



UNIVERSITÄT BAYREUTH

Abt. Mikrometeorologie

**Strukturanalyse der atmosphärischen Turbulenz mittels
Wavelet-Verfahren zur Bestimmung von
Austauschprozessen über dem antarktischen Schelfeis**

Abschlußbericht des DFG-Projektes Fo 226/2

**Georg Heinz
Dörthe Handorf
Thomas Foken**

Arbeitsergebnisse

Nr. 07

Bayreuth, Juli 1999

Arbeitsergebnisse, Universität Bayreuth, Abt. Mikrometeorologie, Print, ISSN 1614-8916
Arbeitsergebnisse, Universität Bayreuth, Abt. Mikrometeorologie, Internet, ISSN 1614-8924
<http://www.bayceer.uni-bayreuth.de/mm/>

Eigenverlag: Universität Bayreuth, Abt. Mikrometeorologie
Vervielfältigung: Druckerei der Universität Bayreuth
Herausgeber: Prof. Dr. Thomas Foken

Universität Bayreuth, Abteilung Mikrometeorologie
D-95440 Bayreuth

Die Verantwortung über den Inhalt liegt beim Autor.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	1
2. Die Wavelettransformation.....	2
2.1. Mathematische Grundlagen	2
2.2. Energieerhaltende Wavelettransformation	4
2.3. Anwendungsbeispiele der Wavelettransformation zur Turbulenzuntersuchung	8
2.3.1. Detektion charakteristischer Ereignisse.....	8
2.3.2. Untersuchung von Spektren, Bestimmung charakteristischer Skalen	9
2.3.3. Lokale Untersuchung charakteristischer Ereignisse	9
2.3.4. Filterung/Datenrekonstruktion.....	9
2.3.5. „Conditional sampling“	9
2.4. Auswahl geeigneter Wavelets.....	9
3. Datenbasis.....	13
3.1. Datenbasis des Experimentes FINTUREX.....	13
3.2. Bearbeitung des Datensatzes für Turbulenzuntersuchungen	14
3.3. Selektion des Datensatzes für die vorliegenden Untersuchungen	15
3.4. Datensatz für weitere Untersuchungen	17
4. Untersuchung turbulenter Prozesse bei stabiler Schichtung mittels Wavelet-Analyse	19
4.1. Globale Untersuchungen.....	19
4.1.1. Stark stabile Schichtung	19
4.1.2. Schwach stabile Schichtung	24
4.2. Lokale Ereignisse.....	28
4.3. Intermittenz.....	30
4.3.1. Globale Intermittenzanalyse nach Castaing.....	30
4.3.2. Lokale Intermittenzanalyse nach Farge	34
4.3.3. Die Varianz der lokalen Varianzen.....	35
4.4. Bestimmung von Energieflüssen	37
4.4.1. Filterung.....	38
4.4.2. Flüsse für turbulenten und Wellenanteil.....	39
4.4.3. Conditional Sampling	40
4.5. Energiebilanz	43
5. Wechselwirkung Welle/Turbulenz	46
5.1. Methode der Schwerpunktuntersuchung	46
5.2. Energietransfer Welle/Turbulenz.....	48
5.3. Energieverteilung Welle/Turbulenz.....	49
6. Möglichkeiten der Parametrisierung.....	51
6.1. Energieverteilung Welle/Turbulenz.....	51
6.2. Intermittenz.....	51
6.3. Energiebilanz	52
7. Schlußfolgerungen	53
8. Danksagung	54
9. Literatur	55
A. Mathematische Grundlagen der Wavelettransformation	57
A.1. Die Definition der Wavelet-Transformation.....	58
A.2. Wavelets und Zeit-Skalen-Analyse.....	63
A.3. Wichtigste Parameter der verwendeten Wavelets.....	64

1. Einleitung

Zur adäquaten Beschreibung der turbulenten Austauschprozesse in gekoppelten Atmosphären-Ozean-Meereis-Modellen müssen Parametrisierungen entwickelt werden, die unter polaren Bedingungen anwendbar sind. In der Antarktis ist die bodennahe Atmosphäre häufig stabil geschichtet und weist eine Vielzahl turbulenter Strukturen auf (kontinuierliche und unterbrochene Turbulenz, Koexistenz von turbulenten und Wellenstrukturen). Bevor Turbulenzparametrisierungen für die stabile Schichtung entwickelt werden, müssen die auftretenden Turbulenzstrukturen analysiert werden. Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wird diese Analyse für Zeitserien der turbulenten Fluktuationen der Temperatur, der Feuchte und der drei Komponenten des Windvektors mittels der Wavelettransformation durchgeführt. Die Messungen der turbulenten Größen in 2m, 4m und 11m Höhe erfolgten während der Meßkampagne FINTUREX im Sommer 1994 an der Neumayer-Station (Foken, 1996). Mit der relativ neuen Technik der Wavelettransformation ist eine gute Lokalisierung charakteristischer Ereignisse sowohl im Zeit- als auch im Frequenzraum möglich, während die klassische Fouriertransformation nur eine Lokalisierung im Frequenzraum liefert.

In diesem Bericht wird zunächst die Theorie der Wavelettransformation (WT) und einige Beispiele ihrer Anwendung in der Meteorologie vorgestellt. Danach wird die Datenbasis des FINTUREX Experimentes und die daran von uns durchgeführten Untersuchungen beschrieben.

Die Wavelettransformation wird dabei angewendet für:

- die Detektion und Analyse von turbulenten und wellenförmigen Strukturen,
- die Untersuchung der lokalen und globalen Energieverteilung,
- die Bestimmung des Energieaustausches,
- die Untersuchung der Wechselwirkung zwischen Schwerewelle und Turbulenz.

Der Bericht endet schließlich mit einer Diskussion über die Möglichkeiten der Parametrisierung von Austauschprozessen unter den Bedingungen der schwach bis stark stabilen Schichtung. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind teilweise in Handorf (1997a), Handorf (1997b) und Heinz (1999) veröffentlicht worden.

2. Die Wavelettransformation

In diesem Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen der Wavelettransformation (im folgenden auch mit WT bezeichnet) und deren Anwendungsmöglichkeiten für Turbulenzuntersuchungen kurz dargelegt. Eine umfassendere Einführung in die WT ist in Anhang A und darüber hinaus in zahlreichen Monographien und Artikeln, z.B. in Daubechies (1988), Louis et al. (1994) oder Kumar, Foufoula-Georgiou (1994) und Holschneider (1995) zu finden.

2.1. Mathematische Grundlagen

Die Wavelettransformation ist wie die Fouriertransformation (im folgenden auch mit FT bezeichnet) eine Integraltransformation und wird mit dem gleichen Ziel, der Extraktion relevanter Informationen aus einer Zeitreihe, angewendet. Die kontinuierliche Wavelettransformation wurde eingeführt, um die eingeschränkte Zeit-Frequenz-Lokalisierung der Fouriertransformation für instationäre Zeitserien zu überwinden. Im Gegensatz zur Fouriertransformation transformiert die Wavelet-Methode eine gegebene Zeitserie $f(t)$ in den Zeit-Skalen-Raum. Dies wird durch Faltung von $f(t)$ mit einer Familie von translatierten und dilatierten Funktionen $\Psi_{p,a,b}(t)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$ erreicht:

$$T_p(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi_{p,a,b}(t)} dt = \frac{1}{a^p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (2.1)$$

Die Funktion $\Psi_{p,a,b}(t)$ wird als Wavelet bezeichnet und ist eine Funktion mit begrenzter Energie und einem verschwindenden Mittel. Die Wavelet-Familie ist gegeben durch:

$$\Psi_{p,a,b}(t) = \frac{1}{a^p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (2.2)$$

Änderungen des Dilatationsparameters a bewirken für $a > 1$ eine Verbreiterung und für $a < 1$ ein Zusammenziehen des sogenannten Mutterwavelets $\Psi(t) = \Psi_{p,1,0}(t)$. Änderungen des Translationsparameters b entsprechen einer zeitlichen Verschiebung der Funktion $\Psi(t)$. Somit liefern die Wavelet-Koeffizienten $T_p(a, b)$ die Information über den Zeitpunkt b und die Skala a eines charakteristischen Ereignisses. Die Überstreichung in Gleichung (2.1) kennzeichnet das konjugiert Komplexe. Für den Normierungsfaktor $1/a^p$, der in den Gleichungen (2.1) und (2.2) auftritt, werden meistens die Werte $p = 1$ oder $p = 1/2$ verwendet. Für $p = 1/2$ ist die durch Gleichung (2.1) definierte Wavelettransformation eine normerhaltende Transformation in L^2 .¹ Für $p = 1$ ist die entsprechende Transformation nicht normerhaltend in L^2 , entspricht jedoch für bestimmte Wavelets (z.B. Haar-Wavelet) der Kovarianz zwischen dem Wavelet und dem Eingangssignal (Gamage und Hagelberg, 1993).

Aufgrund der an das Wavelet gestellten Bedingungen (s. Anhang A.1) ist die WT invertierbar mit:

¹ $L^2(\mathbf{R})$ bezeichnet den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen über \mathbf{R} .

$$f(t) = \frac{1}{C_G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T_p(a,b) \frac{1}{a^p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^{3-2p}}. \quad (2.3)$$

und bietet somit ebenfalls die Möglichkeit des Filterns von Datenreihen. Die waveletspezifische Konstante C_G ist durch die Zulässigkeitsbedingung (A.7) (s. Anhang A.1) definiert.

Die totale Energie der Funktion $f(t)$ berechnet sich durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^{3-2p}} \int_{-\infty}^{\infty} |T_p(a,b)|^2 db = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{E(a)}{a^{3-2p}} da. \quad (2.4)$$

Der in Gleichung (1.4) eingeführte Ausdruck

$$E(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2 db \quad (2.5)$$

gibt den Energiegehalt einer Funktion $f(t)$ auf der Skala a an, d.h. $E(a)$ ist eine Energiedichtefunktion und wird in Analogie zur FT auch als Waveletvarianz bezeichnet.

Für die Untersuchung von zwei Zeitserien $f(t)$ und $g(t)$ können wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^{3-2p}} \int_{-\infty}^{\infty} T_{f,p}(a,b) \overline{T_{g,p}(a,b)} db = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{E_{f,g}(a)}{a^{3-2p}} da \quad (2.6)$$

ein Kreuz-Skalogramm (Kreuzspektrum) $T_{f,p}(a,b) \overline{T_{g,p}(a,b)}$ und analog zur Waveletvarianz die Waveletkovarianz $E_{f,g}$ eingeführt werden. Dabei bezeichne $T_{f,p}(a,b)$ die WT der Funktion $f(t)$ und $T_{g,p}(a,b)$ die WT der Funktion $g(t)$. Wird für die Berechnung des Kreuz-Skalogramms ein komplexes Wavelet, z.B. das Morlet-Wavelet, verwendet, so können in Analogie zur FT der Real- und Imaginärteil als Wavelet-Kospektrum und Wavelet-Quadraturpektrum bezeichnet werden.

Der Zusammenhang zwischen der Skala a und der i.a. verwendeten Frequenz ω ist durch

$$\omega = \frac{\omega_{\Psi_{p,1,0}}^0}{a} \quad (2.7)$$

gegeben, wobei $\omega_{\Psi_{p,1,0}}^0$, die Peakfrequenz (näheres siehe Anhang A.3) der Fouriertransformierten des Mutterwavelets, bekannt sein muß.

Die Ergebnisse der WT sind stark von der Charakteristik des verwendeten Wavelets abhängig, insbesondere von der Lokalisierung im Zeit- und Frequenzraum. Dieses Zeit-bzw. Frequenzverhalten muß bei der Interpretation der Ergebnisse unbedingt berücksichtigt werden, um falsche Schlußfolgerungen zu vermeiden. Die Waveletanalysen werden in dieser Arbeit hauptsächlich mit dem reellwertigen Haar-Wavelet, dem reellwertigen Mexikanischen-Hut-Wavelet und dem komplexen Morlet-Wavelet durchgeführt. Das Haar-Wavelet ist sehr gut in der Zeit lokalisiert, weist aber eine schlechte Lokalisierung im Frequenzraum auf. Im Gegensatz dazu sind das

Morlet- und das Mexikanische-Hut-Wavelet sehr gut im Frequenzraum lokalisiert bei entsprechend schlechterer Lokalisierung im Zeitbereich². Die Gleichungen der genannten Wavelet-Funktionen und deren graphische Darstellung sind im Anhang A.1 in den Formeln (A.8) bis (A.10) und der Abb. Abbildung 43 zu finden.

2.2. Energieerhaltende Wavelettransformation

Im vorangehenden Abschnitt wurden die mathematischen Grundlagen der WT dargelegt. Die mit der Endlichkeit realer Zeitreihen einhergehenden Schwierigkeiten wurden bisher jedoch nicht behandelt. Wie auch bei anderen Transformationen stellt sich die Frage nach der geeigneten Datenvorbereitung, sowie dem zu berücksichtigenden Bereich im Parameterraum. So wird bei der FT zur Vermeidung hochfrequenter Artefakte, die durch Diskontinuitäten an den Rändern der Zeitserie entstehen, eine Glättung mittels einer Fensterfunktion durchgeführt (was bei der WT nicht notwendig ist). Der Frequenzbereich ist dabei durch die Abtastrate Δt und die Gesamtdauer der Zeitserie $T = n\Delta t$ gegeben zu:

$$\frac{1}{T} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta t} \quad (2.8)$$

In Analogie zur FT kann mittels der Beziehung aus Gleichung (2.7) für die WT ein analoger Bereich für die Skalen a angegeben werden:

$$\frac{\omega^0 \Delta t}{\pi} \leq a \leq \frac{\omega^0 T}{2\pi}, \quad (2.9)$$

wobei hier der Einfachheit halber ω^0 anstelle von $\omega_{\psi_{p,1,0}}^0$ geschrieben wird.

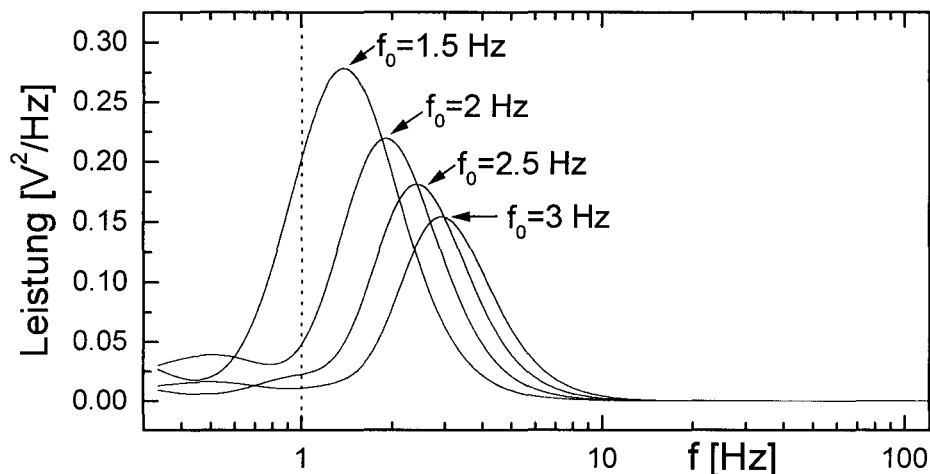


Abbildung 1: Waveletspektren von vier Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen (Mexikanischer-Hut-Wavelet, $p = 1/2$). Erläuterungen siehe Text.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß aufgrund der endlichen Breite der FT der Wavelets die

² Dies ist Ausdruck für die Tatsache, daß aufgrund der Unschärferelation eine beliebig gute Lokalisierung sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich nicht möglich ist.

Randbereiche im Frequenzintervall aus Gleichung (2.8) nicht richtig wieder gegeben werden. Wie auch bei der FT, existiert also auch bei der WT eine Art Aliasing-Effekt. Es ist also darauf zu achten, daß durch Verwendung entsprechender Filter die Zeitreihen nur Frequenzen in dem von der verwendeten Transformation erfaßten Bereich enthalten.

Um dies zu verdeutlichen, sind in der Abbildung 1 die WT-Spektren (im folgenden wird ausschließlich das Mexikanischer-Hut-Wavelet verwendet) von Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz ($f_0 = 1.5, 2, 2.5$ und 3 Hz), dargestellt. Die Zeitachse t der analysierten Funktionen wurde auf das Intervall $[0;1]$ s beschränkt, so daß sich nach Gleichung (2.8) eine minimale Frequenz von 1 Hz ergibt. Für die folgende Diskussion wurde der Frequenzbereich jedoch zu kleinen Frequenzen (großen Skalen) hin erweitert, um das Verhalten der WT in diesem Bereich näher zu betrachten (hierzu wurde die Zeitreihe mit Nullwerten erweitert, „zero padding“).

Da die WT eines reinen Sinus nicht wie bei der FT einer Delta-Funktion entspricht, sondern einer Kurve mit endlicher Breite wie in Abbildung 1 (vgl. auch Gleichung (A.24)), müßte also auch der Skalenbereich zu größeren (bzw. der Frequenzbereich zu kleineren) Werten hin erweitert werden, damit die WT alle Frequenzen des Intervalls (2.8) korrekt erfaßt.

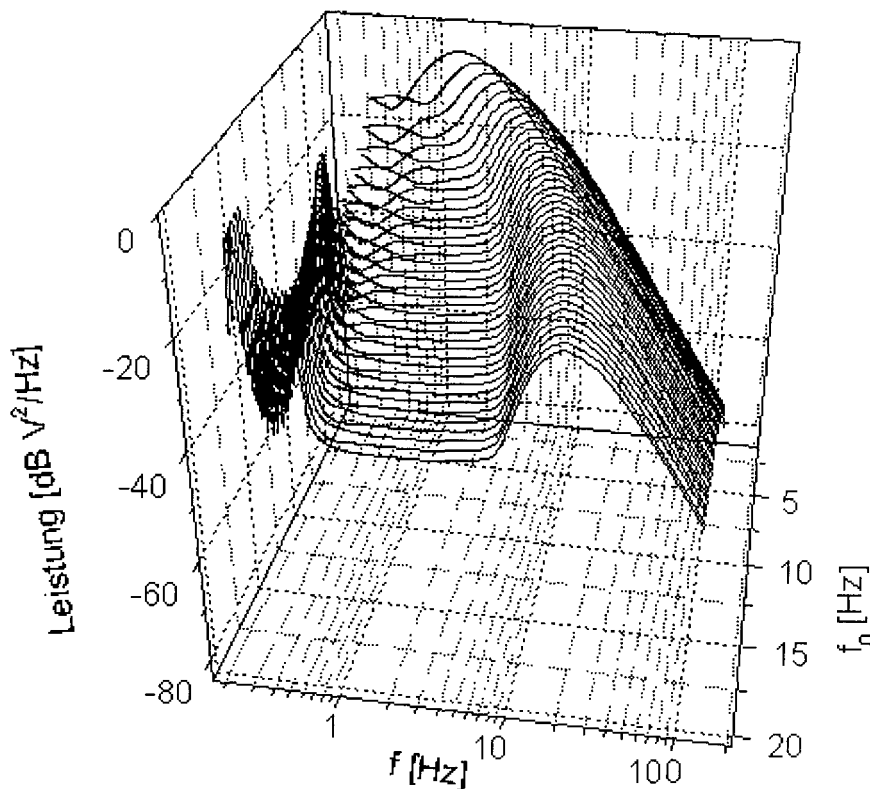


Abbildung 2: Waveletspektren (Leistung vs. Frequenz f) von Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenzen (f_0 , rechte Achse). Unterhalb der kritischen Frequenz von 1 Hz erscheinen Artefakte (Mexikanischer-Hut-Wavelet, $p = 1/2$).

Daß dies nicht ohne weiteres möglich ist, erkennt man in der Abbildung 2. Die Abbildung zeigt in perspektivischer Form die WT-Spektren (Leistung vs. Frequenz f) vieler verschiedener Sinusfunktionen der Frequenz f_0 (rechte Achse). Auch hier wurde durch zero padding der Frequenzbereich zu kleinen Frequenzen hin erweitert. Unterhalb der kritischen Frequenz von 1 Hz (linker Bereich in der Abbildung) erscheinen bei höheren Frequenzen f_0 zusätzliche Struktu-

ren, die mit steigender Frequenz sich der kritischen Frequenz (1 Hz) annähern.

Auf Grund dieser niederfrequenten Artefakte müssen die Skalen bei der Waveletanalyse also auf den in Gleichung (2.9) gegebene Bereich beschränkt bleiben. Hierbei ist zu beachten, daß eventuell in den Zeitreihen enthaltene niederfrequente Anteile nicht korrekt von der WT erfaßt werden. In der Abbildung 3 sind die nach Gleichung (2.4) berechneten Energieinhalt der Spektren aus Abbildung 2 dargestellt. Bei der Integration wurde nur der in (2.8) bzw. (2.9) gegebene Bereich berücksichtigt. Auffallend ist die große Abweichung der berechneten Energiewerte bei kleinen Frequenzen von dem Wert 0.5, was der Energie der Zeitreihen entspricht. Erst ab einer Frequenz $f_0 \approx 2.5$ Hz ist eine gute Annäherung an den tatsächlichen Energiewert von 0.5 zu verzeichnen.

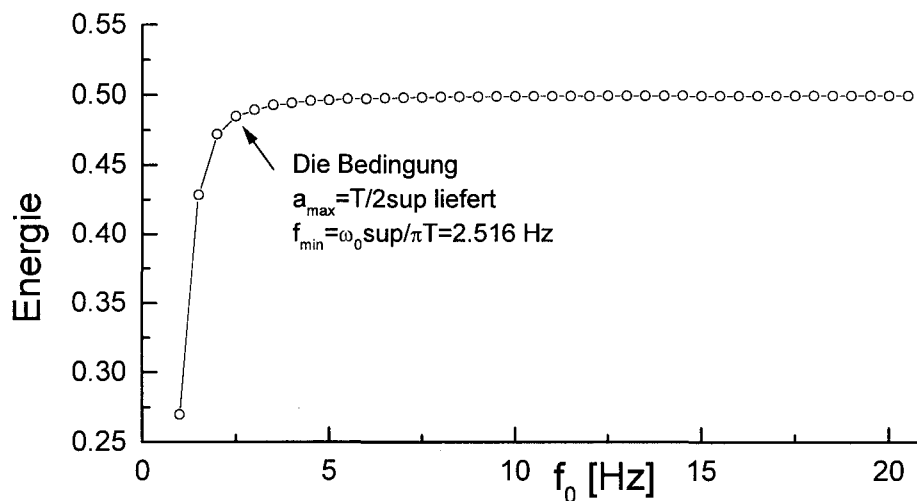


Abbildung 3: Die aus den Wavelet-Spektren der Abbildung 2 berechneten Energieinhalte als Funktion der Frequenz f_0 der Zeitreihen. Hierzu wurde bei der Integration (2.4) der in (2.8) bzw. (2.9) gegebene Bereich berücksichtigt.

Betrachtet man nun eine Zeitreihe die im Intervall $[0;T]$ definiert ist und verlangt, daß die maximale Ausdehnung des Wavelets gerade T entsprechen soll, so muß gelten

$$a \leq \frac{T}{\text{supp}_1 - \text{supp}_0}, \quad (2.10)$$

wobei $[\text{supp}_0, \text{supp}_1]$ den Träger³ des Wavelets bezeichnet. Mit (2.7) folgt für die Frequenz

$$f = \frac{\omega^0}{2\pi a} \geq \frac{\omega^0(\text{supp}_1 - \text{supp}_0)}{2\pi T} \quad (2.11)$$

was nach einsetzen der Werte (siehe Tabelle III im Anhang A.3) für das Mexikanische-Hut-

³ Bereich auf dem das Wavelet ungleich Null ist. Man beachte, daß $\text{supp}_0 < 0$. Für die hier verwendeten symmetrischen Wavelets gilt $\text{supp}_0 = -\text{supp}_1$.

Wavelet $f \geq 2.516$ Hz ergibt. Wie der Abbildung 3 zu entnehmen ist, wird für Frequenzen die oberhalb von 2.5 Hz liegen, die Energie auf mehr als 96.8 % des korrekten Wertes reproduziert. Die Gleichung (2.11) scheint somit ein geeignetes Kriterium für die untere Grenze des von der WT noch erfaßten Frequenzbandes zu sein.

Die obere Grenze des von der WT noch erfaßbaren Frequenzbandes muß mittels der Halbwertsbreite des verwendeten Wavelets (vgl. Anhang A.1 Gleichungen (A.16) bis (A.19)) bestimmt werden. Da unsere Zeitreihen jedoch diesbezüglich unkritisch sind, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

Hinsichtlich dem entsprechenden Bereich der Translationsvariablen b gibt es kein Analogon zur FT. Für folgende Diskussion sei auf die Abbildung 4 verwiesen. Darin sind mittels der eingezeichneten Geraden drei mögliche Parameterbereiche gekennzeichnet. Das kleine Dreieck ist durch die Bedingung

$$t_0 - a \cdot \text{supp}_0 \leq b \leq t_1 - a \cdot \text{supp}_1 \quad (2.12)$$

gegeben, wobei $[t_0, t_1]$ den Definitionsbereich der Zeitreihe darstellt. Die Waveletkoeffizienten in diesem Bereich werden ausschließlich durch die Werte der in $[t_0, t_1]$ definierte Zeitreihe bestimmt.

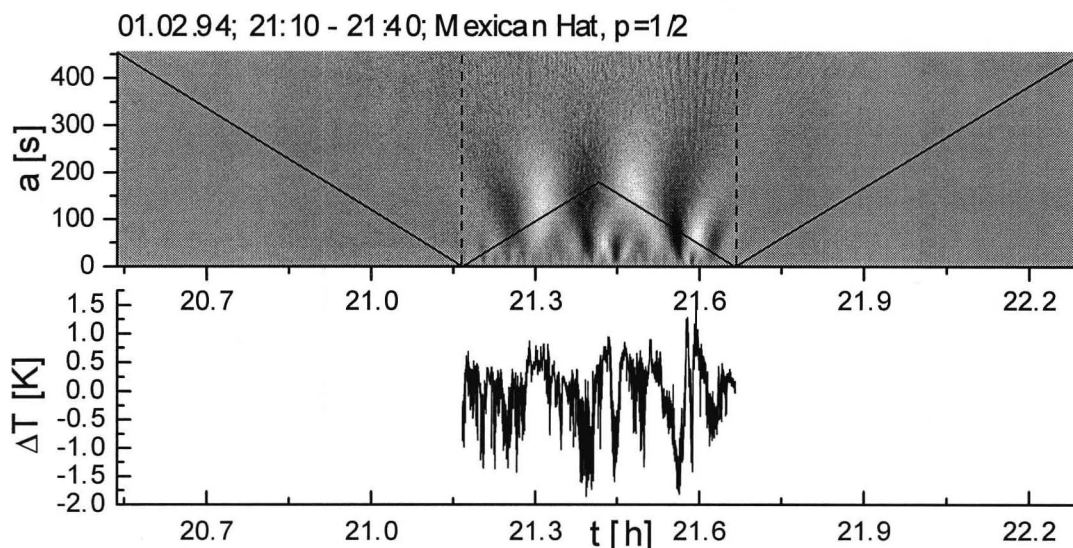


Abbildung 4: Zeitserie der Temperaturfluktuationen (unten ΔT vs. t) und das Graustufenbild der Waveletkoeffizienten $T(a, b)$ (oben, Mexikanischer-Hut-Wavelet, $p = 1/2$). Die eingezeichneten Geraden beschreiben unterschiedliche Parameterbereiche, näheres siehe Text.

Der quadratische Bereich (gestrichelte Linien) stellt den am häufigsten verwandten Bereich dar, und ist durch $b \in [t_0, t_1]$ bestimmt. Wie jedoch der Abbildung zu entnehmen ist, gibt es auch außerhalb dieses Bereiches noch von Null verschiedene Waveletkoeffizienten. Somit erfaßt erst der nach oben geöffnete trapezförmige Bereich („cone of influence“, vgl. Holschneider (1995) St. 73) alle relevanten Waveletkoeffizienten. Für ihn gilt:

$$t_0 - a \cdot \text{supp}_1 \leq b \leq t_1 - a \cdot \text{supp}_0. \quad (2.13)$$

Sobald also das Wavelet der Breite a am Ort b die Zeitreihe in $[t_0, t_1]$ berührt, muß der entsprechende Waveletkoeffizient $T(a, b)$ berücksichtigt werden, so daß die Transformation dem Parseval'schen Theorem der Energieerhaltung (Gleichung 2.4) genügt. Es müssen also auch Zeiten b außerhalb von $[t_0, t_1]$ berücksichtigt werden.

Der Korrektheit wegen sei angemerkt, daß die hier betrachtete kontinuierliche Wavelettransformation im mathematischen Sinne nicht energieerhaltend ist, da die verwendeten Wavelets streng genommen erst im unendlichen zu Null werden. In der Praxis sind die durch die Verwendung eines endlichen Trägers $[\text{supp}_0, \text{supp}_1]$ bedingten Fehler gegenüber der Rundungsfehler jedoch vernachlässigbar.

