt mit obiger Notation $E = E_1$ und es ist

$$f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) = g^*L - a_1E_1$$

für ein $a_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Aus Lemma 4.1.5 folgt, dass $(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))^2 \cdot E_1 = 1$ ist. Wir wenden $(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))^2 \cdot (-)$ auf Gleichung (4.1.1) an und erhalten den Widerspruch $2 + 2a_1 - 1 = 4$. \square

Es ist zunächst nicht klar, dass die bewegliche Kurve C_{D_1, D_2} den (reduzierten) Basisort transversal schneidet. Aus der Tatsache, dass es keine Auflösung von Φ durch nur eine Aufblasung gibt, können wir dies aber nun folgern.

Lemma 4.1.8. *Für alle $D_1, D_2 \in |L|$, $D_1 \neq D_2$, schneiden sich je zwei irreduzible, reduzierte Kurven $C, B \subset D_1 \cap D_2$, $C \neq B$, transversal¹.*

Beweis. Die Kurven C, B sind glatt und rational nach Lemma 3.2.11. Sei $p \in C \cap B$. Angenommen es ist $I_{C,p} + I_{B,p} \subsetneq m_p$. Dann ist $h^0(C.B, \mathcal{O}_{C.B}) > 1$ und aus der exakten Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C+B, \mathcal{O}_{C+B}) &\rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C) \oplus H^0(B, \mathcal{O}_B) \rightarrow H^0(C.B, \mathcal{O}_{C.B}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(C+B, \mathcal{O}_{C+B}) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

¹In dem Sinne, dass für alle $p \in C \cap B$ gilt $(I_C + I_B)_p = m_p$.

folgt mit $h^1(C + B, \mathcal{O}_{C+B}) \leq h^1(D_1.D_2, \mathcal{O}_{D_1.D_2}) = 1$, dass tatsächlich

$$h^1(C + B, \mathcal{O}_{C+B}) = h^0(C.B, \mathcal{O}_{C.B}) - 1 = 1$$

ist. Aus Lemma 3.2.11 folgt $D_1.D_2 = C + B$.

Es ist $C \cup B \not\subset \text{Bs}(L)$, weil andernfalls $D_1.D_2 = C+B$ für alle $D_1, D_2 \in |L|$ gelten würde. Wir können also o.E. annehmen, dass $C \not\subset \text{Bs}(L)$ ist. Da $\dim \text{Bs}(L) = 1$ ist, folgt $B \subset \text{Bs}(L)$ und B ist die einzige Kurve, die in $\text{Bs}(L)$ enthalten ist.

Aus Lemma 3.1.10 folgt daher, dass für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ mengentheoretisch $D_1 \cap D_2 = C_{D_1, D_2} \cup B$ gilt. Da die Bedingung, dass sich D_1, D_2 generisch in B transversal schneiden, offen ist, können wir darüberhinaus

$$D_1.D_2 = C_{D_1, D_2} + B \quad (4.1.3)$$

erreichen. Wir ersetzen nun die ursprünglichen Divisoren $D_1, D_2 \in |L|$ durch solche, die Gleichung (4.1.3) erfüllen.

Ersetzen wir in der exakten Sequenz (4.1.2) C durch C_{D_1, D_2} , so erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow H^0(C_{D_1, D_2}.B, \mathcal{O}_{C_{D_1, D_2}.B}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$$

und damit

$$h^0(C_{D_1, D_2}.B, \mathcal{O}_{C_{D_1, D_2}.B}) = 2.$$

Außerdem ist $L.C_{D_1, D_2} = s - 1 = 3$ nach Lemma 3.2.18. Wir wählen g_1 als die Aufblasung von X in B und bezeichnen den exzeptionellen Divisor mit E_1 . Da sich D_1, D_2 außerhalb von C_{D_1, D_2} transversal schneiden gilt mit $\hat{D}_i := (g_1)_*^{-1}D_i = g_1^*D_i - E_1$

$$\hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 \subset g_1^{-1}(C_{D_1, D_2}).$$

Es ist $E_1.C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = 2$ und daher, für $L_1 = g_1^*L - E_1$,

$$L_1.C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = 3 - 2 = 1,$$

wobei zu beachten ist, dass $C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = (g_1)_*^{-1}(C_{D_1, D_2})$ ist. Aus dem zweiten Teil von Lemma 3.1.10 folgt, dass

$$\text{Bs}(L_1) \cap C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = \emptyset$$

ist. Insbesondere ist $g_1^{-1}(C_{D_1, D_2} \cap B) \not\subset \text{Bs}(L_1)$ und es folgt

$$\dim(\text{Bs}(L_1)) \leq 0.$$

Indem wir D_1, D_2 zusätzlich derart allgemein wählen, dass $C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = \hat{D}_1.\hat{D}_2$ ist, sehen wir dass $\text{Bs}(L_1) = \emptyset$ ist. Das ist ein Widerspruch zu $n > 1$. \square

Wir haben gesehen, dass $I = \{i_0\}$ ist. Wir setzen

$$H_0 = f(E_{i_0}) \quad \text{und} \quad \Delta_0 = g(\Delta_{i_0}).$$

Unabhängig von der gewählten Auflösung lässt sich Δ_0 als der eindeutig bestimmte Divisor in X charakterisieren, der von Φ kontrahiert wird und H_0 als derjenige Divisor in \mathbb{P}^3 , der von Φ^{-1} kontrahiert wird.

Wir wählen $m_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ derart, dass $\Delta_0 \in |m_0 L|$ ist. Da $E_{i_0} = f_*^{-1} H_0$ ist, gibt es $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ derart, dass

$$f^* H_0 - a_1 \Delta - \sum_{i \notin I} a_i E_i = E_{i_0}$$

ist. Durch Anwendung der Abbildung $\text{Div}(X_n) \rightarrow \text{Pic}(X_n)$ und anschließender Projektion auf $g^* \text{Pic}(X)$ erhalten wir die Gleichung

$$1 - a_1 m_0 = 0. \tag{4.1.4}$$

Es gilt also $a_1 = 1 = m_0$. Insbesondere ist $f(\Delta) \subset H_0$. Dies zeigt den ersten Teil der folgenden Aussage. Der zweite Teil folgt z.B. auch aus [RV60, Bemerkung 1].

Lemma 4.1.9. *Die Abbildung*

$$\Phi|_{X \setminus \Delta_0} : X \setminus \Delta_0 \rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus H_0 \simeq \mathbb{C}^3$$

ist ein Isomorphismus, d. h. X ist eine Kompaktifizierung von \mathbb{C}^3 durch Δ_0 . Es folgt

$$b_2(\Delta_0) = b_2(X) = 1 \quad b_3(\Delta_0) = b_3(X).$$

Beweis. Wir haben (z.B. nach [Bre97, Chapter II, 10.3]) für alle k eine exakte Sequenz

$$H_c^k(X \setminus \Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^k(\Delta_0, \mathbb{Q}) \rightarrow H_c^{k+1}(X \setminus \Delta_0, \mathbb{Q}).$$

Da $X \setminus \Delta_0 \simeq \mathbb{C}^3$ ist, gilt $H_c^k(X \setminus \Delta_0, \mathbb{Q}) = 0$ für $k = 1, \dots, 5$ und die Behauptung folgt. \square

Wir setzen

$$C_1 = f(\Delta)$$

und bemerken, dass C_1 irreduzibel ist, da Δ es ist, sowie dass C_1 unabhängig von der gewählten Auflösung ist.

Lemma 4.1.10. *Die Dimension von C_1 ist 1 und der Grad d_1 der ebenen Kurve $C_1 \subset H_0 \simeq \mathbb{P}^2$ ist mindestens 3.*

Beweis. Das Bild eines Divisors in X unter $\Phi_{X \setminus \text{Bs}(L)}$ kann nach Lemma 3.2.16 in höchstens einer Hyperebene enthalten sein. Also ist $C_1 = f(\Delta)$ weder ein Punkt noch eine Gerade.

Angenommen C_1 hat Grad 2. Dann existiert eine (irreduzible) Quadrik $Q_1 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)|$ derart, dass $C_1 \subset Q_1$ ist. Die Strikttransformierte $\hat{Q}_1 \subset X_n$ von Q_1 ist nicht g -exzeptionell, da sie weder f -exzeptionell noch gleich E_{i_0} ist. Es gibt also $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $D_2 \in |m_2 L|$ und $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ derart, dass

$$g^* D_2 - \sum_{i=1}^n a_i E_i = \hat{Q}_1 = f^* Q_1 - b_1 \Delta - \sum_{i \notin I} b_i E_i$$

ist. Durch Anwendung g_* auf diese Gleichung erhalten wir

$$m_2 = 2 - b_1.$$

Da $C_1 \subset Q_1$ ist, gilt $b_1 \geq 1$ und es folgt, dass $m_2 = 1$ ist. Dann folgt aber aus der Definition von Φ , dass Q_1 in einer Hyperebene enthalten ist, und das ist ein Widerspruch zur Wahl von Q_1 . \square

Wir definieren

$$\tilde{C}_1 = (f|_{E_{i_0}})_*^{-1}(C_1) \subset E_{i_0}$$

als die Strikttransformierte von C_1 unter der Abbildung $f|_{E_{i_0}} : E_{i_0} \rightarrow H_0$. Es folgen zwei technische Lemmata, deren wesentliches Ziel es ist zu zeigen, dass die Kurve \tilde{C}_1 von g nicht kontrahiert wird. Das erste ist lediglich eine Hilfsaussage für das zweite.

Lemma 4.1.11. *Es sei $\hat{C} \subset \Delta$ eine irreduzible Kurve mit $f(\hat{C}) = C_1$. Für allgemeines $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ schneiden sich Δ und $f_*^{-1}(H)$ außerhalb einer endlichen Menge transversal in jeder irreduziblen Kurve, die von f kontrahiert wird und \hat{C} schneidet.*

Man beachte, dass wir (noch) keine Aussage über die Existenz einer solchen Kurve \hat{C} machen. Eine solche wird das nächste Lemma liefern.

Beweis. Wir definieren zunächst den abgeschlossenen analytischen Unterraum

$$Z := \left\{ x \in \Delta \mid \text{rank}_x \left(\Omega_{\Delta/C_1}^1 \right) \geq 2 \right\} \subset \Delta$$

und bemerken, dass die folgende Implikation gilt:

$$x \notin \text{Sing}(\Delta) \cup f_{|\Delta}^{-1}(\text{Sing}(C_1)) \rightarrow (x \in Z \leftrightarrow (Df|_{\Delta})_x = 0)$$

Insbesondere ist $Z \neq \Delta$, da andernfalls $f|_{\Delta}$ konstant wäre. Daher ist $\dim Z \leq 1$ und die Menge

$$F := \bigcup \left\{ \hat{C} \cap C \mid \hat{C} \neq C \subset Z \cup \text{Sing}(\Delta) \text{ irreduzible Kurve} \right\} \cup \text{Exc}(f|_{\hat{C}})$$

ist endlich. Eine allgemeine Hyperebene $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- $H \cap f(F) = \emptyset$
- H und C_1 schneiden sich transversal (außerhalb von $\text{Sing}(C_1)$)
- für jeden irreduziblen Divisor $E \subset \text{Exc}(f)$ gilt $f(E) \not\subset H$

Wir fixieren ein solches H und schreiben $\tilde{H} = f_*^{-1}(H)$. Sei $C' \subset \Delta \cap \tilde{H}$ eine irreduzible Kurve, die von f kontrahiert wird und \hat{C} schneidet. Wir fixieren $q \in \hat{C} \cap C'$ und setzen $p = f(q)$. Dann ist $p \in H$, also $p \notin f(F)$, also $q \notin F$.

Wir behaupten, dass q ein glatter Punkt von \tilde{H} ist. Sei nämlich $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3, p}$ eine lokal definierende Gleichung für H im Punkt p . Dann ist $f^*(s)$ eine lokal definierende Gleichung für \tilde{H} im Punkt q , da $f^*H = \tilde{H}$ wegen der letzten Bedingung, die wir an H gestellt haben. Wir wählen

$$0 \neq v \in T_q \hat{C} \subset T_q \tilde{X},$$

wobei anzumerken ist, dass q ein glatter Punkt von \hat{C} ist. Da $f|_{\hat{C}}$ in q ein lokaler Isomorphismus ist, gilt

$$0 \neq w := (Df)_q(v) \in T_p C_1 \subset T_p \mathbb{P}^3$$

und da sich C_1 und H in p transversal schneiden, gilt $ds(w) \neq 0$. Wir erhalten insgesamt

$$(df^*s)_q(v) = (f^*ds)_q(v) = (ds)_p(w) \neq 0.$$

Dies zeigt, dass \tilde{H} glatt im Punkt q ist. Für alle

$$x \in C' \setminus (\text{Sing}(\tilde{H}) \cup \text{Sing}(\Delta) \cup Z)$$

gilt

$$(Df)_x(T_x \Delta) = T_p C_1 \not\subset T_p H \supset (Df)_x(T_x \tilde{H})$$

und daher ist $T_x \Delta \neq T_x \tilde{H}$ – d.h. Δ und \tilde{H} schneiden sich in x transversal. Da $q \notin \text{Sing}(\tilde{H})$ ist, gilt $C' \not\subset \text{Sing}(\tilde{H})$. Außerdem ist $C' \not\subset \text{Sing}(\Delta) \cup Z$, da $C' \neq \hat{C}$ ist und $q \notin F$. Also ist

$$C' \cap (\text{Sing}(\tilde{H}) \cup \text{Sing}(\Delta) \cup Z)$$

eine endliche Menge. Die Behauptung ist damit gezeigt. \square

Lemma 4.1.12. *Es existieren $r \in \mathbb{N}_0$, $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$ und für $\nu \in \{1, \dots, r-1\}$ irreduzible Kurven $M_\nu \subset E_{i_\nu} \cap E_{i_{\nu+1}}$ sowie eine irreduzible Kurve $M_r \subset E_{i_r} \cap \Delta$ derart, dass für alle $\nu \in \{0, \dots, r\}$*

$$f(M_\nu) = C_1$$

gilt sowie $M_1 = \tilde{C}_1$ und $g(\tilde{C}_1) = g(M_r)$. Es ist $\dim g(\tilde{C}_1) = 1$.

Beweis. Für jedes $p \in C_1$, wählen wir $q = q_p \in \tilde{C}_1$ mit $f(q) = p$. Da $f(\Delta) = C_1$ ist und $f^{-1}(p)$ zusammenhängend, existieren $r_p \in \mathbb{N}_0$, $i_1^p, \dots, i_{r_p}^p \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$ und irreduzible Kurven $C_\nu^p \subset f^{-1}(p) \cap E_{i_\nu^p}$ sowie eine irreduzible Kurve $C_{r_p+1}^p \subset f^{-1}(p) \cap \Delta$ derart, dass $q \in C_1^p$ ist und für alle $\nu \in \{1, \dots, r_p\}$

$$C_\nu^p \cap C_{\nu+1}^p \neq \emptyset$$

gilt. Da die Anzahl der Komponenten der Fasern $f^{-1}(p)$ beschränkt ist, ist die Menge

$$\bigcup_{p \in C_1} \{(i_1^p, \dots, i_{r_p}^p)\}$$

endlich. Daher gibt es $r \in \mathbb{N}_0$, $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_0\}$ mit der Eigenschaft, dass für unendlich viele $p \in C_1$

$$r_p = r \quad \text{und} \quad (i_1^p, \dots, i_r^p) = (i_1, \dots, i_r)$$

gelten.

Die einzige irreduzible Kurve in E_{i_0} die von f surjektiv auf B_1 abgebildet wird, ist \tilde{C}_1 . Wir müssen also $M_0 = \tilde{C}_1$ wählen. Ist $r = 0$, so gibt es unendlich viele $q \in \tilde{C}_1 \cap \Delta$. Also ist $M_0 = \tilde{C}_1 \subset \Delta$.

Ist $r \geq 1$, so gibt es unendlich viele $q \in \tilde{C}_1 \cap E_{i_1}$ und daher ist

$$M_0 = \tilde{C}_1 \subset E_{i_1}.$$

Genauso ist $p \in f(E_{i_\nu} \cap E_{i_{\nu+1}})$ für unendliche viele $p \in C_1$ und alle $\nu \in \{1, \dots, r-1\}$ und daher ist tatsächlich

$$C_1 \subset f(E_{i_\nu} \cap E_{i_{\nu+1}}).$$

Man bemerke, dass $i_\nu \neq i_{\nu+1}$ ist für $\nu \in \{1, \dots, r-1\}$, da die E_i glatt sind und damit auch die allgemeinen Fasern von $g|_{E_i}$. Es gibt daher eine irreduzible, reduzierte Kurve

$$M_\nu \subset E_{i_\nu} \cap E_{i_{\nu+1}} \quad \text{mit} \quad f(M_\nu) = C_1.$$

Das gleiche Argument liefert $M_r \subset E_{i_r} \cap \Delta$ mit $f(M_r) = C_1$. Da die E_i glatt sind, folgt mit Lemma 3.1.13, dass wir für p außerhalb einer endlichen Menge $F \subset C_1$ die Kurven C_ν^p mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$C_\nu^p \subset E_{i_\nu}$$

wählen können und wir werden dies in der Folge annehmen. Es ist noch $g(\tilde{C}_1) = g(M_r)$ und $\dim g(\tilde{C}_1) = 1$ zu zeigen. Wir zeigen zunächst:

Behauptung 1. $\dim g(M_r) = 1$.

Angenommen es ist $\dim g(M_r) = 0$, so setzen wir $p_0 = g(M_r)$ und

$$F' = \left\{ p \in C_1 \mid \dim \left(f_{|\Delta}^{-1}(p) \cap \text{Exc}(g) \right) = 1 \right\} \cup F.$$

Letztere Menge ist endlich, da $\Delta \not\subset \text{Exc}(g)$ ist. Es sei $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ allgemein im Sinne von Lemma 4.1.11 mit $\hat{C} = M_r$, vermeide zusätzlich F' und schneide C_1 transversal. Nach Lemma 4.1.10 enthält $H \cap C_1$ drei paarweise verschiedene Punkte p_1, p_2, p_3 . Für $i \in \{1, 2, 3\}$ ist $M_r \cap C_{r+1}^{p_i} \neq \emptyset$ und daher schneiden sich, nach Lemma 4.1.11, Δ und \tilde{H} für $i \in \{1, 2, 3\}$ außerhalb einer endlichen Menge transversal in den Kurven $C_{r+1}^{p_i}$. Nach Wahl von F' ist

$$C_{r+1}^{p_i} \not\subset \text{Exc}(g), \quad \text{für alle } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Der Schnitt $\Delta_0.D$ enthält also die drei paarweise verschiedenen Kurven

$$A_1 = g(C_{r+1}^{p_1}), \quad A_2 = g(C_{r+1}^{p_2}), \quad A_3 = g(C_{r+1}^{p_3})$$

und ist entlang dieser generisch reduziert. Für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt

$$p_0 \in A_i \not\subset \text{Bs}(L).$$

Da $\dim \text{Bs}(L) = 1$ ist, enthält $\Delta_0.D$ noch (mindestens) eine weitere Komponente. Insbesondere haben wir $H^1(A, \mathcal{O}_A) = 0$ für $A = A_1 + A_2 + A_3$ und daher gibt es nach Lemma 3.1.3 lokal in p_0 Koordinaten derart, dass die A_i den Koordinatenachsen entsprechen. Es gilt dann für alle $i \in \{1, 2, 3\}$

$$h^0(p_0, Q_{\Delta_0, D}^{A_i}) \geq 2.$$

Nach Lemma 3.2.13 gilt Gleichheit und jede weitere Kurve

$$B \subset \Delta_0 \cap D$$

schneidet die Kurven A_i höchstens in p_0 . Es gibt eine irreduzible, reduzierte Komponente B_0 , die dort schneidet, da $\Delta_0 \cap D$ zusammenhängend ist.