Bei der Verwendung der WT zur Filterung von Daten, oder bei der Berechnung der Waveletspektren ist also darauf zu achten, daß der erweiterte Bereich aus Gleichung (2.13) berücksichtigt wird. Erst dann kann auch die WT dem quantitativen Vergleich mit anderen Methoden standhalten. Es sei angemerkt, das alle den Autoren bekannten (kommerziellen wie auch frei erhältlichen) Programme lediglich den quadratischen Parameterbereich berücksichtigen, worin wohl eine Ursache für die oft diskutierten Probleme Hinsichtlich quantitativer Aussagen der WT zu sehen sein dürfte.

Zwar wird im Folgenden auch nur der quadratische Bereich in den Bildern dargestellt, dies geschieht aber nur, um Einzelheiten besser sichtbar zu machen. Bei den Berechnungen der Spektren und der Filterungen wurde natürlich der erweiterte Bereich berücksichtigt.

2.3. Anwendungsbeispiele der Wavelettransformation zur Turbulenzuntersuchung

In diesem Abschnitt werden die Anwendungsmöglichkeiten der Waveletanalyse für turbulente Strömungen dargestellt. Detailliertere Ausführungen sind in den Arbeiten von Farge (1992), Meneveau (1991) und Collineau und Brunet (1993) zu finden.

2.3.1. Detektion charakteristischer Ereignisse

Atmosphärische Turbulenz ist oft mit plötzlichen Änderungen oder Diskontinuitäten verbunden. Die Schwierigkeit der Detektion solcher Ereignisse ergibt sich aus der natürlichen Variabilität dieser Phänomene und dem Rauschen in den Messungen. Die WT liefert Informationen über die auftretenden Diskontinuitäten auf verschiedenen Skalen. Für die Analyse gemessener Daten muß zunächst die Detektionsskala der interessanten Phänomene aus den lokalen Maxima der Waveletvarianz bestimmt werden (s. Abschnitt 2.3.2). Für die Entwicklung von effizienten Detektionsalgorithmen spielt die Ordnung des analysierenden Wavelets eine Rolle (vgl. Bemerkungen nach Gleichung (A.12) im Anhang A.1). Sind in einer Zeitreihe Sprünge enthalten, so weisen die Waveletkoeffizienten, die mit Wavelets 1. Ordnung berechnet werden, Extremwerte auf. Demzufolge müssen für eine Sprungdetektion Schwellwerte definiert werden. Die Waveletkoeffizienten, die mit Wavelets 2. Ordnung berechnet werden, zeigen an den Sprungstellen einen Nulldurchgang. Eine Detektion von Sprüngen ist mit Wavelets 2. Ordnung ohne Schwellwertdefinition möglich und wurde z.B. von Collineau und Brunet (1993) erfolgreich angewendet.

2.3.2. Untersuchung von Spektren, Bestimmung charakteristischer Skalen

Durch die Waveletvarianz $E(a)$ (Gleichung (2.5)) wird die globale Verteilung der Energie auf verschiedenen Skalen beschrieben. Aufgrund des lokalen Charakters der WT korrespondieren die Maxima im Energiespektrum mit den charakteristischen Skalen der kohärenten Wirbel (Mahrt und Howell, 1994). Im Gegensatz dazu korrespondieren die Maxima im Fourierspektrum mit der Periodizität der kohärenten Wirbel, welche die Information über den Abstand zwischen den Wirbeln enthält (Kharkevich, 1960). Werden über Gleichung (2.7) die Skalen in physikalische Frequenzen umgerechnet, so erhält man die in der Mikrometeorologie übliche Spektraldarstellung. Ein weiterer Vorteil der Waveletspektren und -kospektren gegenüber den Fourierspektren und -kospektren ist die größere Glattheit insbesondere im Trägheitsbereich, verursacht durch die endliche Frequenzauflösung der WT.

2.3.3. Lokale Untersuchung charakteristischer Ereignisse

Ein entscheidender Vorteil der Waveletanalyse ist die Möglichkeit des lokalen Studiums von charakteristischen Strukturen in der Zeitserie, wobei der Grad der Lokalisierung der Skala angepaßt wird. Dadurch können langwellige Strukturen auf großen Skalen, kurzwellige Strukturen auf kleinen Skalen untersucht werden. Dies schließt die Berechnung charakteristischer lokaler Größen, wie z.B. lokaler Intermittenzfaktoren und lokaler Spektren ein.

2.3.4. Filterung/Datenrekonstruktion

Durch die Filtereigenschaften der Wavelettransformation können turbulente Signale ohne den Verlust relevanter Muster geglättet werden. Ebenso kann das Eingangssignal in seine Anteile auf verschiedenen Skalen zerlegt werden. Auf diese Weise kann z.B. der mikroturbulente Anteil und der wellenbedingte Anteil einer meteorologischen Größe bestimmt werden. Die Filterung mit der WT hat gegenüber einer Filterung mit der FT folgenden Vorteil: Sind in einer Zeitserie Diskontinuitäten vorhanden, so tritt bei der Rekonstruktion in unmittelbarer Nähe der Diskontinuität ein Überschwingen auf, deren Größe unabhängig von der Zahl der in die Rekonstruktion eingehenden Frequenzen ist (Gibbs-Phänomen). Wird die Datenrekonstruktion mit der WT durchgeführt, so ist der Betrag des Überschwingens stets kleiner als bei der FT. Der Betrag des Überschwingens ist zudem vom analysierenden Wavelet abhängig und es ist möglich, das Wavelet so zu wählen, daß kein Überschwingen auftritt (Rasmussen, 1991).

2.3.5. „Conditional sampling“

Die Bestimmung des Energietransportes durch kohärente Strukturen erfolgt durch „Conditional sampling“ (Methode der bedingten Probenahme). „Conditional sampling“ ist die Berechnung der Energieflüsse durch Summation und Mittelung der aufwärts- und abwärtsgerichteten Teiltransporte (Desjardins, 1977). Brunet und Collineau (1993) haben die WT erfolgreich für das „Conditional sampling“ für Messungen turbulenter Fluktuationen über Waldbeständen angewandt.

2.4. Auswahl geeigneter Wavelets

An dieser Stelle soll noch einmal darauf eingegangen werden, daß für die Auswahl eines geeigneten Wavelets für eine spezifische Anwendung in erster Linie dessen Verhalten im Zeit-Frequenz-Raum von Bedeutung ist. Für die Datenfilterung und die Bestimmung charakteristi-

scher Skalen müssen Wavelets verwendet werden, die gut im Frequenzraum lokalisiert sind, wie z.B. das Mexikanische-Hut- oder das Morlet-Wavelet. Im Gegensatz dazu erfordert die Detektion signifikanter Ereignisse, z.B. für das „Conditional sampling“, Wavelets, die gut im Zeitraum lokalisiert sind, wie z.B. das Haar-Wavelet. Hierzu werden im folgenden einige Anwendungsbeispiele angeführt, die den obigen Sachverhalt verdeutlichen sollen.

Wie bereits dargelegt, ist die WT eine Zeit-Skalen-Transformation. Für zunehmende Werte von a (große Skalen) verbreitert sich das Wavelet $\Psi_{p,a,b}$ und in der WT wird nur das Langzeitverhalten erfasst.

Bei der Darstellung der berechneten Waveletkoeffizienten werden in der Regel die Skalen a auf der (logarithmisch oder linear geteilten) Ordinate und die zeitliche Verschiebung b auf der Abszisse aufgetragen. Um einen direkten Vergleich mit der Fouriertransformation zu erlauben, wird in der Abbildung 5 als Ordinate die den Skalen a entsprechenden Frequenzen (nach Gleichung (2.7)) in logarithmischem Maßstab verwendet. Es sind neben den Zeitreihen der akademischen Signale

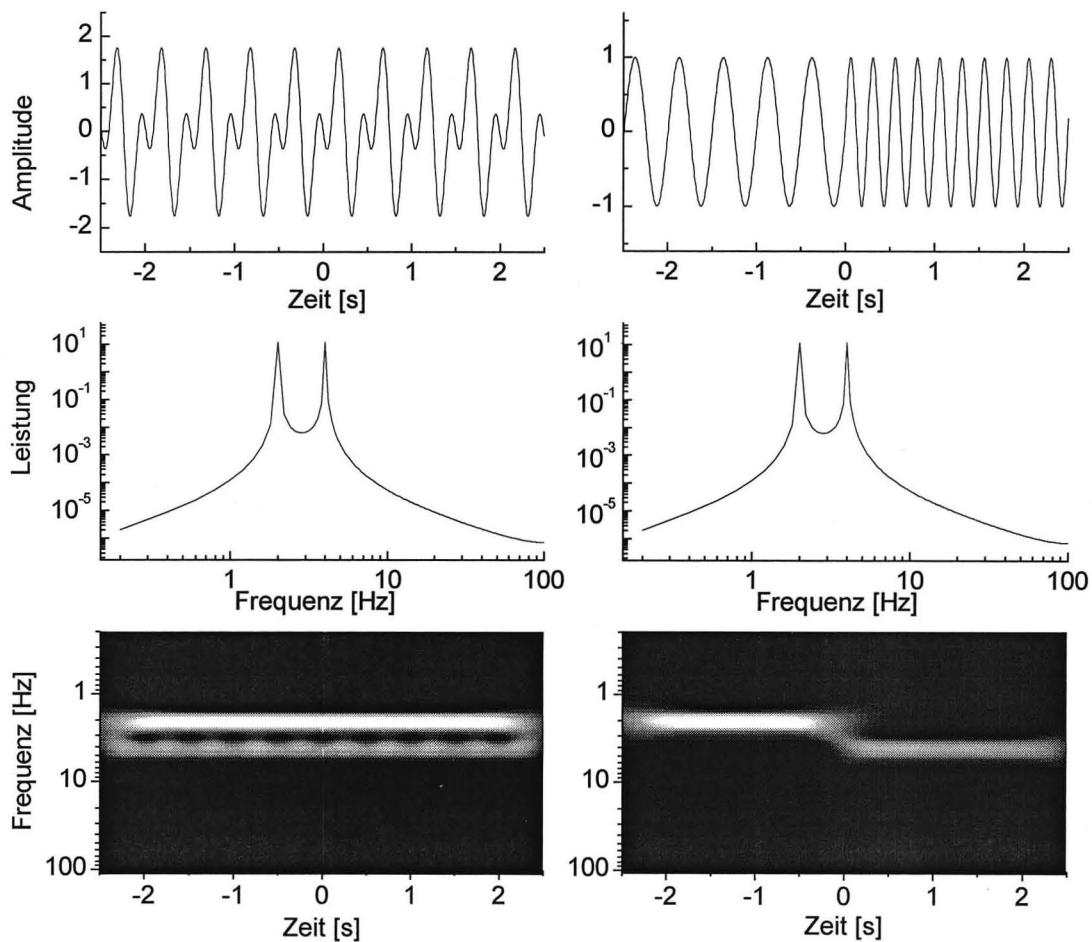


Abbildung 5: Darstellung der Zeitreihen (oben), deren Leistungsspektren (mitte) und Waveletkoeffizienten (Morlet-Wavelet, unten) der beiden akademischen Signale $f_1(t)=\sin(2\pi\cdot 2t)+\sin(2\pi\cdot 4t)$ (links), und $f_2(t)=\sin(2\pi\cdot 2t)$ für $t \leq 0$, $f_2(t) = \sin(2\pi\cdot 4t)$ für $t > 0$ (rechts).

$$f_1(t) = \sin(2\pi \cdot 2t) + \sin(2\pi \cdot 4t) \quad \text{sowie} \quad f_2(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot 2t) & \text{für } t < 0 \\ \sin(2\pi \cdot 4t) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

und deren Energiespektren der Fouriertransformation, die mit dem Morlet-Wavelet berechneten Beträge der Waveletkoeffizienten als Graustufenbilder dargestellt. Wie die Abbildung zeigt, können die beiden Signalen anhand der Fouriertransformationen nicht unterschieden werden. Im Gegensatz dazu erlaubt die WT neben der Bestimmung der Frequenzen auch die Identifizierung die Zeiträume, in denen die jeweiligen Frequenzen vorherrschen. Der Preis dafür ist jedoch eine endliche Unschärfe bei der Bestimmung der Frequenzen entsprechend der Unschärferelation (vgl. Anhang A.1).

Um das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen Wavelets zu verdeutlichen, sind in der Abbildung 6 die Waveletkoeffizienten (rechts) der Funktion f_2 und die daraus berechneten Spektren (links) dargestellt. Zwar ist das Haar-Wavelet (oben) in der Zeit am besten lokalisierte (vgl. Anhang A.1), dafür weist es im Frequenzraum die größte Delokalisierung der betrachteten Wavelets auf. Hinzu kommen neben dem Hauptmaximum mehrere Nebenmaxima, so daß das Haar-Wavelet für Spektraluntersuchungen ungeeignet ist. Für solche Untersuchungen eignet sich eher das komplexwertige Morlet-Wavelet (unten). Es weist die beste Lokalisierung in Frequenzraum auf. Nachteilig wirkt sich hier die Verdoppelung der Rechenzeit aus, da sowohl Real- als auch Imaginärteil berechnet werden müssen. Einen guten Kompromiß stellt das Mexikanische-Hut-Wavelet dar, das sowohl im Zeitraum, als auch im Frequenzraum eine gute Lokalisierung aufweist. Aus diesem Grunde wurden die vorliegenden Untersuchungen hauptsächlich mit dem Mexikanische-Hut-Wavelet durchgeführt.

Betrachtet man die in der Abbildung 6 dargestellten Waveletkoeffizienten, so stellt man fest, daß auf Grund der Redundanz der kontinuierlichen Wavelettransformation, sich die Eigenschaften der Wavelets in deren Waveletkoeffizienten widerspiegeln. Dies ist eine wichtige Eigenschaft der kontinuierlichen WT, die bei der Interpretation der Bilder in Betracht gezogen werden muß.

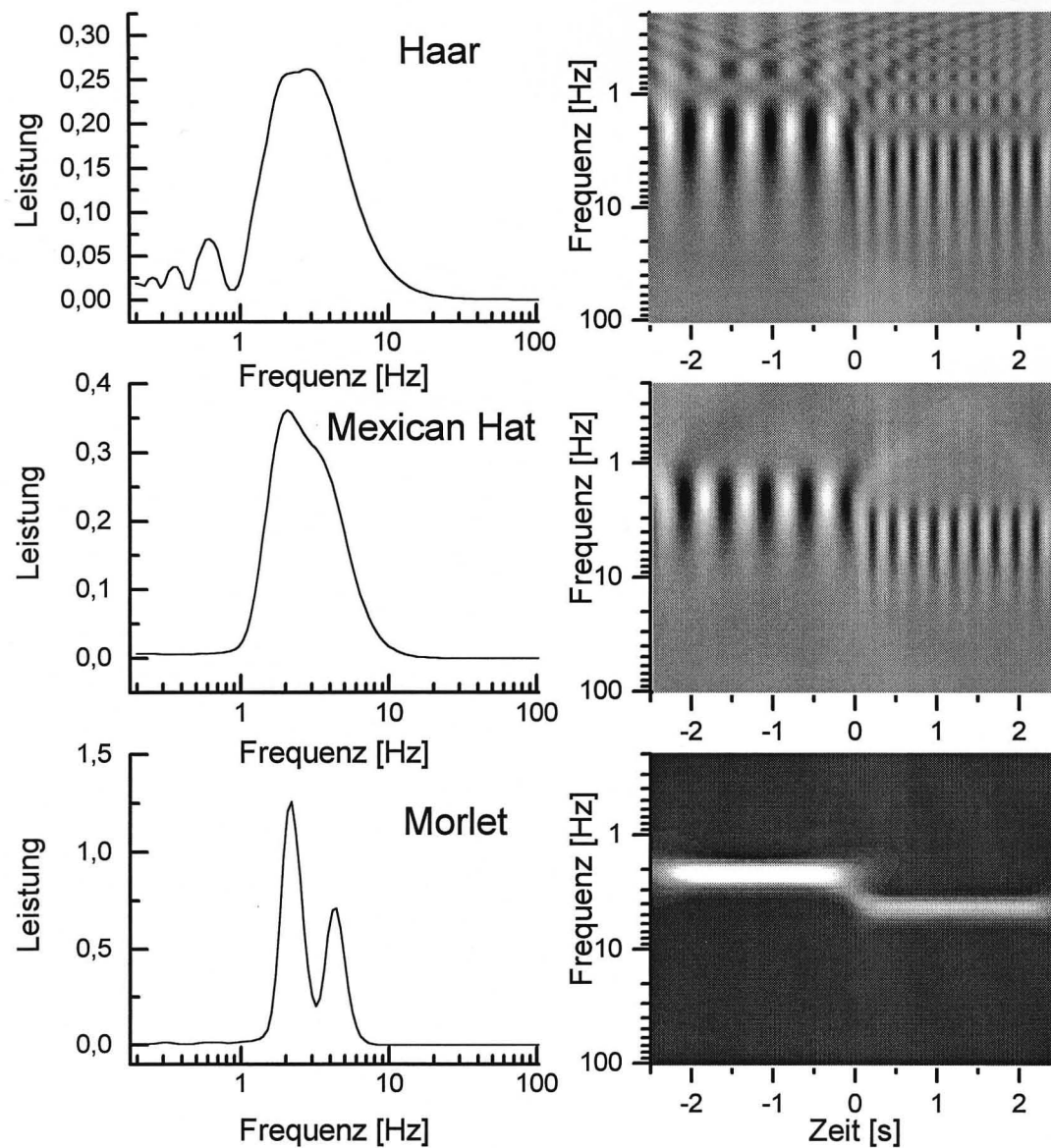


Abbildung 6: Mit verschiedenen Wavelets gewonnene Graustufenbilder der Waveletkoeffizienten (rechts) und deren Spektren (links) der Funktion $f_2(t) = \sin(2\pi \cdot 2t)$ für $t \leq 0$, bzw. $f_2(t) = \sin(2\pi \cdot 4t)$ für $t > 0$. Oben: Haar-, mitte: Mexikanischer-Hut- und unten: Morlet-Wavelet (Betrag).

3. Datenbasis

3.1. Datenbasis des Experimentes FINTUREX

Das Experiment FINTUREX zur Untersuchung der stabil geschichteten polaren atmosphärischen Grenzschicht fand vom 18.01. bis 19.02.1994 an der Neumayer-Station (70°39'S, 8°15'W) in der Antarktis statt. Bei einer sehr geringen Geländeneigung und niedriger Oberflächenrauigkeit sind ideale Bedingungen für einen schwachen katabatischen Wind mit Geschwindigkeiten $< 5 \text{ m/s}$ gegeben. Damit wurde es möglich, umfangreiche Untersuchungen zu Turbulenzcharakteristiken unter stabil-dynamischen Bedingungen durchzuführen (Handorf, 1996, Foken, 1999). In der vorliegenden Arbeit werden jene Fälle einer Untersuchung zugeführt, in denen bei extremer Stabilität neben Turbulenz auch Schwerewellen auftreten.

Eine Zusammenstellung der eingesetzten Meßtechnik ist in Tabelle I angegeben. Für die eigentlichen Untersuchungen wurde entsprechend den oben angegebenen Voruntersuchungen nur noch die Meßhöhen 2 und 4,5m ausgewählt, da nur diese Höhen sich in der Bodenschicht befinden. Als günstig für die Untersuchungen erwiesen sich die mit dünnen Platindrähten gemessenen Temperaturfluktuationen, da diese die höchste Auflösung zeigten. Die gemessenen mittleren Größen (Wind- und Temperaturprofil, Strahlung) dienen für die vorliegenden Untersuchungen nur als Hintergrundinformationen.

Tabelle I: Eingesetzte Geräte während des FINTUREX Experimentes

Komplex/Höhe	Geräte	Genauigkeit	Bemerkungen
<i>Turbulenzmessungen</i> 2, 4.5, 12 m	Ultraschallanemometer Kaijo-Denki DAT310, A Probe, Hanafusa et al. (1982)	0.05 m/s horizontal 0.02 m/s vertikal	
	15 μm Pt-Draht	0.05 K	nicht in 12 m
	Lyman-alpha-Hygrometer (Martini et al. 1973)	0.05 hPa	nicht in 12 m
<i>Profilmessungen</i> 0.5, 1,2,3,4.5, 6, 8, 10 m	Schalensternanemometer, Brömme et al. (1991)	0.1 m/s	
	Ventiliertes Thermometer, Baum et al. (1994)	0.1 K	nicht in 3, 6 und 8 m
	Taupunktsensor 'Thygan'	0.1 K	in 4.1 m
<i>Strahlungsmessungen</i> 2 m	Kurzwellige Strahlungsbilanz, CM 14	10 W/m ²	
	Strahlungsbilanz, Schulze	20 W/m ²	

3.2. Bearbeitung des Datensatzes für Turbulenzuntersuchungen

Die standardmäßige Bearbeitung der Turbulenzdaten des Experimentes FINTUREX orientierte sich an den Ausführungen bei Foken (1990), wobei das Experiment der Verbesserung und Entwicklung einer allgemeinen Fehlerbearbeitungsroutine diente (Foken und Wichura, 1996) die dann auch in vollem Umfang angewandt wurde. Dabei wurden Datensätze hinsichtlich der Erfüllung der Stationaritätsbedingung und der entwickelten Turbulenz (Kriterium nach Fluß-Varianz-Ähnlichkeit) untersucht. Abbildung 7a zeigt den kinematischen Wärmefluß für 30minütige Mittelwerte ohne Fehleranalyse. Insbesondere in den Nachstunden treten dabei völlig unrealistische Werte auf. Bei Anwendung des Fehlererkennungsprogrammes müssen insbesondere die Nachmessungen ausgeschlossen werden (Abbildung 7b).

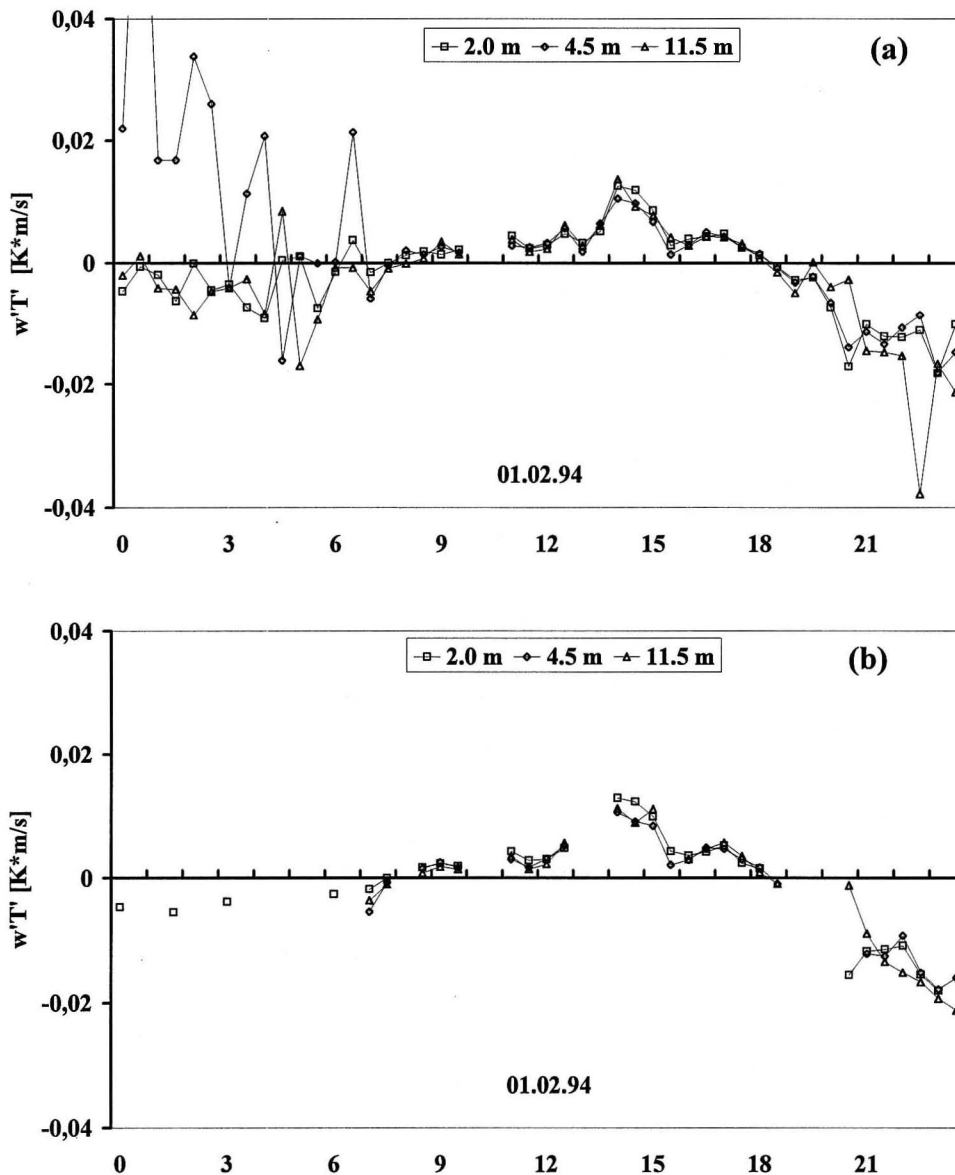


Abbildung 7: Der Kinematische Wärmefluß $w'T'$ für 30minütige Mittelwerte in (a) ohne Fehleranalyse. Insbesondere in den Nachstunden treten unrealistische Werte auf. Wie in (b) gezeigt, müssen nach Anwendung des Fehlererkennungsprogrammes insbesondere die Nachmessungen ausgeschlossen werden.

Die ausgeschlossenen Messungen sind verbunden mit starken zeitlichen Flußänderungen (morgendliche Erwärmung) und extrem stabiler Schichtung. Letztere Fälle, die sich einer üblichen Datenbearbeitung völlig entziehen, werden in dieser Arbeit besonders untersucht.

3.3. Selektion des Datensatzes für die vorliegenden Untersuchungen

Nach den Untersuchungen von Handorf (1996) mit dem FINTUREX-Datensatz kann davon ausgegangen werden, daß extrem stabile Bedingungen, die sich nicht mehr mit der Monin-Obukhov'schen Ähnlichkeitstheorie in vollem Umfang beschreiben lassen, für Stabilitäten $z/L > 0,5$ (z : Höhe, L : Obukhov' Länge) erwartet werden können. Abbildung 8 zeigt die Abhängigkeit zwischen Schubspannungsgeschwindigkeit u_* und der Stabilität z/L . Daraus ergibt sich, daß $u_* < 0,1$ m/s als Entscheidungskriterium verwendet werden kann. Dies entspricht nach Foken (1999) einer Windgeschwindigkeit von etwa 2-3 m/s.

Für den Datensatz der „Nacht“ vom 27. zum 28.01.94 (letzter Polartag) wird das vertikale Windprofil in Abbildung 9 gezeigt. Für Windgeschwindigkeiten > 2 m/s (bis ca. 22 Uhr) ist ein typisches logarithmisches Windprofil ausgebildet. Anschließend ist dies nur noch in den unteren Höhen gegeben während ab 03 Uhr eine völlige Entkoppelung aller Höhen sich abzeichnet mit relativ hohen Windgeschwindigkeiten in 10 m Höhe. Wie der Temperaturverlauf in Abbildung 10 zeigt, setzt gegen 22 Uhr in den untersten Luftschichten eine kräftige strahlungsbedingte Abkühlung ein, während in den beiden oberen Höhen die Abkühlung merklich schwächer ist und die Entkopplung untermauert.

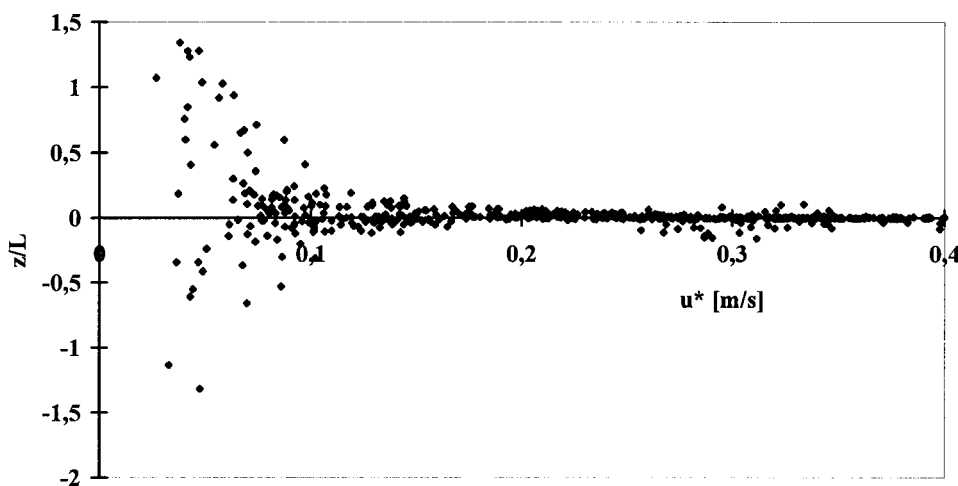


Abbildung 8: Abhängigkeit zwischen Schubspannungsgeschwindigkeit u_* und dem Stabilitätsparameter z/L .

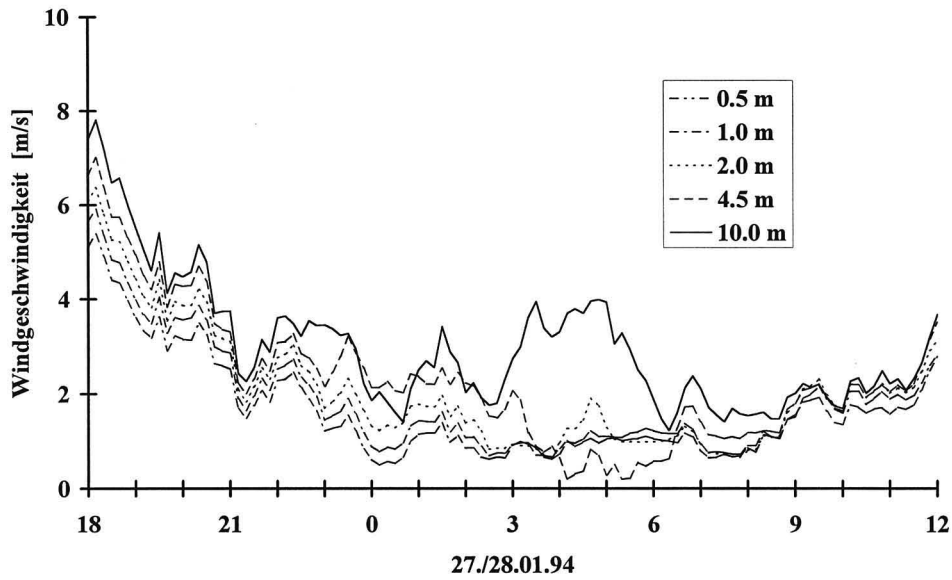


Abbildung 9: Verlauf des vertikalen Windes für fünf verschiedene Höhen in der Nacht vom 27. zum 28.01.94.

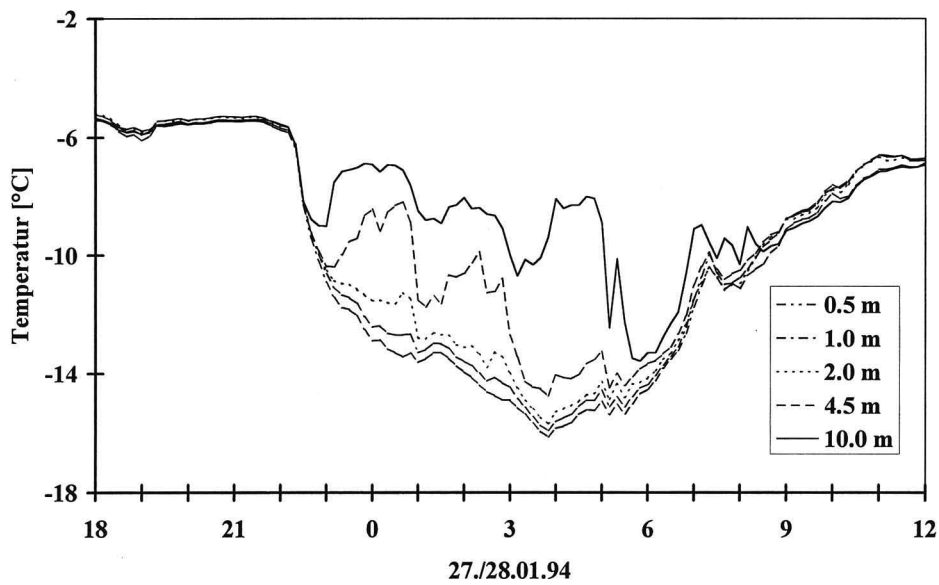


Abbildung 10: Verlauf des Temperatur auf fünf verschiedene Höhen in der Nacht vom 27. zum 28.01.94.

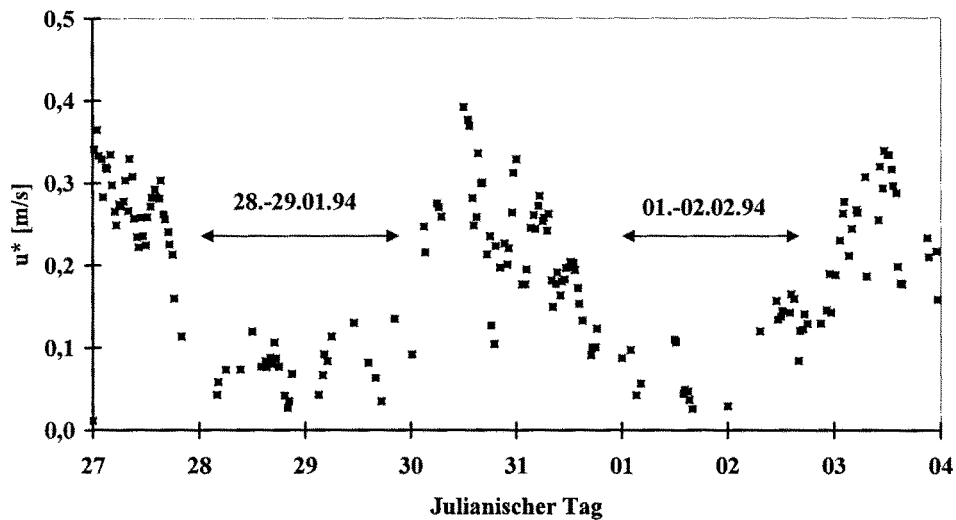


Abbildung 11: Schubspannungsgeschwindigkeit in 2 m Höhe vom 27.01. bis 03.02.94.

Perioden wie die gezeigte vom 27.01. 22 Uhr bis zum 28.01.1994 ca. 07-09 Uhr sind für die vorgesehenen Untersuchungen am besten geeignet. Sie sind auch, jedoch mit Einschränkungen und Unterbrechungen, vom 19.-21.01., 01.-06.02., 08.02. und 13.-15.02.94 anzutreffen. In Abbildung 11 ist die Schubspannungsgeschwindigkeit in 2 m Höhe vom 27.01. bis 03.02.94 dargestellt. Die beiden für nachfolgende Untersuchungen vor allem ausgewählten Perioden vom 28.-29.01. und vom 01.-02.02.94 zeichnen sich hierbei klar ab. Es ist aber auch offensichtlich, daß auf Grund der verwendeten Fehlerselektion die Zahl der Meßwerte mit vorhandener Turbulenz außerordentlich gering ist. Dies trifft besonders in den Abendstunden des 01.02.94 zu, wo der Energieaustausch nicht mehr mit üblichen Auswerteverfahren bestimmbar ist.

3.4. Datensatz für weitere Untersuchungen

Für die weiteren Untersuchungen wird vorrangig der Datensatz aus den beiden oben selektierten Meßperioden verwendet. Dabei wird auf die binär gespeicherten Originalmeßreihen mit einer Abtastfrequenz von 20 Hz zurückgegriffen. Für die Untersuchungen bei denen lediglich die Wechselgrößen (Welle/Turbulenz) von Bedeutung sind, wurde zunächst ein linearer Fit der Originaldaten bestimmt und durch Bildung derer Differenzen der Trend sowie der Mittelwert eliminiert.

Da die größten in den Zeitreihen enthaltenen Frequenzen weit unterhalb der Abtastfrequenz von 20 Hz liegen, können Aliasing-Effekte bei Bestimmung der Fouriertransformierten oder der WT ausgeschlossen werden. Im Gegensatz dazu mußte für bestimmte quantitative Untersuchungen eine Eliminierung langwelligen Schwingungen vorgenommen werden, so daß alle Frequenzen der Zeitreihen von der WT erfaßt werden (vgl. Diskussion zu Gleichung (2.9) auf Seite 4). Hierzu wurde der Einfachheit halber anstatt einer linearen Anpassung, ein Fit vierter Ordnung von den Originaldaten subtrahiert.

Um bei der Filterung von Daten mittels der WT (vgl. Abbildung 32 und Abbildung 33) die Rechenzeit nicht unnötig lang werden zu lassen, wurde die obere Frequenz um das 10-fache

reduziert (d.h. von 20 Hz auf 2 Hz), indem der gleitende Mittelwert über zehn benachbarte Datenpunkte ermittelt wurde, und dann jeder zehnte Datenpunkt für die Waveletanalyse verwandt wurde. Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß bei Berücksichtigung von 100 verschiedenen Skalen a , und der Analyse einer halbstündigen Zeitreihe (entspricht 3600 Punkte bei 2 Hz), die gewonnene Bilder auf Grund des erweiterten b -Bereiches (vgl. Abschnitt 2.2) aus etwa 100×12000 Punkten bestehen und im ASCII-Format einen Speicher von etwa 18 MB benötigen.

4. Untersuchung turbulenter Prozesse bei stabiler Schichtung mittels Wavelet-Analyse

4.1. Globale Untersuchungen

An dieser Stelle werden die beiden Fälle, stark stabile Schichtung (Fall 1; in der Nacht vom 1.2. zum 2.2.94) und schwach stabile Schichtung (Fall 2; in der Nacht vom 2.2. zum 3.2.94), näher betrachtet und miteinander verglichen.

4.1.1. Stark stabile Schichtung

In der stark stabilen Schichtung bilden sich turbulente und wellenförmige Bewegungen mit instationärem und intermittierendem Charakter aus. Diese Bewegungen sind in den hochaufgelösten Messungen der Komponenten des Windvektors, der Temperatur und der Feuchte in 4m Höhe zu erkennen, die in den Abbn. 9 bis 12 für einen ausgewählten 30-minütigen Abschnitt (21:35 bis 22:05 Uhr) dargestellt sind. In den Abbildungen sind neben den Zeitserien die zugehörigen, mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet gewonnenen Waveletkoeffizienten⁴ dargestellt.

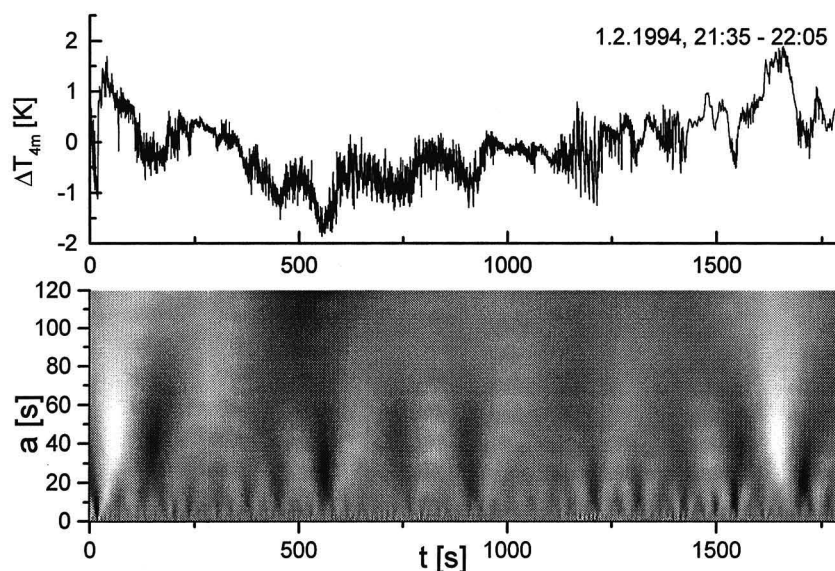


Abbildung 12: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, Temperaturfluktuationen in 4m Höhe (oben) und die zugehörige WT $T_1(a,b)$ (Mexikanisches-Hut-Wavelet). Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$, Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

⁴ Hier wird die Normierung mit $p = 1$ verwendet, um Einzelheiten auf kleineren Skalen deutlicher sichtbar zu machen. Es gilt $T_1(a,b) = T_{1/2}(a,b) / \sqrt{a}$.

In der Abbildung 12 sind folgende Charakteristika der Zeitserie gut zu erkennen: starke turbulente Fluktuationen insbesondere zwischen 1100s und 1250s nach einer Periode mit geringer Turbulenzintensität auf den kleinen Skalen (z.B. für $a < 5s$) und wellenförmige Strukturen zwischen 450s und 1000s auf größeren Skalen (z.B. für $10s < a < 50s$).

Die Anwendung der Beziehung (2.7) zur Umrechnung der Skalen in physikalische Frequenzen ergibt mit $\omega_0 = \sqrt{2}$ für das Mexikanische-Hut-Wavelet Frequenzen von $\omega = 0.28..1.4$ Hz für die starken turbulenten Fluktuationen und von $\omega = 0.028..0.14$ Hz für die Wellen. Letztere Frequenzen entsprechen einer Periode von 45...220s.

Für die Zeitserien der vertikalen und einer horizontalen Komponente des Windvektors sowie der Feuchte des gleichen Zeitraumes werden in den Abbn. 10 bis 12 die Zeitserien mit den zugehörigen WT gezeigt. Die WT wurden mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet berechnet. Die Wahl dieses Wavelets ist ein Kompromiß zwischen einer Frequenzauflösung, die eine hinreichend gute Trennung der turbulenten und der wellenförmigen Bewegungen sichert, und einer zeitlichen Auflösung, die eine möglichst genaue Detektion der Ereignisse erlaubt (vgl. Abschnitt 2.4). Die oben aus der Temperaturserie analysierten Ereignisse sind auch hier auf den gleichen Skalenbereichen deutlich zu erkennen.

Die charakteristischen Skalen (Frequenzen) der analysierten turbulenten und wellenförmigen Strukturen werden in geeigneter Weise aus der Waveletvarianz (Gleichung (2.5)) bestimmt, da die Maxima im Energiespektrum mit den charakteristischen Skalen der kohärenten Wirbel korrespondieren (vgl. Abschnitt 2.3.2).

In der Abbildung 16 sind für die genannten Messungen die Waveletvarianzen dargestellt. Für diese Darstellung wurden die Skalen über die Beziehung (2.7) in Frequenzen umgerechnet. Bei einer Normierung mit $p = 1$ sind lokale Maxima auf kleineren Skalen deutlicher erkennbar. Für die mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet berechnete Waveletvarianz treten bei dieser Normierung die Maxima für $\omega = 0.7$ Hz ($a = 2s$) und $\omega = 0.05$ Hz ($a = 28.5s$) hervor (anzumerken ist, daß die Energiedichte $E(a)/C_G/a^{3-2p}$ nicht von der Normierung abhängig ist).

In den Energieverteilungen ist ein Bereich mit geringer spektraler Energie um 0.3Hz zu erkennen („spektrale Lücke“), der die turbulenten von den wellenförmigen Bewegungen trennt. Da die Brunt-Väisälä-Frequenz⁵ die größtmögliche Frequenz für Schwerewellen ist und während des betrachteten Zeitraumes zwischen 0.25Hz und 0.32Hz liegt, werden alle Bewegungsformen mit einer Frequenz kleiner als 0.3Hz als Wellenbewegungen und alle Bewegungen mit größeren Frequenzen als Turbulenz identifiziert.

⁵ Die Brunt-Väisälä-Frequenz ist ein Maß für die thermische Stabilität, und ist definiert als $N^2 = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}$, wobei g die Erdbeschleunigung, Θ die potentielle Temperatur und z die Höhe über der Erdoberfläche bezeichnen.

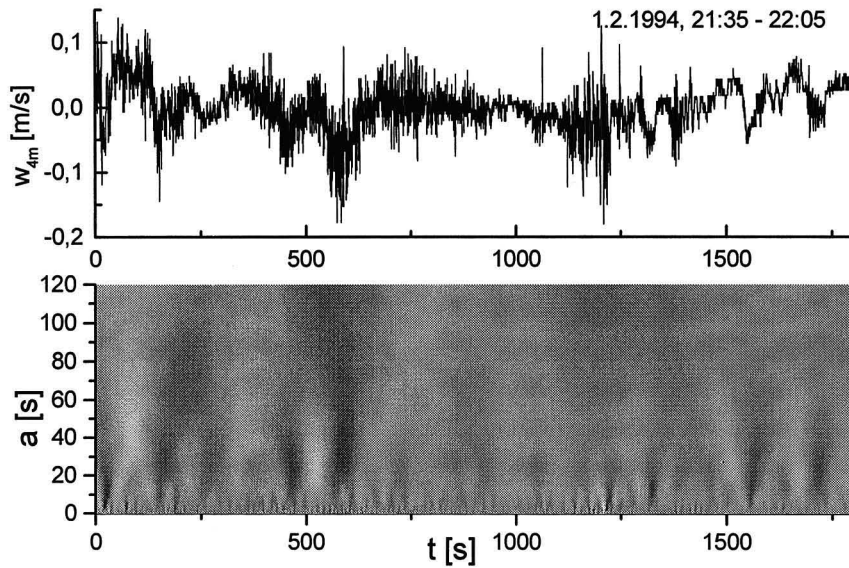


Abbildung 13: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, Fluktuationen der Vertikalwindkomponente in 4m Höhe (oben) und zugehörige WT $T_1(a,b)$ (Mexikanischen-Hut-Wavelet). Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$, Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

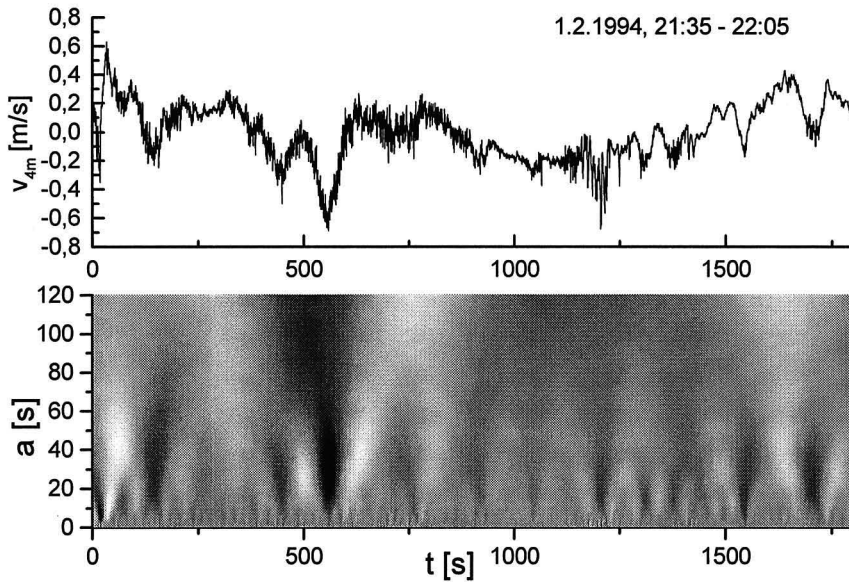


Abbildung 14: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, Fluktuationen der Horizontalwindkomponente v in 4m Höhe (oben) und zugehörige WT $T_1(a,b)$ mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet. Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$, Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

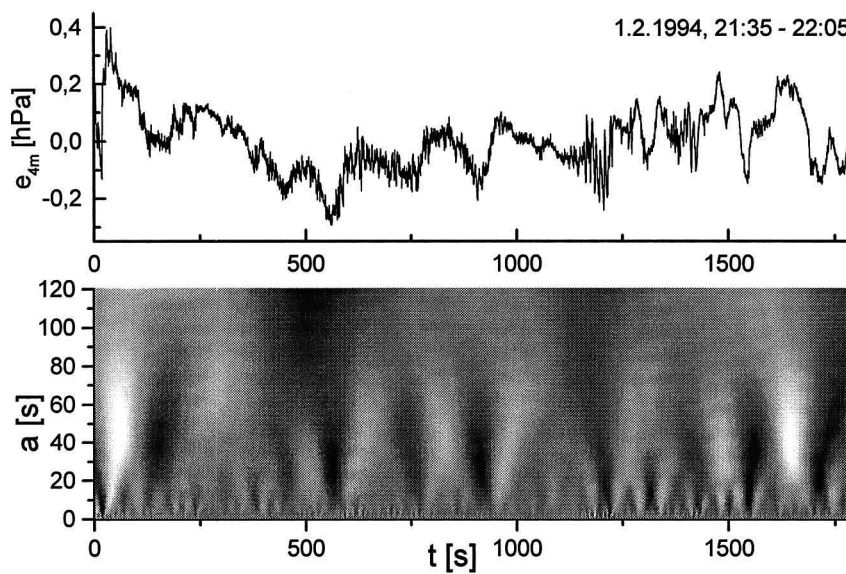


Abbildung 15: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, Feuchtefluktuationen in 4m Höhe (oben) und zugehörige WT $T_1(a,b)$ mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet. Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$, Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

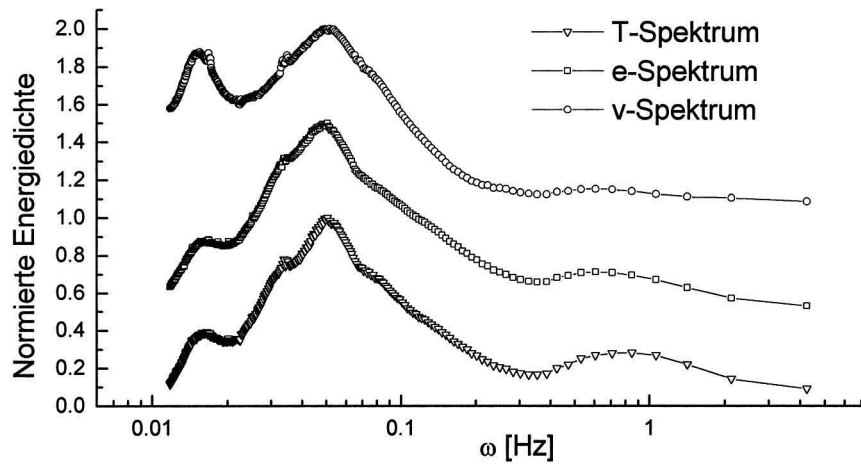


Abbildung 16: Waveletvarianz für die Fluktuationen der Horizontalwindkomponente v , der Temperatur T und der Feuchte e in 4m Höhe, FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, berechnet mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet und der Normierung $p = 1$.

Für die Untersuchung der Beiträge der Strukturen auf verschiedenen Frequenzbereichen zur gesamten Kovarianz und damit zum Energiefluß werden die Wavelet-Kreuzspektren der vertikalen Geschwindigkeit und der Temperatur betrachtet, da das Integral der kospektralen Energiedichte über alle Frequenzen die entsprechende Kovarianz, in diesem Fall $\overline{w'\Theta'}$, liefert (s. auch Anhang A.2). Des Weiteren können aus dem Phasenspektrum Aussagen über die Existenz von linearen Schwerewellen getroffen werden, da diese eine Phasenverschiebung von 90° zwischen w und Θ aufweisen.

In den Abb. 14 und 15 sind das Wavelet-Kospektrum und das Wavelet-Phasenspektrum für das Kreuzprodukt wT für das betrachtete Beispiel bei stark stabiler Schichtung dargestellt. Maximale Werte des Betrages des Kospektrums treten wiederum in den Frequenzbereichen der turbulenten sowie der Wellenbewegungen auf, die durch einen Bereich um $\omega \approx 0.3\text{Hz}$ mit sehr kleinen Werten des Betrages des Kospektrums getrennt sind, in dem zusätzlich ein Wechsel von negativen zu positiven Werten des Kospektrums erfolgt. Da die Absolutwerte auf den beiden Spektralbereichen entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen, sind der turbulente und der Wellenfluß entgegengesetzt gerichtet. Dies wird durch die genaue Berechnung der Flüsse auf verschiedenen Spektralbereichen in Abschnitt 4.4 bestätigt. Aus dem Phasenspektrum ergibt sich, daß die Phasenverschiebung im Frequenzbereich der Wellenbewegungen ungleich 90° ist, so daß keine linearen Wellen vorliegen und somit ein vertikaler Wärmetransport durch die Wellen erfolgt.

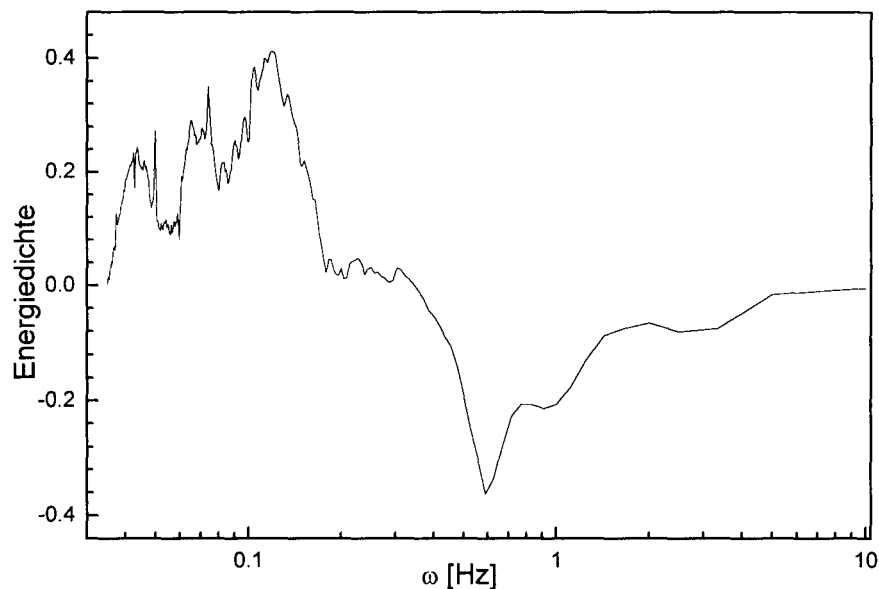


Abbildung 17: Kospektrum für die Fluktuationen des Vertikalwindes und der Temperatur in 4m Höhe, FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, berechnet mit dem Morlet-Wavelet und der Normierung $p = 1$.

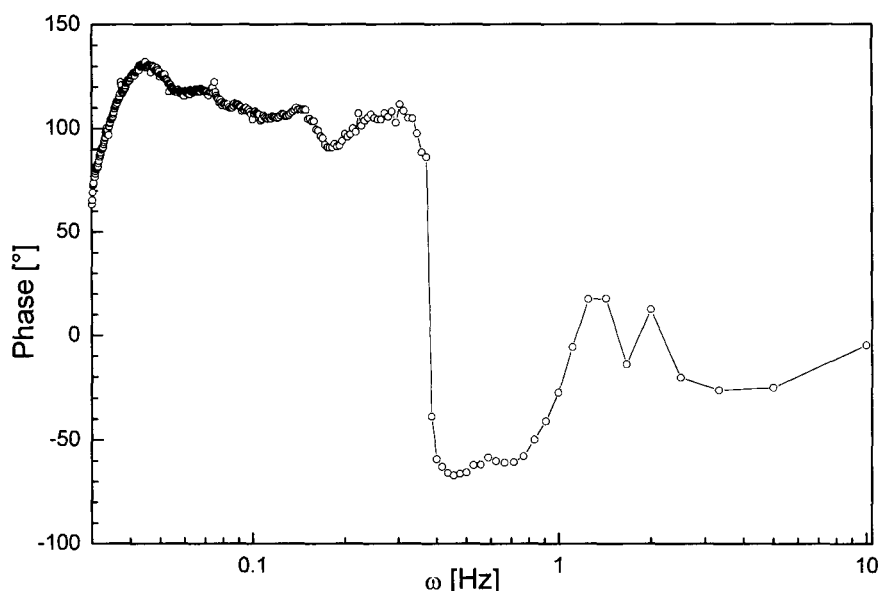


Abbildung 18: Phasenspektrum für die Fluktuationen des Vertikalwindes und der Temperatur in 4m Höhe, FINTUREX, 1.2.1994, 21:35-22:05 Uhr, berechnet mit dem Morlet-Wavelet und der Normierung $p = 1$.

4.1.2. Schwach stabile Schichtung

Im Gegensatz zu den bisher untersuchten Meßfällen während der Nacht vom 1.2. zum 2.2.1994 (Fall 1) bildet sich in der Nacht vom 2.2. zum 3.2.1994 (Fall 2) bei schwach stabiler Schichtung nahezu kontinuierliche Turbulenz aus. Die Zeitserien der turbulenten Fluktuationen sind nahezu stationär und eine Berechnung des turbulenten Flusses ist mit herkömmlichen Methoden möglich. Am 2.2.1994 wurden in der Zeit zwischen 20:00 und 24:00 Uhr Schubspannungsgeschwindigkeiten zwischen $u_* = 0.11 \text{ m/s}$ und $u_* = 0.17 \text{ m/s}$ und kinematische Wärme-flüsse zwischen $\overline{w'T'} = -0.009 \text{ mK/s}$ und $\overline{w'T'} = -0.012 \text{ mK/s}$ gemessen. Die Abbn. 16 und 17 zeigen eine halbstündige Serie der Temperaturfluktuationen und des Vertikalwindes in 4m Höhe und die zugehörigen Wavelettransformationen, die wiederum mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet berechnet wurden.