Da $I_{A, p_0} \subset m_{p_0}^2$ ist, folgt $h^1(A + B_0, \mathcal{O}_{A+B_0}) = 1$. Also ist $\Delta_0.D$ nach Lemma 3.2.11 gerade die Vereinigung dieser vier (reduzierten) Kurven und es folgt, dass B_0 die einzige Kurve in $\text{Bs}(L)$ ist. Da $\Delta_0.D$ generisch entlang B_1 reduziert ist, ist auch für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ die Kurve $D_1.D_2$ generisch entlang B_1 reduziert. Mit Lemma 3.1.10 folgt, dass es $D_1, D_2 \in |L|$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$D_1.D_2 = C + B_0$$

ist. Nach Lemma 4.1.8 schneiden sich C und B_0 transversal. Ein Widerspruch zu $h^0(C, Q_{D_1, D_2}^C) = 2$. Es gilt also wie behauptet $\dim g(M_r) = 1$. Wir zeigen nun:

Behauptung 2. *Für alle $p \in C_1$ und alle $1 \leq \nu \leq r$ werden die Kurven C_ν^p (auch) von g kontrahiert.*

Angenommen nicht, so wählen wir $1 \leq \nu_0 \leq r$ maximal derart, dass die Behauptung für ν_0 nicht erfüllt ist. Für $\nu_0 < \nu \leq r$ werden also für alle $p \in C_1$ die Kurven C_ν^p von g kontrahiert. Nach Wahl der C_ν^p ist für fast alle $p \in C_1$

$$C_\nu^p \cap M_\nu \neq \emptyset, \quad C_\nu^p \cap M_{\nu+1} \neq \emptyset.$$

Werden also alle C_ν^p kontrahiert, so folgt: $g(M_\nu) = g(M_{\nu+1})$. Durch endliche Induktion erhalten wir:

$$g(M_\nu) = g(M_r) \quad \text{für alle } \nu_0 \leq \nu \leq r.$$

Da $M_{\nu_0} \subset E_{i_{\nu_0}} \subset \text{Exc}(g)$ ist, gilt

$$g(E_{i_{\nu_0}}) = g(M_{\nu_0}) = g(M_r).$$

Nach Wahl von ν_0 wird für ein $p \in C_1$ die Kurve $C_{\nu_0}^p$ nicht von g kontrahiert. Es folgt aus dem zweiten Teil von Lemma 3.1.13, dass dies tatsächlich für fast alle $p \in C_1$ gilt.

Für $D \in |L|$ allgemein gibt es also drei paarweise verschiedene Kurven in $g_*^{-1}(D) \cap \Delta$, die surjektiv auf $g(M_r)$ abgebildet werden. Es gilt daher $I_D \subset I_{g(M_r)}^3$. Außerdem ist für allgemeines $D \in |L|$ und $p \in H \cap C_1$ die Schnittkurve $\Delta_0.D$ generisch reduziert entlang der Kurve $g(C_{r+1}^p)$. Es ist

$$g(M_r) \subset \text{Bs}(L) \subset \Delta_0 \cap D \quad \text{und} \quad g(M_r) \cap g(C_{r+1}^p) \neq \emptyset$$

wegen $g(E_{i_{\nu_0}}) = g(M_r)$ bzw. $M_r \cap C_{r+1}^p \neq \emptyset$. Nach Lemma 4.1.8 schneiden sich $g(M_r)$ und $g(C_{r+1}^p)$ transversal. Wir können also Lemma 3.1.5 anwenden und erhalten

$$h^0(X, Q_{D, \Delta_0}^{g(C_{r+1}^p)}) \geq 3.$$

Ein Widerspruch zu Lemma 3.2.13. Es werden also tatsächlich für alle $p \in C_1$ und alle $1 \leq \nu \leq r$ die Kurven C_ν^p von f kontrahiert. Wie oben folgt nun

$$g(\tilde{C}_1) = g(M_0) = g(M_r).$$

Dies zeigt auch die letzte die Behauptung. □

Wir setzen $B_1 = g(E_{i_0}) = g(M_1)$. Man beachte, dass auch B_1 unabhängig von der gewählten Auflösung ist. Tatsächlich ist $B_1 = \overline{\Phi^{-1}(H_0)}$.

Lemma 4.1.13. *Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ ist die Kurve C_{D_1, D_2} definiert und schneidet B_1 transversal in genau einem Punkt, der in keiner anderen irreduziblen Komponente von $D_1 \cap D_2$ als C_{D_1, D_2} und B_1 enthalten ist. Für alle D_1, D_2 mit dieser Eigenschaft ist $D_1.D_2$ nicht generisch reduziert entlang B_1 . Insbesondere ist*

$$h^1(\text{red}(D_1.D_2), \mathcal{O}_{\text{red}(D_1.D_2)}) = 0.$$

Beweis. Es sei daran erinnert, dass wir die Sprechweise „Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L| \dots$ “ im Sinne von Abschnitt 2.1 verwenden.

Wir definieren zunächst die Menge

$$U = \{D \in |L| \mid D^\# \neq H_0, \dim(D^\# \cap f(\text{Exc}(f))) = 0, \\ \dim(\Phi_*^{-1}(D^\# \cap H_0)) = 1\}.$$

Dann ist U sicherlich nicht-leer und Zariski-offen. Sei $D_1 \in U$. Dann ist $D_1^\# \cap f(\text{Exc}(f))$ eine endliche Menge und wir haben nicht-leere, endliche Mengen

$$F_1 = \{q \in B_1 \mid q \in \text{Sing}(\text{Bs}(L))\}$$

$$F_2 = \{p \in D_1^\# \mid p \in f(\text{Exc}(f)) \text{ oder } (p \in H_0 \text{ und } \Phi^{-1}(p) \in F_1)\}$$

und setzen

$$V_{D_1} = \{D \in |L| \mid D^\# \cap F_2 = \emptyset, H_0 \cap D_1^\# \not\subset D^\#\}.$$

Sei $D_2 \in V_{D_1}$. Dann ist C_{D_1, D_2} definiert und schneidet B_1 in $q \notin F_1$. Nach Lemma 4.1.8 schneiden sich C_{D_1, D_2} und B_1 transversal. Da $q \notin F_1$ ist, gibt es keine irreduzible Kurve $B_1 \neq B \subset \text{Bs}(L)$ mit $q \in B$.

Falls es eine irreduzible Komponente $C_{D_1, D_2} \neq C \not\subset \text{Bs}(L)$ von $D_1 \cap D_2$ mit $q \in C$ gibt, so wird diese von Φ kontrahiert und wir erhalten einen Widerspruch zu

$$D_1^\# \cap D_2^\# \cap f(\text{Exc}(f)) = \emptyset.$$

Es gibt durch q also keine weitere Komponente von $D_1 \cap D_2$ als C_{D_1, D_2} und B_1 . Da $h^0(X, Q_{D_1, D_2}) = 2$ ist nach Lemma 3.2.13, kann $D_1 \cdot D_2$ nicht generisch entlang B_1 reduziert sein. Also ist $\text{red}(D_1 \cdot D_2) \subsetneq D_1 \cdot D_2$ und Lemma 3.2.11 impliziert die letzte Behauptung. \square

Lemma 4.1.14. *Für allgemeines $D \in |L|$ ist $I_D \not\subset I_{B_1}^2$. Es gibt eine nicht-leere, Zariski-offene Teilmenge $U' \subset |L|$ und für jedes $D_1 \in U'$ eine nicht-leere, Zariski-offene Teilmenge $V'_{D_1} \subset |L|$ derart, dass für alle $D_1 \in U'$ und für alle $D_2 \in V'_{D_1}$ die Folgerungen aus dem vorangehenden Lemma gelten und zusätzlich*

$$C_{D_1, D_2} \cap B_1 \not\subset \text{Sing}(D_1)$$

ist.

Beweis. Die Menge der D mit $I_D \not\subset I_{B_1}^2$ ist Zariski-offen in $|L|$. Angenommen es gilt $I_D \subset I_{B_1}^2$ für alle $D \in |L|$. Dann wählen wir $D_1, D_2 \in |L|$ allgemein wie in Lemma 4.1.13, d.h. C_{D_1, D_2} ist definiert und schneidet B_1 transversal in genau einem Punkt, der in keiner weiteren irreduziblen Komponente von $D_1 \cap D_2$ enthalten ist. Lokal in diesem Punkt sind also die Voraussetzungen von Lemma 3.1.5 erfüllt und wir folgern

$$h^0(X, Q_{D_1, D_2}) \geq 2 + 2 - 1 = 3.$$

Ein Widerspruch zu Lemma 3.2.13. Die erste Aussage ist damit gezeigt.

Für die zweite Aussage sei $U \subset |L|$ die Menge aus dem Beweis von Lemma 4.1.13. Wir setzen

$$U' = \{D \in U \mid B_1 \not\subset \text{Sing}(D)\}.$$

Sei $D_1 \in U'$. Dann ist $\text{Sing}(D_1) \cap B_1$ eine endliche Menge und es ist klar, dass mit

$$\begin{aligned} F'_1 &= \{q \in B_1 \mid q \in \text{Sing}(\text{Bs}(L)) \cup \text{Sing}(D_1)\} \quad \text{und} \\ F'_2 &= \{p \in D_1^\# \mid p \in f(\text{Exc}(f)) \text{ oder } (p \in H_0 \text{ und } \Phi^{-1}(p) \in F'_1)\} \end{aligned}$$

die Menge

$$V'_{D_1} = \{D \in |L| \mid D^\# \cap F'_2 = \emptyset, H_0 \cap D_1^\# \not\subset D^\#\}.$$

erfüllt, was wir wollen. \square

Wir wollen nun die bisherigen Ergebnisse verwenden, um eine spezielle, gutartige Auflösung von Φ zu wählen. Wir verwenden Notation 2.4.4. Wir setzen außerdem

$$L_k = h_{k-1}^* L_{k-1} - b_k E_k$$

und bemerken bzw. erinnern daran, dass

$$b_k = c_k = \min \{b \in \mathbb{N} \mid E_{k+1} \not\subset \text{Bs}(h_k^* L_k - b E_{k+1})\}$$

ist. Darüberhinaus bezeichnen wir mit G_k den eindeutig bestimmten, effektiven Divisor mit

$$(g_{k-1})_*^{-1}(\Delta_0) = \Delta_k = g_{k-1}^* \Delta_0 - G_k.$$

Lemma 4.1.15. *Es gibt $n \in \mathbb{N}$ und Aufblasungen $h_k: X_{k+1} \rightarrow X_k$, für $i = 1, \dots, n$, derart, dass mit obiger Notation die folgenden Aussagen gelten:*

- $\text{Bs}(L_n) = \emptyset$
- $G^n - F^n \geq 0$ und $\text{Supp}(G^n - F^n) = \text{Exc}(g_n)$
- In der Notation von Lemma 4.1.12 ist die Einschränkung $g|_{M_r}$ ein Isomorphismus, $f|_{M_r}$ ist birational und $M_r \not\subset \text{Sing}(\Delta)$.
- Neben M_r gibt es noch höchstens eine irreduzible Kurve $M \subset \Delta$ mit $g(M) = B_1$ und falls eine solche Kurve existiert ist auch sie nicht in $\text{Sing}(\Delta)$ enthalten.

Beweis. Wir verwenden im gesamten Beweis Notation 2.4.4. Wir wählen $A_0 = B_1$. Also ist h_0 die Aufblasung von X entlang der Kurve B_1

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \subset & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow h_0 \\ B_1 & \subset & X. \end{array}$$

Wir erinnern daran, dass $B_1 \subset \text{Bs}(L)$ diejenige ausgezeichnete Kurve ist, die von der beweglichen Kurve C_{D_1, D_2} getroffen wird. Für allgemeines $D \in |L|$ ist $I_D \not\subset I_{B_1}^2$ nach Lemma 4.1.14 und daher ist

$$b_1 = 1, \quad \text{d. h.} \quad L_1 = h_0^* L - E_1.$$

Für $D \in |L|$ mit $I_D \not\subset I_{B_1}^2$ gibt es genau eine irreduzible Kurve

$$B_D \subset (h_0)_*^{-1} D \cap E_1$$

mit $g_1(B_D) = B_1$ und diese wird von h_0 birational auf B_1 abgebildet. Insbesondere ist B_D glatt und rational nach Lemma 3.1.12.

Es sei $D_1 \in |L|$ allgemein im Sinne des zweiten Teils von Lemma 4.1.14 fixiert. Wir setzen

$$\hat{D}_1 := (h_0)_*^{-1} D_1 = (h_0)^* D_1 - E_1.$$

Für $p \in B_1 \setminus \text{Sing}(D_1)$ schneidet \hat{D}_1 den Divisor E_1 lokal über p in genau einer glatten, irreduziblen Kurve. Für $D_2 \in |L|$ allgemein ist nach Lemma 4.1.14

- C_{D_1, D_2} definiert,
- es existiert $p \in B_1 \cap C_{D_1, D_2}$ mit $p \notin \text{Sing}(D_1)$ und es ist
- $h^1(\text{red}(D_1 \cdot D_2), \mathcal{O}_{\text{red}(D_1 \cdot D_2)}) = 0$.

Damit, unter zusätzlicher Verwendung von $h^0(p, \mathcal{O}_{D_1, D_2}) = 2$, folgt aus dem zweiten Teil von Lemma 3.1.4, dass es für D_1 lokale Koordinaten x, y in p derart gibt, dass lokal in p die Aussagen

$$\begin{aligned} C &= D_1 \cdot D_2 = D_2|_{D_1} = (xy^2 = 0), & (4.1.5) \\ C_{D_1, D_2} &= (x = 0), \quad B_1 = (y = 0) \end{aligned}$$

gelten. Insbesondere haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_{C_{D_1, D_2}} \oplus \mathcal{O}_B \rightarrow \mathbb{C}_p^2 \rightarrow 0,$$

wobei wir $C = C_{D_1, D_2} + B$ schreiben. Das tensorieren mit dem Geradenbündel L und das Bilden globaler Schnitte liefert die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow H^0(C_{D_1, D_2}, L|_{C_{D_1, D_2}}) \oplus H^0(B, L|_B) \rightarrow \mathbb{C}^2.$$

Daraus folgt die Ungleichung $h^0(C_{D_1, D_2}, L|_{C_{D_1, D_2}}) \leq 4$. Also ist

$$L.C_{D_1, D_2} \leq 3. \quad (4.1.6)$$

Aus (4.1.5) folgt außerdem, dass die Kurven B_{D_1} und B_{D_2} lokal über p identisch sind und dass sich \hat{D}_1 und \hat{D}_2 dort generisch transversal schneiden. Weil beide Kurven irreduzibel sind, gilt tatsächlich $B_{D_1} = B_{D_2}$. Mit

$$B_2 = B_{D_1}$$

gilt folglich für allgemeines $D \in |L|$ die Inklusion

$$B_2 \subset (g_1)_*^{-1}D \subset g_1^*D - E_1 \in |L_1|.$$

Mithin gilt für allgemeines und daher jedes $D \in |L_1|$ die Inklusion $B_2 \subset D$, d.h. es ist

$$B_2 \subset \text{Bs}(L_1).$$

Wir setzen $A_1 = B_2$, d.h. $h_1: X_2 \rightarrow X_1$ ist die Aufblasung von X_1 in B_2

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \subset & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow h_1 \\ B_2 & \subset & X_1. \end{array}$$

Natürlich ist $B_2 \not\subset \text{Sing}(\hat{D})$ für allgemeines $\hat{D} \in |L_1|$. Folglich ist $b_2 = 1$, d.h.

$$L_2 = h_1^*L_1 - E_2 = g_1^*L - E_1 - 2E_2,$$

wobei wir unter Missbrauch der Notation die Strikttransformierte von E_1 in X_1 wieder mit E_1 bezeichnen. Da sich \hat{D}_1 und \hat{D}_2 generisch in B_2 transversal schneiden, gibt es in

$$(g_1)_*^{-1}D_1 \cap (g_1)_*^{-1}D_2$$

keine irreduzible Komponente mehr die von g_1 surjektiv auf B_1 abgebildet wird. Insbesondere gibt es auch in $\text{Bs}(L_2)$ keine solche Kurve. Da die Strikttransformierte $\hat{C}_{D_1, D_2} = (g_2)_*^{-1}C_{D_1, D_2}$ den Divisor E_2 trifft, erhalten wir unter Verwendung von (4.1.6)

$$L_2.\hat{C}_{D_1, D_2} = L.C_{D_1, D_2} - E_1.\hat{C}_{D_1, D_2} - 2E_2.\hat{C}_{D_1, D_2} \leq 1$$

und merken an, dass $\hat{C}_{D_1, D_2} = C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2}$ ist. Da $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1).l_{H_1, H_2} = 1$ ist, gilt nach dem zweiten Teil von Lemma 3.1.10 in der obigen Ungleichung tatsächlich Gleichheit und es ist

$$\text{Bs}(L_2) \cap C_{\hat{D}_1, \hat{D}_2} = \emptyset. \quad (4.1.7)$$

Natürlich behält diese Aussage ihre Gültigkeit, wenn wir weitere Aufblasungen durchführen und L_2 durch L_k , sowie C_{D_1, D_2} durch die entsprechende Strikttransformierte ersetzen.

Bisher haben wir zweimal eine Kurve aufgeblasen. In Notation 2.4.4 ist also $a_0 = a_1 = 1$ und daher $E^2 \geq F^2$ nach Lemma 2.4.5, wobei dir daran erinnern, dass E^k, F^k die Gleichungen

$$L_k = g_k^* L - F^k, \quad K_{X_k} = g_k^* K_X + E^k$$

erfüllen.