Beide Zeitserien weisen sehr gleichmäßige Fluktuationen auf, was sich auch in den Wavelettransformationen widerspiegelt. Ausnahmen sind die kurzzeitige Störung in der Temperaturmessung bei $t = 1000 \text{ s}$ und die Wellenbewegungen im letzten Drittel des Meßzeitraumes, die in der Wavelettransformation gut zu erkennen sind.

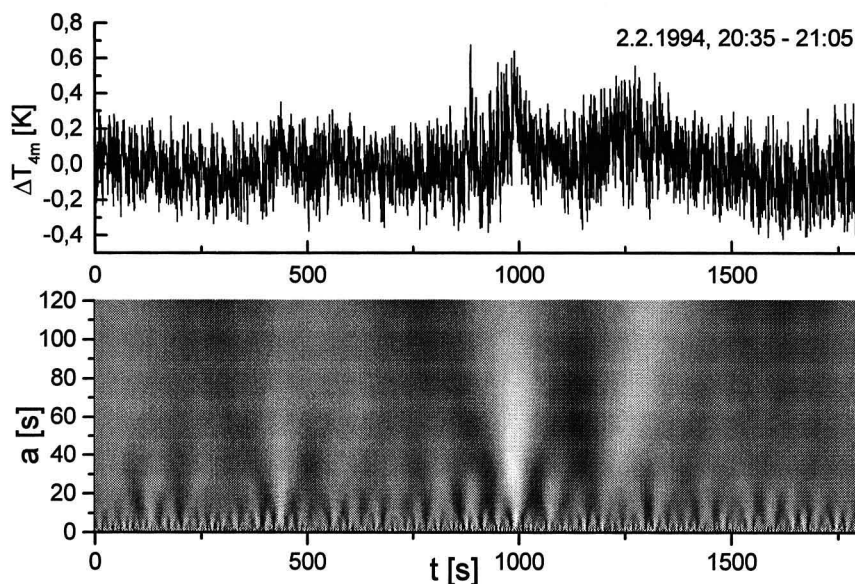


Abbildung 19: FINTUREX, 2.2.1994, 20:35-21:05 Uhr, Temperaturfluktuationen in 4m Höhe und zugehörige Wavelettransformation $T_1(a,b)$ mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet. Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$ Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

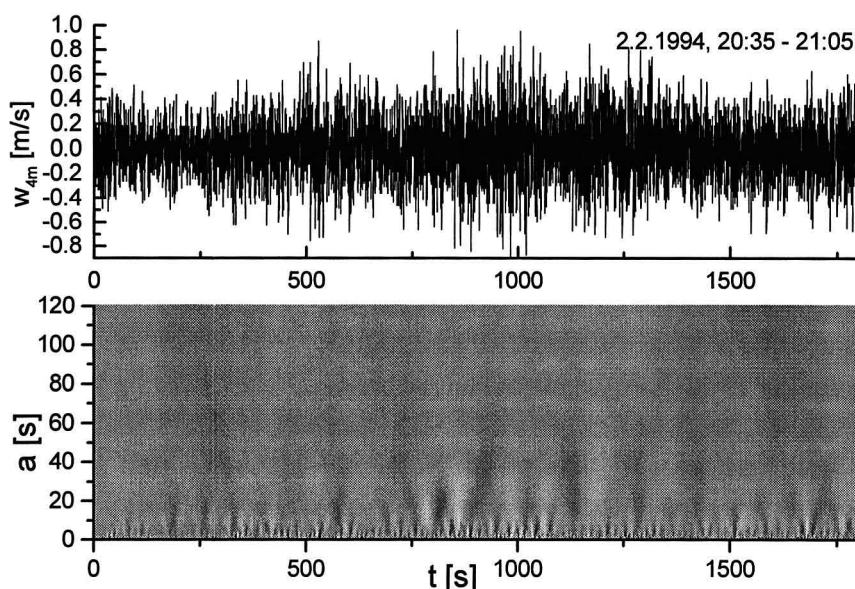


Abbildung 20: FINTUREX, 2.2.1994, 20:35-21:05 Uhr, Fluktuationen des Vertikalwindes in 4m Höhe und zugehörige Wavelettransformation $T_1(a,b)$ mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet. Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$ Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

Auch für diesen Meßfall wurde die spektrale Verteilung der Energie in Form der Waveletvarianz berechnet und als Funktion der Frequenz in der Abbildung 21 für die Temperaturmes-

sung dargestellt. Bisher wird in der Mikrometeorologie die spektrale Verteilung der Energie meist mittels der Fouriertransformation berechnet.⁶ In der Abbildung 21 sind für die Temperaturmessung in 4m Höhe das Fourier- und das Wavelet-Spektrum gegenübergestellt. Das Fourierspektrum wurde mittels der schnellen FT (FFT) folgendermaßen berechnet: Es wurden 17 Spektren aus jeweils 4096 Datenpunkten aus sich zu 50% überlappenden Zeitsegmenten berechnet und zu einem Spektrum gemittelt. Das Waveletspektrum wurde für einen Skalenbereich von $a = 0.025$ bis $a = 10$ mit einer Auflösung von $\Delta a = 0.025$ berechnet und die Waveletvarianz durch Anwendung der Beziehungen (2.7) und (2.3) in eine frequenzabhängige Energiedichte umgerechnet.

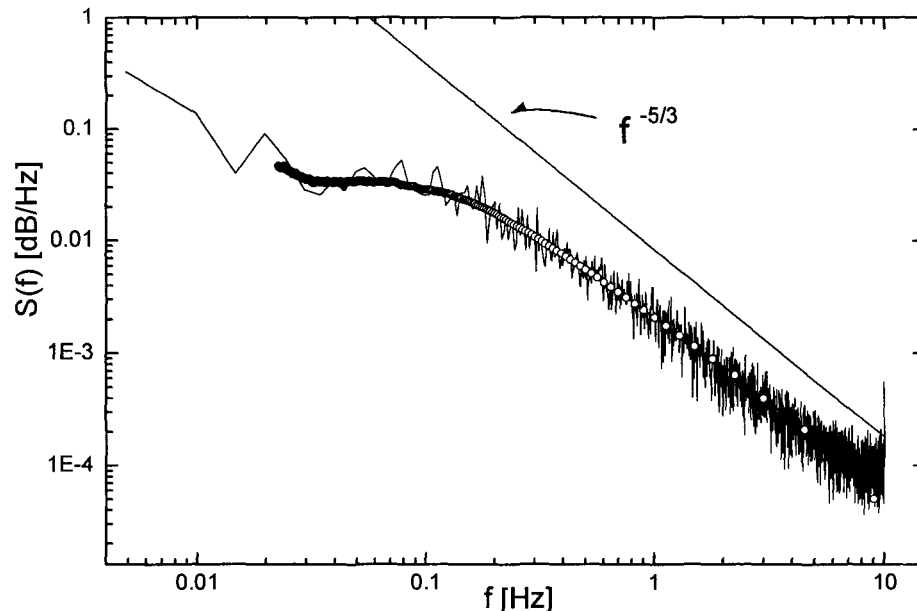


Abbildung 21: Vergleich des Fourier-Spektrums (durchgezogene Linie) mit dem Wavelet-Spektrums (Linie mit Kreisen) für die Temperaturfluktuationen in 4m Höhe, FINTUREX, 2.2.1994, 20:35-21:05 Uhr

In der Mikrometeorologie ist die Untersuchung der Turbulenzspektren insbesondere im Trägheitsbereich von Interesse, da sich im Rahmen der klassischen Kolmogorov-Theorie (Kolmogorov, 1941) ein Potenzgesetz für die Abhängigkeit der spektralen Energiedichte von der Frequenz mit einem Exponenten von $-5/3$ ergibt. Werden die Voraussetzungen der Kolmogorov-Theorie (lokale Homogenität, Isotropie und Selbstähnlichkeit der Strömung) verletzt, was insbesondere bei intermittierender Turbulenz der Fall ist, so zeigen sich Abweichungen vom $-5/3$ -Gesetz.

In der Abbildung 21 sind die gute Übereinstimmung der beiden Spektren bei einem Anstieg nahe $-5/3$ zu erkennen. Die Abweichung vom $-5/3$ -Gesetz ist wahrscheinlich durch die bei $t = 1000s$ auftretende Störung verursacht (vgl. Abbildung 19). Des weiteren ist die in Abschnitt 2.3 erwähnte größere Glattheit des Wavelet-Spektrums deutlich zu erkennen.

⁶ Zum Zusammenhang zwischen Wavelet- und Fourier-Spektrum s. Anhang A.2.

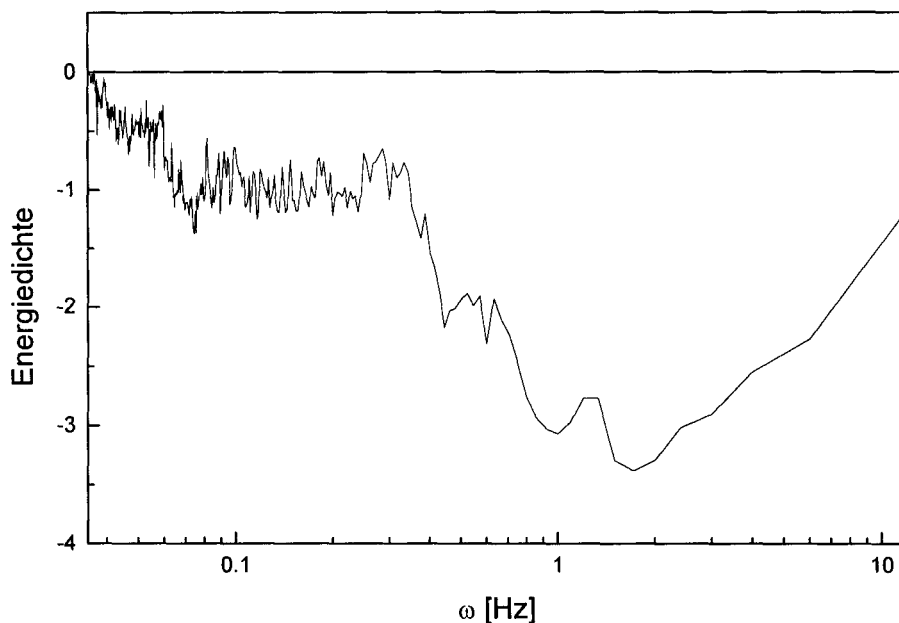


Abbildung 22: Kospektrum für die Fluktuationen des Vertikalwindes und der Temperatur in 4m Höhe, FINTUREX, 2.2.1994, 20:35-21:05 Uhr, berechnet mit dem Morlet-Wavelet und der Normierung $p = 1$.

Zum Vergleich mit dem Meßfall bei stark stabiler Schichtung ist in der Abbildung 22 das Kospektrum für die Zeitserie bei schwach stabiler Schichtung dargestellt. Maximale Werte des Betrages des Kospektrums treten im Frequenzbereich der turbulenten Bewegungen auf, hingegen ist im Frequenzbereich der Wellenbewegungen kein deutlich ausgeprägtes Maximum zu erkennen. Somit ist der vertikale Transport von Wärme in diesem Fall sehr gering. Erwartungsgemäß liegen die Absolutwerte des Kospektrums im turbulenten Frequenzbereich aufgrund der größeren turbulenten Fluktuationen deutlich höher als im Fall 1 (vgl. Abbildung 17). In beiden Fällen weist der turbulente Wärmefluß, berechenbar durch Integration der kospektralen Energiedichte über den entsprechenden Frequenzbereich, das gleiche Vorzeichen auf mit deutlich größeren Werten bei schwach stabiler Schichtung.

Neben der in diesem Abschnitt durchgeführten globalen Analyse von Zeitserien bietet die WT die Möglichkeit, ausgewählte charakteristische Ereignisse lokal zu untersuchen. Dies wird im folgenden Abschnitt an einem ausgewählten Beispiel demonstriert.

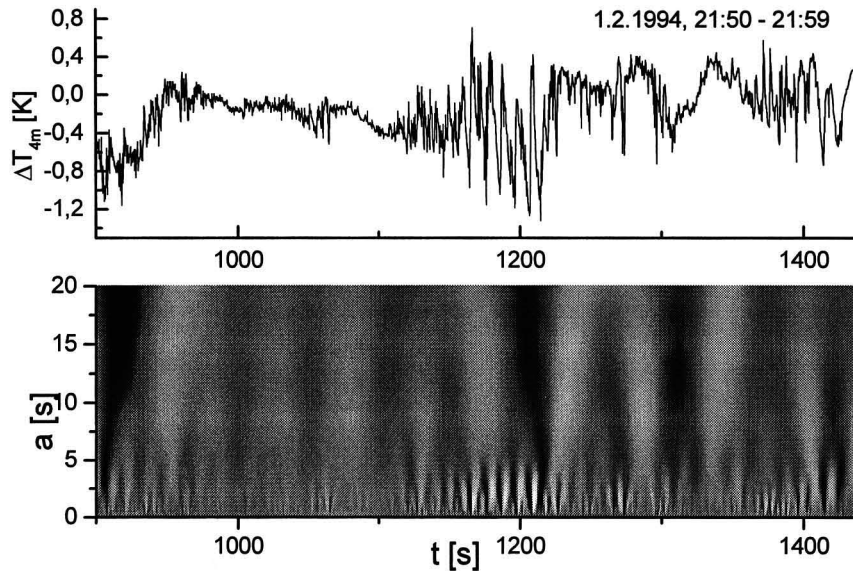


Abbildung 23: FINTUREX, 1.2.1994, 21:50-21:59 Uhr, Temperaturfluktuationen in 4m Höhe und zugehörige Wavelettransformation $T_1(a,b)$ mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet. Schwarz: minimaler Wert von $T_1(a,b)$ Weiß: maximaler Wert von $T_1(a,b)$.

4.2. Lokale Ereignisse

Im vorhergehenden Abschnitt wurden in den Zeitserien, die bei stark stabiler Schichtung gemessen wurden (Fall 1), insbesondere starke turbulente Fluktuationen mit einer Andauer von $\approx 150s$ detektiert. Dieser „Turbulenzausbruch“ vom 1.2.1994, 21:53 Uhr wird im folgenden detaillierter untersucht. Dazu sind in der Abbildung 23 die mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet berechneten Waveletkoeffizienten für einen Zeitabschnitt von 9 Minuten ($t = 900 \dots 1440s$) dargestellt. Die Entwicklung des „Turbulenzausbruches“ ist auf den Skalen $a < 5s$ gut zu erkennen, für $a > 5s$ treten ebenfalls charakteristischen Wirbel hervor, wobei die beiden Skalenbereiche deutlich voneinander getrennt sind (vgl. auch die Energiespektren in Abbildung 24). Die Strukturen auf den größeren Skalen prägen sich mit Beginn des turbulenten Ereignisses deutlich aus, dauern jedoch länger an als das turbulente Ereignis. Möglicherweise treten im Zusammenhang mit dem „Turbulenzausbruch“ Wechselwirkungen der mikroturbulenten Bewegungen und der wellenförmigen Bewegungen auf größeren Skalen auf, ein Phänomen, auf das in Abschnitt 5 noch näher eingegangen wird.

Für eine genauere Analyse des Strömungszustandes werden lokale Spektren für ausgewählte Zeitpunkte b_0 vor Beginn, während und nach Ende des „Turbulenzausbruches“ nach der Gleichung

$$E(a, b_0) = |T_p(a, b_0)|^2 \quad (4.1)$$

berechnet (nach Farge, 1992) und in der Abbildung 24 dargestellt. Im Verlaufe des „Turbulenzausbruches“ ändert sich die spektrale Verteilung der Energie in signifikanter Weise. Vor Einsetzen der starken turbulenten Fluktuationen ist die Strömung durch ein niedriges Turbulenzniveau gekennzeichnet und die Energie ist sowohl für Frequenzen $\omega < 0.3 \text{ Hz}$ als auch $\omega > 0.3 \text{ Hz}$

sehr gering mit einem Maxima bei den hohen Frequenzen. In der Zeit des „Turbulenzausbruches“ werden hohe Beträge der Energie sowohl auf den niedrigen als auch auf den hohen Frequenzen festgestellt und im Spektrum treten zwei ausgeprägte Maxima in den entsprechenden Frequenzbereichen auf, verursacht durch die starken turbulenten Fluktuationen und durch die sich entwickelnden wellenförmigen Strukturen (vgl. auch Abbildung 23). Im weiteren zeitlichen Verlauf verschwindet nach Ende des „Turbulenzausbruches“ das ausgeprägte Maxima auf den hohen Frequenzen und ein signifikantes Maxima liegt zwischen $\omega = 0.05-0.06$ Hz, d.h. die Wellenbewegungen weisen eine Periode von ca. 2 min auf. Auch für die lokalen Spektren stimmt die „spektrale Lücke“ wieder mit der Brunt-Väisälä-Frequenz überein. Der dargestellte Verlauf des „Turbulenzausbruches“ spiegelt sich auch in den lokalen Kospektren (Abbildung 25) wider.

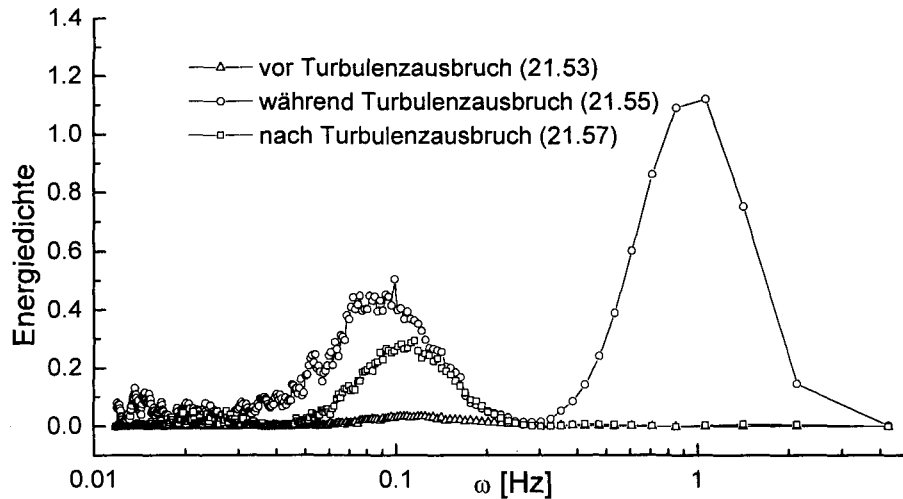


Abbildung 24: Lokale Wavelet-Spektren der Temperatur in 4m Höhe vor, während und nach dem „Turbulenzausbruch“ am 1.2.1994 zwischen 21:53 und 21:57 Uhr (Fall 1).

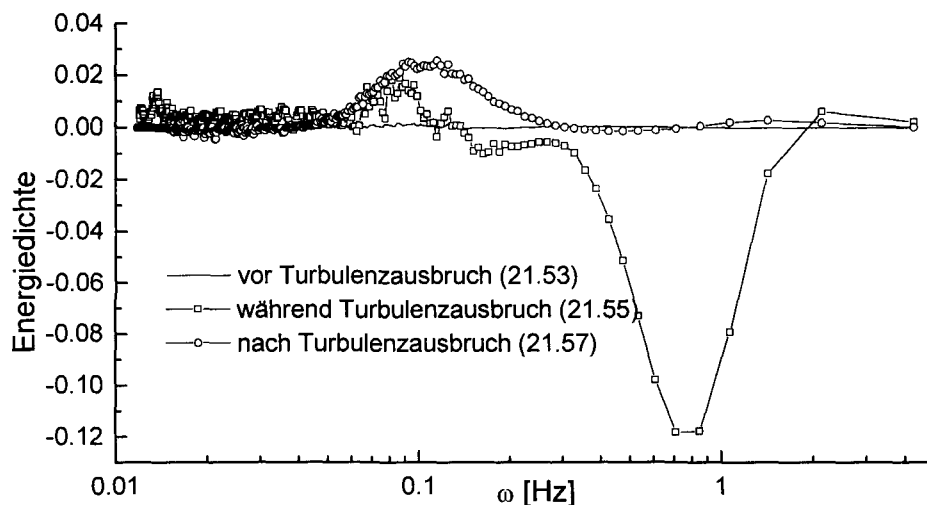


Abbildung 25: Lokale Wavelet-Kospektren der Temperatur und des Vertikalwindes in 4m Höhe vor, während und nach dem „Turbulenzausbruch“ am 1.2.1994 zwischen 21:53 und 21:57 Uhr (Fall 1).

4.3. Intermittenz

Mittels des Begriffes „Intermittenz“ wird eine Vielzahl von Phänomenen beschrieben, die durch mehr oder weniger stochastisches Auftreten charakterisiert sind. In manchen Fällen sind dies wohl strukturierte Ereignisse, die auf einer bestimmten Längenskala stattfinden (z.B. über Waldbeständen, vgl. Collineau (1993)). Im Gegensatz dazu wird in turbulenten Strömungen Intermittenz auf allen Skalen beobachtet.

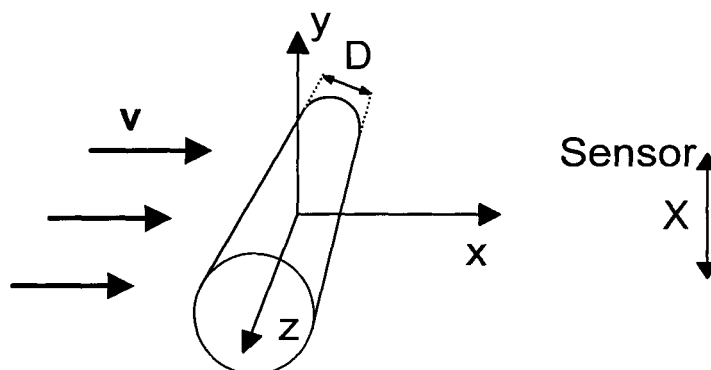


Abbildung 26: Skizze des Versuchsaufbaus beim Erlanger Windkanalexperiment.

4.3.1. Globale Intermittenzanalyse nach Castaing

Im folgenden wird zunächst die von Castaing (1990) vorgeschlagene Intermittenzanalyse skizziert. Die Analysen werden an turbulenten Zeitreihen durchgeführt, die aus einem Experiment in einem Windkanal stammen⁷. Es handelt sich dabei um Geschwindigkeitsmessungen hinter einem Zylinder (siehe Skizze des Versuchsaufbaus in der Abbildung 26), dessen Achse (im folgenden z-Achse) quer zur mittleren Windgeschwindigkeit (x-Achse) zeigte.

Die in der Abbildung 27 dargestellten Zeitreihen der x-Komponente der Geschwindigkeiten wurden in einem Abstand $x_0 = 32 D$ (Durchmesser des Zylinders $D = 5\text{cm}$) vom Zylinder in unterschiedlichen Stellungen des Sensors aufgenommen: im Zentrum der Wirbelstraße ($y = 0\text{ mm}$, obere Zeitreihe) und nach Verschiebung des Sensors um 10 bzw. 15 cm in die y-Richtung (mittlere und untere Zeitreihe). Wie den Zeitreihen zu entnehmen ist, steigt mit zunehmendem y-Wert der Position des Sensors der Intermittenzgrad der turbulenten Strömung. Ziel des Ansatzes von Castaing ist es, diesen Intermittenzgrad zu quantifizieren. Im Folgenden soll nur die Idee von Castaing skizziert werden, eine Einführung in die Turbulenztheorie findet sich in Frisch (1995), eine ausführliche Beschreibung des Intermittenzfaktors ist in Renner (1997) oder Castaing (1990) zu finden.

⁷ Die am Erlanger Windkanal gewonnenen Daten wurden uns freundlicherweise von Stephan Lück von der Arbeitsgruppe um Prof. Dr. Joachim. Peinke (Carl von Ossietzky Universität Oldenburg) zur Verfügung gestellt.

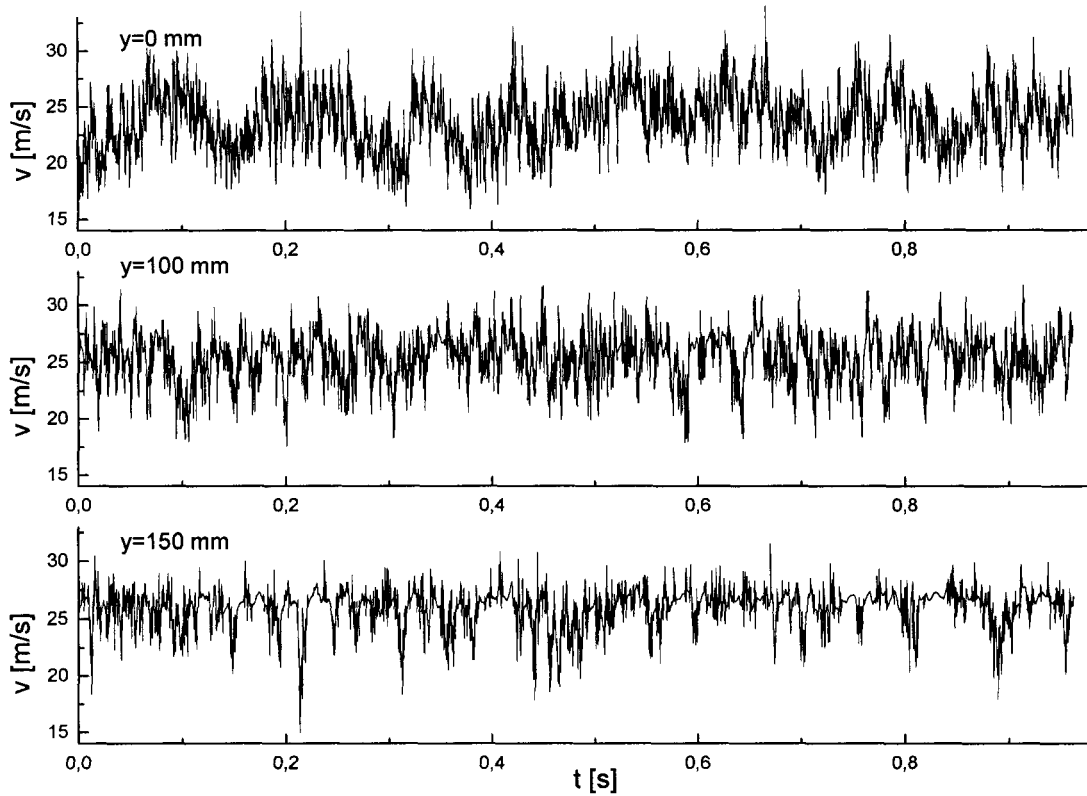


Abbildung 27: Zeitserien der Windgeschwindigkeit in x-Richtung hinter dem Zylinder ($x = 32 D$, mit $D = 5$ cm) in drei verschiedenen Höhen ($y = 0, 100$ und 150 mm).

Zur statistischen Beschreibung der Turbulenz ist es heutzutage in der Turbulenzforschung üblich, die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $P(\delta u_r, r)$ (probability density function, pdf) der Geschwindigkeitsinkremente $\delta u_r = u(x+r) - u(x)$ zu betrachten. Dabei wird die Antikorrelation zwischen den Geschwindigkeiten am Orte x und derer im Abstand r betrachtet.

Als ersten Ansatz wird für die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen $P(\delta u_r, r)$ die in der Natur am häufigsten vorkommende Gaußverteilung angenommen:

$$P(\delta u_r, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\delta u_r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (4.2)$$

wobei die Standardabweichung σ im allgemeinen eine Funktion von r sein wird. Zur Berücksichtigung der statistischen Fluktuationen der Energietransferrate ε wird die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $P(\delta u_r, r)$ als bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(\delta u_r, r) = \int_0^{\infty} P(\varepsilon_r, r) P(\delta u_r | \varepsilon_r) d\varepsilon_r \quad (4.3)$$

dargestellt, wobei $P(\delta u_r | \varepsilon_r)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, bei gegebenem ε_r das Geschwindigkeitsinkrement δu_r zu finden.

Nach Castaing sind nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\delta u_r | \varepsilon_r)$ Gaußverteilungen, deren Standardabweichungen s Funktionen der Energietransferrate ε_r sind:

$$P(\delta u_r | \varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s(\varepsilon_r)} \exp\left(-\frac{\delta u_r^2}{2s(\varepsilon_r)^2}\right) \quad (4.4)$$

Anlehnend an Kolmogorov (1961) wird schließlich für die Energietransferrate eine Lognormalverteilung angenommen:

$$P(\varepsilon_r, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Lambda_r \varepsilon_r} \exp\left(-\frac{\ln^2\left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right)}{2\Lambda_r^2}\right), \quad (4.5)$$

wobei $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon \rangle \exp\left(-\frac{\Lambda_r^2}{2}\right)$.

Für den Zusammenhang zwischen der Standardabweichung s der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Energietransferrate ε_r findet man experimentell ein Potenzgesetz:

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} = \left(\frac{s}{s_0(r)}\right)^\gamma \quad (4.6)$$

wobei $\gamma \approx 3$. Dies in Gleichung (4.5) eingesetzt ergibt für die Standardabweichung s

$$P(s, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \lambda_r s} \exp\left(-\frac{\ln^2\left(\frac{s}{s_0}\right)}{2\lambda_r^2}\right), \quad (4.7)$$

wobei $\lambda_r^2 = \Lambda_r^2 / \gamma^2$. Aus (4.3), (4.4)-(4.6) folgt für $P(\delta u_r, r)$ schließlich:

$$P(\delta u_r, r) = \frac{1}{2\pi \lambda_r} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \exp\left(-\frac{\ln^2(s/s_0)}{2\lambda_r^2}\right) \exp\left(-\frac{\delta u_r^2}{2s^2}\right) \quad (4.8)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(\delta u_r, r)$ werden also von zwei r -abhängigen Parametern bestimmt: Der wahrscheinlichsten Standardabweichung s_0 , die die Breite der Verteilung festlegt, und dem Parameter λ_r , der die Form der Verteilung bestimmt (deshalb auch Formparameter genannt). Da er ein Maß für die Abweichung der Verteilungen von einer Gaußverteilung darstellt, welche ja durch den intermittenten Charakter der Energiedissipation bedingt ist, kann er auch als ein Maß für die Intermittenz verwendet werden.

In der Abbildung 28 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der mittleren Zeitreihe aus Abbildung 27 ($\gamma = 100$) für verschiedene Längenskalen r dargestellt. Für $r = 49.7\text{mm}$ entspricht die Kurve einer Gaußverteilung. Mit kleiner werdender Skala r steigt der Grad der Abweichungen von einer Gaußverteilung: kleine und große Geschwindigkeitsinkremente kommen auf Kosten der mittleren Werte häufiger vor, ein Effekt der mit dem Grad der Intermittenz verknüpft ist.

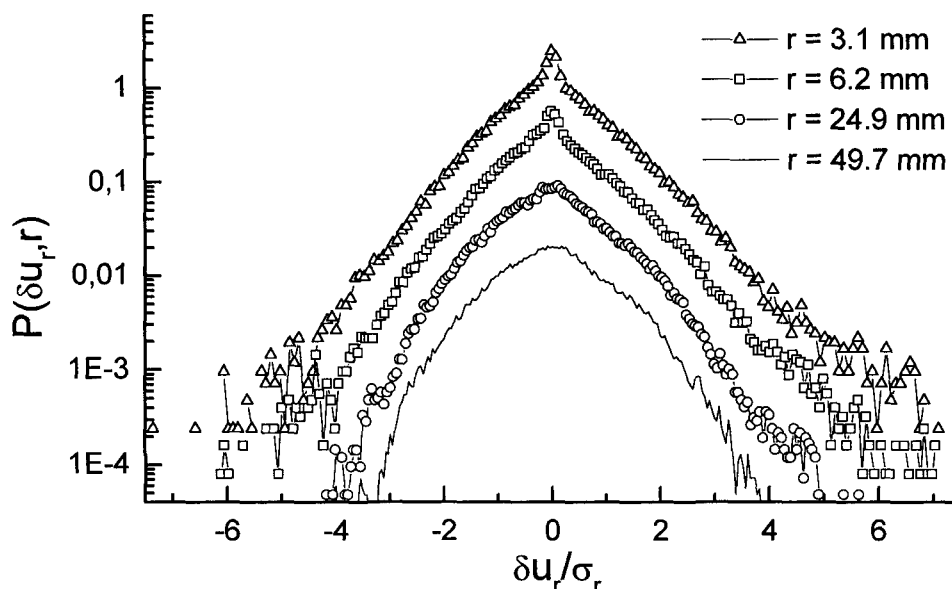


Abbildung 28: Wahrscheinlichkeitsdichten $P(\delta u_r, r)$ der mittleren Zeitreihe aus Abbildung 27 ($\gamma = 100$) für verschiedene Abstände r . Der Übersichtlichkeit halber wurden die Kurven zueinander verschoben.

Durch Anpassung der Funktion (4.8) an die Daten der Abbildung 28 wurden die in der Abbildung 29 dargestellten Intermittenzgrade $\lambda^2(r)$ bestimmt. Durch die doppellogarithmische Auftragung wird ein Zusammenhang der Form $\lambda^2(r) \propto r^{-\beta}$ über einen weiten Bereich von r deutlich: mit kleiner werdendem Längenmaßstab r wächst der hier als Intermittenzgrad betrachteter Formparameter $\lambda^2(r)$. Der von uns bestimmte Wert für den Exponenten $\beta = -0.61$ stimmt gut mit den Werten in Renner (1997) überein.

Die Intermittenzanalyse nach Castaing erlaubt somit eine exakte Beschreibung der Formänderung der pdf's, die durch die statistischen Fluktuationen der Energietransferrate bedingt ist. Auch der Vergleich unterschiedlicher Zeitreihen ist durch die Betrachtung derer pdf's bei festem r möglich.

Die hier dargestellten Analysen wurden jedoch an „braven“ Zeitreihen aus dem Windkanal, und nicht an den komplexeren meteorologischen Daten durchgeführt. Durch die Superposition von Welle und Turbulenz werden die pdf's der meteorologischen Daten nur schwer mit Gleichung (4.8) vergleichbar. Eine Analyse mittels Kurvenanpassung dürfte somit kaum hilfreich sein. Zudem ist der Parameter λ^2 skalenabhängig, und lässt somit keine *globale* Aussage hinsichtlich dem Intermittenzgrad einer Zeitreihen zu. Eines der Ziele dieser Untersuchungen war es jedoch einen Parameter zu finden, der ein Maß für die Anzahl und Stärke der intermittenten Ausbrüche während eines endlichen Zeitabschnittes darstellt.

Zur Untersuchung einzelner intermittenter Ausbrüche wurde von Farge ein Intermittenzfaktor vorgeschlagen, der auf den lokalen Waveletspektren beruht. Diesem Thema ist der nun folgenden Abschnitt gewidmet.

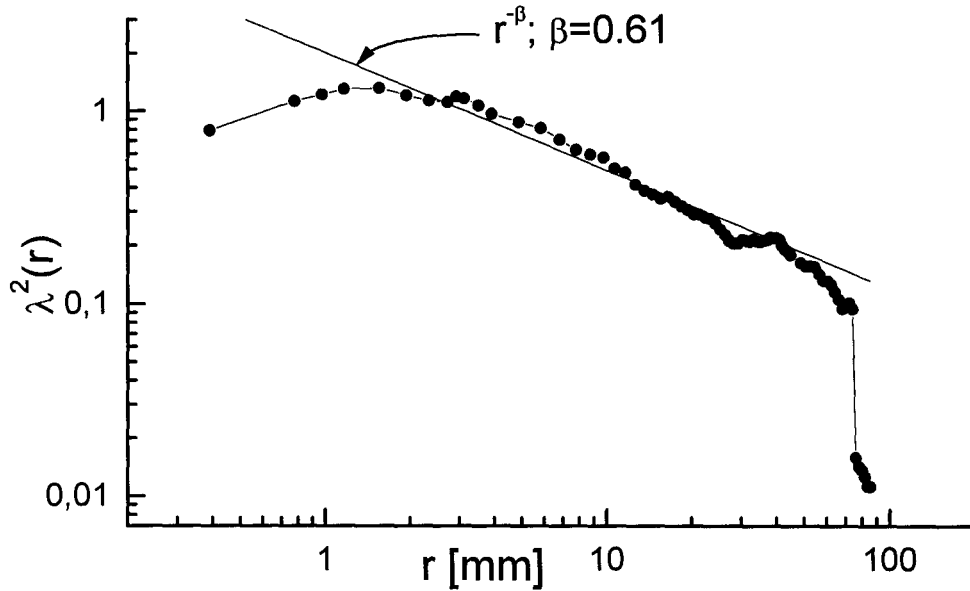


Abbildung 29: Der Intermitenzparameter λ^2 in Abhängigkeit von der Längenskala r . Durch die doppellogarithmische Auftragung wird der Zusammenhang $\lambda^2(r) \propto r^{-\beta}$ deutlich.

4.3.2. Lokale Intermitenzanalyse nach Farge

Auch ein lokaler Intermitenzgrad wurde von Farge (1992) eingeführt, wobei dieser auch quantitative Aussagen über einzelne intermittente Ereignisse zulässt. Dieser lokale Intermitenzfaktor ist über die Waveletkoeffizienten durch

$$I(a, b_0) = \frac{|T_p(a, b_0)|^2}{\left\langle |T_p(a, b_0)|^2 \right\rangle_b} \quad (4.9)$$

definiert, wobei $\langle |T_p(a, b_0)|^2 \rangle_b$ den Mittelwert über alle b bezeichne. Der Intermitenzfaktor $I(a, b_0)$ gibt an, wie groß zum Zeitpunkt b_0 der Beitrag zum Energiespektrum auf der Skala a im Verhältnis zum Mittelwert über alle Zeitpunkte b ist. Für $I(a, b) = 1$ für alle a und b liegt keine Intermitenz vor und jede Lokalisierung weist das gleiche Energiespektrum auf. Abbildung 30 zeigt die Änderung der lokalen Intermitenzfaktoren I im Verlaufe des „Turbulenzausbruches“. Besonders bemerkenswert ist der hohe Wert von I für den turbulenten Frequenzbereich während des Ausbruches für $b_0 = 21:55$ (bzw. $t = 1200s$ in Abbildung 23). Dies zeigt an, daß die Energie auf diesem Frequenzbereich für den Zeitraum der gesamten Meßserie (21:35 bis 22:05 Uhr) zu einem Großteil durch den untersuchten „Turbulenzausbruch“ geliefert wird.

Die Methode nach Farge läßt somit eine detaillierte Studie einzelner intermittenter Ereignisse zu. Ziel weiterer Untersuchungen war es, einen *globalen* Intermitenzfaktor zu finden, der ein Maß für den Beitrag der Intermitenz zum Gesamttransport darstellt. Im folgenden wird der Versuch unternommen, über die Varianz der lokalen Varianzen einen solchen Parameter zu definieren.

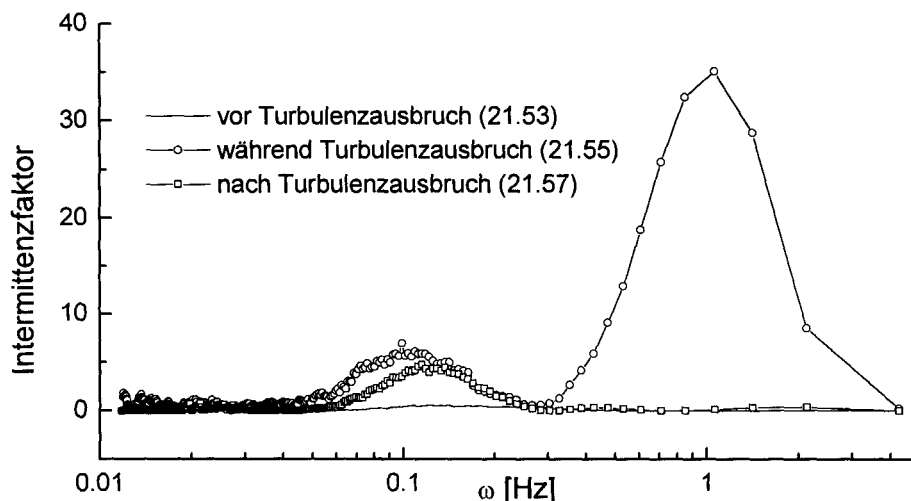


Abbildung 30: Lokale Intermittenzfaktoren der Temperatur in 4m Höhe vor, während und nach dem „Turbulenzausbruch“ am 1.2.1994 zwischen 21:53 und 21:57 Uhr (Fall 1).

4.3.3. Die Varianz der lokalen Varianzen

Intermittenz zeichnet sich durch ein kurzzeitiges Unterbrechen der vorherrschenden Dynamik aus und sollte sich somit in der Varianz der Zeitreihen widerspiegeln. Hierzu wird im Folgenden die auf dem Intervall $[0, T]$ definierte Zeitreihe in $n = T/\tau$ Teilabschnitte der Länge τ zerlegt, wobei $\tau \in [2 \cdot \Delta t, T/2]$ (Δt entspricht der Samplingrate). Von diesen Teilzeitserien wird dann die Varianz

$$\sigma_{\tau}^2(t_i) = \frac{1}{\tau} \int_{t_i}^{t_i+\tau} (f(x) - \overline{f(x)})^2 dx, \text{ mit } i \in [1, T/\tau]$$

bestimmt, wobei die Überstreichung für den Mittelwert steht. Um nun ein Maß für die zeitlichen Änderungen der so bestimmten Werte zu erhalten, wird für jedes τ abermals die Varianz

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{\tau}(t_i) - \overline{\sigma_{\tau}(t_i)})^2$$

berechnet. Die so bestimmten Werte $\sigma(\tau)$ stellen somit ein Maß für die Fluktuationen auf den verschiedenen Skalen τ dar: Wird eine stationäre Zeitreihe betrachtet, so werden die Varianzen $\sigma_{\tau}^2(t_i)$ der Teilzeitserien in etwa gleich sein, so daß deren Varianz wiederum verschwindet. Ist die Zeitreihe intermittent bzw. nicht stationär, so sollte sich dies in einem erhöhten Wert von $\sigma(\tau)$ niederschlagen.

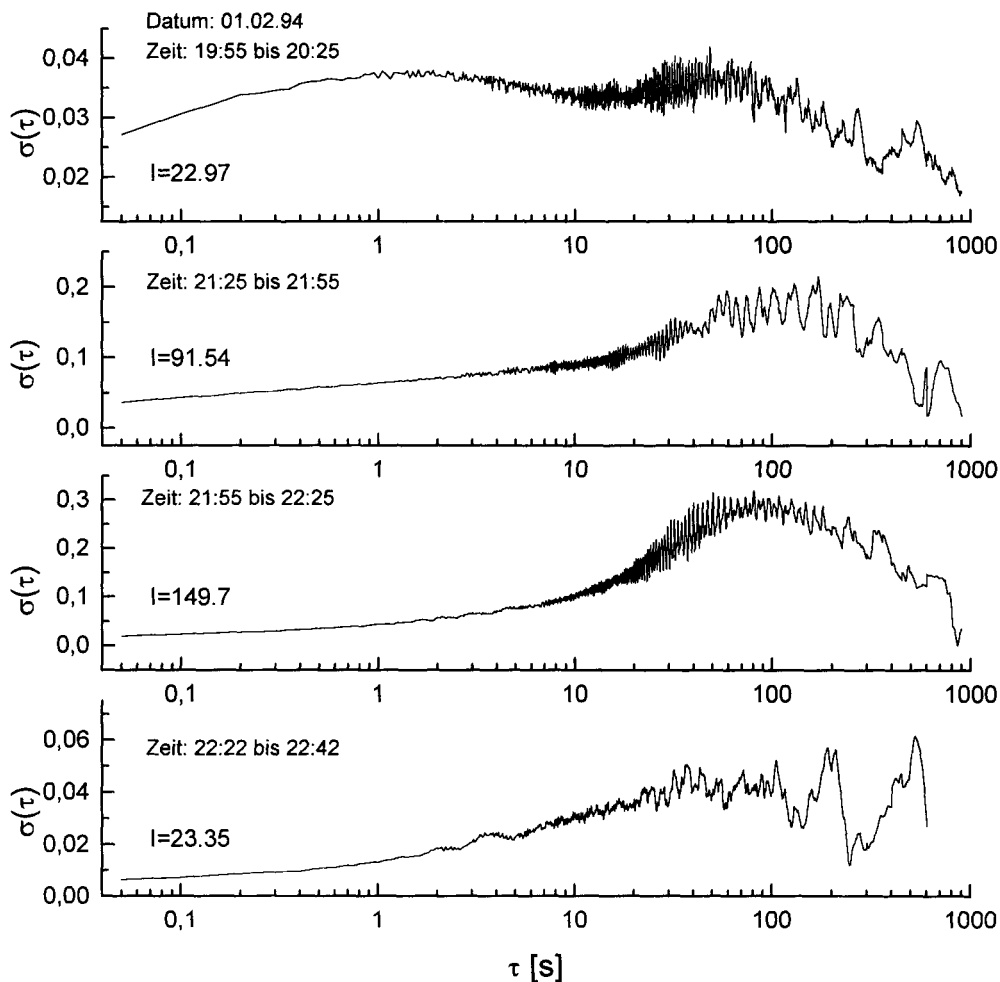


Abbildung 31: Die Varianzen der lokalen Varianzen von Zeitreihen unterschiedlicher Charakteristika (vgl. Abbildung 41). Erläuterungen siehe Text.

In der Abbildung 31 sind die $\sigma(\tau)$ von Zeitreihen unterschiedlicher Charakteristika dargestellt (siehe Abbildung 41 und die Diskussion dazu in Abschnitt 5.3). Die Charakteristika der verschiedenen Zeitreihen sind hier zwar gut wiederzuerkennen, doch war es unser Ansinnen einen *globalen* Intermittenzfaktor zu finden. Es soll also eine einzelne Zahl bestimmt werden, die den Intermittenzgrad der gesamten Zeitreihe beschreibt. Hierzu sind in der Abbildung 31 auch die Integrale der dargestellten $\sigma(\tau)$ angegeben (in der Abbildung mit I bezeichnet).

Auf diese Weise kann also tatsächlich eine einzelne Zahl angegeben werden, die für die untersuchte Zeitreihe charakteristisch ist. Nun stellt sich aber die Frage, ob es sich dabei tatsächlich um ein Maß für den Intermittenzgrad der Zeitreihe handelt. Ein Vergleich mit den in der Abbildung 42 dargestellten Waveletspektren (nach Spiegelung der Abszisse, was einer Darstellung $\sigma(\omega) = \sigma(2\pi/\tau)$ entspricht) legt nahe, daß $\sigma(\tau)$ eher dem Energiespektrum entspricht.

Der nichtstationäre Charakter der Zeitreihen, bzw. das intermittente Auftreten der Schwerewellen führt zu einer Erhöhung von $\sigma(\tau)$. Zwar ist die Schwerewelle im weitesten Sinne ein intermittentes Ereignis und wird somit zurecht von $\sigma(\tau)$ erfaßt, jedoch ist es kein Ereignis, das für uns von

Relevanz wäre: Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 4.3.2 diskutierten Turbulenzausbruch führt sie nicht zu einer drastischen Erhöhung der Austauschprozesse.

Trotz verschiedener Ansätze ist es uns leider nicht gelungen, einen *globalen* Intermittenzfaktor zu finden. Insbesondere im Falle stark stabiler Schichtung dürfte sich die Definition eines solchen Maßes als schwierig erweisen, zumal die Wechselwirkung zwischen Schwerewellen und Turbulenz (siehe Abschnitt 5.) die Verhältnisse zusätzlich komplizieren.

4.4. Bestimmung von Energieflüssen

Die Berechnung des Energieaustausches aus Messungen von Fluktuationen meteorologischer Größen ist für Zeitserien mit instationärem oder intermittierendem Charakter mit den herkömmlichen Methoden nicht möglich. Anstelle dessen werden in dieser Arbeit zwei verschiedene Methoden zur Bestimmung der Energieflüsse auf verschiedenen Skalen angewandt, die unter Ausnutzung der Eigenschaften der WT eine hinreichend genaue Bestimmung der Energieflüsse gestatten. Die erste Methode nutzt die Filtereigenschaften der WT, die zweite Methode ist das „Conditional sampling“ (Methode der bedingten Probenahme), d.h. die Bestimmung einer mittleren kohärenten Struktur und des damit verbundenen Energieaustausches.

In der stabil geschichteten Atmosphäre können sich interne Schwerewellen ausbilden, deren Frequenz kleiner als die Brunt-Väisälä-Frequenz ist. Hauptursache für das Entstehen von Schwerewellen ist eine hinreichend große Windscherung. Seltener werden Schwerewellen durch Hindernisse in der mittleren Strömung oder andere, impulsartige meteorologische Ereignisse (z.B. Gewitter) ausgelöst. Einige der in der Atmosphäre auftretenden Wellen können in guter Näherung mit der linearen Wellentheorie beschrieben werden und werden demgemäß als lineare Wellen bezeichnet. Im Rahmen dieser Theorie ergeben sich deterministische Gleichungen für die Wellenanteile f'' einer meteorologischen Größe f . Besonderes Kennzeichen ist eine Phasenverschiebung von 90° zwischen w'' und T'' ,⁸ so daß lineare Wellen zwar Impuls und kinetische Energie vertikal transportieren können, aber keine Wärme oder andere skalare Größen. Häufig treten jedoch auch Wellen auf, die nicht mit der linearen Wellentheorie beschrieben werden können, die nichtlinearen Wellen.

Da die Amplituden der Schwerewellen die gleiche oder sogar größere Magnituden als die Grenzschichthöhe erreichen können, wird unter diesen Umständen der Zustand der stabilen Grenzschicht stark durch die Wellen moduliert. Insbesondere werden dann in bestimmten Phasen des Wellenzyklusses dynamische Instabilitäten induziert und somit Turbulenz erzeugt, während in anderen Phasen die Turbulenz unterdrückt wird. Für die Analyse von Zeitserien, die sowohl Wellen als auch Turbulenz enthalten und für die Untersuchung der nichtlinearen Wechselwirkung von Turbulenz und Wellen schlug Finnigan et al. (1984) folgende Zerlegung einer meteorologischen Größe f in einen mittleren (\bar{f}), einen Wellen- (f'') und einen turbulenten (f') Anteil vor:

$$f = \bar{f} + f'' + f' = \bar{f} + f^* \quad (4.10)$$

Eine analoge Zerlegung wird bei der Untersuchung sogenannter organisierter oder kohärenter Strukturen angewandt. Dann bezeichnet f'' die großskalige Komponente (z.B. Bergström und Högström, 1989; Collineau und Brunet, 1993). Die Zerlegung (4.10) ist die Grundlage der im

⁸ Wie bereits dargelegt, kann die Phasenverschiebung aus dem Kreuzspektrum bestimmt werden.

folgenden angewandten Methoden zur Energieaustauschbestimmung auf verschiedenen Skalen, da sich dann der kinematische turbulente Fluß einer skalaren Größe s als

$$K_{st} = \overline{w's'} \quad (4.11)$$

und der kinematische Wellenfluß als

$$K_{sw} = \overline{w''s''} \quad (4.12)$$

berechnet. Die entsprechenden sensiblen und latenten Wärmeflüsse (H und E) ergeben sich durch

$$H_t = -\rho c_p \overline{w'T'} \quad E_t = -\rho \lambda \overline{w'e'} \quad (4.13)$$

und

$$H_w = -\rho c_p \overline{w''T''} \quad E_w = -\rho \lambda \overline{w''e''} \quad (4.14)$$

wobei ρ die Dichte der Luft, c_p die spezifische Wärme bei konstantem Druck, λ die Verdampfungswärme bezeichne. Der Index t kennzeichne den turbulenten, der Index w den Wellen-Fluß.

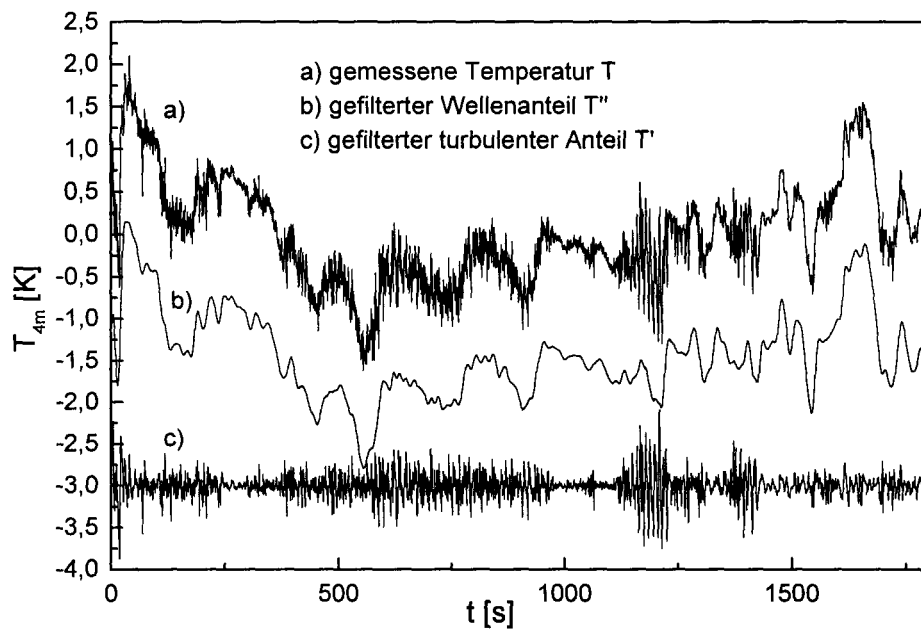


Abbildung 32: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35 bis 22:05 Uhr, Temperaturfluktuationen (oben) in 4m Höhe und die gefilterten turbulenten (unten) und Wellenanteile (mitte).

4.4.1. Filterung

Die direkte Anwendung der Beziehungen (4.11) bis (4.14) zur Berechnung der Energieflüsse auf verschiedenen Skalen ist möglich, wenn die Frequenzbereiche der turbulenten und wellenförmigen (größerskaligen) Bewegungen deutlich voneinander getrennt werden können. Die Untersu-

chungen der Abschnitte 4.1 und 4.2 zeigten, daß dies bei Verwendung von Wavelets, die gut im Frequenzraum lokalisiert sind, für unsere Messungen möglich ist. Somit können die turbulenten Fluktuationen f' und die Wellenbewegungen f'' durch Filterung voneinander separiert werden. Aufgrund ihrer guten Filtereigenschaften (vgl. Abschnitt 2.3) wird dafür im folgenden die WT unter Verwendung des Mexikanischen-Hut-Wavelets, eines Wavelets mit guter Frequenzauflösung, benutzt.

4.4.2. Flüsse für turbulenten und Wellenanteil

In der Abbildung 32 wird eine ausgewählte Zeitserie der Temperatur (Fall 1) zusammen mit den gefilterten turbulenten und Wellenanteilen dargestellt. Der in Abschnitt 4.2 analysierte „Turbulenzausbruch“ zwischen 1100s und 1220s tritt nach der Filterung des Wellenanteils noch deutlicher hervor.

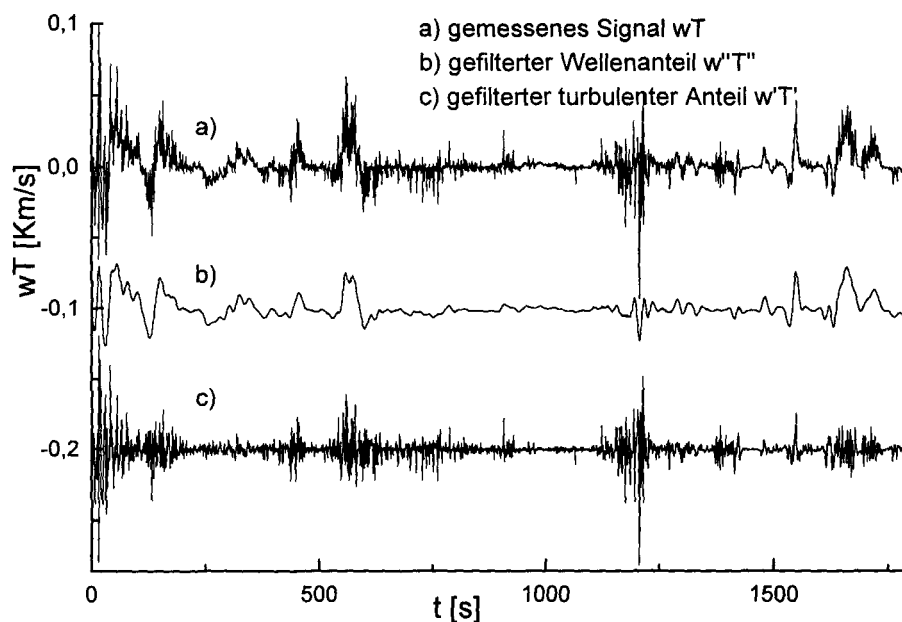


Abbildung 33: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35 bis 22:05 Uhr, Kreuzprodukt wT (oben) in $4m$ Höhe und die gefilterten turbulenten (unten) und Wellenanteile (mitte).