Wir folgen nun dem Prinzipialisierungsalgorithmus [BEVU05, Theorem 2.5] für $I = \mathfrak{b}(L_2)$, solange bis für ein $n_1 \in \mathbb{N}$ zum ersten Mal

$$\text{Sing}(L_{n_1}, 2) = \emptyset$$

ist. Für $k < n_1$ ist also $b_k \geq 2$ ist und folglich gilt $E^{n_1} \geq F^{n_1}$ - wieder nach Lemma 2.4.5.

Um schließlich auch noch

$$\text{Bs}(L_n) = \text{Sing}(L_n, 1) = \emptyset$$

zu erreichen ohne die Ungleichung $E^n \geq F^n$ zu verletzen, weichen wir leicht von dem Algorithmus aus [BEVU05] ab. Genauer erlauben wir keine Aufblasungen in Punkten außer um Singularitäten irreduzibler Kurven $C \subset \text{Bs}(L_k)$ aufzulösen. Es ist trotzdem möglich die gewünschte Auflösung zu erhalten, weil – grob gesprochen – wir zum Einen nicht fordern, dass der Divisor E „einfache Kreuzungssingularitäten“ habe, und zum anderen wissen, dass $\text{Bs}(L_k)$ keine 0-dimensionale Komponenten besitzt. Präziser zeigen wir zunächst:

Behauptung 1. *Für $k \geq 2$ enthält $\text{Bs}(L_k)$ keine 0-dimensionalen Komponenten. M.a.W. für alle $k \geq 2$ und $x \in \text{Bs}(L_k)$ existiert eine Kurve $B \subset \text{Bs}(L_k)$ mit $x \in B$.*

Beweis. Sei $k \geq 2$ und sei $x \in \text{Bs}(L_k)$. Nach Lemma 3.1.10 existieren $D_1, D_2 \in |L_k|$ mit der Eigenschaft, dass

$$D_1 \cap D_2 = C_{D_1, D_2} \cup \text{Bs}(L_k)$$

ist. Da $D_1 \cap D_2$ rein von Dimension 1 ist und

$$x \in \text{Bs}(L_k) \subset D_1 \cap D_2,$$

gibt es eine irreduzible Kurve $B \subset D_1 \cap D_2$ mit $x \in B$. Wie bereits bemerkt gilt das Analogon von (4.1.7) auf X_k . Also ist $x \notin C_{D_1, D_2}$ und die gewünschte Inklusion $B \subset \text{Bs}(L_k)$ folgt. \square

Um die Bedingung aus Lemma 2.4.5 für den Fall $a_k = 2$, $b_k = 1$ zeigen zu können, benötigen wir die folgende Behauptung.

Behauptung 2. *Für alle $k \geq 0$ gilt: ist $C \subset \text{Bs}(L_k)$ irreduzibel und reduziert, aber singulär, so existiert ein irreduzibler Divisor $C \subset \Gamma \subset X_k$ derart, dass*

$$\text{mult}_\Gamma(E^k - F^k) > 0.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion. Für $k = 0$ ist jede irreduzible, reduzierte Kurve $C \subset \text{Bs}(L)$ glatt und es ist nichts zu zeigen.

Die Aussage gelte für $k \geq 0$ und es sei $C \subset \text{Bs}(L_{k+1})$ irreduzibel, reduziert, singulär. Wir rufen zunächst die verwendete Notation ins Gedächtnis. Wir haben $A_k \subset X_k$ irreduzibel und glatt mit $\dim A_k = 2 - a_k$, die Abbildung h_k ist die Aufblasung von X_k in A_k und es gilt $L_{k+1} = h_k^*L_k - b_kE_{k+1}$.

$$\begin{array}{ccc} E_{k+1} & \subset & X_{k+1} \\ \downarrow & & \downarrow h_k \\ A_k & \subset & X_k \end{array}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Wir nehmen zunächst $C \subset E_{k+1}$ an. Dann ist $k < n_1$, weil andernfalls C nicht singulär sein kann nach Behauptung 3. Außerdem ist $a_k < b_k$. Angenommen nämlich es ist $a_k \geq b_k$. Dann ist

$$a_k = b_k = 2,$$

da $a_k \leq 2$ ist und $b_k \geq 2$ für $k < n_1$. Nach Definition von a_k ist also $\dim A_k = 0$. Nach Definition von b_k existiert ein Schnitt $s \in H^0(X_k, L_k)$, der (genau) von Ordnung 2 in A_k verschwindet. D.h für die Strikttransformierte \hat{D} des zugehörigen Divisor $D = (s = 0)$ gilt

$$\hat{D} = h_k^*D - 2E_{k+1}$$

und daher $\hat{D}|_{E_{k+1}} \sim \mathcal{O}_{E_{k+1}}(2)$, wobei man beachte, dass hier $E_{k+1} \simeq \mathbb{P}^2$ ist. Es gilt $C \subset \hat{D} \cap E_{k+1}$ und $\hat{D}|_{E_{k+1}}$ ist effektiv, da $E_{k+1} \not\subset \hat{D}$ ist. Folglich ist $\deg_{\mathbb{P}^2}(C) \leq 2$ und daher ist C glatt. Ein Widerspruch.

Also ist tatsächlich $a_k < b_k$ und die Behauptung gilt mit $\Gamma = E_{k+1}$ unter Verwendung der Formel aus dem Beweis von Lemma 2.4.5.

- Ist $C \not\subset E_{k+1}$, so ist die Kurve $h_k(C)$ singulär nach Lemma 3.1.12. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein irreduzibler Divisor

$$h_k(C) \subset \Gamma' \subset X_k$$

mit $\text{mult}_{\Gamma'}(E^k - F^k) > 0$. Nach der Formel aus dem Beweis von Lemma 2.4.5 gilt für $\Gamma = (h_k)_*^{-1}(\Gamma')$ die Gleichung

$$\text{mult}_{\Gamma'}(E^k - F^k) = \text{mult}_\Gamma(E^{k+1} - F^{k+1}).$$

Also erfüllt Γ die Behauptung.

Die Behauptung ist gezeigt. \square

Behauptung 3. Für $k > n_1$ gilt: jede irreduzible Kurve $C \subset \text{Bs}(L_k) \cap E_k$ ist glatt und ist $a_{k-1} = 1$, so gilt

$$\# 1\text{-dim}(\text{Bs}(L_{k-1})) \geq \# 1\text{-dim}(\text{Bs}(L_k)),$$

wobei 1-dim die Menge der jeweils enthaltenen irreduziblen Kurven bezeichnet.

Beweis. Sei also $k > n_1$ und sei $C \subset \text{Bs}(L_k) \cap E_k$ eine irreduzible Kurve. Da $\text{Sing}(L_{k-1}, 2) = \emptyset$ ist, gibt es für jedes $x \in A_{k-1}$ ein

$$s \in H^0(X_{k-1}, L_{k-1})$$

mit der Eigenschaft, dass der Divisor $D = (s = 0)$ in x glatt ist ².

Ist $\dim A_{k-1} = 0$, so folgt unmittelbar, dass C eine glatte rationale Kurve ist. Wir haben nämlich

$$C \subset \text{Bs}(L_k) \cap E_k \subset (h_{k-1})_*^{-1}(D) \cap E_k$$

und $(h_{k-1})_*^{-1}(D)$ ist die Aufblasung von D in einem glatten Punkt.

Ist $\dim A_{k-1} = 1$, so folgt, dass $\text{Bs}(L_k) \cap E_k$ höchstens aus einer irreduziblen Kurve besteht und dass diese, so sie existiert, isomorph auf A_{k-1} abgebildet wird. Also ist C auch in diesem Fall glatt. \square

Insbesondere ist die Anzahl der singulären, irreduziblen Kurven in $\text{Bs}(L_k)$ monoton fallend in k . Da sich die Singularitäten ebener Kurven durch Aufblasungen auflösen lassen, gibt es also $n_2 \in \mathbb{N}$ und Punktaufblasungen h_k , für $n_1 \leq k \leq n_2 - 1$ derart, dass

- für alle k eine irreduzible Kurve $C \subset \text{Bs}(L_k)$ existiert mit $A_k \subset \text{Sing}(C)$ und dass
- der Basisort $\text{Bs}(L_{n_2})$ keine irreduziblen, singulären Kurven enthält.

Für $n_1 \leq k \leq n_2 - 1$ ist $a_k = 2$ und $b_k = 1$ und die erste der obigen Eigenschaften zeigt mit Behauptung 2, dass die Bedingung aus Lemma 2.4.5 erfüllt ist. Folglich gilt

$$E^{n_2} \geq F^{n_2}.$$

Wir blasen nun sukzessive (beliebige) irreduzible (also glatte) Kurven in $\text{Bs}(L_k)$ auf. Die Anzahl der in $\text{Bs}(L_k)$ enthaltenen Kurven ist dann (schwach) monoton fallend in k und es gilt (im Wesentlichen offensichtlich):

Behauptung 4. Die Anzahl der Kurven in $\text{Bs}(L_k)$ verringert sich echt nach jeweils endlich vielen Schritten.

²Möglicherweise gibt es kein s derart, dass $(s = 0)$ in jedem Punkt von A_k glatt ist.

Beweis. Sei $k \geq n_2$ und sei h_k die Aufblasung von X_k in der glatten, irreduziblen Kurve $C \subset \text{Bs}(L_k)$. Wir fixieren $x \in C$. Da $\text{Sing}(L_k, 2) = \emptyset$ ist, gibt es einen Divisor $D \in |L_k|$, der in x glatt ist. Folglich ist

$$(I_{C,D})_x = t \cdot \mathcal{O}_{D,x}$$

für ein $t \in \mathcal{O}_{D,x}$. Sei $s \in \mathfrak{b}(L_k)_x$ der nicht entlang des Keims von D in x verschwindet. Die natürliche Zahl $d = \text{ord}_C(s|_D)$ ist eindeutig bestimmt durch die Bedingungen

$$s|_D = t^d \cdot r, \quad r \in \mathcal{O}_{D,x} \quad \text{und} \quad t \nmid r. \quad (4.1.8)$$

Für $\hat{D} = (h_k)_*^{-1}D$ ist $(h_k)|_{\hat{D}}$ lokal über x ein Isomorphismus. Seien

$$\begin{aligned} y \in \hat{D} \quad \text{mit} \quad x = h_k(y) \quad \text{und} \\ u \in \mathcal{O}_{X_{k+1},y} \quad \text{mit} \quad I_{E_k,y} = u \cdot \mathcal{O}_{X_{k+1},y}. \end{aligned}$$

Dann gilt $u|_{\hat{D}} = h_k^*t$ und es ist $h_k^*s/u \in \mathfrak{b}(L_{k+1})_y$. Durch Anwenden von $((h_k)|_{\hat{D}})^*$ auf (4.1.8) erhalten wir

$$(h_k^*s/u)|_{\hat{D}} = u|_{\hat{D}}^{d-1} \cdot r', \quad u|_{\hat{D}} \nmid r'. \quad (4.1.9)$$

Es gibt genau eine irreduzible Kurve $C_D \subset \hat{D}$ mit $h_k(C_D) = C$ und diese ist lokal in y durch $u|_{\hat{D}}$ definiert. Aus (4.1.9) folgt daher die Ungleichung

$$\min \left\{ \text{ord}_{C_D}(s|_D) \mid s \in \mathfrak{b}(L_{k+1})_y \right\} < \min \left\{ \text{ord}_C(s|_D) \mid s \in \mathfrak{b}(L_k)_x \right\}$$

und daraus folgt die Behauptung. \square

Es gibt also $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $\text{Bs}(L_n)$ keine Kurven enthält. Daher ist aber nach Behauptung 1 tatsächlich $\text{Bs}(L_n) = \emptyset$. Wir setzen

$$g = g_n, \quad E = E^n, \quad F = F^n.$$

Dies ist eine Auflösung, die die erste im Lemma geforderte Eigenschaft hat und außerdem die Ungleichung

$$E \geq F$$

erfüllt. Wir schreiben $f: X_n \rightarrow \mathbb{P}^3$ für die von L_n induzierte Abbildung. Die Strikttransformierten von E_k in X_n bezeichnen wir unter Missbrauch der Notation wieder mit E_k .

Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ trifft die Strikttransformierte der Kurve C_{D_1, D_2} den Divisor $E_2 \subset X_n$. Daher ist E_2 der eindeutig bestimmte Divisor in $\text{Exc}(g)$, der von f nicht kontrahiert wird, d.h. in Notation 4.1.2 ist $I = \{2\}$.

Mit $\Delta \subset X_n$ bezeichnen wir wieder denjenigen Divisor, der von f , aber nicht von g kontrahiert wird. Wir erinnern an die Gleichheiten

$$g^*L - E = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1), \quad g^*K_X + F = K_{X_n}$$

und definieren $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ über

$$E = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i, \quad F = \sum_{i=1}^n \beta_i E_i$$

sowie $\gamma_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und den Divisor H über

$$\begin{aligned} g^*K_X + F &= f^*K_{\mathbb{P}^3} + \gamma_2 \Delta + H & (4.1.10) \\ H &= \sum_{i=1, i \neq 2}^n \gamma_i E_i. \end{aligned}$$

Wegen der speziellen Wahl der ersten beiden Aufblasungen haben wir

$$\alpha_1 = b_1 = 1, \quad \beta_1 = a_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + b_2 = 2, \quad \beta_2 = \beta_1 + a_2 = 2.$$

Aus Gleichung (4.1.4) wissen wir bereits, dass

$$\Delta_0 = g(\Delta) \in |L|$$

ist. Folglich erhalten wir durch Anwenden von g_* auf Gleichung (4.1.10)

$$\gamma_2 = 4 - 2$$

und daraus wiederum

$$\Delta \sim g^*L - \left(2E - \frac{F}{2} + \frac{H}{2}\right).$$

Wir definieren G und $\delta_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ über

$$G = 2E - \frac{F}{2} + \frac{H}{2}, \quad G = \sum_{i=1}^n \delta_i E_i$$

und bemerken, dass tatsächlich $\Delta = g^*\Delta_0 - G$ ist. Wegen $E \geq F$ gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\delta_i \geq 2\alpha_i - \frac{\beta_i}{2} \geq \frac{3}{2}\beta_i > \beta_i. \quad (4.1.11)$$

Dies sagt gerade, dass die zweite im Lemma behauptete Eigenschaft

$$G \geq F \quad \text{und} \quad \text{Supp}(G - F) = \text{Exc}(g).$$

erfüllt ist.

Wir setzen $\Delta_k = (g_k)_*^{-1}(\Delta_0)$ und veranschaulichen dies in einem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k & \subset & X_k \\ \downarrow & & \downarrow g_k \\ \Delta_0 & \subset & X_0 \end{array}$$

Es ist $\delta_1 \leq \delta_2$ wegen

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= h_1^* \Delta_1 - \delta'_2 \cdot E_2 = h_1^*(h_0^* \Delta_0 - \delta_1 \cdot E_1) - \delta'_2 \cdot E_2 \\ &= g_2^* \Delta_0 - \delta_1 \cdot E_1 - \underbrace{(\delta_1 + \delta'_2)}_{=\delta_2} \cdot E_2 \end{aligned}$$

mit $\delta'_2 \geq 0$ und direkt aus der Definition von G folgen

$$\delta_2 = 2\alpha_2 - \frac{\beta_2}{2} = 3 \quad \text{und} \quad 2\delta_1 = 4\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 3 + \gamma_1.$$

Daher ist

$$\frac{3 + \gamma_1}{2} = \delta_1 \leq \delta_2 = 3$$

und folglich $\gamma_1 \in \{1, 3\}$. Angenommen es ist $\gamma_1 = 3$. Dann ist $\delta_1 = \delta_2$ und daher ist $B_2 \not\subset \Delta_1$, wobei wir daran erinnern, dass h_1 die Aufblasung von X_1 entlang B_2 ist. Wir erinnern außerdem an die Definition

$$\tilde{C} = (f|_{E_2})_*^{-1}(C_1).$$

Es ist $g(\tilde{C}_1) = B_1$ nach Lemma 4.1.12 und $\tilde{C}_1 \subset E_2$ nach Definition von \tilde{C}_1 . Außerdem ist $\tilde{C}_1 \subset \text{Exc}(f)$ wegen $f(\Delta) = f(\tilde{C}_1)$. Die einzige Kurve in $E_2 \cap \text{Exc}(f)$, die nicht von g kontrahiert wird, ist unter der Voraussetzung $B_2 \not\subset \Delta_1$ die Kurve

$$\left((h_3 \circ \dots \circ h_{n-1})|_{E_2} \right)_*^{-1} (E_1 \cap E_2).$$

Dies ist in vielerlei Hinsicht absurd. Wir können etwa, in der Notation von Lemma 4.1.12, $r = 1$ und $i_1 = 1$ wählen. Für allgemeines $D \in |L|$ ist $D \cdot \Delta_0$ generisch reduziert entlang einer glatten rationalen Kurve C , die B_1 schneidet (vgl. Beweis von Lemma 4.1.12). Die Kurven C, B_1 schneiden sich transversal nach Lemma 4.1.8. Wegen $\delta_1 = 3$ ist $I_{\Delta_0} \subset I_{B_1}^3$ und mit Lemma 3.1.5 erhalten wir

$$h^0(X, Q_{D, \Delta_0}^C) \geq 1 + 3 - 1 = 3.$$

Das ist ein Widerspruch zu Lemma 3.2.13.

Also ist $\gamma_1 = 1$. Folglich ist $\delta_1 = 2$ und, in obiger Notation, $\delta'_2 = 1$, d.h.

$$B_2 \subset \Delta_1 \quad \text{und} \quad B_2 \not\subset \text{Sing}(\Delta_1).$$

Die Abbildung $\Delta = \Delta_n \rightarrow \Delta_1$ ist also über dem allgemeinen Punkt von B_2 ein Isomorphismus und wir bezeichnen die Strikttransformierte von B_2 unter dieser Abbildung mit \tilde{B}_2 :

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{B}_2 & \subset & \Delta & \subset & X_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \subset & \Delta_1 & \subset & X_1 \end{array}$$

Es ist $\tilde{B}_2 \not\subset \text{Sing}(\Delta)$ und da für $k \geq 2$ keine Kurven mehr aufgeblasen werden, die surjektiv auf B_2 abgebildet werden, ist $\tilde{B}_2 \subset E_2$. Aus $I_{\Delta_0} \not\subset I_{B_1}^3$ folgt, dass es höchstens eine irreduzible, reduzierte Kurve

$$B_2 \neq M \subset \Delta_1 \quad \text{mit} \quad g_1(M) = B_1$$

gibt und dass, falls eine solche Kurve existiert, die Aussagen

$$M \not\subset \text{Sing}(\Delta_1), \quad \deg(g_1|_M) = 1, \quad \tilde{M} \subset E_1, \quad \tilde{M} \not\subset \text{Sing}(\Delta)$$

gelten, wobei $\tilde{M} \subset X_n$ die Strikttransformierte von M bezeichnet und wir bemerken, dass die Abbildung

$$h_1 \circ \dots \circ h_{n-1}: X_n \rightarrow X_1$$

generisch über M ein Isomorphismus ist. Dies zeigt den ersten Teil der dritten Aussage des Lemmas sowie die vierte, da $g(M_r) = B_1$ nach Lemma 4.1.12 und $M_r \subset \Delta$ nach Definition.