Für diese Zeitserie (Fall 1) sollen an dieser Stelle exemplarisch die Wärmeflüsse berechnet werden. Abbildung 33 zeigt die Zeitserie des Kreuzproduktes wT zusammen mit dem turbulenten Anteil $w'T'$ und dem Wellenanteil $w''T''$. Der kinematische turbulente Fluß $\overline{w'T'}$ wurde zu $-0.66 \cdot 10^{-3} mK/s$ und der kinematische Wellenfluß zu $1.1 \cdot 10^{-3} mK/s$ bestimmt, so daß sich der sensible turbulente Wärmefluß zu $0.88 W/m^2$ und der sensible Wellenwärmefluß zu $-1.46 W/m^2$ ergibt. Wie erwartet, sind beide Transporte aufgrund der stark stabilen Schichtung sehr klein, wobei der Wellentransport gegen den Gradienten gerichtet ist. Die entgegengesetzte Richtung von Wellen- und turbulentem Transport wurde bereits aus der Analyse des Kospektrums (vgl. Abschnitt 4.1.1) ermittelt. Die Beträge der Feuchteflüsse sind in der kalten polaren Atmosphäre wie erwartet noch kleiner. Der turbulente kinematische Fluß beträgt $-0.11 \cdot 10^{-3} mhPa/s$ und der kinematische Wellenfluß $0.3 \cdot 10^{-3} mhPa/s$, so daß sich der latente turbulente Wärmefluß zu $0.23 W/m^2$ und der latente Wellenwärmefluß zu $-0.62 W/m^2$ ergibt. Die turbulente Schubspannungsgeschwindigkeit wurde zu $0.015 m/s$, die Wellenschubspannungsgeschwindigkeit zu $0.02 m/s$

bestimmt. Somit sind die vertikalen Transporte von Impuls, sensibler und latenter Wärme sowohl durch die turbulenten Fluktuationen als auch durch die Wellenbewegungen für dieses Meßbeispiel betragsmäßig sehr klein, aber entgegengesetzt gerichtet, wobei die Wellentransporte betragsmäßig etwas größer sind.

4.4.3. Conditional Sampling

Die im vorigen Abschnitt vorgestellte Methode des Filterns kann nur dann zur Bestimmung des Energieaustausches auf verschiedenen Skalen angewandt werden, wenn die turbulenten Fluktuationen und die Bewegungen auf größeren Skalen spektral separiert werden können. Dies ist jedoch nicht immer möglich. Beispiele für solche meteorologischen Ereignisse sind Wellen in höheren Schichten der Atmosphäre oder die Ausbildung kohärenter Strukturen in Waldbeständen. Für diese Bedingungen muß die Trennung der kleinskaligen und der größerskaligen Bewegungen im Zeitraum erfolgen. Deshalb entwickelten Finnigan et al. (1984) (s.a. Finnigan, 1988) eine Methode zur Separation der wellenförmigen und der turbulenten Bewegungen, die prinzipiell der Methode des „Conditional sampling“ (Desjardins, 1977; s.a. Collineau und Brunet, 1993) entspricht.

Grundlage der Methode ist wiederum die Zerlegung (4.10). Der Wellenanteil (bzw. der größerskalige Anteil) f'' wird wie folgt bestimmt:

$$f'' = \langle f - \bar{f} \rangle = \langle f^* \rangle \quad (4.15)$$

mit

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(t + t_n) \quad (4.16)$$

Die durch Gleichung (4.16) definierte Operation ist das eigentliche „Conditional sampling“, d.h. es wird die mittlere Struktur der charakteristischen Ereignisse auf den großen Skalen bestimmt. Dabei bezeichne N die Zahl der detektierten Ereignisse, t_n den jeweiligen Detektionszeitpunkt, t die Zeit mit $t \in [0, t_{int}]$ und t_{int} die mittlere Periode zwischen den charakteristischen Ereignisse. Des weiteren wird $\langle f \rangle = 0$ angenommen, d.h. die kleinskaligen Fluktuationen sind nicht mit der größerskaligen Bewegung f'' korreliert. Bei Finnigan et al. (1984) wird der Operator (4.16) als Phasenmittelungsoperator eingeführt, wobei angenommen wird, daß die Wellen über die gesamte Zeitserie auftreten. Demgemäß treten dann $f(t + n\tau)$ als Summanden auf mit τ als Periode eines Referenzoszillators. Im folgenden wird Gleichung (4.16) für die Bestimmung der mittleren Wellenstruktur angewandt, d.h. Zeitabschnitte ohne Wellenaktivität gehen nicht direkt in die Berechnung der mittleren Struktur ein.

Die Methode des „Conditional samplings“ in der hier angewandten Form benutzt die Wavelettransformation für die Bestimmung der charakteristischen Zeitskalen, die Detektion der Ereignisse (Bestimmung der Zeitpunkte t_n und der Anzahl der Ereignisse) sowie der mittleren Perioden zwischen den Ereignissen t_{int} (vgl. Collineau und Brunet, 1993). Nach der Bestimmung der charakteristischen Skala a_{max} , gekennzeichnet durch das Maximum im Energiespektrum, werden die Waveletkoeffizienten $T(a_{max}, b)$ zur Detektion der charakteristischen Ereignisse benutzt. Werden zur Detektion Wavelets zweiter Ordnung, z.B. das Mexikanische-Hut-Wavelet, verwendet, so weist die Detektionsfunktion $T(a_{max}, b)$ beim Auftreten von charakteristischen Ereignissen („Sprünge“) einen Nulldurchgang auf, während die Detektionsfunktion bei Verwendung von Wavelets erster Ordnung, z.B. des Haar-Wavelets, ein Maximum aufweist. Somit

erfordert eine Detektion mit Wavelets zweiter Ordnung nur die Bestimmung der Nulldurchgänge der Detektionsfunktion $T(a_{max}, b)$ bei einem festgelegten Vorzeichenwechsel. Bei der Detektion mit Wavelets erster Ordnung hingegen ist zusätzlich eine Schwellwertdefinition notwendig. In diesem Fall ist allerdings die bessere zeitliche Lokalisierung z.B. des Haar-Wavelets von Vorteil. Für die Bestimmung des Energieaustausches durch die Ereignisse auf größeren Skalen, in unserem Fall des Wellentransportes, wurden keine signifikanten Unterschiede bei Verwendung der beiden Wavelets (Mexikanischer-Hut- und Haar-Wavelet) festgestellt.

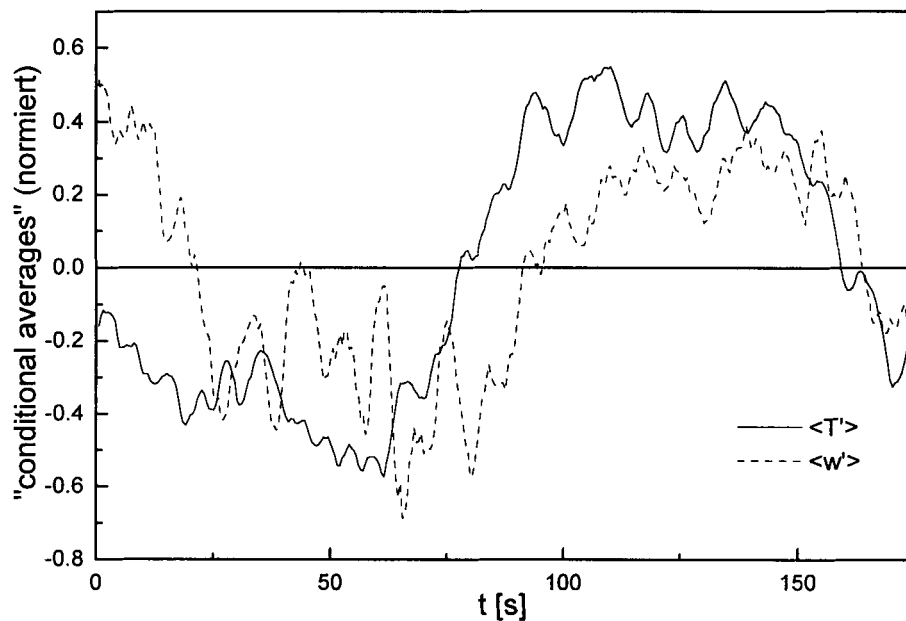


Abbildung 34: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35 bis 22:05 Uhr, mittlere Wellenstruktur für die Temperatur und den Vertikalwind, bestimmt durch „Conditional sampling“, Normierung mit den entsprechenden Standardabweichungen.

Bei Anwendung der Operation (4.16) und der Beziehung (4.15) ergibt sich für das bedingt gemittelte Kreuzprodukt zweier Größen f^* und g^* (vgl. z.B. Collineau und Brunet, 1993)

$$\langle f^* g^* \rangle = \langle f^* \rangle \langle g^* \rangle + \langle f' g' \rangle = f'' g'' + \langle f' g' \rangle \quad (4.17)$$

und nach Mittelung auf der Skala des Detektionsfensters der Länge t_{int}

$$\overline{\langle f^* g^* \rangle} = \overline{f'' g''} + \overline{\langle f' g' \rangle} \quad (4.18)$$

Wenn die Länge des Detektionsfensters die mittlere Periode der (großskaligen) Wellenbewegung hinreichend gut repräsentiert, d.h. wenn die detektierten Strukturen für die Strömung charakteristisch sind, so ist der Term $\langle f^* g^* \rangle$ der gesamte Fluß. Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (4.18), $\overline{f'' g''}$, stellt den Fluß durch die Strukturen auf größeren Skalen (Wellen) und der zweite Term, $\overline{\langle f' g' \rangle}$, den turbulenten Fluß dar.

Die Abbildung 34 zeigt die bedingt gemittelten Werte der Temperatur und des Vertikalwindes für die Messungen vom 1.2.1994, 21:35 bis 22:05 Uhr in 4m Höhe (Fall 1). Bei der Berechnung

des Energiespektrums mit dem Mexikanischen-Hut-Wavelet lag das Maximum für die Wellenstrukturen bei $a_{max} = 28.5s$. Insgesamt wurden für dieses Beispiel 9 Ereignisse mit einer mittlere Periode zwischen den Ereignissen von $174s$ detektiert. Deutlich tritt die mittlere Welle sowohl in der Temperatur als auch im Vertikalwind hervor ebenso wie die Phasenverschiebung zwischen den beiden Größen.

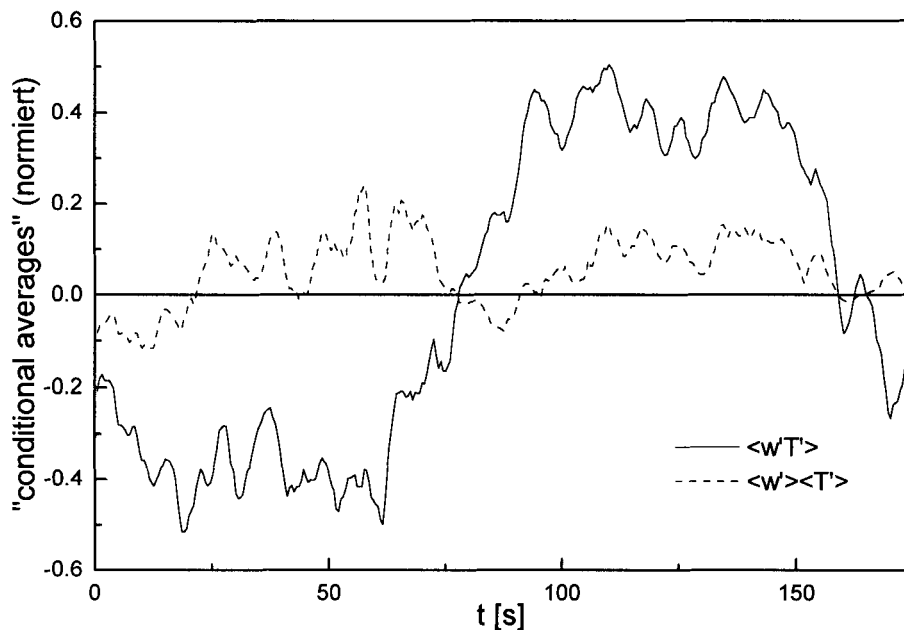


Abbildung 35: FINTUREX, 1.2.1994, 21:35 bis 22:05 Uhr, bedingt gemittelte Kreuzprodukte der Temperatur und des Vertikalwindes, bestimmt durch „Conditional sampling“, Normierung mit den entsprechenden Standardabweichungen.

In der Abbildung 35 sind die Kreuzprodukte $\langle w^*T^* \rangle$ und $\langle w^* \rangle \langle T^* \rangle = w''T''$ dargestellt. Nach Mittelung über die mittlere Periode von $174s$ ergibt sich der kinematische Wellenfluß zu $0.94 \cdot 10^{-3} mK/s$. Da der gesamte Fluß $\langle w^*T^* \rangle$ mit $-2.4 \cdot 10^{-10} mK/s$ nahezu Null ist, folgt aus Gleichung (4.18) der kinematische turbulente Fluß zu $-0.94 \cdot 10^{-3} mK/s$, d.h. der turbulente und der Wellenwärmefluß sind betragsmäßig gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. Der sensible turbulente Wärmefluß beträgt $1.25 W/m^2$ und der sensible Wellenwärmefluß $-1.25 W/m^2$. Diese Werte stimmen im Betrag und in der Richtung gut mit den Werten überein, die durch die Methode des Filterns bestimmt wurden, wobei der turbulente Fluß größer als bei der Methode des Filterns ist. Die latenten Wärmeflüsse wurden zu $-0.54 W/m^2$ für den Wellenanteil und zu $0.54 W/m^2$ für den turbulenten Anteil berechnet und stimmen ebenfalls in Betrag und Richtung mit den latenten Wärmeflüssen überein, die durch die Methode des Filterns bestimmt wurden. Die Unterschiede der Ergebnisse der zwei Methoden zur Flußbestimmung sind möglicherweise dadurch begründet, daß die Länge des Detektionsfensters aufgrund des unregelmäßigen Auftretens der Welle die mittlere Periode der Wellenbewegung nicht hinreichend gut repräsentiert. Somit würde der Term $\langle f^*g^* \rangle$ nicht den gesamten Fluß darstellen und die Bestimmung des turbulenten Flusses $\langle f'g' \rangle$ als Restglied fehlerbehaftet sein. Auf diese Weise könnten insbesondere die Unterschiede bei der Bestimmung der turbulenten Flüsse zwischen den beiden Methoden erklärt werden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß für unsere Messungen sowohl die Methode des Filterns als auch die Methode des „Conditional sampling“ zur Bestimmung des Energieaustausches auf verschiedenen Skalen gut geeignet sind und qualitativ und quantitativ gleiche Ergebnisse liefern. Weiterhin wurde erläutert, in welcher Weise die Eigenschaften der Wavelettransformation, insbesondere die vom Wavelet abhängige gute Frequenz- oder Zeitauflösung, bei der Anwendung der beiden Methoden ausgenutzt werden. Während die Methode des Filterns nur dann zur Bestimmung des Energieaustausches angewandt werden kann, wenn die turbulenten Fluktuationen und die Bewegungen auf größeren Skalen spektral separiert werden können, erfolgt beim „Conditional sampling“ die Trennung der kleinskaligen und der gröberskaligen Bewegungen im Zeitraum. Für die im folgenden Abschnitt beschriebenen Untersuchungen zur Energiebilanz der Oberfläche für ausgewählte Meßfälle wird aufgrund der einfacheren rechentechnischen Umsetzung die Methode des Filterns angewandt.

4.5. Energiebilanz

Die im Abschnitt 4.4 berechneten Wärme- und Feuchteflüsse gehen in die Energiebilanzgleichung der Oberfläche, in unseren Untersuchungen der Schneeoberfläche ein:

$$Q_0 + H_0 + E_0 + B_0 + R = 0 \quad (4.19)$$

mit Q als Strahlungsbilanz (Bilanz der kurzwelligen und langwelligen Strahlungsflüsse), H und E als Ströme sensibler und latenter Wärme (durch turbulente und Wellenbewegungen), B_0 als Bodenwärmestrom. Der Index 0 kennzeichnet die Oberflächenwerte der betrachteten Größen. Mit R wird das Restglied bezeichnet, welches die nicht meßbaren Anteile z.B. durch Energiespeicherung und Advektion enthält.

Während der Meßkampagne FINTUREX wurden alle Terme der Strahlungsbilanz gemessen. Für die Berechnung der Flüsse sensibler und latenter Wärme wird aufgrund der einfacheren rechentechnischen Umsetzung die Methode des Filterns aus den im Abschnitt 4.4 vorgestellten Methoden ausgewählt. Grundlage der Berechnung der Oberflächenwerte der Wärmeflüsse sind die Turbulenzmessungen in der untersten Meßhöhe von 1.7m Höhe. Zur Überprüfung der Energiebilanz muß der Bodenwärmestrom B_0 an der Oberfläche des Schelfeises bestimmt werden. Dieser berechnet sich nach

$$B_0 = -\nu \left. \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (4.20)$$

und kann somit aus der Wärmeleitfähigkeit ν und dem Temperaturgradienten an der Oberfläche bestimmt werden. Für die Meßkampagne FINTUREX liegen jedoch nur Messungen der Oberflächentemperatur vor. Die Zeitserie der Oberflächentemperatur ermöglicht aber die Lösung der Wärmeleitungsgleichung im Erdboden mittels der Laplace-Transformation und damit die Bestimmung des Temperaturgradienten in jeder beliebigen Tiefe (vgl. Anderson, 1997). Dieses Verfahren wurde zur Berechnung des Temperaturgradienten an der Erdoberfläche angewandt. Unter der Annahme $\nu = 0.4 \text{ W/mK}$ (nach Belitz, 1989) wurden anschließend über Gleichung (4.20) die Bodenwärmeströme berechnet.

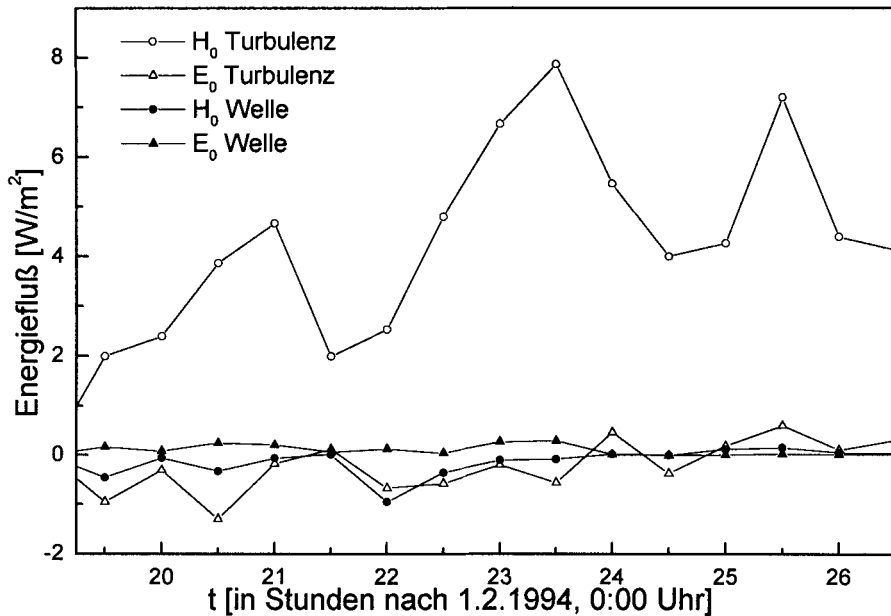


Abbildung 36: FINTUREX, 1.2.1994, 19:30 Uhr bis 2.2.1994, 3:00 Uhr, Oberflächenwerte der turbulenten und Wellenflüsse sensibler (H) und latenter (E) Wärme.

Die Abbildung 36 zeigt exemplarisch für einen Zeitraum von 7 Stunden die turbulenten und Wellenflüsse sensibler und latenter Wärme. In der stark stabilen Schichtung, die in diesem Zeitraum vorlag, sind alle Flüsse betragsmäßig sehr klein. Die turbulenten Flüsse sind durchweg zur Erdoberfläche hin gerichtet und liegen zwischen 2 und 8 W/m^2 für den sensiblen und zwischen 0 und 2 W/m^2 für den latenten Fluß. Die Wellenflüsse sind meist von der Erdoberfläche weg und damit gegen den Gradienten gerichtet und betragsmäßig kleiner als die turbulenten Flüsse, das Maximum des Betrages des sensiblen Wellenwärmeflusses liegt bei 2 W/m^2 .

Für den gleichen Zeitraum zeigt die Abbildung 37 die Komponenten der Energiebilanzgleichung (4.19). Unter der Bedingung der stark stabilen Schichtung, die in diesem Zeitraum vorliegt, wird die Strahlungsbilanz Q_0 nicht durch $H_0 + E_0 + B_0$ ausgeglichen. Ein Vergleich der Energiebilanzen unseres Meßzeitraumes mit der Analyse der Energiebilanz ausgewählter Tage durch Belitz (1989) bestätigt die Nichtbilanzierung der Strahlungsbilanz durch $H_0 + E_0 + B_0$ während intensiver Abkühlungsperioden, die mit südlichen Strömungen und der Entwicklung einer stark stabil geschichteten Grenzschicht verbunden sind.

Im betrachteten Meßzeitraum erreicht der Bodenwärmestrom relativ große Werte von bis zu 25 W/m^2 . Diese großen Werte werden durch die Untersuchungen der Energiebilanz während starker Abkühlungsperioden von Belitz (1989) bestätigt. Trotz dieser großen Werte des Bodenwärmestromes wird die Strahlungsbilanz nicht durch $H_0 + E_0 + B_0$ bilanziert, und das zum Ausgleich der Energiebilanz (4.19) notwendige Restglied R liegt für unsere Beispiele zwischen 10 und 45 W/m^2 .

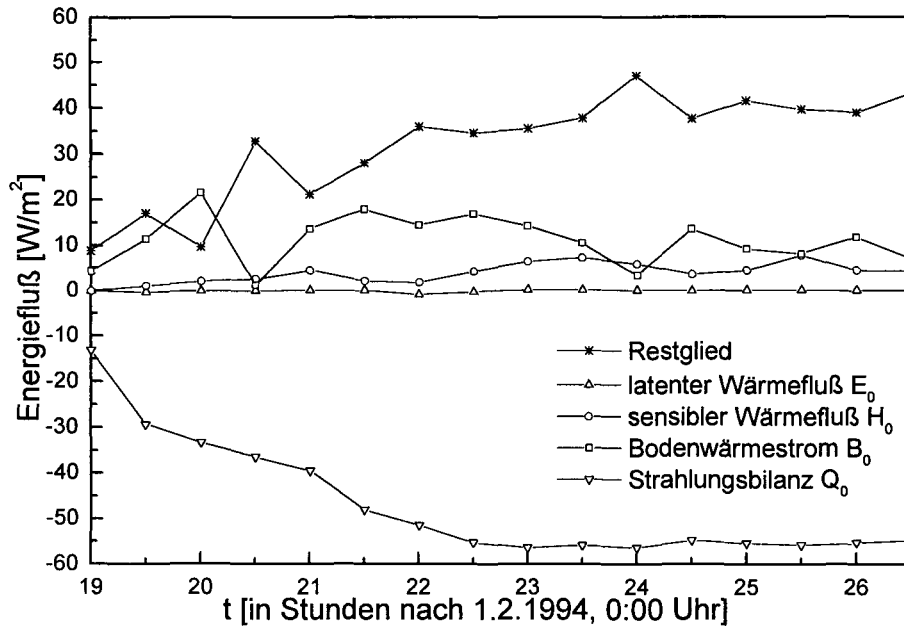


Abbildung 37: FINTUREX, 1.2.1994, 19:30 Uhr bis 2.2.1994, 3:00 Uhr, Komponenten der Energiebilanz der Oberfläche.

Die Nichtschließung der Energiebilanz, die in etlichen Grenzschichtexperimenten festgestellt wurde, ist seit einigen Jahren Gegenstand intensiver Forschungen. Neben Meßfehlern wurden insbesondere Abweichungen von den Voraussetzungen der Quasihomogenität und damit der Quasiadvektionsfreiheit als Ursache für die nicht geschlossene Energiebilanz bestimmt. Unsere Untersuchungen der Energiebilanz wurden hingegen für Messungen an einem idealen Meßort, der Neumayer-Station, durchgeführt, für den die Bedingung der Quasihomogenität erfüllt ist. Trotzdem weisen die ersten exemplarischen Untersuchungen darauf hin, daß auch an diesem Meßort die Energiebilanz bei stark stabiler Schichtung nicht geschlossen ist. Für eine abschließende Beurteilung müssen weitere Meßzeiträume mit leicht bis stark stabiler Schichtung ausgewertet werden.

5. Wechselwirkung Welle/Turbulenz

Wie im Abschnitt 4.2 bereits erwähnt, findet zwischen den wellenförmigen Bewegungen und den turbulenten Fluktuationen ein Energieaustausch statt. Erste Hinweise auf diese Wechselwirkung gaben die im Abschnitt 4.1.1 diskutierten Phasenbeziehungen zwischen den Fluktuationen des Vertikalwindes und der Temperatur (vgl. Abbildung 18). Im folgenden soll dies von diversen Gruppen (z.B. Finnigan (1984)) beobachtete und oft diskutiert Phänomen näher untersucht werden.

5.1. Methode der Schwerpunktuntersuchung

In der bisherigen Diskussion ist deutlich geworden, daß bei stark stabiler Schichtung die Schwerewellen für die verschiedenen Austauschprozesse zunehmend an Bedeutung gewinnen. Da durch das „brechen“ der Wellen dem turbulenten System Energie zugeführt wird, können beide System nicht getrennt voneinander betrachtet werden, vielmehr müssen sie in energetischer Hinsicht als ein System betrachtet werden. Dies ist bei einer individuelle Betrachtung beider Komponenten (nach vorheriger Filterung) zu berücksichtigen.

Zur Untersuchung dieser Wechselwirkung scheinen die lokalen Waveletspektren ideal geeignet zu sein. Sie eröffnen die Möglichkeit, jedem Punkt der Zeitreihe eindeutig ein Energiespektrum zuzuordnen. Um nun einen eventuellen Energietransport sichtbar zu machen, wird im folgenden die Skala a_{SP} betrachtet, bei der der Schwerpunkt (das erste Moment) des lokalen Waveletspektrums zu liegen kommt. Die Tatsache, daß die Schwerewellen nicht ständig vorhanden sind, sondern mehr oder weniger intermittent auftreten, legt die Vermutung nahe, daß der Schwerpunkt a_{SP} der lokalen Energiespektren nicht wie im Falle isotroper homogener Turbulenz konstant bleibt, sondern sich bei Auftreten von Scherewellen in Richtung größerer Skalen a verschiebt.

Im folgenden wird also der Schwerpunkt der in Gleichung (4.1) definierten lokalen Spektren

$$a_{SP}(b_0) = \frac{\int a \cdot E(a, b_0) da}{\int_a E(a, b_0) da} \quad (5.1)$$

hinsichtlich dessen zeitlicher Entwicklung (b_0 entspricht der Zeit) untersucht. In der Abbildung 38 ist die hier betrachtete halbstündige Beispielzeitserie der Temperaturfluktuationen (1.2.1994, 21:10-21:40 Uhr) dargestellt. Daß in diesem Zeitraum eine Schwerewelle mit einer Periode von etwa 150s vorhanden ist, erkennt man am besten in der ebenfalls dargestellten WT.

Das zu dieser Zeitreihe gehörige zeitliche Verhalten des nach (5.1) berechneten Schwerpunktes ist in der Abbildung 39a) dargestellt. Auffallend in dieser Abbildung ist das wiederholte Vorkommen von sägezahnähnlichen Strukturen: Ein steiler Anstieg des Schwerpunktes zu großen Skalen hin, gefolgt von einem langsamen Abfall mit der Zeit. Von besonderem Interesse ist dabei die Tatsache, daß die abfallenden Flanken alle in etwa die selbe Steigung aufweisen. Zwar ist

dies in Teilbild a) bereits mit bloßem Auge zu erkennen, daß auch eine statistische Relevanz vorliegt, zeigt das Histogramm in Teilbild b). Es stellt die Häufigkeit des Vorkommens der verschiedenen Steigungen da_{SP}/dt aus Teilbild a) dar. Festzustellen ist nicht nur eine deutliche Asymmetrie der Verteilung, sondern auch die Übereinstimmung der dem Peak entsprechenden Steigung von $-0,466$ mit den rechten Flanken aus Teilbild a), wie die eingezeichneten Geraden zeigen.

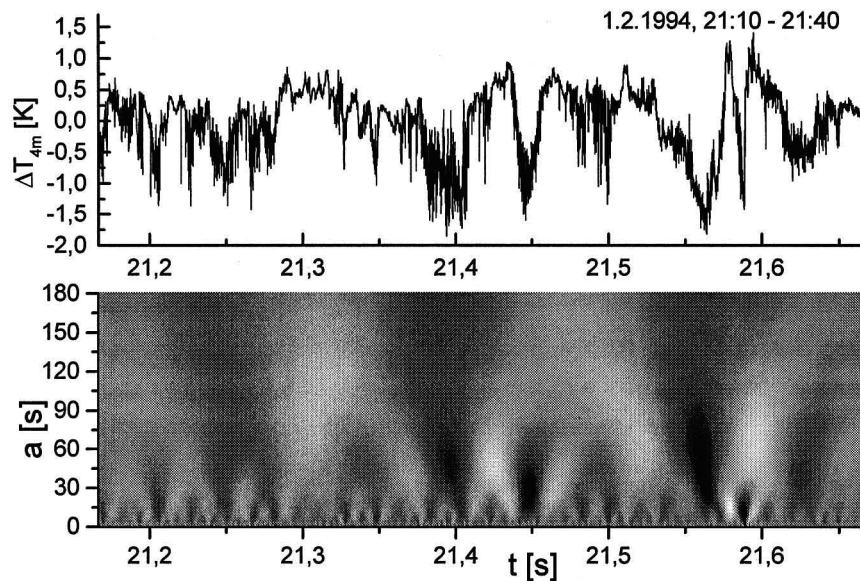


Abbildung 38: Zeitserie der Temperaturfluktuationen (ΔT vs. t vom 1.2.1994, 21:10-21:40 Uhr) und deren Waveletkoeffizienten (Mexikanischer Hut, $p = 1$).

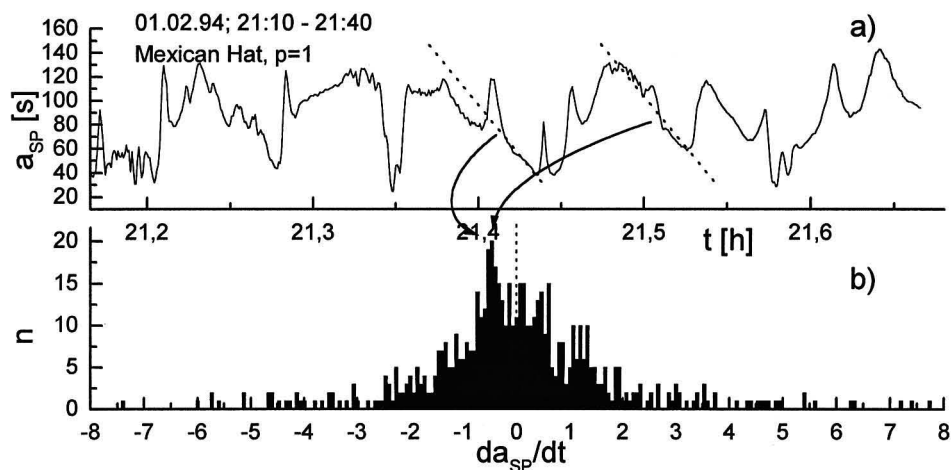


Abbildung 39: In a) ist die zeitliche Entwicklung des Schwerpunktes der lokalen Spektren $a_{SP}(t)$ dargestellt und in b) das daraus berechnete Histogramm der Steigungen da_{SP}/dt . Die in Teilbild a) gezeigten punktierten Geraden entsprechen dem Maximum im Histogramm.

Die Analyse weiterer Zeitreihen die unter ähnlichen Bedingungen aufgenommen wurden zeigen das selbe Phänomen, wobei sich der Betrag der Steigung da_{SP}/dt der rechten Flanken als in etwa

proportional zur vorherrschenden horizontalen Windgeschwindigkeit erwies.

Analoge Untersuchung von Turbulenzdaten die im Windkanal gewonnen wurden (vgl. Abbildung 40), zeigen hingegen keinerlei Asymmetrie in den Verteilungen der Steigungen da_{SP}/dt wie es in der Abbildung 39b) der Fall war. Zwar handelt es sich auch hier um intermittente turbulente Zeitreihen, jedoch können keine langwelligen Oszillationen analog der Schwerewellen identifiziert werden (was bei diesen Messungen auch nicht zu erwarten ist). Interessanterweise ist auch hier eine erhöhte Wahrscheinlichkeit bei Werten $da_{SP}/dt \approx 0.3$ zu verzeichnen. Ob hieraus eine charakteristische Geschwindigkeit bzw. eine Energietransferrate bestimmt werden kann, müssen weitere Untersuchungen zeigen.

Eines ist in diesem Abschnitt jedoch deutlich geworden: Die hier vorgestellte Methode der Schwerpunktanalyse der lokalen Waveletspektren bietet bisher nicht dagewesene Möglichkeiten sowohl zur qualitativen wie auch zur quantitativen Analyse komplexer Zeitreihen. Sie ermöglicht die Sichtbarmachung von dynamischen Prozessen (siehe Diskussion in nächstem Abschnitt), wie es mit den üblichen Methoden der Zeitreihenanalyse bisher nicht möglich war. Eine Interpretation der hier dargestellten Ergebnisse wird im nun folgenden Abschnitt gegeben.

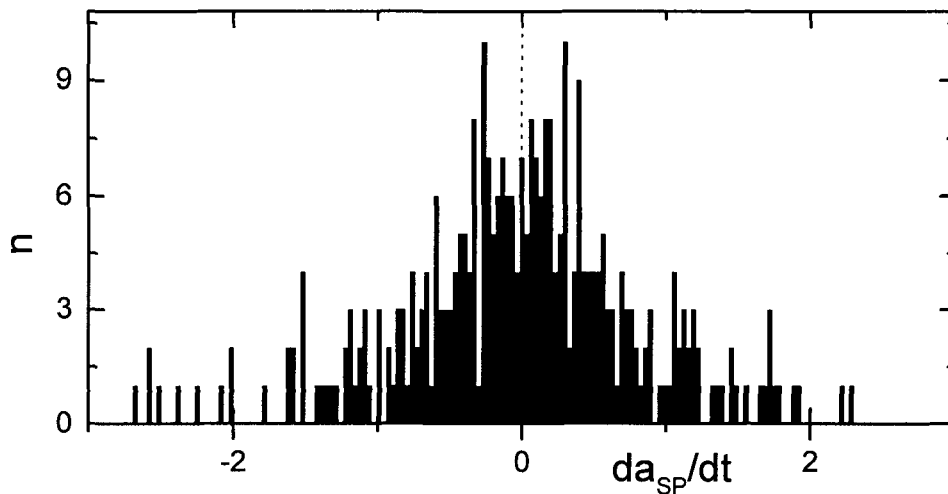


Abbildung 40: Histogramm der Steigungen da_{SP}/dt einer Zeitreihe aus dem Windkanal ($y = 0$). Im Gegensatz zu den meteorologischen Daten ist hier keine Asymmetrie zu beobachten.

5.2. Energietransfer Welle/Turbulenz

Eine Erklärung für die im letzten Abschnitt beschriebenen Beobachtungen an den meteorologischen Daten könnte also folgendermaßen lauten: Zwei zunächst a priori entkoppelte Systeme – Schwerewelle und Turbulenz – treten durch das „Brechen“ der Schwerewelle und einem damit verbundenen Energieübertrag vom System Welle in das System Turbulenz in Wechselwirkung (steiler Anstieg an linker Flanken der Sägezahnähnlichen Strukturen). Nun setzt der Energietransfer innerhalb des turbulenten Systems von großen Skalen zu kleineren Skalen hin, entsprechend dem Richardson'schen Kaskadenmodell (Richardson 1922) ein (flachere rechte Flanken der Sägezahnähnlichen Strukturen).

Der Grund für die Abwesenheit einer Asymmetrie in den Windkanaldaten dürfte die gut verwirklichte Homogenität bzw. Isotropie der Turbulenz in diesem System sein: zu jeder Zeit an jedem Ort sind sowohl großskalige- als auch kleinskalige Ereignisse vorhanden. Im Gegensatz dazu herrscht im natürlichen System Antarktis weder Homogenität, noch Isotropie: die Schwerewellen sind nicht immer vorhanden, und das Brechen der Wellen tritt nur vereinzelt an bestimmten Orten zu bestimmten Zeiten auf. Im Gegensatz zum Windkanal, wo man eher von einem geschlossenen System sprechen kann, handelt es sich bei der Turbulenz in der Antarktis um ein offenes System, das von dem System Welle intermittent angetrieben wird.

5.3. Energieverteilung Welle/Turbulenz

Wie in den letzten Abschnitten deutlich wurde, handelt es sich bei den Zeitreihen die unter den Bedingungen der stark stabiler Schichtung gewonnen wurden, um eine Überlagerung von wellenförmigen Strukturen und der Turbulenz versetzt mit intermittenten Ausbrüchen. Auf Grund der Komplexität dieser Zeitreihen ist es wünschenswert, eine grobe Einordnung der einzelnen Zeitreihen an Hand derer Charakteristika vorzunehmen.

In der Abbildung 42 sind die Waveletspektren der in Abbildung 41 gezeigten Zeitreihen unterschiedlicher Charakteristika dargestellt: von stark entwickelter Turbulenz ohne nennenswerte Wellen in Teilbild a) über Turbulenz mit starken Wellen in b), dann Wellen mit kaum ausgeprägter Turbulenz in c) und schließlich weder Welle noch Turbulenz in d).

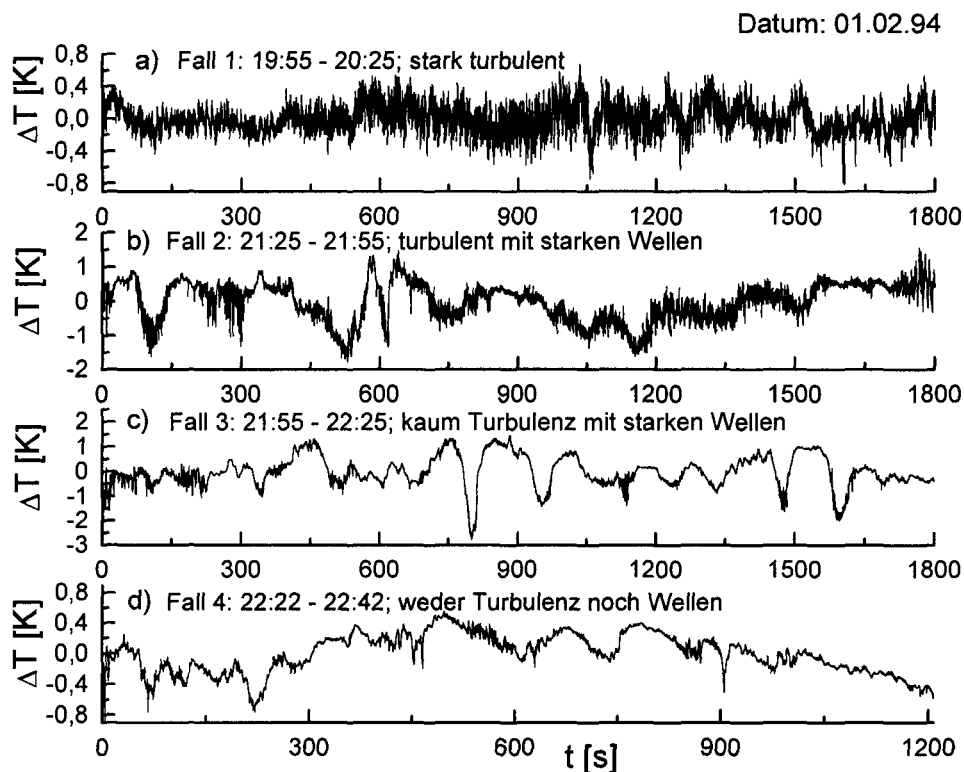


Abbildung 41: Zeitserien mit unterschiedlichen Charakteristika: a) gut entwickelte Turbulenz, b) turbulent mit Wellen, c) kaum turbulent mit starken Wellen und d) weder Turbulenz noch Wellen

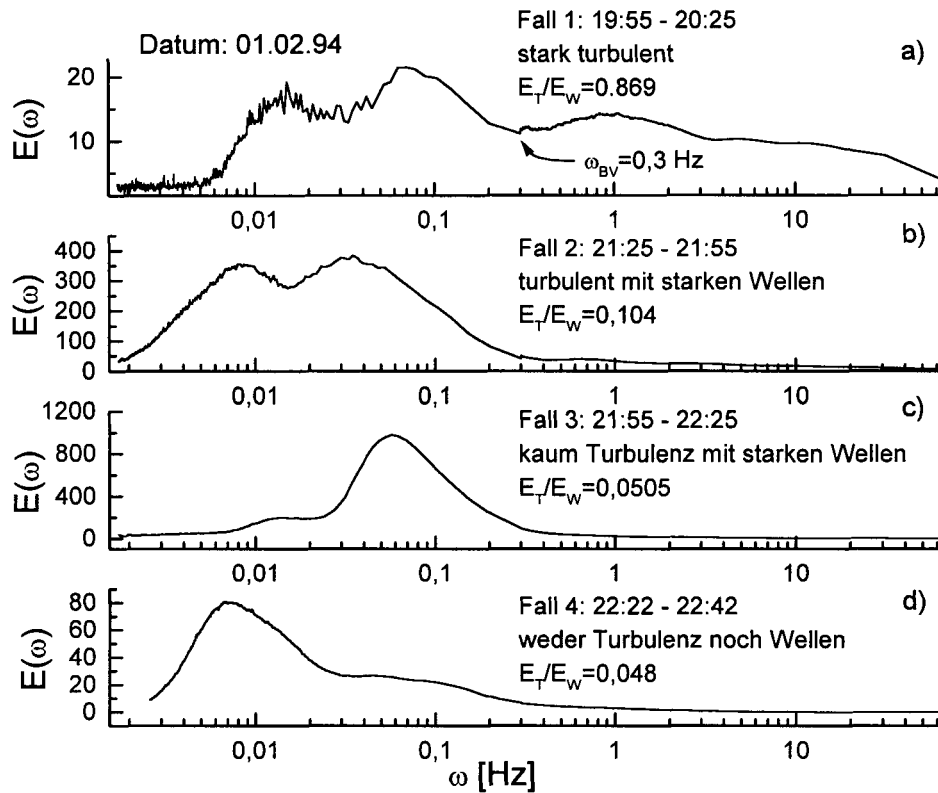


Abbildung 42: Waveletspektren von Zeitserien mit unterschiedlichen Charakteristika: a) gut entwickelte Turbulenz, b) turbulent mit Wellen, c) kaum turbulent mit starken Wellen und d) weder Turbulenz noch Wellen (Mexikanischer Hut, $p = 1$).

Dank der gut ausgeprägten spektralen Lücke bei der Brunt-Väisälä Frequenz $\omega_{BV} \approx 0.3$ Hz (vgl. Teilbild a) der Abbildung 42) kann hier der Wellenanteil als der Bereich der Spektren unterhalb von ω_{BV} , und der turbulente Anteil für Werte oberhalb von ω_{BV} identifiziert werden. Als ein Maß für die Ausprägung der Welle bzw. der Turbulenz wurde jeweils der Energieinhalt der Spektren oberhalb (turbulenter Anteil E_T) und unterhalb von ω_{BV} (Wellenanteil E_W) mittels Gleichung (2.4) berechnet und deren Verhältnis E_T/E_W bestimmt. Das Ergebnis dieser Untersuchungen ist in der Tabelle II dargestellt.

Tabelle II: Typifizierung der Zeitreihen anhand der Energieinhalte der Waveletspektren unterhalb (E_W) und oberhalb (E_T) der Brunt-Väisälä Frequenz ω_{BV} .

Form der Oszillationen	E_T/E_W
gut entwickelte Turbulenz	$E_T/E_W > 0.5$
turbulent mit starken Wellen	$0.075 < E_T/E_W < 0.5$
kaum turbulent mit starken Wellen	$E_T/E_W < 0.075$
Weder Turbulenz noch Wellen	Beliebig

6. Möglichkeiten der Parametrisierung

Die auf den Ähnlichkeitstheorien basierenden Parametrisierungen, die in fast allen Atmosphärenmodellen zur Berechnung der turbulenten Flüsse verwendet werden, sind nicht uneingeschränkt anwendbar. Gerade in Klimamodellen zeigt sich, daß die Parametrisierungen für stabile Schichtungen in polaren Breiten erhebliche Mängel aufweisen. Ziel unserer Untersuchungen war es also, neue Parametrisierungen für die Klimamodellierung unter den Bedingungen schwach bis stark stabiler Schichtungen zu finden.

6.1. Energieverteilung Welle/Turbulenz

Im Laufe der Bearbeitung hat sich gezeigt, daß mit zunehmender Stabilität der Schichtung die Intensität der Schwerewellen (zumindest tendenziell) zunimmt, der turbulente Austausch hingegen abgeschwächt wird (vgl. Abschnitt 5.3). Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Stabilitätsparameter und den Energieanteilen von Welle bzw. Turbulenz konnte nicht festgestellt werden. Dies ist nicht zuletzt auf die außerordentliche Komplexität der Wechselwirkungsprozesse zurückzuführen. Das System „Schwerewelle“ kann nicht vom System „Turbulenz“ separiert werden, da brechende Schwerewellen mit einem Energietransport zu kleineren Skalen hin verbunden sind (vgl. Abschnitt 5.2).

6.2. Intermittenz

Es hat sich gezeigt, daß die intermittenten Turbulenzausbrüche einen beträchtlichen Anteil der Energie beinhalten, und somit für die Parametrisierung von entscheidender Bedeutung sein dürften. Um deren Beitrag in einer Parametrisierung der Austauschprozesse berücksichtigen zu können, wäre die Definition eines *globalen* Intermittenzfaktors notwendig.

In Abschnitt 4.3 wurden verschiedene Ansätze zur Beschreibung bzw. Quantifizierung der Intermittenz vorgestellt. So können mittels der WT zwar einzelne lokale intermittente Ereignisse hervorragend charakterisiert werden, jedoch bietet die Methode nach Farge keinerlei Möglichkeit, eine Aussage hinsichtlich des Intermittenzgrades einer ausgedehnten Zeitreihe zu machen. Im Gegensatz dazu stellt die Methode nach Castaing zwar eine globale Analyse dar, jedoch bezieht sie sich lediglich auf eine einzelne Längenskala. Auch hier ist also keine globale Aussage möglich.

Schließlich wurde der Versuch unternommen über die Varianz der lokalen Varianzen einen globalen Intermittenzfaktor zu definieren. So gelang es, auf diese Weise den einzelnen Zeitreihen eindeutig ein Maß zuzuordnen, das auch die Dynamik der Zeitreihe gut widerspiegelt. Für einfache turbulente Zeitreihen kann diese Methode durchaus anwendbar sein, bei den Analysen der meteorologischen Daten wurde jedoch deutlich, daß zur Definition eines globalen Intermittenzfaktors die Separation der einzelnen Prozesse (Welle/Turbulenz) notwendig ist. Wie die Ausführungen in Abschnitt 5 verdeutlichen, reicht es jedoch nicht aus, eine Filterung der Zeitreihe durchzuführen, vielmehr ist auch die Wechselwirkung zwischen Schwerewelle und Turbulenz zu berücksichtigen.

Trotz verschiedener Ansätze ist es uns somit nicht gelungen, einen für unsere Daten adäquaten globalen Intermittenzfaktor zu finden. Insbesondere im Falle stark stabiler Schichtung dürfte sich die Definition eines solchen Maßes als äußerst schwierig erweisen, zumal die Wechselwirkung zwischen Schwerewellen und Turbulenz auch hier die Verhältnisse zusätzlich komplizieren.

6.3. Energiebilanz

Wie in Abschnitt 4.5 beschrieben, sind die Gründe der Nichtschließung der Energiebilanz noch ungeklärt. Weitere Untersuchungen hinsichtlich der Wärmespeicherung der Unterlage (Schnee/Eis) sollten folgen, da die Wärmespeicherung ein nicht zu vernachlässigendes Glied in der Energiebilanz sein dürfte.

Auch erwies sich die Bestimmung eines charakteristischen Zeitmaßstabes für die Bestimmung der Flüsse mittels der Methode des Conditional sampling als außerordentlich schwierig, da zum einen die Schwerewellen ein relativ breitbandiges Spektrum aufweisen, zum anderen die vorherrschenden Prozesse eher stochastischer Natur sind. Zur Bestimmung der Flüsse wird deshalb er eine Zeitreihenfilterung mittels Wavelet-Analyse und die anschließende Flußbestimmung aus den rücktransformierten Zeitreihen empfohlen (vgl. Abschnitt 4.5).

Von einer Parametrisierung im klassischen Sinne mußte Abstand genommen werden.

7. **Schlußfolgerungen**

Auf Grund möglicher Klimaveränderungen hat in den letzten 10 Jahren die Untersuchung des turbulenten Energieaustausches von fühlbarer und latenter Wärme zwischen der Atmosphäre und ausgedehnten Eis- bzw. Schneeoberflächen besondere Aktualität erlangt. Da unter den bis zu 30% der Zeit vorherrschenden Bedingungen der mäßig bis stark stabilen Schichtung komplizierte Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und Schwerewellen auftreten, versagen in diesen Fällen die üblichen Methoden zur Bestimmung turbulenter Flüsse.

Mit dem Ziel, für die Klimamodellierung neue Parametrisierungen der unter diesen Bedingungen vorherrschenden Austauschprozesse zu finden, wurden Zeitserien von meteorologischen Daten mittels der Wavelet-Transformation analysiert. Die untersuchten Daten wurden 1994 in der Antarktis während des FINTUREX Experimentes an der Neumayer-Station gesammelt. Aufgrund ihrer Komplexität (Überlagerung von Schwerewellen mit turbulenten Strukturen und intermittenten Ereignissen), ist die klassische Fourier-Transformation für deren Analyse nicht geeignet. Zwar liefert sie eine exakte Lokalisierung im Frequenzraum, dafür geht jedoch jegliche Information über lokalisierte Ereignisse (intermittente Turbulenzausbrüche) verloren. Im Gegensatz dazu erfüllt die Wavelet-Transformation auf Grund ihrer Lokalisierung sowohl im Zeit- als auch im Frequenzraum die Voraussetzungen zur detaillierten Analyse auch lokalisierter Ereignisse. Dank ihrer Invertierbarkeit besteht zudem die Möglichkeit der Daten-Filterung, so daß durch getrennte Rücktransformation der Turbulenz- und Wellenanteile, die durch sie bedingten Flüsse getrennt untersucht werden können.

Wie sich während der Bearbeitung jedoch herausstellte, erfüllten weder die uns zur Verfügung gestellten, noch kommerziell erhältliche Programme die Energieerhaltung auf allen Skalen; eine grundlegende Voraussetzung für obiges Analyseverfahren. Durch die Berücksichtigung eines erweiterten Parameterraumes konnte dies Problem jedoch behoben werden. Hierdurch dürfte ein Großteil der oft diskutierten Probleme hinsichtlich quantitativer Aussagen der Wavelet-Transformation gelöst sein.

Hinsichtlich der Wechselwirkung von Schwerewellen und Turbulenz gelang es den Autoren mittels des Schwerpunktverhaltens der lokalen Waveletspektren eine Methode zur direkten Sichtbarmachung des Energieübertrages von großen Skalen (Wellen) auf kleinere Skalen (Turbulenz) zu entwickeln. Hiermit wurde ein wichtiger Beitrag zum Verständnis der Wechselwirkung zwischen Schwerewelle und Turbulenz geleistet. Mittels dieser Methode sollte es möglich sein, die Wechselwirkung Welle-Turbulenz anhand einer mittleren Energietransferrate zu parametrisieren.

Zwar wurde auch der Versuch unternommen, die intermittenten Turbulenzausbrüche mittels eines einzelnen stabilitätsabhängigen Parameters zu beschreiben, doch die Komplexität der Wechselwirkungen und die Instationarität der Zeitreihen verhindern die Definition eines globalen Intermittenzfaktors. Von einer Parametrisierung der Austauschprozesse unter den Bedingungen der stark stabilen Schichtung im klassischen Sinne mußte somit Abstand genommen werden. Dessenungeachtet haben die Untersuchungen gezeigt, daß die Wavelet-Transformation ein hervorragendes Hilfsmittel zur qualitativen wie auch quantitativen Analyse solch komplexer Zeitreihen darstellt.

8. Danksagung

Die vorgelegte Untersuchung stellt die Ergebnisse einer zweieinhalbjährigen Arbeit im Rahmen des DFG-Projektes FO 226/2 dar. Das einjährige Teilprojekt FO 226/2-1 wurde von Frau Dr. Doerthe Handorf beim Deutschen Wetterdienst in Lindenberg bearbeitet. Bedingt durch die Berufung des Herrn Prof. Dr. Thomas Foken an die Universität Bayreuth war es notwendig einen neuen Mitarbeiter, Herrn Dr. Georg Heinz mit der Bearbeitung der Teilprojekte FO 226/2-2,3 zu betrauen.

Wir bedanken uns bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Förderung des Projektes und beim Deutschen Wetterdienst für die Möglichkeit der Durchführung des Teilprojektes FO 226/2-1 im Dezernat „Landoberflächenprozesse und Grenzschicht“ des Meteorologischen Observatoriums Lindenberg. Durch diese Unterstützung wurde die intensive Weiterführung der Bearbeitung des Datensatzes der FINTUREX-Kampagne gewährleistet.

Ein besonderes Dankeschön geht an die Arbeitsgruppe Numerische Mathematik der Universität Potsdam unter Leitung von Herrn Prof. P. Maaß. Die enge Kooperation mit der Arbeitsgruppe, welche Fachkonsultationen zu mathematischen Problemen der Wavelettransformation und deren numerischer Realisierung und die Bereitstellung von Programmen umfaßte, war eine Grundlage dafür, daß vor allem in der Anfangsphase des Projektes relativ schnell erste Ergebnisse erzielt werden konnten.

Weiterhin möchten wir uns bei Herrn Dr. J. King und Herrn Dr. P. Anderson vom British Antarctic Survey für die gute Zusammenarbeit und die fruchtbaren Diskussionen zum Vergleich der Ergebnisse des FINTUREX-Experimentes mit denen der britischen antarktischen Turbulenzexperimente und zur Datenauswertung, insbesondere zur Bestimmung des Bodenwärmestromes, bedanken.

Viele fruchtbare Diskussionen zur Anwendung der Wavelettransformation auf gemessene Zeitserien, zur Turbulenzdatenbearbeitung und zur meteorologischen Interpretation der Ergebnisse wurden mit Herrn Dr. F. Barthelmes vom Geoforschungszentrum Potsdam, Frau Dr. J. Rees von der Universität Sheffield, mit den Kollegen in der Arbeitsgruppe Meteorologie der Sektion Physik des Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung Bremerhaven und mit Herrn M. Quante vom Institut für Physik an der GKSS Geesthacht geführt und haben diese Arbeit vorangebracht. Dafür ein Dankeschön die genannten Kolleginnen und Kollegen.

Besonderen Dank geht an Herrn Prof. Dr. Jürgen Parisi, Leiter der Abteilung Energie und Halbleiterforschung an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, für die Mitbetreuung des letzten Teilprojektes FO 226/2-3. Ihm ist es u. a. zu verdanken, daß für schwierige administrative Probleme einfache Lösungen gefunden wurden.

Ein herzliches Dankeschön sei auch an Herrn Prof. Dr. Joachim Peinke (Bayreuth/Oldenburg) und seine Turbulenzgruppe gerichtet. So konnten wir, durch die zahlreichen Diskussionen während des in freundschaftlicher Atmosphäre abgehaltenen Lehrstuhlseminars, tiefen Einblick in die Natur der Turbulenz gewinnen. Darüber hinaus konnten, dank der Bereitstellung Ihrer Daten vom Erlanger Windkanal, wertvolle Vergleiche mit unseren Daten angestellt werden.