Die Strikttransformierte von B_2 unter der Restriktion obiger Abbildung auf E_1 sei mit B'_2 bezeichnet

$$\begin{array}{ccccc} B'_2 & \subset & E_1 & \subset & X_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \subset & E_1 & \subset & X_1, \end{array}$$

wobei wir auf den (hier etwas unglücklichen) Missbrauch der Notation aufmerksam machen. Es gibt neben \tilde{B}_2, B'_2 keine weitere irreduzible Kurve in $E_2 \cap \text{Exc}(f)$, die von g nicht kontrahiert wird. (Möglicherweise ist $\tilde{B}_2 = B'_2$.) Eine dieser beiden Kurven ist also \tilde{C}_1 . In jedem Fall hat $g|_{\tilde{C}_1}$ Grad 1 und ist daher ein Isomorphismus nach Lemma 3.1.12.

Der einzige Divisor Γ auf X_n , der

$$g(\Gamma) = B_1 \quad \text{und} \quad \Gamma \subset \text{Exc}(g) \cap \text{Exc}(f),$$

erfüllt, ist E_1 . Daher ist wieder in der Notation von Lemma 4.1.12 entweder $r = 0$ oder $r = 1$ und $i_1 = 1$.

Wird \tilde{B}_2 von f nicht kontrahiert, so ist $r = 0$ und $M_0 = \tilde{B}_2$. Da hier $M_0 \subset E_2$ ist, ist $f|_{M_0}$ sicherlich birational.

Wird \tilde{B}_2 von f kontrahiert, so ist $\tilde{B}_2 \neq B'_2$, $\tilde{C}_1 = B'_2$, $r = 1$ und $i_1 = 1$. Da $g(M_1) = B_1$ ist, existiert M wie oben und es ist $M_1 = \tilde{M} \subset E_1$. Wir haben gesehen, dass g sowohl \tilde{C}_1 als auch M_1 birational und deshalb biholomorph auf B_1 abbildet. Da außerdem einerseits $f|_{\tilde{C}_1}$ birational ist und andererseits f die allgemeine Faser von $g|_{E_1}$ kontrahiert, folgt, dass $f|_{M_1}$ birational ist. Das Lemma ist damit gezeigt. \square

Wir fixieren die Auflösung des Lemmas und ferner eine eingebettete Desingularisierung

$$\hat{X} \supset \hat{\Delta} \xrightarrow{\tau} \Delta \subset X_n$$

wie in Lemma 2.4.6.

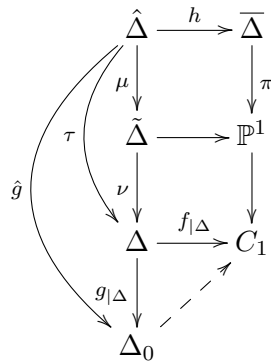
Wir führen weitere Notation ein. Wir bezeichnen die Normalisierung von Δ mit $\tilde{\Delta} \xrightarrow{\nu} \Delta$. Es gibt eine Abbildung $\hat{\Delta} \xrightarrow{\mu} \tilde{\Delta}$ mit $\tau = \nu \circ \mu$. Ebenso faktorisiert die Komposition $f|_{\Delta} \circ \nu$ durch die Normalisierung $\mathbb{P}^1 \rightarrow C_1$. Aus dem vorangehenden Lemma folgt, dass die Striktransformierten

$$\tilde{M}_r := \nu_*^{-1} M_r \subset \tilde{\Delta}, \quad \hat{M}_r = \tau_*^{-1} M_r \subset \hat{\Delta}$$

dabei birational, also nach Lemma 3.1.12 tatsächlich isomorph auf \mathbb{P}^1 abgebildet werden. Daraus folgt bei Betrachtung unter Verwendung, dass \mathbb{P}^1 glatt ist, und mit Lemma 3.1.12, dass die Abbildung $\hat{\Delta} \rightarrow \mathbb{P}^1$ gleich ihrer Steinfaktorisierung ist. Also sind ihre Fasern zusammenhängend. Da $\hat{\Delta}$ glatt ist, ist die allgemeine Faser glatt, also irreduzibel. Da f bimeromorph ist, ist $R^1 f_* \mathcal{O}_{X_n} = 0$ und daher ist die allgemeine Faser von $\hat{\Delta} \rightarrow C_1$ tatsächlich \mathbb{P}^1 . Die Abbildung $\hat{\Delta} \rightarrow \mathbb{P}^1$ faktorisiert daher durch eine Hirzebruch-Fläche

$$\bar{\Delta} = \mathbb{F}_e \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^1,$$

für ein $e \geq 0$. Die induzierte Abbildung $\hat{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$ sei mit h bezeichnet. Wir setzen $\hat{g} = g|_{\Delta} \circ \tau$ und veranschaulichen die Situation in einem kommutativen Diagramm:



Lemma 4.1.16. *Es gibt einen effektiven Cartier-Divisor $A \geq 0$ auf $\hat{\Delta}$ mit den Eigenschaften, dass*

$$\omega_{\hat{\Delta}} = (\hat{g}^* \omega_{\Delta_0})(-A)$$

ist und dass für jede irreduzible Kurve $C \subset \text{Exc}(\hat{g})$ die Inklusion

$$C \subset \text{Supp}(A) \cup \text{Exc}(\mu)$$

gilt.

Beweis. Wir setzen $A_1 = (G - F)|_{\Delta}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega_{\Delta} &= (\omega_{X_n}(\Delta))|_{\Delta} = (g^* \omega_X(F + g^* \Delta_0 - G))|_{\Delta} = \\ &= g_{|\Delta}^* (\omega_X(\Delta_0)|_{\Delta_0})((F - G)|_{\Delta}) = (g_{|\Delta}^* \omega_{\Delta_0})(-A_1) \end{aligned}$$

Nach (4.1.11) gilt $G - F \geq 0$ sowie $\text{Exc}(g) = \text{Supp}(G - F)$. Es gilt daher

$$A_1 \geq 0 \quad \text{sowie} \quad \text{Exc}(g_{|\Delta}) \subset \text{Exc}(g) \cap \Delta \subset \text{Supp}(A_1). \quad (4.1.12)$$

Sei A_2 der effektive Divisor auf $\hat{\Delta}$ aus Lemma 2.4.6. Der Divisor $A = \tau^* A_1 + A_2$ erfüllt sicherlich die erste Behauptung:

$$\omega_{\hat{\Delta}} = \tau^* \omega_{\Delta}(-A_2) = \hat{g}^* \omega_{\Delta_0}(-\tau^* A_1 - A_2).$$

Sei, um die zweite Behauptung zu zeigen, $C \subset \text{Exc}(\hat{g})$ eine irreduzible Kurve.

Ist $C \not\subset \text{Exc}(\tau)$, so ist $\tau(C) \subset \text{Exc}(g_{|\Delta})$. Wegen (4.1.12) ist $\tau(C) \subset \text{Supp}(A_1)$ und damit $C \subset \text{Supp}(A)$.

Ist $C \subset \text{Exc}(\tau)$ und $\dim \tau(C) = 1$, so ist wegen der zweiten Eigenschaft von A_2 aus Lemma 2.4.6 $C \subset \text{Supp}(A_2) \subset \text{Supp}(A)$.

Ist $C \subset \text{Exc}(\tau)$ und $\dim \tau(C) = 0$, so ist $C \subset \text{Exc}(\mu)$, da ν endlich ist. Also erfüllt A auch die zweite Behauptung des Lemmas. \square

Wir setzen $\hat{N} = \text{Exc}(\hat{g})$. Ferner seien $q, r, s \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen,

$$C_1, \dots, C_q \subset \bar{\Delta}, \quad R_1, \dots, R_s \subset \text{Exc}(h)$$

irreduzible Kurven und $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{P}^1$ Punkte derart, dass mit $f_j = \pi^{-1}(p_j)$ und $\hat{C}_i = h_*^{-1}(C_i)$, $\hat{f}_j = h_*^{-1}(f_j)$

$$1\text{-dim}(\hat{N}) = \{\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_q, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_r, R_1, \dots, R_s\}$$

die Menge der 1-dimensionalen, irreduziblen Komponenten von \hat{N} ist. Aus der Tatsache, dass ω_{Δ_0} Schnitte besitzt, folgern wir die folgende Aussage, die wir benötigen um $b_3(\Delta_0)$ zu beschränken.

Lemma 4.1.17. *Mit der oben eingeführten Notation gilt $q \leq 2$.*

Beweis. Für $1 \leq i \leq q$ haben wir $\pi(h(\hat{C}_i)) = \mathbb{P}^1$ und daher ist $\hat{C}_i \not\subset \text{Exc}(\mu)$. Aus dem zweiten Teil des vorangehenden Lemmas folgt, dass $\hat{C}_i \subset \text{Supp}(A)$ ist. Da des Weiteren $\text{Supp}(A) \subset \hat{N}$ ist, lässt sich die Menge der irreduziblen Komponenten des Trägers von A also als

$$\text{Komp } A = \{\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_q, \hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{r'}, R_1, \dots, R_{s'}\},$$

mit $r' \leq r$, $s' \leq s$, schreiben. Es sei $R \geq 0$ der eindeutig bestimmte Divisor auf $\hat{\Delta}$ mit der Eigenschaft, dass $\omega_{\hat{\Delta}} = h^*\omega_{\bar{\Delta}}(R)$ ist. Dann gilt

$$H^0(\hat{\Delta}, \hat{g}^*\omega_{\Delta_0}^{-1}) = H^0(\hat{\Delta}, h^*\omega_{\bar{\Delta}}^{-1}(-A - R)) \subset H^0(\hat{\Delta}, h^*\omega_{\bar{\Delta}}^{-1}(-\sum_{i=1}^q \hat{C}_i))$$

und die Projektionsformel liefert

$$H^0(\hat{\Delta}, h^*\omega_{\bar{\Delta}}^{-1}(-\sum_{i=1}^q \hat{C}_i)) = H^0(\bar{\Delta}, \omega_{\bar{\Delta}}^{-1}(-\sum_{i=1}^q C_i))$$

Es ist $\omega_{\bar{\Delta}}^{-1} \sim 2 \cdot e_\infty + (2 + e) \cdot f$ und $C_i \sim \alpha_i \cdot e_\infty + \beta_i f$ mit $\alpha_i \geq 1$. Also ist

$$H^0(\bar{\Delta}, \omega_{\bar{\Delta}}^{-1}(-\sum_{i=1}^q C_i)) = H^0(\bar{\Delta}, \mathcal{O}_{\bar{\Delta}}((2 - \sum_{i=1}^q \alpha_i)e_\infty + \beta f))$$

mit $\beta \in \mathbb{Z}$. Für $n < 0$ ist $\pi_*(\mathcal{O}_{\bar{\Delta}}(n \cdot e_\infty)) = 0$ und deshalb ergibt sich aus $q \geq 3$ ein Widerspruch zu

$$\mathbb{C}^3 \simeq H^0(\Delta_0, L_{|\Delta_0}) = H^0(\Delta_0, \omega_{\Delta_0}^{-1}) \subset H^0(\hat{\Delta}, \hat{g}^*\omega_{\Delta_0}^{-1}).$$

Die Behauptung folgt. \square

Mit diesem Lemma können wir nun die gewünschte Abschätzung für die dritte Bettzahl herleiten.

Lemma 4.1.18. *Es gilt $b_3(\Delta_0) \leq 1$.*

Beweis. Wir setzen $N = \hat{g}(\hat{N})$. Dann ist $g^{-1}(N) = \hat{N}$ und die Einschränkung $g|_{\hat{\Delta} \setminus \hat{N}}$ ist ein Isomorphismus. Es sei

$$1\text{-dim}(N) = \{N_1, \dots, N_u\}$$

die Menge der 1-dimensionalen, irreduziblen Komponenten von N . Da $B_1 \subset N$ ist, können wir ohne Einschränkung

$$N_1 = B_1$$

annehmen. Außer \hat{M}_r gibt es nach Lemma 4.1.15 höchstens eine weitere irreduzible Kurve $\hat{M} \subset \hat{\Delta}$ mit $\hat{g}(\hat{M}) = B_1$. Wird die Kurve \hat{M} von $\pi \circ h$

kontrahiert, so nehmen wir ohne Einschränkung auch an, dass $\pi \circ h(\hat{M}) = p_1$ ist, so dass dann

$$B_1 \not\subset \hat{g}((\pi \circ h)^{-1}(p_i)), \text{ f\"ur } 2 \leq i \leq r, \quad (4.1.13)$$

gilt. Die Leray Spektralsequenzen f\"ur f bzw. π liefern

$$H^3(\hat{\Delta}, \mathbb{C}) \simeq H^3(\overline{\Delta}, \mathbb{C}) \simeq H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = 0$$

Ferner ist der Dimension von N wegen $H^3(N, \mathbb{C}) = 0$. Wir erhalten also mit Proposition 3.1.6 die folgende exakte Sequenz:

$$H^2(\Delta_0, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\hat{\Delta}, \mathbb{C}) \oplus H^2(N, \mathbb{C}) \rightarrow H^2(\hat{N}, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(\Delta_0, \mathbb{C}) \rightarrow 0$$

Wir schreiben $\text{Exc}(\hat{\Delta} \xrightarrow{h} \overline{\Delta}) = R_1 \cup \dots \cup R_{s+t}$ f\"ur die Zerlegung in irreduzible Komponenten und erhalten

$$\begin{aligned} b_3(\Delta_0) &\leq b_2(\hat{N}) - b_2(\hat{\Delta}) - b_2(N) + b_2(\Delta_0) = \\ &= q + r + s - (2 + s + t) - u + 1 \leq \\ &\leq 2 + r + s - 2 - s - t - u + 1 = 1 + r - (t + u). \end{aligned}$$

Wir schlie\en den Beweis, indem wir zeigen, dass es eine Injektion

$$\alpha : \{f_2, \dots, f_r\} \hookrightarrow \{R_{s+1} \dots R_{s+t}, N_2, \dots, N_u\}$$

gibt. Sei also $2 \leq i \leq r$. Wir rufen zun\"achst ins Ged\"achtnis, dass $\hat{g}|_{\hat{M}_r}$, $\pi \circ h|_{\hat{M}_r}$ Isomorphismen sind, setzen

$$q_i = \hat{g}((\pi \circ h|_{\hat{M}_r})^{-1}(p_i))$$

und bemerken, dass $q_i \in B_1$ ist, da $g(\hat{M}_r) = B_1$ ist. Wird der Raum $h^{-1}(f_i)$ von \hat{g} kontrahiert, so ist bekannterma\en (siehe [Gra62, §4, Abschnitt 8, e]) die Schnittmatrix seiner Komponenten negativ definit und wir erhalten den folgenden Widerspruch:

$$0 = f_i^2 = h^*(f_i)^2 < 0$$

Es ist also $\dim \hat{g}(h^{-1}(f_i)) = 1$. Des Weiteren ist $h^{-1}(f_i)$ zusammenh\"angend und es gilt

$$(\pi \circ h|_{\hat{B}_r})^{-1}(p_i) \in h^{-1}(f_i).$$

Wir k\"onnen daher eine irreduzible Komponente $\hat{Q}_i \subset h^{-1}(f_i)$ mit den Eigenschaften

$$\dim \hat{g}(\hat{Q}_i) = 1 \quad \text{und} \quad q_i \in \hat{g}(\hat{Q}_i)$$

w\"ahlen. Wir setzen $Q_i = \hat{g}(\hat{Q}_i)$.

Ist $\hat{Q}_i \subset \hat{N}$, so ist $Q_i \in \{N_1, \dots, N_u\}$ und wegen Gleichung (4.1.13) ist $Q_1 \neq N_1$. Wir setzen $\alpha(f_i) = Q_i$.

Ist $\hat{Q}_i \not\subset \hat{N}$, so ist $\hat{Q}_i \in \{R_{s+1}, \dots, R_{s+t}\}$, da wir

$$\hat{Q}_i \subset h^{-1}(f_i) \subset \hat{f}_i \cup R_1 \cup \dots \cup R_{s+t} \quad \text{und} \quad \hat{f}_i, R_1, \dots, R_s \subset \hat{N}$$

haben. Wir setzen in diesem Fall $\alpha(f_i) = \hat{Q}_i$. Wir zeigen nun, dass die so definierte Abbildung α injektiv ist.

Ist $\alpha(f_i) = \alpha(f_j) \in \{R_{s+1}, \dots, R_{s+t}\}$, so ist mit obiger Notation $\hat{Q}_i = \hat{Q}_j$. Es folgt

$$\pi(f_i) = \pi h(\hat{Q}_i) = \pi h(\hat{Q}_j) = \pi(f_j)$$

und damit auch $f_i = f_j$.

Ist $\alpha(f_i) = \alpha(f_j) \in \{N_2, \dots, N_u\}$, so ist mit obiger Notation $Q_i = Q_j$ und daher

$$\{q_i, q_j\} \subset B_1 \cap Q_i.$$

Da $\hat{g}|_{\hat{B}_r}$ und $(\pi \circ h)|_{\hat{B}_r}$ Isomorphismen sind, ist $f_i = f_j$ genau dann, wenn $q_i = q_j$ ist. Angenommen es ist $q_i \neq q_j$. Dann ist $h^1(C, \mathcal{O}_C) \geq 1$ für

$$C := B_1 + Q_i,$$

da $B_1 \neq Q_i$ ist. Nach Lemma 3.2.11 ist also $Q_i \not\subset \text{Bs}(L)$. Da $Q_i = \hat{g}(\hat{Q}_i)$ ist und $\pi \circ h(\hat{Q}_i) = p_i$, ist das Bild von $Q_i \setminus \text{Bs}(L)$ unter Φ ein Punkt p . Wir wählen $H_1, H_2 \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ mit der Eigenschaft, dass

$$p \in H_1 \cap H_2 \not\subset f(\text{Exc}(f)) \cup f(\text{Exc}(g))$$

ist. Dann ist C_{D_1, D_2} definiert und es ist $C_{D_1, D_2} \cup C \subset D_1 \cap D_2$. Ein Widerspruch zu Lemma 3.2.11, da $C_{D_1, D_2} \not\subset C$ und $h^1(C, \mathcal{O}_C) = 1$. \square

Da auf X die Hodge-Zerlegung gilt, ist tatsächlich $b_3(X) = 0$. Die Behandlung des Unterfalles ist damit abgeschlossen.

4.1.2 Nicht-degenerierter Basisort

In diesem Fall können wir den Basisort von $|L|$ im Wesentlichen explizit beschreiben. Wir zeigen in Lemma 4.1.20, dass für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ die Schnittkurve $D_1 \cdot D_2$ ein Zykel glatter, rationaler Kurven ist. Im Gegensatz zu [Nak96] und dem Beweis zu Satz 3.2.7 können wir dann jedoch nicht unmittelbar schließen, dass $\text{Bs}(L)$ aus nur einer glatten, rationalen Kurve besteht. Wir können jedoch in Behauptung 6 zeigen, dass andernfalls $\text{Bs}(L)$ aus genau drei glatten, rationalen Kurven besteht. In beiden Fällen sind die zur letztendlichen Abschätzung von $b_3(X)$ verwendeten Methoden denen aus [Nak96] dann wieder sehr ähnlich. Um ein Gefühl für die mögliche Geometrie von X im vorliegenden Fall zu bekommen, ist es eventuell hilfreich, zunächst das Beispiel aus Anhang A zu betrachten.

Wir machen im gesamten Unterabschnitt die folgende Voraussetzung.

Voraussetzung 4.1.19. *Zusätzlich zu Voraussetzung 4.1.1 nehmen wir an, dass Aussage 1 für X gilt, d.h. dass für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ (die Kurve C_{D_1, D_2} definiert ist und) der Träger von Q_{D_1, D_2} aus zwei verschiedenen Punkten besteht.*

Wir haben das folgende einfache Lemma (siehe [Nak96, Lemma 3.3]).

Lemma 4.1.20. *Es seien D_1, D_2 derart, dass die Garbe Q_{D_1, D_2} definiert ist und ihr Träger aus zwei verschiedenen Punkten besteht. Dann ist*

$$C = D_1 \cdot D_2$$

ein Zykel glatter rationaler Kurven. D.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ und für $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gibt es glatte rationale Kurven $C_i \subset X$ sowie $p_i \in C_i$ derart, dass

$$C = C_0 + \dots + C_{n-1}$$

ist, sich die C_i 's paarweise transversal (oder nicht) schneiden und

$$C_i \cap \bigcup_{j \neq i} C_j = \{p_{i-1}, p_i\}$$

gilt.

Beweis. Seien D_1, D_2 wie im Lemma. Wir setzen $C_0 := C_{D_1, D_2}$ und wählen $q_0 \in \text{Supp}(Q_{D_1, D_2}^{C_0})$. Es ist

$$\dim(Q_{D_1, D_2}^{C_0})_{q_0} = 1$$

und mit der Äquivalenz 3.2.2 sowie der Glattheit von C_0 folgt, dass es (genau) eine von C_0 verschiedene Komponente $C_1 \subset C$ mit $C_1 \ni q_0$ gibt und dass C generisch entlang dieser reduziert ist. Die Garbe $Q_{D_1, D_2}^{C_1}$ ist also definiert und es gilt

$$\dim(Q_{D_1, D_2}^{C_1})_{q_0} = 1.$$

Es gibt daher nach Lemma 3.2.13 (genau) ein $q_1 \neq q_0$ mit $h^0(q_1, Q_{D_1, D_2}^{C_1}) = 1$. Auf diese Weise werden $q_l \in C_l$ derart definiert, dass sich C_i und C_{i+1} in q_i transversal schneiden. Da $D_1 \cap D_2$ nur endlich viele Komponenten hat, existiert die folgende Zahl

$$n := \min\{l \in \mathbb{N} : (\exists j < l : C_l = C_j)\}.$$

Man sieht leicht, dass für $C' = C_j + \dots + C_n$

$$h^1(C', \mathcal{O}_{C'}) = 1$$

ist. Mit Lemma 3.2.11 folgt $C = C'$. Es folgt weiter, dass $j = 1$ ist und damit die Behauptung. \square

Das folgende Lemma sagt uns wie sich das Geradenbündel L auf die irreduziblen Komponenten von $\text{Bs}(L)$ beschränkt.

Lemma 4.1.21. *Es gibt $k \geq 1$ und $B_1, \dots, B_{2k-1} \subset \text{Bs}(L)$ mit $L.B_i = (-1)^i$ mit der Eigenschaft, dass für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ gilt*

$$D_1.D_2 = C_{D_1, D_2} + \sum_{i=1}^{2k-1} B_i$$

$$L.C_{D_1, D_2} = 3$$

Beweis. Es seien $D_1, D_2 \in |L|$ derart allgemein, dass sie die Folgerungen von Lemma 3.1.10 erfüllen und dass zusätzlich der Träger von Q_{D_1, D_2} nicht in einem Punkt konzentriert ist. Wir wenden das vorangehende Lemma auf D_1, D_2 an und nehmen o.E. an, dass $C_0 = C_{D_1, D_2}$ ist. Nach Wahl von D_1, D_2 gilt

$$C_i \subset \text{Bs}(L) \quad \text{für } i \neq 0$$

und wir schreiben $B_i := C_i$ für $i \neq 0$ und $B = \sum_{i \neq 0} B_i$. Nach Lemma 3.2.18 gilt $L.C_0 = 3$ und es folgt, dass

$$L.B = \sum_{i \neq 0} L.B_i = -1$$

ist. Wir zeigen zwei einfache Behauptungen.

Behauptung 1. *Es gilt $H^0(C, -L|_C) = 0$.*

Beweis. Nach Grothendieck-Serre-Dualität gilt $H^0(C, -L|_C) \simeq H^1(C, L|_C)$. Aus Lemma 3.2.9 folgt

$$H^1(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = H^1(X, \mathcal{O}_X) = H^2(D_1, \mathcal{O}_{D_1}) = H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

Aus den langen exakten Sequenzen zu den mit L tensorierten Idealsequenzen von D_1 und C folgt, dass

$$H^1(C, L|_C) = H^1(D_1, L|_{D_1}) = H^1(X, L)$$

ist. Die letztgenannte Kohomologiegruppe verschwindet, da nach Voraussetzung $h^0(X, L) = 4$ ist, sowie $\chi(X, L) = 4$ und $h^2(X, L) = h^3(X, L) = 0$ nach Lemma 3.2.9. \square

Behauptung 2. *Sei \tilde{L} ein Geradenbündel auf C . Gibt es*

- a) $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass $\tilde{L}.C_{i_0} \geq 2$ ist. Dann gibt es $s \in H^0(C, \tilde{L})$ mit $s|_{C_{i_0}} \neq 0$.
- b) $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ derart, dass $L.C_{i_0} = L.C_{i_0+1} = 1$ sind. Dann gibt es – mit $\tilde{C} = C_{i_0} + C_{i_0+1}$ – einen Schnitt $s \in H^0(C, L|_{\tilde{C}})$ mit $s|_{\tilde{C}} \neq 0$.

Beweis. a) Wir setzen $C' := \bigcup_{i \neq i_0} C_i$ und $S := C_{i_0} \cap C' = \{p_{i_0-1}, p_{i_0}\}$ und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(C, \tilde{L}) \rightarrow H^0(C_{i_0}, \tilde{L}|_{C_{i_0}}) \oplus H^0(C', \tilde{L}|_{C'}) \rightarrow H^0(S, \tilde{L}|_S).$$

Nach Voraussetzung ist

$$h^0(C_{i_0}, \tilde{L}|_{C_{i_0}}) \geq 3 > 2 = h^0(S, \tilde{L}|_S)$$

und damit folgt die Behauptung.

b) Man sieht leicht, dass $h^0(\tilde{C}, \tilde{L}|_{\tilde{C}}) = 3$ ist. Der Rest des Beweises kann dann aus a) übernommen werden. \square

Da $H^0(C, -L|_C) = 0$ gilt und für alle $i \neq 0$ die Restriktion

$$H^0(C, L_C) \rightarrow H^0(B_i, L|_{B_i})$$

die Nullabbildung ist, impliziert Teil a) von Behauptung 2, dass für alle $i \neq 0$

$$-1 \leq L.B_i \leq 1$$

ist. Nach Voraussetzung 4.1.1 ist $L.B_i \neq 0$ und mit Teil b) der Behauptung folgt, dass für alle $i \neq 0$, -1

$$L.B_i + L.B_{i+1} = 0$$

ist. Ist n gerade, so folgt also $L.B = 0$. Ein Widerspruch zu $L.B = -1$. Es gibt daher $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k - 1$. Dann gilt

$$\sum_{l=1}^{k-1} \underbrace{(L.B_{2l-1} + L.B_{2l})}_{=0} + L.B_{2k-1} = L.C = -1.$$

Daher ist $L.C_{2k-1} = -1$ und induktiv folgt $L.B_i = (-1)^i$. \square

Wir werden zeigen, dass wir Φ auflösen können, indem wir zunächst die Kurven B_i mit ungeradem Index i aufblasen und danach die Strikttransformierten der Kurven B_i mit geradem Index i . Wir betrachten zunächst die Konormalenbündel der B_i mit $i = 2l - 1$. Es gibt ganze Zahlen $k_i \geq l_i$ derart, dass

$$N_{B_i/X}^\vee \simeq \mathcal{O}_{B_i}(k_i) \oplus \mathcal{O}_{B_i}(l_i)$$

ist. Die Adjunktionsformel liefert unter Verwendung von $K_X = -2L$ und $L.B_i = -1$ die Gleichung

$$k_i + l_i = \deg(K_X|_{B_i} - K_{B_i}) = 2 + 2 = 4. \quad (4.1.14)$$

Wir haben außerdem Monomorphismen

$$\begin{array}{ccc} (I_{D_1} + I_{D_2})|_{B_i} & \longrightarrow & N_{B_i/X}^\vee \simeq \mathcal{O}_{B_i}(k_i) \oplus \mathcal{O}_{B_i}(l_i), \\ \simeq \uparrow & & \\ \mathcal{O}_{B_i}(1) \oplus \mathcal{O}_{B_i}(1) & & \end{array}$$

die jeweils außerhalb einer zweielementigen Menge Isomorphismen sind. Es folgt zunächst $l_i \geq 1$ und dann mit Gleichung (4.1.14) (jeweils)

$$(k_i, l_i) = (3, 1) \quad \text{oder} \quad (k_i, l_i) = (2, 2).$$

Wir betrachten nun die Aufblasung $g_1: \hat{X} \rightarrow X$ von X in $\bigcup_{l=1}^k B_{2l-1}$ – wobei anzumerken ist, dass die Vereinigung disjunkt ist – und schreiben \hat{E}_{2l-1} für die jeweiligen exceptionellen Divisoren. Es gilt $\hat{E}_i \simeq \mathbb{P}(N_{B_i/X}^\vee)$ und daher existieren $e_i, f_i \in \text{Pic}(\hat{E}_i)$ mit den Eigenschaften

$$\text{Pic}(\hat{E}_i) = \mathbb{Z} \cdot e_i \oplus \mathbb{Z} \cdot f_i, \quad f_i = (g_{1|\hat{E}_i})^* \mathcal{O}_{B_i}(1), \quad e_i^2 = k_i - l_i, \quad e_i \cdot f_i = 1.$$

In der Folge werden wir auf die Indexierung der e, f verzichten, sofern diese unerheblich ist. Wir setzen

$$\hat{L} := g_1^* L - \sum_{l=1}^k \hat{E}_{2l-1}.$$

Dann hat $\text{Bs}(\hat{L})$ keine divisorischen Komponenten und es gilt:

$$\begin{aligned} H^0(\hat{X}, \hat{L}) &= H^0(X, L) \\ \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\hat{E}_i)|_{\hat{E}_i} &= N_{\hat{E}_i/\hat{X}}^\vee = e_i + l_i f_i \\ (g_1^* L)|_{\hat{E}_i} &= (g_{1|\hat{E}_i})^*(L|_{B_i}) = (L \cdot B_i) f_i = -f_i \\ \mathcal{O}_{\hat{X}}(-\hat{E}_i)|_{\hat{E}_j} &= 0 \quad \text{für } i \neq j \\ \hat{L}|_{\hat{E}_i} &= e_i + (l_i - 1) f_i \end{aligned}$$

In der Folge schreiben wir für einen irreduziblen, abgeschlossenen Unterraum $A \subset X$ stets $\hat{A} = (g_1)_*^{-1}(A)$, sofern dies definiert ist. Mit $D_1, D_2 \in |L|$ wie oben ist $\hat{D}_1, \hat{D}_2 \in |\hat{L}|$ und wir betrachten $C_1 := \hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2$. Da sich D_1, D_2 außerhalb von $C_0 \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} B_{2l}$ transversal schneiden, ist

$$C_1 \subset g_1^{-1}(C_0 \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} B_{2l}).$$

Da in jedem Punkt des Durchschnitts $(C_0 \cup \bigcup_{l=1}^{k-1} B_{2l}) \cap \bigcup_{l=1}^l B_{2l-1}$ zumindest einer der beiden Divisoren D_1, D_2 glatt ist, enthält C_1 keine Faser von g_1 und daher gilt sogar

$$C_1 = \hat{C}_0 + \sum_{l=1}^{k-1} \hat{B}_{2l}.$$

Da die Komponenten von C_1 paarweise disjunkt sind, ist die Abbildung $N_{C_1/\hat{X}}^\vee|_{\hat{B}_{2l}} \rightarrow N_{\hat{B}_{2l}/\hat{X}}^\vee$ jeweils ein Isomorphismus und weil

$$\hat{L} \cdot \hat{B}_{2l} = (g_1^* L - \hat{E}_{2l-1} - \hat{E}_{2l+1}) \cdot \hat{B}_{2l} = 1 - 1 - 1 = -1$$

ist, haben wir $N_{\hat{B}_{2l}/\hat{X}}^\vee \simeq \mathcal{O}_{\hat{B}_{2l}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\hat{B}_{2l}}(1)$. Wir betrachten nun die Aufblaspung $g_2: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ in $\bigcup_{l=1}^{k-1} \hat{B}_{2l}$, bezeichnen die entsprechenden exzeptionellen Divisoren mit E_{2l} sowie die Strikttransformierten der \hat{E}_{2l-1} mit E_{2l-1} , setzen $g = g_1 \circ g_2$ und

$$\tilde{L} := g_2^* \hat{L} - \sum_{l=1}^{k-1} E_{2l} = g^* L - \sum_{i=1}^{2k-1} E_i.$$

Dann hat $\text{Bs}(\tilde{L})$ keine divisorischen Komponenten und es gilt:

$$\begin{aligned} H^0(\tilde{X}, \tilde{L}) &= H^0(\hat{X}, \hat{L}) \\ K_{\tilde{X}} &= g_2^* K_{\hat{X}} + \sum_{l=1}^{k-1} E_{2l} = -2\tilde{L} - \sum_{i=1}^{2k-1} E_i \end{aligned}$$

Die Divisoren E_{2l} sind isomorph zu $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Es bezeichne $\mathbf{f}_{2l} \in \text{Pic}(\tilde{E}_{2l})$ das zu einer Faser von $(g_2)|_{E_{2l}}$ assoziierte Geradenbündel und $\mathbf{e}_{2l} \in \text{Pic}(\tilde{B}_{2l})$ das zu einer Faser der anderen Projektion assoziierte Geradenbündel. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E_{2l})|_{E_{2l}} &= N_{E_{2l}/\tilde{X}}^\vee = \mathbf{e}_{2l} + \mathbf{f}_{2l} \\ \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E_{2l-1})|_{E_{2l}} &= \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E_{2l+1})|_{E_{2l}} = \mathbf{f}_{2l} \end{aligned}$$

Für ungerades i setzen wir $\phi_i := g_2|_{E_i}: E_i \rightarrow \hat{E}_i$. Für $i = 1, 2k-1$ ist ϕ_i eine Aufblaspung von \hat{E}_i im Punkt $\hat{E}_1 \cdot \hat{B}_2$ bzw. $\hat{E}_{2k-1} \cdot \hat{B}_{2k-2}$. Die zugehörige exzeptionelle Kurve bezeichnen wir mit F_i . Es gilt

$$\begin{aligned} N_{E_i/\tilde{X}}^\vee &= \phi_i^*(N_{\hat{E}_i/\hat{X}}^\vee) \\ (E_2)|_{E_1} &= F_1, \quad (E_{2k-2})|_{E_{2k-1}} = F_{2k-1}. \end{aligned}$$

Für $2 < l < k-1$ ist ϕ_{2l-1} Aufblaspung von \hat{E}_{2l-1} in den zwei Punkten $\hat{E}_{2l-1} \cdot \hat{B}_{2l-2}$ und $\hat{E}_{2l-1} \cdot \hat{B}_{2l}$. Die zugehörigen exzeptionellen Kurven bezeichnen wir jeweils mit F_{2l-1} und G_{2l-1} . Wir haben

$$\begin{aligned} N_{E_{2l-1}/\tilde{X}}^\vee &= \phi_{2l-1}^*(N_{\hat{E}_{2l-1}/\hat{X}}^\vee) \\ E_{2l-2}|_{E_{2l-1}} &= F_{2l-1}, \quad E_{2l}|_{E_{2l-1}} = G_{2l-1} \end{aligned}$$

Die Kurve \tilde{D}_1, \tilde{D}_2 besteht nun genau aus der glatten rationalen Kurve $C_{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2}$ und ist die Strikttransformierte von C_0 unter g . Es gilt daher

$$\tilde{L} \cdot \tilde{C}_{D_1, D_2} = (g^* L - \sum_{i=1}^{2k-1} E_i) \cdot C_{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2} = 1.$$

Aus dem zweiten Teil von Lemma 3.1.10 folgt, dass $\text{Bs}(\tilde{L}) \cap \tilde{C}_{D_1, D_2} = \emptyset$ ist und daher ist tatsächlich $\text{Bs}(\tilde{L}) = \emptyset$. Wir erhalten also ein kommutatives³ Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \downarrow g_2 & \searrow f = \Phi_{\tilde{L}} & \\ \hat{X} & & \\ \downarrow g_1 & & \\ X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

mit $f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) = \tilde{L}$. Die beiden Fälle $k = 1$ und $k > 1$ sind grundsätzlich verschieden.

Fall $k = 1$

Wir nehmen also $k = 1$ an. Dann ist $\text{Bs}(L) = B_1$, die Abbildung g ist lediglich die Aufblasung in B_1 und $\tilde{L} = g^*L - E_1$, d.h. $E = E_1$. Für den kanonischen Divisor von \tilde{X} gilt:

$$-2g^*L + E = K_{\tilde{X}} = -4\tilde{L} + a\Delta.$$

Durch Projektion auf die erste bzw. zweite Komponente von

$$\text{Pic}(\tilde{X}) = g^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \cdot [E]$$

sehen wir, dass a ein Teiler von $2 = -2 + 4$ bzw. $-3 = -4 + 1$ ist. Es ist also

$$a = 1, \quad \Delta \sim 2g^*L - 3E, \quad E \sim 2\tilde{L} - \Delta. \quad (4.1.15)$$

Daher ist $Q := f(E) \subset \mathbb{P}^3$ eine irreduzible Quadrik. Da E eine Hirzebruchfläche ist, ist entweder $Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $f|_E$ ein Isomorphismus oder Q ist ein quadratischer Kegel und $f|_E$ entspricht der Aufblasung in der Spitze (dann ist $E \simeq \mathbb{F}_2$). Der Divisor Δ wird von f auf eine irreduzible Kurve $C_1 \subset Q$ abgebildet und Lemma 3.1.11 zeigt, dass f außerhalb einer endlichen Menge die Aufblasung in C_1 ist. Insbesondere ist die allgemeine Faser von $f|_{\Delta}$ isomorph zu \mathbb{P}^1 und trifft den Divisor E , so dass nach Lemma 3.1.2, angewendet auf $f|_{\Delta}$ und $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_{\Delta}$,

$$b_3(\Delta) \leq b_1(C_1)$$

ist. Es bleibt daher $b_1(C_1) \leq 12$ zu zeigen.