9. Literatur

- Anderson, P. S. (1997):** Estimation of snow surface temperature gradient and heat flux from a surface temperature time series. submitted to J. Atmos. Oceanic. Technol.
- Belitz, H.-J. (1989):** Impuls- und Energietransporte über einem antarktischen Schelfeis. Berichte des Institutes für Meteorologie und Klimatologie der Universität Hannover, **37**, 147 S.
- Bergström, H.; Högström, U. (1989):** Turbulent exchange above a pine forest. II. Organized structures. Bound.-Layer-Meteorol., **49**, 231-263
- Castaing, B.; Gagne, Y.; Hopfinger, B. (1990):** Velocity probability density functions of high Reynolds-number turbulence. Physica D **46**, 177-200
- Collineau, S.; Brunet, Y. (1993):** Detection of turbulent coherent motions in a forest canopy. Part I: Wavelet analysis. Bound.-Layer-Meteorol., **65**, 357-379
- Collineau, S.; Brunet, Y. (1993):** Detection of turbulent coherent motions in a forest canopy. Part II: Time-scales and conditional sampling. Bound.-Layer-Meteorol., **66**, 49-73
- Daubechies, I. (1992):** Ten lectures on wavelets. SIAM Publ., Philadelphia. 357 S.
- Desjardins, R. L. (1977):** Description and evaluation of a sensible heat flux detector. Bound.-Layer-Meteorol., **11**, 147-154
- Farge, M. (1992):** Wavelet transforms and their application to turbulence. Annu. Rev. Fluid Mech., **24**, 395-457
- Finnigan, F. F. (1988):** Kinetic energy transfer between internal gravity waves and turbulence. J. Atmos. Sci., **41**, 2409-2436
- Finnigan, F. F.; Einaudi, F.; Fua, D. (1984):** The interaction between an internal gravity wave and turbulence in stably stratified nocturnal boundary layer. J. Atmos. Sci., **45**, 486-505
- Foken, Th. (1990):** Turbulenter Energieaustausch zwischen Atmosphäre und Unterlage-Meßmethoden, meßtechnische Realisierung sowie ihre Grenzen und Anwendungsmöglichkeiten. Berichte des Deutschen Wetterdienstes. **180**, 287 S.
- Foken, Th. (1996):** Turbulenzexperiment zur Untersuchung stabiler Schichtungen. Berichte zur Polarforschung, **188**, 74-78
- Foken, Th.; Baum, W. (1994):** FINTUREX, Neumayer-Station Antarktis, 11. 1. bis 3. 3.1994. Technische Dokumentation. Deutscher Wetterdienst, Meteorol. Observatorium Potsdam, Dezernat Turbulenz und Grenzschicht, 45 S.
- Frisch, U. (1995):** Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- Gamage, N.; Hagelberg, C. (1993):** Detection and analysis of microfronts and associated coherent events using localized transforms. J. Atmos. Sci., **50**, 750-756
- Handorf, D. (1996):** Zur Parametrisierung der stabilen atmosphärischen Grenzschicht über einem antarktischen Schelfeis. Berichte zur Polarforschung, **204**, 133 S.
- Handorf, D., Foken, Th. (1997a):** Analysis of turbulent structure over an Antarctic ice shelf by means of the wavelet transformation. Proceedings 12th Symposium on Boundary Layer and Turbulence, 28 July - 1 August 1997, Vancouver, BC, Canada, AMS, Boston, 245-246, beiliegend
- Handorf, D., Foken, Th. (1997b):** Strukturanalyse der atmosphärischen Turbulenz mittels Wavelet-Verfahren zur Bestimmung von Austauschprozessen über dem antarktischen Schelfeis. Deutscher Wetterdienst, Geschäftsbereich Forschung und Entwicklung, Arbeitsergebnisse (1997), Nr. 47, 49 S.
- Heinz, G., Handorf, D., Foken, Th. (1999):** Direct visualization of the energy transfer from coherent structures to turbulence via wavelet analysis. Proceedings 13th Symposium on

- Boundary Layer and Turbulence, 10 - 15 Jan. 1999, Dallas, TX, AMS, Boston, 664-665
- Holschneider, M. (1995):** Wavelets, An Analysis Tool (Oxford, New York, 1995)
- Hudgins, L. H.; Mayer, M. E.; Friehe, C. A. (1993):** Fourier and wavelet analysis of atmospheric turbulence. In: Meyer, Y.; Roques, S. (eds.): Progress in wavelet analysis and applications. Editions Frontiers, 491-498
- Kharkevich, A. A. (1960):** Spectra and analysis. Consultants Bureau
- König, G. (1985):** Roughness length of an antarctic ice shelf. Polarforschung, **55**, 27-32
- Kolmogorov, A. N. (1941):** The local structure of turbulence in an incompressible fluid for very large Reynolds numbers. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **4**, 299-303
- Kolmogorov, A. N. (1961):** A Refinement of Previous Hypotheses Concerning the Local Structure of Turbulence in a Viscous Incompressible Fluid at High Reynolds Number, Colloque International du C.N.R.S. de Mécanique de la Turbulence (1961)
- Kumar, P.; Foufoula-Georgiou, E. (1994):** Wavelet analysis in geophysics: An introduction. In: Foufoula-Georgiou, E.; Kumar, P. (eds.): Wavelets in geophysics. Academic Press, 1-43
- Louis, K.; Maaß, P.; Rieder, A. (1994):** Wavelets. Theorie und Anwendungen. Teubner-Studienbücher: Mathematik, Stuttgart. 315 S.
- Mahrt, L.; Howell, J. F. (1994):** The influence of coherent structures and microfronts on scaling laws using global and local transforms. J. Fluid Mech., **260**, 247-270
- Meneveau, C. (1991):** Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. J. Fluid Mech., **232**, 469-520
- Rasmussen, H. O. (1993):** The wavelet Gibbs phenomenon. In: Farge, M.; Hunt, J. C. R.; Vassilicos, J. C. (eds.): Wavelets, Fractals and Fourier Transforms. Clarendon Press, Oxford. 123-142
- Renner, C. (1997):** Über statistische Untersuchungen der Geschwindigkeitsfluktuationen in einem turbulenten Freistrahle, Diplomarbeit am Lehrstuhl für Experimentalphysik II der Universität Bayreuth (Juli 1997).
- Richardson, L. F. (1922):** Weather Prediction by Numerical Process, Cambridge University Press.

Anhang

A. Mathematische Grundlagen der Wavelettransformation

Die Wavelet-Transformation ist wie die Fouriertransformation eine Integraltransformation und wird mit dem gleichen Ziel, der Extraktion relevanter Informationen aus einer Zeitreihe, angewendet. Bei der Fouriertransformation (im folgenden auch mit FT bezeichnet) wird eine Zeitreihe $f(t)$ in trigonometrische Funktionen zerlegt:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{A.1})$$

Mit der Umkehrtransformation

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{A.2})$$

Die Fouriertransformierte von $f(t)$ enthält die Information über die in der Zeitreihe auftretenden Frequenzen ω , aber keine Informationen über die Lokalisierung der Frequenzen in der Zeit. Diese Transformation ist somit eine globale Transformation. Eine Konsequenz daraus ist, daß abrupte Änderungen in der Zeitreihe das gesamte Energiespektrum $|\hat{f}(\omega)|^2$ beeinflussen.

Aufgrund des Parseval'schen Theorems folgt für die totale Energie der Funktion $f(t)$ im Fourierraum der Ausdruck:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{A.3})$$

$S_f(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2$ ist die spektrale Energiedichte der Funktion $f(t)$ und wird auch als das Energiespektrum bezeichnet.

Da die FT nur zur Untersuchung stationärer Zeitreihen anwendbar ist, müssen zum Studium von Prozessen mit zeitlich veränderlichen Frequenzen lokale Integraltransformationen angewendet werden, mit denen der Frequenzgehalt des Prozesses zeitlich gut lokalisiert bestimmt werden kann. Beispiele für instationäre Prozesse, die in der häufig stabil geschichteten antarktischen Grenzschicht auftreten, sind intermittierende Turbulenz und die Koexistenz von turbulenten Wirbeln und Schwerewellen. Ein Beispiel aus anderen Klimazonen ist das Auftreten kohärenter Strukturen in und oberhalb von Waldbeständen. Um eine Zeit-Frequenz-Analyse zu ermöglichen, wurden zwei Methoden entwickelt:

1. die gefensterterte Fouriertransformation (engl.: windowed FT, im folgenden mit WFT bezeichnet) und
2. die Wavelet-Transformation (im folgenden mit WT bezeichnet).

Die gefensterterte Fouriertransformation liefert an jedem Punkt des Zeit-Frequenz-Raumes Informationen über $f(t)$, die mit der gleichen Unsicherheit im gesamten Zeit-Frequenz-Raum lokalisiert sind. Für die WFT ergeben sich somit zwei Beschränkungen. Zum einen können kurzzeitige Ereignisse mit einer Andauer kleiner als die Unsicherheit im Zeitbereich nicht genau detektiert werden, zum anderen kann kein optimales Fenster gefunden werden, falls die Zeitreihe charakteristische Ereignisse auf verschiedenen Skalen enthält. Die nachfolgend eingeführte Wavelet-Transformation überwindet diese Einschränkungen der WFT.

A.1. Die Definition der Wavelet-Transformation

Um die oben dargelegten Beschränkungen der gefensterterten Fouriertransformation zu überwinden und unter Berücksichtigung der Tatsache, daß hohe Frequenzen mit kurzen Wellenlängen korrespondieren (und umgekehrt), ist es sinnvoll, eine analysierende Funktion $\Psi(t)$ einzuführen, deren Unsicherheit im Zeitbereich für hohe Frequenzen klein ist und umgekehrt bei kleinen Frequenzen hoch ist. Dies wird durch die Zerlegung der Zeitserie $f(t)$ mit einer zweiparametrischen Familie von Funktionen, den sogenannten Wavelets, erreicht. Ein Parameter ist der Translationsparameter b , der andere ist ein Dilatationsparameter a , der anstelle des Frequenzparameters ω betrachtet wird.

Mathematisch ist die Wavelet-Transformation $T_p(a,b)$ einer Funktion $f(t)$ (mit begrenzter Energie) als Faltung von $f(t)$ mit einer Familie von Wavelet-Funktionen $\Psi_{p,a,b}(t)$ definiert:

$$T_p(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi_{p,a,b}(t)} dt = \frac{1}{a^p} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (\text{A.4})$$

$T_p(a,b)$ werden auch als Wavelet-Koeffizienten bezeichnet. Anschaulich wird bei der WT der Grad der Übereinstimmung zwischen der Zeitreihe $f(t)$ und einem Wavelet $\Psi_{p,a,b}(t)$ an jedem Zeitpunkt b und für jede Skala a bestimmt. Die Überstreichung in Gleichung (A.4) kennzeichnet das konjugiert Komplexe.

Die Familie der Wavelet-Funktionen sind reell- oder komplexwertige Funktionen, die außer in einem Zeitfenster überall Null sind (zumindest im asymptotischen Sinne) und deren Mittelwerte verschwinden. Damit erklärt sich die Bezeichnung Wavelets (Wellchen), da Wavelets aus einigen kurzen Schwingungen bestehen und auf diese Weise gut im Zeitbereich lokalisiert sind. Die Wavelet-Familie ist gegeben durch:

$$\Psi_{p,a,b}(t) = \frac{1}{a^p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (\text{A.5})$$

Änderungen des Dilatationsparameters a bewirken für $a > 1$ eine Verbreiterung und für $a < 1$ ein Zusammenziehen des sogenannten Mutterwavelets $\Psi(t) = \Psi_{p,1,0}(t)$ (s. Abbildung 43). Änderun-

gen des Translationsparameters b entsprechen einer zeitlichen Verschiebung der Funktion $\Psi(t)$.

Mathematisch exakt ist ein Mutter-Wavelet als eine reell- oder komplexwertige Funktion Ψ einer reellen Variablen definiert, für die die folgenden Integrale konvergieren:

$$E_G = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(t)|^2 dt \quad (\text{A.6})$$

$$C_G = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega. \quad (\text{A.7})$$

Die Bedingung (A.6) bedeutet, daß die Energie von $\Psi(t)$ begrenzt ist. Die Bedingung (A.7) wird als Zulässigkeitsbedingung bezeichnet.

Im folgenden werden die Gleichungen für drei häufig verwendete Wavelets angegeben.

(1) Das Haar-Wavelet

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= -1, & -0.5 \leq t < 0 \\ \Psi(t) &= 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ \Psi(t) &= 0 & \text{sonst} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

(2) Das Mexikanischer-Hut-Wavelet

$$\Psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} (1-t^2) e^{-t^2/2} \quad (\text{A.9})$$

(3) Das Morlet-Wavelet

$$\Psi(t) = \pi^{-1/4} e^{-i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \quad (\text{A.10})$$

Zur Illustration der Lokalisierungseigenschaften der oben definierten Wavelets sind diese in der Abbildung 43 im Zeit- und im Frequenzraum dargestellt. Das Haar-Wavelet ist sehr gut in der Zeit lokalisiert, weist aber aufgrund der Nebenmaxima der zugehörigen FT eine schlechte Lokalisierung im Frequenzraum auf. Im Gegensatz dazu sind das komplexe Morlet- und das Mexikanischer-Hut-Wavelet sehr gut im Frequenzraum lokalisiert, da die zugehörigen Fouriertransformierten nur ein ausgeprägtes Maximum aufweisen bei entsprechend schlechterer Lokalisierung im Zeitbereich.⁹

Für den Normierungsfaktor $1/a^p$, der in den Gleichungen (A.4) und (A.5) auftritt, werden meistens die Werte $p = 1$ oder $p = 1/2$ verwendet (Gamage und Hagelberg, 1993). Für $p = 1/2$ ist

⁹ Dies ist Ausdruck für die Tatsache, daß aufgrund der Unschärferelation eine beliebig gute Lokalisierung sowohl im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich nicht möglich ist.

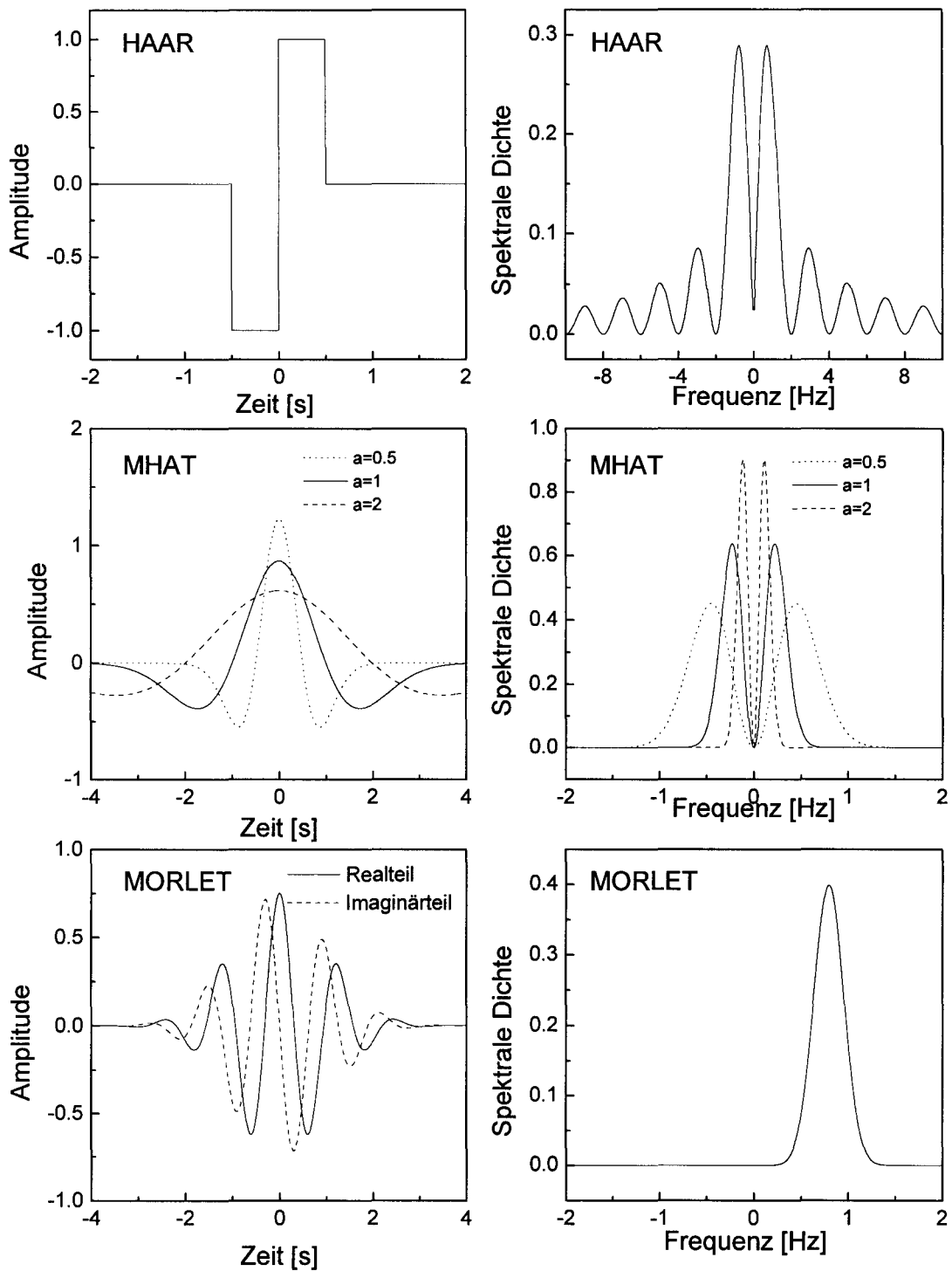


Abbildung 43: Darstellung des Haar- (oben), Mexikanischen-Hut- (Mitte) und Morlet-Wavelets mit $\omega_0 = 5$ (unten) jeweils im Zeit- (links) und Frequenzraum (rechts).

die durch Gleichung (A.4) definierte Wavelettransformation eine Isometrie, d.h. eine normerhaltende Transformation in L^2 .¹⁰

Für $p = 1$ ist die entsprechende Transformation nicht normerhaltend in L^2 . Sie liefert jedoch ein gutes Verständnis der WT, da die Transformation zumindest für bestimmte Wavelets (z.B. Haar-Wavelet) gleich der Kovarianz zwischen dem Wavelet und dem Eingangssignal ist (Gamage und Hagelberg, 1993). Dementsprechend wird für $p = 1$ die Transformation (A.4) auch als Kovarianz-Transformation bezeichnet.

Die Zulässigkeitsbedingung (A.7) impliziert, daß das Mittel von $\Psi(t)$ verschwindet, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0. \tag{A.11}$$

Es ist möglich, daß auch Momente höherer Ordnung von Ψ verschwinden, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \Psi(t) dt = 0 \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \tag{A.12}$$

In diesem Fall heißt das Wavelet von der Ordnung N und ist als N -te Ableitung einer Funktion mit nichtverschwindendem Mittelwert darstellbar. Die Ordnung des Wavelets bestimmt das Verhalten der Wavelet-Koeffizienten für betragsmäßig kleine Frequenzparameter ($a \rightarrow 0$), da sich die WT für $a \rightarrow 0$ asymptotisch wie die N -te Ableitung der Funktion $f(t)$ verhält. Des weiteren kann mit Wavelets der Ordnung N das Verhalten der N -ten Ableitung von $f(t)$ untersucht werden, da die WT dann nicht auf Variationen niederer Ordnung von $f(t)$ reagiert.

Aufgrund der an das Wavelet gestellten Zulässigkeitsbedingung (A.7) ist die WT invertierbar mit:

$$f(t) = \frac{1}{C_G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T_p(a, b) \frac{1}{a^p} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^{3-2p}} \tag{A.13}$$

Zur Bestimmung der Unsicherheiten, mit denen aus der WT Informationen im Zeit- und Frequenzraum extrahiert werden können, werden die Eigenschaften von $|\Psi_{p,a,b}(t)|^2$ und $|\hat{\Psi}_{p,a,b}(\omega)|^2$ betrachtet. Für viele gebräuchliche Wavelets ist $\hat{\Psi}$ eine gerade Funktion und besitzt zudem oft jeweils genau ein ausgeprägtes Maximum für positive bzw. negative Frequenzen. Ψ ist ein Bandpaßfilter, dessen Zentrum für positive Frequenzen als Massenschwerpunkt der FT von $\Psi_{p,a,b}$ für $\omega > 0$ bestimmt wird:

¹⁰ $L^2(\mathbf{R})$ bezeichne den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen über \mathbf{R} .

$$\omega_{\hat{\Psi}_{p,a,b}}^{0+} = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\hat{\Psi}_{p,a,b}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\Psi}_{p,a,b}(\omega)|^2 d\omega} \quad (\text{A.14})$$

Analog ist die Lokalisierung im Zeitraum gegeben durch:

$$t_{\Psi_{p,a,b}}^0 = \frac{\int_0^{\infty} t |\Psi_{p,a,b}(t)|^2 dt}{\int_0^{\infty} |\Psi_{p,a,b}(t)|^2 dt}. \quad (\text{A.15})$$

Die zugehörigen Standardabweichungen kennzeichnen die Unsicherheit in der Lokalisierung und sind definiert durch:

$$\sigma_{\Psi_{p,a,b}} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (t-b)^2 |\Psi_{p,a,b}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (\text{A.16})$$

$$\sigma_{\hat{\Psi}_{p,a,b}} = \left(\int_0^{\infty} (\omega - \omega_{\hat{\Psi}_{p,a,b}}^0)^2 |\hat{\Psi}_{p,a,b}(\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \quad (\text{A.17})$$

Aus den Gleichungen (A.14) bis (A.17) folgen die Beziehungen:

$$\sigma_{\Psi_{p,a,b}} = a \sigma_{\Psi_{p,1,0}} \quad (\text{A.18})$$

$$\sigma_{\hat{\Psi}_{p,a,b}} = \frac{\sigma_{\hat{\Psi}_{p,1,0}}}{a} \quad (\text{A.19})$$

$$\omega_{\hat{\Psi}_{p,a,b}}^0 = \frac{\omega_{\hat{\Psi}_{p,1,0}}}{a} \quad (\text{A.20})$$

Die Gleichung (A.20) liefert eine Vorschrift zur Umrechnung charakteristischer Skalen in physikalische Frequenzen, wenn die FT des Mutterwavelets $\hat{\Psi}_{p,1,0}$ bekannt ist. Des weiteren folgt aus den Gleichungen (A.16) bis (A.20), daß für zunehmende Werte von a sich das Zentrum des Bandpasses zu niedrigen Frequenzen verschiebt und sich die Unschärfe im Frequenzraum verkleinert. Im Phasenraum ist der Lokalisierungsbereich der WT um den Lokalisierungsort ($b, \omega_{\hat{\Psi}_{p,a,b}}^0$) gegeben durch:

$$\left[b \pm a \sigma_{\psi_{p,1,0}} \times \frac{\omega_{\psi_{p,1,0}}}{a} \pm \frac{\sigma_{\psi_{p,1,0}}}{a} \right]. \quad (\text{A.21})$$

Aufgrund der Unschärferelation kann eine Erhöhung der Auflösung im Zeitbereich für die zeitliche Lokalisierung bei hohen Frequenzen nur auf Kosten einer erhöhten Unschärfe $\sigma_{\psi_{p,a,b}}$ in der Frequenzlokalisierung erzielt werden.

A.2. Wavelets und Zeit-Skalen-Analyse

Die totale Energie der Funktion $f(t)$ berechnet sich durch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^{3-2p}} \int_{-\infty}^{\infty} |T_p(a,b)|^2 db = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{E(a)}{a^{3-2p}} da \quad (\text{A.22})$$

Somit gibt $|T_p(a,b)|^2 \Delta a \Delta b / (C_G a^{3-2p})$ die Energie auf dem Skalenintervall Δa und dem Zeitintervall Δb um den Punkt (a,b) an. Der in Gleichung (A.25) eingeführte Ausdruck

$$E(a) = \int_{-\infty}^{\infty} |T(a,b)|^2 db \quad (\text{A.23})$$

gibt den Energiegehalt einer Funktion $f(t)$ auf der Skala a an, d.h. $E(a)$ ist eine Energiedichtefunktion und wird in Analogie zur FT auch als Waveletvarianz bezeichnet.

Der Zusammenhang zwischen dem Fourier- und dem Waveletspektrum ist durch

$$E(a) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) S_{\psi_a}(\omega) d\omega \quad (\text{A.24})$$

gegeben, d.h. $E(a)$ ist das mit dem Fourierspektrum $S_{\psi_a}(\omega)$ gewichtete Mittel des Fourierspektrums $S_f(\omega)$ von $f(t)$. Weiterhin läßt sich zeigen: Wenn für das Energiespektrum $S_f(\omega)$ ein Potenzgesetz $S_f(\omega) \propto \omega^p$ gilt, so gilt für die Waveletvarianz $E(a) \propto a^p$.

Für die Untersuchung von zwei Zeitserien $f(t)$ und $g(t)$ können wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{da}{a^{3-2p}} \int_{-\infty}^{\infty} T_{f,p}(a,b) \overline{T_{g,p}(a,b)} db = \frac{1}{C_G} \int_0^{\infty} \frac{E_{f,g}(a)}{a^{3-2p}} da \quad (\text{A.25})$$

ein Kreuz-Skalogramm (Kreuzspektrum) $T_{f,p}(a,b) \overline{T_{g,p}(a,b)}$ und analog zur Waveletvarianz die Waveletkovarianz $E_{f,g}$ eingeführt werden. Dabei bezeichne $T_{f,p}(a,b)$ die WT der Funktion $f(t)$ und $T_{g,p}(a,b)$ die WT der Funktion $g(t)$. Wird für die Berechnung des Kreuz-Skalogramms ein komplexes Wavelet, z.B. das Morlet-Wavelet, verwendet, so können in Analogie zur FT der Real- und der negative Imaginärteil als Wavelet-Kospektrum und Wavelet-Quadraturspektrum

bezeichnet werden (s. z.B. Hudgins et al., 1993). Die Integration des Wavelet-Kospektrums, normiert mit a^{3-2p} , über alle Skalen liefert die Kovarianz der beiden Zeitserien $f(t)$ und $g(t)$. Ebenso können das Wavelet-Amplitudenspektrum als Betrag des Kreuzskalogramms und das Wavelet-Phasenspektrum aus dem Verhältnis von Quadratur- und Kospektrum berechnet werden.

A.3. Wichtigste Parameter der verwendeten Wavelets

Da viele der relevanten Größen am leichtesten im Fourierraum zu berechnen sind, werden im folgenden zunächst die Fouriertransformationen (FT) der einzelnen Wavelets angegeben. Die Herleitung sei dem Leser überlassen. Die Wavelets werden mit den Kürzeln HAAR für das Haar-Wavelet, MHAT für das Mexikanische-Hut-Wavelet und MORL für das Morlet-Wavelet beschrieben.

Allgemein gilt folgende Relation zwischen der (FT) der Wavelets und der FT seines Mutterwavelets:

$$\hat{\Psi}_{p,a,b}(\omega) = a^{1-p} e^{-i\omega b} \hat{\Psi}(a \cdot \omega) \quad (\text{A.26})$$

Für die FT der Mutterwavelets gilt:

$$\text{HAAR:} \quad \hat{\Psi}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{\omega} \left(1 - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \quad (\text{A.27})$$

$$\text{MHAT:} \quad \hat{\Psi}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{\pi}} \omega^2 e^{-\omega^2/2} \quad (\text{A.28})$$

$$\text{MORL:} \quad \hat{\Psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2} \text{ mit } \omega_0 = 5. \quad (\text{A.29})$$

Wie bereits in Abschnitt 2.1 erwähnt, besteht zwischen der Kreisfrequenz ω und der Skala a ein Zusammenhang der Art

$$\omega = \frac{\omega_{p,1,0}^0}{a} \quad (\text{A.30})$$

Es wurde bereits erwähnt, daß $\omega_{p,1,0}^0$ (im folgenden unabhängig von p als ω^0 bezeichnet) beim Maximum der FT des Mutterwavelets zu finden ist. Dies stimmt jedoch nur für die Normierung $p = 1$. Zur Bestimmung von ω^0 für $p = 1/2$ wird am einfachsten die WT einer Sinusfunktion im Fourierraum betrachtet. Da die Faltung zweier Funktionen im Ortsraum dem Integral über das Produkt der beiden Fouriertransformierten im Fourierraum entspricht (Faltungs-Theorem), wird

die Berechnung besonders einfach, da die FT einer Sinusfunktion einer Dirac'sche Delta-Funktion entspricht. Aufgrund der uneinheitlichen Angaben in der Literatur werden die so berechneten Werte für ω^0 für die beiden p -Werte und weitere wichtige Größen in der Tabelle III nochmals zusammengefaßt.

Tabelle III: Wichtige Parameter der Wavelettransformation für die verschiedenen Wavelets unter Berücksichtigung der Normierungsabhängigkeit von ω^0 .

Wavelet	Träger	C_G Vgl. (A.7)	ω^0	
			$p = \frac{1}{2}$	$p = 1$
HAAR	-0.5 bis 0.5	$\ln(2) = 0.6931$	$1.7731 \cdot \pi$	$1.4846 \cdot \pi$
MHAT	-5 bis 5	$4\sqrt{\pi}/3$	$\sqrt{3-p} = \sqrt{2.5}$	$\sqrt{3-p} = \sqrt{2}$
MORL	-2π bis 2π	$1/\pi$	$\omega_0 \cdot 1.0916$	ω_0

Nr	Name	Titel	Datum
01	Foken	Der Bayreuther Turbulenzknecht	01/99
02	Foken	Methode zur Bestimmung der trockenen Deposition von Bor	02/99
03	Liu	Error analysis of the modified Bowen ratio method	02/99
04	Foken et al.	Nachtfrostgefährdung des ÖBG	03/99
05	Hierteis	Dokumentation des Experimentes Dlouha Louka	03/99
06	Mangold	Dokumentation des Experiments am Standort Weidenbrunnen, Juli/August 1998	07/99
07	Heinz, Handorf, Foken	Strukturanalyse der atmosphärischen Turbulenz mittels Wavelet-Verfahren zur Bestimmung von Austauschprozessen über dem antarktischen Schelfeis	07/99
08	Foken, Mangold	Dokumentation des Experimentes LITFASS-1998	xx/99
10	Foken et al.	Dokumentation des Experimentes VOITEX-99	xx/99