Wir erinnern daran, dass $\tilde{C}_1 = (f|_E)_*^{-1}(C_1)$ ist. Im Fall $Q = \mathbb{F}_0$ ist $\tilde{C}_1 = \Delta \cap E$ und im Fall $Q = \mathbb{F}_2$ enthält $\Delta \cap E$ neben \tilde{C}_1 noch die exzeptionelle

³Wie üblich soll dies für Diagramme mit meromorphen Abbildungen bedeuten, dass eine geeignete Einschränkung kommutativ ist.

Kurve C_∞ , die über der Kegelspitze liegt. Nach Lemma 3.1.11 ist stärker noch $\Delta|_E = \tilde{C}_1$ im ersten Fall und es existiert $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit $\Delta|_E = \tilde{C}_1 + kC_\infty$ im zweiten Fall. Wegen $\Delta \sim 2g^*L - 3E$ gilt:

$$\Delta|_E \sim 3e + (3l_i - 2)f = \begin{cases} 3e + 4f, & \text{falls } E \simeq \mathbb{F}_0 \\ 3e + f, & \text{falls } E \simeq \mathbb{F}_2 \end{cases}$$

Im ersten Fall ist

$$h^1(C_1, \mathcal{O}_{C_1}) = h^2(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3, -4)) = h^0(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, 2)) = 6.$$

Also ist $b_1(C_1) \leq 12$ nach Lemma 3.1.9. Im zweiten Fall gibt es $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ derart, dass

$$\Delta|_E = \tilde{C}_1 + \alpha C_\infty \in |3e + f| = |3e_\infty + 7f|$$

ist. Es folgt $\alpha \leq 3$.

Ist $\alpha = 3$, so ist $C_1 \sim 7f$. Ein Widerspruch, da \tilde{C}_1 irreduzibel und reduziert ist.

Ist $\alpha = 2$, so ist $\tilde{C}_1 \in |e_\infty + 7f|$. Dann ist \tilde{C}_1 eine glatte rationale Kurve nach Lemma 3.1.12. Desweiteren gilt $e_\infty \cdot \tilde{C}_1 = 5$ und deshalb ist

$$s := |\tilde{C}_1 \cap C_\infty| \leq 5.$$

Nach Proposition 3.1.6 haben wir mit $p = f(C_\infty)$ eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C_1, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(\tilde{C}_1, \mathbb{C}) \oplus H^0(p, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(\tilde{C}_1 \cap C_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(C_1, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\tilde{C}_1, \mathbb{C}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$b_1(C_1) = b_1(\tilde{C}_1) + s - 1 \leq 4.$$

Ist $\alpha = 1$, so ist $\tilde{C}_1 \in |2e_\infty + 7f|$. Dann ist $h^1(\tilde{C}_1, \mathcal{O}_{\tilde{C}_1}) = h^0(\mathbb{F}_2, 3f) = 4$ und daher ist $b_1(\tilde{C}_1) \leq 8$ nach Lemma 3.1.9. Wie im Fall $\alpha = 2$ erhalten wir

$$b_1(C_1) \leq b_1(\tilde{C}_1) + e_\infty \cdot \tilde{C}_1 - 1 = 10.$$

Fall $k > 1$

Um die Abbildung f besser zu verstehen, berechnen wir die Rückzüge $\tilde{L}|_{E_i}$. Es gilt:

- a) $\tilde{L}|_{E_i} = \phi_i^*(e_i + (l_i - 1)f_i) - F_i$ für $i = 1, 2k - 1$
- b) $\tilde{L}|_{E_i} = \phi_i^*(e_i + (l_i - 1)f_i) - F_i - G_i$ für $i = 2l - 1, 2 \leq l \leq k - 1$
- c) $\tilde{L}|_{E_i} = e_i$, für $i = 2l, 1 \leq l \leq k - 1$

Damit ergeben sich unter Verwendung von $e_i^2 = k_i - l_i$ die folgenden Schnittzahlen für die drei obigen Fälle

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \text{b)} & \text{c)} \\
 \tilde{L}|_{E_i} \cdot \phi_i^* \mathbf{e}_i = k_i - 1 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot \phi_i^* \mathbf{e}_i = k_i - 1 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot \mathbf{e}_i = 0 \\
 \tilde{L}|_{E_i} \cdot \phi_i^* \mathbf{f}_i = 1 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot \phi_i^* \mathbf{f}_i = 1 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot \mathbf{f}_i = 1 \\
 \tilde{L}|_{E_i} \cdot F_i = 1 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot F_i = 1 & \\
 & \tilde{L}|_{E_i} \cdot G_i = 1 &
 \end{array} \tag{4.1.16}$$

Für $i = 1, 2k - 1$ setzen wir $H_i := f(E_i)$. Da

$$\tilde{L}^2 \cdot E_i = (\tilde{L}|_{E_i})^2 = (\phi_i^*(\mathbf{e}_i + (l_i - 1)\mathbf{f}_i) - F_i)^2 = k_i - l_i + 2l_i - 2 - 1 = 1$$

ist, sind die $H_i \subset \mathbb{P}^3$ Hyperebenen. Für $l = 1, \dots, k - 1$ ist $\tilde{L}^2 \cdot E_{2l} = e_{2l}^2 = 0$ und für $l = 2, \dots, k - 1$ ist

$$\tilde{L}^2 \cdot E_{2l-1} = k_{2l-1} - l_{2l-1} + 2l_{2l-1} - 2 - 1 - 1 = k_{2l-1} + l_{2l-1} - 4 = 0.$$

Daher werden die Divisoren E_2, \dots, E_{2k-2} von f kontrahiert – jedoch nicht zu einem Punkt, da $\tilde{L}|_{E_i}$ jeweils nicht trivial ist.

Da $\text{Pic}(\tilde{X}) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2k}$ ist und $\text{Pic}(\mathbb{P}^3) \simeq \mathbb{Z}$, gibt es neben E_2, \dots, E_{2k-2} noch genau zwei weitere irreduzible Komponenten

$$\Delta_1, \Delta_{2k-1} \subset \text{Exc}(f),$$

die jeweils nicht in $\text{Exc}(g)$ enthalten sind. Wir setzen

$$C_i = f(\Delta_i) \quad \text{sowie} \quad m_i := \frac{1}{2} L^2 \cdot g(\Delta_i)$$

für $i = 1, 2k - 1$. Wir merken an, dass $m_i \geq 1$ ist und dass nach Lemma 3.2.16 der Raum C_i jeweils in höchstens einer Hyperebene enthalten ist. Insbesondere ist $\dim C_i = 1$ für $i = 1, 2k - 1$ und C_i ist jeweils keine Gerade. Wir setzen ferner $l_0 = H_1 \cap H_{2k-1}$ und zeigen:

Behauptung 3. *Für alle $i \in \{2, \dots, 2k - 2\}$ ist $f(E_i) = l_0$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass

$$l_0 = f(E_1) \cap f(E_{2k-1}) \subset f(\text{Exc}(f))$$

ist, da $E_1 \cap E_{2k-1} = \emptyset$ ist. Für $y \in l_0$ ist also $f^{-1}(y) \subset \text{Exc}(f)$. Sei nun $y \in l_0 \setminus C_1 \cup C_2$. Dann sind

$$f^{-1}(y) \cap \Delta_1 = \emptyset \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) \cap \Delta_{2k-1} = \emptyset$$

und wir erhalten

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=2}^{2k-2} E_i.$$

Die Faser $f^{-1}(y)$ ist zusammenhängend. Jedoch ist für alle $j \in \{2, \dots, 2k-2\}$ der Divisor

$$\bigcup_{i=1, i \neq j}^{2k-1} E_i$$

unzusammenhängend und E_1 und E_{2k-1} befinden sich in verschiedenen Zusammenhangskomponenten. Für $i = 1, 2k-1$ ist $l_0 \subset H_i = f(E_i)$ und es folgt

$$f^{-1}(y) \cap E_1 \neq \emptyset \quad \text{und} \quad f^{-1}(y) \cap E_{2k-1} \neq \emptyset.$$

Daher ist für alle $j \in \{2, \dots, 2k-2\}$

$$f^{-1}(y) \cap E_j \neq \emptyset,$$

also $y \in f(E_j)$. Wir haben zuvor gesehen, dass $l_0 \not\subset C_1 \cup C_2$ ist. Also ist $y \in f(E_j)$ für allgemeines $y \in l_0$ und alle $j \in \{2, \dots, 2k-2\}$. Dies impliziert die Behauptung. \square

Es gibt $c_1, \dots, c_{2k-1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit der Eigenschaft, dass

$$-2g^*L + \sum_{i=1}^{2k-1} E_i = K_{\tilde{X}} = -4\tilde{L} + c_1\Delta_1 + c_{2k-1}\Delta_{2k-1} + \sum_{i=2}^{2k-2} c_i E_i$$

ist. Unter Verwendung von $\tilde{L} = g^*L - \sum_{i=1}^{2k-1} E_i$ folgt:

$$\begin{aligned} c_1\Delta_1 + c_{2k-1}\Delta_{2k-1} &\sim 2g^*L - 3E_1 - 3E_{2k-1} - \sum_{i=2}^{2k-2} (3 + c_i)E_i \\ &= 2\tilde{L} - E_1 - E_{2k-1} - \sum_{i=2}^{2k-2} (1 + c_i)E_i. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Durch Anwenden von g_* auf die erste Zeile erhalten wir

$$c_1m_1 + c_{2k-1}m_{2k-1} = 2$$

und es folgt

$$c_1 = c_{2k-1} = m_1 = m_{2k-1} = 1.$$

Insbesondere ist $g(\Delta_i) \in |L|$, für $i = 1, 2k-1$. Es gibt also $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\sim g^*L - \sum_{i=1}^{2k-1} (a_i + 1)E_i = \tilde{L} - \sum_{i=1}^{2k-1} a_i E_i \\ \Delta_{2k-1} &\sim g^*L - \sum_{i=1}^{2k-1} (b_i + 1)E_i = \tilde{L} - \sum_{i=1}^{2k-1} b_i E_i. \end{aligned}$$

Einsetzen in (4.1.17) liefert $a_1 + b_1 = a_{2k-1} + b_{2k-1} = 1$. Desweiteren haben wir, da Δ_i von f kontrahiert wird,

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{L}^2 \cdot \Delta_1 = 1 - a_1 - a_{2k-1} \\ 0 &= \tilde{L}^2 \cdot \Delta_{2k-1} = 1 - b_1 - b_{2k-1} \end{aligned}$$

und bis auf Vertauschen von Δ_1 und Δ_{2k-1} folgt

$$a_1 = b_{2k-1} = 1, \quad a_{2k-1} = b_1 = 0.$$

Aus $a_1 = b_{2k-1} = 1$ folgt

$$C_i \subset H_i \quad \text{für } i = 1, 2k-1$$

und wie im Beweis von Lemma 4.1.10 folgt daraus

$$\deg_{H_i}(C_i) \geq 3 \quad \text{für } i = 1, 2k-1. \quad (4.1.18)$$

Um die Anzahl der Komponenten von $\text{Bs}(L)$ zu beschränken benötigen wir die folgende Behauptung.

Behauptung 4. *Für alle $2 \leq i \leq 2k-2$ sind*

$$a_i \geq 1 \quad \text{und} \quad b_i \geq 1.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus $a_1 = b_{2k-1} = 1$ und der nachfolgenden Behauptung. \square

Behauptung 5. *Sei $s \in H^0(\tilde{X}, \tilde{L})$ und $2 \leq i \leq 2k-2$. Dann gelten die folgenden Implikationen:*

$$s|_{E_{i-1}} = 0 \rightarrow s|_{E_i} = 0, \quad s|_{E_{i+1}} = 0 \rightarrow s|_{E_i} = 0$$

Beweis. Sei also $s \in H^0(X, \tilde{L})$ und $2 \leq i \leq 2k-2$. Ist $i = 2l$, so schneiden E_{i-1} und E_{i+1} den Divisor E_i jeweils in einer Faser (bzgl. g_2) und es ist

$$s|_{E_i} \in H^0(E_i, \mathbf{e}_i).$$

Wenn ein solcher Schnitt entlang einer Faser verschwindet, so ist er schon identisch 0.

Sei nun $i = 2l-1$ ungerade. Wir erinnern daran, dass in diesem Fall E_i eine Aufblasungen von \mathbb{F}_0 oder \mathbb{F}_2 in zwei Punkten ist, die in verschiedenen Fasern (bzgl. g) liegen. Es ist $E_{i-1} \cap E_i = F_i$ und $E_{i+1} \cap E_i = G_i$. Das Geradenbündel

$$\tilde{L}|_{E_i} = \phi_i^*(\mathbf{e}_i + (l_i - 1)\mathbf{f}_i) - F_i - G_i$$

ist basispunktfrei und nach Lemma 3.1.1 ist entweder $\hat{E}_i = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und die beiden aufzublasenden Punkte liegen auch auf verschiedenen horizontalen

Fasern oder es ist $\hat{E}_i = \mathbb{F}_2$ und die aufzublasenden Punkte liegen beide nicht auf der Kurve C_∞ .

Im ersten Fall seien A_1, A_2 die disjunkten (-1) -Kurven, die G_i schneiden und $A_3 = F_i$. Wenn wir die Kurven A_1, A_2, A_3 niederblasen, erhalten wir $p: E_i \rightarrow \mathbb{P}^2$. Die Bilder der exzeptionellen Kurven sind nicht kollinear und mit Lemma 3.1.1 berechnen wir

$$\tilde{L}|_{E_i} = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) - A_3.$$

Falls ein globaler Schnitt in diesem Bündel entlang $A_3 = F$ verschwindet, so ist er identisch 0. Dies zeigt die erste Implikation. Die zweite Implikation folgt, völlig analog (E_i lässt sich noch auf eine zweite Weise zu \mathbb{P}^2 niederblasen).

Im zweiten Fall lässt sich E_i als Aufblasung $p: E_i \rightarrow \mathbb{P}^2$ in zwei infinitesimal nahen Punkten, sowie einem Punkt, der nicht auf der „Verbindungsgeraden“ der beiden ersten liegt, auffassen. Es seien A_1, A_2, A_3 die exzeptionellen Kurven. Wir können für die exzeptionelle Kurve über dem isolierten Punkt sowohl $A_3 = F_i$ als auch $A_3 = G_i$ erreichen. Wieder mit Lemma 3.1.1 erhalten wir

$$\tilde{L}|_{E_i} = p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) - A_3.$$

Verschwindet ein globaler Schnitt dieses Geradenbündels entlang A_3 , so ist er schon identisch 0. Die Behauptung folgt. \square

Wenn wir die folgende Behauptung gezeigt haben, ist es leicht den Beweis abzuschließen.

Behauptung 6. *Es ist*

$$2k - 1 = 3 \quad \text{und} \quad \deg_{H_1} C_1 = \deg_{H_3} C_3 = 3.$$

Insbesondere haben wir $b_1(C_1) \leq 2$ und $b_1(C_3) \leq 2$.

Beweis. Für $i = 2, 4, \dots, 2k - 2$ und $j = 3, 5, \dots, 2k - 3$ haben wir

$$\begin{aligned} \Delta_1|_{E_1} &\sim (\tilde{L} - a_1 E_1 - a_2 E_2)|_{E_1} \\ &\sim \tilde{L}|_{E_1} + (\mathbf{e}_1 + l_1 \mathbf{f}_1) - a_2 F_1 \\ \Delta_1|_{E_i} &\sim (\tilde{L} - a_{i-1} E_{i-1} - a_i E_i - a_{i+1} E_{i+1})|_{E_i} \\ &\sim \tilde{L}|_{E_i} - (a_{i-1} + a_{i+1}) \mathbf{f}_i + a_i (\mathbf{e}_i + \mathbf{f}_i) \\ \Delta_1|_{E_j} &\sim (\tilde{L} - a_{j-1} E_{j-1} - a_j E_j - a_{j+1} E_{j+1})|_{E_j} \\ &\sim \tilde{L}|_{E_j} - a_{j-1} F_j + a_j \phi_j^* (\mathbf{e}_j + l_j \mathbf{f}_j) - a_{j+1} G_j \\ \Delta_1|_{E_{2k-1}} &\sim \tilde{L}|_{E_{2k-1}} - a_{2k-2} F_{2k-1}. \end{aligned}$$

Für alle i sind die Divisoren $\Delta_1|_{E_i}$ effektiv, da $E_i \neq \Delta_1$ ist. Für alle $i \geq 2$ wird $\Delta_1 \cap E_i$ von f kontrahiert, da für alle $i \geq 2$

$$f(\Delta_1 \cap E_i) \subset f(\Delta_1) \cap f(E_i) \subset C_1 \cap H_{2k-1}$$

ist und $\dim C_1 \cap H_{2k-1} = 0$. Für $i \geq 2$ ist also $(\Delta_1 \cdot \tilde{L})_{E_i} = 0$. Unter Verwendung von (4.1.16) erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta_1 \cdot \tilde{L})_{E_i} = a_i - (a_{i-1} + a_{i+1}), \text{ für } i = 2, 4, \dots, 2k-2 \\ 0 &= (\Delta_1 \cdot \tilde{L})_{E_j} = 3a_j - (a_{j-1} + a_{j+1}), \text{ für } j = 3, 5, \dots, 2k-3 \\ 0 &= (\Delta_1 \cdot \tilde{L})_{E_{2k-1}} = 1 - a_{2k-2} \end{aligned}$$

Formal ergeben diese Gleichungen sukzessive

$$a_{2k-2} = 1, \quad a_{2k-3} = 1, \quad a_{2k-4} = 2, \quad a_{2k-5} = 1, \quad a_{2k-6} = 1, \quad a_{2k-7} = 0.$$

Da für alle $i < 2k-1$ die Ungleichung $a_i \geq 1$ gilt, erhalten wir daraus, dass entweder $2k-1 = 3$ oder $2k-1 = 5$ ist. Nach dem ersten Teil von Lemma 3.1.11 sind die Kurven $(\Delta_1)_{|E_1}$ und $\tilde{C}_1 = (f|_{E_1})_*^{-1}(C_1)$ außerhalb von $\text{Exc}(f|_{E_1})$ identisch. Es gilt daher

$$\mathcal{O}_{H_1}(1) \cdot C_1 = (f|_{E_1}^* \mathcal{O}_{H_1}(1) \cdot \Delta_1)_{E_1} = (\tilde{L} \cdot \Delta_1)_{E_1} = 4 - a_2.$$

Wir wissen aber bereits aus (4.1.18), dass $\deg_{H_1}(C_1) \geq 3$ ist. Daher gilt $a_2 = 1$ und es folgt, dass $2k-1 = 3$ ist. Nach Lemma 3.1.9 haben wir

$$b_1(C_1) \leq 2 \cdot h^1(C_1, \mathcal{O}_{C_1}) = 2.$$

Völlig analog zeigt man $b_2 = 1$ und $b_1(C_3) \leq 2$. □

Wir haben $N_{E_2/\tilde{X}}^\vee = e_i + f_i$. Darum existiert nach dem Kontraktionskriterium von Fujiki und Nakano (siehe Proposition 2.2.2) eine Mannigfaltigkeit Y und eine holomorphe Abbildung $h: \tilde{X} \rightarrow Y$, die E_2 entlang der Abbildung $f|_{E_2}$ (also derjenigen Abbildung, die Kurven mit Klasse e kontrahiert) kontrahiert. Es ist klar, dass es genau eine Abbildung $f_2: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ mit $f = f_2 \circ h$ gibt. Diese ist holomorph außerhalb von $h(E_2)$ und überall stetig, also überall holomorph.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow f & \downarrow f_2 \\ & & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Nach Lemma 3.1.8 ist

$$b_3(X) = b_3(\tilde{X}) = b_3(Y).$$

Für $i = 1, 3$ ist $f^*H_i = E_i + E_2 + \Delta_i$ und daher ist

$$f_2^*H_i = h(E_i) + h(\Delta_i).$$

Mit zweimaliger Anwendung von Lemma 3.1.11 folgt, dass f_2 außerhalb einer endlichen Menge die Aufblasung von \mathbb{P}^3 in $C_1 \cup C_3$ ist. Insbesondere folgt, dass

die allgemeine Faser von $f_2|_{h(\Delta_1) \cup h(\Delta_3)}$ glatt, rational und zusammenhängend ist und darüberhinaus den Divisor $h(E_1) + h(E_2)$ in genau einem Punkt schneidet. Daher können wir Lemma 3.1.2 auf die Abbildung $f_2|_{h(\Delta_1) \cup h(\Delta_3)}$ und das Geradenbündel $\mathcal{O}_Y(h(E_1) + h(E_3))$ anwenden und erhalten

$$b_3(h(\Delta_1) \cup h(\Delta_3)) \leq b_1(C_1 \cup C_3).$$

Es ist klar, dass $\text{Exc}(f_2) = h(\Delta_1) \cup h(\Delta_3)$ ist. Aus Proposition 3.1.6 erhalten wir die exakte Sequenz

$$\underbrace{H^3(\mathbb{P}^3, \mathbb{C})}_{=0} \rightarrow H^3(Y, \mathbb{C}) \oplus \underbrace{H^3(C_1 \cup C_3, \mathbb{C})}_{=0} \rightarrow H^3(\text{Exc}(f_2), \mathbb{C})$$

und es folgt $b_3(Y) \leq b_3(\text{Exc}(f_2))$. Daher ist insgesamt

$$b_3(X) \leq b_1(C_1 \cup C_3).$$

Wir haben $|C_1 \cap C_3| \leq 3$, da $C_1 \cap C_3 \subset l_0 = H_1 \cap H_3$ ist und die Kurven jeweils Grad 3 haben. Falls $C_1 \cap C_3 \neq \emptyset$ ist, liest sich die Mayer-Vietoris-Sequenz aus Proposition 3.1.6 für die Abbildung $C_1 \amalg C_3 \rightarrow C_1 \cup C_3$ wie folgt

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 \oplus H^0(C_1 \cap C_3, \mathbb{Q}) &\rightarrow \left(H^0(C_1 \cap C_3, \mathbb{Q}) \right)^{\oplus 2} \rightarrow \\ &\rightarrow H^1(C_1 \cup C_3, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(C_1, \mathbb{Q}) \oplus H^1(C_3, \mathbb{Q}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$b_1(C_1 \cup C_3) = b_1(C_1) + b_2(C_3) + |C_1 \cap C_3| - 1 \leq 2 + 2 + 3 - 1 = 6.$$

Falls $C_1 \cap C_3 = \emptyset$ erhalten wir sogar $b_1(C_1 \cup C_3) \leq 4$ – man überzeugt sich jedoch leicht davon, dass dieser Fall nicht auftreten kann. Der Beweis von Satz 3.2.6 ist damit abgeschlossen.

4.2 Beweis von Satz 3.2.7

Wir erinnern daran, dass wir unter Voraussetzung 4.2.1 die Ungleichung $b_3(X) \leq 6$ zeigen wollen. Wie bereits zu Beginn des letzten Abschnitts erwähnt, können wir hier relativ leicht zeigen, dass $\text{Bs}(L)$ aus nur einer glatten, rationalen Kurve besteht. Die verwendeten Methoden sind im Wesentlichen mit denen aus [Nak96] identisch.

Im gesamten Abschnitt gelten die Voraussetzungen von Satz 3.2.7. D.h. es gilt

Voraussetzung 4.2.1. *Zusätzlich zu Voraussetzung 3.2.8 nehmen wir*

$$s = h^0(X, L) = 5$$

an.

Sei wieder Φ die von L induzierte Abbildung und sei $Y \subset \mathbb{P}^4$ das Bild von Φ . Wir haben $\dim Y = 3$ nach [Kol91, Lemma 5.3.11]. Die Abbildung Φ ist offensichtlich kein Morphismus. Andernfalls wäre

$$2 = L^3 = (\Phi^* \mathcal{O}_Y(1))^3 = \deg \Phi \cdot \mathcal{O}_Y(1)^3 \geq 2 \deg \Phi.$$

Dann wäre Φ ein birationaler Morphismus und Y eine Quadrik. Das ist absurd, weil $K_X = -2L$ ist. Also ist Φ kein Morphismus und folglich ist, nach Lemma 3.2.10, Y eine Quadrik und Φ bimeromorph.

Das folgende Lemma zeigt (im Wesentlichen), dass $\text{Bs}(L)$ relativ einfache Gestalt hat.

Lemma 4.2.2. *Für allgemeine $D_1, D_2 \in |L|$ ist die Garbe \mathcal{Q}_{D_1, D_2} nicht in einem Punkt konzentriert. Die Kurve $D_1 \cdot D_2$ ist reduziert und enthält neben C_{D_1, D_2} genau eine weitere (glatte, rationale) Komponente.*

Beweis. Wir fixieren zunächst eine Auflösung der bimeromorphen Abbildung Φ

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & & \\ \downarrow g & \searrow f & \\ X & \xrightarrow{\Phi} & Q^3 \subset \mathbb{P}^4 \end{array}$$

und verwenden die Notation aus dem Beweis von Satz 3.2.6. D.h. E_1, \dots, E_n sind die irreduziblen Komponenten von $\text{Exc}(g)$,

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid E_i \not\subset \text{Exc}(f)\},$$

und $\{\Delta_i \mid i \in I\}$ ist die Menge derjenigen f -exzeptionellen Divisoren, die nicht g -exzeptionell sind. Seien F, H' die eindeutig bestimmten Divisoren mit der Eigenschaft, dass

$$g^* K_X + F = K_{\hat{X}} = f^* K_{Q^3} + H'$$

ist. Durch Projektion auf $g^* \text{Pic}(X)$ sieht man, unter Verwendung von $K_X = -2L$ und $K_{Q^3} = -3\mathcal{O}_{Q^3}(1)$, dass $|I| = 1$ ist – wir schreiben $I = \{i_0\}$ – und H' die Form

$$H' = \Delta_{i_0} + H, \quad H = \sum_{i \notin I}^n b_i \cdot E_i$$

hat und außerdem $g(\Delta_{i_0}) \in |L|$ ist. Wir setzen

$$E = E_{i_0}, \quad \Delta = \Delta_{i_0}, \quad Q = f(E), \quad B = g(E).$$

Seien $H_1, H_2 \in |\mathcal{O}_{Q^3}(1)|$ allgemein mit den folgenden Eigenschaften

- l_{H_1, H_2} ist irreduzibel,

- $l_{H_1, H_2} \not\subset f(\text{Exc}(g))$,
- $l_{H_1, H_2} \cap f(\text{Exc}(f)) = \emptyset$,
- $|l_{H_1, H_2} \cap Q| \geq 2$.

Dann ist die Strikttransformierte $\hat{l}_{H_1, H_2} \subset \tilde{X}$ nicht in $\text{Exc}(g)$ enthalten und es gilt

$$|\hat{l}_{H_1, H_2} \cap E| \geq 2$$

Werden zwei verschiedene Punkte in $\hat{l}_{H_1, H_2} \cap E$ von g auf denselben Punkt abgebildet, so ist die Kurve

$$C_{D_1, D_2} = g(\hat{l}_{H_1, H_2}) \subset D_1 \cdot D_2$$

dort singulär und es ist $C_{D_1, D_2} = D_1 \cdot D_2$ nach Lemma 3.2.11. Das ist ein Widerspruch, weil nach Lemma 3.2.17 der Basisort $\text{Bs}(L)$ eine Kurve enthält. Also schneidet C_{D_1, D_2} die Menge $B = g(E)$ in mindestens zwei verschiedenen Punkten. Insbesondere ist $\dim B = 1$. Folglich ist

$$C_{D_1, D_2} \cap B \subset \text{Supp}(Q_{D_1, D_2}),$$

wobei wir daran erinnern, dass $\text{Supp}(Q_{D_1, D_2})$ gerade der Ort in C_{D_1, D_2} ist, wo lokal $C_{D_1, D_2} \neq D_1 \cdot D_2$ ist. Die erste Behauptung folgt.

Ferner folgt $h^1(C_{D_1, D_2}, \mathcal{O}_{C_{D_1, D_2} + B}) \geq 1$ aus $|C_{D_1, D_2} \cap B| \geq 2$. Daraus wiederum folgt mit Lemma 3.2.11, dass $D_1 \cdot D_2 = C_{D_1, D_2} + B$ ist und dies zeigt die letzten beiden Behauptungen. \square

Wir haben also gezeigt, dass B die einzige Kurve in $\text{Bs}(L)$ ist. A priori könnte $\text{Bs}(L)$ noch isolierte Punkte enthalten. Wir werden dies ausschließen, indem wir zeigen, dass die Aufblasung von X in B die Abbildung Φ bereits auflöst. Zunächst haben wir das folgende Lemma.

Lemma 4.2.3. *Für $D_1, D_2 \in |L|$ allgemein wie im vorangehenden Lemma gilt*

$$L \cdot C_{D_1, D_2} = s - 1 = 4$$

und folglich $L \cdot B = -2$.

Beweis. Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 3.2.18 unter Verwendung der Tatsache, dass $D_1 \cdot D_2 = C_{D_1, D_2} + B$ reduziert ist. Die zweite folgt aus $L^3 = 2$. \square

Wir vergessen die Auflösung aus dem vorangehenden Beweis und betrachten die Aufblasung $g: \hat{X} \rightarrow X$ von X entlang B . Der exzeptionelle Divisor $g^{-1}(B)$ sei mit E bezeichnet.

$$\begin{array}{ccc} E & \subset & \hat{X} \\ \downarrow & & \downarrow g \\ B & \subset & X \end{array}$$

Das Konormalenbündel $N_{B/X}^\vee$ lässt sich schreiben als $\mathcal{O}_B(a) \oplus \mathcal{O}_B(b)$, mit $a \geq b$ und nach der Adjunktionsformel gilt

$$K_{X|B} = K_B + \det(N_{B/X}^\vee) \quad \text{also:} \quad a + b = 4 + 2 = 6. \quad (4.2.1)$$

Es ist $E \simeq \mathbb{P}(N_{B/X}^\vee) \simeq F_{a-b}$ und im Folgenden bezeichne wieder f eine Element in $\text{Pic}(E)$, das zu einer Faser der Projektionsabbildung $E \rightarrow B$ gehört und $e \in \text{Pic}(E)$ sei derart, dass $e^2 = a - b$ und $e \cdot f = 1$ ist. Dann gilt

$$(g^*L)|_E = L \cdot B \cdot f, \quad \mathcal{O}_{\hat{X}}(-E)|_E = N_{E/\hat{X}}^\vee = e + b \cdot f.$$

Wir setzen $\hat{L} = g^*L - E$, so dass $\text{Bs}(\hat{L})$ keine divisorischen Komponenten enthält und

$$H^0(X, L) = H^0(\hat{X}, \hat{L})$$

ist. Für $D_1, D_2 \in |L|$ allgemein wie im obigen Lemma sind $\hat{D}_1, \hat{D}_2 \in |\hat{L}|$ und es ist

$$\hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2 = \hat{C}_{D_1, D_2} = g_*^{-1} C_{D_1, D_2},$$

da sich D_1, D_2 entlang $B \setminus C_{D_1, D_2}$ transversal schneiden und in jedem Punkt $p \in B \cap C_{D_1, D_2}$ mindestens einer der beiden Divisoren D_1, D_2 glatt ist (wegen $(Q_{D_1, D_2})_p = \mathbb{C}$). Es gilt

$$\hat{L} \cdot \hat{C}_{D_1, D_2} = (g^*L - E) \cdot \hat{C}_{D_1, D_2} = 4 - 2 = 2.$$

Aus dem zweiten Teil von Lemma 3.1.10 folgt, dass $\text{Bs}(\hat{L}) = \emptyset$ ist. Also erhalten wir eine holomorphe Abbildung $f: \hat{X} \rightarrow Q^3$ mit $f = \phi_L \circ g$:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & & \\ \downarrow g & \searrow f = \phi_L & \\ X & \xrightarrow{\phi_L} & Q^3 \end{array}$$

Wir setzen $\Delta = \text{Exc}(f)$ und $C := f(\Delta)$. Der Divisor Δ ist irreduzibel, da $\text{Pic}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}^2$ ist. Also ist auch C irreduzibel. Außerdem ist mengentheoretisch $f^{-1}(C) = \Delta$, da f zusammenhängende Fasern hat. Da C nach Lemma 3.2.16 in höchstens einer Hyperebene enthalten sein kann, ist $\dim C = 1$. Wir wenden Proposition 3.1.6 an, um die folgende exakte Sequenz zu erhalten

$$\underbrace{H^3(Q^3, \mathbb{C})}_{=0} \rightarrow H^3(\hat{X}, \mathbb{C}) \oplus \underbrace{H^3(C, \mathbb{C})}_{=0} \rightarrow H^3(\Delta, \mathbb{C}).$$

D.h. es gilt $b_3(\hat{X}) \leq b_3(\Delta)$. Da wegen Lemma 3.1.8 $b_3(X) = b_3(\hat{X})$ ist, reicht es also $b_3(\Delta) \leq 6$ zu zeigen. Es gibt $a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ mit

$$\begin{aligned} g^*K_X + E &= K_{\hat{X}} &= f^*K_{Q^3} + a\Delta \\ -2g^*L + E &= K_{\hat{X}} &= -3\hat{L} + a\Delta \\ \hat{L} - E &= K_{\hat{X}} &= a\Delta. \end{aligned}$$

Also ist $a = 1$ und $g(\Delta) \in |L|$. Da $E \neq \Delta$ ist, wird E von f birational auf sein Bild $Q = f(E)$ abgebildet. Es gilt

$$\mathcal{O}_{Q^3}(1)^2 \cdot f_* E = \hat{L}^2 \cdot E = (\hat{L}|_E)^2 = (e + (b-2)f)^2 = a - b + 2b - 4 = 2,$$

so dass $f(E)$ eine (irreduzible) Quadrik ist. Es gibt daher zwei Fälle:

1. $E \simeq \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $f|_E : E \rightarrow Q$ ist ein Isomorphismus
2. $E \simeq \mathbb{F}_2$ und Q ist ein quadratischer Kegel

Wir veranschaulichen die Situation in einem Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{X} & \supset & E \cup \Delta & \supset & E & \supset & E \cap \Delta \\ f \downarrow & & \downarrow & & \text{bir} \downarrow & & \downarrow \\ Q^3 & \supset & Q & = & Q & \supset & C \end{array}$$

Nach dem zweiten Teil von Lemma 3.1.11 ist f im allgemeinen Punkt von C die Aufblasung von Q^3 in C . Insbesondere ist die allgemeine Faser von $f|_\Delta$ glatt, rational und zusammenhängend und schneidet E (transversal in genau einem Punkt). Wir können daher Lemma 3.1.2 auf $f|_\Delta$ und $\mathcal{O}_{\hat{X}}(E)|_\Delta$ anwenden und erhalten

$$b_3(\Delta) \leq b_1(C).$$

Nach Lemma 3.1.9 gilt $b_1(C) \leq 2h^1(C, \mathcal{O}_C)$. Also bleibt, um den Beweis von Satz 3.2.7 abzuschließen, $h^1(C, \mathcal{O}_C) \leq 3$ zu zeigen. Wir unterscheiden dafür die beiden oben genannten Fälle.

Sei zunächst $E \simeq \mathbb{F}_0$. Da $E \simeq \mathbb{P}(\mathcal{O}_B(a) \oplus \mathcal{O}_B(b))$ ist, gilt $a = b$. Also ist wegen (4.2.1) $a = b = 3$ und es gilt

$$\mathcal{O}_{\hat{X}}(-E)|_E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(N_{B/X}^\vee)}(1) = e + 3f.$$

Desweiteren ist hier $\Delta \cap E$ isomorph zu C (vermöge f). Nach dem ersten Teil von Lemma 3.1.11 ist $I_{\Delta \cap E} = (I_\Delta)|_E$. Es gilt

$$(I_\Delta)|_E \simeq (E - \hat{L})|_E = (2E - g^*L)|_E = -(2e + 6f - 2f) = -(2e + 4f)$$

Ein Ausschnitt aus der langen exakten Sequenz zur Idealsequenz von C in Q sieht daher wie folgt aus:

$$\underbrace{H^1(Q, \mathcal{O}_Q)}_{=0} \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C) \rightarrow H^2(Q, \mathcal{O}_Q(-2, -4)) \rightarrow \underbrace{H^2(Q, \mathcal{O}_Q)}_{=0}$$

Nach Serre-Dualität ist $h^2(Q, \mathcal{O}_Q(-2, -4)) = h^0(Q, \mathcal{O}_Q(0, 2))$. Also gilt

$$h^1(C, \mathcal{O}_C) = h^2(Q, \mathcal{O}_Q(-2, -4)) = h^0(Q, \mathcal{O}_Q(0, 2)) = 3.$$

Sei nun $E_0 \simeq \mathbb{F}_2$. Dann ist $a - b = 2$ und daher $(a, b) = (4, 2)$ wegen (4.2.1). Wir bezeichnen, wie üblich, mit $C_\infty \subset E$ die eindeutig bestimmte Kurve mit $C_\infty^2 = -2$. Diese Kurve wird von f auf die Spitze des Kegels Q abgebildet. Insbesondere gilt $C_\infty \subset \Delta$. Wir setzen $C_1 = (f|_E)_*^{-1}(C)$. Aus dem ersten Teil von Lemma 3.1.11 folgt

$$(I_{\Delta, X})|_{E \setminus C_\infty} = (I_{C_1, E})|_{E \setminus C_\infty}.$$

Es gibt daher $a \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass

$$a \cdot C_\infty + C_1 = \Delta|_E \sim (\hat{L} - E)|_E = -2f + 2e + 4f = 2e + 2f$$

ist. Da $C_\infty \subset \Delta \cap E$ ist und C_1 effektiv, gilt $1 \leq a \leq 2$. Falls $a = 2$ ist, folgt $C_1 \in |6f|$ – ein Widerspruch, da C_1 irreduzibel und reduziert ist. Also ist $a = 1$ und $C_1 \in |e + 4f|$. Es folgt mit Lemma 3.1.12, dass C_1 eine glatte rationale Kurve ist. Außerdem folgt, dass $C_1 \cdot C_\infty = 4$ ist. Mit Proposition 3.1.6 erhalten wir die folgende exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(C_1, \mathbb{C}) \oplus H^0(\{p\}, \mathbb{C}) \rightarrow H^0(C_1 \cap C_\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(C, \mathbb{C}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es gilt daher $b_1(C) = |C \cap C_\infty| - 1 - 1 + 1 \leq 4 - 1 = 3$. Der Beweis von Satz 3.2.7 ist damit abgeschlossen.

Anhang A

Ein Beispiel

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass es nicht-projektive Mannigfaltigkeiten gibt, die Voraussetzung 3.2.8 erfüllen und für die die erste Alternative in Lemma 3.2.10 eintritt.

Proposition A.0.4. *Es gibt eine Moishezon Mannigfaltigkeit X der Dimension 3 mit*

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}L, \quad h^0(X, L) = 4, \quad L^3 = 2, \quad K_X = -2L,$$

die nicht projektiv ist.

Beweis. Wir starten mit \mathbb{P}^3 , wählen zwei verschiedenen Hyperebenen

$$H_1, H_2 \subset \mathbb{P}^3$$

und schreiben $C_0 := H_1 \cap H_2$ für die Schnittgerade. Ferner wählen wir paarweise verschiedene Punkte $p_1, p_2, p_3, p_4 \in C_0$ und glatte, ebene Kubiken

$$C_1 \subset H_1, \quad C_2 \subset H_2,$$

die C_0 in den Punkten p_1, p_2, p_3 bzw. p_1, p_2, p_4 schneiden. Nun bezeichnen wir mit $f_1: Y \rightarrow \mathbb{P}^3$ die getwistete Aufblasung von \mathbb{P}^3 entlang C_1 und C_2 , wobei wir nahe (in der komplexen Topologie) p_1 zuerst C_1 und dann die Strikttransformierte von C_2 aufblasen und nahe p_2 in umgekehrter Reihenfolge verfahren. Für eine Hyperebene $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|$ schreiben wir stets $\hat{H} = (f_1)_*^{-1}H$ für die Strikttransformierte. Wir betrachten die Einschränkung

$$f_{1|\hat{H}_1}: \hat{H}_1 \rightarrow H_1.$$

Außerhalb von C_2 ist diese ein Isomorphismus, weil $C_1 \subset H_1$ ein Cartierdivisor ist. Ebenso ist sie nahe p_1 ein Isomorphismus, weil nach Aufblasen von C_1 die Strikttransformierte von C_2 die Strikttransformierte von H_1 lokal über p_1 nicht mehr schneidet. Nahe p_2 und p_4 entspricht sie gerade der Aufblasung im

jeweiligen Punkt. Analog entspricht die Einschränkung $f_{1|\hat{H}_2}$ der Aufblasung von H_2 in den Punkten p_1, p_3 .

Es bezeichne \hat{C}_0 die Strikttransformierte von C_0 unter h und $\Delta_i = f_1^{-1}(C_i), i = 1, 2$, die exzeptionellen Divisoren. Man beachte, dass \hat{C}_0 eine glatte rationale Kurve ist und die Divisoren Δ_i jeweils in genau zwei Punkten transversal schneidet. Diese seien mit q_1, q_3 bzw. q_2, q_4 bezeichnet derart, dass $f_1(q_i) = p_i$. Man überzeugt sich leicht, dass $\hat{C}_0 = \hat{H}_1 \cap \hat{H}_2$ ist. Da $\hat{H}_i \in |f_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - \Delta_i|$ ist, gilt daher für das Konormalenbündel von \hat{C}_0 :

$$N_{\hat{C}_0/Y}^\vee = (I_{\hat{H}_1} + I_{\hat{H}_2})_{\hat{C}_0} \simeq \mathcal{O}_{\hat{C}_0}(1)^{\oplus 2} \quad (\text{A.0.1})$$

Es bezeichne nun

$$f_2: \tilde{X} \rightarrow Y$$

die Aufblasung von Y im Zentrum \hat{C}_0 , E_0 den zugehörigen exzeptionellen Divisor und $\tilde{H}_i = f_{2*}^{-1} \hat{H}_i$. Die Einschränkung

$$f_{2|\tilde{H}_i}: \tilde{H}_i \rightarrow \hat{H}_i$$

ist für $i = 1, 2$ jeweils ein Isomorphismus, weil $\hat{C}_0 \subset \hat{H}_i$ Cartiersch ist. Die Kurven $\tilde{C}_i = E_0 \cap \tilde{H}_i, i = 1, 2$ sind disjunkt. Es gilt $\tilde{B}_0 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, wobei wir die erste Projektion mit der Einschränkung $f_{2|\tilde{B}_0}$ identifizieren und deren Fasern wir mit f_0 bezeichnen, die der zweiten Projektion mit e_0 . Dann gilt wegen (A.0.1):

$$N_{\tilde{E}_0/X_2}^\vee = e_0 + f_0.$$

Nach dem Kontraktionskriterium von Fujiki und Nakano gibt es eine komplexe Mannigfaltigkeit \hat{X} und eine holomorphe Abbildung

$$g_2: \tilde{X} \rightarrow \hat{X},$$

die \tilde{B}_0 entlang der zweiten Projektion kontrahiert und außerhalb davon ein Isomorphismus ist. Wir setzen $E_i := g_2(\tilde{H}_i)$. Es ist $\tilde{C}_i \in |e_0|$ und daher ist $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Die Einschränkung $g_{2|\tilde{H}_i}: \tilde{H}_i \rightarrow E_i$ ist eine Niederblasung der glatten rationalen Kurve $\tilde{C}_i \subset \tilde{H}_i$. Damit gilt $E_i \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Wir wollen die Konormalenbündel von E_1, E_2 bestimmen. Es gilt einerseits $g_2^* N_{E_i/\hat{X}}^\vee = N_{\tilde{H}_i/\tilde{X}}^\vee$, da $g_2^*(I_{E_i}) = I_{\tilde{H}_i}$ ist, und andererseits

$$\begin{aligned} N_{\tilde{H}_1/\tilde{X}}^\vee &= (-f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) + \Delta_1 + E_0)_{|\tilde{H}_1} = \\ &= -f_{|\tilde{H}_1}^* \mathcal{O}_{H_1}(1) + 3f_{|\tilde{H}_1}^* \mathcal{O}_{H_1}(1) - A_2 + f_{|\tilde{H}_1}^* \mathcal{O}_{H_1}(1) - A_2 - A_4 = \\ &= 3f_{|\tilde{H}_1}^* \mathcal{O}_{H_1}(1) - 2A_2 - A_4 = (g_{2|\tilde{H}_1})^*(e_1 + 2f_1) \\ N_{\tilde{H}_2/\tilde{X}}^\vee &= (-f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) + \Delta_2 + E)_{|\tilde{H}_2} = \\ &= -f_{|\tilde{H}_2}^* \mathcal{O}_{H_2}(1) + 3f_{|\tilde{H}_2}^* \mathcal{O}_{H_2}(1) - A_1 + f_{|\tilde{H}_2}^* \mathcal{O}_{H_2}(1) - A_1 - A_3 \\ &= 3f_{|\tilde{H}_2}^* \mathcal{O}_{H_2}(1) - 2A_1 - A_3 = (g_{2|\tilde{H}_2})^*(e_2 + 2f_2) \end{aligned}$$

Wieder nach dem Fujiki–Nakano–Kontraktionskriterium gibt es eine Mannigfaltigkeit X und eine holomorphe Abbildung $g_1: \hat{X} \rightarrow X$, die E_1 und E_2 entlang ihrer zweiten Projektionen kontrahiert (d.h. Kurven mit Klasse f_i werden kontrahiert). Diese entsprechen Geraden in H_1 durch den Punkt p_2 bzw. Geraden in H_2 durch den Punkt p_1 . Man zeigt leicht, dass die Mannigfaltigkeit X

$$\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}L, \quad h^0(X, L) = 4, \quad L^3 = 2, \quad K_X = -2L$$

erfüllt. Wäre X projektiv, so müsste das Geradenbündel L ample sein. Man sieht jedoch leicht, dass es auf der Kurve $B_1 = g_2(E_1)$ Grad -1 hat. Also ist L nicht ample und damit ist X nicht projektiv. \square

Bemerkung A.0.5. *In Bezug auf Satz 3.2.6 ist es noch interessant $b_3(X)$ zu bestimmen. Nach Lemma 3.1.8 haben wir*

$$b_3(X) = b_3(\hat{X}) = b_3(\tilde{X}) = b_3(Y).$$

Nach Proposition 3.1.6 haben wir eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \underbrace{H^3(\mathbb{P}^3, \mathbb{C})}_{=0} &\rightarrow H^3(Y, \mathbb{C}) \oplus \underbrace{H^3(C_1 \cup C_2, \mathbb{C})}_{=0} \rightarrow H^3(\Delta_1 \cup \Delta_2, \mathbb{C}) \rightarrow \\ &\rightarrow H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{C}) \rightarrow H^4(Y, \mathbb{C}) \oplus 0. \end{aligned}$$

Die Abbildung in der zweiten Zeile ist injektiv und daher gilt

$$b_3(Y) = b_3(\Delta_1 \cup \Delta_2).$$

Die erste Abbildung im folgenden Ausschnitt aus der Mayer-Vietoris Sequenz

$$\begin{aligned} H^2(\Delta_1, \mathbb{C}) \oplus H^2(\Delta_2, \mathbb{C}) &\rightarrow \underbrace{H^2(\Delta_1 \cap \Delta_2, \mathbb{C})}_{=\mathbb{C}^2} \rightarrow \\ &\rightarrow H^3(\Delta_1 \cup \Delta_2, \mathbb{C}) \rightarrow H^3(\Delta_1, \mathbb{C}) \oplus H^3(\Delta_2, \mathbb{C}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ist surjektiv. Daher ist

$$b_3(\Delta_1 \cup \Delta_2) = b_3(\Delta_1) + b_3(\Delta_2).$$

Die Fläche Δ_1 resp. Δ_2 ist die Aufblasung eines \mathbb{P}^1 -Bündels über C_1 resp. C_2 in zwei Punkten. Nach Lemma 3.1.7 haben wir daher

$$b_3(\Delta_i) = b_1(C_i) = 2, \quad i = 1, 2.$$

Also ist $b_3(X) = 4$.

Literatur

- [BEVU05] Ana María Bravo, Santiago Encinas und Orlando Villamayor U. „A simplified proof of desingularization and applications“. In: *Rev. Mat. Iberoamericana* 21.2 (2005), S. 349–458. ISSN: 0213-2230. URL: <http://dx.doi.org/10.4171/RMI/425> (siehe S. 17, 20, 67).
- [BK82] Gottfried Barthel und Ludger Kaup. „Topologie des surfaces complexes compactes singulières“. In: *On the topology of compact complex surfaces*. Bd. 80. Sémin. Math. Sup. Montreal, Que.: Presses Univ. Montréal, 1982, S. 61–297 (siehe S. 30).
- [Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf theory*. Second. Bd. 170. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1997, S. xii+502. ISBN: 0-387-94905-4. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0647-7> (siehe S. 30, 57).
- [BS76] Constantin Bănică und Octavian Stănăşilă. *Algebraic methods in the global theory of complex spaces*. Translated from the Romanian. Bucharest: Editura Academiei, 1976, S. 296 (siehe S. 41).
- [Dem09] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. 2009. URL: <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf> (besucht am 27.03.2013) (siehe S. 15).
- [Fis76] Gerd Fischer. *Complex analytic geometry*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 538. Berlin: Springer-Verlag, 1976, S. vii+201 (siehe S. 36).
- [FN72] Akira Fujiki und Shigeo Nakano. „Supplement to “On the inverse of monoidal transformation”“. In: *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 7 (1971/72), S. 637–644. ISSN: 0034-5318. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=45:3780> (siehe S. 15).
- [Fri98] Robert Friedman. *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*. Universitext. New York: Springer-Verlag, 1998, S. x+328. ISBN: 0-387-98361-9. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-1688-9> (siehe S. 17).
- [GR70] Hans Grauert und Oswald Riemenschneider. „Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen“. In: *Invent. Math.* 11 (1970), S. 263–292. ISSN: 0020-9910 (siehe S. 44).

- [GR84] Hans Grauert und Reinhold Remmert. *Coherent analytic sheaves*. Bd. 265. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Berlin: Springer-Verlag, 1984, S. xviii+249. ISBN: 3-540-13178-7. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-69582-7> (siehe S. 44).
- [Gra60] Hans Grauert. „Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen“. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 5 (1960), S. 64. ISSN: 0073-8301 (siehe S. 16).
- [Gra62] Hans Grauert. „Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen“. In: *Math. Ann.* 146 (1962), S. 331–368. ISSN: 0025-5831 (siehe S. 31, 44, 77).
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. New York: Springer-Verlag, 1977, S. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9 (siehe S. 37).
- [Hir62] Heisuke Hironaka. „An example of a non-Kählerian complex-analytic deformation of Kählerian complex structures“. In: *Ann. of Math. (2)* 75 (1962), S. 190–208. ISSN: 0003-486X (siehe S. 9).
- [Hir75] Heisuke Hironaka. „Flattening theorem in complex-analytic geometry“. In: *Amer. J. Math.* 97 (1975), S. 503–547. ISSN: 0002-9327 (siehe S. 42).
- [Hwa95] Jun-Muk Hwang. „Nondeformability of the complex hyperquadric“. In: *Invent. Math.* 120.2 (1995), S. 317–338. ISSN: 0020-9910. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01241131> (siehe S. 9).
- [Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of sheaves*. Universitext. Berlin: Springer-Verlag, 1986, S. xii+464. ISBN: 3-540-16389-1. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-82783-9> (siehe S. 15, 26, 44).
- [KO73] Shoshichi Kobayashi und Takushiro Ochiai. „Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics“. In: *J. Math. Kyoto Univ.* 13 (1973), S. 31–47. ISSN: 0023-608X (siehe S. 9).
- [Kol91] János Kollár. „Flips, flops, minimal models, etc“. In: *Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)*. Bethlehem, PA: Lehigh Univ., 1991, S. 113–199 (siehe S. 10, 11, 44, 45, 92).
- [Kol96] János Kollár. *Rational curves on algebraic varieties*. Bd. 32. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Berlin: Springer-Verlag, 1996, S. viii+320. ISBN: 3-540-60168-6 (siehe S. 43).
- [Laz80] Robert Lazarsfeld. „A Barth-type theorem for branched coverings of projective space“. In: *Math. Ann.* 249.2 (1980), S. 153–162. ISSN: 0025-5831. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01351412> (siehe S. 39).
- [Mei96] Christian Meister. „Starrheit der drei-dimensionalen Kubik“. Universität Bayreuth, 1996 (siehe S. 10).

- [MM07] Xiaonan Ma und George Marinescu. *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*. Bd. 254. Progress in Mathematics. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007, S. xiv+422. ISBN: 978-3-7643-8096-0 (siehe S. 10, 41).
- [Moi74] Boris Moishezon. „Modifications of complex varieties and the Chow lemma“. In: *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*. Berlin: Springer, 1974, 133–139. Lecture Notes in Math., Vol. 412 (siehe S. 42).
- [Nak71] Shigeo Nakano. „On the inverse of monoidal transformation“. In: *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 6 (1970/71), S. 483–502. ISSN: 0034-5318. URL: <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=45:3778> (siehe S. 15).
- [Nak96] Iku Nakamura. „Moishezon threefolds homeomorphic to a cubic hypersurface in \mathbf{P}^4 “. In: *J. Algebraic Geom.* 5.3 (1996), S. 537–569. ISSN: 1056-3911 (siehe S. 10, 34, 45, 46, 78, 79, 91).
- [Pet89] Thomas Peternell. „Singular surfaces and the rigidity of \mathbf{P}_3 “. In: *Manuscripta Math.* 63.1 (1989), S. 69–82. ISSN: 0025-2611. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01173702> (siehe S. 40, 42).
- [RV60] Reinhold Remmert und Ton van de Ven. „Zwei Sätze über die komplex-projektive Ebene“. In: *Nieuw. Arch. Wisk. (3)* 8 (1960), S. 147–157. ISSN: 0028-9825 (siehe S. 57).
- [Sha99] I. R. Shafarevich, Hrsg. *Algebraic geometry*. V. Bd. 47. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Fano varieties, A translation of it Algebraic geometry. 5 (Russian), Ross. Akad. Nauk, Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich. Berlin: Springer-Verlag, 1999, S. iv+247. ISBN: 3-540-61468-0 (siehe S. 38).
- [Siu89] Yum Tong Siu. „Nondeformability of the complex projective space“. In: *J. Reine Angew. Math.* 399 (1989), S. 208–219. ISSN: 0075-4102. URL: <http://dx.doi.org/10.1515/crll.1989.399.208> (siehe S. 9).
- [Siu91] Yum Tong Siu. „Global nondeformability of the complex projective space“. In: *Prospects in complex geometry (Katata and Kyoto, 1989)*. Bd. 1468. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1991, S. 254–280. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0086197> (siehe S. 9).
- [Siu92] Yum Tong Siu. „Errata: “Nondeformability of the complex projective space” [J. Reine Angew. Math. **399** (1989), 208–219; MR1004139 (90h:32048)]“. In: *J. Reine Angew. Math.* 431 (1992), S. 65–74. ISSN: 0075-4102. URL: <http://dx.doi.org/10.1515/crll.1992.431.65> (siehe S. 9).